UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CAROLINA PANIQUE GASPARELO MORENO

APLICAÇÃO DA LEI DE BENFORD NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE UNIDADE CURRICULAR

DOURADOS - MS

2024

CAROLINA PANIQUE GASPARELO MORENO

APLICAÇÃO DA LEI DE BENFORD NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE UNIDADE CURRICULAR

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS como requisito para a obtenção de título de Mestre em Matemática sob a orientação do Professor. Dr. Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos

DOURADOS – MS

2024

M842a Moreno, Carolina Panique Gasparelo

Aplicação da lei de Benford no ensino médio: uma proposta de unidade curricular / Carolina Panique Gasparelo Moreno – Dourados, MS: UEMS, 2024.
67 p.

Dissertação (Mestrado) - Matemática - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), 2024.

Orientador: Prof.º Dr.º Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos

1. Lei de Benford (matemática) 2. Educação matemática 3. Probabilidade e estatística (matemática) 4. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio). I. Santos, Otávio José Neto Tinoco Neves dos. II. Título.

CDD 23 ed.519.5

Ficha Catalográfica elaborada pela bibliotecária da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS) Aline Perdomo Soutelo, inscrita sob o CRB Provisório n° 714 - 1ª Região.

Ata de Defesa de Dissertação
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional

Aos treze dias do mês de setembro do ano de dois mil e vinte e quatro, às catorze horas, na Sala 7, bloco G , da Fundação Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, realizou-se a sessão de defesa de Dissertação, intitulada: "APLICAÇÃO DA LEI DE BENFORD NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE UNIDADE CURRICULAR" de autoria da aluna: **CAROLINA PANIQUE GASPARELO MORENO**, CPF 045.880.071-65, sob a orientação de OTÁVIO JOSÉ NETO TINOCO NEVES DOS SANTOS do Programa de Pós-Graduação em Matemática, nível: Mestrado Profissional. Reuniu-se a Banca Examinadora composta pelos membros: OTÁVIO JOSÉ NETO TINOCO NEVES DOS SANTOS **(Presidente)**, VANDO NARCISO e ANDERSON NOVAES MARTINHÃO (UFGD). Concluída a apresentação e arguição, os membros da Banca Examinadora emitiram parecer expresso conforme segue:

[X] Aprovação [ ] Aprovação com revisão [ ] Reprovação

EXAMINADOR	**ASSINATURA**
Dr. OTÁVIO JOSÉ NETO TINOCO NEVES DOS SANTOS	
Dr. VANDO NARCISO	Vando Narciso
Dr. ANDERSON NOVAES MARTINHÃO (UFGD)	Anderson Novaes Martinhão

OBSERVAÇÕES:

Nada mais a ser tratado, o Presidente declarou a sessão encerrada e agradeceu a todos pela presença.

Assinaturas:

Presidente da Banca Examinadora

Carolina P.G. moreno
Aluna

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar um modelo de Unidade Curricular com sugestões didáticas para todos os anos do Ensino Médio, utilizando a Lei de Benford como ferramenta central para o desenvolvimento de atividades práticas. A unidade curricular desenvolvida aborda conceitos de probabilidade e estatística de maneira prática e contextualizada, preparando os estudantes para o mundo do trabalho através da aplicação da Lei de Benford na detecção de fraudes contábeis. A dissertação está estruturada em quatro capítulos: o primeiro capítulo apresenta conceitos básicos de estatística e probabilidade; o segundo capítulo estuda a Lei de Benford e suas aplicações; o terceiro capítulo discute os marcos legais para a implantação dos itinerários formativos; e o quarto capítulo propõe a unidade curricular, baseada no Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul, com sugestões didáticas detalhadas para aplicação em sala de aula.

Palavras-chave: Lei de Benford. Unidade Curricular. Ensino Médio.

ABSTRACT

This dissertation aims to present a model for a Curriculum Unit with didactic suggestions for all years of high school, using Benford's Law as a central tool for developing practical activities. The developed curriculum unit addresses concepts of probability and statistics in a practical and contextualized manner, preparing students for the job market through the application of Benford's Law in detecting accounting fraud. The dissertation is structured into four chapters: the first chapter presents basic concepts of statistics and probability; the second chapter studies Benford's Law and its applications; the third chapter discusses the legal framework for the implementation of formative itineraries; and the fourth chapter proposes the curriculum unit, based on the Reference Curriculum of Mato Grosso do Sul, with detailed didactic suggestions for classroom application.

Keywords: Benford's Law. Curriculum Unit. High School.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo apresentar um modelo de Unidade Curricular com sugestões didáticas que podem ser trabalhadas em todos os anos do Ensino Médio utilizando a Lei de Benford como aliada para o desenvolvimento de atividades cotidianas. Pela sua aplicação na detecção de fraudes contábeis, as atividades desenvolvidas nessa unidade curricular que se propõe no Itinerário Formativo Propedêutico também podem ser utilizadas em um Itinerário de Formação Técnica e Profissional.

Através das alterações estabelecidas pela implantação da Base Nacional Comum Curricular na etapa Ensino Médio em 2018 incluíram-se os Itinerários Formativos na formação curricular do Ensino Médio no Brasil. Os Itinerários Formativos representam um conjunto de Unidades Curriculares ofertadas pelas escolas que possibilitam aos estudantes aprofundarem seus conhecimentos, preparar-se para prosseguir seus estudos para o mundo do trabalho.

As unidades curriculares representam uma disciplina específica que os estudantes devem cursar obrigatoriamente, tendo como objetivo principal desenvolver competências específicas de acordo com o Itinerário Formativo escolhido. Outra característica das unidades curriculares é a forma de organização diversa, podendo ser ofertada através de oficinas, projetos, núcleos de estudo, cursos, entre outros, sua duração pode ser anual, semestral ou bimestral.

Para o desenvolvimento da Unidade Curricular abordada nesse trabalho, o tema central, Lei de Benford, traz características de uma unidade curricular, apresentando um assunto interessante, abordando conceitos matemáticos de probabilidade e estatística de forma prática e também ferramentas para preparar o estudante para o mundo do trabalho, utilizando-a na detecção de fraudes contábeis e podendo ser implementada como uma Unidade Curricular Técnica Profissional.

Mas afinal, o que é Lei de Benford? Para melhor entender a Lei de Benford, vamos tomar a seguinte situação como exemplo: Se anotarmos o primeiro dígito da população dos municípios do Mato Grosso do Sul e colocarmos em uma urna, qual a chance de ao retirarmos ao acaso um número, esse número ser o número 1? E qual a chance de ser o número 9? Intuitivamente você deve ter pensado que a chance para os dois números é a mesma, ou seja, 11,11%, porém isso não acontece, a chance do número 1 é de 30,1% e do número 9 é de 5,1%. Esse é o fenômeno da Lei de Benford, definindo que em alguns conjuntos de dados a chance do primeiro dígito ser 1 é de 30,1%, do número 2 ser o primeiro dígito é 17,6% e vai diminuindo até chegarmos à chance do número 9 ser o primeiro dígito que é de 4,6%.

