UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

CLÁUDIA OLIVEIRA DE ALMEIDA SANTOS

MATEMÁTICA E GEOGEBRASCRIPT NA ARTE DE LUIZ SACILOTTO: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

CURITIBA

2024

CLÁUDIA OLIVEIRA DE ALMEIDA SANTOS

MATEMÁTICA E GEOGEBRASCRIPT NA ARTE DE LUIZ SACILOTTO: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

Mathematics and GeoGebraScript in the art of Luiz Sacilotto: an interdisciplinary approach

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestra em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica, no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR.
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.
Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Gotardi Begiato.
Coorientadora: Profa. Dra. Patricia Massae Kitani.

CURITIBA

2024

BY NC SA
4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba

CLAUDIA OLIVEIRA DE ALMEIDA SANTOS

MATEMÁTICA E GEOGEBRASCRIPT NA ARTE DE LUIZ SACILOTTO: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática Na Educação Básica.

Data de aprovação: 06 de Dezembro de 2024

Dr. Rodolfo Gotardi Begiato, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Abdelmoubine Amar Henni, Doutorado - Universidade Federal de Santa Catarina (Ufsc)

Dra. Paula Olga Gneri, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 09/12/2024.

Dedico este trabalho à minha filha, Nathália.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, cuja graça e orientação divina me sustentaram ao longo desta jornada acadêmica, proporcionando-me força e inspiração para superar os desafios.

À minha amada filha, Nathália, que é a razão do meu viver e minha fonte inesgotável de motivação. O seu amor e apoio incondicionais foram essenciais para que eu pudesse chegar até aqui. Você é, e sempre será, a minha maior inspiração e força para continuar a trilhar esse caminho.

À minha amada família, especialmente aos meus queridos pais, Marilena e Ely (*in memoriam*), e aos meus irmãos Carlos, Regina e Maurício. Vocês foram meu alicerce ao longo de todos esses anos, oferecendo apoio emocional, incentivo e compreensão em cada momento dessa jornada. A força que encontrei em cada um de vocês me permitiu seguir em frente, mesmo nos momentos mais desafiadores. A presença de vocês como minha rede de apoio foi fundamental para que eu pudesse alcançar cada uma das minhas conquistas.

À minha amada sobrinha e afilhada, Carolina Pinotti, pelo apoio inestimável e pelas explicações detalhadas sobre o uso do LaTeX. Sua paciência e dedicação foram essenciais para o desenvolvimento do meu trabalho.

Aos meus queridos colegas de turma do programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT 2022 - Andressa, Fernando, Leonardo e Paulo, minha eterna gratidão. Vocês, que começaram como colegas de estudo, se tornaram amigos para toda a vida.

Aos meus queridos professores, Prof. Dr. Rodolfo Gotardi Begiato e Profa. Dra. Patricia Massae Kitani, expresso minha profunda gratidão pela sabedoria, paciência e orientação acadêmica que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Suas contribuições valiosas não só moldaram a qualidade deste Trabalho de Conclusão de Curso, mas também enriqueceram profundamente meu percurso acadêmico.

Aos professores Prof. Dr. Rudimar Luiz Nos, Profa. Dra. Mari Sano, Prof. Dr. João Luis Gonçalves, Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst, Profa. Dra. Nara Bobko e Profa. Dra. Denise de Siqueira pela competência, dedicação, inspiração e pela disposição em contribuir para a formação dos discentes.

Aos professores Prof. Dr. Abdelmoubine Amar Henni, Profa. Dra. Paula Olga Gneri e Profa. Dra. Nara Bobko por aceitarem e participarem da Banca de Avaliação de Dissertação de Mestrado, contribuindo com suas valiosas análises e orientações para o meu trabalho.

Ao Sr. Valter Sacilotto minha profunda gratidão pela generosidade em autorizar o uso das imagens de seu pai, o estimado artista Luiz Sacilotto, e de suas obras no material que produzi, tanto no meu livro digital quanto na minha dissertação de mestrado.

À minha querida amiga e professora Neida Padilha, não poderia deixar de expressar minha mais profunda gratidão por sua incrível habilidade e dedicação na revisão dos textos dos meus dois trabalhos, o livro digital e a dissertação.

Ao querido Naylson Rodrigues Costa, Nay, que me guiou com tanto cuidado e dedicação durante a visita à Casa do Olhar Luiz Sacilotto, em Santo André, São Paulo. Sua explicação detalhada sobre a exposição *Sacilotto em Movimento* não apenas enriqueceu minha compreensão da profundidade e importância do trabalho de Luiz Sacilotto, como também me proporcionou uma experiência cultural inesquecível.

Gostaria de expressar meu mais sincero agradecimento a todos os estudantes a quem já tive a honra de lecionar. Desde aqueles do início de minha carreira, que tiveram paciência e compreensão com uma professora ainda inexperiente, até os atuais, que se engajam de forma tão dedicada nas atividades envolvendo Arte e Matemática. A criatividade de vocês tem sido uma fonte constante de inspiração, e os trabalhos apresentados não são apenas exercícios acadêmicos, mas verdadeiras obras de arte. Sou profundamente grata pelas oportunidades de aprendizado e crescimento que vivemos juntos.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

À Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação do Campus Curitiba da UTFPR, pela concessão de bolsa de estudos, conforme Edital 01/2022, pelo período de seis meses.

A persistência é o caminho do êxito.

Charles Chaplin (1889 - 1977): ator, diretor e compositor britânico.

RESUMO

SANTOS, Cláudia Oliveira de Almeida Santos. **Matemática e GeoGebraScript na arte de Luiz Sacilotto: uma abordagem interdisciplinar**. 87 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2024.

Este trabalho tem como objetivo principal explorar a interseção entre Arte e Matemática por meio de transformações geométricas no plano, utilizando as obras de Luiz Sacilotto como referência para aprofundar essa conexão. Paralelamente, busca integrar a programação em GeoGebraScript, empregando o GeoGebra como ferramenta tecnológica para reinterpretar e criar novas obras de arte, expandindo a compreensão de conceitos matemáticos e do processo criativo artístico além de ser uma excelente ferramenta para a introdução à programação. A aplicação de um recurso educacional, desenvolvido em formato de livro digital, nas aulas regulares de Matemática da 2ª série do Ensino Médio apresenta desafios devido ao tempo limitado previsto no planejamento curricular. Como alternativa, sugere-se a criação de um itinerário formativo interdisciplinar, que integre Matemática, Arte e Programação, alinhado à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com o objetivo de promover um aprendizado integrado das transformações geométricas no plano.

Palavras-chave: Matemática; geometria; transformações geométricas; arte; Luiz Sacilotto; GeoGebra; programação; GeoGebraScript.

ABSTRACT

SANTOS, Cláudia Oliveira de Almeida. **Mathematics and GeoGebraScript in the art of Luiz Sacilotto: an interdisciplinary approach**. 87 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2024.

This work aims to explore the intersection between Art and Mathematics through geometric transformations on the plane, using Luiz Sacilotto's artworks as a reference to deepen this connection. Simultaneously, it seeks to integrate programming in GeoGebraScript, employing GeoGebra as a technological tool to reinterpret and create new artworks, expanding the understanding of mathematical concepts and the artistic creative process, while also serving as an excellent introduction to programming. The application of an educational resource, developed in digital book format, in regular Mathematics classes for the 2nd year of Ensino Médio (equivalent to High School in the Brazilian education sistem) presents challenges due to the limited time allotted in the curriculum. As an alternative, the creation of an interdisciplinary formative pathway is suggested, integrating Mathematics, Art, and Programming, aligned with the National Common Curricular Base (BNCC), with the objective of promoting an integrated learning of geometric transformations on the plane.

Keywords: Mathematics; geometry; geometric transformations; art; Luiz Sacilotto; GeoGebra; programming; GeoGebraScript.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BASIC	*Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code*
PROFMAT	Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
STEAM	*Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics*
TCT	Temas Contemporâneos Transversais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FEB	Força Expedicionária Brasileira
SEED	Secretaria da Educação e do Esporte do Paraná

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

Preparar um trabalho que envolve Matemática, Arte e Programação foi um misto de interesses pessoais, relevância do tema para a Educação Básica e incentivos recebidos. Diversas situações na vida da autora a influenciaram, desde a escolha de seu curso de graduação e de sua profissão, bem como oportunidades que teve em sua vida: programação em BASIC (*Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code*), utilização de planilhas eletrônicas, como o SuperCalc estimulados pelo pai e aulas de piano, estimuladas pela mãe.

Embora tenha optado pela graduação na área matemática, uma experiência profissional como professora da disciplina "Educação Artística e Desenho Geométrico"e o contado com o trabalho do colega Roberto Tadeu Berro: "RELAÇÕES ENTRE ARTE E MATEMÁTICA: UM ESTUDO DA OBRA DE MAURITS CORNELIS ESCHER[1]" (2008) trouxe a percepção de que a integração entre Arte e Matemática não era um sonho pessoal, mas uma possibilidade extremamente rica de ampliar e diversificar o processo de ensino-aprendizagem. Estudos pessoais levaram à percepção de que utilizar a Espiral de Teodoro para ensinar o Teorema de Pitágoras, ou a Espiral de Fibonacci ao abordar sequências, são temas que levam os estudantes à criação de uma obra de arte, à confecção de sólidos geométricos por meio de dobraduras, conectando a Matemática ao universo artístico e enriquecendo o aprendizado.

Em 2023, ao lecionar transformações geométricas para turmas de 2^{as} séries do Ensino Médio, com atividades de *kirigami* no intuito de abordar reflexão e, também, o desenvolvimento de uma releitura de obras de arte de Mauritz Escher, a autora vislumbrou a possibilidade de trabalhar com o tema de maneira acadêmica. Essa percepção brota da reação dos estudantes à atividade que, munidos de muita criatividade, apresentaram trabalhos belíssimos comprovando a real possibilidade de se associar Matemática e Arte mostrando que o tema escolhido fazia verdadeiro sentido.

Luiz Sacilotto e sua arte guiam toda a pesquisa de Mestrado que resultou neste manuscrito e no Livro Digital *Matemática, Arte e GeoGebraScript* (2024). A escolha pela obra de Sacilotto surge após uma conversa, quando pode-se perceber que identificação das formas e transformações geométricas presentes em suas obras, seria um estímulo para aprendizagem não somente destes elementos matemáticos, como também para aprendizagem gradativa do software Geogebra, em que o estudante acessa inicialmente os comandos básicos e termina por aprender noções rudimentares de programação. Entendeu-se ali que o contexto das obras do artista seria mais que

[1] Maurits Cornelis Escher (Leeuwarden, 17 de junho de 1898 — Hilversum, 27 de março de 1972), mais conhecido como M. C. Escher, foi um artista gráfico holandes famoso por suas obras que exploram a matemática, a geometria e a perspectiva, criando ilusões de ótica, mundos impossíveis e padrões repetitivos. M. C. Escher também é conhecido pela execução de transformações geométricas (isometrias) nas suas obras.

adequado para o desenvolvimento deste tipo de trabalho.

A possibilidade de reproduzir as obras do artista utilizando o software de geometria dinâmica[2] GeoGebra, e potencialmente a linguagem de programação GeoGebraScript[3] indicou o caminho que ainda estava faltando para fechar a comunhão entre as três grande áreas de conhecimento da humanidade tratada neste texto.

1.2 RELEVÂNCIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Além de motivos apresentados que justificam a escolha do tema deste trabalho, destaca-se sua relevância para a Educação Básica. Ao longo dos anos, observam-se os diversos esforços do governo, por meio do Ministério da Educação, para construir uma documentação de base com diretrizes e parâmetros sólidos que visam orientar a prática pedagógica. Essas iniciativas têm como objetivo promover uma educação mais inclusiva e significativa, incentivando a interdisciplinaridade e a criatividade. Nesse contexto, a integração da Matemática com a Arte e a Programação não só enriquece o aprendizado, mas também estimula o desenvolvimento de habilidades críticas e criativas nos alunos.

Na busca de estratégias educacionais inovadoras e significativas, que a pesquisa proposta neste trabalho de conclusão de curso assume sua importância. Ao examinar a interseção entre as áreas de Linguagens, Matemática e suas tecnologias, este estudo oferece uma série de benefícios para aprimorar a qualidade da educação oferecida aos estudantes. Uma das contribuições mais impactantes desta pesquisa é a demonstração de como áreas aparentemente distintas podem ser integradas de forma eficaz. Segundo os Temas Contemporâneos Transversais (TCT) da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), "a interdisciplinaridade implica um diálogo entre os campos dos saberes, em que cada componente acolhe as contribuições dos outros, ou seja, há uma interação entre eles" (Brasil, 2019, p. 18).

Ao incorporar o estudo das transformações geométricas no contexto das obras de arte de Luiz Sacilotto e utilização de tecnologia, os educadores podem criar uma experiência de ensino que não só é mais envolvente, mas também mais relevante para a vida dos estudantes, oportunizando o desenvolvimento de, por exemplo, "habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras" (Brasil, 2018, p. 517), em consonância

[2] Um software de geometria dinâmica é um programa que permite explorar e visualizar conceitos geométricos de forma interativa, oferecendo ferramentas para criar e manipular figuras geométricas (como pontos, linhas, círculos e polígonos) e observar como essas construções mudam em tempo real quando seus elementos são movidos. Isso proporciona uma compreensão intuitiva e prática da geometria, pois o usuário pode experimentar relações e propriedades geométricas diretamente na tela. Alguns exemplos de software de geometria dinâmica são GeoGebra, Cabri-Geometry e Cinderella.

[3] GeoGebraScript é uma linguagem de programação integrada ao GeoGebra, que permite aos usuários desenvolver *scripts* personalizados para automatizar tarefas, manipular objetos e interagir de forma avançada com a geometria dinâmica. Com GeoGebraScript, é possível adicionar funcionalidades e personalizações que vão além das opções disponíveis na interface gráfica do GeoGebra.

com a habilidade (EM13MAT105) da BNCC: "Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras" (Brasil, 2018, p. 525).

Além disso, o emprego de tecnologia por meio da utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra fortalece as competências digitais dos estudantes, preparando-os para um mundo cada vez mais digitalizado. A pesquisa está alinhada com a integração de tecnologia na educação, o que é crucial em uma sociedade em constante evolução. A escolha da linguagem de programação GeoGebraScript, no contexto de utilização do software GeoGebra para recriar obras de arte de Luiz Sacilotto, visa estimular a criatividade dos estudantes e demonstrar que a Matemática e a Programação podem ser ferramentas para a expressão artística, corroborando com a habilidade (EM13MAT406) da BNCC, que prevê que estudantes venham "utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática" (Brasil, 2018, p. 531).

A pesquisa também promove o desenvolvimento de habilidades de análise crítica e interpretação visual. Ao analisar e reinterpretar as obras de arte de Sacilotto com base nas transformações geométricas, os estudantes aprimoram suas habilidades de análise e interpretação, que são valiosas em diversas áreas da educação e da vida. Além disso, a inclusão da arte e programação pode tornar o processo de aprendizagem mais motivador e envolvente, inspirando os estudantes a se tornarem aprendizes ativos e curiosos.

Este trabalho de conclusão de curso não é apenas uma investigação acadêmica, mas apresenta uma proposta de livro digital com a intenção de promover uma jornada de descoberta que pretende iluminar um caminho onde a Matemática, a Arte e a Programação se entrelaçam na Educação Básica. Ele também demonstra como esses domínios podem coexistir harmoniosamente no contexto educacional, capacitando os estudantes a se tornarem criadores de conteúdo ao produzir obras artísticas utilizando tecnologia, explorando as fronteiras da geometria e da programação, e inspirando uma nova geração de pensadores criativos que veem na Matemática e na Arte uma riqueza de possibilidades.

1.3 IMPACTO NAS PRÁTICAS EM SALA DE AULA

Imagine aulas de Matemática ocorrendo em ambientes diferentes da tradicional sala de aula: em classe, com o uso de tablets; em laboratórios de informática, utilizando computadores; ou mesmo com o emprego pedagógico de um recurso amplamente disponível para os estudantes — o celular. Nesses cenários, a aprendizagem da Matemática se enriquece, podendo ainda conectar-se ao universo da Arte, tornando as atividades mais dinâmicas e atrativas.

Entretanto, o uso de dispositivos móveis em sala de aula apresenta desafios, especialmente com adolescentes, cuja maturidade pode dificultar a concentração na atividade proposta. Muitas vezes, esses aparelhos são utilizados de forma inadequada, desviando o foco da atividade pedagógica. Para evitar esse problema, é essencial que o docente estabeleça regras claras com a turma antes de iniciar o uso dos celulares, delimitando o que é permitido. Por exemplo, os estudantes devem utilizar apenas os aplicativos necessários para a atividade, mantendo desativadas outras funções ou abas do dispositivo. O não cumprimento dessas orientações pode levar à suspensão temporária do uso do celular por parte do aluno.

Uma alternativa eficiente para evitar distrações é utilizar tablets fornecidos pela instituição ou recorrer a laboratórios de informática. Esses equipamentos podem ser configurados previamente para limitar o acesso a aplicativos ou conteúdos que não estejam relacionados à atividade pedagógica, garantindo que o foco permaneça nos objetivos de aprendizagem.

A proposta consiste em desenvolver o trabalho envolvendo Transformações Geométricas no Plano, com estudantes de 2^a série do Ensino Médio, fazendo uso do software de geometria dinâmica GeoGebra e programação em GeoGebraScript no contexto das obras de Luiz Sacilotto, com intuito de confeccionar releituras de obras do artista utilizando tecnologia.

Pela integração de Matemática e Arte, os estudantes podem experimentar a aplicação prática dos conceitos matemáticos em contextos artísticos ao examinar obras de arte. Essa abordagem torna o aprendizado mais significativo, ao revelar como a Matemática está intrinsecamente presente em obras produzidas por Luiz Sacilotto. Aqui, equações e fórmulas deixam de ser abstrações distantes, tornando-se ferramentas que podem ser usadas para criar e apreciar obras de arte.

Como um dos objetivos desse trabalho é a promoção de uma abordagem interdisciplinar, temos o intuito de levar os estudantes a perceberem como diferentes áreas do conhecimento se relacionam e se complementam.

Ao permitir que os estudantes reinterpretem obras de arte de Sacilotto pelo do uso da linguagem GeoGebraScript, esta pesquisa busca fomentar a criatividade. Os estudantes têm a liberdade de experimentar, inovar e desenvolver suas próprias interpretações artísticas, um elemento essencial para o pensamento criativo. Além disso, a programação e a análise das transformações geométricas no plano envolvem raciocínio lógico e habilidades de resolução de problemas, competências valiosas que transcendem as fronteiras da sala de aula.

Por meio das atividades práticas presentes no livro digital *Matemática, Arte e GeoGebraScript*, como, por exemplo, a reinterpretação de obras de arte utilizando o GeoGebra, os estudantes assumem um papel ativo no processo de aprendizado, em contraposição ao papel passivo de meros receptores de informações. Essa mudança de dinâmica aumenta o envolvimento e a motivação dos estudantes, criando um ambiente de aprendizado dinâmico e inspirador.

À medida que os estudantes se familiarizam com o GeoGebra e exploram a programação em GeoGebraScript, norteados pelas atividades investigativas presentes no livro digital, eles também terão oportunidade de desenvolver habilidades digitais e tecnológicas, competências essenciais em uma sociedade cada vez mais digitalizada. O estímulo ao pensamento computacional prepara os estudantes para um mundo em constante evolução, em que a capacidade de usar a tecnologia de maneira eficaz e criativa é uma habilidade fundamental.

Atividades que unem Arte e Tecnologia naturalmente são mais motivadoras para os estudantes, tornando o ambiente de aprendizado mais agradável e inspirador. Este trabalho tem o intuito de desmistificar a Matemática, a Arte e a Programação, demonstrando aos estudantes que essas áreas não são abstratas nem inacessíveis mas, sim, partes intrínsecas de suas vidas e uma fonte inesgotável de criatividade e expressão. Essa abordagem interdisciplinar pode ser capaz de atender a diferentes estilos de aprendizado, alcançando um espectro mais amplo de estudantes.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 OBJETIVO GERAL

Explorar a interseção entre Arte e Matemática por meio das transformações geométricas no plano, utilizando as obras de Luiz Sacilotto como pano de fundo para aprofundar essa conexão. Além disso, integrar a programação em GeoGebraScript, utilizando o GeoGebra como ferramenta tecnológica para reinterpretar e criar novas obras de arte, ampliando a compreensão tanto dos conceitos matemáticos quanto do processo criativo artístico.

1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar as transformações geométricas no plano estudando em detalhes as transformações isométricas, como reflexão, translação e rotação e tranformações não isométricas como homotetia, para compreender suas propriedades e aplicações no contexto artístico.

- Examinar as obras de Luiz Sacilotto analisando aquelas obras que incorporam elementos geométricos e abstratos, identificando as características matemáticas presentes em suas criações.

- Desenvolver um livro digital contendo atividades e recursos educacionais que integrem Matemática, Arte e Programação, permitindo que os estudantes explorem as transformações geométricas e reinterpretem obras de Sacilotto usando o GeogebraScript.

- Promover a criatividade e expressão artística propondo atividades em que os estudantes possam expressar sua criatividade por meio da reinterpretação de obras de arte de Sacilotto, explorando como a programação pode ser uma forma de expressão artística.

- Contribuir para a educação interdisciplinar demonstrando como a integração de disciplinas pode enriquecer o processo de aprendizado, incentivando a interdisciplinaridade na educação básica.

- Inspirar futuras pesquisas e práticas educacionais fornecendo um exemplo prático de como Arte, Matemática e Programação podem ser combinadas para aprimorar o ensino, inspirando futuros pesquisadores e educadores a explorar abordagens semelhantes.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

A presente dissertação integra elementos de Matemática, Arte e Programação, utilizando a linguagem GeoGebraScript para reinterpretar e realizar releituras de obras do artista Luiz Sacilotto. Essa abordagem interdisciplinar dialoga diretamente com os princípios da metodologia STEAM (*Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics*), amplamente reconhecida por promover conexões entre diferentes áreas do conhecimento de maneira criativa e prática.

A metodologia STEAM se caracteriza por integrar ciência, tecnologia, engenharia, artes e matemática para resolver problemas reais e desenvolver competências como criatividade, pensamento crítico e inovação. No caso desta pesquisa, os fundamentos matemáticos são explorados em conjunto com elementos artísticos, enquanto o uso da programação promove o desenvolvimento de habilidades computacionais e tecnológicas. Essa integração permite reinterpretar obras de arte geométrica com base em princípios matemáticos e computacionais, resultando em um produto educacional que pode ser utilizado tanto no ensino da matemática quanto em itinerários interdisciplinares.

Portanto, ao adotar a metodologia STEAM como pano de fundo, o trabalho propõe uma interação entre áreas tradicionalmente consideradas distintas, destacando a aplicabilidade prática da matemática e a riqueza interdisciplinar proporcionada pelo uso de tecnologias como o GeoGebraScript. Essa abordagem não apenas contribui para a pesquisa educacional, mas também para a promoção de uma educação mais conectada às demandas do século XXI.

Além deste capítulo introdutório, esta dissertação é composta por mais quatro capítulos. Em todos eles, o leitor poderá acessar atividades virtuais e o livro digital por meio de *links* disponibilizados ao longo do texto. Para isso, é necessário que a leitura seja feita no formato digital, permitindo a seleção dos *links*, que estarão destacados em *itálico* ao longo do conteúdo.

No Capítulo 2 trazemos um relato sobre a vida de Luiz Sacilotto, apontando algumas das características de seu trabalho nos seus diferentes momentos de vida. Desde quando Sacilotto começa a incorporar influências do abstracionismo, entre o final do anos 1940 e início dos anos 1950, e com sua participação da fundação do Grupo Ruptura, mostramos a evolução de suas obras enfatizando a precisão geométrica a sua busca por uma arte visual pura, sem referências figurativas. A partir dos anos 1950, após aderir ao Concretismo, Saciloto cria uma série de trabalhos denominados *Concreção*, obras que são destaque no desenvolvimento deste nosso trabalho.

