



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Andrey Mangini Silva

Uma Abordagem Vetorial para o Estudo da Geometria Analítica no Ensino Médio

Florianópolis

2024

Andrey Mangini Silva

Uma Abordagem Vetorial para o Estudo da Geometria Analítica no Ensino Médio

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Daniel Gonçalves, Dr.

Florianópolis

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Mangini Silva, Andrey

Uma Abordagem Vetorial para o Estudo da Geometria
Analítica no Ensino Médio / Andrey Mangini Silva ;
orientador, Daniel Gonçalves, 2024.

54 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Geometria Analítica. 3. Vetores. 4.
Relações de equivalência. I. Gonçalves, Daniel. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT. III. Título.

Andrey Mangini Silva

**Uma Abordagem Vetorial para o Estudo da
Geometria Analítica no Ensino Médio**

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Felipe Lopes Castro, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Raphael Falcão da Hora, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Danilo Royer, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina.

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão, considerado adequado para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Com área de concentração em Ensino de Matemática.

Prof.^a Maria Inez Cardoso Gonçalves, Dr.^a.
Coordenadora do Programa

Prof. Daniel Gonçalves, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2024.

Este trabalho é dedicado a todos que contribuíram diretamente ou indiretamente para a conclusão deste projeto.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me proporcionado esta oportunidade e que me deu esteio para trilhar esse caminho complexo. Houveram muitas aulas, avaliações, dias exaustivos, mas que foram recompensadores.

Aos meus pais, Maria Catarina Mangini Silva e Luiz Silva, que sempre motivaram, investiram e propiciaram todas as condições para que os filhos estudassem e também nos mostraram que o aprendizado e o conhecimento são permanentes não podendo ser subtraídos.

A minha amada esposa e filhos, expresso minha sincera gratidão e amor pela total compreensão para que pudesse finalizar mais esta etapa, ainda que isto tenha significado muitos dias ausente.

Ao meu orientador, Dr. Daniel Gonçalves, por sua paciência, tempo, organização, orientação diligente, apoio incansável e valiosas sugestões ao longo deste processo. Seu profundo conhecimento e incentivo foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

A toda equipe de professores da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, vinculada ao programa do mestrado profissional - PROFMAT, que nos deram subsídios para o aprendizado e não mediram esforços para dirimir todas as nossas dúvidas o que se tornou fundamental para superar os desafios e concluir o mestrado.

Por fim gostaria de agradecer aos meus amigos e colegas de curso, pelo companheirismo, apoio, troca de ideias e momentos de descontração que tornaram essa jornada mais leve e enriquecedora.

Este projeto jamais seria possível sem o apoio e contribuições de todos vocês. Muito obrigado.

“A persistência é o caminho do êxito.”
Charles Chaplin

Resumo

Este trabalho tem como objetivo oferecer uma experiência pedagógica dentro das normas da BNCC - Base Nacional Comum Curricular, utilizando análise vetorial para uma abordagem didática no ensino da Geometria Analítica para o Ensino Médio. Iniciamos explorando conceitos, propriedades e operações envolvendo conjuntos. Compreender essas operações é crucial para estabelecer uma relação posterior na análise vetorial e geométrica. As atividades foram propostas abordando a interseção entre vetores e a geometria analítica, tendo como base o plano cartesiano e são delineadas através de figuras e gráficos. Além disso, são apresentadas considerações abrangentes sobre a resolução de questões.

Palavras-chave: Relações de Equivalência. Vetores. Geometria Analítica.

Abstract

This work aims to provide a pedagogical experience within the guidelines of the Base Nacional Comum Curricular (National Common Core Curriculum) - BNCC, using vector analysis for a didactic approach in teaching Analytical Geometry for High School. We begin by exploring concepts, properties, and operations involving sets; understanding these operations is crucial to establish a subsequent relationship in vector and geometric analysis. The activities are proposed addressing the intersection between vectors and analytical geometry, based on the Cartesian plane and are delineated through figures and graphs. Additionally, comprehensive considerations on problem-solving are presented.

Keywords: Equivalence relations. Vectors. Analytical Geometry.

Lista de ilustrações

Figura 1 – $E \times F = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$.	16
Figura 2 – $R = \{(x, y) \in E \times F : y = 2x\}$.	17
Figura 3 – $E \times F$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $F = \{3, 4, 5, 6\}$.	18
Figura 4 – $R = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$.	19
Figura 5 – R e R^{-1} no gráfico.	20
Figura 6 – R e R^{-1} em diagramas.	21
Figura 7 – R sobre E .	21
Figura 8 – Relação de equivalência R sobre E .	23
Figura 9 – Segmento $\overline{AB}$.	25
Figura 10 – Segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.	25
Figura 11 – Segmentos que representam o vetor $\vec{v}$.	26
Figura 12 – Vetor $\overrightarrow{OB}$.	26
Figura 13 – Representação gráfica do vetor $\vec{v}$.	27
Figura 14 – Representações de vetor $\vec{v}$.	27
Figura 15 – $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{S}$.	28
Figura 16 – $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{D}_1$ e $\vec{D}_2$.	29
Figura 17 – $\vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$.	29
Figura 18 – Norma de $\vec{u}$.	30
Figura 19 – Ângulo entre dois vetores.	32
Figura 20 – Ponto médio de $\overline{AB}$.	33
Figura 21 – Condição de alinhamento entre três pontos.	34
Figura 22 – Equação geral da reta.	36
Figura 23 – Equação vetorial da reta.	38
Figura 24 – Equações paramétricas da reta.	40
Figura 25 – Vetor normal à reta.	40
Figura 26 – Retas paralelas.	41
Figura 27 – Retas perpendiculares.	42
Figura 28 – Ângulo entre duas retas.	43
Figura 29 – Distância de um ponto até uma reta.	44
Figura 30 – Exercício 13.	48
Figura 31 – Exercício 14.	49
Figura 32 – Exercício 16(f).	51

Lista de tabelas

Tabela 1 – Gabarito da lista de exercícios do vestibular da UFSC	53
--	----

Sumário

Introdução	14
O Surgimento da Geometria Analítica	14
O Ensino da Geometria Analítica Utilizando Vetores	14
Objetivos	15
<i>Objetivo Geral</i>	15
<i>Objetivos Específicos</i>	15
1 Conceitos preliminares	16
1.1 Produto cartesiano	16
1.2 Relações binárias	17
1.3 Domínio e Imagem	18
1.4 Esquemas de flechas	19
1.5 Inversa de uma relação	19
1.6 Relação sobre um conjunto e suas propriedades	21
1.7 Relações de equivalência	23
1.8 Classe de equivalência	24
1.9 Conjunto quociente	24
2 Vetores	25
2.1 Segmento Orientado	25
2.2 Representação do vetor no plano	27
2.3 Operações com vetores	28
2.3.1 Adição	28
2.3.2 Subtração	29
2.4 Norma ou módulo de um vetor	29
2.5 Vetor unitário	30
2.6 Vetor nulo	31
2.7 Versor	31
2.8 Produto Escalar ou Produto Interno	31
2.9 Ângulo formado entre dois vetores	32
3 Geometria analítica usando vetores	33
3.1 Ponto médio de um segmento	33
3.2 Distância entre dois pontos	34
3.3 Condição de alinhamento entre três pontos	34
3.4 Equação geral da reta	36

3.5	Equação reduzida da reta	37
3.6	Pertinência de um ponto a uma reta	37
3.7	Equação vetorial da reta	38
3.8	Equações paramétricas da reta	39
3.9	Vetor normal à reta	40
3.10	Retas paralelas	41
3.11	Retas perpendiculares	42
3.12	Ângulo entre duas retas	43
3.13	Distância de um ponto até uma reta	44
4	Lista de exercícios do vestibular da UFSC	46
5	Conclusão	52
A	Apêndice	53
A.1	Gabarito	53
	Bibliografia	54

Introdução

O Surgimento da Geometria Analítica

A geometria analítica surgiu muito tempo depois da geometria em si. Enquanto os primeiros elementos da geometria surgiram com as primeiras civilizações da humanidade, a geometria analítica teve seus estudos iniciais datados no século XVII pelos franceses Pierre de Fermat e René Descartes.

No entanto, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz também se concentraram nos estudos da geometria analítica, que contribuíram para o surgimento de um outro campo de estudo da matemática, o Cálculo Diferencial e Integral, que faz parte do ensino superior. Neste trabalho você poderá explorar esta disciplina, descobrindo as utilidades de estudar elementos como pontos e retas.

O Ensino da Geometria Analítica Utilizando Vetores

Esta tese de mestrado tem como objetivo explorar o papel dos vetores na geometria analítica e destacar sua importância na análise como solução de problemas geométricos. Ao longo das próximas páginas, examinaremos como os vetores se tornaram uma ferramenta essencial para a representação de objetos geométricos, o estabelecimento de equações e a compreensão de transformações e relações geométricas.

Os vetores, que descrevem magnitude e direção, possibilitam uma abordagem unificada e intuitiva para lidar com uma miríade de problemas geométricos. Eles não apenas simplificam a descrição de pontos e direções, mas também permitem calcular e determinar distâncias, ângulos, retas e muito mais. A geometria analítica com vetores se estende desde o plano cartesiano bidimensional até o espaço tridimensional e além, abrindo portas para a exploração de geometrias mais abstratas e multidimensionais.

À medida que avançamos nesta pesquisa, examinaremos a aplicação de vetores associado a geometria analítica voltado para o ensino de educação básica, como distância entre dois pontos no plano cartesiano, cálculo de áreas, determinação de equações de retas e suas particularidades.

Ao longo deste trabalho foram inseridos diversos exemplos com itens de questões de somatória do vestibular da UFSC, onde são feitas afirmações que devem ser julgadas como verdadeiras ou falsas.

Em última análise, esta dissertação busca demonstrar como a adoção da perspectiva

vetorial enriquece e aprimora a geometria analítica, tornando-a uma ferramenta poderosa e versátil para a resolução de problemas geométricos em um contexto mais amplo. A compreensão aprofundada desses conceitos é essencial não apenas para os matemáticos, mas também para cientistas e engenheiros que buscam aplicar princípios geométricos em suas respectivas disciplinas. Ao fazê-lo, esperamos contribuir para a expansão do conhecimento na área da geometria analítica e inspirar futuras investigações e aplicações práticas desse campo fascinante.

Objetivos

Objetivo Geral

Esta dissertação tem como objetivo geral o uso de vetores como uma abordagem poderosa para a descrição e análise de objetos e movimentos no plano. Ela amplia as capacidades da geometria analítica tradicional, permitindo uma compreensão mais profunda e versátil de problemas geométricos por parte de alunos e professores da educação básica.

Objetivos Específicos

Os objetivos específicos a seguir ajudam os estudantes a dominar a geometria analítica com o uso de vetores e a aplicar esse conhecimento em diversas situações-problemas.

- **Representação de pontos e segmentos de reta:** aprender a representar pontos e segmentos de reta no espaço usando coordenadas vetoriais, permitindo calcular distâncias, direções e relações entre eles.
- **Operações vetoriais:** dominar as operações vetoriais, como adição, subtração e multiplicação por escalar, e compreender seu significado geométrico.
- **Produto escalar:** entender o produto escalar para calcular ângulos, projeções e trabalho.
- **Equações paramétricas e vetoriais de retas:** ser capaz de desenvolver equações paramétricas e vetoriais para retas no espaço bidimensional.

1 Conceitos preliminares

Neste capítulo, serão trabalhados conceitos para que possamos embasar o estudo vetorial, pois demonstraremos que um vetor é uma classe de equivalência.