As primeiras observações desse fenômeno foram realizadas por Simon Newcomb em 1981, percebendo que as primeiras páginas das tabelas de logaritmo se desgastavam mais rapidamente que as últimas, ou seja, os logaritmos iniciados com dígitos menores eram mais consultados dos que os que iniciados por dígitos maiores. Ao longo dos anos foram realizados muitos estudos do fenômeno observado por Simon Newcomb e hoje a lei tem várias aplicações, sendo uma delas o uso na detecção de fraudes contábeis, já em sala de aula ela é uma grande aliada para que os estudantes aprendam conteúdos básicos de forma prática.

No Capítulo 1 desta dissertação serão apresentados conceitos de estatística e probabilidade considerados pré-requisitos para a compreensão da Lei de Benford. O Capítulo 2 é destinado à realização de um estudo da Lei de Benford e sua aplicação na detecção de fraudes, apresentando assim, definições, exemplos e aplicabilidade da lei. Já o Capítulo 3, destaca os marcos legais para a implantação dos itinerários formativos no Ensino Médio no e no estado de Mato Grosso do Sul.

Finalizando a dissertação, temos o Capítulo 4 onde é apresentada uma proposta de uma unidade curricular abordando a Lei de Benford. Para a elaboração dessa unidade curricular foi utilizado como referência o Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul para o Novo Ensino Médio, com enfoque na elaboração de sugestões didáticas que podem ser aplicadas nos três anos do Ensino Médio. Essas sugestões apresentam comentários e direcionamentos quanto a prática em sala de aula.

1. CONCEITOS DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE PARA A SALA DE AULA

Para a aplicação das sugestões didáticas sobre a da Lei de Benford em sala de aula é necessário que os estudantes conheçam alguns conceitos de estatística e probabilidade considerados pré-requisitos para a compreensão desta lei. Neste capítulo esses conceitos serão apresentados.

1.1 Conceitos Estatísticos

A **estatística** é o ramo da matemática que aborda um conjunto de métodos de coleta, organização, representação, análise e interpretação de dados, tendo como objetivo a compreensão desses dados para a tomada de decisões baseadas na pesquisa estatística.

As pesquisas estatísticas são realizadas com diversas finalidades, por exemplo, na pandemia da COVID-19, a estatística foi necessária para o levantamento de dados: novos casos da doença, total de óbitos, entre outros, auxiliando na tomada de decisão do governo. Outro exemplo são as pesquisas de intenção de voto em um candidato no período eleitoral.

Em uma pesquisa estatística denominamos **população** o conjunto de todos os elementos, isto é, todos os indivíduos, itens ou objetos cujas características estão sendo estudadas. Em alguns casos não é possível consultar todos os elementos da população, diante disso, utiliza-se uma parcela representativa da população selecionada que recebe o nome de **amostra,** ou seja, um subconjunto finito formado por elementos da população.

As observações realizadas nas pesquisas estatísticas levam em consideração uma característica ou atributo dos elementos da população ou amostra estudada, essa característica recebe o nome de **variável.** As variáveis podem ser classificadas em **qualitativas** (quando apresentam como valores uma qualidade ou uma característica, podendo ser: estado cível, cor dos olhos) e **quantitativas** (quando apresentam valores numéricos resultantes de algum tipo de contagem ou mensuração, podendo ser: idade, número de irmãos).

Uma variável quantitativa pode ser classificada em:

- **variável quantitativa discreta**: essa variável é utilizada para realizar contagens, ou seja, é expressa por números inteiros. Exemplo:

quantidade de filhos de uma família ou número de gols em uma partida de futebol.

- **variável quantitativa contínua**: quando os valores podem assumir qualquer número de um intervalo real, ou seja, representa uma medida. Exemplo: altura de uma pessoa, peso em quilogramas.

Uma variável qualitativa pode ser classificada em:

- **variável qualitativa ordinal**: quando é possível ordenar seus valores, porém não são numéricos. Exemplo: grau de escolaridade, nível de desenvolvimento de um país.
- **variável qualitativa nominal:** quando não é possível ordenar seus valores. Exemplo: cor dos olhos ou comida favorita.

1.2 Organização e apresentação dos dados

Com o objetivo de analisar os dados coletados em uma pesquisa estatística é necessário organizá-los, separando-os em categorias de acordo com determinada característica e depois contabilizá-los conforme a ocorrência com que essa informação aparece na pesquisa. A quantidade de vezes que determinada ocorrência aparece em cada categoria é chamada de **frequência absoluta** (f_i)**.** Existem situações em que se deseja comparar a frequência absoluta com o total de ocorrências. Para isso, calculamos a razão entre a frequência absoluta de cada categoria e o total de elementos da pesquisa, obtendo a **frequência relativa** (f_r)**.** A frequência relativa pode ser representada através de porcentagem ao ser multiplicada por 100.

Exemplo 1: Um dado foi lançado 50 vezes e apresentou os seguintes resultados ao verificar a face voltada para cima:

Figura 1 – Resultado do lançamento de dado 50 vezes.

6 - 5 - 2 - 6 - 4 - 3 - 6 - 2 - 6 - 5 - 1 - 6 - 3 - 3 - 5 - 1 - 3 - 6 - 3 - 4 - 5 - 4 - 3 - 1 - 3 -
5 - 4 - 4 - 2 - 6 - 2 - 2 - 5 - 2 - 5 - 1 - 3 - 6 - 5 - 1 - 5 - 6 - 2 - 4 - 6 - 1 - 5 - 2 - 4 - 3 -

Fonte: Elaborado pela autora

Vamos determinar as frequências absolutas e relativas de acordo com a observação da face voltada para cima.

Frequência absoluta (f_i):

- face 1: 6
- face 2: 8
- face 3: 9
- face 4: 7
- face 5: 10
- face 6: 10

Frequência relativa (f_r).

- face 1: $\frac{6}{50}$ ou 0,12 ou 12%
- face 2: $\frac{8}{50}$ ou 0,16 ou 16%
- face 3: $\frac{9}{50}$ ou 0,18 ou 18%
- face 4: $\frac{7}{50}$ ou 0,14 ou 14%
- face 5: $\frac{10}{50}$ ou 0,2 ou 20%
- face 6: $\frac{10}{50}$ ou 0,2 ou 20%

Os dados analisados no Exemplo 1 podem ser organizados, para melhor visualização, em uma tabela que mostra a variável, os valores que ela assume e as respectivas frequências absoluta (f_i) e relativa (f_r) é denominada **tabela de frequências**.

Tabela 1 - Resultado das faces voltadas para cima ao jogar um dado 50 vezes

Face voltada para cima	f_i	f_r (em%)
1	6	12%
2	8	16%
3	9	18%
4	7	14%
5	10	20%
6	10	20%
Total	50	100%

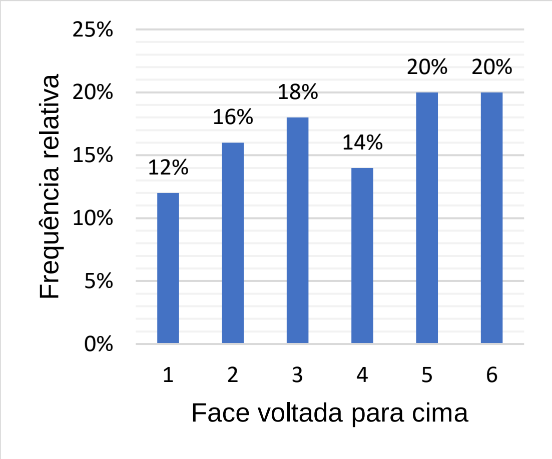
Fonte: Elaborado pela autora

Para melhor apresentação e interpretação dos dados pode ser utilizada também a representação gráfica. Os gráficos estatísticos são uma forma mais atrativa de apresentar os resultados de uma pesquisa. Serão apresentadas a seguir as principais representações gráficas utilizadas em estatística, aplicadas ao Exemplo 1.

