

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ANDRESSA LUANA MICOLINO

O ENSINO DO NÚMERO DE EULER

CURITIBA

2024

ANDRESSA LUANA MICOLINO

O ENSINO DO NÚMERO DE EULER

The teaching of Euler's number

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestra em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica, no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR.

Linha de Pesquisa: Divulgação e Popularização da Matemática da Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst.

CURITIBA

2024



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba



ANDRESSA LUANA MICOLINO

O ENSINO DO NÚMERO DE EULER

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática Na Educação Básica.

Data de aprovação: 17 de Dezembro de 2024

Dr. Roy Wilhelm Probst, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Andre Krindges, Doutorado - Universidade Federal de Mato Grosso (Ufmt)

Dr. Joao Luis Goncalves, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 17/12/2024.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, que esteve ao meu lado em todos os momentos e nunca deixou de me apoiar e acreditar em mim, mesmo quando eu mesma duvidava. Em especial, agradeço à minha mãe, Rosane, ao meu pai, Licério, à minha madrastra, Arlete, ao meu irmão, Ricardo, à minha cunhada, Brenda, à minha tia, Irene, ao meu primo, André, e à sua namorada, Cláudia. Vocês foram os principais pilares que tornaram meu sonho possível.

Ao meu afilhado Rael Darwin, que chegou ao mundo em um momento crucial: seu sorriso era razão suficiente para me dar forças e seguir em frente.

Agradeço a todos os meus amigos que estiveram ao meu lado e torceram por mim. Desde o dia da aprovação até este momento, vocês foram fundamentais. Sem esses ombros amigos, sei que minha jornada teria sido muito mais difícil. Obrigada por acreditarem em mim.

Aos amigos que o mestrado me deu, Cláudia, Fernando e Paulo, que me apoiaram em momentos difíceis e felizes.

Ao meu orientador, Roy, um OBRIGADA especial pela confiança depositada em mim. O senhor foi uma peça-chave nesta minha formação, e agradeço por me ajudar a realizar um dos meus sonhos. Levarei sua orientação comigo para sempre.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

RESUMO

MICOLINO, Andressa Luana. **O ensino do número de Euler**. 55 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2024.

Este trabalho investiga o número de Euler, destacando sua relevância tanto na matemática quanto em aplicações práticas, como na matemática financeira e no estudo de fenômenos naturais. O objetivo principal é propor estratégias didáticas inovadoras para facilitar o ensino desse conceito na Educação Básica. A pesquisa inclui uma revisão teórica sobre seu desenvolvimento histórico, análise de sua abordagem em livros didáticos e exames nacionais, e o desenvolvimento de um recurso educacional em formato de jogo baseado em desafios progressivos. Os resultados sugerem que o uso de abordagens interativas contribui para a compreensão de conceitos matemáticos abstratos, alinhando-se às exigências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Palavras-chave: Número de Euler; gamificação; ensino de matemática.

ABSTRACT

MICOLINO, Andressa Luana. **The teaching of Euler's number**. 55 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2024.

This study investigates Euler's number, highlighting its relevance both in mathematics and in practical applications, such as financial mathematics and the study of natural phenomena. The main objective is to propose innovative teaching strategies to facilitate the understanding of this concept in Basic Education. The research includes a theoretical review of its historical development, an analysis of its treatment in textbooks and national exams, and the development of an educational resource in the form of a game based on progressive challenges. The results suggest that the use of interactive approaches enhances the comprehension of abstract mathematical concepts, aligning with the requirements of the National Common Curricular Base (BNCC) and the National High School Exam (ENEM).

Keywords: Euler's number; gamification; mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Exercício 1 da apostila do Sistema Anglo de Ensino	18
Figura 2.2 – Exercício 2 da apostila do Sistema Anglo de Ensino	19
Figura 2.3 – Número de Euler (e): um irracional famoso	20
Figura 2.4 – Número de Euler na calculadora científica	21
Figura 2.5 – Das tábuas para os logaritmos	22
Figura 2.6 – Reta tangente a função e^x	25
Figura 2.7 – Áreas sombreadas que representam $\ln x$, positivo em (a) e negativo em (b) .	26
Figura 2.8 – Área sombreada com medida unitária definindo o número e	26
Figura 2.9 – Prova do vestibular da UFSC de 2020	28
Figura 3.1 – Primeira aproximação para o logaritmo de 2	39
Figura 3.2 – Segunda aproximação para o logaritmo de 2	39
Figura 3.3 – Aproximação para o logaritmo de 2	39
Figura 3.4 – Trecho da tabela de logaritmos de Briggs	40
Figura 3.5 – Trecho da obra <i>Introductio in analysin infinitorum</i> , de Leonhard Euler . . .	41
Figura 4.1 – Fase 1: Numerópolis	46
Figura 4.2 – Fase 2: Numerópolis	47
Figura 4.3 – Fase 3: Numerópolis	48
Figura 4.4 – Fase 4: Numerópolis	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Investimento de R\$100,00 ao longo de um ano com uma taxa de 10% ao ano	33
Tabela 3.2 – Resultados obtidos para M à medida que n aumenta	33
Tabela 3.3 – Potências de base 2	35
Tabela 3.4 – Tabela de 101 elementos	36
Tabela 3.5 – Tabela de 51 elementos	37
Tabela 3.6 – Tabela de 69 elementos	37

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Justificativa para a escolha do tema	10
1.2	Relevância à Educação Básica	11
1.3	Impactos nas práticas em sala de aula	11
1.4	Objetivos	11
1.5	Procedimentos metodológicos	12
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1	Trabalhos do PROFMAT	13
2.2	Livros de Ensino Médio	14
2.3	Livros de Cálculo	23
2.4	Questões do ENEM	27
2.5	Questões de Vestibulares	27
3	REVISÃO HISTÓRICA	31
3.1	O Número de Euler e a Matemática Financeira	31
3.2	John Napier	34
3.3	Henry Briggs	38
3.4	Leonhard Euler	40
3.5	Irracionalidade e transcendência	42
3.6	A mais bela de todas as fórmulas	43
4	RECURSO EDUCACIONAL	45
4.1	Estrutura do Jogo	45
4.1.1	Fase 1: A Fórmula Exponencial	46
4.1.2	Fase 2: Tempo de Meia-Vida	47
4.1.3	Fase 3: O Decaimento até 5 Unidades	47
4.1.4	Fase 4: Missão Final	49
4.2	Passo a Passo	50
4.3	Roteiro do Jogo	51
5	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	54

1 INTRODUÇÃO

O número de Euler, conhecido como a constante e , é uma das constantes mais fascinantes e essenciais na matemática, com aplicações em áreas que vão desde o cálculo e a matemática financeira até a modelagem de fenômenos naturais. Este trabalho explora essa constante e seus fundamentos, incluindo sua definição, propriedades e papel central no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Embora o número de Euler seja abordado extensivamente no Ensino Superior, ele aparece de forma limitada no Ensino Médio, onde frequentemente se priorizam apenas tópicos aplicados de maneira superficial.

O ensino do número e no Brasil, particularmente na educação básica, apresenta lacunas, tanto em termos de abordagem didática quanto de compreensão pelos alunos. Neste contexto, a presente dissertação busca explorar maneiras de tornar esse conceito mais acessível e interessante para os estudantes do Ensino Médio, conectando-o a aplicações práticas e cotidianas. Para isso, foi desenvolvido um jogo educacional no RPG Maker, intitulado “Numerópolis”, que apresenta desafios matemáticos baseados no número de Euler e suas propriedades.

A relevância deste estudo está na necessidade de aprimorar o ensino de matemática nas escolas brasileiras, em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os objetivos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Maor (2008) ressalta a relevância do número e em diversas áreas da matemática e em aplicações práticas. Ele evidencia como essa constante aparece em situações relacionadas ao crescimento populacional e ao cálculo de juros compostos, consolidando-se como uma das mais importantes na matemática moderna.

1.1 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

O número de Euler (e) é uma das constantes matemáticas mais fundamentais e aparece em diversas áreas da matemática, como no cálculo, nas funções exponenciais e logarítmicas, e na matemática financeira. No entanto, apesar de sua importância, o número e raramente é explorado com profundidade no ensino básico, sendo mais abordado de maneira teórica no Ensino Superior. A escolha desse tema surge da necessidade de preencher essa lacuna, buscando formas de tornar o conceito acessível e relevante para os alunos do Ensino Médio.

Além disso, a crescente utilização de recursos tecnológicos no ensino motivou a criação de uma abordagem lúdica e interativa, que possa engajar os alunos e facilite a compreensão de conceitos abstratos, como é o caso do número de Euler. O jogo “Numerópolis” foi desenvolvido com esse objetivo, oferecendo uma experiência que alia a prática matemática com o envolvimento ativo dos estudantes. A justificativa para este trabalho, portanto, reside na necessidade de promover o número e como um conceito central e dinâmico no currículo da educação básica, utilizando ferramentas inovadoras e práticas pedagógicas mais inclusivas.

1.2 RELEVÂNCIA À EDUCAÇÃO BÁSICA

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe uma formação abrangente e crítica para os estudantes do Ensino Médio, preparando-os para o exercício da cidadania e para o mundo do trabalho. Dentro dessa perspectiva, o estudo de funções exponenciais e logarítmicas — e, por consequência, do número de Euler — está diretamente relacionado a temas como o crescimento populacional, a radioatividade e a matemática financeira, todos de grande importância para a formação científica e tecnológica dos alunos.

O número de Euler aparece de forma implícita em diversos tópicos presentes na BNCC e nas diretrizes curriculares, especialmente no estudo das funções exponenciais e na resolução de problemas aplicados. No entanto, em muitos casos, sua exploração é limitada ou superficial, o que dificulta a compreensão dos alunos sobre a importância desse conceito. Por isso, a relevância de incluir o número e em contextos mais amplos e práticos no ensino básico é evidente, pois possibilita que os alunos desenvolvam uma visão mais profunda e conectada da matemática ao mundo real.

1.3 IMPACTOS NAS PRÁTICAS EM SALA DE AULA

Incluir o número de Euler no planejamento das aulas de matemática pode ter impactos significativos na forma como os alunos percebem e interagem com o conteúdo matemático. Ao invés de tratar e apenas como uma constante abstrata, sua introdução através de exemplos práticos, como o uso em cálculos de juros compostos ou em fenômenos de crescimento exponencial, torna o aprendizado mais concreto e relevante para os estudantes.

O uso de ferramentas interativas, como o jogo, pode também transformar a dinâmica da sala de aula. A gamificação do ensino, quando bem estruturada, permite um maior engajamento dos alunos, incentivando a resolução de problemas e o pensamento crítico de maneira lúdica. Os professores, por sua vez, podem explorar o jogo como um recurso pedagógico para complementar a teoria, proporcionando uma abordagem mais ativa e participativa do conteúdo.

1.4 OBJETIVOS

O principal objetivo desta dissertação é analisar a presença e o tratamento do número de Euler no contexto da educação básica, avaliando sua abordagem nos livros didáticos, nas diretrizes curriculares e nas questões de exames como o ENEM e vestibulares. Além disso, o trabalho visa desenvolver um recurso educacional — o jogo “Numerópolis” — como uma proposta didática para facilitar a compreensão do número e pelos alunos do Ensino Médio.

Especificamente, os objetivos incluem:

- Investigar como o número de Euler é apresentado nos materiais didáticos e nas avaliações

de larga escala;

- Desenvolver um recurso didático que utilize a gamificação para ensinar o número e ;
- Propor uma sequência didática para o ensino do número e no Ensino Médio, conectando-o a situações práticas e cotidianas.

1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia deste trabalho combina a pesquisa documental com o desenvolvimento de um recurso pedagógico. A pesquisa documental envolveu a análise de livros didáticos do Ensino Médio e superior, diretrizes curriculares nacionais e exames como o ENEM e vestibulares, com o objetivo de identificar como o número e é abordado nesses materiais.

Paralelamente, foi desenvolvido o jogo “Numerópolis” no software RPG Maker, um ambiente interativo onde os alunos resolvem desafios matemáticos envolvendo o número de Euler e suas aplicações. O jogo foi estruturado em quatro fases, cada uma abordando um aspecto diferente do número e .