1.1 Produto cartesiano

Definição 1.1. O produto cartesiano de dois conjuntos E e F não vazios, denotado como $E \times F$, é definido como o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) , onde “ x ” pertence a E e “ y ” pertence a F . Em outras palavras, é uma combinação de todos os elementos de E com todos os elementos de F . Assim, temos

$$E \times F \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in E \text{ e } y \in F\}.$$

Exemplo 1.2. Dados dois conjuntos $E = \{1, 2, 3\}$ e $F = \{4, 5\}$, temos

$$E \times F = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

Neste exemplo, o produto cartesiano $E \times F$ é o conjunto de todos os pares ordenados possíveis entre os elementos de E e F . Cada elemento de E foi relacionado com cada elemento de F , resultando em seis pares ordenados no produto cartesiano, como representado no gráfico abaixo.

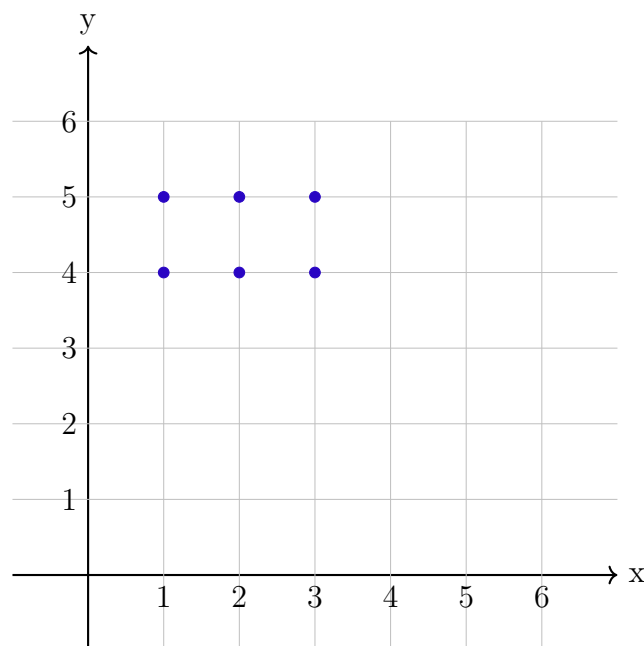


Figura 1 – $E \times F = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$.

1.2 Relações binárias

Definição 1.3. Uma relação binária R entre dois conjuntos E e F é um subconjunto do produto cartesiano $E \times F$, ou seja, é um conjunto de pares ordenados (x, y) onde “ x ” pertence a E e “ y ” pertence a F . Formalmente, uma relação binária R entre E e F é representada como $R \subset E \times F$.

Exemplo 1.4. Dados dois conjuntos $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $F = \{3, 4, 5, 6\}$, vamos definir uma relação binária R entre E e F . Vamos dizer que R é uma relação onde um número em E está relacionado a um número em F se o número em F for o dobro do que o número em E . Ou seja, podemos definir R da seguinte forma:

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in E \times F : y = 2x\} = \{(2, 4), (3, 6)\}.$$

Aqui, cada par ordenado em R representa uma relação entre um número em E e um número em F , onde o número em F é o dobro do número em E .

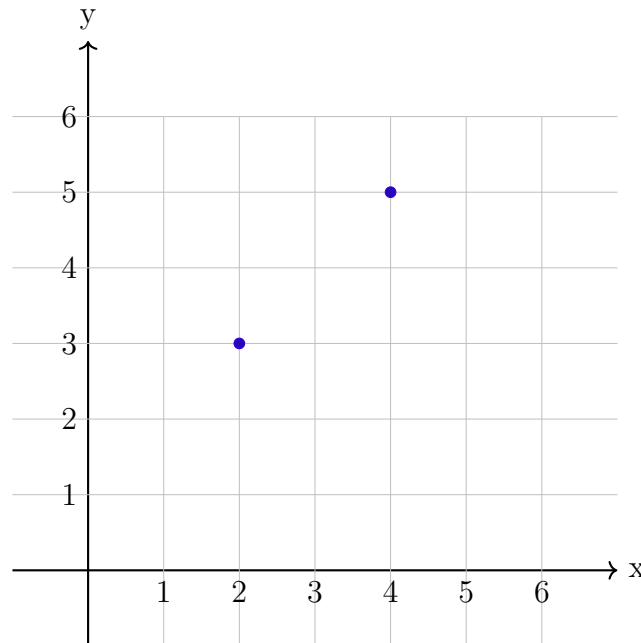


Figura 2 – $R = \{(x, y) \in E \times F : y = 2x\}$.

Agora, vamos calcular o produto cartesiano $E \times F$:

$$E \times F = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\},$$

que graficamente é representado na figura a seguir.

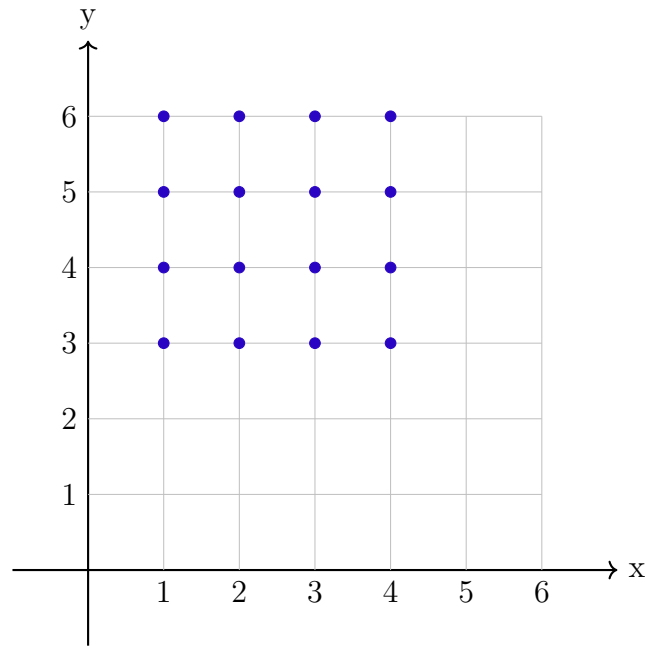


Figura 3 – $E \times F$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $F = \{3, 4, 5, 6\}$.

Este é o produto cartesiano entre os conjuntos E e F . Ele consiste em todos os pares ordenados possíveis entre os elementos de E e os elementos de F . Note que, mesmo que a relação R tenha sido definida apenas para elementos específicos, o produto cartesiano inclui todas as combinações possíveis, sendo que $R \subseteq E \times F$.

1.3 Domínio e Imagem

Definição 1.5. Seja $R \subset E \times F$ uma relação binária. Denomina-se o domínio de R o subconjunto de E formado pelos elementos x para os quais existe algum y em F tal que xRy (x se relaciona com y).

$$D(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E : \exists y \in F \text{ tal que } xRy\}. \quad (1.1)$$

Definição 1.6. Denomina-se a imagem de R o subconjunto de F formado pelos elementos y para cada um dos quais existe algum x em E tal que xRy (x se relaciona com y).

$$Im(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in F : \exists x \in E \text{ tal que } xRy\}. \quad (1.2)$$

Em outras palavras, o domínio $D(R)$ é o conjunto de elementos que “iniciam” a relação R e a imagem $Im(R)$ é o conjunto de elementos que “recebem” a relação.

Exemplo 1.7. Considere a seguinte relação binária R entre os conjuntos E e F

$$E = \{1, 2, 3, 4\} \quad F = \{3, 4, 5, 6\}$$

dada por

$$R = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 5)\} \subset E \times F.$$

O domínio de R , $D(R)$, é $\{1, 2, 3\}$, porque são os elementos x que aparecem como a primeira componente dos pares ordenados em R . A Imagem de R , $Im(R)$, é $\{3, 4, 5\}$, porque são os elementos y que aparecem como a segunda componente dos pares ordenados em R . Portanto, no Exemplo 1.7, o domínio é o conjunto $\{1, 2, 3\}$ e a imagem é o conjunto $\{3, 4, 5\}$. Esses conjuntos representam os elementos relevantes da relação binária R entre E e F .

1.4 Esquemas de flechas

Quando E e F são conjuntos finitos com “poucos elementos”, podemos representar uma relação de E em F da seguinte forma: representamos E e F por meio de diagramas de Venn e indicamos cada par $(x, y) \in R$ por uma flecha com “origem” x e “extremidade” y .

Exemplo 1.8. Considere $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $F = \{5, 6, 7\}$, com a seguinte relação

$$R = \{(x, y) \in E \times F : y = x + 4\} = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\}.$$

O esquema de flechas correspondente será

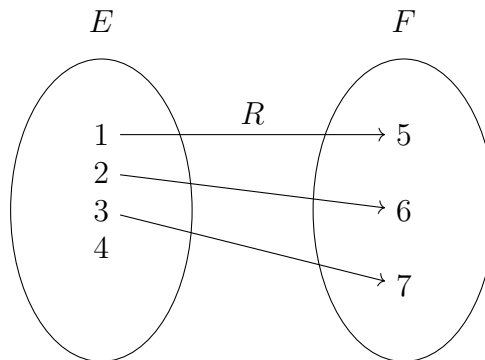


Figura 4 – $R = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$.

1.5 Inversa de uma relação

Definição 1.9. Seja R uma relação de E em F . Chama-se relação inversa de R , e indica-se R^{-1} , a seguinte relação de F em E :

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, x) \in F \times E : (x, y) \in R\}.$$

Exemplo 1.10. Considere $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $F = \{5, 6, 7\}$, com a relação

$$R = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7)\}.$$

Então

$$R^{-1} = \{(5, 1), (6, 1), (7, 1)\}.$$

Exemplo 1.11. Sejam $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ e $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\}$. Então

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.12. Considere $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ e $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$. Sob tais hipóteses

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^3\}. \end{aligned}$$

Observação 1.13. Podemos fazer algumas considerações sobre a representação de R^{-1} .

- (a) Se a relação R admite um gráfico cartesiano então o mesmo ocorre com R^{-1} . Notando-se que $(x, y) \in R$ se, e somente se, $(y, x) \in R^{-1}$, então o gráfico de R^{-1} é simétrico do gráfico de R relativamente à reta de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).
- (b) Dado o diagrama de Euler-Venn de uma relação R , obtemos o diagrama de R^{-1} simplesmente invertendo o sentido das flechas.

Exemplo 1.14. Nas premissas do Exemplo 1.11, temos

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\}. \end{aligned}$$

De fato, usando o item (a) da Observação 1.13

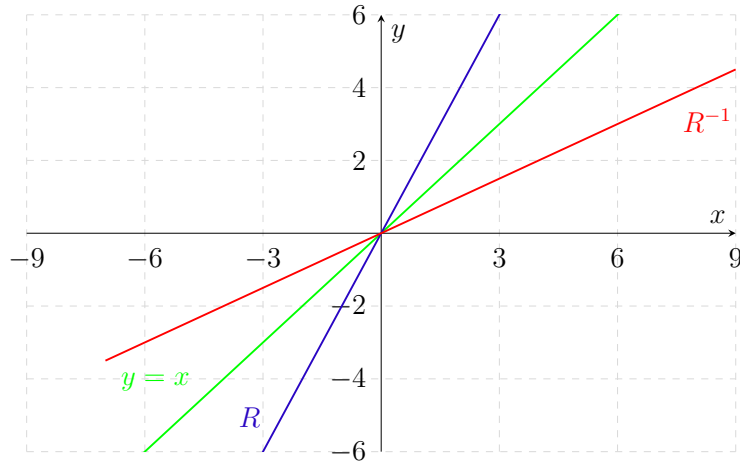


Figura 5 – R e R^{-1} no gráfico.