1.2.1 Gráfico de barras ou colunas

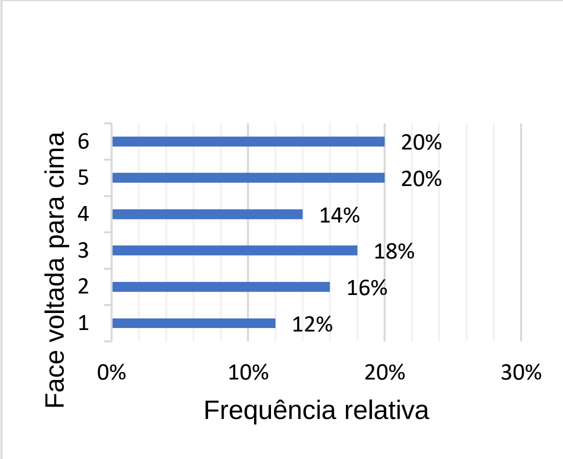
Nesse tipo de gráfico os dados são representados por meio de retângulos, dispostos na vertical (**gráfico de colunas**) e na horizontal (**gráfico de barras**) todos de mesma largura e com comprimentos proporcionais aos valores que representam.

Gráfico 1 - Resultado das faces voltadas para cima ao jogar um dado 50 vezes



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 2 - Resultado das faces voltadas para cima ao jogar um dado 50 vezes



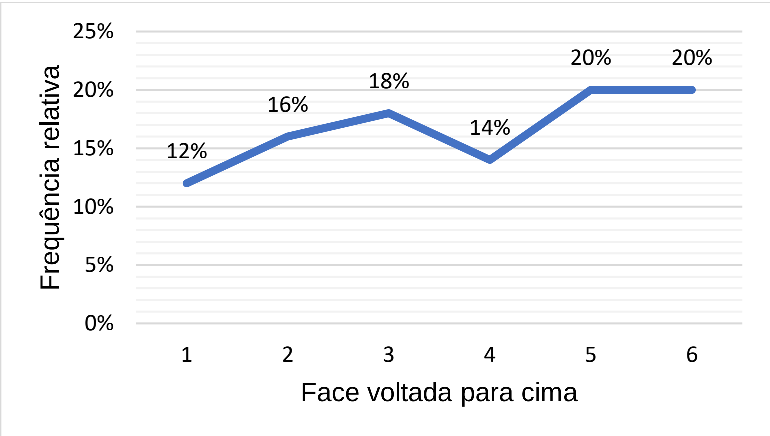
Fonte: Elaborado pela autora

O Gráfico 1 representa um gráfico de colunas, já o Gráfico 2 representa um gráfico de barras, ficando a critério de quem constrói o gráfico a posição das barras.

1.2.2 Gráfico de linhas

O **gráfico de linhas**, também chamado de **gráfico de segmento** é utilizado para representar a variação de valores, ou seja, identificar tendências de aumento ou diminuição de valores numéricos de uma variável em determinado período.

Gráfico 3 - Resultado das faces voltadas para cima ao jogar um dado 50 vezes

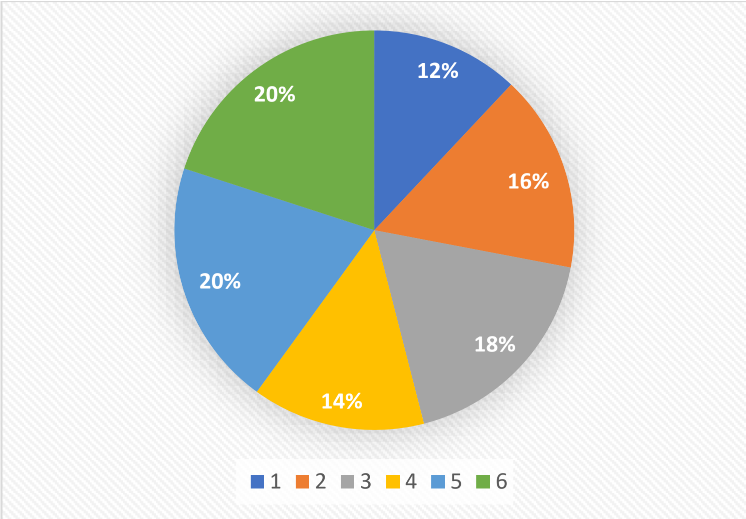


Fonte: Elaborado pela autora

1.2.3 Gráfico de setores

O **gráfico de setores** é conhecido popularmente como gráfico de pizza, sendo representado por um círculo dividido em setores circulares. O círculo completo representa o total (100%), e os setores indicam a frequência correspondente aos valores da variável.

Gráfico 4 - Resultado das faces voltadas para cima ao jogar um dado 50 vezes



Fonte: Elaborado pela autora

Ressalta-se que o uso do Excel facilita a construção desses gráficos.

1.3 Conceitos de Probabilidade

A **probabilidade** é o ramo da matemática que estuda fenômenos não determinísticos, ou seja, situações em que ocorrem incertezas. Nessas situações os resultados variam de uma observação para outra, mesmo estando nas mesmas condições de experimentação. Utiliza-se a probabilidade na tomada de decisões, pois através dela conseguimos calcular a chance de um evento acontecer. Para isso, precisamos estudar alguns conceitos referentes a probabilidade.

Experimento aleatório é todo experimento que, quando repetido várias vezes e nas mesmas condições, apresenta diferentes resultados, ou seja, os resultados são imprevisíveis. Possui as seguintes características:

- O experimento pode ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições;
- Podemos descrever todos os resultados possíveis do experimento.

Como exemplos de experimento aleatório temos: abrir um livro ao acaso e verificar qual o número da página, retirar uma carta de um baralho fora de ordem, lançamento de uma moeda.

Denominamos **espaço amostral** (representado por S ou Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Ao lançarmos um dado comum com faces numeradas de um a seis e observarmos qual a face voltada para cima, podemos obter um número de 1 a 6, então $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Denotamos por $n(\Omega)$ o número de elementos do espaço amostral, ou seja, no experimento aleatório lançar um dado comum, $n(\Omega) = 6$.

Um **evento** é um subconjunto do espaço amostral, geralmente denotado por uma letra maiúscula. Os eventos podem ser classificados em:

- **Evento certo:** quando o evento é o próprio espaço amostral.
- **Evento impossível:** quando o evento é o conjunto vazio.
- **Evento simples ou elementar:** quando o evento é um conjunto unitário.

Ao lançarmos um dado comum com faces numeradas de um a seis e observarmos a face voltada para cima, podemos representar alguns eventos. A: face voltada para cima ser um número par, $A = \{2, 4, 6\}$ e $n(A) = 3$. B: face voltada para cima ser o número 0, $B = \emptyset$ e $n(B) = 0$, ou seja, B é um evento impossível.