O jogo foi testado em uma versão piloto, sendo analisado qualitativamente quanto ao seu potencial didático e à resposta dos alunos. Essa metodologia visa não apenas investigar o número e , mas também apresentar uma proposta concreta de aplicação desse conhecimento em sala de aula, utilizando a tecnologia como uma aliada no processo de ensino-aprendizagem.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 TRABALHOS DO PROFMAT

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional é uma iniciativa pioneira no campo da educação. Estabelecido em 2011, o programa tem como público-alvo professores que atuam no ensino de matemática nas redes públicas de educação básica. Ao longo dos anos, o PROFMAT formou milhares de educadores, alguns dos quais se dedicaram a pesquisas e projetos relacionados ao número de Euler (2024), que é o foco central desta dissertação. Este programa acadêmico representa uma oportunidade para aprimorar a formação de professores de matemática e promover a pesquisa no campo do ensino, demonstrando seu impacto significativo no cenário educacional brasileiro.

Alguns breves comentários sobre trabalhos que abordam o número de Euler:

- A Irracionalidade e Transcendência do Número e (2013).

Este trabalho possui um caráter predominantemente teórico, cujo objetivo principal é apresentar o número e como limite infinito de uma sequência, demonstrar sua existência, irracionalidade e transcendência. No final da dissertação são propostas breves sugestões de exercícios para aplicação no Ensino Médio.

- Função exponencial natural e^x e número e : uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades (2016).

O objetivo principal é despertar o interesse dos alunos pelo assunto e destacar a importância do assunto para a sua formação. Além disso, o texto traz uma análise aprofundada de questões relacionadas a abordagem do infinito em sala de aula, números irracionais no domínio de uma função e relação entre exponencial e logaritmo, examinando respostas fornecidas por professores da educação básica. A conclusão dá-se com uma proposta didática para o ensino de funções exponenciais acompanhada de curiosidades sobre o tema, mantendo sempre o rigor matemático.

- O número de Euler no Ensino Médio: propostas de abordagens com aplicações (2017).

O enfoque central segue a mesma linha do trabalho anterior.

- O Número de Euler (2017).

Uma breve história sobre o descobrimento do número de Euler e maneiras de explorar as diferentes formas de caracteriza-lo através de somas e produtos infinitos é o tema principal do trabalho. Além disso, a dissertação aborda a forma mais algébrica da Fórmula de Stirling, uma expressão frequentemente encontrada em cursos de Cálculo.

- Desvendando o número e (2020).

A principal finalidade da dissertação são as caracterizações do número e . O trabalho é fundamentado em três definições de e e suas conexões entre elas. Nesse contexto, a pesquisa demonstra de forma conclusiva que e é, de fato, irracional e, adicionalmente, apresenta um método de cálculo de suas casas decimais.

- O Número de Euler e suas Aplicações (2020).

O último trabalho analisado também adota uma abordagem mais teórica. Ele examina as formas algébricas que o número de Euler se apresenta, além de um resumo histórico de sua vivência acadêmica. O trabalho vai além da matemática, enriquecendo o conhecimento em outras áreas. A dissertação finaliza com uma sequência didática, demonstrando como o número de Euler pode ser eficazmente abordado em sala de aula.

Assim, após a análise das dissertações anteriores, é possível concluir que, de forma geral, os trabalhos examinados tendem a ter uma abordagem mais teórica, com menos ênfase nas aplicações em contexto de sala de aula. Sendo assim, o propósito desta dissertação é direcionar a atenção para análises de como o número de Euler é tratado nos livros didáticos e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para identificar onde e como ele é apresentado aos alunos do Ensino Médio, além de verificar se há cobrança desse conceito em vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Posteriormente, será realizada uma avaliação da forma como o número de Euler é abordado nos livros de Cálculo.

2.2 LIVROS DE ENSINO MÉDIO

Não é surpresa que exista uma grande disparidade na abordagem do ensino de conteúdos matemáticos entre escolas públicas e privadas. Essa discrepância é facilmente visualizada pelos resultados e indicadores do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Um relatório elaborado pelo “Todos Pela Educação” evidencia essa desigualdade entre os estudantes do último ano do ensino básico nas escolas públicas e privadas. Enquanto 41,3% dos alunos da rede privada alcançaram um nível de aprendizagem considerado adequado em Matemática, o índice na rede pública caiu para 5,2% (2024).

Ambos os segmentos seguem a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No entanto, enquanto a rede privada adota obras de autores consagrados, que consistem em um conjunto de conteúdos compactos com o objetivo explícito de preparar os alunos para a aprovação em vestibulares, a rede pública utiliza livros didáticos renovados a cada quatro anos, conforme estabelecido pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Na rede pública, os conteúdos são distribuídos ao longo dos três anos do Ensino Médio, enquanto na privada os estudantes têm acesso a todos os conteúdos do Ensino Médio já durante o 1º e 2º ano, para

serem revistos na 3ª série. Por isso, é comum ver alunos de escolas privadas sendo aprovados em vestibulares e no Enem já no 2º ano do Ensino Médio.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio:

Propõe-se, no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização (Brasil, 2000, p. 5).

Em outras palavras, busca-se trazer o aluno para o centro do processo educativo, permitindo que ele assuma um papel ativo na sala de aula, utilizando as novas tecnologias, serviços e conhecimentos disponíveis. Dessa forma, o estudante integra-se ao mundo contemporâneo nas dimensões fundamentais da cidadania e do trabalho.

Apesar de sua grande relevância para a Matemática, o número de Euler (e) não é abordado de forma direta nos livros didáticos, ao contrário do número π , que é introduzido já no Ensino Fundamental como a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. Essa ausência pode ser explicada pelo fato de a constante de Euler estar intrinsecamente associada ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, conteúdos que não são contemplados na BNCC para o Ensino Médio.

Conforme a BNCC (2017), o Ensino Médio é estruturado em quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Cada uma dessas áreas desempenha um papel fundamental na formação do estudante, o que se reflete na definição de habilidades – práticas, cognitivas e socioemocionais – e competências, abrangendo conceitos e procedimentos.

Nesse contexto, é relevante ressaltar as habilidades e competências da BNCC relacionadas à função exponencial e logarítmica, as quais estão intrinsecamente ligadas ao objeto de estudo da nossa pesquisa:

- **COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3**

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BNCC, 2017, p. 535).

HABILIDADES

- (EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial (BNCC, 2017, p. 536).

- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros (BNCC, 2017, p. 536).
- (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros (BNCC, 2017, p. 536).

- **COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4**

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático (BNCC, 2017, p. 538).

HABILIDADE

- (EM13MAT403) Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas (BNCC, 2017, p. 539).

- **COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5**

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BNCC, 2017, p. 540).

HABILIDADE

- (EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (BNCC, 2017, p. 541).

Assim, procedeu-se à análise de algumas coleções de livros didáticos do Ensino Médio a fim de investigar a abordagem do número e em sala de aula. Foram avaliadas quatro coleções:

- **Coleção do Bernoulli Sistema de Ensino (2023)**

Na apostila da 1ª série, a primeira menção ao número de Euler ocorre em um exercício no capítulo 7, sem qualquer explicação prévia, presumindo-se que o aluno já esteja familiarizado com a constante. Mais adiante no mesmo capítulo, a apostila apresenta um

conteúdo sobre “O mundo do trabalho e as curvas de aprendizagem” que aborda a equação $P(t) = M - N \cdot e^{-kt}$, porém, menciona apenas que “ e é o número de Euler” sem fornecer seu valor. No capítulo seguinte, ainda do mesmo ano, inicia-se o conteúdo de logaritmos, com uma observação que diz:

- Quando a base do logaritmo é o número e ($e = 2,71828\dots$), esse logaritmo é chamado de **logaritmo neperiano** ou **logaritmo natural** e é representado com a notação \ln .

Posteriormente, há outra seção sobre “A Lei de resfriamento de Newton”, que aborda a equação $T(t) - T_a = k \cdot e^{-\alpha t}$, referindo-se ao número de Euler apenas como uma constante.

As demais menções ao número de Euler aparecem apenas em alguns exercícios.

O próximo contato do aluno com o número ocorre apenas na 3ª série, com as apostilas apresentando exercícios envolvendo a constante, sem fornecer qualquer nota histórica sobre ela.

- Coleção do Sistema Educacional Brasileiro (COC) (2024)

A constante de Euler é mencionada em apenas alguns exercícios nas apostilas da 1ª e 2ª série. No entanto, há um diferencial: nos conteúdos específicos sobre conjuntos e funções, bem como nas apostilas da 2ª série, são incluídas notas históricas sobre Euler. Além disso, na apostila da 1ª série, ao tratar do conjunto dos números irracionais, encontramos uma observação:

- O número e , número de Euler, encontrado pelo matemático escocês John Napier ao desenvolver seu trabalho sobre logaritmos.
 $e = 2,71828182845904523536028\dots$

Ao se tratar de função exponencial, a apostila também traz uma aplicação sobre “Crescimento populacional”, que envolve a expressão $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$. Após essas abordagens, não há mais menções ao número de Euler na coleção.

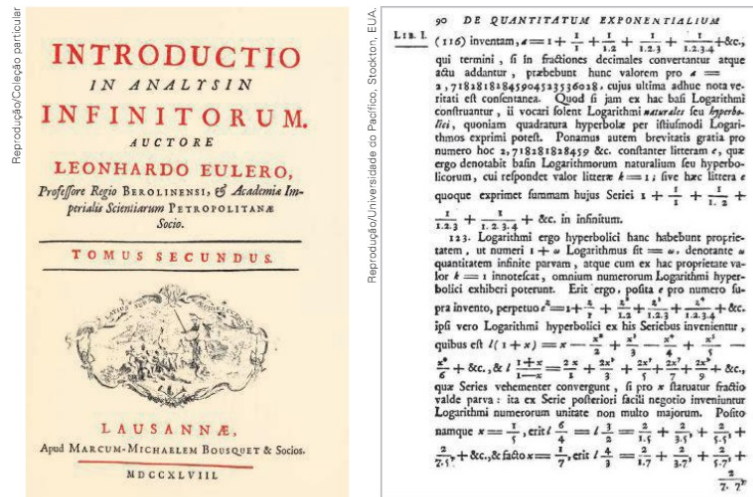
- Coleção do Sistema Anglo de Ensino (2020)

A primeira menção ao número e ocorre na apostila da 1ª série, onde são abordados o número de Euler e os logaritmos naturais. Ele é apresentado com 10 casas decimais e exemplificado com $\ln(e) = \log_e(e) = 1$. Em seguida, são propostos dois exercícios que merecem destaque.

No primeiro, há uma breve introdução sobre Leonhard Euler, acompanhada por duas imagens do livro *Introdução à Análise Infinita*.

Figura 2.1 – Exercício 1 da apostila do Sistema Anglo de Ensino

Leonhard Euler (1707-1783) foi um dos estudiosos que mais contribuiu para o desenvolvimento da Matemática. Além de suas descobertas, Euler também ajudou a desenvolver e popularizar notações que são utilizadas até hoje, como o símbolo π para representar o número irracional 3,1415... e o símbolo $f(x)$ para representar a relação de dependência em funções. Em seus registros, Euler usou a letra e para representar o número irracional utilizado como base de logaritmos bastante frequentes em estudos científicos: os **logaritmos naturais**.



As imagens apresentam a capa e uma página do livro *Introdução à análise infinita*, de 1748, em que Euler apresenta o número e e como a soma de infinitas frações:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

- a) A partir do texto (ou de uma calculadora), escreva uma aproximação para o número e com 12 casas decimais.
- b) Os logaritmos naturais mencionados no texto têm como base o número e e podem ser representados pelo símbolo $\ell n(x)$, ou seja:

$$\ell n(x) = \log_e(x)$$

Com base nessa definição, determine o valor de $\ell n(e)$ e $\ell n(1)$.

- c) Se $\ell n(2) \approx 0,69$ e $\ell n(3) \approx 1,1$, resolva a equação $2^x = 3$.

Fonte: Autores (2020).

Já no segundo, é feita uma breve apresentação sobre John Napier, ilustrada por duas imagens do livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*.

Figura 2.2 – Exercício 2 da apostila do Sistema Anglo de Ensino

O matemático escocês John Napier (1550-1617) foi um dos responsáveis pelo surgimento dos logaritmos. Em seu livro de 1614, *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio*, Napier escreveu tabelas com valores de potências cuja base era o número $(0,9999999)^{10\ 000\ 000}$.



Posteriormente, percebeu-se que esse valor é uma boa aproximação para $\frac{1}{e}$ e, desde então, os logaritmos cuja base é $\frac{1}{e}$ passaram a ser chamados de **logaritmos neperianos**, em referência a Napier (em latim, escrevia-se *Ioanne Nepero*).

- a) Usando uma calculadora, determine o valor de $(0,9999999)^{10\ 000\ 000}$ e verifique se, de fato, esse número é uma boa aproximação para $\frac{1}{e}$.
- b) Obtenha o valor do logaritmo neperiano de e .
- c) Qual é a relação do logaritmo neperiano de um número com seu logaritmo natural?