Exemplo 1.15. Sejam $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{1, 3, 5, 7\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$. Usando o item (b) da Observação 1.13, obtemos

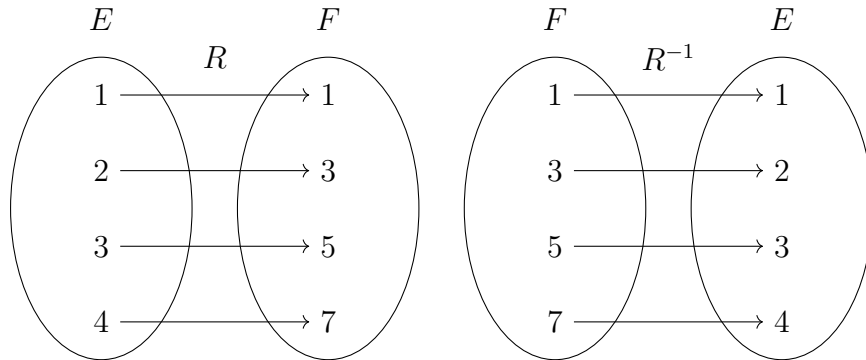


Figura 6 – R e R^{-1} em diagramas.

Em resumo, temos $R^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$.

Observação 1.16. Decorrem diretamente da definição de relação inversa as propriedades seguintes:

- (a) $D(R^{-1}) = Im(R)$;
- (b) $Im(R^{-1}) = D(R)$;
- (c) $(R^{-1})^{-1} = R$.

1.6 Relação sobre um conjunto e suas propriedades

Definição 1.17. Seja E um conjunto. Quando R é uma relação entre E e E , diz-se que R é uma relação sobre E , ou ainda R é uma relação em E .

No estudo das relações sobre E , em que E é um conjunto finito com “poucos” elementos, é muito útil a representação através do esquema de flechas, como no exemplo a seguir:

Exemplo 1.18. O esquema representa a relação $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$.

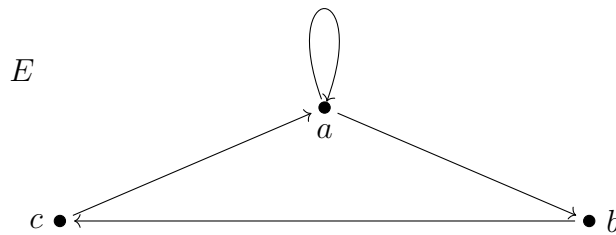


Figura 7 – R sobre E .

A seguir temos as principais propriedades que uma relação R sobre E pode verificar.

Definição 1.19 (Relação reflexiva). Dizemos que R é reflexiva quando todo elemento de E se relaciona consigo mesmo. Ou seja para todo $x \in E$, vale xRx . Se designarmos por ΔE o conjunto de todos os pares (x, x) com $x \in E$, então R é reflexiva quando $\Delta E \subset R$.

Exemplo 1.20. A relação $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$ é reflexiva pois aRa , bRb e cRc .

Exemplo 1.21. Relação R de paralelismo sobre o conjunto E das retas do espaço euclidiano é reflexiva, levando em consideração que retas coincidentes são paralelas.

A relação $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$ não é reflexiva.

Definição 1.22 (Relação simétrica). Dizemos que R é simétrica se vale yRx sempre que vale xRy , ou seja, se xRy , então yRx .

Exemplo 1.23. A relação $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, c)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$ é simétrica sobre E .

Exemplo 1.24. A relação R de perpendicularismo sobre o conjunto E das retas do espaço é simétrica. De fato, se xRy para duas retas x e y quaisquer, então $x \perp y$ e isso implica que $y \perp x$.

A relação $R = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$ não é simétrica.

Definição 1.25 (Relação transitiva). Dizemos que R é transitiva se vale xRz sempre que vale xRy e yRz , ou seja, se xRy e yRz , então xRz .

Exemplo 1.26. A relação $R = \{(a, b), (b, b), (b, c), (a, c), (c, c)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$ é transitiva sobre E .

Exemplo 1.27. A relação R de semelhança ($\sim$) definida sobre o conjunto E dos triângulos do espaço é transitiva, pois, sendo x , y e z triângulos quaisquer, tem-se que se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

A relação $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$ não é transitiva.

Definição 1.28 (Relação anti-simétrica). Dizemos que R é anti-simétrica se $x = y$ sempre que xRy e yRx , ou seja, se xRy e yRx , então $x = y$.

Exemplo 1.29. A relação $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$ é anti-simétrica.

Exemplo 1.30. A relação R de divisibilidade sobre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais: xRy se, e somente se, $x \mid y$ (lê-se “ x é divisor de y ”) é anti-simétrica, pois, dados dois números naturais, x e y , se $x \mid y$ e $y \mid x$, então $x = y$.

A relação $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, a)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$ não é anti-simétrica.

1.7 Relações de equivalência

Definição 1.31. Uma relação R sobre um conjunto E não vazio é chamada relação de equivalência sobre E se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, R deve verificar as seguintes propriedades:

- (i) se $x \in E$, então xRx ;
- (ii) se $x, y \in E$ e xRy então yRx ;
- (iii) se $x, y, z \in E$ e xRy e yRz então xRz .

Exemplo 1.32. A relação $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ sobre $E = \{a, b, c\}$ é uma relação de equivalência.

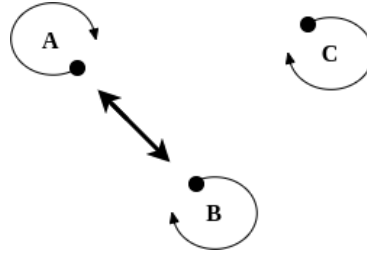


Figura 8 – Relação de equivalência R sobre E .

Exemplo 1.33. A relação de paralelismo definida para as retas do espaço E euclidiano e levando em consideração que retas coincidentes são paralelas, é uma relação de equivalência, pois, sendo x, y e z retas de E , tem-se:

- (i) $x \parallel x$;
- (ii) $x \parallel y$ implica que $y \parallel x$;
- (iii) se $x \parallel y$ e $y \parallel z$, então $x \parallel z$.

Exemplo 1.34. A relação entre os elementos do conjunto $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ dada por $\frac{m_1}{n_1} R \frac{m_2}{n_2}$ se $m_1 n_2 = m_2 n_1$ é uma relação de equivalência. O símbolo “ $\rightarrow$ ”, indica implica.

- (i) $\frac{m_1}{n_1} R \frac{m_1}{n_1} \rightarrow m_1 n_1 = n_1 m_1$;
- (ii) $\frac{m_1}{n_1} R \frac{m_2}{n_2} \rightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1 \rightarrow \frac{m_2}{n_2} R \frac{m_1}{n_1}$;
- (iii) Se $\frac{m_1}{n_1} R \frac{m_2}{n_2}$ e $\frac{m_2}{n_2} R \frac{m_3}{n_3} \rightarrow m_1 n_2 = m_2 n_1$ e $m_2 n_3 = m_3 n_2$, então $m_1 n_3 = m_3 n_1 \rightarrow \frac{m_1}{n_1} R \frac{m_3}{n_3}$.

1.8 Classe de equivalência

Definição 1.35. Seja R uma relação de equivalência sobre E . Dado $a \in E$, denomina-se classe de equivalência determinada por a , módulo R , o subconjunto $\bar{a}$ de E formado pelos elementos x tais que xRa . Em símbolos:

$$\bar{a} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E : xRa\}$$

Exemplo 1.36. Seja $x = \frac{m_1}{n_1} \in \mathbb{Q}^+ = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Com relação a R dada no Exemplo 1.34 Temos

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \bar{\frac{2}{1}} &= \{\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \dots\}; & \text{(iii)} \quad \bar{\frac{4}{1}} &= \{\frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{12}{3}, \dots\}; & \text{(v)} \quad \bar{\frac{2}{3}} &= \{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots\}. \\ \text{(ii)} \quad \bar{\frac{3}{1}} &= \{\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \dots\}; & \text{(iv)} \quad \bar{\frac{1}{2}} &= \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots\}; \end{aligned}$$

1.9 Conjunto quociente

Definição 1.37. O conjunto das classes de equivalência módulo R será indicado E/R e chamado de conjunto quociente de E por R .

Exemplo 1.38. Na relação de equivalência $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ em $E = \{a, b, c\}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \{a, b\}; \\ \bar{b} &= \{a, b\}; \\ \bar{c} &= \{c\}; \\ E/R &= \{\{a, b\}, \{c\}\}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.39. Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e uma relação de equivalência R , denotada como $[a]_R$ definida da seguinte forma:

$$aRb \iff a \equiv b \pmod{3}.$$

Neste caso, dois números inteiros positivos a e b pertencem à mesma classe de equivalência se eles têm o mesmo resto quando divididos por 3.

- (i) Classe de equivalência $[0]$ (módulo 3) $= [0]_3 = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$.
- (ii) Classe de equivalência $[1]$ (módulo 3) $= [1]_3 = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$.
- (iii) Classe de equivalência $[2]$ (módulo 3) $= [2]_3 = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$.

Temos $\mathbb{N}/R = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3, \dots\}$.

2 Vetores

Neste capítulo, trabalharemos conceitos e operações entre vetores com o intuito de fundamentar o estudo da Geometria Analítica.

2.1 Segmento Orientado

Definição 2.1. Dois pontos não coincidentes de uma reta determinam um segmento desta reta.



Figura 9 – Segmento $\overline{AB}$.

Quando orientado esse segmento, passamos a ter um segmento orientado da reta $\overline{AB}$, cuja origem é A e a extremidade é B , conforme a figura a seguir:



Figura 10 – Segmento orientado $\overline{AB}$.

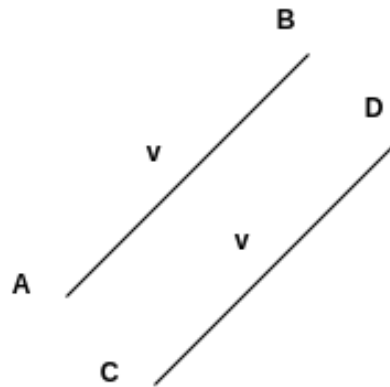
A distância de A até B é o módulo (ou norma) do segmento orientado $|\overline{AB}|$ e o sentido é de A para B .

Dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. Denotamos por $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Observamos que equipolência é uma relação de equivalência no conjunto dos segmentos orientados e portanto satisfaz as seguintes propriedades:

1. Reflexividade: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$.
2. Simetria: $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ se, e somente se, $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$.
3. Transitividade: $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ implica que $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

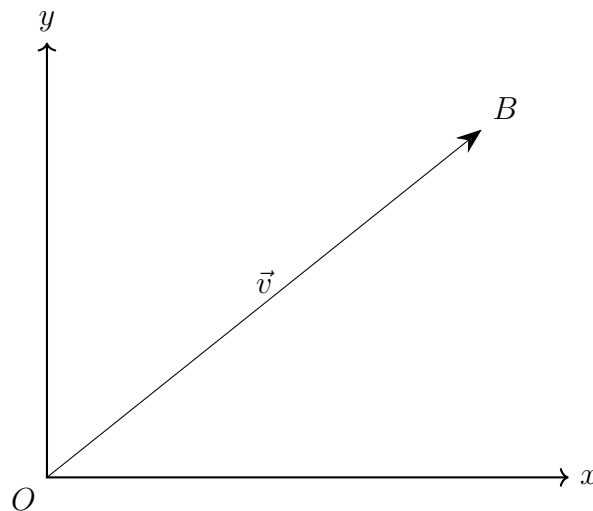
De modo rigoroso, um vetor $\vec{v}$ é uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ representam o mesmo vetor $\vec{v}$ e, neste caso, escrevemos $\overline{AB} = \vec{v} = \overline{CD}$.