Probabilidade é uma medida quantitativa de um evento acontecer, ou seja, expressa por meio de um número o quanto é provável um evento ocorrer.

Considere um espaço amostral finito Ω = $\{a_{1,} a_2, \dots, a_k\}$, a cada evento elementar $\{a_i\}$ será associado um número real, indicado por P $(\{a_i\})$, ou p_i, chamado de probabilidade do evento $\{a_i\}$, que satisfaz as seguintes condições:

$$i)\ 0 \leqslant p_i \leqslant 1 \ para\ todo\ i \in \{1, 2, \dots, k\},$$

$$ii) \sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1 .$$

Dizemos que os números $p_1, p_2, \dots , p_k$ definem uma **distribuição de probabilidades** sobre Ω.

Seja A, um evento qualquer, é definida **probabilidade do evento A** (denotada por $P\ (A)$), da seguinte maneira:

i) $Se\ A\ =\ \emptyset, P(A)\ =\ 0,$

ii) $Se\ A\ \neq\ \emptyset, P(A)\ =\ \sum_{a_i \in A}\ p_{i.}$

Para determinar a probabilidade de um evento acontecer existem duas definições, são elas:

1.3.1 Definição Frequentista

Nessa definição, para determinar a probabilidade de um evento acontecer, repete-se o experimento por *n* vezes e registra-se a quantidade de vezes que o evento A aconteceu, isto é, *n(A).* Portanto:

$$F_{n,A}\ =\ \frac{n(A)}{n}$$

Onde, $F_{n,A}$ é igual a frequência relativa de A, nas n repetições do experimento aleatório.

Exemplo 2: Uma moeda é lançada 1000 vezes, verifica-se que cara apareceu 526 vezes, então a frequência relativa do evento A (a face voltada para cima ser cara), acontecer é dada por

$$F_{n,A} = \frac{526}{100} = 0{,}526$$

Repetindo o experimento o maior número de vezes, em condições iguais, a frequência relativa do evento A, tende a se aproximar da probabilidade correta.

1.3.2 Definição Clássica

Nessa definição, a probabilidade P de um evento A acontecer é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Onde,

- $P(A)$ é a probabilidade do evento A acontecer;
- $n(A)$ é o número de elementos do evento A;
- $n(\Omega)$ é o número de elementos do espaço amostral.

Exemplo 3: Considere o experimento aleatório "lançamento de uma moeda", tendo assim o espaço amostral $\Omega = \{cara, coroa\}$ e o evento A (a face voltada para cima ser cara), isto é, $A = \{cara\}$. Determinar a probabilidade do evento A acontecer.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Essa razão foi definida pelo matemático e astrônomo francês Pierre Laplace (1749-1827), ficando conhecida como **Definição de Laplace**. Como consequência direta dessa definição, temos:

$$0 \leq n(A) \leq n(\Omega) \Rightarrow \frac{0}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

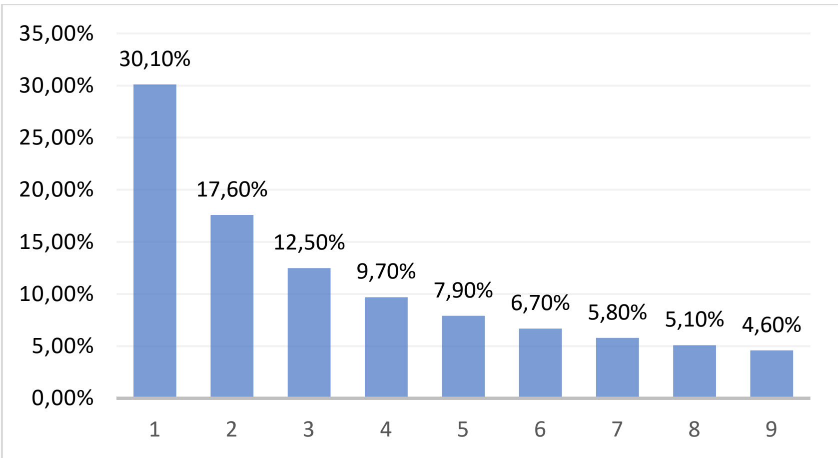
Observações:

- $P(A) = 0$, quando A é um evento impossível.
- $P(A) = 1$, quanto A é um evento certo.
- A probabilidade pode ser calculada na forma decimal ou na forma percentual, por exemplo, $P(A) = \frac{15}{20} = 0{,}75 = 75\%$.

2. LEI DE BENFORD E SUA APLICAÇÃO NA DETECÇÃO DE FRAUDES

A Lei de Benford, também conhecida como lei dos números anômalos ou lei do primeiro dígito, afirma que ao contrário do que pensamos intuitivamente a distribuição de probabilidade do primeiro dígito significativo de algumas listas de números não é uniforme, ou seja, com a probabilidade de 1/9 para cada dígito, e sim específica, seguindo uma distribuição logarítmica particular. Mais especificamente o dígito 1 tem a probabilidade de 30,1% de ocorrer, o dígito 2 tem a probabilidade 17,6% e vai diminuindo até a probabilidade de ocorrência do dígito 9, que é de 4,6%, como mostra o Gráfico 1 a seguir.

Gráfico 5 - Distribuição de probabilidade do primeiro dígito segundo a Lei de Benford



Fonte: Elaborado pela autora

Para ajudar no entendimento da lei, observe a seguinte situação: imagine a sequência de números formados por 2^n, com $n \geq 0$, ou seja;

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4.096, 8.192, \ldots$$

registrando o primeiro dígito significativo da sequência, temos;

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, \ldots$$

O primeiro dígito significativo pode ser qualquer algarismo entre 1 e 9, e intuitivamente achamos que a distribuição de probabilidade de ocorrência de cada dígito é $\frac{1}{9}$, ou 11,1%, note na Tabela 2 o que acontece quando analisamos os 101 primeiros dígitos significativos da sequência 2^n:

Tabela 2 - Frequência do primeiro dígito nos primeiros 101 números da sequência 2^n

1º Dígito	Frequência do 1º dígito	Porcentagem
1	31	30,8%
2	17	16,9%
3	13	12,9%
4	10	9,9%
5	7	6,9%
6	7	6,9%
7	6	5,9%
8	5	4,9%
9	5	4,9%

Fonte: Elaborado pela autora

Podemos perceber que a probabilidade do algarismo 1 ser o primeiro dígito é de 30,8% e não 11,1%, como era esperado, e também se comparados os resultados obtidos com a Lei de Benford identificamos sua semelhança.

2.1 História da Lei de Benford

A distribuição de probabilidade proposta pela Lei de Benford foi inicialmente observada pelo astrônomo Simon Newcomb em 1881, Newcomb percebeu que as primeiras páginas das tabelas de logaritmo se desgastavam mais rapidamente que as últimas, Newcomb publica suas observações no American Journal of Mathematics, com o título "*Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers*" em sua publicação afirma que a frequência dos primeiros dígitos seguem a distribuição de probabilidade apresentada na Tabela 3.