Fonte: Autores (2020).

O primeiro exercício é proposto para desenvolver habilidades, enquanto o segundo é considerado um exercício extra, ou seja, muitas vezes não é abordado em sala de aula devido à falta de tempo ou à necessidade de cobrir os conteúdos ao longo do ano.

A próxima aparição do número de Euler ocorre na apostila da 3ª série, onde há apenas um exercício envolvendo a constante.

- Coleção do Sistema Ari de Sá (SAS) (2024)

O material destacou-se por incluir uma ampla quantidade de notas históricas, curiosidades e exercícios sobre este número fascinante. A inclusão de uma perspectiva histórica nos materiais de matemática auxilia os alunos a desenvolver conceitos ao longo do tempo, proporcionando uma compreensão mais profunda dos conteúdos. Ao explorar a origem dos conceitos matemáticos, os alunos são incentivados a desenvolver um pensamento crítico, criar conexões entre diferentes áreas da matemática e outras disciplinas, tornando o aprendizado mais significativo e integrado.

Na apostila da 1ª série, ao abordar o tópico “Números e operações - Racionais e Irracionais”, o número de Euler é apresentado como um famoso número irracional. A apostila inclui a seguinte frase: “O número e , assim como π , é um número infinito e irracional, mas não costuma ser tão famoso. Uma pena, pois ele também está por todos os lados.” Em seguida, a apostila oferece uma breve história sobre os juros compostos e uma aplicação prática que resulta em valores cada vez mais próximos do número e .

Figura 2.3 – Número de Euler (e): um irracional famoso

NÚMERO DE EULER (e): UM IRRACIONAL FAMOSO

A física e a matemática estão cheias de números interessantes, como o π , que se escondem em fórmulas por aí e dão ao mundo a cara que você conhece. Porém, o π não é o único na lista de números curiosos. O irracional e , conhecido como constante de Euler, também é um deles.

Piada de exatas, cortesia da revista científica *New Scientist*: em 2004 – esse ano longínquo em que o Gmail foi inventado –, Eric Schmidt, na época CEO da Google, anunciou que queria alcançar exatamente 2 718 281 828 de dólares de lucro. Quase todo mundo achou o valor meio exótico, mas os matemáticos de plantão sacaram na hora que essas eram as primeiras nove casas decimais do lendário $e = 2,71828182\dots$, a constante de Euler. O número e , assim como π , é um número infinito e irracional, mas não costuma ser tão famoso. Uma pena, pois ele também está por todos os lados.

Imagine o seguinte: você tem 100 reais na poupança. O banco decide que irá te pagar, por ano, 50% desse valor (olha só que banco generoso). Ao final do primeiro ano, você terá 150 reais, e ao final do segundo ano 150 reais mais 50% disso, o que dá 225 reais. São os famosos juros compostos, ou juros sobre juros. Parece um ótimo negócio, não?

Sim, mas pode ficar melhor. E se, em vez de 50% por ano, sua conta rendesse 25% a cada seis meses? Logo de cara, parece que dá na mesma. Afinal, cada ano tem 12 meses – a conclusão óbvia seria que ganhar 25% por cento duas vezes ao ano é a mesma coisa que ganhar 50% em uma tacada só no final do ano. Mas isso não funciona na prática, porque os juros são compostos: faça as contas e você descobre que terá 244,14 reais, quase 20 reais a mais que no primeiro caso.

Divida o ano em 10 partes e você terá 259,37 reais. Divida em 100, e serão 270,48. O valor, aparentemente, não para de crescer. Mas ele cresce cada vez menos. Se você dividir o ano em mil partes, serão “só” 271,69 reais. Se você dividi-lo em infinitas partes, bingo: você alcançará 271,828182... reais.

Não percebeu onde chegamos? Você pode refazer as contas com uma aplicação inicial unitária (1 real) na poupança, para facilitar a visualização e perceber que, cada vez que o cálculo é feito com um período de capitalização menor, o resultado segue se aproximando mais e mais do irracional e , de modo que o alcança no infinito e não o ultrapassa.

O número de Euler é, portanto, o maior inimigo de qualquer banqueiro: sempre estará lá para evitar que você pague mais do que um determinado valor por um empréstimo, por menor que seja o período de capitalização.

VALIANO, Bruno. Cinco números além do Pi que merecem 15 minutos de fama. *Superinteressante*, 1 set. 2017. Disponível em: <https://super.abril.com.br/comportamento/5-numeros-alem-do-pi-que-merecem-15-minutos-de-fama/>. Acesso em: 20 maio 2022. (adaptado)

Fonte: Bigode (2024).

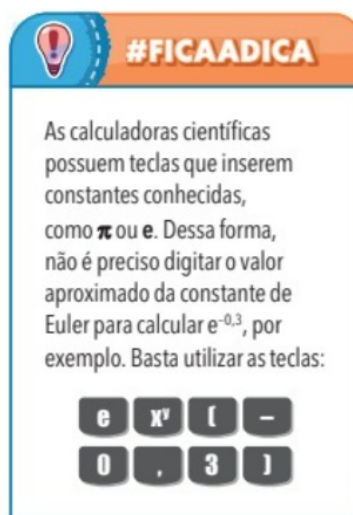
Na apostila da 2ª série, a abordagem do número de Euler é aprofundada. Há uma nota histórica que discute o limite do número de Euler, apresentando a expressão $(1 + 1/n)^n$ e demonstrando alguns valores conforme n tende ao infinito. Ao final da tabela de dados, a expressão é apresentada em notação matemática como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718.$$

A apostila também inclui breves histórias reais envolvendo o número de Euler, como “As bombas atômicas têm prazo de validade?” e “Crescimento e decrescimento populacional”. Essas histórias são projetadas para instigar a curiosidade dos alunos, incentivando-os a se

envolver no contexto e a buscar mais informações sobre o assunto. Um destaque especial é um pequeno quadro no lado direito da página, explicando como utilizar o número e em calculadoras científicas. Embora os alunos estejam familiarizados com as tecnologias modernas, é importante ressaltar esses mecanismos para auxiliar no desenvolvimento de seu conhecimento e habilidades matemáticas.

Figura 2.4 – Número de Euler na calculadora científica



Fonte: Bigode (2024).

O próximo capítulo da apostila chama a atenção ao apresentar uma página sobre as tábuas de logaritmos, um recurso que foi extinto dos livros didáticos há alguns anos. A probabilidade de encontrar um professor moderno que nunca ouviu falar dessas tábuas é significativa. Esse tipo de informação ajuda os alunos a compreenderem por que os logaritmos são utilizados da maneira que são hoje, destacando o avanço da matemática ao longo do tempo e como ela facilita nossas vidas.

Figura 2.5 – Das tábuas para os logaritmos

Das tábuas para os logaritmos

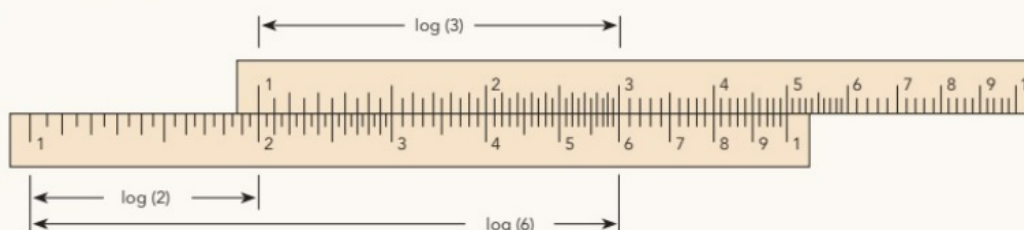
Os logaritmos foram desenvolvidos por John Napier (1550-1617), um membro da aristocracia escocesa que se interessava por Matemática. Napier trabalhou durante vinte anos na sua descoberta, que foi inspirada nas informações já publicadas sobre a sucessão de potências de um número, especialmente os resultados obtidos por Arquimedes.

Napier publicou, em 1614, o resultado de parte das suas investigações no livro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Essa publicação chamou a atenção do matemático inglês Henry Briggs (1561-1630), responsável por construir a primeira tabela de logaritmos decimais, publicada com o título *Arithmetica logarithmica*, no ano de 1628. A invenção dos logaritmos também é atribuída ao relojoeiro e matemático suíço Jobst Bürgi (1552-1632), que começou a construir uma tábua de logaritmos em 1588, mas que foi publicada apenas em 1620.

Tanto Napier como Briggs utilizaram ideias já experimentadas por outros matemáticos, fundamentadas em transformar operações mais trabalhosas em operações mais simples; no caso, obter produtos por meio de adições, assim como descobrir resultados de divisões efetuando subtrações.

Régua de cálculo

Até meados do século XX, o principal instrumento de cálculo usado nos escritórios de Engenharia era a **régua de cálculo**, um dispositivo inventado em 1622 pelo matemático inglês William Oughtred (1574-1660). Essa ferramenta tinha como base a tábua de logaritmos de Napier. A régua de cálculo mais simples é composta por duas régua com escalas logarítmicas.



Para calcular $2 \cdot 3$, faz-se coincidir a marca do 2 da régua inferior com a marca do 1 da régua superior. Lê-se o número que fica abaixo da marca do 3 (da régua superior) para encontrar o resultado 6 na régua inferior. Esse método decorre da propriedade $\log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 = \log 6$.

Sistemas de logaritmos

As tabelas publicadas por Napier e Briggs traziam as partes decimais de seus logaritmos, ou seja, indicavam também os algarismos depois da vírgula.

Briggs adotou como base o número irracional **e**, cuja aproximação é 2,71828, que se usa para modelar fenômenos naturais e resolver problemas relacionados com crescimento populacional, juros compostos etc. Napier optou pela base 10, tornando-se a mais popular, já que é mais simples deduzir qual é a parte inteira dos logaritmos decimais, principalmente se o logaritmando é uma potência de 10. Observe:

- $\log 10 = 1$, pois $10^1 = 10$;
- $\log 100 = 2$, pois $10^2 = 100$;
- $\log 1\,000 = 3$, pois $10^3 = 1\,000$.

Na 3ª série, o número de Euler continua sendo abordado, embora com menos ênfase em histórias, visto que este ano do Ensino Médio se concentra em revisar o conteúdo dos anos anteriores. No entanto, ao tratar de logaritmos decimais, a apostila inclui uma breve história das tábuas de logaritmos e destaca as contribuições de Henry Briggs (1561-1630) nesse campo. Além disso, a apostila oferece exercícios e exemplos resolvidos que envolvem o número de Euler, reforçando o entendimento dos alunos sobre este conceito matemático fundamental.

De uma maneira geral, o número de Euler é pouco explorado nos livros didáticos das redes privadas. Com algumas exceções, este número irracional aparece em notas históricas ou exercícios, mas raramente é aprofundado. No entanto, este tema é de extrema importância, e se não for bem dominado, pode passar despercebido pelos alunos, resultando na ausência de um conteúdo essencial que teve grande impacto nos estudos matemáticos ao longo da história.

2.3 LIVROS DE CÁLCULO

O número de Euler tem um papel central no desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Nessa seção vamos mostrar como o número e pode ter diferentes definições, como: limites, derivadas, integrais ou séries. Por se tratarem de tópicos de Ensino Superior, não serão abordados todos os detalhes, mas apenas a ideia central por trás das diferentes definições. Foram analisados quatro livros:

- Um Curso de Cálculo (v. 1) (2001)

Começaremos discutindo este livro fascinante, que oferece uma abordagem abrangente e rigorosa sobre integrais, séries e equações diferenciais. Amplamente utilizado em cursos de Ensino Superior, especialmente em matemática e áreas relacionadas, o livro é valorizado por fornecer uma base sólida e uma abordagem detalhada que facilita a compreensão e a aplicação de conceitos matemáticos.

Na Seção 6 do Volume 1, é abordada a função exponencial e logarítmica. Inicialmente, o texto explora o conceito de potência com expoente real, seguido pela discussão sobre logaritmos. Na Seção 3.1 desta dissertação, a Matemática Financeira e o Número de Euler são abordados de maneira específica, com foco na teoria e aplicações. No livro, a apresentação do número de Euler é realizada diretamente, utilizando os conceitos matemáticos apropriados. Primeiramente, é revisado que a sequência $a_n = (1 + 1/n)^n$ é convergente, e em seguida é demonstrado que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Após esta demonstração, são apresentados exemplos e, em seguida, exercícios para fixação dos conceitos.