Figura 11 – Segmentos que representam o vetor $\vec{v}$.

Note que a classe de equipolência de segmentos orientado é infinita e esta família infinita de segmento equipolentes, chama-se vetor.

Representamos um vetor usando qualquer um dos segmentos equipolentes que compõe a sua família. Este segmento é identificado a partir das coordenadas de suas extremidades.

Assim, dado um ponto $B \in \mathbb{R}^2$, temos o vetor $\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OB}$.

Figura 12 – Vetor $\overrightarrow{OB}$.

Reciprocamente, dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, podemos representá-lo com início na origem subtraindo A das extremidades. O segmento obtido é equipolente a $\overrightarrow{AB}$ e como $A \rightarrow A - A = 0$, $B \rightarrow B - A$, temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O(B - A)} = B - A$, logo $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$. Para mais detalhes, considere a seguinte representação gráfica a seguir.

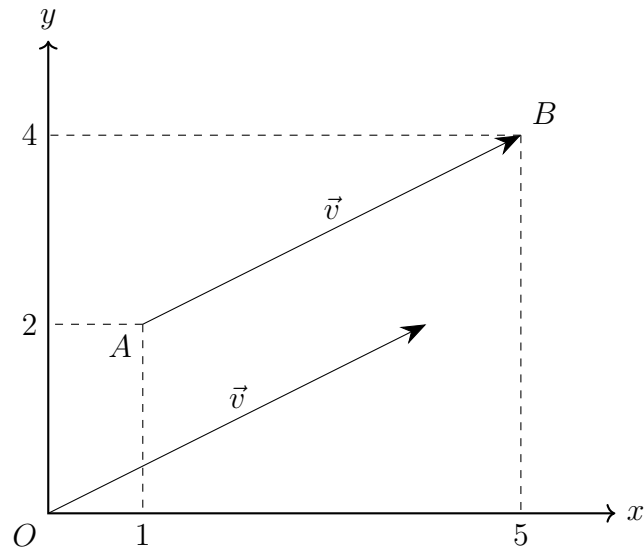


Figura 13 – Representação gráfica do vetor $\vec{v}$.

Quando se aplica um vetor em um ponto A , somando-se às coordenadas de A as do vetor $\vec{v}$, obtendo-se B ($A + \vec{v} = B$). Então, transporta-se A para B através de v , por isso o nome vetor, que vem do latim vector, vectoris, que significa “o que transporta ou leva” (veja por exemplo [MEC56](#), pag. 1013).

2.2 Representação do vetor no plano

Observe que na figura abaixo apresentamos três representantes do vetor $\vec{v} = (-2, 1)$.

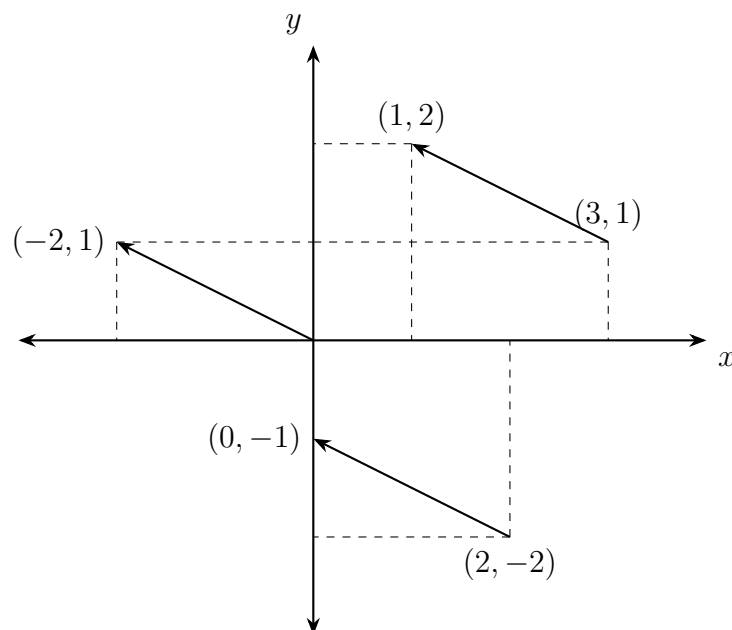


Figura 14 – Representações de vetor $\vec{v}$.

Estes três segmentos representam o mesmo vetor que podemos verificar pela diferença das coordenadas das extremidades de cada um, conforme observamos:

$$(i) \quad \vec{v} = (-2, 1) - (0, 0) = (-2, 1);$$

$$(ii) \quad \vec{v} = (1, 2) - (3, 1) = (-2, 1);$$

$$(iii) \quad \vec{v} = (0, -1) - (2, -2) = (-2, 1).$$

Exemplo 2.2. Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $A(2, 1)$ e $\vec{v} = (4, 7)$, então quais são as coordenadas do ponto B ? Considere $B(x, y)$. Logo, como $\vec{v} = B - A$, $x - 2 = 4$ e assim $x = 6$. Do mesmo modo $y - 1 = 7$, de sorte que $y = 8$. Portanto, $B(6, 8)$.

2.3 Operações com vetores

2.3.1 Adição

O vetor soma de $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ é $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Exemplo 2.3. Dados $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (2, 1)$, represente no plano os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e o vetor $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$.

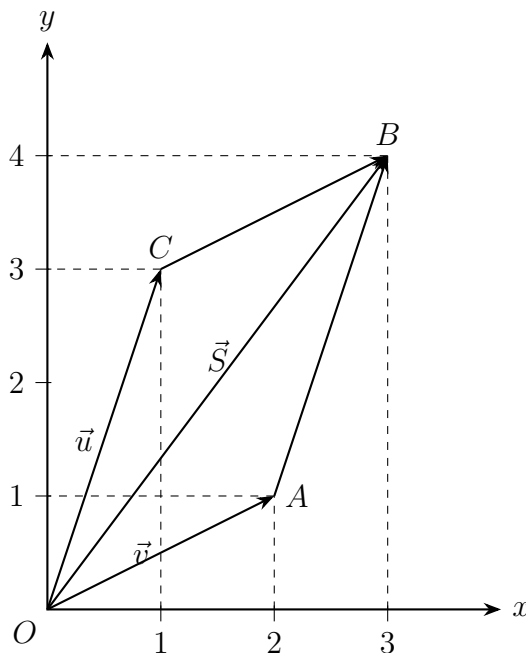


Figura 15 – $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{S}$.

Como $\overrightarrow{AB}$ é paralelo a $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{CB}$ é paralelo a $\overrightarrow{OA}$ conclui-se que $OACB$ é um paralelogramo e $OB = \vec{S} = \vec{u} + \vec{v} = (1, 3) + (2, 1) = (3, 4)$.

2.3.2 Subtração

O vetor diferença de $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ é $\vec{D} = \vec{u} - \vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Exemplo 2.4. Dados $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (2, 1)$, represente no plano os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{D}_1 = \vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{D}_2 = \vec{v} - \vec{u}$.

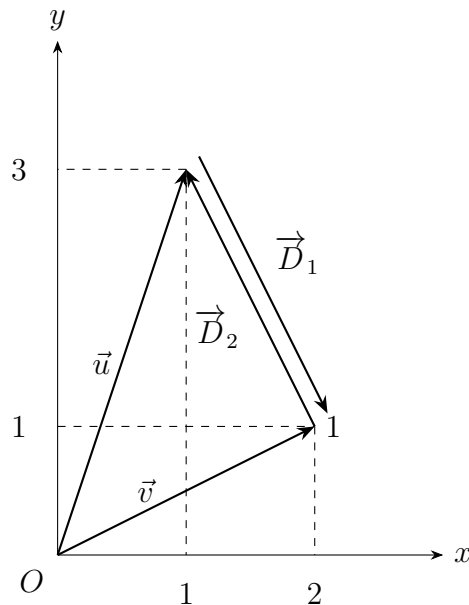


Figura 16 – $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{D}_1$ e $\vec{D}_2$.

Observe que $\vec{D}_1 = (1, 3) - (2, 1) = (-1, 2)$ e que $\vec{D}_2 = (2, 1) - (1, 3) = (1, -2)$.

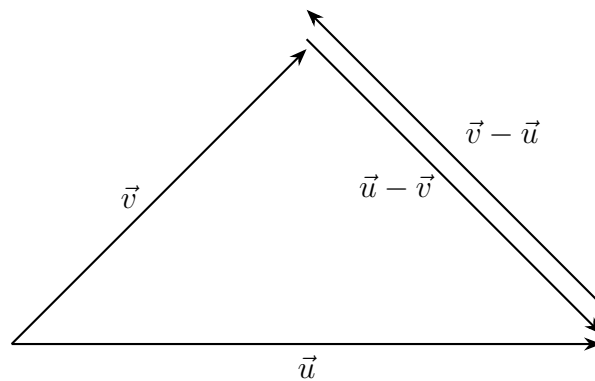


Figura 17 – $\vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$.

2.4 Norma ou módulo de um vetor

Norma ou módulo de um vetor é a distância entre as extremidades de um segmento orientado que o represente, ou seja, o tamanho deste segmento.

Considere os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ e o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, conforme o gráfico abaixo.

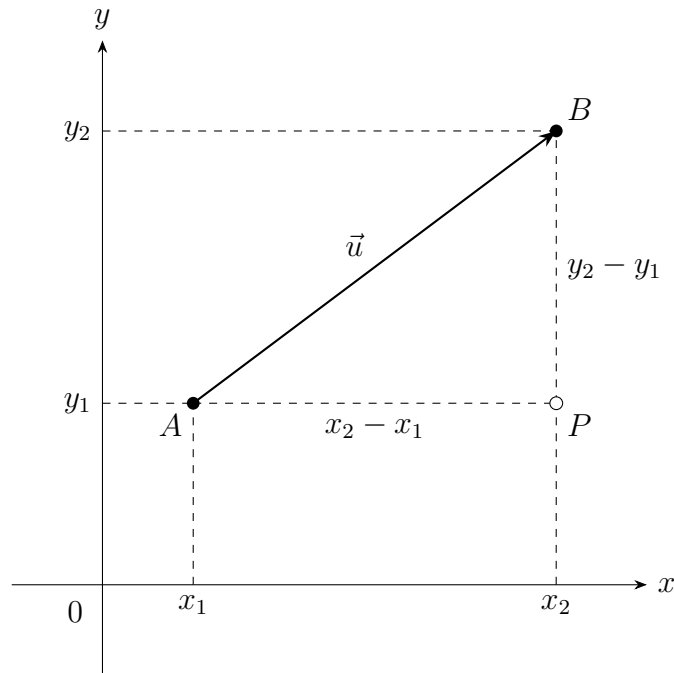


Figura 18 – Norma de $\vec{u}$.

Então, a norma de $\vec{u}$ é, pelo teorema de Pitágoras, dada por

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Exemplo 2.5. Calcule o módulo do vetor $\vec{u} = (4, 9)$.

Resolução: Temos que

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97}.$$

2.5 Vetor unitário

Definição 2.6. Vetor unitário é todo vetor cujo módulo vale 1.

Exemplo 2.7. Verifique se o vetor $\vec{a} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ é unitário.

Resolução: Observe que

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1.$$

Logo, $\vec{a}$ é unitário.

2.6 Vetor nulo

Definição 2.8. Vetor nulo é todo vetor com coordenadas nulas.

Exemplo 2.9. Em $\mathbb{R}^2$, temos que $\vec{0} = (0, 0)$.