Tabela 3 - Distribuição de probabilidade para o primeiro e segundo dígito

Dígito	1º Dígito	2º Dígito
0	...	0.1197
1	0.3010	0.1139
2	0.1761	0.1088
3	0.1249	0.1043
4	0.0969	0.1003
5	0.0792	0.0967
6	0.0669	0.0934
7	0.0580	0.0904
8	0.0512	0.0876
9	0.0458	0.0850

Fonte: Adaptado de Newcomb, Simon (1881)

Newcomb afirma também que para o segundo dígito a probabilidade será praticamente a mesma, e para terceiro dígito e seguintes, a diferença será imperceptível.

Em 1938 o físico e engenheiro elétrico americano Frank Benford publicou um artigo intitulado "*Theu law of anomalous numbers", nele* realizou observações no primeiro dígito significativo em 20.229 números, vindos estes de fontes aleatórias que variavam de área da superfície de rios até tabulações matemáticas. Ao compilar suas observações, Frank Benford notou que estas seguiam a mesma distribuição proposta por Simon Newcomb e a nomeou como "Lei dos números anômalos", porém a distribuição de probabilidade recebeu seu nome, conhecida hoje como Lei de Benford.

Foi em 1995 que esta lei ganhou uma demonstração formal quando o matemático Theodore P. Hill, professor no *Georgia Institute of Technology*, publicou um artigo denominado "*The Signifilcant Digit Phenomenon*", nele o autor demonstrou a fórmula geral para a probabilidade de um determinado dígito ocorrer, denominada por ele de Lei Geral de dígitos significativos:

Para todos os valores inteiros positivos k, todos $d_1 \epsilon \{1,2,\ldots,9\}$ e todo $d_j \epsilon \{1,2,\ldots,9\}$, $j = 2,\ldots,k$,

$$\mathrm{Prob}(D_i = d_i, \ldots D_k = d_k) = \log_{10}\left[1 + \left(\sum_{i=1}^{k} d_i . 10^{k-1}\right)^{-1}\right].$$

Nessa demonstração a lei do primeiro dígito é incluída como um caso especial.

No artigo "*Base-invariance implies Benford's law"*, Hill demonstra que existe uma única medida de probabilidade invariante de base nos reais positivos e essa probabilidade satisfaz a Lei de Benford, mostrando que a lei é uma distribuição de probabilidade invariante de base. Vale destacar que Hill continuou fazendo grandes contribuições para a Lei de Benford e também provou que a união de dados de natureza diferente satisfaz melhor a lei do que os dados isoladamente, o que já tinha sido observado por Frank Benford.

Mark J. Nigrine foi um dos pioneiros na utilização da Lei de Benford em fraudes contábeis, que é uma das principais aplicações desta lei, seu primeiro estudo sobre a possibilidade de utilização para fraudes contábeis foi em 1994 onde levou em consideração a hipótese de que "os indivíduos, seja por hábitos psicológicos ou outras restrições peculiares à situação, inventarão números fraudulentos que não aderirão às frequências esperadas", (Nigrini, 1994.). Nesse estudo, o autor analisou os dados de uma folha de pagamentos fraudada por dez anos e os comparou com a Lei de Benford, percebendo que nos últimos cinco anos o indivíduo acabou usando determinados números com mais constância. Os estudos de Nigrini na utilização da Lei de Benford para detectar fraudes não cessaram, o autor possui diversas publicações sobre o assunto.

2.2 Definição matemática

Um conjunto de números satisfaz a Lei de Benford se o primeiro dígito d $(d \in \{1, 2, \dots, 9\})$ ocorrer com a seguinte probabilidade:

$$P(d) = \ log_{10}(d+1) - \ log_{10}(d) = \ log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right).$$

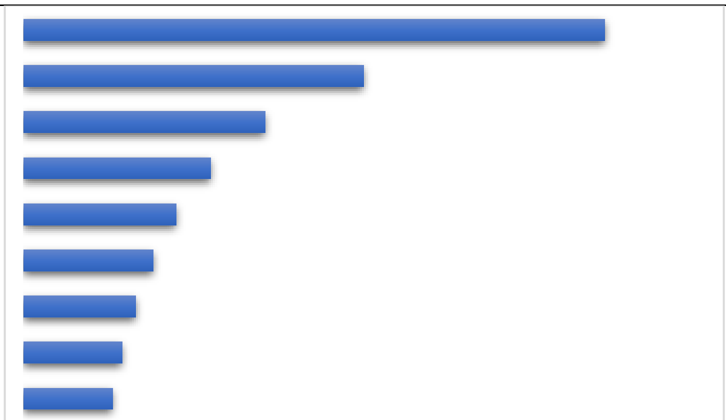
Isto é, a probabilidade de um número ter o primeiro dígito igual a 1, ou seja, $d = 1$ é de:

$$P(1) = \ log_{10}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \ log_{10}2 = 0{,}3010.$$

Calculando todos os valores de d temos a seguinte frequência na Lei de Benford, onde d é o primeiro dígito e $P(d)$ é a probabilidade, disponíveis na Figura 2:

Figura 2 - Frequência P(d), para o primeiro dígito conforme a Lei de Benford

d	$P(d)$	Valor relativo a $P(d)$
1	0,3010	
2	0,1760	
3	0,1250	
4	0,0970	
5	0,0790	
6	0,0670	
7	0,0580	
8	0,0510	
9	0,0460	



Fonte: Elaborado pela autora

Conforme demonstrado por Theodore P. Hill, a Lei de Benford é invariante em relação à base (Hill, 1995), portanto, uma extensão dessa lei contempla a distribuição dos primeiros dígitos em bases diferentes da decimal e, é aplicável a qualquer base $b \geq 2$, a forma geral é:

$$P(d) = log_b(d+1) - log_b(d) = log_b\left(1 + \frac{1}{d}\right).$$

No caso do sistema binário, ou seja, $b = 2$ a lei de Benford é válida, porém trivial, pois todos os números, com exceção do zero iniciam com o dígito 1.

2.3 Uso da Lei de Benford na detecção de fraudes

A principal aplicação da Lei de Benford se dá na utilização para detecção de fraudes, porém para isso utilizam-se mais do que os primeiros dígitos, são utilizados também testes relacionados a outros dígitos, sendo eles:

- Teste do primeiro dígito;
- Teste do segundo dígito;
- Teste dos dois primeiros dígitos (ou teste de primeira ordem);
- Teste da soma.

Os testes citados acima são divididos em dois grupos: testes primários (primeiro dígito, segundo dígito, primeira ordem) e teste avançado (soma) (Nigrini, 2012).

2.3.1 Teste do primeiro dígito

O teste do primeiro dígito é utilizado de forma preliminar para verificar se primeiro dígito do conjunto de dados analisado segue a Lei de Benford. Com ele é possível analisar se o conjunto de dados estudado possui discrepância em relação à distribuição de probabilidade proposta pela Lei de Benford que é dada por:

$$P(D_1 = d_1) = log\left(1 + \frac{1}{d}\right), d_1 = \{1,2,3, \dots, 9\}.$$

Onde, D_1 = primeiro dígito significativo.

Segundo (Nigrini, 2012) o teste é útil com conjunto de dados pequenos, cerca de 300 registros.