- Cálculo (v. 1) (2011a)

Outro autor renomado é James Stewart. Em seus livros, ele aborda os conceitos fundamentais do cálculo diferencial e integral, oferecendo uma combinação equilibrada entre teoria e aplicação prática. Stewart utiliza gráficos e diagramas que auxiliam os estudantes a entender melhor os conceitos complexos, os quais ele explica com clareza. Suas obras são extensamente empregadas em cursos de graduação em matemática, engenharia, física e economia.

O primeiro conceito relacionado ao número de Euler surge na Seção 1.5, quando o autor apresenta o número e como a base de uma função exponencial. No entanto, ele explica que uma demonstração aproximada, com resultado de 5 casas decimais, será apresentada apenas no Capítulo 3.

O Capítulo 3 aborda as regras de diferenciação, iniciando com a derivada de funções polinomiais e exponenciais. Ao longo do capítulo, são apresentados diversos conceitos, definições e exemplos, até chegar à Função Exponencial. Para demonstrar a derivada da função exponencial $f(x) = a^x$ utiliza-se a definição de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

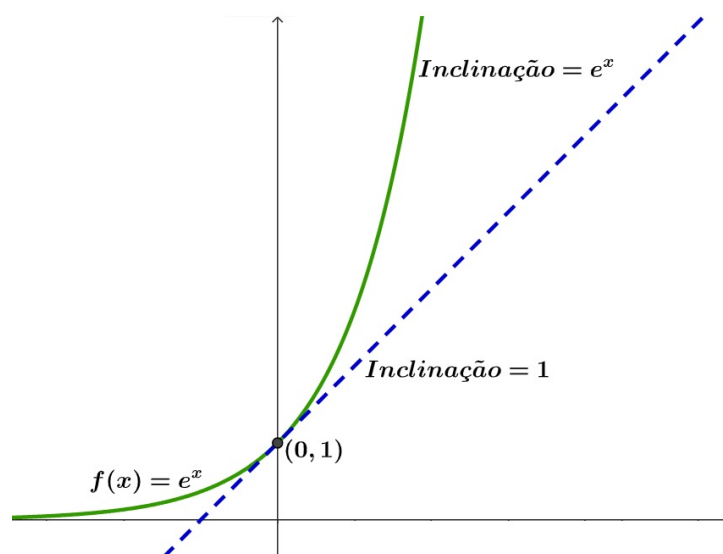
Manipulando algebricamente a equação acima, chega a conclusão de que $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$, ou seja, que a taxa de variação de qualquer função exponencial é proporcional à própria função.

A escolha ideal da base a deve ser um número entre 2 e 3, pois assim $f'(0) = 1$. Esse número ideal é conhecido como o Número de Euler e é denotado pela letra e .

Assim, a definição retirada do livro de Cálculo é que e é um número tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Analisando geometricamente essa definição, percebe-se que a reta tangente em $(0,1)$ tem uma inclinação $f'(0)$ que é exatamente 1, conforme ilustrado na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Reta tangente a função e^x 

Fonte: A Autora.

Na equação $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$, substituindo a por e e $f'(0)$ por 1, obtém-se uma importante fórmula de diferenciação para a Função Exponencial Natural:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Ou seja, uma característica notável dessa função é que sua derivada é a própria função.

Após esta demonstração significativa, o autor segue com exemplos e exercícios de fixação.

- Cálculo das Funções de uma Variável (2003)

Adiante, apresento o livro de Geraldo Ávila, um renomado autor cujo trabalho é amplamente reconhecido. A importância de sua obra reside na maneira como ele aborda os conceitos fundamentais do cálculo diferencial e integral, com um foco específico em funções de uma variável. O autor oferece uma ampla gama de exercícios, mantendo um rigor matemático que contribui para a construção de uma base sólida em cálculo.

No Capítulo 7, Ávila define o logaritmo como a área sob a hipérbole $y = 1/x$, afirmando que essa definição está mais alinhada com o espírito do Cálculo.

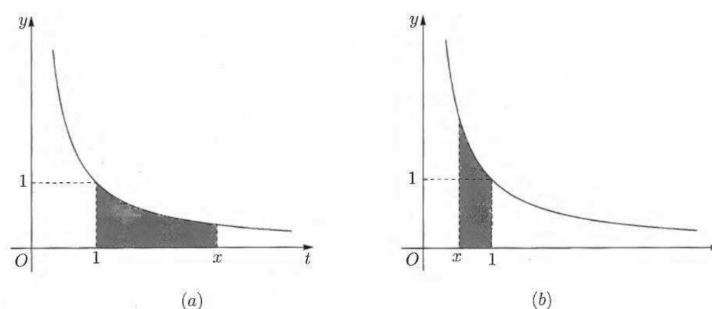
A definição de logaritmo, seguindo os rigores matemáticos, é dada como:

$$\log_a N = r \iff N = a^r.$$

Após a definição, o livro aborda o conceito de logaritmo natural, que é apresentado como a área da figura delimitada pelas retas $t = 0$, $t = x$, o eixo Ot e a hipérbole $y = 1/t$, sendo considerada positiva se $x > 1$, zero se $x = 1$, e negativa se $0 < x < 1$.

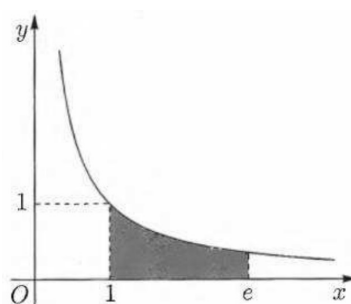
Em seguida, o livro discute o logaritmo natural de um número $x > 0$. A definição do número e é apresentada como aquele cujo logaritmo natural é igual a 1.

Figura 2.7 – Áreas sombreadas que representam $\ln x$, positivo em (a) e negativo em (b)



Fonte: Avila (2003).

Figura 2.8 – Área sombreada com medida unitária definindo o número e



Fonte: Avila (2003).

No Capítulo 11, onde o autor aborda funções definidas por integrais, o logaritmo é novamente tratado como uma área, sendo definido pela integral de $1/x$. Matematicamente:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Assim, pelo rigor matemático, o ideal seria apresentar o logaritmo por meio da integral, ao invés de simplesmente como o expoente ao qual se deve elevar a base para se obter o número dado.

O autor continua a obra com mais exemplos e definições em torno de outras funções definidas por integrais.

- Cálculo (v. 2) (2011b)

Mais uma vez, retornamos ao autor James Stewart, agora com o segundo volume de seu livro de Cálculo. Nesta etapa, analisaremos o número e por meio de uma série.

Ao iniciar o Capítulo 11, "Sequências e Séries", o autor faz referência ao número decimal infinito π . Em seguida, ele começa a explorar as definições de séries infinitas, somas parciais, séries geométricas, séries harmônicas, entre outros testes e projeções, até chegar à Série de Taylor e Maclaurin.

Ele introduz o subtópico supondo que e^x seja uma função que possa ser representada por uma série de potências. Após várias manipulações algébricas, chega-se à seguinte fórmula:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ para todo } x.$$

Em particular, quando $x = 1$, obtemos a expressão do número e como a soma de uma série infinita:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.1)$$

Em 1748 Euler usou a equação (2.1) para achar o valor correto de e com 23 algarismos.

2.4 QUESTÕES DO ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado em 1998 pelo Ministério da Educação (MEC) para avaliar a qualidade do ensino no Brasil. No entanto, foi apenas em 2004 que a prova passou a ser utilizada como critério para ingresso em instituições de Ensino Superior.

O ENEM é composto por 180 questões, distribuídas em quatro áreas do conhecimento: Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, e Matemática e suas Tecnologias, além da redação.

Os estudantes podem utilizar a nota do ENEM para três programas do Ministério da Educação: Sistema de Seleção Unificada (SiSU), Programa Universidade para Todos (ProUni) e Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior (Fies).

Tanto o ENEM quanto a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) possuem suas próprias habilidades e competências, embora ambas estejam interligadas. A BNCC estabelece que todos os alunos devem aprender a partir de um currículo comum, enquanto o ENEM avalia os alunos em relação às competências e habilidades essenciais para a conclusão do Ensino Médio e para o ingresso no Ensino Superior.

O Número de Euler não é um conceito frequentemente cobrado nas provas do ENEM, que tradicionalmente se concentram em temas mais amplos e gerais da matemática. Análises das provas do ENEM desde 2017, após a reforma do Novo Ensino Médio, mostram que não há questões que abordem explicitamente ou implicitamente o número de Euler na prova de Matemática.

A seguir, farei uma análise de questões de vestibulares que envolvem logaritmos neperianos e o Número de Euler, com o objetivo de realizar uma comparação abrangente.

2.5 QUESTÕES DE VESTIBULARES

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) distingue-se significativamente dos vestibulares tradicionais. Enquanto o ENEM apresenta uma prova padronizada com 180 questões

distribuídas em quatro áreas do conhecimento, focando em competências e habilidades específicas com ênfase na interdisciplinaridade e na aplicação prática do conhecimento, os vestibulares variam conforme a região. Esses vestibulares podem concentrar-se em disciplinas específicas e incluir tanto questões abertas quanto de múltipla escolha.

Neste trabalho, serão analisados os vestibulares de cinco universidades e um instituto de grande prestígio no Brasil: a Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), a Universidade Federal do Paraná (UFPR), a Universidade de São Paulo (USP), a Universidade Presbiteriana Mackenzie (Mackenzie), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e o Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Todas as análises realizadas neste estudo têm como ponto de partida o ano de 2017, em virtude das mudanças introduzidas com a implementação do Novo Ensino Médio.

• Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

A Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) possui mais de 60 anos de história no estado catarinense. Um dos diferenciais do vestibular da UFSC é que a maioria das questões adota um sistema de somatória, o que aumenta a dificuldade da prova. Além disso, uma única questão pode abordar conceitos de diferentes áreas, como matrizes, funções e trigonometria, exigindo uma compreensão abrangente e integrada por parte dos candidatos. Desde 2017, apenas uma questão envolvendo o logaritmo natural \ln foi cobrada, na prova de 2020. No entanto, o logaritmo nessa questão poderia ser substituído por outra base sem alterar significativamente a solução.

Figura 2.9 – Prova do vestibular da UFSC de 2020

QUESTÃO 27

01. Se $(x - 1, x - 2, x - \frac{5}{2}, \dots)$ é uma progressão geométrica, então o décimo termo dessa sequência é $\frac{1}{256}$.
02. Uma loja oferece um celular em duas formas de pagamento: à vista por R\$ 850,00 ou a prazo, com uma entrada no valor de R\$ 100,00 e uma prestação no valor de R\$ 900,00, trinta dias após a compra. A taxa de juros mensal cobrada pela loja é inferior a 20%.
04. Se (a_n) é uma progressão geométrica de termos positivos e razão q , então a sequência $(\ln(\frac{a_n}{2}))$ é uma progressão aritmética de razão $\ln(q)$.
08. Se o primeiro termo de uma progressão aritmética é 3, o último termo é 33 e o número de termos é igual à razão, então a soma de todos os termos da progressão é 108.
16. Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$, então $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

RESPOSTA

Fonte: UFSC (2024).

Nas provas analisadas, o número de Euler não aparece explicitamente ou implicitamente. No formulário da prova de Química de 2023, constavam as seguintes equações:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \ln(16) = 2,772.$$

No entanto, nenhuma dessas fórmulas foi essencial para a resolução dos exercícios subsequentes.

- **Universidade Federal do Paraná (UFPR)**

Com mais de 100 anos de história, a Universidade Federal do Paraná (UFPR) vem formando profissionais de diversas áreas, como professores, médicos e engenheiros. A UFPR é uma referência nacional, destacando-se pela qualidade de seus cursos e pela nota máxima (5) atribuída pelo MEC. Localizada em Curitiba, a universidade oferece mais de 50 cursos de graduação, além de programas de pós-graduação, incluindo mestrados e doutorados.

Desde 2017, quase todos os anos, a UFPR inclui ao menos uma questão envolvendo logaritmos em seus exames, com exceção do período da pandemia. Essas questões podem aparecer tanto na 1ª fase, composta por questões de múltipla escolha, quanto na 2ª fase, com questões abertas. No entanto, não foram encontradas questões nos vestibulares analisados que envolvam o número de Euler ou logaritmos neperianos.

- **Universidade de São Paulo (USP)**

Com sua criação em 1934, a Universidade de São Paulo (USP) está entre as 100 universidades com maior renome no mundo, sendo a única instituição de Ensino Superior da América Latina a figurar nesse ranking. Suas provas são elaboradas pela Fundação Universitária para o Vestibular (Fuvest) e são consideradas entre as mais exigidas pelos vestibulandos. Isso se deve ao fato de suas questões serem mais elaboradas, demandando um conhecimento aprofundado dos candidatos.