Mesmo sua produção artística tendo sido interrompida na década de 1960, devido ao regime militar no Brasil, após um período de silêncio, Sacilotto retomou sua obra no final dos anos 1970, focando em explorações cromáticas e formas geométricas, tornando-se um dos principais nomes da arte concreta no Brasil. Em 1993, um acidente vascular interrompeu novamente sua produção, que foi retomada anos depois e para vencer suas dificuldades, lançou-se na produção de colagens. Sacilotto faleceu em 2003, deixando um legado como pioneiro da arte concreta no Brasil. Suas obras continuam a ser celebradas, como aquelas, por exemplo, *Concreção 0005* e *Concreção 9877*, que hoje estão em espaços públicos em Santo André, SP.

O Capítulo 3 explora detalhadamente conceitos de algumas transformações geométricas no plano. Iniciando com o conceito de transformações isométricas, foram deduzidas algumas propriedades desse tipo de transformação no plano para que, isometrias como translação, rotação e reflexão fossem abordadas em seu conceito e também aplicação. Para cada transformação isométrica utilizou-se uma obra de Luiz Sacilotto como exemplo de aplicação da referida transformação. Mas, como não apenas transformações isométricas estão presentes nas obras do artista, conclui-se o capítulo com a conceituação de transformações não isométricas dando-se destaque às homotetias ao apresentar sua conceituação e aplicação em obras de Sacilotto.

O Capítulo 4 traz uma explicação sobre o livro digital *Matemática, Arte e GeoGebraScript* (*link*) apresentando-o, capítulo a capítulo. O livro digital também é composto de 4 capítulos e referências bibliográficas e contém tanto explicações de utilização do GeoGebra quanto explicações de comandos em GeoGebraScript, sempre no contexto das obras e da vida do artista Luiz Sacilotto. Em uma linguagem mais acessível a estudantes em nível de Ensino Médio, optou-se por apresentar os conceitos de transformações geométricas no plano diretamente com exemplos de atividades no GeoGebra, em que o leitor poderá trabalhar em outra janela do navegador, concomitante à leitura do livro.

Concluindo esta dissertação, o Capítulo 5 expõe as reflexões e conclusões obtidas ao longo do desenvolvimento deste trabalho e da elaboração do livro digital *Matemática, Arte e GeoGebraScript*.

2 LUIZ SACILOTTO

No contexto desta dissertação, a inclusão de um capítulo dedicado a Luiz Sacilotto se torna imprescindível para justificar a escolha do renomado artista. Como exponente do movimento concretista brasileiro, Sacilotto transcende as fronteiras do convencional por meio de sua abordagem singular na arte abstrata e cinética. Ao explorar sua técnica inovadora e a profunda influência de suas obras no cenário artístico nacional, este estudo revela não apenas a importância histórica de Sacilotto, mas também ressalta sua relevância contemporânea na compreensão da arte como uma manifestação dinâmica e em constante evolução. Em 2024, ano em que comemoraríamos o centenário do artista, a pertinência de sua análise e apreciação ressalta-se ainda mais, destacando não apenas suas contribuições passadas, mas também a atemporalidade e a inspiração contínua de suas obras.

Da origem modesta e da infância vivida em meio a um cenário urbano em constante evolução devido à industrialização da época, emerge um dos nomes mais marcantes e emblemáticos da arte brasileira da segunda metade do século XX. Em suas obras, a paisagem, quase poética, retrata a transição e as metamorfoses dessa realidade em mutação, destacando Luiz Sacilotto como uma figura de grande relevância e expressão artística no contexto da época.

Nascido em 22 de abril de 1924 na cidade de Santo André, São Paulo, Luiz Sacilotto, filho de imigrantes italianos, possui em suas obras um elo intrínseco com a história cultural de sua cidade natal. Tanto que seu legado é honrado na Casa do Olhar Luiz Sacilotto, Figura 2.1, situada na Rua Campos Salles, número 414, no coração do Centro de Santo André. As habilidades de Sacilotto são multifacetadas - desenhista, pintor e escultor - e sua proeminência remonta à década de 1940, momento em que suas obras foram fundamentais para solidificar o movimento abstracionista no Brasil. Reconhecido como um inovador, o artista andreense explorava ousadamente as possibilidades cromáticas e formas geométricas em suas criações.

Sacilotto foi um dos pioneiros da arte concreta, da abstração geométrica e da *Op Art* no Brasil. Suas obras são reconhecidas por explorarem formas, cores, matemática e geometria, mergulhando nos diferentes fundamentos e possibilidades desses elementos. A influência de Sacilotto no cenário artístico brasileiro a partir de 1950 foi significativa, alinhando-se aos movimentos de vanguarda do século XX e continuando a inspirar a arte abstrata em nível global até os dias de hoje.

Figura 2.1 – Casa do Olhar Luiz Sacilotto. Rua Campos Salles, 424 - Santo André, SP

Fonte: A autora.

Para situar o leitor, faremos uma revisão da cronologia da vida artística de Luiz Sacilotto.

No final da década de 1930 e início da década de 1940, Sacilotto estudou pintura no Instituto Profissional Masculino do Brás (São Paulo), desenho na Associação Brasileira de Artes Plásticas e recebeu o título de Mestre de Pintura da Escola Técnica Getúlio Vargas. Na primeira metade dos anos 1940, Sacilotto participou, enquanto soldado da Força Expedicionária Brasileira (FEB), de um ambiente que lhe favoreceu movimentos artísticos expressionistas de contestação à ordem e de protesto, características de sua vida artística nesse período. Algumas das obras de Sacilotto, ainda nesse período, podem ser observadas em Figura 2.2, Figura 2.3 e Figura 2.4.

Figura 2.2 – *Natureza Morta*, 1943 - Luiz Sacilotto

Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 2.3 – *Natureza Morta*, 1944 - Luiz Sacilotto

Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 2.4 – *Paisagem*, 1944 - Luiz Sacilotto

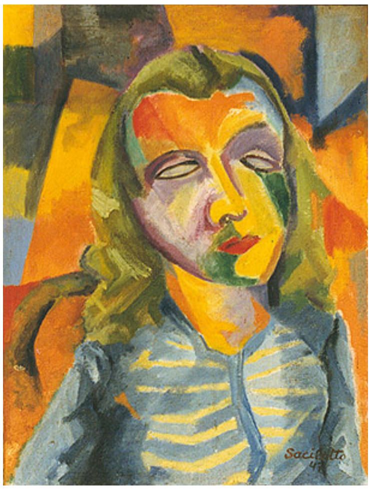
Fonte: Sacilotto (2024).

Em 1946 participou da amostra “4 Novíssimos” no Instituto de Arquitetos do Brasil (Rio de Janeiro) com obras ainda de caráter expressionista e marcada por cores e formas intensas. A partir de 1948, o uso da tinta a óleo introduziu na obra de Sacilotto uma volumetria que se baseava em contornos bem definidos, com a utilização de cores puras, intensas e vibrantes que lembram o estilo fauvista. O trabalho *Figura*, (Figura 2.8), criado em 1948, exemplifica esse período, ainda mantendo traços figurativos, mas já com influências da geometrização. Durante a transição subsequente, enquanto Sacilotto explorava as possibilidades da abstração formal, gradualmente foi deixando de lado a figura até que ela se tornasse apenas um elemento sutil, como observado em *Natureza Morta*, (Figura 2.9), uma obra completamente focada na disposição das cores. Outras obras de Sacilotto, ainda nesse período: *Trabalhador* (Figura 2.5), *Retrato de Helen*a (Figura 2.6) e *Paisagem* (Figura 2.7).

Figura 2.5 – *Trabalhador*, 1947 - Luiz Sacilotto

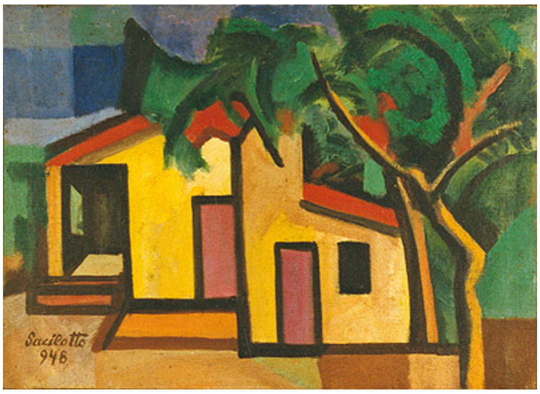
Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 2.6 – *Retrato de Helena*, 1947 - Luiz Sacilotto



Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 2.7 – *Paisagem*, 1948 - Luiz Sacilotto



Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 2.8 – *Figura*, 1948 - Luiz Sacilotto

Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 2.9 – *Natureza Morta*, 1948 - Luiz Sacilotto

Fonte: Sacilotto (2024).

Nesse processo de refinamento e simplificação da forma, o artista passou a empregar linhas ortogonais, desenhadas em preto, de forma similar a Mondrian[4], para delimitar áreas de cor. Sacilotto demonstra sua habilidade como colorista ao trabalhar com tonalidades, sobreposições e transparências criadas de maneira sinuosa dentro de cada campo cromático, como podemos ver em *Composição* (Figura 2.10), *Abstração* (Figura 2.11), *Concreção* (Figura 2.12) e *Concreção 5522* (Figura 2.13).

No fim dos anos 1940 e início dos anos 1950, trabalhando como desenhista em escritórios de arquitetura, Sacilotto já apresentava fortes influências do abstrato-construtivo e participou da criação do Grupo Ruptura, movimento artístico brasileiro fundado em 1952 por um grupo de artistas ligados ao abstracionismo geométrico e concreto. Seus membros buscaram romper com as tendências artísticas tradicionais e estabelecer uma nova linguagem artística baseada na geometria, na racionalidade e na abstração.

Os artistas do Grupo Ruptura, incluindo Luiz Sacilotto, Geraldo de Barros, Leopoldo Haar, Kazmer Féjer e Anatol Wladyslaw, entre outros, compartilharam um interesse comum em explorar a relação entre forma, cor, luz e espaço em suas obras. Eles buscaram criar uma arte puramente visual, livre de referências figurativas, e desenvolver uma estética baseada na ordem, na precisão e na simplicidade das formas geométricas. Na década de 50 o artista passou a identificar as obras como *Concreção* e numerá-las sequencialmente, aderindo definitivamente à postura de abstrato-construtivo.

> Ainda que Sacilotto tenha se aproximado e interagido com o grupo de artistas concretistas, ainda que tenha composto o Ruptura (capítulos fundamentais em sua história e obra), sua arte expressa mais do que uma simples recusa da figuração, mais do que um apreço pela forma geométrica. Quando se olha para uma obra – ou uma série – de Sacilotto estamos olhando para um processo de profunda elaboração cerebral, matemática, geométrica quase compulsiva, em que o artista via movimentos, desdobramentos, jogos de cálculos que – hoje, décadas depois – são a base da programação computacional, do *design* gráfico, das artes digitais. Certamente não era apenas uma recusa da figuração que procurava Sacilotto (Roberto; Oliveira, 2015, p. 43).

[4] Piet Mondrian foi um artista holandês, conhecido por ser um dos fundadores do movimento de arte abstrata e por seu papel no desenvolvimento do Neoplasticismo. Nascido em 7 de março de 1872, ele começou sua carreira pintando paisagens e retratos, mas ao longo do tempo evoluiu para um estilo caracterizado por linhas retas, formas geométricas e uma paleta de cores primárias (vermelho, azul e amarelo), além de preto e branco.

Mondrian acreditava que a arte deveria refletir uma ordem fundamental e universal, e desenvolveu um estilo que buscava expressar a harmonia através da simplificação e da abstração. Suas obras mais famosas incluem composições em quadrados e retângulos dispostos em uma grade, que se tornaram ícones da arte moderna. Ele faleceu em 1 de fevereiro de 1944, mas seu impacto na arte contemporânea continua a ser significativo.

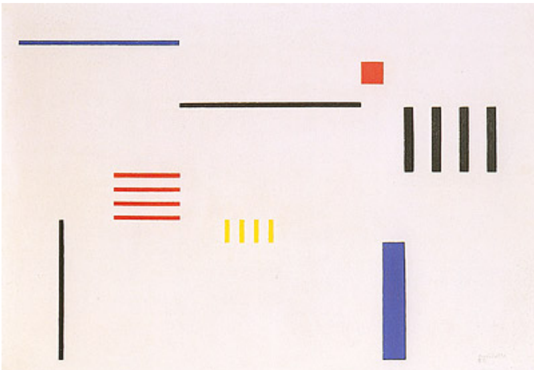
Figura 2.10 – *Composição*, 1950 - Luiz Sacilotto

Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 2.11 – *Abstração*, 1950 - Luiz Sacilotto

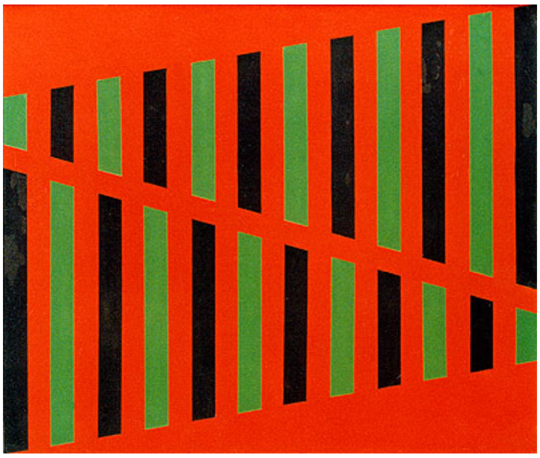
Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 2.12 – *Concreção*, 1952 - Luiz Sacilotto



Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 2.13 – *Concreção 5522*, 1955 - Luiz Sacilotto



Fonte: Sacilotto (2024).

Durante o período concreto já no final da década de 50, a cor deixa de ser o elemento central na obra do artista, sendo utilizada por Sacilotto para uma organização mais simplificada e direta, focando-se principalmente na forma e na pureza da linha, sem, no entanto, abrir mão de sua habilidade cromática. As cores adotam uma abordagem sólida e sóbria, sem variações sutis, sendo aplicadas com moderação. A sensação de vibração, por sua vez, surge da composição, intersecção e deslocamento das linhas, assim como da disposição dos elementos na obra. A predominância da forma, que era uma característica marcante do grupo concretista paulista (Ruptura), foi ironicamente destacada por Ferreira Gullar, do grupo concretista carioca (Frente) em sua crítica à 1ª Exposição Nacional de Arte Concreta em 1957, mostrando como a composição e a interação das linhas e elementos eram cruciais para a expressão artística dentro do movimento concreto.

> Esse descuido da cor, esse desinteresse pela valorização das qualidades pictóricas, como dissemos no início, é comum a todos os do grupo paulista, e a razão disso está na sua excessiva preocupação com as virtualidades formais. É preciso, a meu ver, que uma coisa não exclua a outra (Gullar apud Mattar e Pérez-Barreiro 2021a, p. 18).

O movimento neoconcreto surgiu em 1959 como uma resposta às divergências entre os grupos Ruptura e Frente, consolidando características presentes desde a I Exposição de Arte Concreta de 1957. Ferreira Gullar desempenhou um papel fundamental nesse movimento, atuando não apenas como poeta e teórico, mas também como crítico de arte. Ele se tornou um porta-voz importante do ideário do grupo carioca. Entre 1959 e 1961, Gullar aproveitou seu espaço no Suplemento Dominical do Jornal do Brasil, onde escrevia desde 1956, para discutir o movimento neoconcreto em detalhes. Em seus escritos, abordava temas como arte moderna, produção nacional e as diferenças entre os grupos artísticos de São Paulo e Rio de Janeiro, situando ambos no contexto das vanguardas internacionais. Sua contribuição foi essencial para a disseminação e compreensão da arte contemporânea do Brasil na época.

Em 1963, Luiz Sacilotto se envolveu na criação da Associação de Artes Visuais Novas Tendências e da Galeria Novas Tendências, com o objetivo de promover os ideais das novas tendências artísticas nacional e internacionalmente, além de reunir artistas engajados em pesquisas inovadoras. A galeria teve uma existência breve, encerrou suas atividades em menos de um ano. No entanto, para o artista, esse momento marcou o início de uma fase de produção artística influenciada pelo contexto político do país[5].

A VIII Bienal Internacional de São Paulo, ocorrida de setembro a novembro de 1965, foi um marco importante que destacou obras de arte moderna e contemporânea de artistas de diversas partes do mundo. Esta edição se destacou por apresentar e impulsionar novas tendências artísticas emergentes naquela época, consolidando-se como uma das bienais mais influentes e significativas no cenário das artes visuais, tanto no Brasil quanto internacionalmente.

Durante as exposições, a Bienal ofereceu uma variedade de estilos e técnicas, exibindo uma ampla diversidade de expressões artísticas em desenvolvimento. No entanto, o contexto político conturbado pós-golpe de 1964 se fez presente nesta edição, resultando em momentos de maior tensão e protestos contra o regime.

Após sua participação, Luiz Sacilotto optou por destruir suas obras feitas a partir de resíduos de produtos industriais e interrompeu sua produção artística por quase uma década. Essa decisão evidencia o posicionamento político do artista frente ao regime ditatorial militar vigente na época, revelando uma postura de resistência e discordância por meio de sua própria expressão artística. Segundo observação de Della Rocca em nota de rodapé de sua dissertação de mestrado:

> De 1965 a 1974 Sacilotto se afasta do meio artístico devido à repressão. Em 1964 a transformação política ocorrida pelo golpe acarretou um período de silêncio na produção do artista que era excessivamente vigiado. No início desse período, distanciou-se das pesquisa e realizou obras com detritos sociais, sucatas, as quais segundo ele eram antiestruturas. Utilizando um estofamento de caminhão com molas espirais todo arrebentado, compôs a obra Escultura, exposta na 8ª Bienal de São Paulo. Um posicionamento político perante o golpe miliar é apontado em uma dessas obras; A escultura realizada com latas de óleo da marca Castrol, cujo *slogan* era "Castrol, obra-prima em óleos". Apagando algumas letras, obtém: "Castro, obra prima", referência a Fidel Castro. Apenas uma dessas criações é conservada em seu atelier (Rocca, 2004, p. 68).

Depois da pausa de suas produções artísticas, Luiz Sacilotto retomou sua produção artística em 1974, após quase uma década de pausa. Durante esse período de afastamento, ele

[5] O período em meados de 1963 no Brasil foi marcado por intensas mudanças políticas, sociais e culturais que influenciaram significativamente a produção artística da época. Este momento ocorreu sob a presidência de João Goulart, em meio a uma profunda crise política e econômica que culminaria no golpe militar de 1964. O contexto político estava permeado por debates sobre reformas de base, como as reformas agrária, urbana e educacional, que provocavam intensos embates entre setores progressistas e conservadores da sociedade brasileira.

Artisticamente, essa fase foi um marco na produção de movimentos de vanguarda no Brasil, como o Concretismo e o Neoconcretismo, dos quais Luiz Sacilotto foi uma figura importante. Embora sua produção estivesse mais vinculada ao concretismo, que começou a se consolidar na década de 1950, a continuidade de sua obra nos anos 1960 reflete o ambiente de efervescência cultural que dialogava com questões políticas e sociais.

concentrou-se em sua atividade como desenhista técnico e em reflexões sobre sua trajetória e práticas artísticas. Essa pausa foi crucial para que ele reavaliasse suas ideias e explorasse novas direções. Ao retornar à sua arte, Sacilotto mantém sua abordagem característica, porém intensificando o ritmo e a vibração de suas composições. Ele mergulha no universo da arte ótica, explorando-a com maestria até esgotar as possibilidades da linha e da forma, para finalmente redescobrir a cor.

Luiz Sacilotto realiza um minucioso trabalho ao pesquisar, adquirir e catalogar novos pigmentos, traçando origens e elaborando escalas cromáticas para criar suas próprias tintas com precisão. Seu controle detalhado sobre os materiais permite alcançar exatamente as cores desejadas. Experimentando com diferentes formatos, ele produz telas pequenas que são posteriormente ampliadas com perfeição, e vice-versa. Esse processo, embora meticuloso, revela seu fascínio pela cor, demonstrando uma entrega ao encanto visual em sua prática artística.

A Casa do Olhar Luiz Sacilotto, em Santo André - São Paulo, é um centro cultural dedicado à preservação da obra do artista e à promoção de atividades relacionadas às artes visuais, como exposições e seminários. Em 2024, no centenário de Sacilotto, o espaço sediou a exposição *Sacilotto em Movimento*, com 125 itens que traçam sua trajetória artística, e eventos complementares no Instituto de Arte Contemporânea (IAC), Museu de Arte Contemporânea (MAC USP) e uma exposição de arte postal com artistas de mais de 30 países. As atividades celebraram Sacilotto como pioneiro do concretismo e sua contribuição à arte abstrata no Brasil.

Visitando a exposição Sacilotto em Movimento, na Casa do Olhar Luiz Sacilotto, em 22 de junho de 2024, foi possível compreender mensurar, mesmo que apenas um pouco, o trabalho de pesquisa realizado por Sacilotto. Um ambiente da casa apresentava a simulação do que seria sua estante de livros, (Figura 2.14), materiais para trabalhar com as diferentes pigmentações e painéis com a escala de cores confeccionada por ele (Figura 2.15).

> [Sacilotto] desvela-se um artista/técnico/pesquisador, em que livros de geometria e biologia se misturam com ferramentas de trabalho, coleções de pigmentos – coletados por onde viajava e testados metodicamente sobre diversas bases, sempre acompanhados de anotações sobre as reações químicas desenvolvidas no decorrer do tempo e diante de situações diversas de calor, luminosidade, umidade. Um artista sem preconceitos com o uso de novos materiais e soluções – que da água forte ao adesivo vinílico experimento ou que lhe passou pelas mãos. Por isso não há sentido em buscar um artista de formação técnica, ou um técnico que se fez artista, [e um só homem, um polímata como havia no Renascimento: fascinado pelas descobertas, insistente nas experimentações, metódico nas observações e anotações (Roberto; Oliveira, 2015, p. 44).

Figura 2.14 – Armário de livros com literatura variada

(a) (b)

Fonte: A autora.

Figura 2.15 – Paletas de cores e frascos contendo pigmentos

(a) (b)

Fonte: A autora.

Luiz Sacilotto demonstrou pleno domínio da forma e virtuosismo cromático em produção artística intensa, que ocorreu de meados dos anos 1980 até 1993. Nesse período, ele desenvolveu uma obra pessoal marcada pela harmonia de cores quentes e frias, aumentando a intensidade luminosa. Ao explorar a alternância cromática entre figura e fundo, criar assimetrias a partir de linhas simétricas e trabalhar com semitons e transparências, Sacilotto produziu um trabalho que era tanto lúcido quanto lúdico.

Em 1993, um acidente vascular interrompeu novamente sua produção artística, que lentamente retornou a partir de 1995. Ao retomar suas atividades, foi convidado a desenvolver um projeto de obras públicas para a cidade de Santo André, realizando-os entre 1998 e 2000. Nesses trabalhos tridimensionais, incorporou elementos plásticos das esculturas da década de 1950, explorando a oposição entre positivo e negativo, criando peças imponentes que dominavam o espaço com leveza, prontas para alçar voo.

A partir de 2000, devido às dificuldades no uso das mãos, Sacilotto adotou a técnica da colagem em módulos, retornando à monocromia e recuperando a vibratilidade de seu período cinético. Luiz Sacilotto faleceu em 2003, reconhecido em vida como um dos mais importantes artistas brasileiros e pioneiro do Concretismo, expandiu as possibilidades do movimento, mantendo sua essência ao longo de sua carreira artística.

A obra *Concreção 0005*, apresentada na Figura 2.16, foi inicialmente instalada na rua Coronel Oliveira Lima e removida em julho de 2013 para ser reinstalada um pouco mais adiante, em um largo conhecido popularmente como Quitandinha. No entanto, devido à pressão popular, a obra foi devolvida ao seu local original em 2015, na rua Coronel Oliveira Lima. Já a obra *Concreção 9877*, na Figura 2.17, teve sua instalação originalmente no Térreo 1 do Centro Cívico de Santo André e, em 2015, foi reinstalada no Jardim das Esculturas da Casa do Olhar Luiz Sacilotto, onde permanece na atualidade.