2.3.2 Teste do segundo dígito

O teste do segundo dígito também é utilizado de forma preliminar, nele verifica-se os segundos dígitos do conjunto de dados seguem a Lei de Benford; nesse teste é possível perceber se existem dados repetidos e também possíveis arredondamentos. Segundo (Nigrini, 2012) uma quantidade excessiva de números 0 e 5 é normal para conjuntos de dados que possuem preços, por causa de números redondos. A distribuição de probabilidade proposta pela Lei de Benford para o segundo dígito é dada por:

$$P(D_2 = d_2) = \sum_{d_1=1}^{9} log\left(1 + \frac{1}{d_1 d_2}\right), d_2 = \{0,1,2,\ldots,9\}.$$

Onde, D_2 = segundo dígito.

2.3.3 Teste dos dois primeiros dígitos

O teste dos dois primeiros dígitos é um teste mais específico que os anteriores, fornecendo assim, mais informações. De acordo com (Nigrini, 2012) "o teste dos dois primeiros dígitos existe para detectar duplicações anormais de dígitos e possíveis distorções nos dados". Nele são analisados os dois primeiros dígitos de um número, ou seja, os dois números mais à esquerda, por exemplo o número 2.340 tem os dois primeiros dígitos indicados por 23, excluindo do banco de dados os valores menores ou iguais a 10 por não possuírem os dois primeiros dígitos.

Podemos verificar com esse teste possíveis arredondamentos e aproximações, ou seja, números inventados, possibilitando assim observar números que precisam de averiguação. A distribuição de probabilidade proposta neste caso é dada por:

$$P(D_1 D_2 = d_1 d_2) = log\left(1 + \frac{1}{d_1 d_2}\right), d_1 d_2 = \{10, 11, 12, \ldots, 99\}.$$

Onde, $D_1 D_2$ = dois primeiros dígitos.

A Tabela 4 apresenta o teste dos dois primeiros dígitos para os custos unitários do orçamento da Reforma do Maracanã entregue ao Tribunal de Contas da União (TCU), em que: "Dígito" se refere aos dois primeiros dígitos dos valores; "C" são as frequências absolutas com que os dígitos se repetem; "Real" são as frequências relativas com que os dígitos aparecem; "Benford" são as frequências padrão da Lei de Benford.

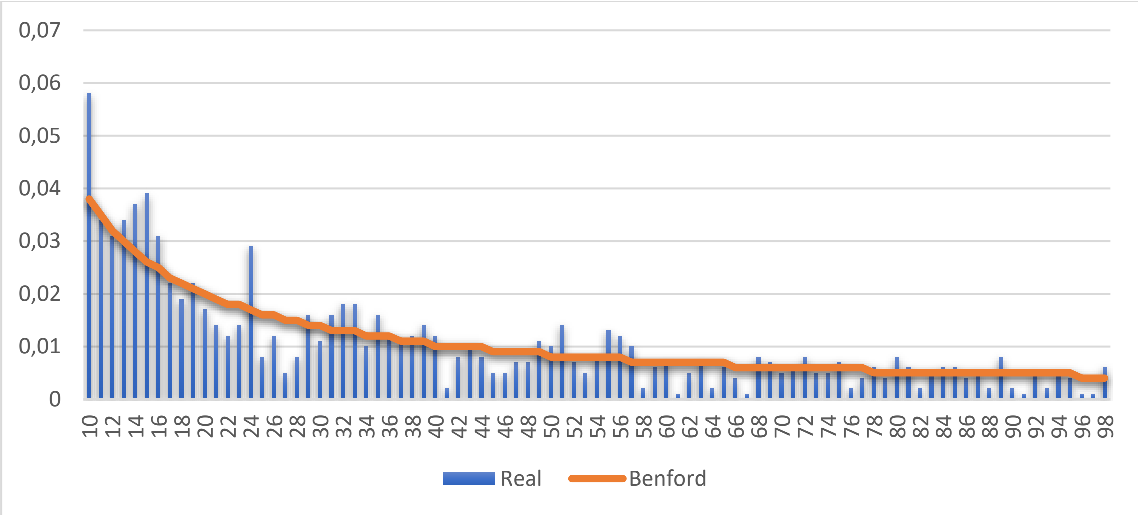
Tabela 4 – Teste dos dois primeiros dígitos para os custos unitários da reforma do Maracanã

Dígito	C	Real	Benford	Dígito	C	Real	Benford
10	43	0,052	0,041	55	7	0,008	0,008
11	48	0,058	0,038	56	11	0,013	0,008
12	28	0,034	0,035	57	10	0,012	0,008
13	26	0,031	0,032	58	8	0,010	0,007
14	28	0,034	0,030	59	2	0,002	0,007
15	31	0,037	0,028	60	5	0,006	0,007
16	32	0,039	0,026	61	6	0,007	0,007
17	26	0,031	0,025	62	1	0,001	0,007
18	18	0,022	0,023	63	4	0,005	0,007
19	16	0,019	0,022	64	6	0,007	0,007
20	18	0,022	0,021	65	2	0,002	0,007
21	14	0,017	0,020	66	5	0,006	0,007
22	12	0,014	0,019	67	3	0,004	0,006
23	10	0,012	0,018	68	1	0,001	0,006
24	12	0,014	0,018	69	7	0,008	0,006
25	24	0,029	0,017	70	6	0,007	0,006
26	7	0,008	0,016	71	4	0,005	0,006
27	10	0,012	0,016	72	5	0,006	0,006
28	4	0,005	0,015	73	7	0,008	0,006
29	7	0,008	0,015	74	4	0,005	0,006
30	13	0,016	0,014	75	4	0,005	0,006
31	9	0,011	0,014	76	6	0,007	0,006
32	13	0,016	0,013	77	2	0,002	0,006
33	15	0,018	0,013	78	3	0,004	0,006
34	15	0,018	0,013	79	5	0,006	0,005
35	8	0,010	0,012	80	3	0,004	0,005
36	13	0,016	0,012	81	7	0,008	0,005
37	10	0,012	0,012	82	5	0,006	0,005
38	9	0,011	0,011	83	2	0,002	0,005
39	10	0,012	0,011	84	4	0,005	0,005
40	12	0,014	0,011	85	5	0,006	0,005
41	10	0,012	0,010	86	5	0,006	0,005
42	2	0,002	0,010	87	3	0,004	0,005
43	7	0,008	0,010	88	4	0,005	0,005
44	8	0,010	0,010	89	2	0,002	0,005
45	7	0,008	0,010	90	7	0,008	0,005
46	4	0,005	0,009	91	2	0,002	0,005
47	4	0,005	0,009	92	1	0,001	0,005
48	6	0,007	0,009	93	4	0,005	0,005
49	6	0,007	0,009	94	2	0,002	0,005
50	9	0,011	0,009	95	4	0,005	0,005

51	8	0,010	0,008	96	3	0,004	0,005
52	12	0,014	0,008	97	1	0,001	0,004
53	6	0,007	0,008	98	1	0,001	0,004
54	4	0,005	0,008	99	5	0,006	0,004

Fonte: Adaptado de CUNHA, Flávia; BUGARIM, Maurício. (2014)

Gráfico 6 - Teste dos dois primeiros dígitos para os custos unitários da reforma do Maracanã em comparação com a Lei de Benford



Fonte: Elaborado pela autora

2.3.4 Teste da soma

Resultante do teorema desenvolvido por Nigrini em sua tese de doutorado (1992) o teste da soma é classificado como um teste avançado. O autor percebeu que a soma dos números pertencentes a cada grupo de primeiros dígitos 10, 11, 12, ..., 99 tendem a apresentar resultados aproximadamente iguais, isto é, $\frac{1}{90} = 0{,}0111$. Porém para conjuntos de dados reais raramente isso acontece com exatidão, segundo o autor esses conjuntos possuem alguns números anormalmente grandes ou duplicações de números de tamanho médio. O objetivo desse teste é identificar números excessivamente grandes em um conjunto de dados, para isso são analisadas discrepâncias muito grandes em relação aos resultados esperados.