Desde o início da análise das provas, a Fuvest tem incluído questões envolvendo logaritmos tanto na primeira quanto na segunda fase de seus exames. No entanto, não foram encontradas questões que abordem o número de Euler diretamente.

- **Universidade Presbiteriana Mackenzie (Mackenzie)**

A Universidade Presbiteriana Mackenzie, uma das instituições de Ensino Superior mais tradicionais do Brasil, destaca-se pela qualidade de seus cursos e pela formação oferecida aos seus alunos. O vestibular da Mackenzie, embora desafiador, busca avaliar o conhecimento dos candidatos de maneira equilibrada, abordando uma ampla gama de conteúdos matemáticos. No entanto, desde 2017, não foram identificadas questões que envolvam diretamente o número de Euler ou logaritmos neperianos nos exames aplicados.

- **Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)**

A Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), fundada em 1966, é uma das principais instituições de Ensino Superior do Brasil, reconhecida pela excelência acadêmica e pela intensa produção científica. Seu vestibular, elaborado pela Comissão Permanente para os Vestibulares da Unicamp (Comvest), é conhecido por sua abrangência e profundidade, exigindo dos candidatos um alto nível de preparação.

Desde 2017, a Unicamp tem incluído questões envolvendo logaritmos em seus exames, tanto na primeira quanto na segunda fase. No entanto, não foram identificadas questões que abordem diretamente o número de Euler ou logaritmos neperianos nos vestibulares analisados.

- **Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)**

O Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), uma instituição pública federal militar, foi inaugurado há 74 anos e continua sendo o sonho de muitos jovens. No entanto, para ingressar no ITA, é necessária uma dedicação intensa aos estudos, pois seus vestibulares são conhecidos por serem um dos mais difíceis e concorridos do país. O conteúdo de logaritmos é cobrado consistentemente ao longo dos anos, tanto na primeira quanto na segunda fase do exame. As questões do vestibular do ITA são consideradas de nível médio a difícil, nunca baixando para o nível fácil.

Assim como nos vestibulares mencionados anteriormente, o ITA não apresentou questões que abordem diretamente o logaritmo natural ou o número de Euler. No entanto, o formulário presente nas provas de Química inclui as seguintes informações:

$$\text{Número de Euler } (e) = 2,72$$

$$\ln(X) = 2,3 \log(X).$$

Em conclusão, a análise dos vestibulares das universidades e do instituto brasileiro revela que, apesar da presença recorrente de questões sobre logaritmos, o número de Euler não tem sido diretamente abordado. Essa observação evidencia uma oportunidade para aprofundar a compreensão e a aplicação desse conceito fundamental. Pensando nisso, ao final deste trabalho, sugere-se uma atividade para trabalhar com o número de Euler de maneira que os alunos reconheçam sua importância e significado, valorizando esse admirável conteúdo.

3 REVISÃO HISTÓRICA

3.1 O NÚMERO DE EULER E A MATEMÁTICA FINANCEIRA

Ao longo da história, o conceito de Matemática Financeira tem desempenhado um papel fundamental no dia a dia das sociedades. Na transição da Idade Média para a Idade Moderna, tornou-se evidente que novas tecnologias eram necessárias para atender às crescentes demandas da época. Nos séculos XIV e XV, inovações como o relógio mecânico, a bússola e a imprensa não apenas redefiniram o papel da ciência, mas também impulsionaram uma nova era de avanço técnico e intelectual. Foi durante esse período que o interesse pela matemática cresceu significativamente, especialmente entre artesãos e engenheiros que buscavam solucionar problemas práticos do cotidiano, tais como questões relacionadas à balística, sistemas de bombas de água e outros temas de natureza aplicada (2012).

Importantes avanços científicos marcaram o final do século XVI e o início do século XVII, incluindo a circunavegação global realizada por Magalhães em 1521, a publicação do novo mapa do mundo por Gerhard Mercator (1512-1594) em 1569, o estabelecimento das leis da ciência mecânica por Galileu Galilei (1564-1642) e a formulação das leis do movimento planetário por Johannes Kepler (1571-1630). Todos esses marcos exigiam uma vasta quantidade de dados numéricos e, evidentemente, representavam um trabalho tedioso para realizar os cálculos necessários (2008).

No centro das preocupações humanas residem as questões financeiras e o desejo de acumular riquezas. Assim, em meio a todas essas descobertas, não é incomum deparar-se com um matemático anônimo ou até mesmo um comerciante que tenha percebido uma semelhança entre a acumulação de dinheiro e o seu comportamento matemático ao longo do tempo.

Quando os seres humanos perceberam uma relação entre dinheiro e tempo, surgiram os juros, definidos como o custo do crédito ou a remuneração de um investimento (2014); trata-se do pagamento pela utilização do poder aquisitivo ao longo de um período de tempo. Um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C. e atualmente em exposição no museu do Louvre, apresenta o seguinte problema: quanto tempo levará para uma quantia de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de juros compostos anuais de 20%? (2008). Apesar da falta das técnicas modernas, os babilônios conseguiram resolver esse problema de forma notável, chegando ao valor de 3,7870, o que se aproxima bastante do valor correto, 3,8018. Isso evidencia o sucesso dos babilônios na resolução desse desafio, mesmo sem o auxílio da álgebra moderna (2008).

Existem duas formas de caracterizar os juros: simples e compostos. No caso dos juros simples, a remuneração do capital (principal) é diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação. Já nos juros compostos, os juros formados em cada período são adicionados ao

capital, formando o montante (capital + juros) do período. Esse montante passa a ser o novo capital e incidirá juros sobre esse novo capital, e assim sucessivamente (2014).

Para ilustrar o conceito de juros compostos, consideremos o seguinte exemplo: um capital de R\$1000,00 é aplicado a uma taxa de 10% ao ano. Ao final do primeiro ano, o montante seria de $1000 + 1000 \cdot 0,1 = R\$1100,00$; ao final do segundo ano, seria de $1100 + 1100 \cdot 0,1 = R\$1210,00$; ao final do terceiro ano, seria de $1210 + 1210 \cdot 0,1 = R\$1331,00$, e assim por diante. De forma geral, podemos expressar a equação do montante ao final do primeiro ano como:

$$M = C + Ci = C(1 + i),$$

onde, M é o montante, C o capital e i a taxa de juros.

Ao término do segundo período, temos a seguinte expressão:

$$M = C(1 + i) + C(1 + i)i = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2.$$

Seguindo a mesma lógica, ao final de t anos teremos:

$$M = C(1 + i)^t, \quad (3.1)$$

que é a fórmula base para os cálculos financeiros.

No entanto, alguns juros bancários são compostos mais de uma vez por ano (2008). Nesse caso, utilizando os dados anteriores e calculando o montante com uma taxa de juros semestral, o banco empregará metade da taxa de juros anual como taxa por período. Portanto, teríamos $1000 \cdot (1,05)^2 = 1102,50$, resultando em um ganho de R\$2,50 em relação ao saldo anterior, calculado anualmente.

No setor bancário, diversos tipos de composição de juros são utilizados - anual, semestral, trimestral, mensal, semanal e diário. Suponhamos que essa composição seja realizada n vezes ao ano; conseqüentemente, a taxa anual desses juros deve ser dividida por n , resultando em i/n . No entanto, se a taxa estiver sendo dividida, isso implica que pode haver n períodos de conversão. Assim, a fórmula (3.1) será:

$$M = C \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n \cdot t}, \quad (3.2)$$

Com essa nova fórmula, podemos comparar quanto um investimento de R\$100,00 realizado ao longo de um ano, com uma taxa anual de 10%, renderá em diferentes períodos de composição:

Tabela 3.1 – Investimento de R\$100,00 ao longo de um ano com uma taxa de 10% ao ano

Período de conversão	n	i/n	M
Anual	1	0,1	R\$ 110,00
Semestral	2	0,05	R\$110,25
Trimestral	4	0,0125	R\$110,38
Mensal	12	0,00833	R\$110,47
Semanal	52	0,001923	R\$110,51
Diário	365	0,0002739	R\$110,52

Fonte: A Autora.

Observa-se que os valores apresentados na Tabela 3.1 estão aumentando gradualmente, de forma que ao se chegar nos montantes semanais e diários, as variações são mínimas, diminuindo que a escolha da conta na qual o dinheiro é investido tem pouco impacto.

Agora, vamos analisar um cenário em que o banco era extremamente generoso e aplicou uma taxa de juros de 100 por cento. Embora isso seja um caso hipotético, será útil para examinarmos o comportamento da fórmula (3.2). Assim, temos $i = 1$, e para simplificar, assumiremos $t = 1$ e $C = R\$1,00$.

Dessa forma, nossa nova fórmula se dá por:

$$M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (3.3)$$

Acompanhe na Tabela 3.2 os resultados obtidos para M à medida que n aumenta:

Tabela 3.2 – Resultados obtidos para M à medida que n aumenta

n	M
1	2
2	2,25
3	2,37037037
4	2,44140625
5	2,48832000
10	2,59374246
100	2,70481383
1.000	2,71692393
10.000	2,71814593
100.000	2,71826824
1.000.000	2,71828047
10.000.000	2,71828169
100.000.000	2,71828179
1.000.000.000	2,71828203

Fonte: A Autora.

Observa-se que o valor de M tende a se aproximar do valor de 2,71828182, à medida que n aumenta.

Além dos juros simples e compostos, existe também o conceito de “juros contínuos”. Diferentemente dos juros compostos, que são aplicados em intervalos discretos de tempo, os juros contínuos são acrescidos de forma instantânea e contínua, o que implica que o tempo tende ao infinito. Esse tipo de capitalização pode ser modelado por meio da fórmula $M = C \cdot e^{i \cdot n}$, onde M representa o montante, C é o capital inicial, i é a taxa de juros, n é o tempo e e é a constante de Euler. Os juros contínuos são frequentemente aplicados em áreas como finanças, investimentos, empréstimos e previdência. Por exemplo, considere o caso de uma pessoa que aplica R\$10.000,00 em um fundo de previdência privada com uma taxa de juros compostos contínuos de 6% ao ano, durante um período de 20 anos. Nesse caso, o montante final seria calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M &= 10000 \cdot e^{0,06 \cdot 20} \\ &= 10000 \cdot e^{1,2} \\ &\approx 33201,17. \end{aligned}$$

Portanto, após 20 anos, o montante acumulado seria aproximadamente R\$ 33.201,17.

Ainda não sabe ao certo quem foi a primeira pessoa a perceber esse comportamento peculiar. À medida que n tende a infinito o valor da expressão (3.3) se aproxima cada vez mais do número que mais tarde seria denotado por e . Portanto, o dado exato de sua descoberta permanece obscuro. Como mencionado anteriormente, foi nesse período, no início do século XII, que houve um grande aumento nas atividades comerciais, o que pode ter levado ao cálculo de juros e, conseqüentemente, ao estudo desse comportamento da expressão. Foi também nesta época que Napier inventou os logaritmos, o que está diretamente ligado com o número de Euler.

3.2 JOHN NAPIER

No castelo Merchiston, próximo a Edimburgo, na Escócia, nasceu John Napier em 1550, embora os detalhes de sua infância permaneçam imprecisos. Napier é reconhecido como o criador dos logaritmos, um conceito matemático que recebeu grande acolhida pela comunidade científica de sua época. Aos 13 anos, ingressou na Universidade de St. Andrews, onde estudou Religião.

Apesar de seu interesse inicial estar voltado para assuntos religiosos, especialmente o ativismo religioso, como evidenciado em sua obra *A Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John* (1593), na qual Napier criticava veementemente a Igreja Católica (2008).

Em 1571, Napier regressou à sua cidade natal e, como proprietários de terras, direcionou seu interesse para aprimorar a agricultura e a pecuária. Entre suas experiências e invenções destacam-se diversos métodos para fertilização do solo, como a utilização de vários tipos de esterco e saís, além do desenvolvimento de um parafuso hidráulico para controle do nível de água em minas de carvão. Napier também concedeu planos para a construção de espelhos gigantes capazes de incendiar navios inimigos, entre outras contribuições (2008).

No entanto, toda essa engenhosidade, não é o fator determinante para que seu nome seja lembrado até os dias atuais: seu reconhecimento deve principalmente à sua contribuição para a ideia matemática abstrata. Seus estudos sobre logaritmos, que levaram cerca de 20 anos para serem desenvolvidos, garantiram seu lugar na história da ciência.

Com o contínuo avanço da expansão do conhecimento científico em todas as áreas, um dos principais obstáculos enfrentados na época era encontrar um método para simplificar cálculos tediosos. Napier assumiu esse desafio de frente. Dois marcos iniciais podem ser identificados como fortes influências para sua criação: a trigonometria e as progressões.