2.7 Versor

Definição 2.10. Versor é o vetor unitário de mesma direção e sentido de $\vec{u}$, com norma 1.

Logo, o versor de $\vec{u}$ é dado por $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

2.8 Produto Escalar ou Produto Interno

Representa-se por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e lê-se “ u escalar v ”, ou “produto interno de u por v ”.

Determina-se o produto interno de dois vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ como sendo o escalar resultante da soma dos produtos das coordenadas correspondentes. Logo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd.$$

Exemplo 2.11. Sendo $\vec{u} = (2, -5)$ e $\vec{v} = (3, 4)$, determine o produto interno $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Resolução:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + (-5) \cdot 4 = -14.$$

Aplicação: Sendo $\vec{u} = (a, b)$, segue que $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Usando o fato de que $\vec{u} \cdot \vec{u} = a^2 + b^2$, obtemos $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Em particular

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u},$$

ou seja, produto interno de um vetor por ele mesmo é o quadrado de seu módulo.

Observação 2.12 (Propriedades). Considerando que os vetores: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{z}$ pertencem ao $\mathbb{R}^2$ temos as seguintes propriedades:

1. Comutativa:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2. Distributiva:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{z} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$$

3. Sendo k uma constante real:

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot k\vec{v}$$

2.9 Ângulo formado entre dois vetores

Considere um triângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com o ângulo θ entre eles e o terceiro lado representado por $\vec{u} - \vec{v}$.

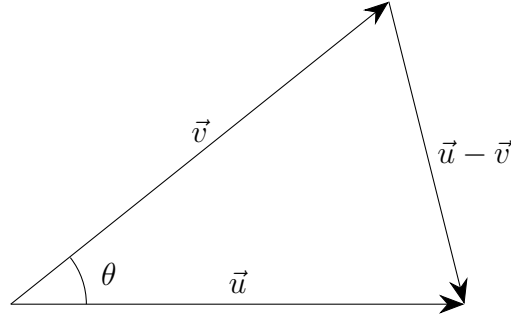


Figura 19 – Ângulo entre dois vetores.

Aplicando a lei dos cossenos, temos a seguinte sequência de igualdades equivalentes:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta; \\ (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta; \\ \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta; \\ \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta.\end{aligned}$$

Simplificando a última igualdade acima obtemos a equação

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta.$$

Portanto, o ângulo θ formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

É importante notar que

- (i) Se $\cos \theta > 0$, então $0 < \theta < 90^\circ$;
- (ii) Se $\cos \theta < 0$, então $90^\circ < \theta < 180^\circ$;
- (iii) Se $\cos 90^\circ = 0$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

3 Geometria analítica usando vetores

Neste capítulo, abordaremos a Geometria Analítica com uma abordagem vetorial, sempre que possível, com o propósito de facilitar o ensino-aprendizagem.

3.1 Ponto médio de um segmento

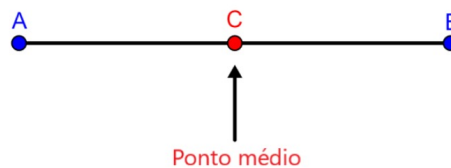


Figura 20 – Ponto médio de $\overline{AB}$.

Sejam A e B extremos de um segmento e C seu ponto médio.

Podemos, então, afirmar que

$$\overline{AC} = \overline{CB} \Rightarrow C - A = B - C \Rightarrow C = \frac{A + B}{2}$$

Exemplo 3.1. Determine as coordenadas do ponto médio C referente ao segmento AB , dados $A(3, -4)$ e $B(-1, 2)$.

Resolução: Como $C = (A + B)/2$, temos

$$X_C = \frac{X_A + X_B}{2} \quad \text{e} \quad Y_C = \frac{Y_A + Y_B}{2},$$

portanto $C(1, -1)$.

Observação 3.2. Nos itens de questões de somatória do vestibular da UFSC, é feita uma afirmação que deve ser julgada como verdadeira ou falsa.

Exemplo 3.3 (UFSC - Questão de somatória). Dados, num sistema de coordenadas cartesianas, os pontos $B(1, 1)$, $C(4, 5)$. Então o ponto médio do lado $\overline{BC}$ é o ponto M de coordenadas $(5/2, 3)$.

Resolução: Verdadeira, pois $M = (B + C)/2$, logo

$$X_M = \frac{X_B + X_C}{2} \quad \text{e} \quad Y_M = \frac{Y_B + Y_C}{2},$$

de sorte que $M(\frac{5}{2}, 3)$.

3.2 Distância entre dois pontos

É a distância entre as extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ de um segmento orientado, denotado por d_{AB} é a norma do vetor $\overline{AB}$. Logo:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo 3.4 (UFSC - Questão aberta). Um ponto material móvel $P(-2 + t, \frac{4t}{3} + 2)$ desloca-se no plano cartesiano e suas coordenadas variam em função do tempo $t (t \geq 0)$. Determine a distância percorrida pelo ponto material móvel entre o ponto A para $t = 0$ e o ponto B para $t = 6$.

Resolução: Temos para $t = 0$, que

$$P(-2 + t, \frac{4t}{3} + 2) = A(-2, 2).$$

Por outro lado, para $t = 6$

$$P(-2 + t, \frac{4t}{3} + 2) = B(4, 10).$$

Assim

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ u.d.}$$

3.3 Condição de alinhamento entre três pontos

Três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, distintos, serão considerados alinhados quando existir uma única reta que passa pelos três.

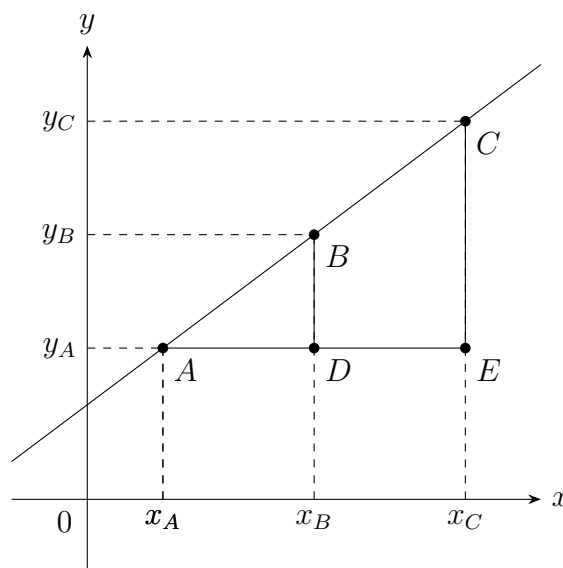


Figura 21 – Condição de alinhamento entre três pontos.

Os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACE$ são semelhantes, portanto

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}.$$

Isso implica que $(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (x_C - x_A)(y_B - y_A)$ e assim

$$x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_B y_A - x_C y_B - x_A y_C = 0. \quad (3.1)$$

A equação (3.1) pode ser reescrita utilizando-se o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix},$$

consequentemente três pontos estão alinhados se, e somente se, o determinante da matriz A for nulo.

Verificamos também que A , B e C estão alinhados se, e somente se, os vetores $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são paralelos. O que é equivalente a dizer que se $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= k \cdot \overline{AC} \\ \iff (x_B - x_A) &= k(x_C - x_A) \quad \text{e} \quad (y_B - y_A) = k(y_C - y_A) \\ \iff k &= \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} \end{aligned}$$

Sendo assim, obteremos a equação (3.1), representada pelo determinante da matriz A .

Utilizando vetores, temos que o ângulo formado por $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é nulo ou 180° e sabendo que: $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$, com $\cos(0) = 1$ e $\cos(180^\circ) = -1$, teremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

ou

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

Exemplo 3.5 (UFSC- Questão de somatória). Se os pontos $A(2, 0)$, $B(0, 3)$ e $P(a, b)$ são colineares, e se os pontos $C(1, 3)$, $D(0, 1)$ e $P(a, b)$ são também colineares, então $\frac{a}{b} < 1$.

Resolução: Verdadeira, pois se A , B e P são colineares, então:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e assim $3a + 2b = 6$. Do mesmo modo, se C , D e P são colineares, então:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e portanto $2a - b = -1$. Finalmente $a = \frac{4}{7}$ e $b = \frac{15}{7}$, de sorte que $\frac{a}{b} = \frac{4}{15} < 1$.

3.4 Equação geral da reta

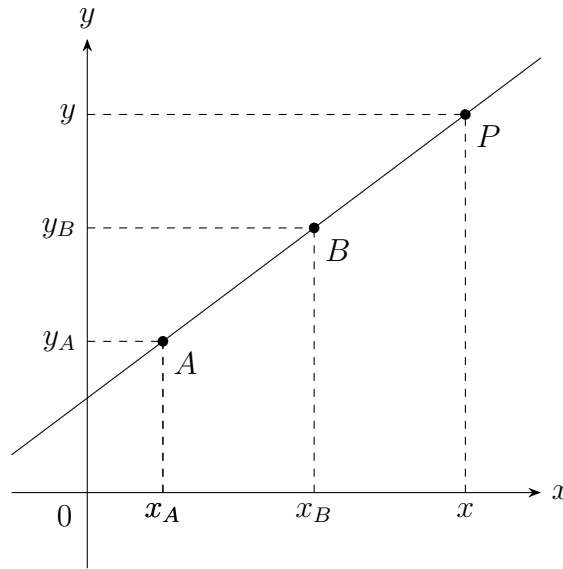


Figura 22 – Equação geral da reta.

Considere a reta r que passa por $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de r . Utilizando a condição de alinhamento entre três pontos, de que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix}$$

é nulo, obtemos ao desenvolver esse determinante que

$$\begin{aligned} x_A y_C + x_B y + x y_A - x y_C - x_B y_A - x_A y &= 0 \\ \iff (y_A - y_C)x + (x_B - x_A)y + (x_A y_C - x_B y_A) &= 0 \end{aligned}$$

Como x_A , y_A , x_B e y_B são constantes, denominamos

$$y_A - y_C = a,$$

$$x_B - x_A = b,$$

$$x_A y_C - x_B y_A = c.$$

Sendo assim obtemos a equação geral da reta

$$r : ax + by + c = 0$$

Com a e b não simultaneamente nulos.

Exemplo 3.6. Verifique que $r : 3x - 4y + 5 = 0$, na qual $a = 3$, $b = -4$ e $c = 5$ é a equação geral da reta r .

Exemplo 3.7 (UFSC - Somatória). Dados, num sistema de coordenadas cartesianas, os pontos $A(4, 1)$ e $B(1, 1)$. A equação da reta que passa pelos pontos A e B é $y - 1 = 0$.

Resolução: Verdadeira, pois substituindo as coordenada de A e B no determinante temos

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o que implica que $y - 1 = 0$.

3.5 Equação reduzida da reta

Ao isolarmos o y na equação geral da reta, $r : ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$, obtemos o que denominamos de equação reduzida da reta

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

onde o coeficiente de x , $(-\frac{a}{b})$, denomina-se coeficiente angular e o termo independente de x , $(-\frac{c}{b})$, denomina-se coeficiente linear.

Exemplo 3.8. Determine os coeficientes angular e linear da reta $r : 2x + y - 4 = 0$.

Resolução: Isolando o y na equação geral dada, obtemos:

$$y = -2x + 4,$$

logo o coeficiente angular é igual a -2 e o coeficiente linear é igual a 4 .

3.6 Pertinência de um ponto a uma reta

Para que um ponto pertença a uma reta suas coordenadas devem satisfazer a equação desta reta.