A realização do teste da soma consiste em dividir os dados em 90 categorias, associadas aos dois primeiros dígitos 10,11,12, ..., 99 e depois somar os valores correspondentes a cada categoria, o valor encontrado na soma de cada uma delas deve ser dividido pelo valor da soma total do conjunto. Para realizar o teste podem ser utilizadas planilhas eletrônicas como Excel e Access, facilitando um trabalho manual que torna o teste inviável.

A Tabela 5 apresenta o teste da soma para os custos unitários do orçamento da Reforma do Maracanã entregue ao TCU em que: “Dígito” se refere aos dois primeiros dígitos dos valores; “Soma.” são as somas dos valores que iniciam com os dígitos considerados; “Real” são as proporções das somas de cada dígito em relação a soma total de todos os itens; “Benford” são as frequências padrão da Lei de Benford.

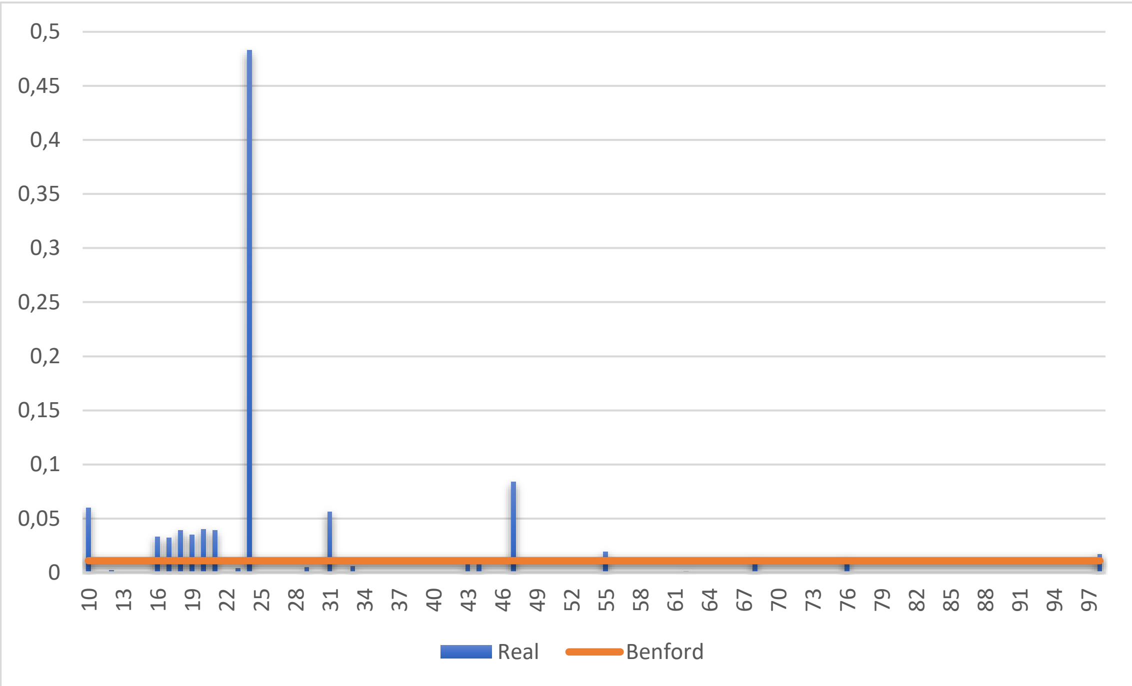
Tabela 5 – Teste da Soma para os custos unitários da reforma do Maracanã

Dígito	Soma	Real	Benford	Dígito	Soma	Real	Benford
10	1.117.783,14	0,002	0,011	55	1.393,43	0,000	0,011
11	35.228.545,85	0,060	0,011	56	11.333.846,10	0,019	0,011
12	9.996,90	0,000	0,011	57	9.859,91	0,000	0,011
13	1.427.480,57	0,002	0,011	58	3.104,83	0,000	0,011
14	149.926,09	0,000	0,011	59	1.184,83	0,000	0,011
15	7.327,10	0,000	0,011	60	7.413,72	0,000	0,011
16	12.400,03	0,000	0,011	61	7.613,46	0,000	0,011
17	19.334.196,90	0,033	0,011	62	626,58	0,000	0,011
18	18.810.868,98	0,032	0,011	63	636.977,00	0,001	0,011
19	22.983.744,00	0,039	0,011	64	2.706,05	0,000	0,011
20	20.216.982,58	0,035	0,011	65	723,09	0,000	0,011
21	23.621.379,30	0,040	0,011	66	8.734,92	0,000	0,011
22	22.910.130,11	0,039	0,011	67	2.028,35	0,000	0,011
23	3.365,19	0,000	0,011	68	68,92	0,000	0,011
24	2.441.496,65	0,004	0,011	69	6.930.295,76	0,012	0,011
25	282.240.352,41	0,483	0,011	70	2.955,46	0,000	0,011
26	3.516,32	0,000	0,011	71	1.568,94	0,000	0,011
27	3.699,11	0,000	0,011	72	2.322,08	0,000	0,011
28	629,84	0,000	0,011	73	4.482,65	0,000	0,011
29	9.100,20	0,000	0,011	74	1.632,72	0,000	0,011
30	3.041.197,41	0,005	0,011	75	3.028,68	0,000	0,011
31	1.124,59	0,000	0,011	76	3.899,28	0,000	0,011
32	32.871.298,35	0,056	0,011	77	7.708.500,52	0,013	0,011
33	40.266,66	0,000	0,011	78	945,72	0,000	0,011
34	3.453.111,19	0,006	0,011	79	3.254,91	0,000	0,011
35	8.277,56	0,000	0,011	80	241,03	0,000	0,011
36	14.275,68	0,000	0,011	81	3.495,51	0,000	0,011
37	5.748,38	0,000	0,011	82	1.892,95	0,000	0,011
38	40.635,97	0,000	0,011	83	919,55	0,000	0,011
39	2.169,59	0,000	0,011	84	3.373,90	0,000	0,011
40	6.314,11	0,000	0,011	85	4.275,98	0,000	0,011

41	85.478,77	0,000	0,011	86	4.330,92	0,000	0,011
42	8.514,19	0,000	0,011	87	1.054,65	0,000	0,011
43	6.138,93	0,000	0,011	88	353,98	0,000	0,011
44	4.472.961,24	0,008	0,011	89	1.789,15	0,000	0,011
45	4.557.697,21	0,008	0,011	90	4.705,38	0,000	0,011
46	605,18	0,000	0,011	91	182,34	0,000	0,011
47	5.356,92	0,000	0,011	92	924,80	0,000	0,011
48	48.849.864,06	0,084	0,011	93	2.895,08	0,000	0,011
49	7.018,04	0,000	0,011	94	1.034,26	0,000	0,011
50	2.718,91	0,000	0,011	95	11.507,03	0,000	0,011
51	1.805,57	0,000	0,011	96	1.154,44	0,000	0,011
52	3.010,93	0,000	0,011	97	976,28	0,000	0,011
53	2.242,23	0,000	0,011	98	98,55	0,000	0,011
54	584.727.527,67	0,000	0,011	99	9.975.775,86	0,017	0,011
SOMA TOTAL				584.727.527,67			

Fonte: Adaptado de CUNHA, Flávia; BUGARIM, Maurício. (2014)

Gráfico 7 - Teste da soma para os custos unitários da reforma do Maracanã em comparação com a Lei de Benford



Fonte: Elaborado pela autora

Conforme observado na Tabela 5 e melhor visualizado através do Gráfico 7, houve picos nos dígitos 11, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 32 e 48. Mas a proporção mais crítica é a encontrada para o dígito 25, que representa 48,3% do total dos custos unitários. Em uma Auditoria certamente os valores apresentados para esse dígito seriam analisados com maior atenção.