Napier já estava familiarizado com os conceitos de trigonometria, incluindo a fórmula

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2}.$$

Dado que somar e subtrair são operações mais simples que multiplicar e dividir, essas fórmulas oferecem uma maneira de reduzir uma operação aritmética para outra mais simples.

Uma segunda concepção estava intimamente relacionada às progressões geométricas. Em seu livro *Arithmetica integra* (1544), o matemático alemão Michael Stifel (1478-1567) escreveu: “Se multiplicarmos quaisquer dois termos da progressão $1, q, q^2, \dots$ o resultado será o mesmo se somarmos os expoentes correspondentes” (2008).

Assim, calcular $q^5 \cdot q^3$ equivale a calcular q^8 . De forma análoga, o mesmo ocorre com a divisão; isto é, q^5/q^3 resulta em q^2 , diferindo da multiplicação pelo fato de que, nesse caso, os expoentes são subtraídos.

Onde Stifel tinha como foco apenas os números inteiros, Napier foi além, estendendo esses conceitos para uma faixa contínua de valores. Seu pensamento era o seguinte: “Se pudermos escrever qualquer número positivo como uma potência de algum dado número fixo, então a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes” (2008).

Ao generalizarmos a ideia, observamos que analisar um número elevado à n ésima potência equivale a somar o expoente n vezes ao próprio número, ou seja, multiplicá-lo por n . Da mesma forma, calcular a n ésima raiz envolve uma operação de subtração repetida n vezes, ou ainda, dividir pelo valor de n . Em resumo, essas operações sempre se reduzem a uma posição menor, levando assim a sua complexidade.

Para ilustrar o que foi mencionado, sugerimos que estamos trabalhando com uma base de número 2. Ao realizar a operação $16 \cdot 64$, torna-se mais fácil encontrar seus expoentes com o auxílio de uma tabela, como a que se segue:

Tabela 3.3 – Potências de base 2

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2^n	...	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	252	512	1024	...

Fonte: A Autora.

Portanto, para realizar a operação mencionada, basta somar os expoentes 4 e 6, e encontrar o valor correspondente na tabela, o que é muito mais simples do que multiplicar diretamente 16 por 64. O resultado esperado, portanto, é 1024. Os valores de n eram chamados de logaritmos (sequência aritmética), enquanto os valores de 2^n eram os antilogaritmos (sequência geométrica).

No entanto, é evidente que todo esse esforço não era exclusivamente voltado para manipular números inteiros. Para expandir a sua aplicabilidade, era necessário preencher os “espaços” na tabela, isto é, os valores intermediários entre os números inteiros. A escolha da base adequada era crucial, pois ela deveria ser suficientemente pequena para garantir que suas potências aumentassem de forma razoavelmente lenta (2008). E como Napier fez essa escolha da base? Ele reconheceu que a base não poderia ser muito pequena, pois isso resultaria em um crescimento muito lento das potências, o que tornaria o sistema pouco prático. Após diversas análises, Napier concluiu que a base adequado para preencher os espaços vazios era 0,9999999, ou seja, $1 - 10^{-7}$. Em outras palavras, um número próximo de 1, mas não tão próximo a ponto de comprometer a eficácia do método. O objetivo principal era evitar o uso de frações, que, embora fossem conceitos conhecidos da época, o público não se sentia confortável em lidar com elas.

Após selecionar o número “ideal”, Napier iniciou seu processo de subtrações repetidas para determinar os termos sucessivos de sua progressão, um empreendimento que consumiu 20 anos de sua vida (1594-1614). Certamente, uma das tarefas mais aborrecedoras para um cientista. Sua primeira tabela continha 101 elementos, com o primeiro termo sendo $10^7 = 10.000.000$, seguido de $10^7 \cdot (1 - 10^{-7}) = 9.999.999$ até atingir o número $10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{100} = 9.999.900$.

Tabela 3.4 – Tabela de 101 elementos

n	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^n$
0	10000000
1	9999999
2	9999998
3	9999997
4	9999996
...	...
98	9999902
99	9999901
100	9999900

Fonte: A Autora.

Após feito esse primeiro trabalho, Napier fez uma segunda tabela, agora tendo como base o número 10^{-5} , derivado do último número da tabela anterior por 10^7 . Essa nova tabela continha 51 elementos.

Tabela 3.5 – Tabela de 51 elementos

n	$10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^n$
0	10000000
1	9999900
2	9999800
3	9999700
...	...
48	9995201
49	9995101
50	9995001

Fonte: A Autora.

A terceira tabela que continha 21 elementos, cuja base era a razão $9995001 : 10^7$. E para finalizar, a quarta tabela que tinha 69 elementos e como base o último elemento da tabela anterior, 9900493, sobre 10^7 , ou aproximadamente 0,99.

Tabela 3.6 – Tabela de 69 elementos

n	$10^7 \cdot (0,99)^n$
0	10000000
1	9900493
2	9801977
3	9704441
...	...
66	5168343
67	5116914
68	5065998

Fonte: A Autora.

Ao concluir esse árduo trabalho, Napier inicialmente denominou o expoente de cada potência como “número artificial”, posteriormente renomeando-os como *logaritmo*, que significa “número proporcional” (2008).

A definição de logaritmo estabelecida por Napier difere em vários aspectos da definição moderna (introduzida por Leonard Euler em 1728). Napier propôs que $N = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^L$, onde o expoente L representa o logaritmo (neperiano) de N , enquanto Euler define que, se $N = b^L$, em que b é um número positivo fixo diferente de 1, então L é o logaritmo (de base b) de N . Assim, no sistema de Napier, $L = 0$ corresponde a $N = 10^7$, ao passo que no sistema moderno, $L = 0$ equivale a $N = 1$. Além disso, os logaritmos de Napier não obedeceram à propriedade do produto dos logaritmos, e enquanto os logaritmos de Napier diminuíram com o aumento dos números, os logaritmos de base 10 aumentaram. Talvez esse problema pudesse ter sido evitado, ou chegado próximo ao sistema moderno, se Napier tivesse trabalhado com frações decimais (2008).

O que Napier chegou muito perto de descobrir, e que um século depois foi reconhecido como a base universal dos logaritmos, é mundialmente conhecido como o número e , que é o limite de $(1 + 1/n)^n$ quando n tende ao infinito.

3.3 HENRY BRIGGS

Em 1561 nasceu Henry Briggs, um matemático que aprimorou e revolucionou a ideia de logaritmos criada por Napier. Embora tenha falecido em 1613, seu nome é lembrado até hoje por sua grande contribuição com as tábuas de logaritmos, que foram de suma importância até meados século XX. Quando soube da notícia sobre os logaritmos de Napier, Briggs era professor de geometria no Colégio Gresham, em Londres. Logo após, deslocou-se até a Escócia para se encontrar pessoalmente com esse grande inventor (2008).

Briggs propôs duas alterações para tornar as tabelas de Napier mais convenientes. A primeira foi que o logaritmo de 1 fosse igual a zero, em vez de 10^7 , e a segunda foi trabalhar com a base 10, de modo que $\log_{10} 10 = 1$. Napier aceitou as sugestões de Briggs, mas já não estava mais em condições de realizar tais mudanças, então Briggs assumiu essa tarefa, completando-a após alguns anos de execução.

Na época, os matemáticos já conheciam a definição e a propriedade fundamental das potências. A definição tradicional dos logaritmos nos livros é a seguinte: dado um número real $a > 0$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y ao qual se deve elevar a para obter x , ou seja, $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ (1996).

Briggs já tinha claro o conceito de que, se x é um número irracional e a é um número positivo maior do que 1, então a^x é um número maior que a^y e menor que a^z , onde y e z são números racionais. Assim, temos $a^y < a^x < a^z$, ou ainda, $y < x < z$. Desta forma, quanto mais os valores de y e z se aproximam de x , a^y e a^z ficarão cada vez mais próximos um do outro, tendendo ao mesmo limite, a^x . Essa foi exatamente a ideia usada para determinar os logaritmos irracionais: o processo de aproximações sucessivas. A seguir, é descrito como esse processo foi realizado.

Vamos descobrir o valor aproximado de $\log_{10} 2 = x$. Para resolver este problema, vamos usar a definição de logaritmo, ou seja $10^x = 2$. Os cálculos mais detalhados podem ser encontrados em (2024). O valor irracional de x que queremos encontrar pode ser estimado da seguinte maneira:

$$1 < 2 < 10$$

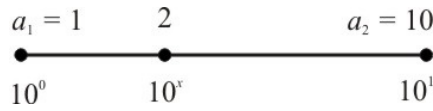
$$10^0 < 2 < 10^1$$

$$\log 10^0 < \log 2 < \log 10^1$$

$$0 < x < 1.$$

Portanto, $\log 2$ é um irracional que se encontra entre 0 e 1.

Figura 3.1 – Primeira aproximação para o logaritmo de 2



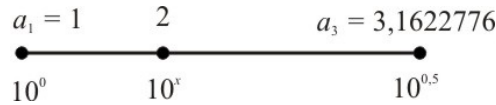
Fonte: Kilhian (2024).

Agora, ao calcular a média geométrica entre os dois extremos, obtemos uma nova aproximação:

$$a = \sqrt{10^0 \cdot 10^1} = \sqrt{10} = 10^{0,5} = 3,1622776.$$

A localização na reta numérica é ilustrada abaixo:

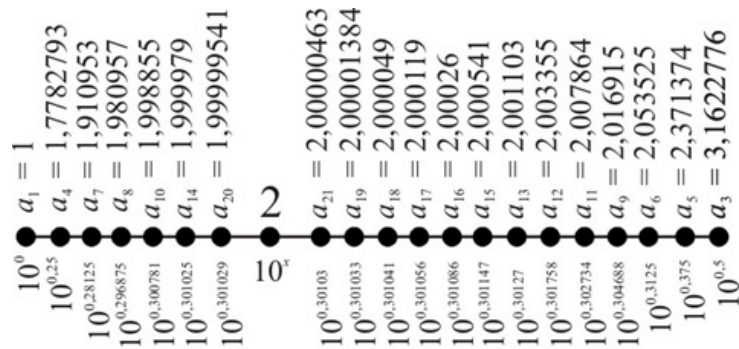
Figura 3.2 – Segunda aproximação para o logaritmo de 2



Fonte: Kilhian (2024).

Repetindo esse processo algumas vezes, tendemos ao valor que buscamos, ou seja, $\log 2$. A figura abaixo mostra essas aproximações em torno do número 2.

Figura 3.3 – Aproximação para o logaritmo de 2



Fonte: Kilhian (2024).

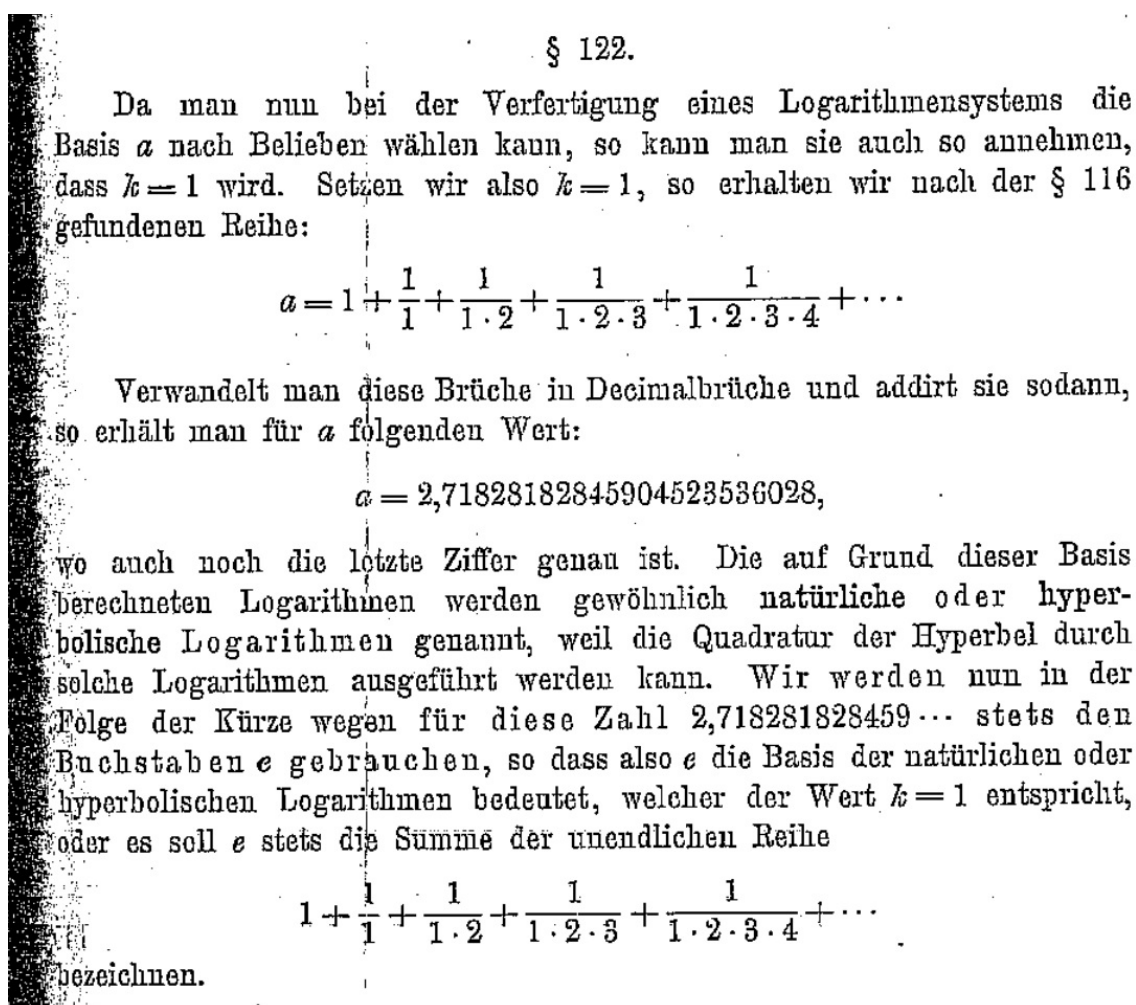
Concluimos que o valor aproximado de $\log 2$, com 5 casas decimais, é 0,30103. No entanto, ao calcular sua tabela de logaritmos, Briggs utilizou 14 casas decimais, determinando os logaritmos de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000.