Exemplo 3.9. O ponto $P(1, 2)$ pertence à reta de equação $3x - 4y + 5 = 0$, pois ao substituirmos as coordenadas do ponto P , a igualdade se verifica

$$3(1) - 4(2) + 5 = 0,$$

logo P pertence à reta.

Exemplo 3.10 (UFSC - Questão de somatória). O ponto $P(-1, 1)$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução: Falsa, pois a reta que representa a bissetriz dos quadrantes ímpares é dada por $r : y - x = 0$ substituindo as coordenadas do ponto P em r obtemos: $1 - (-1) = 2$, portanto P não pertence a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo 3.11 (UFSC - Questão de somatória). Dados, num sistema de coordenadas cartesianas, o ponto $A(4, 1)$ e a reta r representada pela equação $x + y - 2 = 0$. O ponto A pertence à reta r .

Resolução: Falsa, pois $r : x + y - 2 = 0$ implica que $4 + 1 - 2 = 3$, mas então $A \notin r$.

3.7 Equação vetorial da reta

Seja r uma reta que contém o ponto $P_1(x_1, y_1)$ e possui a direção do vetor não nulo $\vec{u} = (a, b)$ e seja o ponto $P(x, y)$, um ponto qualquer da reta r .

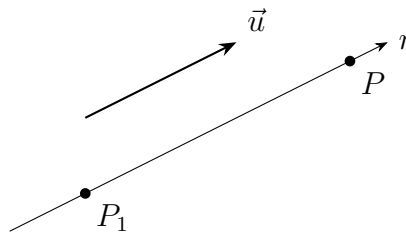


Figura 23 – Equação vetorial da reta.

Temos que a equação vetorial da reta é dada por $\overrightarrow{P_1P} = k\vec{u}$, com $k \in \mathbb{R}^*$.

Vamos determinar uma fórmula para a equação da reta usando a equação vetorial. Como $\overrightarrow{P_1P}$ é paralelo a $\vec{u}$, logo $\overrightarrow{P_1P} = k\vec{u}$, com $k \in \mathbb{R}^*$. Isso implica que

$$P - P_1 = k(a, b)$$

e portanto

$$(x, y) - (x_1, y_1) = k \cdot (a, b), \quad \text{de forma que} \quad \begin{cases} x &= x_1 + ka \\ y &= y_1 + kb \end{cases}.$$

Assim

$$kab = a(y - y_1) = b(x - x_1).$$

Logo

$$(y - y_1) = \frac{b}{a}(x - x_1). \quad (3.2)$$

Observação 3.12. Se $a = 0$, temos que $b \neq 0$, pois $\vec{u}$ é não nulo. Neste caso, a reta r definida pelo vetor diretor $\vec{u} = (0, b)$ e um ponto $P(x, y)$ é perpendicular ao eixo x , pois o produto interno entre seus vetores diretores é nulo de fato.

$$(0, b) \cdot (x, 0) = 0 \cdot x + b \cdot 0 = 0.$$

Dizemos que a fórmula da equação 3.2 é a fórmula para equação geral da reta.

Exemplo 3.13. Determine a equação geral da reta que passa pelo ponto de coordenadas $(5, -3)$ e é paralela ao vetor diretor $\vec{u} = (1, -4)$. Temos

$$y + 3 = \frac{-4}{1}(x - 5),$$

logo $y + 3 = -4x + 20$ e portanto a equação geral é

$$4x + y - 17 = 0.$$

Salientamos que a equação geral também pode ser obtida através da equação vetorial da reta, conforme verificamos a seguir. Temos, para $k \in \mathbb{R}^*$, que

$$\overrightarrow{P_1P} = k\vec{u}.$$

Logo

$$(x, y) - (5, -3) = k \cdot (1, -4), \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} x = 5 + k \\ y = -3 - 4k \end{cases}$$

Portanto

$$4x + y - 17 = 0.$$

3.8 Equações paramétricas da reta

Considere r uma reta que contém o ponto $P_1(x_1, y_1)$ e possui a direção do vetor não nulo $\vec{u} = (a, b)$ e seja o ponto $P(x, y)$, um ponto distinto qualquer da reta r . Utilizando a equação vetorial $\overrightarrow{P_1P} = k\vec{u}$ com $k \in \mathbb{R}^*$ e substituindo as coordenadas nesta equação, temos

$$(x, y) - (x_1, y_1) = k(a, b)$$

Segue que

$$\begin{cases} x = x_1 + ka \\ y = y_1 + kb \end{cases},$$

que representam as equações paramétricas no plano. Salientamos que com a variação de k , a reta r é percorrida a partir de P_1 na direção de $\vec{u}$.

Observe que quando $k = 0$, obtemos o ponto P_1 .

Exemplo 3.14. Escreva as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $P(2, 3)$ e é paralela ao vetor diretor $\vec{u} = (3, 2)$.

Resolução: Observe o gráfico a seguir.

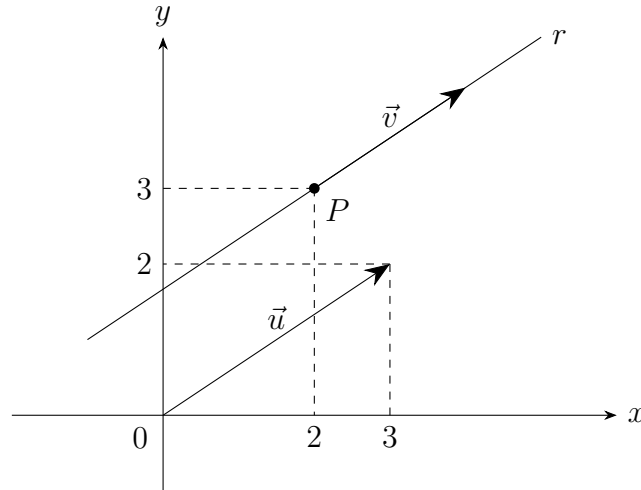


Figura 24 – Equações paramétricas da reta.

Verifique que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$, com $k \in \mathbb{R}^*$ e escolhamos o vetor $\vec{v}$ com início no ponto P . As equações paramétricas de r são

$$\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = 3 + 2k \end{cases}.$$

3.9 Vetor normal à reta

Considere r uma reta do $\mathbb{R}^2$ e que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ e é normal ao vetor $\vec{v} = (a, b)$. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de r , conforme figura abaixo.

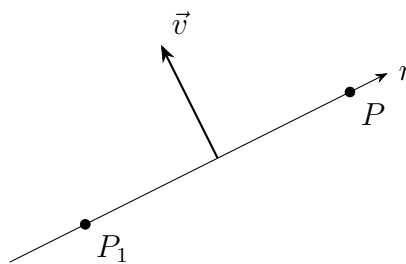


Figura 25 – Vetor normal à reta.

O vetor $\vec{v}$ é ortogonal a $\overline{P_1P}$, portanto o produto interno entre eles é nulo. Sendo

$$\overline{P_1P} = (x - x_1, y - y_1) \quad \text{e} \quad \vec{v} \cdot \overline{P_1P} = 0,$$

temos $\vec{v} \cdot \overline{P_1P} = 0$, que implica que

$$(a, b) \cdot (x - x_1, y - y_1) = 0,$$

ou seja, $ax + by - ax_1 - ay_1 = 0$ e, considerando $c = -ax_1 - ay_1$, obtemos

$$ax + by + c = 0,$$

que é a equação geral da reta r e os coeficientes de x e y , (a, b) , nesta equação representam as coordenadas do vetor normal a reta r .

Exemplo 3.15. Determine a equação geral da reta r que passa pelo ponto $P(1, -1)$ e é normal ao vetor $\vec{v} = (3, -2)$.

Sabemos que na equação geral da reta $ax + by + c = 0$, temos $a = 3$ e $b = -2$. Logo $3x - 2y + c = 0$ e como $P \in r$ obtemos o valor de c na equação: $3(1) - 2(-1) + c = 0$, isto é, $c = -5$.

Portanto, a equação da reta r é $3x - 2y - 5 = 0$.

3.10 Retas paralelas

Duas retas são paralelas se os seus vetores normais são paralelos.

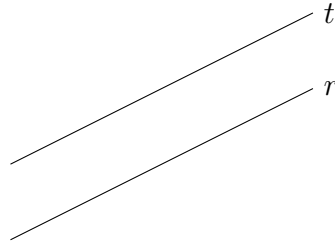


Figura 26 – Retas paralelas.

Dadas duas retas $r : ax + by + c = 0$ e $t : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, se r é paralela a t então seus respectivos vetores normais $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a_1, b_1)$ formam entre si um ângulo nulo ou de 180° e teremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|,$$

$$\text{ou } \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\text{ou } \vec{u} = k \cdot \vec{v}, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.16. Sejam $r : 3x + 4y - 8 = 0$ e $t : 6x + 8y + 9 = 0$.

Vetor normal a reta $r : \vec{u} = (3, 4)$

Vetor normal a reta $t : \vec{v} = (6, 8)$

Assim, temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 50$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = 5 \cdot 10 = 50$$

Logo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \quad \text{e} \quad \vec{v} = 2\vec{u},$$

portanto r é paralela a t .

3.11 Retas perpendiculares

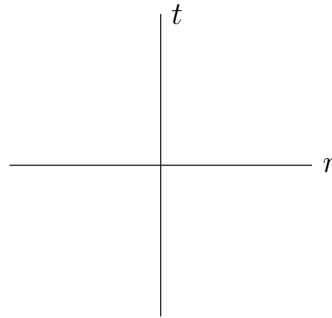


Figura 27 – Retas perpendiculares.

Dadas duas retas $r : ax + by + c = 0$ e $t : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, se r é perpendicular a t então seus respectivos vetores normais $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (a_1, b_1)$ formam entre si um ângulo de 90° e teremos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Exemplo 3.17. Considere $r : 3x + 4y - 10 = 0$ e $t : 8x - 6y + 11 = 0$.

Vetor normal a reta r : $\vec{u} = (3, 4)$

Vetor normal a reta t : $\vec{v} = (8, -6)$

Como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 8 + 4 \cdot (-6) = 0,$$

temos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

e r é perpendicular a t .

Exemplo 3.18 (UFSC - Questão de somatória). A equação da reta r que é perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares e que passa pelo ponto $A(-8, -3)$ é $x + y + 11 = 0$.

Resolução: Verdadeira, pois

- Bissetriz dos quadrantes ímpares $s : x - y = 0$, com vetor normal $\vec{u} = (1, -1)$;
- Reta $r : x + y + 11 = 0$, com vetor normal $\vec{v} = (1, 1)$.

Logo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (1) = 0,$$

o que implica que r é perpendicular a s .

Ademais, temos $(-8) + (-3) + 11 = 0$, de sorte que $A \in r$.

Exemplo 3.19 (UFSC - Questão de somatória). Dados, num sistema de coordenadas cartesianas, o ponto $A(4, 1)$ e a reta r representada pela equação $x + y - 2 = 0$. A reta s de equação $-5x + 5y - 13 = 0$ e a reta r são perpendiculares.

Resolução: Verdadeira, pois

- Reta $r : x + y - 2 = 0$, com vetor normal $\vec{u} = (1, 1)$;
- Reta $s : -5x + 5y - 13 = 0$, com vetor normal $\vec{v} = (-5, +5)$.

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 5 = 0$, temos $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e assim r é perpendicular a s .

3.12 Ângulo entre duas retas

Nesta seção, definimos o ângulo entre duas retas como sendo o ângulo agudo formado por vetores diretores destas retas e mostramos depois que este ângulo coincide com o ângulo agudo formado pelos vetores normais a cada uma destas retas.