Figura 2.16 – *Concreção 0005* - Luiz Sacilotto

Fonte: A autora.

Figura 2.17 – *Concreção 9877* - Luiz Sacilotto

(a) (b) (c)

Fonte: A autora.

3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

No universo da geometria, as transformações geométricas no plano desempenham um papel significativo na compreensão de como diferentes formas se relacionam e interagem entre si. Este capítulo é dedicado ao estudo detalhado das transformações geométricas no plano, fornecendo uma base teórica sólida que servirá de apoio para atividades práticas no software *GeoGebra* (*link*). O embasamento teórico para o desenvolvimento deste capítulo tem como referência materiais de Elon Lages Lima, em seus livros Isometria (1996) e Coordenadas no Plano Cartesiano (2002).

Serão abordadas as principais transformações no plano: translações, rotações, reflexões e homotetia além das composições entre essas transformações. Cada transformação será explorada com rigor matemático, destacando suas propriedades fundamentais e aplicação em contextos práticos, como por exemplo em algumas obras de Luiz Sacilotto.

Definição 3.1. *Uma transformação geométrica T no plano π é uma função $T : \pi \to \pi$ em que cada ponto P do plano está associado a outro ponto $P' = T(P)$ chamado de imagem de P.*

Transformações geométricas no plano podem apresentar características que descreveremos nas definições a seguir:

Definição 3.2. *Uma função $T : \pi \to \pi$ chama-se injetiva quanto pontos distintos $P_1, P_2 \in \pi$, $P_1 \neq P_2$, apresentam imagens distintas, ou seja, $T(P_1) \neq T(P_2)$ ou, de forma equivalente, $T(P_1) = T(P_2)$ implica em $P_1 = P_2$.*

Definição 3.3. *Uma função $T : \pi \to \pi$ chama-se sobrejetiva quando todo ponto P' em π é imagem de pelo menos um ponto P, ou seja, para todo P' em π existe um ponto P em π tal que $T(P) = P'$.*

Definição 3.4. *Uma função $T : \pi \to \pi$ chama-se bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva.*

Neste caso, para todo P em π existe um único ponto P' em π tal que $T(P') = P$.

3.1 TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS

Definição 3.5. *Uma isometria do plano π é uma transformação geométrica $T : \pi \to \pi$ que preserva distâncias, ou seja, T é uma isometria se $d(T(P_1), T(P_2)) = d(P_1, P_2)$, para quaisquer pontos P_1 e P_2 em π.*

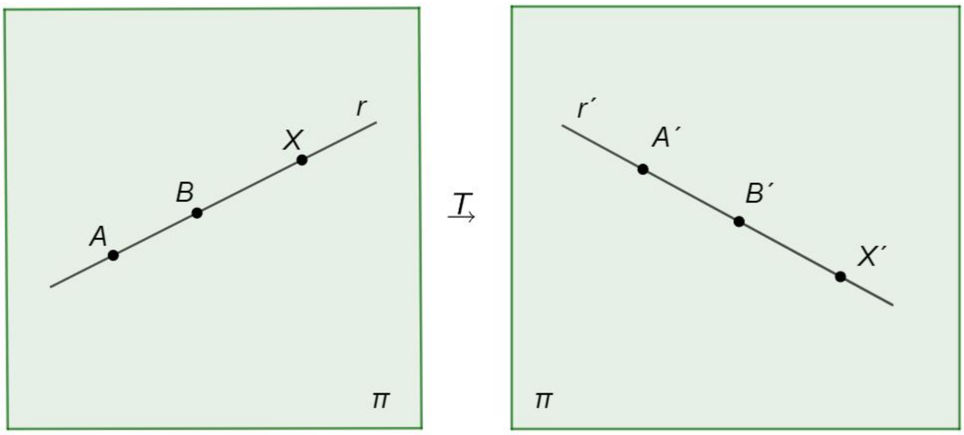
Observação: $d(A, B)$ denota a distância euclidiana entre os pontos A e B sendo que, no plano π , se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ tem-se que $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Propriedade 3.1. *Toda isometria $T : \pi \to \pi$ transforma retas em retas.*

Demonstração. Seja $r \subset \pi$ uma reta. Tomemos dois pontos distintos A e B em r e definimos $A' = T(A)$ e $B' = T(B)$. Chamemos de r' a reta do plano π que passa por A' e B'. Dado qualquer $X \in r$, um dos três pontos A, B ou X está entre os outros dois. Digamos que B esteja entre A e X (Figura 3.1), ou seja, $B \in \overline{AX}$. Portanto $d(A, X) = d(A, B) + d(B, X)$ e, fazendo $X' = T(X)$ seque que $d(A', X') = d(A', B') + d(B', X')$, pois T é uma isometria. Consequentemente B' pertence ao segmento de extremidades em A' eX'. Dessa forma, os pontos A', B' e X' são colineares. A demonstração é análoga, para os casos de A entre B e X ou X entre A e B. Isso prova que se $X \in r$ então $X' \in r'$.

Vimos que $T(r) \subset r'$. Vamos mostrar que para todo $X' \in r'$ tem-se que existe um $X \in r$ tal que $T(X) = X'$. Para tanto, tomemos $P \in r$ qualquer e seja $T(P) = P'$. Se $d(P', X') = 0$ então $X = P$. Se $d(P', X') > 0$, então existem dois pontos $P_0, P_1 \in r$ tais que $d(P_0, P) = d(P_1, P) = d(P', X')$. Assim, $X = P_0$ ou $X = P_1$. Isso mostra que $T(r) = r'$. Sendo assim, a restrição de T a r é uma isometria entre r e r'. □

Figura 3.1 – Isometria de retas

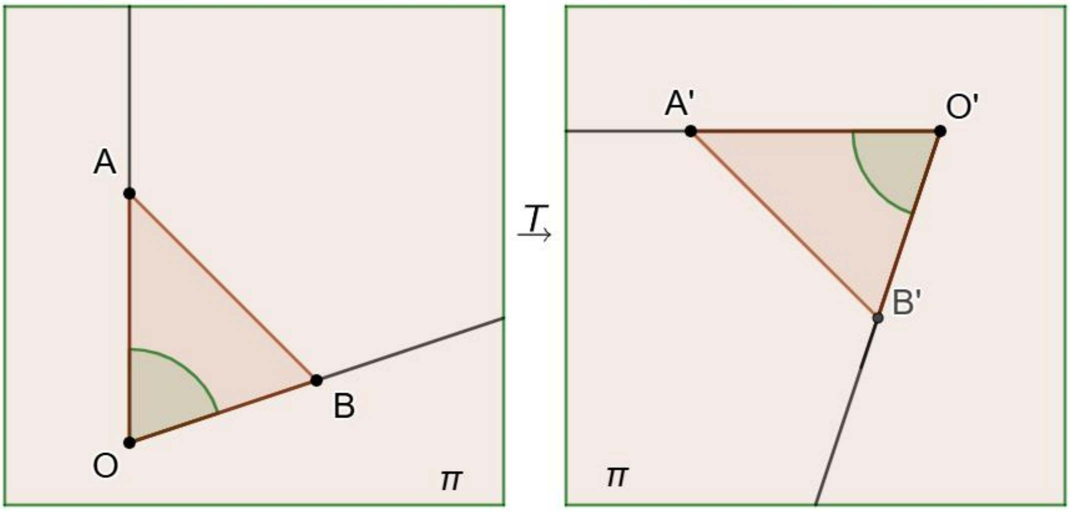


Fonte: A autora.

Propriedade 3.2. *Toda isometria $T : \pi \to \pi$ preserva ângulos.*

Demonstração. Sejam A, B e O pontos do plano π. Consideremos o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de mesma origem em O, ou seja, $A\hat{O}B$ (Figura 3.2). Sejam, ainda A', B' e O' tais que $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ e $O' = T(O)$. Uma vez que T é uma isometria, temos que $d(A, O) = d(T(A), T(O)) = d(A', O')$ e, analogamente, $d(B, O) = d(B', O')$ e $d(A, B) = d(A', B')$. Portanto, o triângulo de vértices em A, B e O é congruente ao triângulo de vértices em A', B' e O' pelo caso de congruência LLL. Consequentemente, o ângulo $A\hat{O}B$ é congruente ao ângulo $A'\hat{O}'B'$. □

Figura 3.2 – Isometria de ângulos

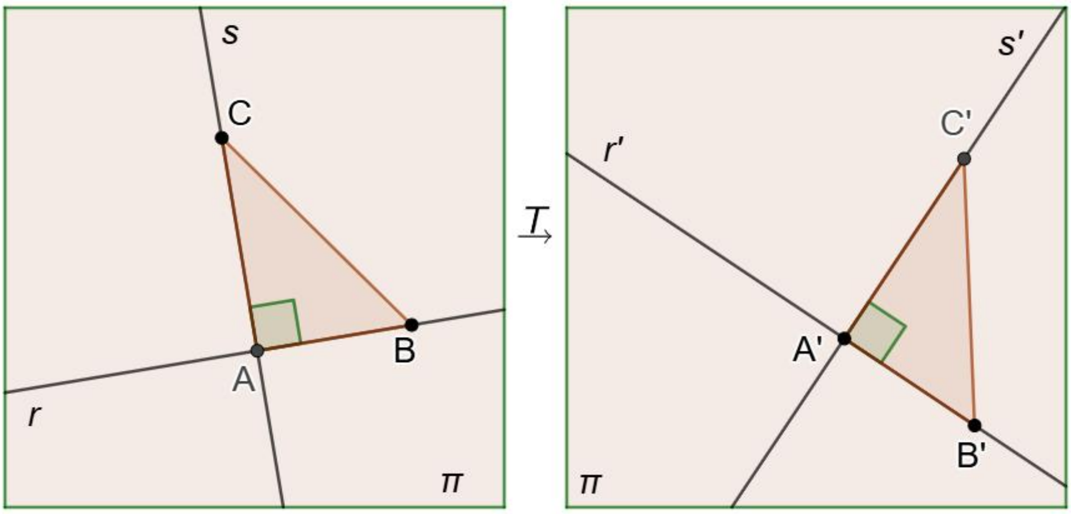


Fonte: A autora.

Corolário 3.1. *Toda isometria $T : \pi \to \pi$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Demonstração. Sejam r e s retas perpendiculares em π. Consideremos o ponto A de intersecção entre r e s e dois pontos $B \in r$ e $C \in s$. O triângulo de vértices A, B e C é retângulo em A uma vez que r e s são perpendiculares. Considere, agora, $T(r) = r'$, $T(s) = s'$, $A' = T(A) \in r' \cap s'$, $B' = T(B) \in r'$ e $C' = T(C) \in s'$. Como T é uma isometria, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes por LLL, Figura 3.3, logo o triângulo $A'B'C'$ é retângulo em A' o que mostra que r' e s' são perpendiculares. $\square$

Figura 3.3 – Isometria de retas perpendiculares



Fonte: A autora.

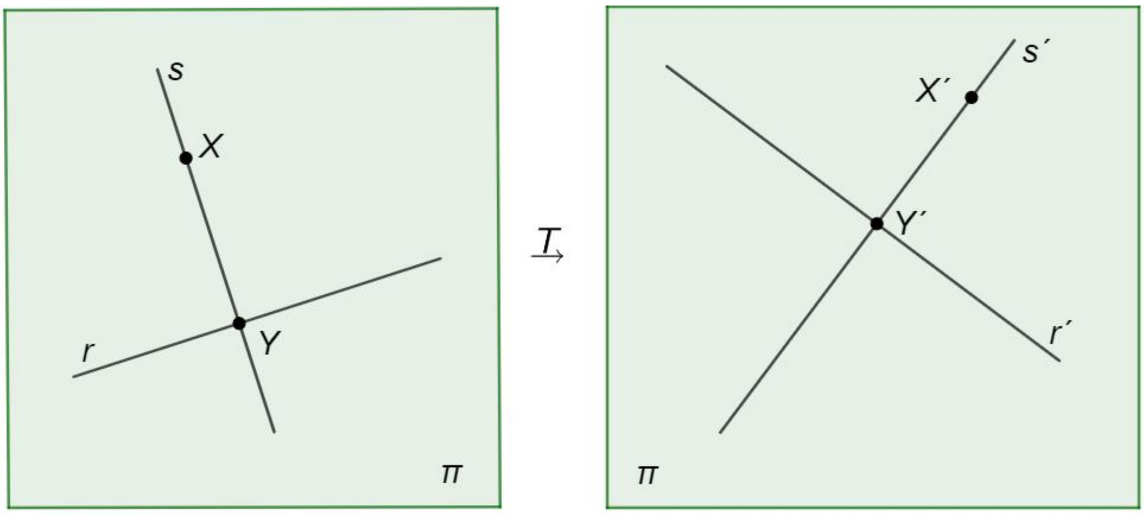
Teorema 3.1. *Toda isometria $T : \pi \to \pi$ é bijetiva e sua inversa, $T^{-1} : \pi \to \pi$, é ainda uma isometria.*

Demonstração. Inicialmente, provemos que T é injetiva. De fato, sejam X e Y pontos de π tais que $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$. Nessas condições, temos que se $X \neq Y$ então $d(X, Y) > 0$. Como T é isometria segue que $d(X', Y') = d(T(X), T(Y)) = d(X, Y) > 0$. Logo, $X' \neq Y'$.

Provemos agora que T é sobrejetiva. Tomemos um ponto arbitrário $X' \in \pi$ e procuremos determinar um ponto $X \in \pi$ tal que $T(X) = X'$. Para tanto, tracemos uma reta qualquer $r \subset \pi$. A imagem de r por T é uma reta $r' \in \pi$ conforme Propriedade 3.1. Se $X' \in r'$, então, por definição de imagem, existe um ponto $X \in r$ tal que $T(X) = X'$. Caso contrário, seja s' a reta perpendicular a r passando por X'. Seja Y' o ponto de interseção de r' com s'. Como $Y' \in r'$, existe $Y \in r$ tal que $T(Y) = Y'$. Seja s a reta perpendicular a r passando por Y. A imagem de s pela isometria T é perpendicular a r', conforme Propriedade 3.1, e contém Y'. Logo $T(s) = s'$, Figura 3.4. Como $X' \in s'$ então existe $X \in s$ tal que $T(X) = X'$.

Sendo T injetiva e sobrejetiva, segue que T é bijetiva.

Figura 3.4 – Isometrias são sobrejetivas



Fonte: A autora.

Provemos agora que $T^{-1} : \pi \to \pi$, a inversa da isometria T, é uma isometria.

De fato, consideremos X' e Y' ambos pontos de π tais que $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$ em que $X = T^{-1}(X')$ e $Y = T^{-1}(Y')$.

Temos que $d(X', Y')$ = $d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$ pois T é uma isometria.

Ainda: $d(X, Y) = d(T^{-1}(X'), T^{-1}(Y'))$ e, portanto, $d(X', Y') = d(T^{-1}(X'), T^{-1}(Y'))$ o que prova que $T^{-1} : \pi \to \pi$ é uma isometria. $\square$

Propriedade 3.3. *Se $T : \pi \to \pi$ e $S : \pi \to \pi$ são isometrias entre planos então a composta $S \circ T : \pi \to \pi$ é, também, uma isometria.*

Demonstração. Sejam X e Y em π tais que $T(X) = X'$ e $T(Y) = Y'$, $S(X') = X''$ e $S(Y') = Y''$.

Sendo T e S isometrias, ambas preservam distância, ou seja, se $d(X,Y) = d(X',Y')$ e $d(X',Y') = d(X'',Y'')$ então $d(X,Y) = d(X'',Y'')$. Como $(S \circ T)(X) = S(T(X)) = S(X') = X''$ e $(S \circ T)(Y) = S(T(Y)) = S(Y') = Y''$ segue que $S \circ T$ é uma isometria. □

Como consequência da definição temos que isometrias preservam ângulos e distâncias e, assim, transformam figuras em figuras congruentes. Conhecidas essas propriedades de isometrias, abordaremos algumas isometrias: translação, reflexão, rotação e composições dessas três funções.

3.1.1 TRANSLAÇÃO

Definição 3.6. *A translação $T : \pi \to \pi$, determinada por um vetor v, é uma função que leva cada ponto P do plano π ao ponto $P' = T_v(P) = P + v$. Ou seja, sendo v de coordenadas (α, β) então se $P = (x, y)$ é um ponto do plano π tem-se que $T_v(P) = (x + \alpha, y + \beta)$.*

Teorema 3.2. *Se $T : \pi \to \pi$ é uma translação então T é uma isometria.*

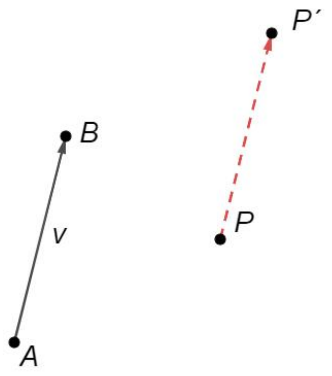
Demonstração. Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos do plano π, e v um vetor dado por $v = (\alpha, \beta)$. Sendo $A' = T_v(A)$ e $B' = T_v(B)$, temos:

$$\begin{aligned}
d(A', B') &= d(T_v(A), T_v(B)) \\
&= d(A + v, B + v) \\
&= d\Big((x_A + \alpha, y_A + \beta), (x_B + \alpha, y_B + \beta)\Big) \\
&= \sqrt{[x_B + \alpha - (x_A + \alpha)]^2 + [y_B + \beta - (y_A + \beta)]^2} \\
&= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
&= d((x_A, y_A), (x_B, y_B)) \\
&= d(A, B).
\end{aligned}$$

□

Uma translação é um tipo de isometria que move todos os pontos de uma figura por uma mesma distância em uma mesma direção. Ela pode ser descrita pela aplicação de um vetor de translação a todos os pontos da figura. A Figura 3.5 apresenta a translação do ponto P na direção do vetor v.

Figura 3.5 – Translação de um ponto



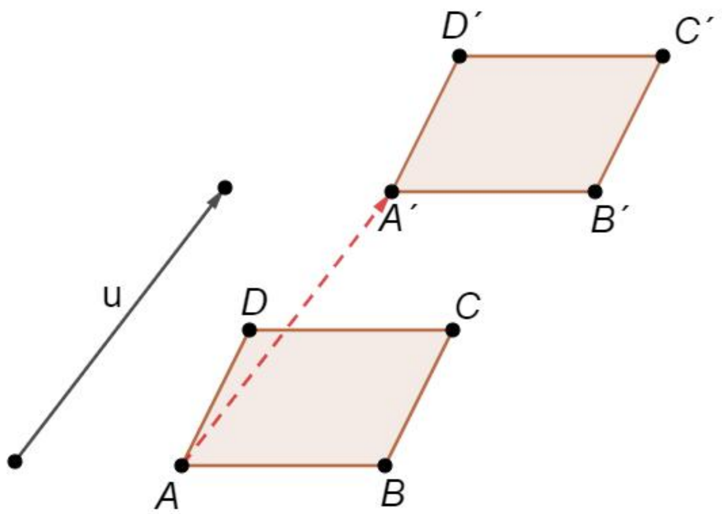
Fonte: A autora.

As propriedades básicas de uma translação, visto esta ser uma isometria, incluem:

1. Bijetividade: É uma função bijetiva, ou seja, cada ponto na figura inicial corresponde a um único ponto na figura transladada e vice-versa.
2. Inversibilidade: Tem uma inversa e a translação inversa reverte o movimento aplicado.
3. Composição: A composição de duas translações resulta em outra translação, cujo vetor é a soma dos vetores das translações originais.

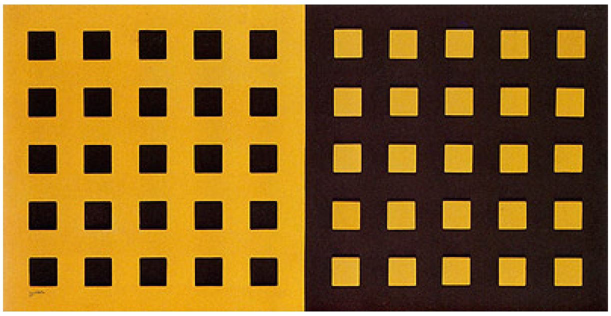
Na Figura 3.6, mostramos a translação de um paralelogramo segundo a direção de um vetor u e, na Figura 3.7, mostramos a aplicação de translação na obra *Concreção 5732* de Luiz Sacilotto. Nesta obra, os quadrados pretos menores podem ser obtidos transladando-se um quadrado referência como, por exemplo, o quadrado preto no canto inferior esquerdo da obra.

Figura 3.6 – Translação de um polígono no plano



Fonte: A autora.

Figura 3.7 – Translação em *Concreção 5732* - Luiz Sacilotto



Fonte: Sacilotto (2024).

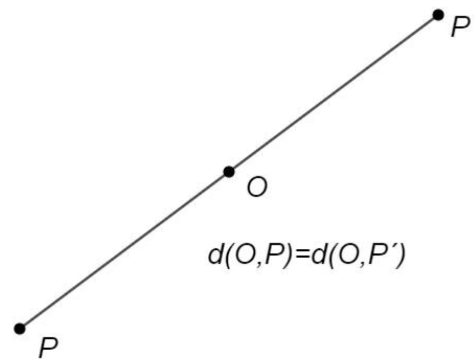
3.1.2 REFLEXÃO EM TORNO DE UM PONTO

A reflexão em torno de um ponto é um tipo de transformação geométrica na qual cada ponto de uma figura possui imagem, por meio da transformação, em um ponto simétrico a ele em relação a um ponto fixo O, chamado de centro de reflexão. Em outras palavras, cada ponto P da figura e seu reflexo P' estão à mesma distância do ponto fixo O, com P, O e P' colineares.

Definição 3.7. *Dado um ponto P e um ponto O, chama-se simétrico de P em relação ao ponto O, o ponto P' tal que o ponto O é ponto médio do segmento PP'.*

A Figura 3.8 apresenta a reflexão do ponto P em relação ao ponto O sendo que P' representa o simétrico de P em relação a O.

Figura 3.8 – Reflexão de P em relação a O – P' é a reflexão de P em relação a O



Fonte: A autora.

Características da reflexão segundo um ponto:

1. Centro de reflexão O: é o ponto fixo em torno do qual ocorre a simetria. Ele é o ponto médio entre cada par de pontos correspondentes (um ponto e sua imagem refletida).

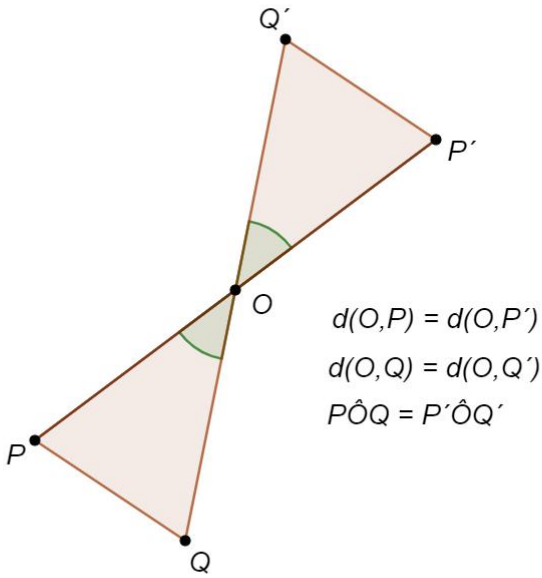
2. Simetria: o ponto P original e o ponto P' refletido são simétricos em relação ao centro O de reflexão. Se o ponto original está a uma certa distância do centro, o ponto refletido estará à mesma distância, mas do lado oposto.