Neste caso, como o número não é uma potência de 10, o logaritmo é composto por uma soma da característica (parte inteira) e da mantissa (parte decimal, encontrada na tabela).

não tenha sido o primeiro a usar essa letra para esse fim. Euler também usou a letra Σ para indicar um somatório e o símbolo $f(x)$ para representar uma função de x .

Embora a existência do número e seja mencionado desde o século XVII, foi somente no século XVIII, após Euler popularizar o uso do símbolo, que sua representação tornou-se padronizada. Em 1727, em uma de suas exposições manuscritas sobre disparos de canhões, Euler “usou e mais de uma dúzia de vezes para representar a base do sistema de logaritmos naturais” (2012). Em 1731, em uma carta para Goldbach, o matemático novamente usou a letra e para referir-se “aquele número cujo logaritmo hiperbólico é igual a 1” (2012). O número e foi impresso pela primeira vez em uma obra intitulada *Mechanica*, de 1736. Na Figura 3.5, é apresentado a tradução em alemão, do trecho de uma edição de 1885 de uma de suas obras mais conhecidas, *Introductio in analysin infinitorum*, publicada pela primeira vez em 1748. Por meio da série $\sum 1/n!$, Euler obteve uma aproximação do número e com 23 casas decimais.

Figura 3.5 – Trecho da obra *Introductio in analysin infinitorum*, de Leonhard Euler



Fonte: Euler (1885).

3.5 IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA

Existem várias provas da irracionalidade do número e (2024). A prova mais famosa foi apresentada por Jean-Baptiste Joseph Fourier em 1815 e está reproduzida a seguir (2017).

A prova por contradição é baseada na igualdade

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Supondo que e seja racional, ou seja, $e = a/b$ para inteiros a e $b > 0$, então

$$n!be = n!a$$

para todo $n \geq 0$. No lado direito temos um número inteiro, enquanto que o lado esquerdo se decompõe em uma parte inteira

$$n!b \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

e uma segunda parte

$$n!b \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \right),$$

pois

$$e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \right).$$

A segunda parte pode ser simplificada para

$$b \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right).$$

Pela comparação com a série geométrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

a segunda parte está entre

$$\frac{b}{n+1} \text{ e } \frac{b}{n}.$$

A segunda parte deveria ser inteira para todo $n \geq 0$, mas para n grande certamente isto não pode ser verdade, chegando a uma contradição. Portanto, e é irracional.

Um número real não algébrico é denominado transcendental, o que significa que não pode ser expresso como solução de uma descoberta polinomial com coeficientes inteiros. Não é

surpresa que o número e seja transcendental, o que despertou grande fascínio entre os matemáticos do século XIX. Johann Heinrich Lambert (1728-1777), um matemático-alemão, suspeitava que o número e fosse transcendental, embora não conseguisse provar para qualquer equação com coeficientes inteiros, exceto para a quadrática. A prova dessa transcendência foi realizada pelo matemático francês Charles Hermite (1822-1901) em 1873 (2008).

Como o objetivo deste trabalho é ser menos teórico e mais voltado para professores, a demonstração da transcendência do número e será omitida, mas pode ser encontrada em (1975).

3.6 A MAIS BELA DE TODAS AS FÓRMULAS

A Identidade de Euler fascina igualmente o místico, o cientista, o filósofo e o matemático (2008). Para demonstrar tal identidade, serão necessários alguns conhecimentos de séries de potências, que podem ser encontrados na referência (2011b).

Para representar uma função $f(x)$ como uma série de potências, uma abordagem comum é utilizar a expansão de Taylor. Essa expansão, centrada em um ponto a , é expressa como:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Para o caso especial em que $a = 0$, uma série de Taylor se reduz à série de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Podemos aplicar a série de Maclaurin à função $f(x) = e^x$. Como $f^{(n)}(x) = e^x$, e consequentemente $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, para todo n . Portanto,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (3.4)$$

Em termos gerais:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Além disso, podemos definir outras funções elementares com base na série de Maclaurin. Por exemplo, considere uma função $f(x) = \cos x$, logo:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (3.5)$$

Ou ainda, se $f(x) = \sin x$, então:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (3.6)$$

Observe que a função exponencial cresce rapidamente para o infinito à medida que x aumenta, enquanto as funções seno e cosseno oscilam entre 1 e -1 . Foi nesse contexto que surgiu a grande ideia de Euler. Em 1737, ele introduziu a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ e, em um momento de grande genialidade, concluiu que poderia substituir x por ix na equação (3.4), resultando em:

$$e^{ix} = 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \dots \quad (3.7)$$

Visto que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e ciclicamente assim por diante, decorre da Equação (3.7) que:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{i}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{i}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{i}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - \frac{i}{7!}x^7 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right). \end{aligned}$$

E, a partir das Equações (3.5) e (3.6), podemos concluir que:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Assim, demostramos a **Fórmula de Euler**. Mas o fascínio não termina aqui! Ao escolhermos $x = \pi$, obtemos:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = 1 + i \cdot 0 = -1,$$

o que nos leva a:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (3.8)$$

Essa expressão, conhecida como **Identidade de Euler**, é considerada por muitos matemáticos como “a mais bela de todas as fórmulas” (2008), pois incorpora os cinco números mais importantes da matemática:

- e : a base do logaritmo natural, vinda do Cálculo;
- i : o número que representa a unidade imaginária $\sqrt{-1}$, vindo da Álgebra;
- π : o número pi, a razão de uma circunferência pelo seu diâmetro, vindo da Geometria;
- 1: o elemento neutro da multiplicação;
- 0: o elemento neutro da adição.

Além disso, essa fórmula engloba as três operações matemáticas fundamentais: adição, subtração e multiplicação.

4 RECURSO EDUCACIONAL

A utilização de jogos como ferramenta pedagógica tem se mostrado eficaz no desenvolvimento de habilidades matemáticas, promovendo o engajamento e a motivação dos alunos. De acordo com (2020), o uso de jogos digitais pode criar um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, ajudar os alunos a lidar com conceitos complexos de maneira divertida e menos intimidadora. Além disso, os jogos estimulam a resolução de problemas, o raciocínio lógico e a colaboração entre os alunos.

Os jogos digitais, em especial, são uma forma de ensino que conecta o conteúdo curricular com o universo tecnológico que já faz parte do cotidiano dos alunos. Através da ludicidade, os alunos podem aprender conceitos de forma interativa, além de poderem aplicar o conhecimento matemático em diferentes contextos práticos.

O desenvolvimento do jogo no RPG Maker MV não apenas enriquece a compreensão dos alunos sobre o número de Euler, mas também destaca a eficácia dos jogos como ferramentas pedagógicas no ensino da matemática. Ao integrar conceitos matemáticos em um formato lúdico e interativo, o jogo promove o engajamento dos alunos, permitindo que eles apliquem o conhecimento em situações práticas e desafiadoras.

A implementação de jogos digitais no ensino de matemática se mostra não apenas uma inovação, mas uma necessidade no contexto educacional atual. Ao utilizar ferramentas interativas como o RPG Maker, os educadores podem criar experiências de aprendizado mais significativas, que conectam a teoria à prática, estimulando a curiosidade e a motivação dos alunos.

4.1 ESTRUTURA DO JOGO

O jogo desenvolvido contém quatro missões, cada uma abordando um conceito matemático relacionado ao número de Euler. A proposta do jogo em sala de aula é que os alunos avancem pelas fases, aplicando conceitos matemáticos ao resolver enigmas e problemas. As fases podem ser discutidas e trabalhadas previamente em aula, fornecendo aos alunos as ferramentas e conhecimentos necessários para resolver os desafios propostos.

Cada fase do jogo foi projetada para abordar diferentes aspectos do número de Euler, facilitando a construção de um conhecimento sólido e progressivo. Além disso, a estrutura do jogo favorece a colaboração e a discussão em sala de aula, permitindo que os alunos compartilhem estratégias e aprendam uns com os outros.

Para baixar o jogo, além de acessar o passo a passo, acesse o link:

<https://drive.google.com/drive/folders/1hBncZ5TLTXtxUHiR6WCQGl_GafmnhHwR>

4.1.1 FASE 1: A FÓRMULA EXPONENCIAL

Na primeira fase, o jogador deve resolver um enigma envolvendo uma fórmula exponencial. Este enigma pode ser usado para introduzir ou revisar o conceito de crescimento exponencial e a base do número de Euler e . Em um contexto de sala de aula, esta fase pode ser acompanhada de uma breve exposição teórica sobre o crescimento exponencial e suas aplicações práticas, seguidamente pela resolução de problemas semelhantes.

Figura 4.1 – Fase 1: Numerópolis



Fonte: Micolino (2024).

Na fase 1, o desafio proposto é o seguinte: A praga está se espalhando de acordo com a fórmula $N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$. Com $N_0 = 100$ e $k = 0,1$, quanto da praga restará após 10 horas?

Para resolver essa questão, substituímos os valores conhecidos de N_0 , k e t na fórmula:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$$

$$N(10) = 100 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} = 100 \cdot e^{-1}.$$

Fazendo $e = 2,71$, obtemos:

$$N(10) = 36,9 \approx 37.$$

Portanto, após 10 horas, restarão aproximadamente 37 unidades da praga.

4.1.2 FASE 2: TEMPO DE MEIA-VIDA

Na segunda fase do jogo, o jogador é desafiado a calcular o tempo de meia-vida de uma praga para derrotar um inimigo. Esse problema relaciona-se ao conceito de declínio exponencial, extremamente relevante em diversas áreas da ciência e da matemática, como física e biologia.

Figura 4.2 – Fase 2: Numerópolis



Fonte: Micolino (2024).

Nesta, o jogador deve determinar o tempo de meia-vida com base na fase seguinte problema: A fórmula do tempo de meia-vida é $t = \ln(2)/k$. Sabendo que $k = 0,1$, quanto tempo levará para a praga se reduzir pela metade?

Substituindo o valor de k na fórmula e sabendo que $\ln(2) = 0,69$:

$$t = \frac{\ln(2)}{k}$$

$$t = \frac{0,69}{0,1} = 6,9 \approx 7.$$

Desse modo, o jogador conclui que o tempo de meia-vida da praga é de aproximadamente 7 horas.

4.1.3 FASE 3: O DECAIMENTO ATÉ 5 UNIDADES

Nesta fase, o jogador deve calcular o tempo necessário para que uma praga decaia e atinja 5 unidades, interagindo com um item mágico. Este desafio aprofunda o conceito de decaimento

exponencial e a aplicação da fórmula $N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$, já usada na fase 1.

Figura 4.3 – Fase 3: Numerópolis



Fonte: Micolino (2024).