Definição 3.20. Sejam $r : A + k\vec{a}$ e $t : B + k\vec{b}$, com $k \in \mathbb{R}^*$, duas retas concorrentes e suponha que o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é agudo (note que os vetores diretores sempre podem ser escolhidos desta maneira). Definimos o ângulo entre r e s como sendo o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (veja Seção 2.9).

Considere $\vec{u}$ vetor normal à reta r , $\vec{v}$ vetor normal à reta t , $A \in r$, $B \in t$, C um ponto pertencente a uma reta cujo vetor diretor é o vetor $\vec{u}$ e D um ponto pertencente a uma reta cujo vetor diretor é o vetor $\vec{v}$, r e t concorrentes em E , considere também θ como o menor ângulo formado pelas retas r e t , β o menor ângulo formado entre a reta t e o vetor $\vec{u}$ e α como o menor ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, conforme figura a seguir.

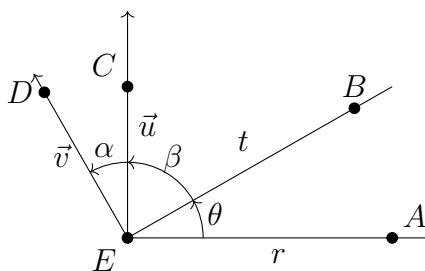


Figura 28 – Ângulo entre duas retas.

Seja $\text{med}(\widehat{AEB}) = \theta$, $\text{med}(\widehat{CED}) = \alpha$ e $\text{med}(\widehat{BEC}) = \beta$, onde $\text{med}(\widehat{AEB})$, $\text{med}(\widehat{CED})$ e $\text{med}(\widehat{BEC})$ representam respectivamente as medidas dos ângulos $\widehat{AEB}$, $\widehat{CED}$ e $\widehat{BEC}$ e sendo estes ângulos agudos.

Temos que

- O vetor $\vec{u}$ é normal à r , logo $\theta + \beta = 90^\circ$ e assim $\beta = 90^\circ - \theta$;
- O vetor $\vec{v}$ é normal à t , portanto $\beta + \alpha = 90^\circ$ de modo que $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Combinando esses dois fatos, obtemos que $90^\circ - \theta = 90^\circ - \alpha$, ou seja, $\alpha = \theta$.

Logo o ângulo θ formado pelas retas r e t , tem a mesma medida do ângulo α formado pelos seus vetores normais, portanto:

$$\cos \theta = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right|$$

Exemplo 3.21. Sejam $r : 2x + y - 6 = 0$ e $t : -3x + y + 5 = 0$.

- O vetor normal a reta r é $\vec{u} = (2, 1)$;
- O vetor normal a reta t é $\vec{v} = (-3, 1)$;

Assim

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = -5 \\ \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\cos \theta = \left| \frac{-5}{5 \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\theta = 45^\circ$.

3.13 Distância de um ponto até uma reta

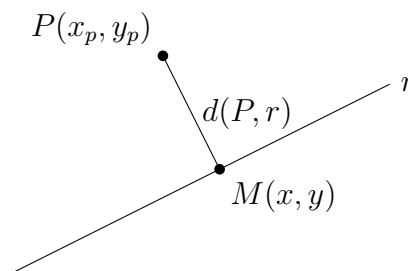


Figura 29 – Distância de um ponto até uma reta.

Seja $M(x, y)$ a projeção ortogonal de $P(x_p, y_p)$ sobre a reta $r : ax + by + c = 0$. Então

$$d(P, r) = \|\overline{PM}\|.$$

Observe que $\overline{PM}$ é normal a reta r . Portanto existe $k \in \mathbb{R}^*$ tal que $\overline{PM} = k(a, b)$, ou seja, se $M = (x, y)$, então $(x - x_p, y - y_p) = k(a, b)$. Escrevendo como um sistema linear

$$\begin{cases} x = x_p + ka \\ y = y_p + kb \end{cases}$$

Temos que $d(P, r) = \|\overline{PM}\| = \|\overline{k(a, b)}\| = |k| \cdot \|(a, b)\| = |k| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.

Como $M \in r : ax + by + c = 0$, temos

$$0 = a(x_p + ka) + b(y_p + kb) + c = ax_p + by_p + ka^2 + kb^2 + c,$$

assim

$$k = \frac{-ax_p - by_p - c}{a^2 + b^2}.$$

Deste modo

$$d(p, r) = |k| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|-ax_p - by_p - c|}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Portando a distância do ponto P à reta r será dada por:

$$d(P, r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3.3)$$

Exemplo 3.22 (UFSC - Questão de somatória). A distância do ponto $A(7, 2)$ à reta $r : 4x - 3y + 3 = 0$ é igual a 5 unidades de comprimento.

Resolução: Verdadeira, pois por (3.3) temos

$$d(P, r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e assim

$$d(P, r) = \frac{|4 \cdot 7 - 3 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = 5.$$

4 Lista de exercícios do vestibular da UFSC

Exercício 1 (UFSC). Dados os pontos $A(-1, -1)$, $B(5, -7)$ e $C(x, 2)$, determine x sabendo que o ponto C é equidistante dos pontos A e B . (**Distância entre dois pontos**).

Exercício 2 (UFSC). Considere uma reta r perpendicular ao eixo horizontal x , e sejam $A(15, 12)$ e $B(x, y)$ dois pontos que pertencem à reta r . Sabendo-se que a distância entre os pontos A e B é de 20cm , calcular o valor da soma, em cm , das ordenadas possíveis de B . (**Distância entre dois pontos, retas perpendiculares e ponto pertencente a reta**).

Exercício 3 (UFSC). Determine a distância do ponto $P(14, -17)$ à reta r situada paralelamente, a 2 unidades acima do eixo x . (**Distância de ponto e reta e ponto pertencente a reta**).

Exercício 4 (UFSC - Questão de somatória).

- (a) As retas $y - x = 3$ e $x = 2$ são concorrentes.
- (b) As retas $x + y = 3$ e $y - x = 4$ são perpendiculares. (**Retas perpendiculares**).
- (c) A reta $y - 3 = 0$ é paralela ao eixo x . (**Retas paralelas**).
- (d) A reta $y + x = 0$ passa pelo ponto $P(0, 1)$. (**Ponto pertencente a reta**).

Exercício 5 (UFSC). As retas r , dada pela equação $3x - y + 7 = 0$, e s , dada pela equação $4x - y - 5 = 0$, passam pelo ponto $P(a, b)$. Determine o valor de $a + b$. (**Ponto pertencente a reta**).

Exercício 6 (UFSC). Calcule o valor de P para que as retas r , dada pela equação $(2P + 1)x + 3y - 12 = 0$, e s , dada pela equação $3x - 37y + 3 = 0$, sejam perpendiculares entre si. (**Retas perpendiculares**).

Exercício 7 (UFSC).

- (a) Determine o valor numérico de k para que a distância de um ponto de coordenadas $(2, k)$, situado no primeiro quadrante, à reta de equação $3x + 4y - 24 = 0$, seja igual a 18 unidades. (**Distância de ponto e reta**).
- (b) Dados os pontos $A(1, -1)$, $B(-1, 3)$ e $C(2, 7)$, determine a medida da altura do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao lado BC . (**Distância entre ponto e reta**).

Exercício 8 (UFSC). Determine a abscissa do ponto de intersecção das retas r e s , sabendo-se que a reta r passa pelo ponto $P(1, -7)$ e é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, e a reta s é paralela à reta $2x - y + 3 = 0$ e passa pelo ponto $Q(5, -17)$. (**Retas paralelas**).

Exercício 9 (UFSC - Questão de somatória). Considere as retas $r : kx + 5y - 7 = 0$ e $s : 4x + ky - 5 = 0$.

- (a) O valor de k para que as retas r e s se interceptam no ponto $(0, 7/5)$ é $25/7$. (**Ponto pertencente a reta**).
- (b) As retas r e s são paralelas para $k = 2\sqrt{5}$ (**Retas paralelas**).
- (c) Sendo $k = 0$, então a distância do ponto $(-1, 3)$ à reta r é 20. (**Distância de ponto e reta**).
- (d) O valor de k para que a reta r passe pelo ponto $(1, -2)$ é 17. (**Ponto pertencente a reta**).

Exercício 10 (UFSC). Um ponto material móvel $P(-2 + t, \frac{4t}{3} + 2)$ desloca-se no plano cartesiano e suas coordenadas variam em função do tempo $t(t \geq 0)$. Determine a distância percorrida pelo ponto material móvel entre o ponto A para $t = 0$ e o ponto B para $t = 6$. (**Distância entre dois pontos**).

Exercício 11 (UFSC - Questão de somatória). Dados, num sistema de coordenadas cartesianas, os pontos $A = (4, 1)$, $B = (1, 1)$, $C = (4, 5)$ e a reta r representada pela equação $x + y - 2 = 0$.

- (a) A distância do ponto C à origem do sistema de coordenadas cartesianas é de 6 unidades. (**Distância entre dois pontos**).
- (b) O ponto médio do lado BC é o ponto M de coordenadas $(5/2, 3)$. (**Ponto médio de um segmento**).
- (c) O ponto A pertence à reta r . (**Ponto pertencente a reta**).
- (d) A reta s de equação $-5x + 5y - 13 = 0$ e a reta r são perpendiculares. (**Retas perpendiculares**).
- (e) A equação da reta que passa pelos pontos A e B é $y - 1 = 0$. (**Equação da reta por dois pontos**).

Exercício 12 (UFSC - Questão de somatória).

- (a) O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(3, 2)$ e $B(-3, -1)$ é $1/2$. (**Equação reduzida da reta**).

- (b) As retas $r : 2x - 3y + 5 = 0$ e $s : 4x - 6y - 1 = 0$ são perpendiculares. (**Retas perpendiculares**).
- (c) Sabe-se que o ponto $P(p, 2)$ é equidistante dos pontos $A(3, 1)$ e $B(2, 4)$. A abscissa do ponto P é 1. (**Distância de ponto à reta**).

Exercício 13 (UFSC - Questão de somatória, adaptada). Considere a reta r passando pelos pontos $(-2, 0)$ e $(0, 3)$ e a reta s passando pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, conforme figura a seguir.

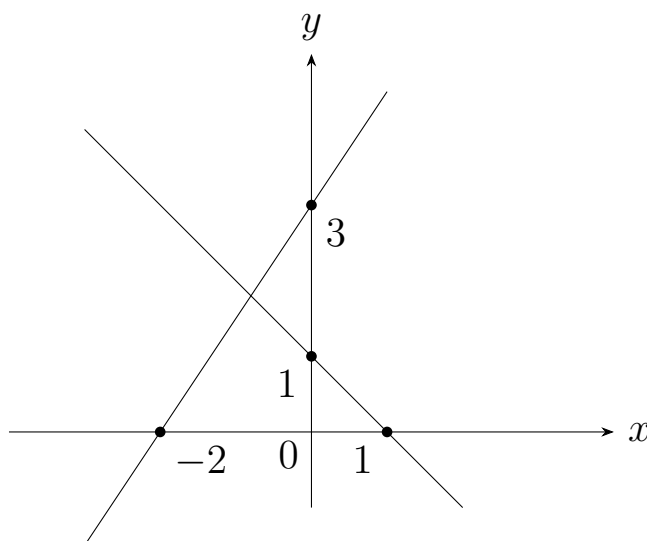


Figura 30 – Exercício 13.

- (a) A equação da reta s é $3x - 2y + 6 = 0$. (**Equação geral da reta**).
- (b) A reta s e a reta r são perpendiculares. (**Retas perpendiculares**).
- (c) A distância da origem do sistema de coordenadas cartesianas à reta r é de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades. (**Distância de ponto à reta**).
- (d) As retas r e s se interceptam no ponto de abscissa $\frac{4}{5}$. (**Ponto pertencente a reta**).
- (e) A área da região do plano limitada pelas retas r , s e pelo eixo das abscissas é igual a $\frac{3}{10}$ unidades de área. (**Plano cartesiano**).