Definição 3.8. *Seja O um ponto no plano π. A reflexão em torno de O é a função $R_O : \pi \to \pi$ definida por $R_O(O) = O$ e, para $X \neq O$, $R_O(X) = X'$ em que X' é o simétrico de X relativamente a O.*

Teorema 3.3. *A função $R_O : \pi \to \pi$ é uma isometria, visto que preserva distâncias.*

Demonstração. Sejam P e Q dois pontos do plano π e P' e Q' seus simétricos em relação ao ponto O. Os triângulos OPQ e $OP'Q'$ são congruentes, por LAL pois $d(O,P) = d(O,P')$, $d(O,Q) = d(O,Q')$ e os ângulos $P\hat{O}Q$ e $P'\hat{O}Q'$ são opostos pelo vértice (Figura 3.9). Sendo assim $d(P,Q) = d(P',Q')$.

Figura 3.9 – A reflexão é uma isometria



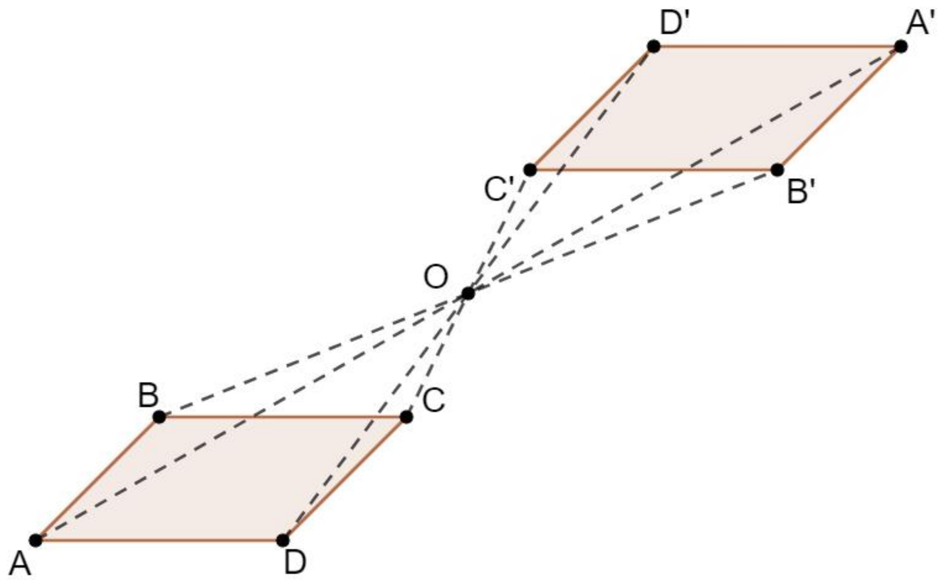
Fonte: A autora.

□

Como a reflexão segundo um ponto é uma isometria, a forma e o tamanho da figura original permanecem inalterados, apenas a sua orientação muda. Todos os pontos da figura original têm uma imagem simétrica em relação ao centro de reflexão, preservando as distâncias e proporções da figura.

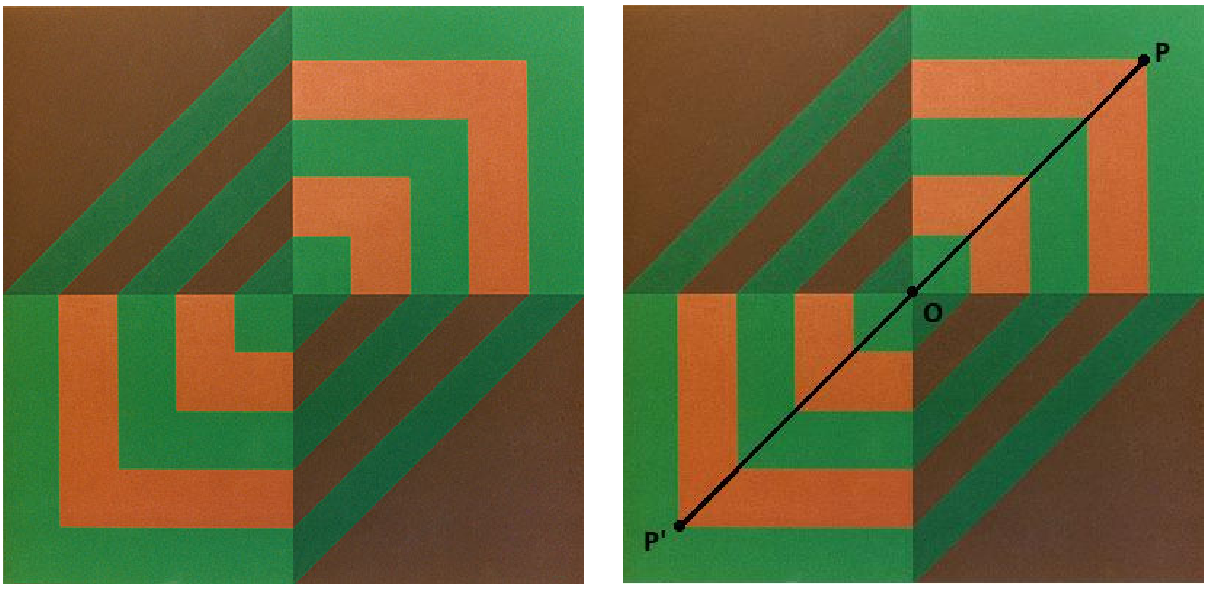
Por exemplo, para obtermos a reflexão de um polígono em relação ao ponto O, devemos realizar a reflexão de todos os pontos do polígono em relação ao mesmo ponto O. Na Figura 3.10 destacamos os segmentos de extremidades nos vértices do polígono e nos respectivos pontos simétricos. Na Figura 3.11 mostramos a aplicação de reflexão em relação a um ponto na obra *Concreção 8692,* de Luiz Sacilotto.

Figura 3.10 – Reflexão de um polígono em relação ao ponto O



Fonte: A autora.

Figura 3.11 – Reflexão em *Concreção 8692* - Luiz Sacilotto



(a) (b)

Fonte: (a) Sacilotto (2024); (b) a autora.

3.1.3 REFLEXÃO EM RELAÇÃO A UMA RETA

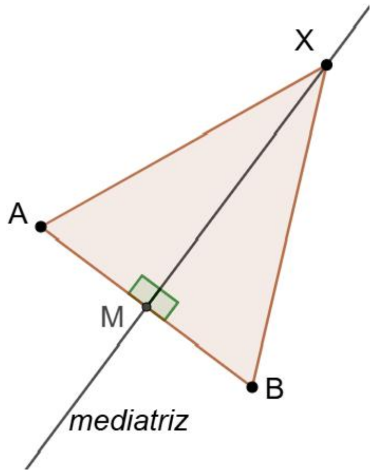
A reflexão em relação a uma reta r é um tipo de transformação geométrica em que cada ponto P de uma figura é "espelhado" em relação a uma reta fixa, chamada de eixo de reflexão. Esse processo cria uma imagem simétrica da figura, em que cada ponto refletido está à mesma distância da reta que o ponto original, mas no lado oposto.

Definição 3.9. *Denominamos de mediatriz do segmento $\overline{AB}$ a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e que contém seu ponto médio.*

Propriedade 3.4. *A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de A e de B.*

Demonstração. Seja X um ponto que pertence à mediatriz do segmento com extremidades em A e B e seja M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$ temos que $d(M, A) = d(M, B)$. Ainda, temos que $A\hat{M}X = B\hat{M}X = 90°$, pois a mediatriz de $\overline{AB}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. Portanto os triângulos XAM e XBM são congruentes por LAL visto que $\overline{XM}$ é lado comum. Segue que $d(A, X) = d(B, X)$ e, consequentemente, que X é equidistante de A e B como podemos observar na Figura 3.12.

Figura 3.12 – Propriedade da Mediatriz de um segmento

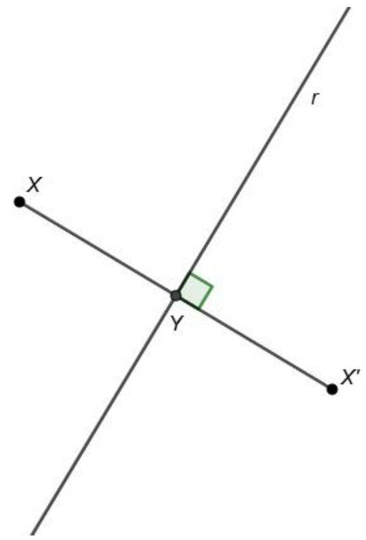


Fonte: A autora.

□

Definição 3.10. *Seja r uma reta contida em um plano π. A reflexão em torno da reta r é uma função $R_r : \pi \to \pi$ definida por $R_r(X) = X$, para todo $X \in r$ e, para $X \notin r$, $R_r(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r. O ponto Y é o ponto médio do segmento XX' e, também, $Y = r \cap \overline{XX'}$ como podemos observar na Figura 3.13.*

Figura 3.13 – Y é ponto médio do segmento XX' e X' é o simétrico de X em relação à reta r



Fonte: A autora.

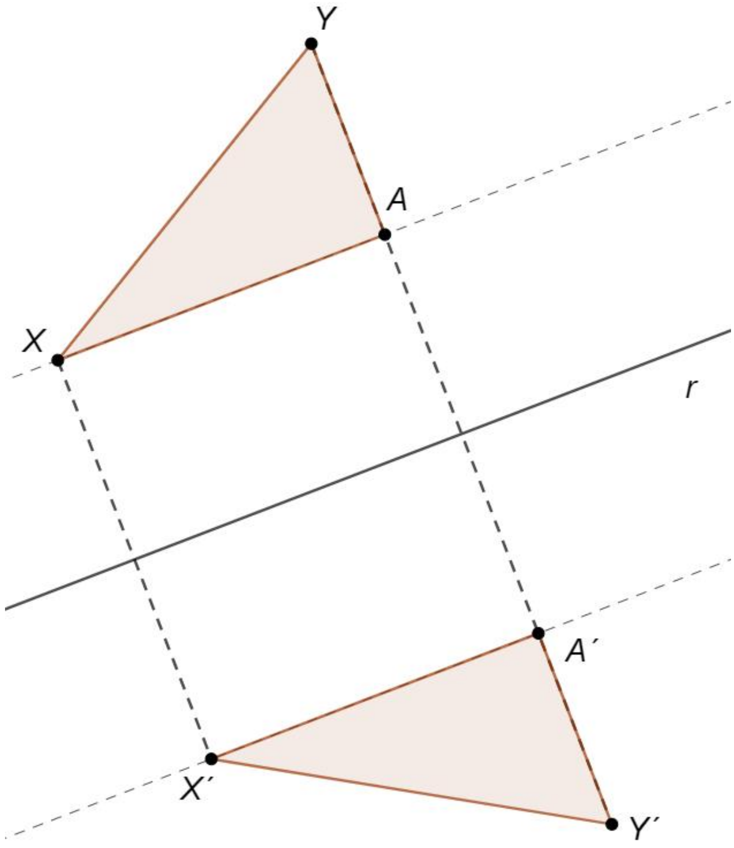
Características da reflexão em relação a uma reta:

1. Eixo de reflexão: é a reta em torno da qual a simetria ocorre. Todos os pontos da figura original são refletidos em relação a essa reta.
2. Simetria: para cada ponto da figura original, existe um ponto correspondente refletido do outro lado do eixo de reflexão, e ambos os pontos estão à mesma distância do eixo.
3. Perpendicularidade: o segmento que conecta cada ponto original ao seu ponto refletido é perpendicular ao eixo de reflexão.

Teorema 3.4. *A função $R_r : \pi \to \pi$ é uma isometria, visto que preserva distâncias.*

Demonstração. Para demonstrar tal afirmação, consideraremos dois casos. Caso 1: X e Y são dois pontos do plano π situados no mesmo semiplano definido pela reta r. Tracemos os segmentos XA e $X'A'$, paralelos a r, sendo A e A' pontos sobre o segmento YY' sendo A' a reflexão de A, X' a reflexão de X e Y' a reflexão de Y, conforme apresentado na Figura 3.14. Os triângulos retângulos XAY e $X'A'Y'$ são congruentes, uma vez que os catetos são, respectivamente, congruentes. Portanto, sendo as hipotenusas também congruentes, segue que $d(X,Y) = d(X',Y')$ e, portanto, R_r é uma isometria.

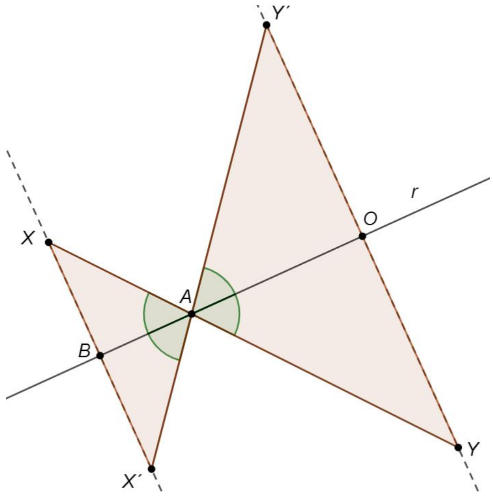
Figura 3.14 – Os triângulos retângulos XAY e $X'A'Y'$ são congruentes



Fonte: A autora.

Caso 2: X e Y são dois pontos do plano π situados em semiplanos opostos definido pela reta r. Sejam A e B os pontos de intersecção de XY e XX' com a reta r, respectivamente. Os triângulos ABX e ABX' são retângulos com o cateto AB em comum e $BX = BX'$. Portanto, os triângulos ABX e ABX' são congruentes por LAL e, consequentemente, as hipotenusas são congruentes, logo $d(A, X) = d(A, X')$. De modo análogo, temos que $d(A, Y) = d(A, Y')$. Sendo assim, os triângulos AXX' e AYY' são isósceles e, portanto, suas medianas são bissetrizes e $X\hat{A}B = X'\hat{A}B$ e $Y'\hat{A}O = Y\hat{A}O$, sendo O ponto médio de YY'. $X\hat{A}B$ e $Y\hat{A}O$ são ângulos opostos pelo vértice e, portanto, $X\hat{A}B = Y\hat{A}O$ (Figura 3.15). Então, $X\hat{A}B + X'\hat{A}B = Y'\hat{A}O + Y\hat{A}O$. Como $Y'\hat{A}O + Y\hat{A}O$ é o suplemento do ângulo $X\hat{A}Y'$, segue que $X\hat{A}B + X'\hat{A}B$ também é e, portanto, X', A e Y' são colineares. Consequentemente $d(X', Y') = d(X', A) + d(A, Y') = d(X, A) + d(A, Y) = d(X, Y)$ provando que R_r é uma isometria.

Figura 3.15 – Os triângulos AXX' e AYY' são isósceles e $X\hat{A}B = Y\hat{A}O$

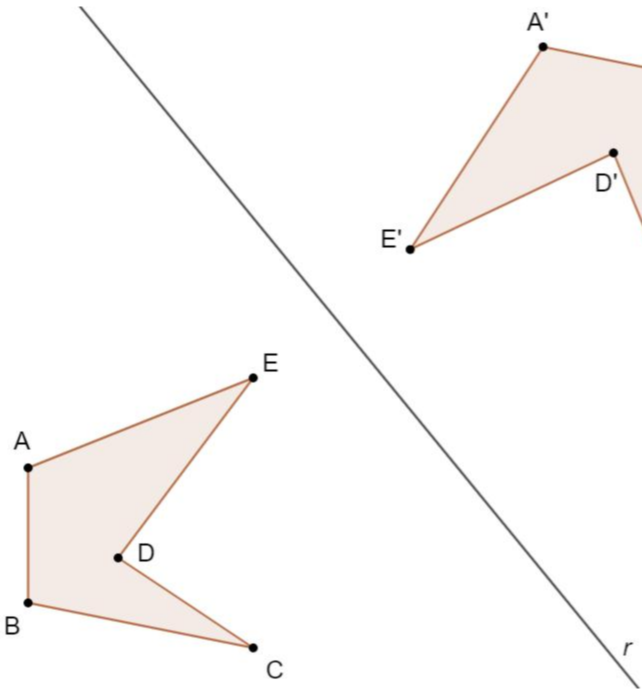


Fonte: A autora.

□

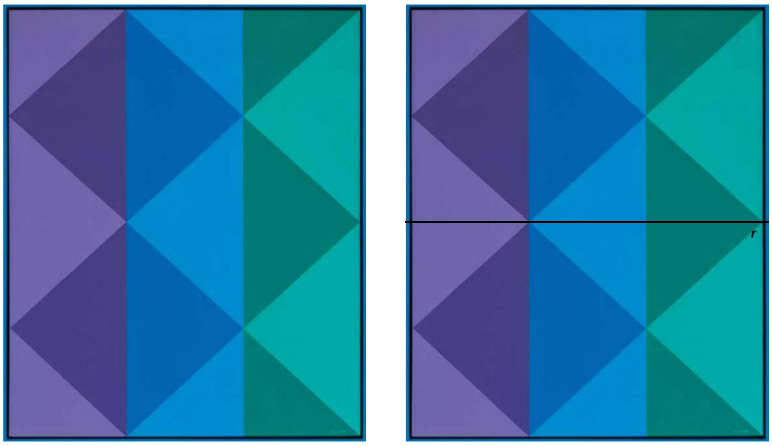
Na Figura 3.16 mostramos a reflexão do polígono $ABCDE$ em relação à reta r e na Figura 3.17 mostramos a aplicação desse tipo de reflexão na obra *Concreção 9351*, de Luiz Sacilotto.

Figura 3.16 – Simetria do polígono $ABCED$ em relação à reta r



Fonte: A autora.

Figura 3.17 – Reflexão em *Concreção 9351* - Luiz Sacilotto



(a) (b)

Fonte: (a) Sacilotto (2024); (b) a autora.

A reflexão em relação a uma reta é uma isometria, ou seja, é uma transformação geométrica que preserva as distâncias e ângulos entre os pontos da figura original. O tamanho e a forma da figura refletida permanecem idênticos à figura original, apenas sua orientação muda. Durante essa transformação, as distâncias entre os pontos não são alteradas, garantindo que a figura refletida seja uma cópia da original, porém invertida em relação ao eixo.

3.1.4 ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO

A rotação em torno de um ponto é um tipo de transformação geométrica em que uma figura é girada em torno de um ponto fixo O, chamado de centro de rotação, por um determinado ângulo α. Esse ângulo pode ser medido em graus ou radianos, e a rotação pode ser no sentido horário ou anti-horário. A rotação preserva a forma e o tamanho da figura original, alterando apenas a sua orientação.

Características de uma rotação:

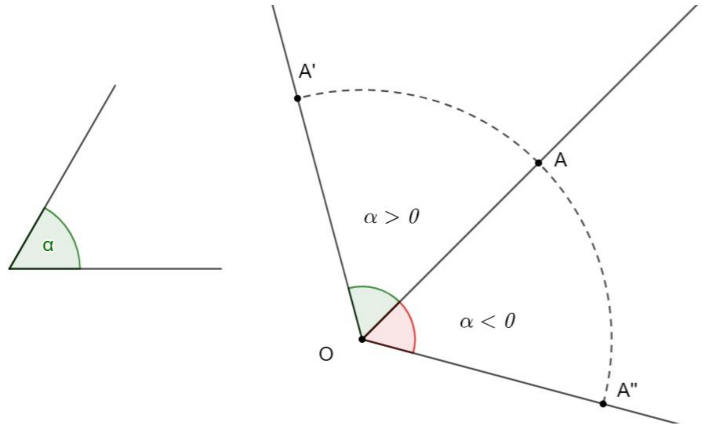
1. Centro O de rotação: o ponto fixo em torno do qual a figura gira.
2. Ângulo α de rotação: o valor que determina o quanto a figura é girada.
3. Sentido da rotação: pode ser no sentido horário (ângulo negativo) ou anti-horário (ângulo positivo).

Definição 3.11. *Sejam O um ponto pertencente a um plano π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo de vértice no ponto O. A rotação de um ângulo α em torno do ponto O é a função $R_{O,\alpha} : \pi \to \pi$ definida por $R_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo $X \neq O$ em π, $R_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano π tal que $d(X, O) = d(X', O)$, $X\hat{O}X' = \alpha$ e o sentido de rotação de A para B é o mesmo de X para X'.*

Observação: A rotação tem sentido orientado e convenciona-se tomar como positivo o sentido anti-horário ($\alpha > 0$) e como negativo o sentido horário ($\alpha < 0$).

Na Figura 3.18 mostramos a rotação do ponto A em torno do ponto O segundo o ângulo α tanto no sentido anti-horário (originando A') quanto no sentido horário (originando A'').

Figura 3.18 – Rotação do ponto A em torno do ponto O

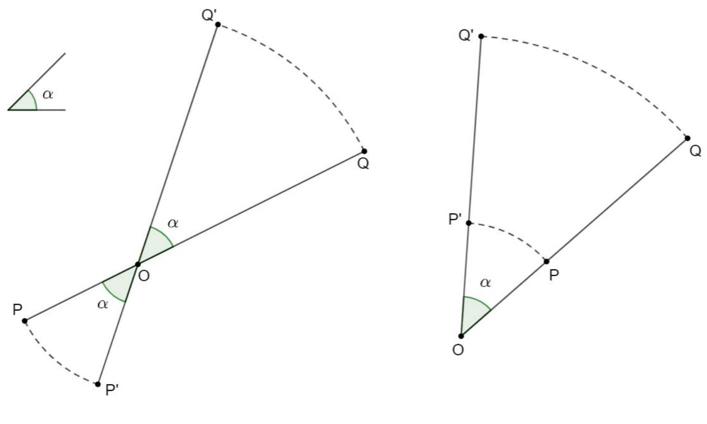


Fonte: A autora.

Consideremos que $R_{O,\alpha}$ leva o ponto P em P' e o ponto Q em Q'.

Se O, P e Q forem pontos colineares, como consequência da definição temos que o segmento PQ é congruente ao segmento $P'Q'$, Figura 3.19 .

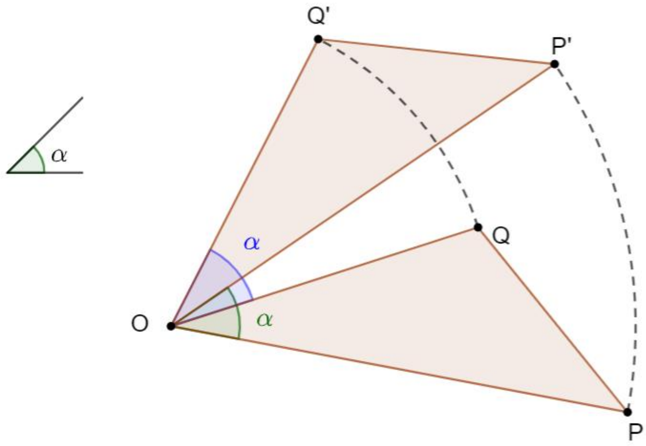
Figura 3.19 – O, P e Q colineares



Fonte: A autora.

Consideremos, então, que P, Q e O não são colineares conforme Figura 3.20. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, segue que $\Delta OPQ \equiv \Delta OP'Q'$, mostrando que a rotação preserva distâncias, uma vez que $PQ \equiv P'Q'$. Portanto, a função $R_{O,\alpha}$ é uma isometria e, consequentemente, a rotação não altera o tamanho de uma figura mas apenas a orienta em uma nova direção.

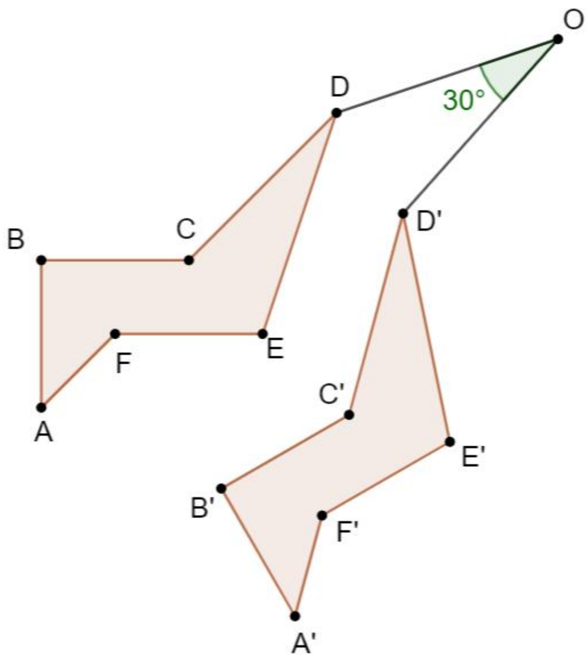
Figura 3.20 – O, P e Q não colineares



Fonte: A autora.