Para resolver essa questão, sabemos que o valor final da praga deve ser $N(t) = 5$. Assim, temos:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$$

$$5 = 100 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \Rightarrow e^{-0,1 \cdot t} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados:

$$\ln \frac{1}{20} = \ln e^{-0,1 \cdot t}.$$

Utilizando as propriedades dos logaritmos e considerando $\ln 20 \approx 3$, temos:

$$\ln 1 - \ln 20 = -0,1 \cdot t \cdot \ln e \Rightarrow 0 - 3 = -0,1 \cdot t \cdot 1$$

$$t = \frac{3}{0,1} \Rightarrow t = 30.$$

Desse modo, o jogador conclui que o tempo necessário para que a praga decaia até 5 unidades é de 30 horas.

4.1.4 FASE 4: MISSÃO FINAL

A fase final do jogo reúne os conceitos explorados nas etapas anteriores, desafiando o aluno a aplicar seu conhecimento sobre o número de Euler e o declínio exponencial para solucionar o problema derradeiro. Nesta missão, o objetivo é calcular o tempo necessário para que a praga atinja apenas 1 unidade, tornando-se, assim, inofensiva.

Figura 4.4 – Fase 4: Numerópolis



Fonte: Micolino (2024).

Para resolver o desafio, utilizamos

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}.$$

Dado que $N(t) = 1$, $N_0 = 100$ e $k = -0,1$, e considerando $\ln 100 \approx 4,6$, temos:

$$1 = 100 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{100} = e^{-0,1 \cdot t}$$

$$\ln \frac{1}{100} = \ln e^{-0,1 \cdot t} \Rightarrow \ln 1 - \ln 100 = -0,1 \cdot t \cdot \ln e \Rightarrow 0 - 4,6 = -0,1 \cdot t \cdot 1$$

$$t = \frac{4,6}{0,1} = 46.$$

Dessa forma, o aluno conclui que o tempo necessário para que a praga se torne inofensiva é de 46 horas, encerrando os desafios propostos pelo jogo.

4.2 PASSO A PASSO

- **Passo 1: *Entrando em Numerópolis***

O jogador começa sua aventura na cidade de Numerópolis, que está sendo devastada por uma praga misteriosa. A missão do jogador é salvar a cidade resolvendo desafios matemáticos.

Objetivo: Explorar as quatro portas disponíveis na cidade para completar missões relacionadas ao número de Euler e à praga.

Dica: Incentive os alunos a explorar os diálogos com os NPCs, pois eles fornecem dicas úteis sobre a praga e as missões.

- **Passo 2: *Escolhendo as Portas***

Há quatro portas na cidade, cada uma com uma missão diferente. Os alunos devem completar as missões em ordem, pois cada uma depende da conclusão da anterior:

1. **Porta 1 - Laboratório Mágico (Fase 1):** A primeira missão envolve descobrir a fórmula da praga e resolver um problema de crescimento exponencial.
2. **Porta 2 - Biblioteca (Fase 2):** A segunda missão exige calcular o tempo de meia-vida da praga para derrotar um inimigo.
3. **Porta 3 - Área Contaminada (Fase 3):** A missão aqui é calcular o tempo necessário para que a praga decaia até um nível seguro.
4. **Porta 4 - Castelo (Fase 4):** A missão final, onde o jogador deve aplicar todos os conceitos aprendidos e resolver um problema complexo para salvar a cidade.

- **Passo 3: *Resolvendo os Desafios***

Cada porta apresenta um desafio matemático que os alunos devem resolver para avançar no jogo.

Dica para os alunos: Revisar as fórmulas apresentadas na sala de aula antes de tentar resolver os enigmas. O professor pode fornecer exercícios preparatórios que simulam as situações do jogo.

Interface do Jogo: O jogador será apresentado a perguntas e terá de inserir a resposta correta.

- **Passo 4: Interações com Personagens e Itens**

Durante o jogo, os alunos interagem com personagens não jogáveis (NPCs) que oferecem dicas sobre como resolver os desafios. Em algumas missões, os alunos também precisam interagir com itens mágicos, como um orbe ou um relógio, que os ajudam a resolver os enigmas.

Dica para os professores: Incentive os alunos a discutirem em grupo as estratégias para resolver os problemas do jogo. Isso promove o trabalho em equipe e o pensamento crítico.

- **Passo 5: Completar as Missões**

O jogador só pode passar para a próxima porta após concluir a missão anterior. Isso cria uma sequência lógica, que reforça a importância de resolver os problemas de forma ordenada.

Dica: Reforce a importância de cada missão, pois cada uma aborda um conceito específico sobre o número de Euler e sua aplicação em situações de crescimento ou decaimento exponencial.

- **Passo 6: A Missão Final**

Na missão final, o aluno precisa calcular o tempo necessário para neutralizar a praga e salvar Numerópolis. Aqui, ele aplicará tudo o que aprendeu nas fases anteriores.

Dica para os professores: Ao final, faça uma revisão coletiva com os alunos, destacando os conceitos principais aprendidos durante o jogo e como eles foram aplicados para resolver o problema da praga.

Ao seguir esses passos, os alunos aprenderão como jogar o jogo enquanto reforçam seu conhecimento sobre o número de Euler e suas aplicações em diferentes situações matemáticas. O jogo é uma maneira envolvente de aprender, e os professores podem utilizá-lo como um recurso para complementar suas aulas com atividades práticas e interativas.

4.3 ROTEIRO DO JOGO

Para a criação do jogo, foi utilizado o RPG Maker MV, uma ferramenta que reúne uma série de engines e programas voltados para o desenvolvimento de jogos. O processo exigiu ampla pesquisa, incluindo leitura de materiais e visualização de vídeos, para compreender como realizar a programação necessária. Nesse contexto, os vídeos do Canal do Murilo Maker (2024) foram

fundamentais, pois oferecem tutoriais detalhados sobre como criar um jogo do zero utilizando o RPG Maker MV.

Para que o usuário possa abrir o projeto pronto, é necessário, primeiramente, realizar o download da ferramenta RPG Maker MV. Em seguida, deve-se acessar o drive (2024) e efetuar o download da pasta intitulada “Numerópolis - Programação”. Após abrir o RPG Maker MV, o próximo passo é clicar em “Arquivo”, localizado no canto superior esquerdo da interface do programa, e, na sequência, selecionar a opção “Abrir Projeto”. Localizando o arquivo na pasta de downloads do computador, o jogo estará disponível para edição ou adaptação, permitindo sua personalização conforme a criatividade e os objetivos pedagógicos do usuário.

5 CONCLUSÃO

A presente dissertação revisita o número de Euler com uma abordagem voltada à educação básica, com o objetivo de facilitar o aprendizado desse conceito fundamental e suas aplicações práticas. A análise de materiais didáticos e de exames, como o ENEM e vestibulares, revelou que, apesar de sua importância, o número e tem sido pouco explorado nos conteúdos destinados ao Ensino Médio, restringindo-se a breves menções e a algumas aplicações básicas em tópicos de funções exponenciais. Esse cenário evidencia uma oportunidade de repensar a forma como conceitos avançados, como o número de Euler, são apresentados em sala de aula.

Com essa perspectiva, o desenvolvimento do jogo “Numerópolis” propôs uma ferramenta de ensino que combina conceitos teóricos com atividades interativas, contribuindo para a compreensão do número de Euler de maneira contextualizada e prática. A aplicação piloto do jogo sugere que atividades lúdicas e desafiadoras podem gerar engajamento e motivação, favorecendo uma aprendizagem mais significativa. Dessa forma, conclui-se que a inclusão de recursos didáticos inovadores pode enriquecer a educação matemática no Ensino Médio, promovendo a compreensão de conceitos matemáticos complexos e incentivando a conexão entre a teoria e as aplicações do número de Euler.

Conclui-se que a combinação de recursos didáticos inovadores com uma fundamentação teórica sólida pode auxiliar na construção de um aprendizado mais significativo, alinhado às exigências da Base Nacional Comum Curricular e às competências avaliadas em exames nacionais. O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) foi fundamental para a realização deste estudo, proporcionando um aprofundamento crítico e aplicado dos conhecimentos matemáticos. Com sua proposta de valorização dos professores e de aprimoramento das práticas de ensino, o PROFMAT oferece aos educadores oportunidades para contribuir de maneira significativa com a educação matemática, promovendo avanços para a qualidade do ensino no Brasil.

REFERÊNCIAS

- AIGNER, M.; ZIEGLER, G. **Paul Erdős: as mais belas demonstrações matemáticas**. 5a. ed. São Paulo: Blucher, 2017. ISBN 978-85-212-1005-4. 42
- AUTORES, V. **Ensino médio: formação geral básica**. São Paulo: SOMOS Sistemas de Ensino, 2020. 17, 18, 19
- AUTORES, V. **Livro do professor: Matemática**. Minas Gerais: Grupo Bernoulli, 2023. 16
- AUTORES, V. **Ensino médio: formação geral básica**. São Paulo: Grupo COC, 2024. 17
- AVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável**. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2003. v. 1. 325 p. 25, 26
- BAKER, A. **Transcendental number theory**. London: Cambridge University Press, 1975. 176 p. 43
- BIGODE, A. J. L. **Matemática**. Fortaleza: Companhia Brasileira de Educação e Sistemas de Ensino S.A, 2024. 19, 20, 21, 22
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p. 40, 41
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 2000. 109 p. 15
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2017. 600 p. 15, 16
- EULER, L. **Analysis des unendlichen**. Berlin: Julius Springer, 1885. 41
- FIGUEIRA, R. F. **O número de Euler**. 80 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017. 13
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1. 940 p. 23
- JUNIOR, O. R. de P. **O número de Euler e suas aplicações**. 106 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2020. 14
- KILHIAN, K. A construção da primeira tábua de logaritmos decimais por Briggs. 2024. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2011/08/construcao-da-primeira-tabua-de.html>>. Acesso em: 15 jul. 2024. 38, 39
- LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. v. 1. 113 p. 38
- LIMA, M. C. M. de. **Função exponencial natural e^x e número e : uma proposta de abordagem através de aplicações cotidianas e curiosidades**. 96 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Estado de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016. 13
- MACÊDO, A. F. P. de. **Matemática financeira**. Mossoró: EdUFERSA, 2014. 96 p. 31, 32
- MAKER, M. Murilo Maker. **YouTube: MuriloMaker**, 2024. Disponível em: <<https://www.youtube.com/@MuriloMaker>>. Acesso em: 27 dez. 2024. 51

- MALTEMPI, G. T. de A. . M. V. Processo de aprendizagem de matemática à luz das metodologias ativas e do pensamento computacional. 2020. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/ciedu/a/dRXC3YvVLztYHK6bZZm6d6m/?lang=pt#>>. Acesso em: 08 out. 2024. 45
- MAOR, E. *e: a história de um número*. Rio de Janeiro: Record, 2008. 275 p. 10, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 43, 44
- MICOLINO, A. L. Numerópolis. 2024. Disponível em: <https://drive.google.com/drive/folders/1hBncZ5TLTXtxUHiR6WCQGl_GafmnhHwR>. Acesso em: 27 dez. 2024. 46, 47, 48, 49, 52
- NETO, J. J. de B. **Desvendando o número e** . 53 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2020. 14
- PROFMAT. Mestrado profissional em matemática em rede nacional. 2024. Disponível em: <<https://profmat-sbm.org.br/>>. Acesso em: 05 mar. 2024. 13
- R7. Indicadores do enem evidenciam diferenças entre escolas públicas e privadas. 2024. Disponível em: <<https://noticias.r7.com/educacao/indicadores-do-enem-evidenciam-diferencas-entre-escolas-publicas-e-privadas-avaliam-especialistas-22012024/>>. Acesso em: 23 abr. 2024. 14
- ROQUE, T. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p. 31
- SHARP, A.; HALLEY, E.; BRIGGS, H. **Mathematical TABLES**. London: Richard Mount and Thomas Page, 1706. 438 p. 40
- STEWART, J. **Cálculo**. 6a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. v. 1. 707 p. 24
- STEWART, J. **Cálculo**. 6a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. v. 2. 664 p. 26, 43
- UFSC. Universidade Federal de Santa Catarina. 2024. Disponível em: <<https://coperve.ufsc.br/vestibulares-antiores/>>. Acesso em: 27 jun. 2024. 28
- VASCONCELOS, G. de A. **A irracionalidade e transcendência do número e** . 41 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013. 13
- VILLANI, N. de N. R. **O número de Euler no ensino médio: propostas de abordagens com aplicações**. 84 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2017. 13
- WIKIPEDIA. Proof that e is irrational. 2024. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_e_is_irrational>. Acesso em: 20 mar. 2024. 42