Exercício 14 (UFSC - Questão de somatória, adaptada). A figura a seguir representa parte do mapa de uma cidade, em que o ponto 0 é o centro e os pontos A , B e C são pontos turísticos (considere 1 unidade linear do plano cartesiano correspondendo a $1km$).

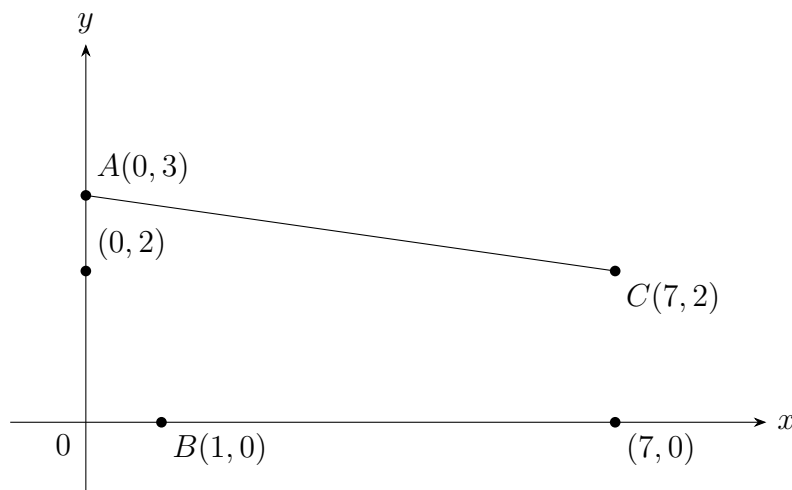


Figura 31 – Exercício 14.

- (a) Se o prefeito da cidade deseja colocar um novo terminal de ônibus que fique equidistante dos pontos A , B e C , então sua localização deve ser o ponto T de coordenadas $(7/2, 5/2)$. (**Distância entre dois pontos**).
- (b) A equação da reta que representa a estrada reta e asfaltada que liga os pontos A e C é $x + 7y + 21 = 0$. (**Equação geral da reta**).
- (c) Se o prefeito da cidade deseja construir um trecho de estrada reto, o mais curto possível, unindo o ponto B com a estrada reta e asfaltada que já liga os pontos A e C , então o comprimento mínimo desse trecho será de 2 km . (**Distância de ponto à reta**).
- (d) A área da região triangular $\triangle ABC$, a partir dos pontos A , B e C que formam o “Triângulo Turístico” da cidade é de 10 km^2 . (**Plano cartesiano**).

Exercício 15 (USFC - Questão de somatória).

1. A reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$, com $A(0, 3)$ e $B(5, 0)$, tem coeficiente angular $\frac{3}{5}$. (**Equação geral da reta**).
2. No plano cartesiano, os pontos de coordenadas $A(0, 0)$, $B(2, 2)$ e $C(1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ são os vértices de um triângulo isósceles. (**Distância entre dois pontos**).
3. O ponto (a, b) pertence à reta $2x - y = 0$ está no primeiro quadrante e forma com os pontos $(1, 0)$ e $(3, 1)$ um triângulo com 5 unidades de área, então $a + b = 9$. (**Equação geral da reta**).
4. A localização no plano cartesiano das Igrejas de São Tomé e de São Pedro são os pontos $T(-\frac{76}{10}, 3)$ e $P(6, 3)$ respectivamente. As duas igrejas badalam seus sinos, precisamente, às 12 horas. Suponha que um físico ouviu os sinos das Igrejas de

São Tomé e de São Pedro quando já eram passados 15 segundos e 25 segundos do meio-dia, respectivamente. Se a velocidade com que o som viaja é de 340 metros por segundo, então é possível afirmar que o físico encontra-se no ponto $F(-\frac{25}{10}, 3)$ deste plano cartesiano. Considere cada unidade do plano cartesiano como 1 *km*. **(Distância entre dois pontos)**.

5. O ponto $P(-1, 1)$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. **(Ponto pertencente a reta)**.
6. Não existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $A(-2, n)$, $B(4, -11)$ e $C(1, -2)$ sejam colineares. **(Colinearidade entre três pontos)**.
7. A equação geral da reta s que passa pelo ponto $A(4, 2)$ e é perpendicular à reta $r : \frac{x}{8} - \frac{y}{4} = 0$ é $s : -2x - 2y - 6 = 0$. **(Retas perpendiculares)**.
8. A equação da reta que é perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares e que passa pelo ponto $A(-8, -3)$ é $x + y + 11 = 0$. **(Retas perpendiculares)**.
9. A distância do ponto $A(7, 2)$ à reta $r : 4x - 3y + 3 = 0$ é igual a 5 unidades de comprimento. **(Distância de ponto e reta)**.

Exercício 16 (UFSC - Questão de somatória, adaptada).

- (a) Se as retas de equações $y = x + 2$ e $-3x + my - 6 = 0$ possuem infinitos pontos comuns, então o valor numérico da expressão $\sqrt{\frac{325}{9}} - (-m)^{-2}$ possui exatamente três divisores naturais. **(Retas paralelas)**.
- (b) O ponto simétrico de $P(0, 3)$ em relação à reta $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ é o ponto de coordenadas $(2, -1)$. **(Plano Cartesiano)**.
- (c) Se os pontos $A(2, 0)$, $B(0, 3)$ e $P(a, b)$ são colineares, e se os pontos $C(1, 3)$, $D(0, 1)$ e P são também colineares, então $\frac{a}{b} < 1$. **(Colinearidade entre três pontos)**.
- (d) Se as retas r e s têm equações $r : ax + by + c = 0$ e $s : ax + by + d = 0$, então a distância entre as retas é $\frac{|c-d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **(Distância de ponto e reta)**.
- (e) Se o ponto $A(3, 4)$ pertence à reta r de equação $2kx + (k-3)y + 2 = 0$ e s é uma reta perpendicular a r , então o coeficiente angular de s é -1 . **(Retas perpendiculares)**.
- (f) A figura a seguir mostra, em um plano cartesiano, as localizações de três comunidades, A , B e C , de um município. Em função da Covid-19, a prefeitura desse município resolveu construir um hospital de campanha para atender as comunidades. Se o hospital for construído em um ponto (a, b) equidistante das comunidades e se cada unidade do plano cartesiano corresponde a 1 *km*, então o hospital será construído a 2,5 *km* das comunidades. **(Distância entre dois pontos)**.

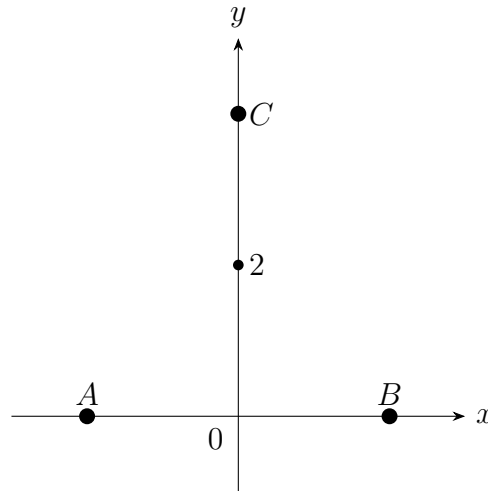


Figura 32 – Exercício 16(f).

- (g) Se os pontos $A(-1, 3)$ e $B(5, 1)$ são equidistantes de $C(x, x)$, então x é ímpar. **(Distância entre dois pontos).**
- (h) Uma mediatriz é uma reta perpendicular a um segmento de reta e que passa pelo ponto médio desse segmento. Se a reta r é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, sendo $A(4, -1)$ e $B(2, -7)$, então o ponto $P(6, -5)$ pertence à reta r . **(Ponto médio de um segmento e retas perpendiculares).**

5 Conclusão

Este trabalho apresentou uma proposta de análise das possibilidades de como o professor de Matemática poderá contribuir com o processo de ensino e aprendizagem no âmbito do estudo da geometria analítica, tornando este momento mais simples e concreto para o aluno, apropriando-se do conceito de vetores, parte do currículo de Física no Ensino Médio. Trazendo esta noção para a Matemática, este componente curricular proporciona a oportunidade de potencializar o desempenho dos estudantes em diversos aspectos da matéria mencionada, a partir da utilização dos conhecimentos associados ao conceito de vetor.

A rotina escolar revela que o currículo básico essencial de Matemática para o Ensino Médio envolve uma extensa variedade de temas, enquanto a carga horária disponível, em geral, não é suficiente para cobrir toda esta gama de conteúdos ao longo do Ensino Médio. Portanto, a proposta apresentada não consiste em adicionar um novo tema ao currículo de Matemática, pois o mesmo já é estudado na Física, mas sim trabalhar a interdisciplinaridade entre as duas disciplinas com o intuito de fomentar uma reflexão sobre como os professores de matemática podem enriquecer o ensino da geometria analítica usando conceitos vetoriais e, conseqüentemente, auxiliar na resolução de exercícios.

Sendo assim, é importante reiterar que a exploração do estudo dos vetores pode ser ampliada e, desta forma, contribuir para o estudo de condição de alinhamento entre três pontos, distâncias entre dois pontos, determinação da equação da reta, distância entre ponto e uma reta, entre outras possibilidades. Portanto, sobram razões para que o aluno, no Ensino Médio, assimile a perspectiva de solucionar problemas sob a ótica vetorial, e assim conhecer outras formas de resolução de exercícios oriundos da geometria analítica.

A Apêndice

A.1 Gabarito

Tabela 1 – Gabarito da lista de exercícios do vestibular da UFSC

Exercício	Resposta	Exercício	Resposta
1	08	2	24
3	19	4	a) Verdadeira b) Verdadeira c) Verdadeira d) Falsa
5	55	6	18
7	a) 27 b) 4	8	19
9	a) Verdadeira b) Verdadeira c) Falsa d) Verdadeira	10	10
11	a) Falsa b) Verdadeira c) Falsa d) Verdadeira e) Verdadeira	12	a) Verdadeira b) Falsa c) Verdadeira
13	a) Verdadeira b) Falsa c) Verdadeira d) Falsa e) Verdadeira	14	a) Verdadeira b) Verdadeira c) Verdadeira d) Verdadeira
15	a) Verdadeira b) Verdadeira c) Verdadeira d) Verdadeira e) Falsa f) Falsa g) Falsa h) Verdadeira i) Verdadeira	16	a) Falsa b) Verdadeira c) Verdadeira d) Verdadeira e) Verdadeira f) Verdadeira g) Falsa h) Verdadeira

Bibliografia

- [BC05] P. Boulos e I. de Camargo. *Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial*. São Paulo: Pearson, 2005.
- [Cor06] Paulo Sérgio Quilelli Corrêa. *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- [DFC13] J. Delgado, K. Fresnel e L. Crissaff. *Geometria Analítica*. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [DI03] Higino H. Domingues e Gelson Iezze. *Álgebra Moderna: Volume Único*. 4ª edição. São Paulo: Atual, 2003.
- [Lim+06] Lima, Carvalho, Wagner e Morgado. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática, 2006.
- [MEC56] MEC. *Dicionário Escolar Latino-Português*. 1956.
- [Vir24] Virtuous Tecnologia da Informação. *Vetores*. Consultado em 09/04/2024 às 20:29. 1998-2024. URL: <https://www.somatematica.com.br/emedio/vetores/vetores.php> (acesso em 09/04/2024).