A Figura 3.21 apresenta a rotação de um polígono em torno de um ponto O segundo um ângulo de $30°$ no sentido anti-horário e a Figura 3.22 apresenta uma aplicação de rotação em *Concreção 8462* , de Luiz Sacilotto. Nesta obra, um hexágono não convexo em formato de letra L é rotacionado no sentido horário e, também transladado.

Figura 3.21 – Rotação do Polígono $ABCDEF$ em torno do ponto O segundo um ângulo de $30°$ no sentido anti-horário



Fonte: A autora.

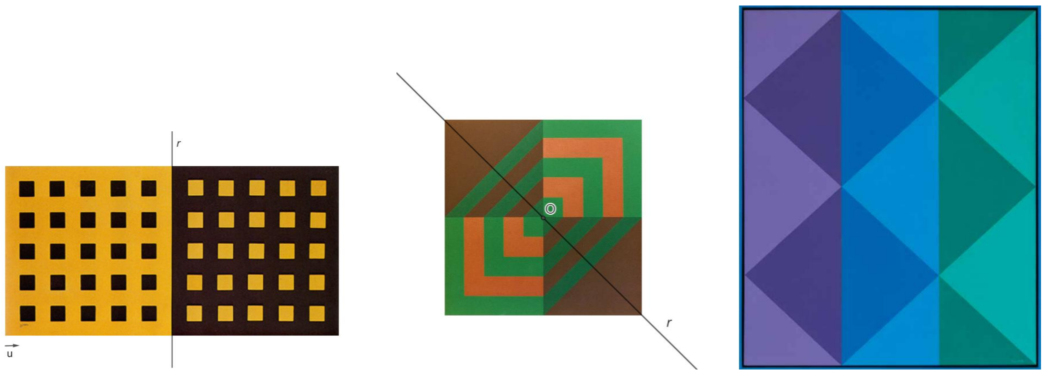
Figura 3.22 – Rotação em *Concreção 9983* - Luiz Sacilotto

Fonte: A autora.

É possível observar que em algumas obras *Concreção*, de Luiz Sacilotto, as isometrias aparecem combinadas. Isso porque a composição de isometrias é uma isometria.

Por exemplo, na obra *Concreção 5732* (Figura 3.7), é possível identificar quadrados que aparecem tanto como objetos transladados quanto refletidos em relação a uma reta. Já em *Concreção 8692* (Figura 3.11), a composição pode ser interpretada como uma reflexão em torno de um ponto ou, ainda, como uma reflexão em relação a uma reta. Na obra *Concreção 9351* (Figura 3.17), triângulos surgem por meio de reflexões em relação a uma reta ou por translações.

Figura 3.23 – *Concreção 5732*, *Concreção 8692* e *Concreção 9351* - Luiz Sacilotto

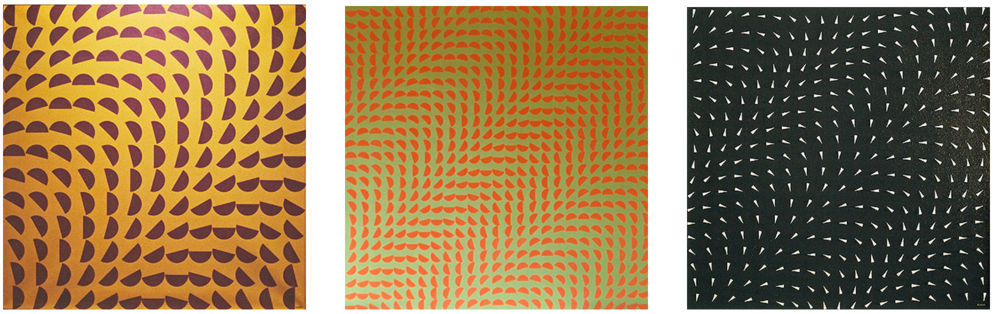


(a) (b) (c)

Fonte: A autora.

A obra *Concreção 9983* (Figura 3.22) é caracterizada pela pesquisa cromática incorporada à utilização de um elemento modular rotacionado e transladado. A composição de isometrias também está presente em *Concreção 8074*, *Concreção 8225* e *Concreção 8332*, Figura 3.24, em que Sacilotto explora rotações e translações de setores circulares.

Figura 3.24 – *Concreção 8074*, *Concreção 8225* e *Concreção 8332* - Luiz Sacilotto



(a) (b) (c)

Fonte: Sacilotto (2024).

Muitas das obras intituladas *Concreção*, de Luiz Sacilotto, oferecem um valioso recurso pedagógico para o estudo das transformações isométricas. A maneira como Sacilotto utiliza composições de translações, reflexões e rotações em suas criações é uma excelente oportunidade para refletir sobre essas transformações geométricas. No entanto, as isometrias não são as únicas transformações presentes em suas obras. Algumas peças da série *Concreção* também fazem uso de figuras semelhantes, o que nos leva à exploração do conceito de homotetia.

3.2 TRANSFORMAÇÕES NÃO ISOMÉTRICAS

Conforme visto anteriormente, as transformações isométricas são aquelas que preservam as distâncias entre todos os pontos de uma figura. Isso significa que a forma, o tamanho e os ângulos da figura original permanecem inalterados após a transformação. Exemplos de transformações isométricas incluem a *Translação*, a *Rotação* e a *Reflexão*. Essas transformações mantêm as propriedades de comprimento e ângulo da figura, ou seja, a figura resultante é congruente com a original.

Uma transformação não isométrica é uma função $T : \pi \to \pi$ que não preserva as distâncias entre os pontos de uma figura. Isso significa que, após a transformação, a figura original pode mudar de tamanho, ser distorcida ou ter suas proporções alteradas.

Em uma transformação não isométrica:

1. Distâncias entre os pontos podem aumentar ou diminuir (em casos específicos, manter-se).
2. Ângulos podem ser modificados ou preservados, dependendo do tipo de transformação.
3. A figura transformada pode ser semelhante à original, mas não necessariamente congruente.

A *homotetia* é um exemplo de transformação não isométrica. A homotetia pode aumentar ou diminuir uma figura proporcionalmente em relação a um ponto fixo, mantendo a forma e os ângulos, mas alterando o tamanho dependendo da razão de homotetia. Portanto, não preserva as distâncias, podendo aumentar ou diminuir a figura proporcionalmente. Portanto, as figuras obtidas por homotetia são semelhantes, mas não necessariamente congruentes. Isso torna a homotetia uma transformação de semelhança, mas não uma transformação isométrica.

Definição 3.12. *Seja r um número real positivo. Uma semelhança de razão r no plano π é uma transformação $\sigma : \pi \to \pi$ que multiplica por r a distância entre dois pontos quaisquer P e Q pertencentes a π, isto é, $d(\sigma(P), \sigma(Q)) = r \cdot d(P, Q)$.*

Semelhanças são funções bijetivas com as seguintes propriedades:

1. Transforma uma reta em uma reta.
2. Transforma retas paralelas em retas paralelas.
3. Triângulos retângulos são transformados, por meio de uma semelhança, em triângulos retângulos.
4. Uma semelhança transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.
5. Uma semelhança transforma ângulos em ângulos congruentes como consequência.

Definição 3.13. *Diz-se que duas figuras F e F_1 , contidas no plano π, são semelhantes quando existe uma semelhança $\sigma : \pi \to \pi$ tal que $\sigma(F) = F_1$.*

3.2.1 HOMOTETIAS

Definição 3.14. *A homotetia de centro O e razão $r \neq 0$ no plano π é a transformação $H : \pi \to \pi$ que associa a cada ponto P do plano π o ponto $P_1 = H(P)$ tal que $\overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OP}$.*

As homotetias são exemplos de semelhanças visto que dados dos pontos P e Q no plano π, com $H(P) = P_1$ e $H(Q) = Q_1$, tem-se que $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OQ} - r \cdot \overrightarrow{OP} = r \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = r \cdot \overrightarrow{PQ}$. Portanto, $d(H(P), H(Q)) = |\overrightarrow{P_1Q_1}| = r \cdot |\overrightarrow{PQ}| = r \cdot d(P, Q)$.

Notemos que qualquer homotetia de centro O e razão r, possui inversa H^{-1} que é a homotetia de centro O e razão $1/r$, de fato ao chamarmos de K a homotetia de centro O e razão $1/r$, temos que $K(H(P)) = P = H(K(P))$ para todo ponto P pertencente ao plano. Logo $K = H^{-1}$ é a transformação inversa de H.

3.2.1.1 ELEMENTOS DA HOMOTETIA

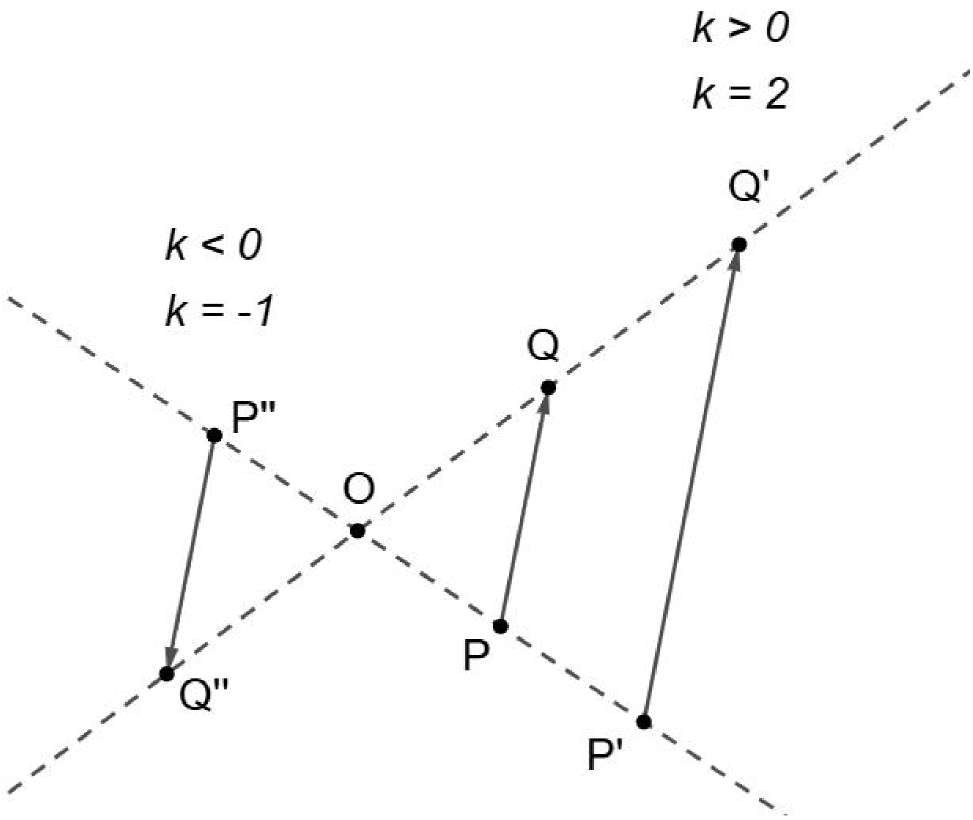
1. Centro da homotetia: É o ponto fixo a partir do qual todos os pontos da figura são transformados. O centro define o ponto de referência para medir as distâncias que serão modificadas pela razão da homotetia.

2. Razão de homotetia (r): É o fator que determina o quanto as distâncias da figura em relação ao centro serão ampliadas ou reduzidas. Dependendo do valor de r, a figura pode ser ampliada, reduzida ou invertida:

    - $r > 1$: ampliação;
    - $0 < r < 1$: redução;
    - $r < 0$: inversão e redimensionamento.
    - $r = 1$: a homotetia H reduz-se à transformação identidade: $H(P) = P$ para qualquer que seja o ponto P em π.

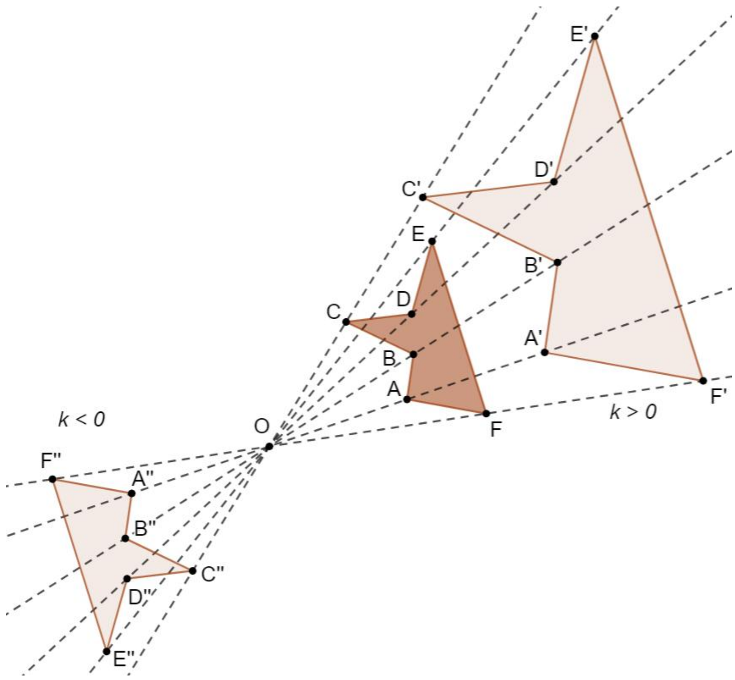
Na Figura 3.25 mostramos a homotetia de centro O e razão r do segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ e na Figura 3.26 mostramos a homotetia de centro O e razão r do polígono $ABCDEF$.

Figura 3.25 – Homotetia do segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$, razão negativa $(k < 0)$ e razão positiva $(k > 0)$



Fonte: A autora.

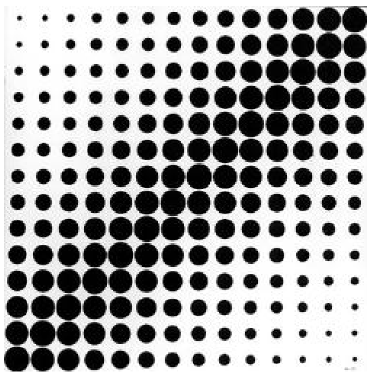
Figura 3.26 – Homotetia do polígono $ABCDEF$, razão negativa $(k < 0)$ e razão positiva $(k > 0)$



Fonte: A autora.

Na obra *Concreção 8079*, Figura 3.27, podemos identificar uma composição baseada em translações e homotetias de círculos.

Figura 3.27 – Homotetia de círculos e translação em *Concreção 8079* - Luiz Sacilotto



Fonte: Sacilotto (2024).

.

Toda semelhança σ é igual a uma isometria seguida de uma homotetia. Isso porque sendo $\sigma : \pi \to \pi$ uma semelhança de razão r, fixado um ponto arbitrário O, consideremos a homotetia $H : \pi \to \pi$, de centro O e razão r, cuja inversa é a homotetia H^{-1}, de mesmo centro O e razão $1/r$. A composta $T = H^{-1} \circ \sigma$ é uma semelhança de razão $(1/r) \cdot r = 1$, ou seja, é uma isometria. Da igualdade $T = H^{-1} \circ \sigma$ segue que $\sigma = H \circ T$.

4 MATEMÁTICA, ARTE E GEOGEBRASCRIPT

Considerando que várias obras da série *Concreção*, de Luiz Sacilotto, exibem uma abundância de isometrias e homotetias, escolhemos esse artista e suas criações como ponto de partida para explorar transformações geométricas no plano, utilizando o GeoGebra. Tanto as obras de Sacilotto quanto as construções realizadas no GeoGebra oferecem um ambiente pedagógico enriquecedor para o aprendizado dessas transformações. Com esse objetivo, decidimos elaborar um livro virtual como Recurso Educacional.

O livro *Matemática, Arte e GeoGebraScript* (*link*: https://www.geogebra.org/m/nmjf64zq), representado por sua capa na Figura 4.1, foi concebido com o objetivo de introduzir noções de programação no ambiente GeoGebra, além de explorar transformações geométricas. Utilizando obras de Luiz Sacilotto como contexto, cada capítulo abordará um tema específico, combinando Arte e Matemática para promover um aprendizado mais profundo sobre isometrias, homotetias e programação em GeoGebraScript.

Figura 4.1 – *Matemática, Arte e GeoGebraScript*

Fonte: A autora.

O livro é composto por quatro capítulos, e referências bibliográficas, cujos títulos são detalhados a seguir:

1. A história de Luiz Sacilotto e sua contribuição artística ao Concretismo brasileiro.

2. Transformações Geométricas no Plano por meio da utilização do GeoGebra.

3. Obras de Luiz Sacilotto, as transformações geométrias e o GeoGebra.

4. Releituras de algumas obras de Luiz Sacilotto utilizando GeoGebraScript.

5. Referências Bibliográficas.

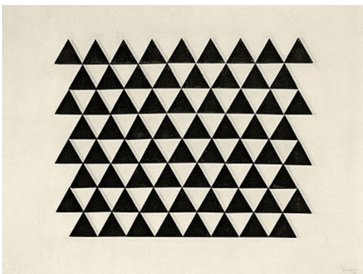
4.1 CAPÍTULO 1 - A HISTÓRIA DE LUIZ SACILOTTO E SUA CONTRIBUIÇÃO ARTÍSTICA AO CONCRETISMO BRASILEIRO.

Iniciamos o *Capítulo 1* (*link*) do licro com um breve relato de quem foi Luiz Sacilotto, apresentando como a Matemática está presente em suas obras e convidando o leitor a realizar um *tour* virtual pela exposição Vibração da Cor. Com curadoria de Denise Mattar e Gabriel Pérez-Barreiro (2021b), a exposição *Sacilotto - A Vibração da Cor* esteve na Almeida & Dale Galeria de Arte, de 28 de agosto a 23 de outubro de 2021. A mostra reuniu cerca de 50 obras criadas pelo artista entre 1974 e 2003, destacando sua maestria no uso da cor e na construção geométrica.

No decorrer do capítulo apresentamos algumas obras anteriores à fase concretista do artista uma vez que antes de ingressar na arte concreta, Luiz Sacilotto explorava formas geométricas e abstratas, caracterizadas pelo dinamismo visual e uma abordagem livre. Naquele período, ele investigava a relação entre forma, espaço e cor, criando composições inovadoras. Embora tenha se destacado no movimento concretista, suas obras anteriores já revelavam sua habilidade e experimentação com padrões e formas, preparando sua evolução artística.

Na última parte do capítulo, abordamos a fase concreta de Sacilotto, destacando sua transição da arte figurativa para uma linguagem abstrata. Inicialmente focado em representações do mundo, ele gradualmente se distanciou desse estilo. Em 1955, Sacilotto passou a intitular suas obras como *Concreção*, seguido por quatro números que indicavam o ano e a sequência de criação. Um exemplo marcante é *Concreção 5629*, Figura 4.2, de 1956, que sinaliza a maturidade artística do artista. Composta por 38 triângulos equiláteros pretos sobre um fundo branco, em placas de alumínio reutilizadas, essa obra integrou a histórica *Exposição Nacional de Arte Concreta* de 1956, no Museu de Arte Moderna de São Paulo. Ela reflete os princípios fundamentais da arte concreta, como o uso de formas geométricas e a repetição, e se destaca pela inovação no uso de materiais.

Figura 4.2 – *Concreção 5629* - Luiz Sacilotto



Fonte: Sacilotto (2024).

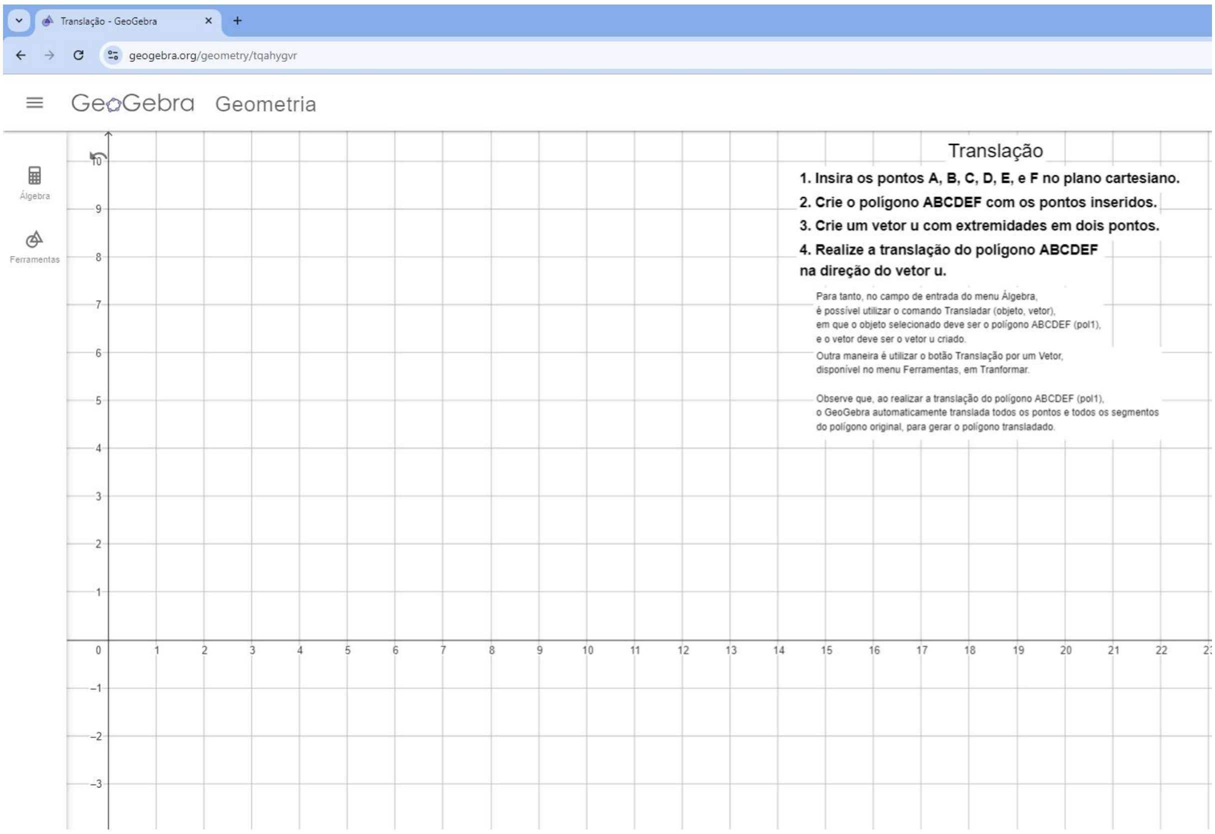
Encerramos o capítulo apresentando algumas esculturas da série *Concreção*, destacando que Luiz Sacilotto não se limitou à produção de telas, mas também criou esculturas, expandindo sua exploração das formas geométricas para o espaço tridimensional.

4.2 CAPÍTULO 2 - TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO POR MEIO DA UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA.

O *Capítulo 2* (*link*) de *Matemática, Arte e GeoGebraScript* (*link*) aborda o uso do GeoGebra para explorar as transformações geométricas: translação, reflexão, rotação e homotetia. O capítulo começa com uma breve introdução ao *GeoGebra* (*link*), um software de geometria dinâmica, seguida de explicações informais sobre cada uma dessas transformações. As definições são acompanhadas por exemplos práticos, apresentados por meio de atividades realizadas no próprio GeoGebra.

O leitor é convidado a acessar o aplicativo GeoGebra Geometria através de *links* específicos para explorar cada uma das transformações. Para realizar uma atividade envolvendo a *translação* (*link*) de um polígono, por exemplo como mostrado na Figura 4.3, o leitor deve utilizar o *link* (*link*) fornecido para acessar diretamente o aplicativo GeoGebra Geometria e seguir os passos conforme apresentados na Figura 4.4.

Figura 4.3 – Atividade de Translação no GeoGebra



Fonte: A autora.

Figura 4.4 – Translação no GeoGebra

1. Insira os pontos A, B, C, D, E, e F no plano cartesiano. Para tanto, no campo de **Entrada** na janela Álgebra, acrescente os pontos por meio da digitação de pares ordenados como, por exemplo, A = (1, 4); B = (2, 5), C = (-3, 8), etc. Uma outra maneira é utilizar o menu de ferramentas, por meio do botão inserção de ponto, e selecionar sobre o plano cartesiano o local desejado para o ponto que se deseja inserir. Para renomear qualquer um dos pontos inseridos, é possível clicar sobre ele com o botão esquerdo do *mouse* selecionado e optar por renomear.
2. Crie o polígono ABCDEF com os pontos inseridos. Para tanto, no campo de entrada é possível criar um polígono utilizando o comando Polígono(ponto,...,ponto) em que cada um dos pontos têm as coordenadas criadas anteriormente ou, ainda, traçar o polígono diretamente no plano cartesiano utilizando o botão inserção de polígono.
3. Crie um vetor *u* com extremidades em dois pontos quaisquer, não necessariamente os pontos criados iniciallmente, utilizando o botão de inserção de vetor.
4. Realize a translação do polígono ABCDEF em relação ao vetor criado. Para tanto, no campo de entrada é possível utilizar o comando Transladar(objeto,vetor), em que o objeto selecionado deve ser o polígono ABCDEF (pol1), e o vetor deve ser o vetor *u* criado. Outra maneira é utilizar o botão translação por um vetor.

Fonte: A autora.

De maneira semelhante, as atividades relacionadas à *reflexão*, *rotação* e *homotetia* (*links*) são apresentadas de forma interativa, incentivando o leitor a se engajar ativamente com os conceitos. Esse método não apenas facilita a compreensão, mas também permite que o leitor experimente as transformações geométricas em um ambiente dinâmico. Com isso, encerramos este capítulo explorando interativamente as transformações isométricas (translação, reflexão e rotação) e a transformação geométrica homotetia por meio da utilização do GeoGebra. Essa abordagem é fundamental, pois proporciona uma compreensão mais profunda e prática das transformações, reforçando a aplicação dos conceitos em um contexto real e visual.

Além disso, essa experiência preparará o leitor para explorar releituras das obras de Luiz Sacilotto, especialmente aquelas da série *Concreção*, que destacam transformações geométricas no plano. No próximo capítulo, abordaremos a programação em GeoGebraScript, que facilitará a criação dessas releituras ao oferecer ferramentas para uma abordagem mais personalizada e criativa na recriação das obras do artista.

4.3 CAPÍTULO 3 - OBRAS DE LUIZ SACILOTTO, AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRIAS E O GEOGEBRA.

No *Capítulo 3* (*link*) de *Matemática, Arte e GeoGebraScript* (*link*), o leitor é convidado a analisar de maneira investigativa as releituras das obras de Luiz Sacilotto. O capítulo inicia com uma explicação sobre a escolha das obras apresentadas, destacando sua relevância para a análise das transformações geométricas.

As obras intituladas *Concreção* de Luiz Sacilotto são exemplares do movimento concretista no Brasil, caracterizando-se pela exploração de formas geométricas simples e uma busca por uma estética rigorosa e racional.

Essas obras são marcadas por:

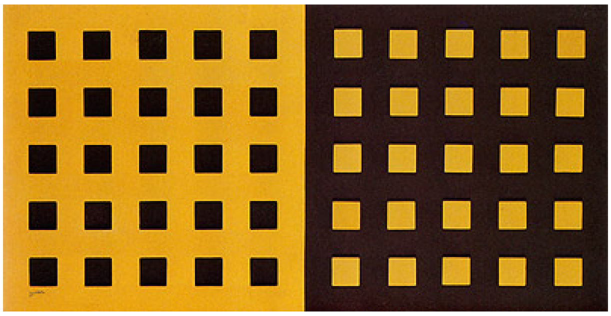
- Geometria e Abstração: Sacilotto utilizava formas geométricas básicas, como quadrados e retângulos, organizadas de forma precisa para criar composições abstratas que evitavam qualquer referência figurativa.
- Uso de Cores e Contrastes: As obras de Sacilotto frequentemente exploravam contrastes de cores, utilizando uma paleta limitada mas intensa para destacar as interações entre as formas geométricas. Preto, branco e cores primárias eram comuns em suas composições.
- Rigor Matemático: Os princípios matemáticos e geométricos eram aplicados para criar padrões repetitivos e simétricos, refletindo a influência do Concretismo europeu.
- Efeito Óptico: Algumas obras exploram ilusões de movimento e profundidade, convidando o espectador a uma interação dinâmica com a obra pela disposição meticulosa das formas e cores.
- Influência do Concretismo: Como membro do Grupo Ruptura, Sacilotto incorporou a abordagem do Concretismo, promovendo uma arte objetiva e impessoal que enfatiza a forma pura e a estrutura geométrica.

Neste capítulo, as obras selecionadas serão analisadas quanto às suas características e propriedades matemáticas, proporcionando uma exploração pedagógica enriquecedora. O leitor começará realizando as atividades propostas, que têm como objetivo a identificação de formas e transformações geométricas presentes em cada obra selecionada. Por meio de questionamentos, cujas soluções são fornecidas após a conclusão das atividades, o leitor poderá examinar detalhadamente cada obra concreta de Luiz Sacilotto, aprofundando sua compreensão em relação às transformações geométricas. Em seguida, o leitor será convidado a realizar releituras de forma livre, utilizando o GeoGebra e suas ferramentas, permitindo uma abordagem mais pessoal e criativa na recriação das obras.

4.3.1 ATIVIDADES PROPOSTAS DO CAPÍTULO

A primeira obra selecionada para atividade é *Concreção 5732* (*link*), Figura 4.5, que utiliza formas elementares e simples, como quadrados, combinadas com a sobreposição de cores preto e amarelo. Nesta obra, é possível identificar a aplicação de transformações geométricas, como translação e reflexão em um primeiro momento. Porém o uso de homotetia está presente comparando-se os quadrados menores com os dois grandes quadrados que servem como fundo para os demais. Os questionamentos propostos por meio de atividades, Figura 4.6, visam avaliar a compreensão do leitor sobre essas transformações, ajudando a aprofundar seu entendimento sobre a composição geométrica da obra.

Figura 4.5 – *Concreção 5732*



Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 4.6 – Atividade 1 - *Concreção 5732*

Questão 01

A obra *Concreção 5732* é composta por formas geométricas conhecidas, identifique-as.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 02

Qual(quais) transformação(ões) geométrica(s) podemos identificar nessa obra de Luiz Sacilotto?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ Rotação

B ☐ Translação

C ☐ Reflexão

D ☐ Homotetia

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Questão 03

Justifique a resposta anterior.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Acesse o GeoGebra Geometria, por meio do *link* https://www.geogebra.org/geometry/g9f4uzcj e procure, livremente, realizar uma releitura da obra com as ferramentas que você conhece do GeoGebra.

Fonte: A autora.

A segunda obra utilizada em atividade é *Concreção 9351* (*link*), Figura 4.7, em que as transformações geométricas de translação e reflexão podem ser, inicialmente, identificadas como presentes na obra. Os questionamentos da atividade (Figuras 4.8, 4.9 e 4.10), remetem o leitor a analisar a presença das demais transformações (rotação e homotetia) que também fazem parte da composição visto que triângulos menores podem ser identificados como semelhantes aos maiores e, também, resultado de rotação de outros triângulos.

Figura 4.7 – *Concreção 9351*

Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 4.8 – Atividade 2 - *Concreção 9351* - Parte 1

Questão 01

Identifique as formas geométricas presentes na obra *Concreção 9351*, de Luiz Sacilotto.

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ Triângulos escalenos.

B ☐ Triângulos equiláteros

C ☐ Triângulos retângulos.

D ☐ Triângulos isósceles.

E ☐ Quadrados.

F ☐ Losangos.

G ☐ Paralelogramos.

H ☐ Trapézios.

I ☐ Hexágonos.

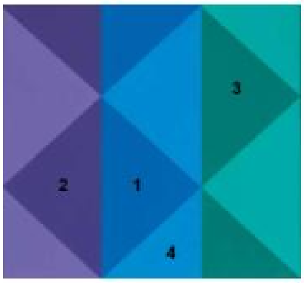
VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Fonte: A autora.

Nesta atividade, algumas formas geométricas são reconhecidas em um recorte da obra de Sacilotto. O objetivo é orientar o leitor no processo de identificação das transformações geométricas presentes na obra. Embora algumas dessas transformações possam ser percebidas imediatamente, uma observação mais atenta revela como o artista utiliza as formas de maneira lúdica, explorando as cores e as propriedades geométricas de forma criativa.

Figura 4.9 – Atividade 2 - *Concreção 9351* - Parte 2

Utilize a imagem a seguir para responder às próximas questões.



Questão 02

Qual(is) transformação(ões) geométrica(s) envolve(m) os triângulos 1 e 2 sinalizados na imagem?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ Rotação.

B ☐ Translação.

C ☐ Reflexão.

D ☐ Homotetia.

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Questão 03

Justifique o(s) item(itens) assinalado(s) na questão anterior.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Fonte: A autora.

Figura 4.10 – Atividade 2 - *Concreção 9351* - Parte 3

Questão 04

Qual(is) transformação(ões) geométrica(s) envolve(m) os triângulos 1 e 3 sinalizados na imagem?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ Rotação.
B ☐ Translação.
C ☐ Reflexão.
D ☐ Homotetia.

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Questão 05

Justifique o(s) item(itens) assinalado(s) na questão anterior.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 06

Qual(is) transformação(ões) geométrica(s) envolve(m) os triângulos 1 e 4 sinalizados na imagem?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ Rotação.
B ☐ Translação.
C ☐ Reflexão.
D ☐ Homotetia.

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Questão 07

Justifique o(s) item(itens) assinalado(s) na questão anterior.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Acesse o GeoGebra *online*, por meio do *link* https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT e procure, livremente, realizar uma leitura da obra com ferramentas que você conhece do GeoGebra.

Fonte: A autora.

Na terceira atividade do capítulo, dentro do contexto da obra *Concreção 6047* (*link*), Figura 4.11, o leitor é, mais uma vez, convidado a explorar as transformações geométricas presentes na criação de Sacilotto. Ao longo de todas as atividades (Figuras 4.12 e 4.13), é possível identificar as quatro transformações: translação, reflexão, rotação e homotetia. Embora à primeira vista algumas dessas transformações possam ser facilmente compreendidas, o objetivo das atividades é encorajar o leitor a ir além das percepções iniciais e espera-se que ele identifique todas as transformações.

Figura 4.11 – *Concreção 6047*

Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 4.12 – Atividade 3 - *Concreção 6047* - Parte 1

Questão 01

Identifique as formas geométricas presentes na obra *Concreção 6047*, de Luiz Sacilotto.

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ Triângulos escalenos.

B ☐ Triângulos isósceles.

C ☐ Triângulos equiláteros.

D ☐ Triângulos retângulos.

E ☐ Quadrados.

F ☐ Losangos.

G ☐ Retângulos.

H ☐ Paralelogramos.

I ☐ Trapézios.

J ☐ Outros.

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Questão 02

Qual(quais) transformação(ões) geométrica(s) podemos identificar nesta obra de Luiz Sacilotto?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ Rotação

B ☐ Translação

C ☐ Reflexão

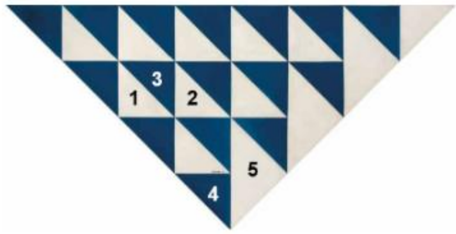
D ☐ Homotetia

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Fonte: A autora.

Figura 4.13 – Atividade 3 - *Concreção 6047* - Parte 2

Utilize a imagem a seguir para responder aos próximos questionamentos.



Questão 03

Qual(is) transformação(ões) geométrica(s) envolve(m) os triângulos 1 e 2 sinalizados na imagem? Justifique sua resposta.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 04

Qual(is) transformação(ões) geométrica(s) envolve(m) os triângulos 1 e 3 sinalizados na imagem? Justifique sua resposta.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 05

Qual(is) transformação(ões) geométrica(s) envolve(m) os triângulos 4 e 5 sinalizados na imagem? Justifique sua resposta.

Aa π Digite sua resposta aqui...

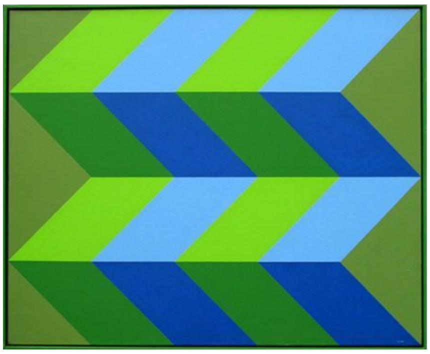
VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Acesse o GeoGebra Geometria, por meio do *link* https://www.geogebra.org/geometry/mpswu8es e procure, livremente, realizar uma releitura da obra com as ferramentas que você conhece do GeoGebra.

Fonte: A autora.

Concluindo a primeira parte das atividades desse capítulo, em que a identificação de translações e reflexões se destacam na maioria delas, abordamos a obra *Concreção 9324* (*link*), Figura 4.14 , na quarta atividade (Figuras 4.15 e 4.16) . Nessa criação de Sacilotto, assim como nas anteriores, translações de polígonos e reflexões são facilmente identificáveis à primeira vista. No entanto, olhares mais atentos e analíticos a essa obra revelarão a presença de triângulos semelhantes e também rotacionados.

Figura 4.14 – *Concreção 9324*



Fonte: Sacilotto (2024).

Figura 4.15 – Atividade 4 - *Concreção 9324*- Parte 1

Questão 01

Na obra *Concreção 9324*, Luiz Sacilotto explora algumas formas geométricas conhecidas. Assinale, entre as apresentadas a seguir, as que você reconhece.

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ Triângulos escalenos.

B ☐ Triângulos isósceles.

C ☐ Triângulos retângulos.

D ☐ Quadrados.

E ☐ Paralelogramos.

F ☐ Losangos.

G ☐ Trapézios.

H ☐ Outros.

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Questão 02

Qual(quais) transformação(ões) geométrica(s) podemos identificar nessa obra?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ Rotação

B ☐ Translação

C ☐ Reflexão

D ☐ Homotetia

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Questão 03

Você considera que a obra, como um todo, é uma figura simétrica? Justifique sua resposta.

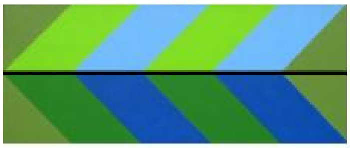
Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Fonte: A autora.

Figura 4.16 – Atividade 4 - *Concreção 9324*- Parte 2

Utilize a imagem abaixo para responder à Questão 04.



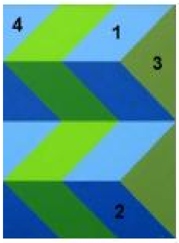
Questão 04

Nesse recorte da obra *Concreção 9324*, destacamos uma reta contendo lados de paralelogramos e triângulos retângulos isósceles. O que tal reta representa nesse recorte?

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Utilize a imagem a seguir para responder às próximas questões.



Questão 05

Qual(is) transformação(ões) geométrica(s) envolve(m) os paralelogramos 1 e 2 sinalizados na imagem? Justifique sua resposta.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 06

Qual(is) transformação(ões) geométrica(s) envolve(m) os triângulos 3 e 4 sinalizados na imagem? Justifique sua resposta.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

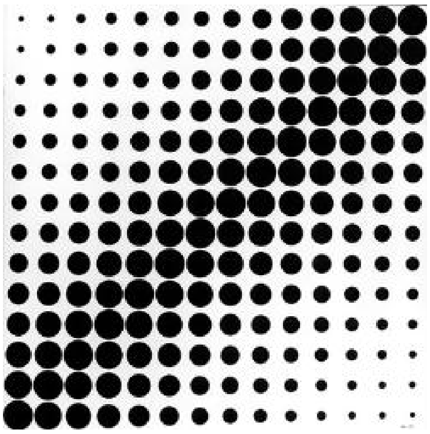
Acesse o GeoGebra Geometria, por meio do *link* https://www.geogebra.org/geometry/ayusghrq e procure, livremente, realizar uma releitura da obra com as ferramentas que você conhece do GeoGebra.

Fonte: A autora.

Nas duas últimas atividades do capítulo, as transformações geométricas de rotação e homotetia se tornam mais evidentes durante a leitura inicial da obra proposta.

Na Atividade 5, Figuras 4.18, 4.19 e 4.20, ao explorar a obra *Concreção 8079* (*link*), representada pela Figura 3.27, o leitor é levado a perceber a homotetia entre os círculos dispostos em linhas e colunas, formando um quadrado composto por 14×14 círculos pretos. Embora, à primeira vista, as translações e a semelhança entre os círculos sejam facilmente notadas, os questionamentos propostos incentivam o leitor a explorar também a ideia de reflexão em torno da reta suporte à diagonal do quadrado. Em todas as obras *Concreção* discutidas neste material, as primeiras impressões podem levar à identificação de algumas transformações geométricas. No entanto, uma observação mais cuidadosa permitirá descobrir outras transformações inicialmente não percebidas.

Figura 4.17 – *Concreção 8079*



Fonte: A autora.

Figura 4.18 – Atividade 5 - *Concreção 8079* - Parte 1

Questão 01

Descreva a forma geométrica presente na obra *Concreção 8079*.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 02

Quais as transformações geométricas que você pode identificar nessa obra?

Assinale a sua resposta aqui

A ☐ Rotação.

B ☐ Translação

C ☐ Reflexão

D ☐ Homotetia.

VERIFIQUE MINHA RESPOSTA (3)

Questão 03

Justifique sua resposta à questão anterior.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Fonte: A autora.

Figura 4.19 – Atividade 5 - *Concreção 8079* - Parte 2

Utilize a imagem a seguir para responder à Questão 04.

Questão 04

Como você descreveria o posicionamento das formas geométricas ao longo desta linha de *Concreção 8079*, em destaque na imagem apresentada, observando sua disposição da esquerda para a direita?

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Utilize a imagem a seguir para responder à Questão 05.

Questão 05

Realizando transformações de Translação e Homotetia por meio dos botões **Translação por um Vetor** e **Homotetia**, do GeoGebra, descreva como é possível reproduzir a primeira coluna de formas geométricas presente na obra *Concreção 8079*.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Fonte: A autora.

Figura 4.20 – Atividade 5 - *Concreção 8079* - Parte 3

Utilize a imagem a seguir para responder à Questão 06.

Questão 06

Ao observar os círculos dispostos dentro de um grande quadrado, o que você nota sobre a disposição deles em relação à reta destaque que corresponde à diagonal do quadrado?

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 07

O que você observa ao considerar a reta suporte da outra diagonal do quadrado formado por círculos?

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Utilizando transformações geométricas e o GeoGebra *online* (https://www.geogebra.org/geometry/ayusghrq) , reproduza livremente a primeira coluna da obra *Concreção 8079*. Procure criar uma estratégia para uma possível releitura da obra toda.

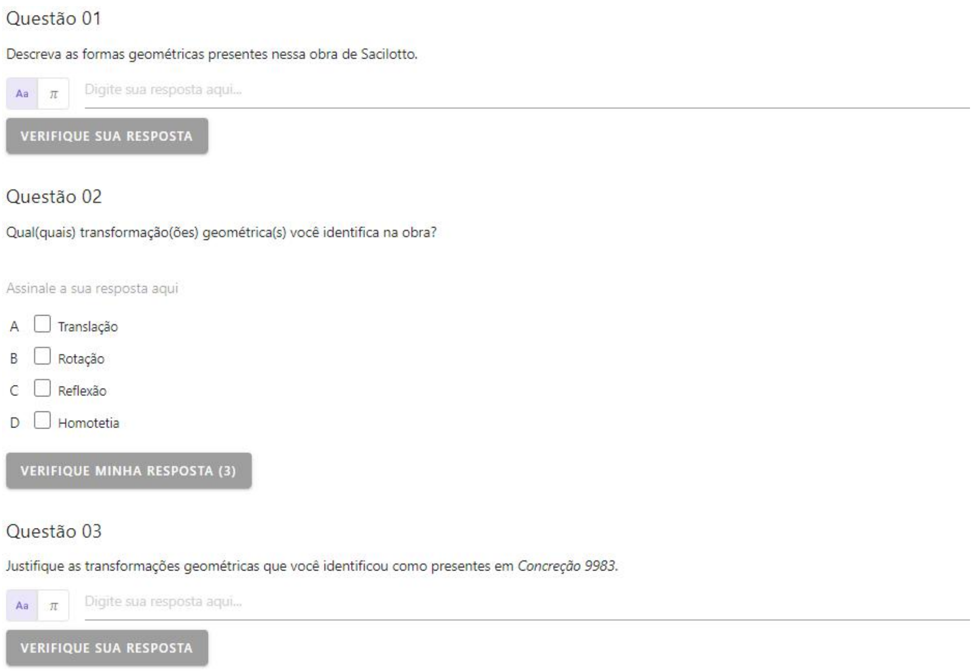
Fonte: A autora.

Na Atividade 6, Figuras 4.22 e 4.23, que explora a obra *Concreção 9983* (*link*), Figura 4.21, destaca-se a presença da rotação de figuras geométricas, complementada por translações, além das cores vibrantes que marcam suas características. As questões levantadas sobre a obra vão além da simples identificação dos objetos ou das transformações geométricas. O leitor é convidado a refletir sobre como é possível realizar uma releitura da obra de maneira que isso não se torne um processo exaustivo ou maçante. Um dos questionamentos abordados inclui a possibilidade de automatizar as repetições e translações, levando o leitor a pensar sobre que tipo de comando no GeoGebra poderia ser utilizado para desenvolver a releitura proposta.

Figura 4.21 – *Concreção 9983*

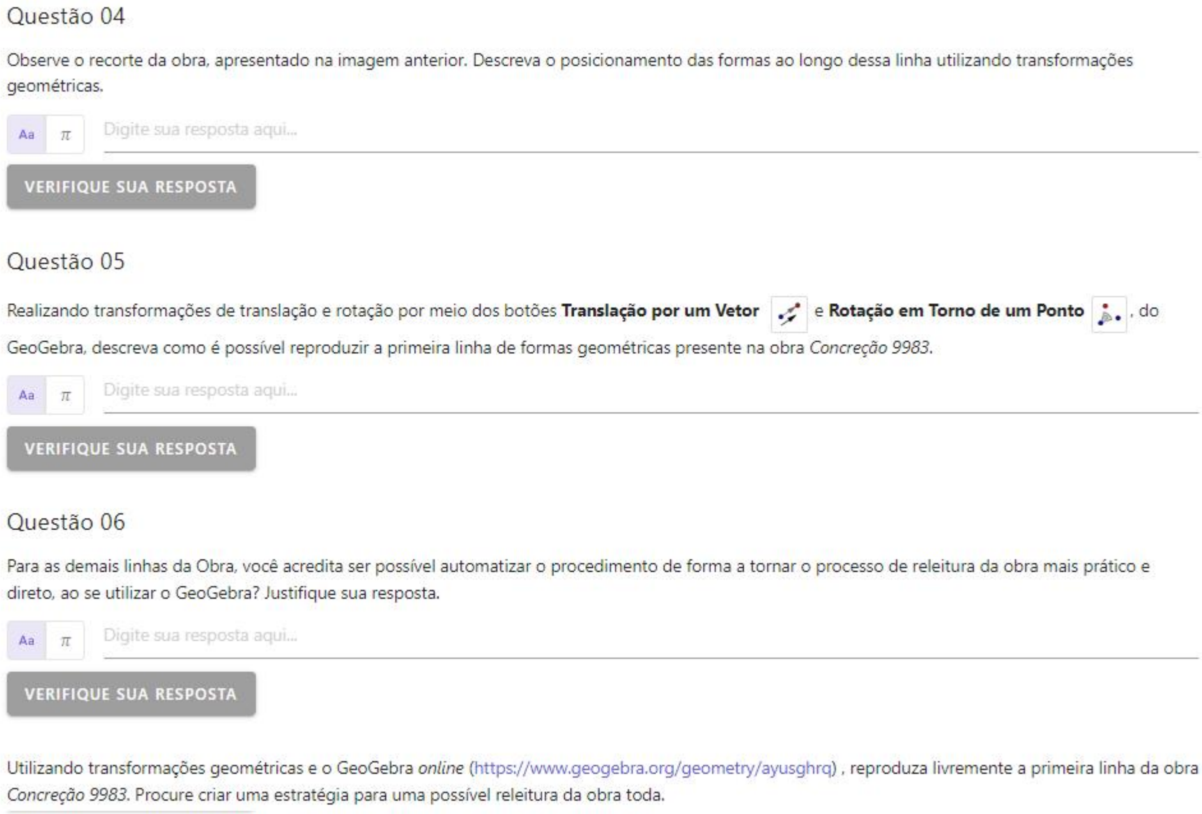
Fonte: A autora.

Figura 4.22 – Atividade 6 - *Concreção 9983* - Parte 1



Fonte: A autora.

Figura 4.23 – Atividade 6 - *Concreção 9983* - Parte 2



Questão 04

Observe o recorte da obra, apresentado na imagem anterior. Descreva o posicionamento das formas ao longo dessa linha utilizando transformações geométricas.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 05

Realizando transformações de translação e rotação por meio dos botões **Translação por um Vetor** e **Rotação em Torno de um Ponto**, do GeoGebra, descreva como é possível reproduzir a primeira linha de formas geométricas presente na obra *Concreção 9983*.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 06

Para as demais linhas da Obra, você acredita ser possível automatizar o procedimento de forma a tornar o processo de releitura da obra mais prático e direto, ao se utilizar o GeoGebra? Justifique sua resposta.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Utilizando transformações geométricas e o GeoGebra *online* (https://www.geogebra.org/geometry/ayusghrq) , reproduza livremente a primeira linha da obra *Concreção 9983*. Procure criar uma estratégia para uma possível releitura da obra toda.

Fonte: A autora.

4.4 CAPÍTULO 4 - RELEITURAS DE ESTUDO E OBRAS DE LUIZ SACILOTTO UTILIZANDO GEOGEBRASCRIPT.

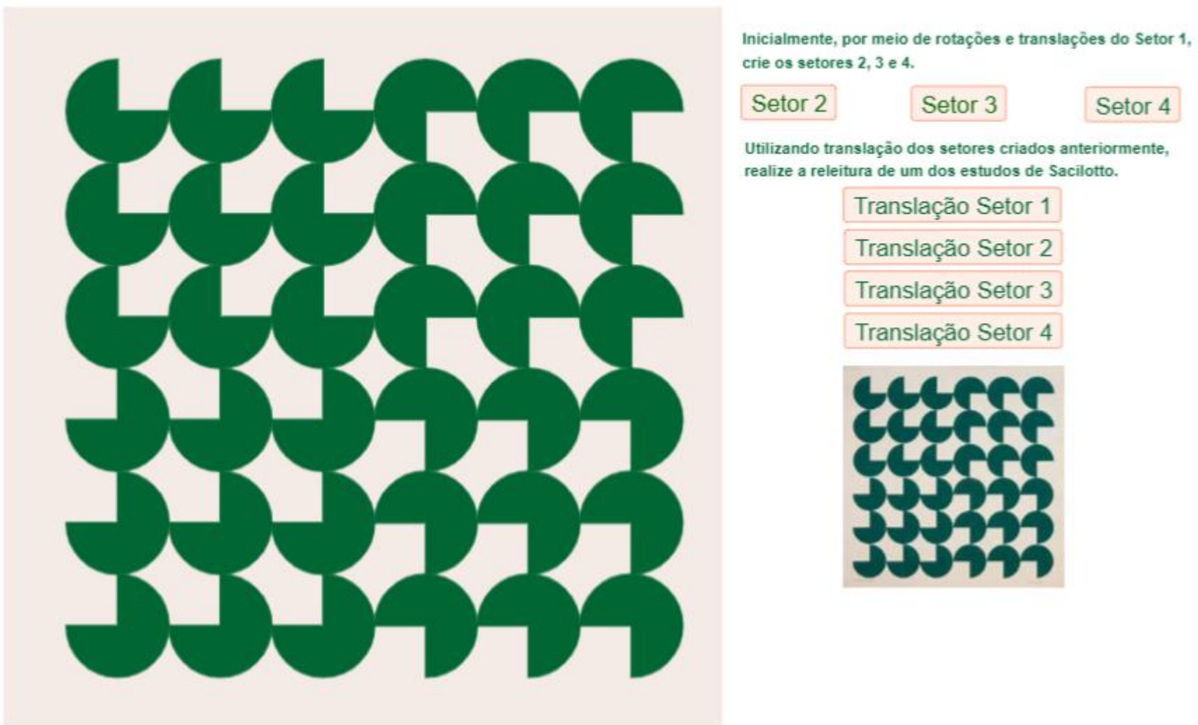
O objetivo do *Capítulo 4* (*link*) é permitir que, à medida que o leitor avança nas atividades propostas e adquire conhecimento sobre GeoGebraScript, ele possa realizar releituras das obras de forma mais automatizada e simplificada. Esse progresso possibilitará uma abordagem mais eficiente e refinada na recriação das obras, contrastando com as releituras iniciais realizadas manualmente com as ferramentas do GeoGebra, como apresentado no capítulo anterior.

O capítulo inclui questionamentos e atividades interativas para avaliar a compreensão do leitor sobre as transformações geométricas em cada obra. Além disso, oferece explicações sobre os *scripts* do GeoGebraScript utilizados, que ajudam a automatizar e aprimorar o processo de releitura, facilitando a aplicação prática dos conceitos aprendidos. Para mais informações sobre os comandos do GeoGebraScript, pode-se consultar o *manual do usuário* (*link*) do GeoGebra ou ler o livro GeoGebra em Nível Intermediário: Introdução à Programação com GeoGebraScript, de Cássio Luiz Vidigal (2022).

Nas páginas finais de seu livro, entre as páginas 207 e 218, Vidigal apresenta um índice alfabético que lista todos os comandos utilizados ao longo da obra, com a respectiva página de uso indicada ao lado de cada um. Esse índice inclui não apenas comandos relacionados a construções geométricas, mas também comandos estatísticos e algébricos, abrangendo todos os comandos reconhecidos pelo GeoGebra e pela programação em GeoGebraScript.

Iniciamos o Capítulo 4 com um *Estudo* (*link*) de Sacilotto (Figura 4.24). O leitor é convidado a identificar as repetições presentes no Estudo e, também, as transformações geométricas. Uma vez identificadas as transformações de Rotação e Translação, os comandos Girar e Transladar foram utilizados em uma releitura interativa, em que o leitor é convidado a selecionar botões contendo a programação necessária para realizar a confecção de cada uma das partes da releitura.

Figura 4.24 – Atividade 1 - Estudo



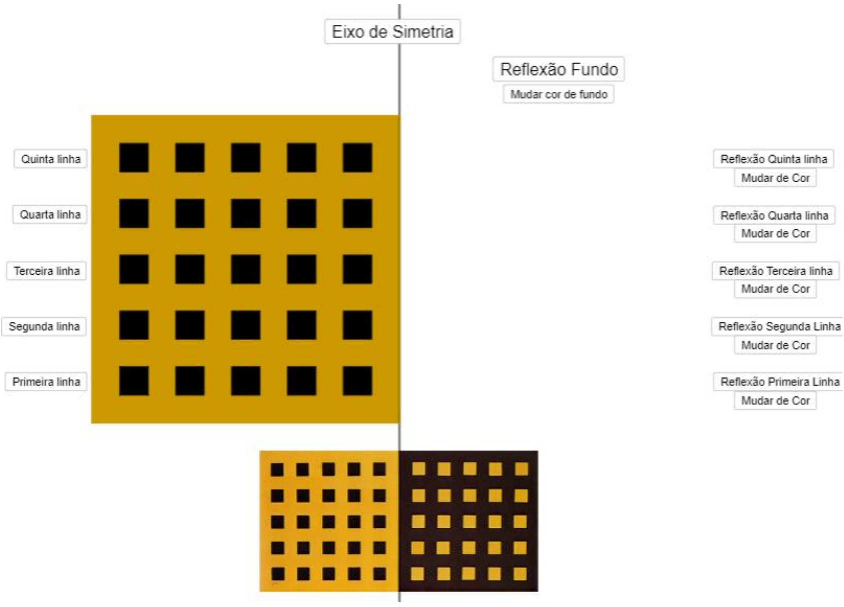
Fonte: A autora.

Após realizada a atividade apresentamos a explicação passo a passo, por meio de questionamentos, da utilização dos comandos Girar e Transladar associadas à ferramenta Botão e sua aba de Programação. Finalizada a explicação, convidamos o leitor a confeccionar sua própria releitura, utilizando os mesmos raciocínios apresentados.

Dando prosseguimento às releituras, retornamos às obras intituladas *Concreção*. Em *Concreção 5732* (*link*), Figura 3.7, o leitor é convidado a reproduzir, como atividade, uma parte da obra utilizando o comando Transladar. Para tanto, são fornecidos passos orientadores que auxiliam na construção, além de questionamentos que ajudam a compreender a lógica de programação dos botões responsáveis pelas translações.

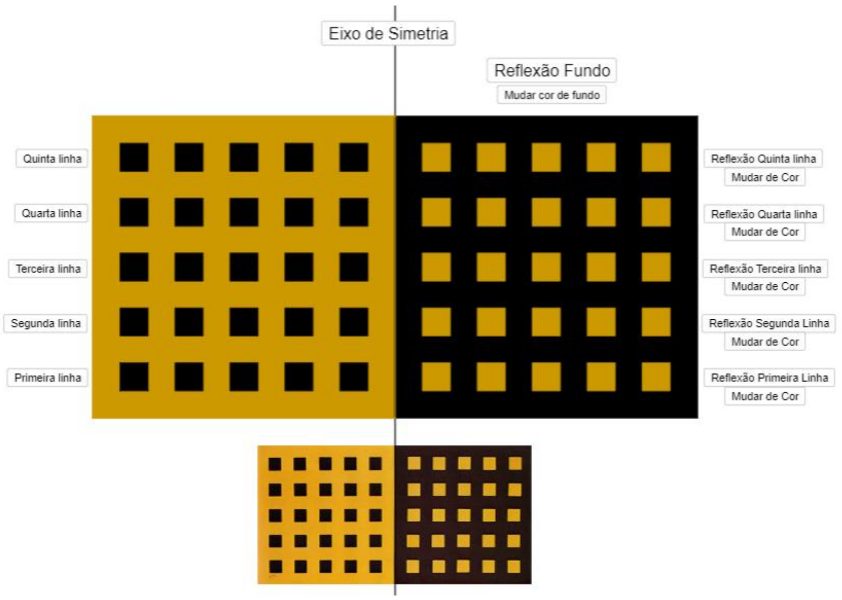
Após a conclusão da primeira parte da obra, o leitor é convidado a interagir com uma atividade desenvolvida no GeoGebra, Figuras 4.25 e 4.26, que ilustram como a segunda parte é resultado da aplicação das reflexões da primeira. Após essa interação, para finalizar a atividade inicial, são apresentadas as explicações necessárias de *scripts* para a realização da Reflexão, bem como a alteração de cores (comando DefinirCor), de modo que a atividade esteja alinhada com uma releitura de *Concreção 5732*.

Figura 4.25 – Atividade 2 - *Concreção 5732* - uso de Translação



Fonte: A autora.

Figura 4.26 – Atividade 2 - *Concreção 5732* - uso de Reflexão



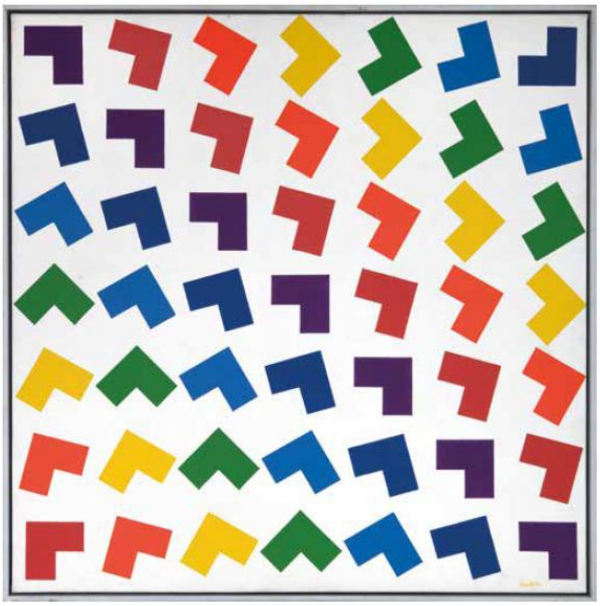
Fonte: A autora.

Para as demais releituras apresentadas no Capítulo 4 de *Matemática, Arte e GeoGebraScript* (*link*), optamos por uma abordagem menos exaustiva do que a inserção de botões com programação em GeoGebraScript.

Nas duas atividades propostas no início do capítulo, foram utilizados os comandos Transladar, Reflexão e Girar na programação de botões, permitindo que o leitor acompanhasse a construção da releitura passo a passo. No entanto, esse processo pode ser trabalhoso. Aproveitando que Sacilotto era preciso em seus cálculos ao utilizar simetrias e transformações geométricas para alcançar seus efeitos, recriar suas obras com o *script* Sequência proporciona uma releitura visual e uma compreensão mais profunda de seu processo criativo. A automação dessas transformações facilita a replicação das estruturas geométricas complexas usadas por ele.

Em *Concreção 9983*, Figura 4.27, Sacilotto utiliza transformações geométricas para compor hexágonos não convexos em forma de letras L, aliadas ao uso de cores vibrantes, resultando em uma peça de grande impacto visual — uma verdadeira obra prima, assim como todas as suas composições. Sacilotto sempre foi muito além da simples composição de formas geométricas e fazia uso de uma paleta de cores exclusiva. Nesta obra, segundo nosso ponto de vista, ele se destacou pela diversidade de materiais e métodos empregados. Por este motivo, a terceira atividade deste capítulo explora tal obra.

Figura 4.27 – *Concreção 9983*



Fonte: Mattar e Pérez-Barreiro (2021a).

Suas obras frequentemente apresentam padrões geométricos rigorosos e formas abstratas que interagem de maneira dinâmica, criando ilusões de movimento. Ele usava linhas, polígonos, círculos, entre outros, organizados de forma precisa, gerando composições que parecem mudar de posição conforme o espectador se move. Essa sensação de movimento é gerada pela repetição e pela transformação de formas geométricas, o que cria uma relação direta com a ideia do que denominamos Geometria de Movimento. A Geometria de Movimento, ou Geometria das Transformações, em vez de ter como foco o estudo de figuras planas e suas propriedades, evidencia os movimentos que tais figuras podem sofrer no plano, sem haver alteração de sua forma ou de suas propriedades. Nesta geometria, o foco está associado às transformações isométricas: rotação, translação e reflexão.

Segundo Baldini e Moran (2022), a presença da Geometria de Movimento é uma característica marcante em várias obras de Sacilotto. No caso específico de *Concreção 9983*, é possível notar a presença de rotações e translações.

Na Atividade 3 , ao explorar as formas e transformações geométricas presentes em *Concreção 9983* (*link*) (Figura 4.27), apresentamos uma sequência de construções no GeoGebra, Figuras 4.28, 4.29, 4.30, 4.31, 4.32, 4.33, 4.34 e 4.35, que guiará o leitor no desenvolvimento de sua própria releitura da obra. Desde os primeiros passos, são realizados questionamentos que incentivam o leitor a refletir sobre as construções e o emprego do comando Sequência.

Figura 4.28 – Atividade 3 - *Concreção 9983* - Pimeiros Passos

Fonte: Adaptado de *Concreção 9983*.

Ao realizar uma análise cuidadosa de cada uma das formas L presentes na obra, é possível observar que todas elas são representações de uma forma L, a qual denominaremos "**forma original**", geradas por meio da aplicação de duas transformações isométricas: rotação e translação. Após aplicar essas transformações à forma original, as imagens são realocadas em uma malha quadriculada, resultando na composição que contém 49 formas dispostas conforme exibido na obra.

Primeiros passos para realizar a releitura da obra.

Começaremos a confecção de uma releitura da obra *Concreção 9983*. Para isso, abra uma nova janela do navegador e acesse o GeoGebra *online* através do *link* https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT.

1. Primeiramente, configure seu GeoGebra para que a Janela de Álgebra, a Janela de Visualização e a Janela de Visualização 2 estejam abertas, permitindo assim um trabalho conjunto e eficaz entre elas.
2. Adicione, no campo de Entrada da Janela de Álgebra, os pontos A (0,0), B (1,0), C (1, 1), D (-1,1), E (-1,-1) e F (0,1).
3. Utilizando o botão Polígono , crie o hexágono não convexo que representará a **forma original** da obra *Concreção 9983*. Você pode optar por remover os rótulos de pontos e segmentos.

Fonte: A autora.

Figura 4.29 – Atividade 3 - *Concreção 9983* - Entendendo o comando **Sequência**

Entendendo o comando Sequência em GeoGebraScript.

Criaremos uma malha quadriculada de pontos que serão a imagem do ponto A, do Polígono(A,B,C,D,E,F) - denominado pol1 pelo GeoGebra - por meio de uma transformação isométrica. Para tanto utilizaremos o comando **Sequência** da linguagem GeoGebraScript.

No GeoGebraScript, o comando **Sequência** é utilizado para gerar uma lista de elementos seguindo um padrão definido por uma expressão matemática. Esse comando é muito útil para criar conjuntos de pontos, objetos geométricos ou figuras com base em uma fórmula repetida. A estrutura básica desse comando é:
Sequência(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final), sendo que:

- **Expressão**: É a fórmula ou objeto que será gerado em cada passo da sequência.
- **Variável**: É a variável usada na expressão que controla a repetição.
- **Valor Inicial**: O valor inicial da variável.
- **Valor Final**: O valor final da variável.

Questão 01

Ao criar os pontos de uma malha quadriculada no plano cartesiano, é essencial definir os pares ordenados que representarão esses pontos. No caso da malha necessária para a releitura de *Concreção 9983*, tomando a origem (0,0) como o primeiro ponto dessa malha, quais seriam as coordenadas dos outros pontos?

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 02

Ao analisar os pares ordenados apresentados por você na questão anterior, identifique quais valores variáveis as abscissas e as ordenadas dos pontos podem assumir.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Fonte: A autora.

Figura 4.30 – Atividade 3 - *Concreção 9983* - Criando uma malha de pontos

Criando a malha quadriculada de pontos utilizando o comando Sequência em GeoGebraScript.

Para criar uma malha de pontos no plano cartesiano, é essencial definir corretamente cada componente do comando Sequência. Devemos, portanto, estabelecer a Expressão, a Variável, o Valor Inicial e o Valor Final.
Comecemos definindo a variável i que representará os valores das abscissas e das ordenadas dos pontos na malha. Nas questões 01 e 02, discutimos esses valores, e cada coordenada varia de 0 a 6.

Como a malha deve conter 49 pontos, distribuídos em 7 linhas e 7 colunas, a expressão será do tipo $(x(i),y(i))$, onde x e y dependem da variável i, que por sua vez está relacionada à quantidade total de pontos na malha.
Definimos n = 7 como o número de pontos em cada linha ou coluna, o que resulta em n^2 pontos na malha. A variável i deve variar de 0 a 7^2-1, pois desejamos incluir a origem como um dos pontos e evitar pontos com ordenada igual a 7.

De fato:

- Ao calcularmos o resto da divisão de i por n = 7, obteremos valores que variam de 0 a 6, os quais representarão as abscissas dos pontos da malha.
- Da mesma forma, ao calcularmos o quociente da divisão de i por n = 7, os valores também variarão de 0 a 6, representando as ordenadas dos pontos da malha.

Para criar uma malha quadriculada com 49 pontos no plano cartesiano, retorne à construção anterior e, no campo de Entrada da Janela de Álgebra, insira o comando Sequência:

L=Sequência((Resto(i,7),Quociente(i,7)),i,0,48)

Observação: Caso a malha de pontos esteja visível na Janela de Visualização 1, você pode modificar sua visibilidade clicando com o botão direito do mouse sobre a Sequência L. No menu de **Configurações**, vá até a aba **Avançado**, desative a opção **Janela de Visualização** e ative a opção **Janela de Visualização 2**. Além disso, você pode ajustar o tamanho das janelas arrastando as bordas e ajustando-as conforme necessário.

Fonte: A autora.

Figura 4.31 – Atividade 3 - *Concreção 9983* - Realizando a Releitura Parte 1

Realizando a releitura da obra de Sacilotto utilizando o comando Sequência do GeoGebraScript.

Depois de construir a malha com os 49 pontos, utilizaremos transformações isométricas para realizar a releitura de *Concreção 9983*. Para isso, comece respondendo às perguntas que ajudarão a entender o novo comando Sequência que será criado.

Utilize a imagem a seguir para responder o questionamento.

Fonte: Autora

Questão 03

Considerando a forma original e a quantidade de formas dispostas nessa linha, qual é o ângulo de rotação, em relação ao ponto P, que deve ser aplicado à forma original para gerar as formas subsequentes? E em que sentido essa rotação deve ocorrer?

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 04

Após realizar a rotação da forma original, qual isometria deve ser aplicada para obter as 7 formas presentes na linha?

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Fonte: A autora.

Figura 4.32 – Atividade 3 - *Concreção 9983* - Realizando a Releitura Parte 2

Vamos iniciar a criação de um comando Sequência que reproduza as 49 formas que compõem a obra como um todo. Dentre essas 49 formas, uma será designada como a forma original, que, por meio da aplicação de transformações geométricas, gerará 48 imagens que, juntamente com ela, constituirão a obra completa.

Começaremos pela rotação da forma original. É importante lembrar que o comando **Girar(Objeto, Ângulo, Ponto)** é utilizado para realizar a rotação do objeto desejado. Assim, será necessário aplicar o comando **Girar(pol1, -15°, P)** um total de 48 vezes.

Entretanto, cada uma das 48 formas deverá ser transladada em uma direção específica, determinada por um vetor, para cada um dos pontos presentes na malha quadriculada. Portanto, devemos definir uma sequência que translade a forma original de forma a obter todos os polígonos rotacionados em relação à forma original, posicionando-os em um ponto na malha quadriculada.

Criaremos outra sequência, M, com as características:
M = Sequência (Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final) sendo *i* a variável com valor inicial 1 e valor final 49, pois ao todo serão 49 formas.

Na expressão, devemos aplicar a translação após a rotação da forma inicial. A translação deverá considerar o vetor dado pela direção L(*i*) em que L representa a sequência de pontos da malha.
Portanto M = Sequência(**Transladar(pol1,L(i))**, i, 1, 49)

Questão 05

Volte à construção iniciada no GeoGebra *online* e digite, no campo de Entrada na janela de Álgebra, o comando M = Sequência(**Transladar(pol1,L(i))**, i, 1, 49). O que você observa após a inserção desse comando? Caso deseje, configure para que M apareça na janela de visualização 2.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 06

O comando oportunizou uma releitura de *Concreção 9983*? Justifique sua resposta.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Fonte: A autora.

Figura 4.33 – Atividade 3 - *Concreção 9983* - Realizando a Releitura Parte 3

Com o comando descrito anteriormente, as formas foram transladadas mas não rotacionadas. Portanto, o comando M = Sequência(**Transladar(pol1,L(i))**, i, 1, 49) precisa considerar como forma a ser transladada aquela que representa a rotação da forma original.
Ao invés de transladar pol1, realizaremos a translação de **Girar(pol1, -15°, A)** considerando que o ponto A, na construção do GeoGebra, é o correspondente ao ponto P na figura ilustrativa da primeira linha da obra de Sacilotto.

Questão 07

Volte à construção iniciada no GeoGebra *online* e digite, no campo de Entrada na janela de Álgebra, o comando M = Sequência(Transladar(**Girar(pol1, -15°, A)**,L(i)), i, 1, 49). O que você observa após a inserção desse comando? Caso deseje, configure para que M apareça na janela de visualização 2.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 08

O comando oportunizou uma releitura de *Concreção 9983*? Justifique sua resposta.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Fonte: A autora.

Figura 4.34 – Atividade 3 - *Concreção 9983* - Realizando a Releitura Parte 4

A rotação, nessa releitura, deve considerar não a forma original mas, sim, a forma imediatamente anterior quando consideramos a linha em que se encontra.
No comando
M = Sequência(Transladar(**Girar(pol1, -15°, A)**,L(i)), i, 1, 49) alteraremos o ângulo de 15° por **(x(L(i))+y(L(i)))·(-15°)** em que:

- **L(i)**: Refere-se a um ponto específico na malha quadriculada, onde *i* identifica o ponto na sequência.
- **x(L(i))**: Esta parte da expressão extrai a coordenada x do ponto L(i).
- **y(L(i))**: Esta parte da expressão extrai a coordenada y do ponto L(i).
- **x(L(i))+y(L(i))**: Essa soma representa a combinação das coordenadas x e y do ponto L(i).
- **(−15°)**: Este fator é um ângulo em graus, utilizado para uma rotação.

Questão 09

Volte à construção iniciada no GeoGebra *online* e digite, no campo de Entrada na janela de Álgebra, o comando M = Sequência(Transladar(**Girar(pol1, (x(L(i))+y(L(i)))*(-15°), A)**,L(i)), i, 1, 49). O que você observa após a inserção desse comando? Caso deseje, configure para que M apareça na janela de visualização 2.

Questão 10

O comando oportunizou uma releitura de *Concreção 9983*? Justifique sua resposta.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Questão 11

Que transformação geométrica pode ser aplicada à forma original para que, após sofrer rotação e translação, as formas dispostas na malha quadriculada representem a releitura da obra?

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Fonte: A autora.

Figura 4.35 – Atividade 3 - *Concreção 9983* - Realizando a Releitura Parte 5

Para finalizar a releitura de *Concreção 9983*, aplicaremos a redução da forma geométrica original por meio de homotetia. Isso pode ser feito na forma já rotacionada, antes de ser transladada.

O comando **Homotetia(Objeto, Razão, Centro)** deve ser utilizado levando em conta o objeto que desejamos reduzir, ou seja, a forma original já rotacionada. A razão deve ser um valor numérico menor que 1 para que ocorra a redução, e o centro da homotetia será o ponto P da forma original, que na construção do GeoGebra é representado como o ponto A.

Aplicando redução em **(Girar(pol1, (x(L(i))+y(L(i)))*(-15°), A)** podemos utilizar o comando Homotetia da seguinte forma:
Homotetia((Girar(pol1, (x(L(i))+y(L(i)))*(-15°), A), **0.5, A)**
Após aplicada a homotetia, podemos transladar na direção do vetor L(i).

Questão 12

Escreva o comando sequência que realizará a redução, em relação à forma original, das formas presentes na obra de Luiz Sacilotto.

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Volte à construção iniciada no GeoGebra *online* e digite, no campo de Entrada na janela de Álgebra, o comando M = Sequência(Transladar(Homotetia(Girar(pol1, (x(L(i))+y(L(i)))*(-15°), A), 0.35, A),L(i)), i, 1, 49) e conclua a releitura de *Concreção 9983* segundo sua composição geométrica.
Fica o convite para explorar como colorir as formas, de modo que a releitura também inclua o aspecto cromático da obra.

Questão 13

Explore uma atividade interativa que simula o processo de criação utilizado por Sacilotto em seu estúdio.

Ajuste os controles deslizantes:
n: que determina o número de formas organizadas em linhas e colunas, e
k: que controla o grau de ampliação de cada forma.

Experimente e compare sua interpretação com a obra *Concreção 9983*. Você é capaz de identificar os valores de n e k que permite uma reprodução fiel da obra?

Aa π Digite sua resposta aqui...

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

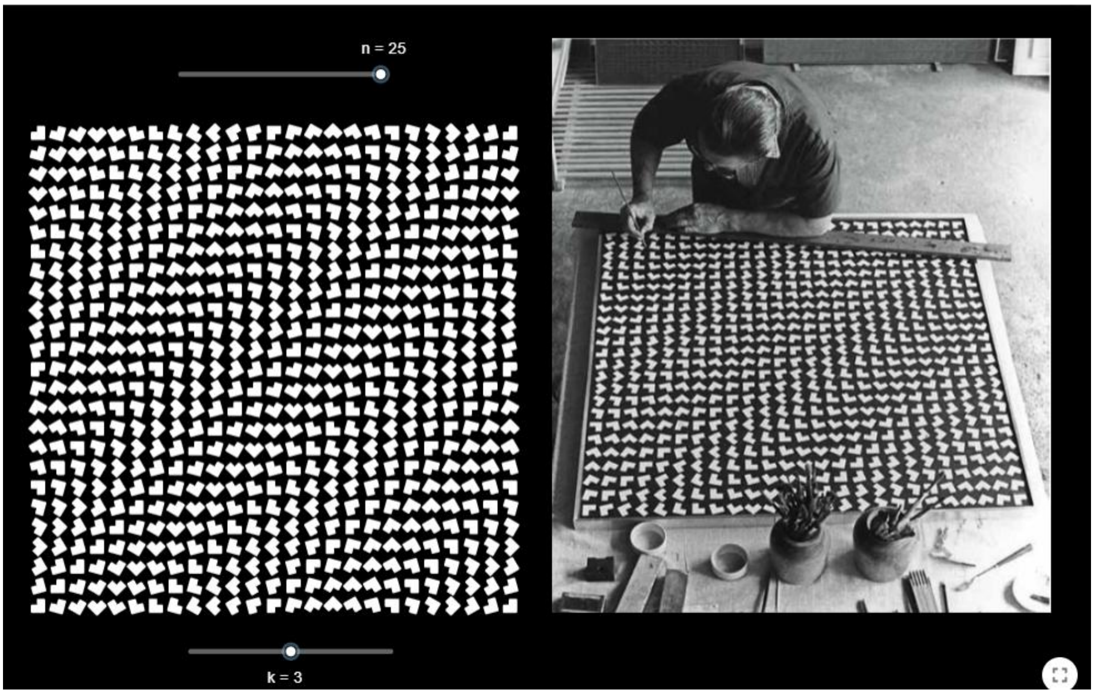
Fonte: A autora.

Após a explicação detalhada sobre a releitura da obra *Concreção 9983*, Figura 4.27, em que o *script* Sequência é empregado e apresentado passo a passo até que o comando

$$M = \text{Sequência}\Big(\text{Transladar}\Big(\text{Homotetia}\Big(\text{Girar}\left(pol_1, (x(L(i)) + y(L(i))) \cdot (-15^\circ), A\right), 0.35, A\Big), L(i)\Big), i, 1, 49\Big)$$

possa ser utilizado pelo leitor, o convidamos a interagir com uma atividade no GeoGebra, Figura 4.36, construída utilizando o comando Sequência de forma similar, conforme os moldes apresentados ao longo da explicação.

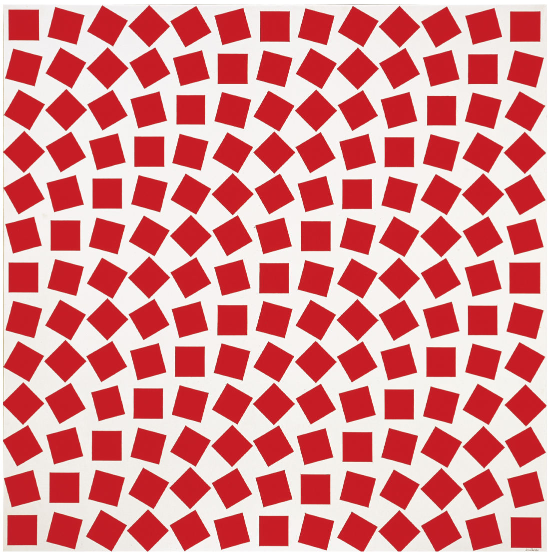
Figura 4.36 – Atividade 3 - *Concreção 9983* - uma reinterpretação



Fonte: A autora.

Dando continuidade às atividades, na quarta atividade do capítulo, para gerar a sequência de pontos que servirá como o centro de cada quadrado na obra *Concreção 8215* (*link*), Figura 4.37, utilizamos o comando Sequência na forma Sequência (Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final), definido por $L = \text{Sequência}\left((\text{Resto}(i, n), \text{Quociente}(i, n)), i, 0, n^2 - 1\right)$. Os questionamentos subsequentes orientam o leitor na compreensão desse comando e sua aplicação na construção da obra.

Figura 4.37 – *Concreção 8215*



Fonte: Sacilotto (2024).

.

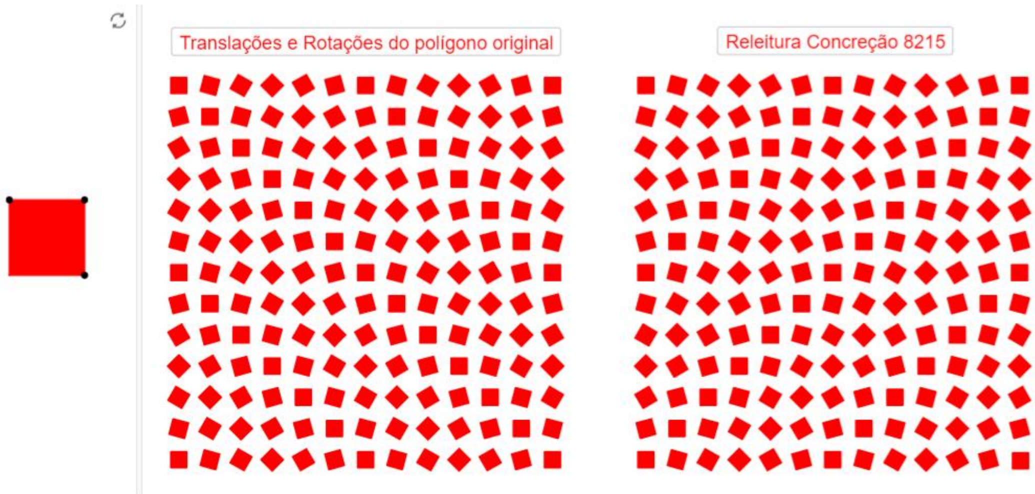
Para criar a sequência de quadrados transladados e rotacionados apresentamos o comando sequência definido por

$$M = \text{Sequência}\left(\text{Transladar}\left(\text{Homotetia}\left(\text{Girar}\left(q_1, (x(L(i)) + y(L(i))) \cdot \left(-\frac{180°}{12}\right), E\right), 0.5, E\right), L(i)\right), i, 1, n^2\right)$$

e, por meio de questionamentos, conduzimos o leitor à compreensão da expressão utilizada nesse comando, bem como das variáveis e dos valores inicial e final.

Inicialmente, na atividade interativa apresentada, o leitor é convidado a realizar as translações e rotações do polígono original, obtendo uma obra refletida de *Concreção 8215*. Somente após essa etapa, ao realizar a reflexão, o leitor poderá alcançar uma releitura autêntica da obra, Figura 4.38. Neste momento, é possível perceber que o comando Sequência, da forma que foi utilizado, não reproduz fielmente a obra de Sacilotto. Nas demais atividades deste capítulo, a intenção é levar o leitor a compreender a adequação necessária para que essa inconsistência seja resolvida. Para findar a atividade, incentivamos o leitor a interagir com a atividade, criando novas obras ao experimentar diferentes alterações no polígono original.

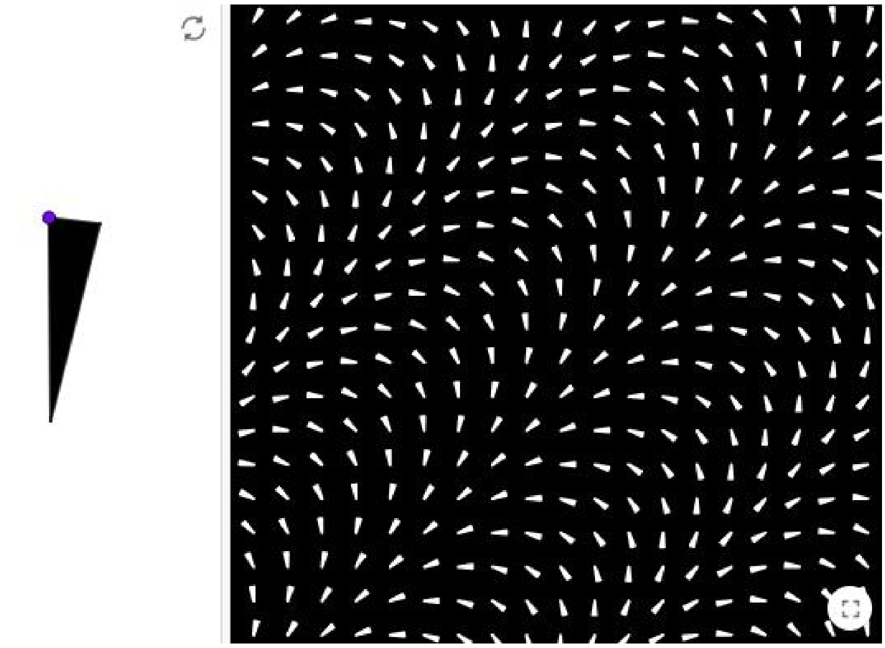
Figura 4.38 – Atividade 4 - *Concreção 8215*



Fonte: A autora.

Para consolidar os conhecimentos adquiridos no decorrer desse capítulo, o leitor é convidado a explorar releituras da obra *Concreção 8332* (*link*), Figura 4.39, e alguns Recortes, Figura 4.40, de Luiz Sacilotto, que foram apresentados nas exposições intituladas *Audácia Concreta* (*link*). Essas exposições destacaram uma série de colagens que o artista criou em resposta às limitações físicas que enfrentou em seus últimos anos de vida. Além dessa interação, o leitor também é incentivado a confeccionar atividades que envolvam a aplicação do comando Sequência e os conhecimentos abordados no material, relativos às transformações geométricas.

Figura 4.39 – Atividade 5 - *Concreção 8332*



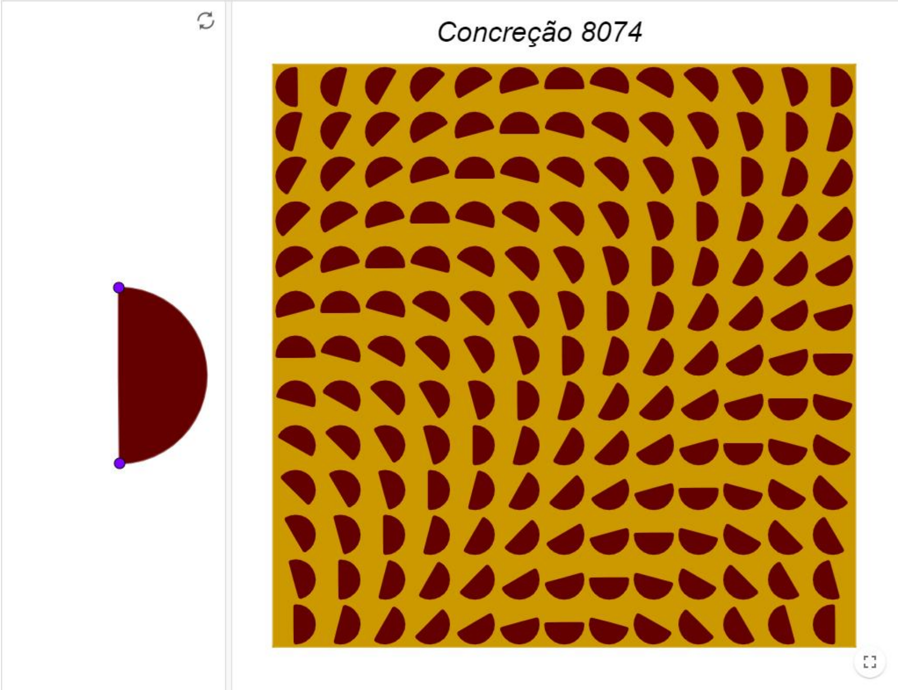
Fonte: A autora.

Figura 4.40 – Atividade 6 - *Audácia Concreta*

Fonte: A autora.

Concluindo o capítulo, apresentamos uma nova abordagem envolvendo Sequências relacionadas à obra *Concreção 8074* (*link*), Figura 4.41.

Figura 4.41 – Atividade 7 - *Concreção 8074*



Fonte: A autora.

Inicialmente, na obra *Concreção 8215*, Figura 4.37, o comando Sequência utilizado gerou uma releitura que correspondia a uma reflexão da obra original. Através de questionamentos investigativos, o leitor é instigado a interpretar o comando

$$N = \text{Sequência}\Big(\text{Transladar}\Big(\text{Homotetia}\Big(\text{Girar}\left(f, (x(L(i)) + y(L(i))) \cdot \left(-\frac{180^\circ}{12}\right), A\right), 0.2, A\Big), L(i)\Big), i, 1, n^2\Big)$$

e é convidado a criar um novo comando que reproduza fielmente a obra *Concreção 8074*.

Após a reflexão do leitor sobre a disposição dos setores na obra, espera-se que, com o conhecimento adquirido até o momento sobre a construção do comando Sequência, seja possível redigir um novo comando que considere a translação em relação ao vetor $L(i)$, levando em conta a combinação dada por $x(L(i)) - y(L(i))$. Assim o comando que oportunizará uma releitura fiel à obra é

$$N = \text{Sequência}\Big(\text{Transladar}\Big(\text{Homotetia}\Big(\text{Girar}\left(f, (x(L(i)) - y(L(i))) \cdot \left(-\frac{180^\circ}{12}\right), A\right), 0.2, A\Big), L(i)\Big), i, 1, n^2\Big)$$

Esperamos que o leitor possa realizar uma releitura da obra *Concreção 8225* (*link*), Figura 4.42, utilizando os conhecimentos adquiridos ao longo da leitura e experimentação das atividades interativas presentes em *Matemática, Arte e GeoGebraScript* (*link*). A atividade contém uma releitura da obra e o leitor poderá inicialmente interagir com a atividade para, após isso, confeccionar sua própria releitura.

Figura 4.42 – Atividade 8 - *Concreção 8225*

Fonte: A autora.

5 CONCLUSÃO

Ao refletir sobre o estudo conduzido para esta dissertação de mestrado e a criação de um recurso educacional em formato de livro digital, confirmamos ter alcançado o objetivo geral previsto no início do projeto. As interseções entre Arte e Matemática foram investigadas por meio das obras de Luiz Sacilotto, integrando a programação em GeoGebraScript ao longo de todo o livro digital.

Inicialmente, planejou-se aplicar as práticas sugeridas em *Matemática, Arte e GeoGebraScript* nas aulas de Matemática sobre o tema Transformações Geométricas no Plano, direcionadas às turmas da 2ª série do Ensino Médio em uma escola pública estadual do Paraná. No entanto, conforme o planejamento da Secretaria da Educação e do Esporte do Paraná (SEED) (RCO+Aulas, 2024), apenas quatro aulas estão previstas para abordar esse tema em Matemática, o que dificulta a implementação do projeto do livro digital sem a colaboração dos professores de Arte e Pensamento Computacional.

Diante do que foi exposto nesta dissertação, onde se explorou a relação entre *Matemática, Arte e GeoGebraScript* com foco em como essas áreas podem dialogar para enriquecer o ensino e expandir as possibilidades de aprendizagem, constatou-se que o livro *Matemática, Arte e GeoGebraScript* (*link*), inicialmente concebido para o ensino de Matemática, revela um potencial interdisciplinar significativo. A integração das artes e do pensamento computacional se mostrou um caminho promissor, promovendo abordagens inovadoras e envolvendo os estudantes em processos criativos e analíticos.

Dada essa riqueza de possibilidades, constatou-se que o material se alinha diretamente aos objetivos dos itinerários formativos[6] previstos na BNCC, os quais buscam flexibilizar a organização curricular e atender às demandas e aspirações dos estudantes. Assim, o livro apresenta-se não apenas como um recurso para o ensino de Matemática, mas como um eixo interdisciplinar que une o rigor lógico-matemático à expressividade artística e ao pensamento computacional, proporcionando uma experiência educacional integrada e interdisciplinar. Essa abordagem não só amplia as formas de compreensão e expressão dos conteúdos, como também incentiva o desenvolvimento de habilidades cruciais para o mundo contemporâneo, como a criatividade, a resolução de problemas e a fluência tecnológica.

Conclui-se, portanto, que *Matemática, Arte e GeoGebraScript* (*link*) configura-se como uma opção estratégica para o Ensino Médio, potencializando o protagonismo estudantil por meio de escolhas formativas que aliam conhecimento, inovação e expressão artística.

[6] No Brasil, a expressão “itinerário formativo” tem sido tradicionalmente utilizada no âmbito da educação profissional, em referência à maneira como se organizam os sistemas de formação profissional ou, ainda, às formas de acesso às profissões. No entanto, na Lei nº 13.415/17, a expressão foi utilizada em referência a itinerários formativos acadêmicos, o que supõe o aprofundamento em uma ou mais áreas curriculares, e também, a itinerários da formação técnica profissional (Brasil, 2018, p. 467).

REFERÊNCIAS

BALDINI, L. A. F.; MORAN, M. (Ed.). **Geometria**: práticas e aprendizagens. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2022. 76

BERRO, R. T. **Relações entre arte e matemática**: um estudo da obra de Maurits Cornelis Escher. 108 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2008. Disponível em: <https://www.usf.edu.br/galeria/getImage/385/14342978124314310.pdf>. Acesso em: 02 nov. 2024. 15

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso em: 02 nov. 2024. 16, 17, 86

BRASIL. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 02 nov. 2024. 16

LIMA, E. L. **Isometrias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. 94 p. 35

LIMA, E. L. **Coordenadas no plano**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. 329 p. 35

MATTAR, D.; PEREZ-BARREIRO, G. (Ed.). **Sacilotto**. São Paulo: Almeida e Dale Galeria e Cosac Naify, 2021. 29, 75

MATTAR, D.; PEREZ-BARREIRO, G. **Sacilotto**: a vibração da cor | tour virtual. São Paulo: Almeida e Dale Galeria de Arte, 2021. Disponível em: <https://youtu.be/-mlf4wxFQsY?si=DpMEzTF9jelSsukS>. Acesso em: 02 nov. 2024. 57

PARANA. **RCO+Aulas**: Material de apoio ao professor. Curitiba, 2024. Disponível em: <https://professor.escoladigital.pr.gov.br/rco_mais_aulas>. Acesso em: 02 nov. 2024. 86

ROBERTO, C.; OLIVEIRA, J. A. de. **Audácia concreta**: as obras de Luiz Sacilotto: pinturas, gravuras e desenhos. Curitiba, PR: Museu Oscar Niemeyer, 2015. 148 p. 27, 31

ROCCA, R. de C. D. **Dobras e desdobras**: a obra de Luiz Sacilotto. 140 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Artes, Campinas, SP, 2004. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/325008>. Acesso em: 02 nov. 2024. 30

SACILOTTO, L. **In**: ENCICLOPÉDIA Itaú Cultural de Arte e Cultura Brasileira. São Paulo: Itaú Cultural, 2024. Disponível em: <http://enciclopedia.itaucultural.org.br/pessoa10773/luiz-sacilotto>. Acesso em: 02 nov. 2024. 24, 25, 26, 28, 29, 41, 43, 48, 52, 55, 57, 61, 62, 65, 67, 81

SANTOS, C. O. de A. **Matemática, arte e GeoGebraScript**. GeoGebra.org, 2024. E-book. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/nmjf64zq>. 15

VIDIGAL, C. L. **GeoGebra em nível intermediário**: introdução à programação com Geogebrascript. Curitiba: CRV, 2022. 72