2.4 Aplicabilidade da Lei de Benford

A Lei de Benford não é aplicável para todos os conjuntos de dados, existem alguns conjuntos em que a Lei não é aplicável, como exemplo, para números que não ocorrem de forma natural, ou seja, números atribuídos e/ou gerados de maneira eletrônica, como: números de telefone, placas de carro, caixa postal, números de contas bancárias. A lei também não é aplicável a números que tem um intervalo pré-definido, como por exemplo a altura em metros que geralmente inicia com 1 ou 2. Salienta-se aqui que a lei de Benford possui uma limitação para conjuntos de dados pequenos, é necessário que as amostras de dados sejam grandes para melhor se aproximar da distribuição de probabilidade proposta por ela.

No artigo "*The Effective Use of Benford's Law to Assist in Detecting Fraud in Accounting Data* (O uso eficaz da lei de Benford para auxiliar na detecção de fraudes em dados contábeis), Cindy Durtschi, William Hillison e Carl Pacini desenvolveram dois quadros para auxiliar na verificação de dados em que a aplicabilidade da lei é útil ou não.

Quadro 1 - Quando a aplicabilidade da lei de Benford é útil

Caso	Exemplo
Conjunto de números que resultam da combinação matemática de números - resultado vem de duas distribuições	Contas a receber (quantidade vendida * preço) Contas a pagar (quantidade comprada * preço)
Dados de nível de transação - sem necessidade de amostragem	Desembolsos, vendas, despesas
Em grandes conjuntos de dados - quanto mais observações, melhor.	Transações do ano inteiro
Contas que parecem estar em conformidade - quando a média de um conjunto de números é maior do que a mediana e a assimetria é positiva.	A maioria dos conjuntos contábeis.

Fonte: Durtschi, C., Hillison, W. & Pacini, C., 2004.

Quadro 2 - Quando a aplicabilidade da lei de Benford não é útil

Caso	Exemplo
O conjunto de dados é composto por números atribuídos.	Números de cheque, números de fatura, códigos postais
Números influenciados pelo pensamento humano.	Preços estabelecidos em patamares psicológicos ($1,99), retiradas de caixa eletrônico.
Contas com números específicos da empresa.	Uma conta criada especificamente para registrar reembolsos de $100.
Contas com um valor mínimo ou máximo embutido	Conjunto de ativos que deve atender a um limite para ser registrado.
Onde nenhuma transação é registrada.	Furtos, propinas, manipulação de contratos.

Fonte: Durtschi, C., Hillison, W. & Pacini, C., 2004.

A Lei de Benford é uma afirmação empírica sobre conjuntos de dados, diferenciando-se de um típico teorema matemático. Sua aplicação é observada em alguns conjuntos de dados, mas não em todos, e mesmo quando aplicável, permanece apenas uma aproximação, jamais alcançando a exatidão.

3. MARCOS LEGAIS PARA A IMPLANTAÇÃO DE ITINERÁRIOS FORMATIVOS NO ENSINO MÉDIO

Nesse capitulo será realizado um estudo sobre os marcos legais para a implantação dos itinerários formativos no Ensino Médio e também sobre a implementação dos mesmos no estado de Mato Grosso do Sul.

As mudanças do Novo Ensino Médio, tem por objetivo a formação integral do estudante para que ao final dessa etapa de ensino eles sejam capazes de atuar na sociedade com autonomia e responsabilidade. Assim, as primeiras mudanças se deram em 2017 pela a Lei nº 13.415/2017 que alterou a Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação básica (LDB), onde define:

> "O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
> I – linguagens e suas tecnologias;
> II – matemática e suas tecnologias;
> III – ciências da natureza e suas tecnologias;
> IV – ciências humanas e sociais aplicadas;
> V – formação técnica e profissional;" (BRASIL, 1996, Art.36)

A partir daí iniciaram as discussões para as alterações necessárias nos currículos e implantação na Base Comum Curricular na etapa do Ensino Médio (BNCC-EM), através da resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018 as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio (DCN-EM) são alteradas, definindo assim, em seu Art. 6º, o que são itinerários formativos e unidades curriculares:

> III - itinerários formativos: cada conjunto de unidades curriculares ofertadas pelas instituições e redes de ensino que possibilitam ao estudante aprofundar seus conhecimentos e se preparar para o prosseguimento de estudos ou para o mundo do trabalho de forma a contribuir para a construção de soluções de problemas específicos da sociedade;
>
> IV - unidades curriculares: elementos com carga horária pré-definida, formadas pelo conjunto de estratégias, cujo objetivo é desenvolver competências específicas, podendo ser organizadas em áreas de conhecimento, disciplinas, módulos, projetos, entre outras formas de oferta; (BRASIL, 2018a)

No mesmo ano, através da resolução nº 4, de 17 de dezembro de 2018 a BNCC-EM foi instituída e os estados iniciaram os estudos para a alteração de seus currículos com o objetivo de adaptar a parte comum a BNCC-EM e organização dos itinerários formativos por áreas de conhecimento de acordo com os critérios estabelecidos pelo sistema de ensino, como estabelecido na LDB em seu Art. 36, § 1º.

> A organização das áreas de que trata o caput e das respectivas competências e habilidades será feita de acordo com critérios estabelecidos em cada sistema de ensino. (BRASIL, 1996, Art. 36)

A construção dos itinerários formativos pelos sistemas de ensino é orientada pelo Ministério da Educação (MEC) através da portaria nº 1.432, de 28 de dezembro de 2018 que estabelece os referenciais para elaboração dos itinerários formativos conforme preveem as DCN-EM.

O estado de Mato Grosso do Sul publica em 2021 seu currículo de referência para o Novo Ensino Médio, nele estão dispostas as habilidades e objetos de conhecimento a serem trabalhados na formação geral básica e também as orientações para as escolhas das unidades curriculares em cada unidade escolar, disponíveis no Catálogo de Unidades Curriculares de Mato Grosso do Sul.

Diante disso, no Mato Grosso do Sul, os itinerários formativos estão divididos em “Parte comum do Itinerário Formativo” e “Parte Flexível dos Itinerários Formativos”. A parte comum dos itinerários formativos foi adaptada de acordo com a jornada escolar, ou seja, Ensino Médio em tempo parcial e Ensino Médio em tempo integral. No ensino médio de tempo parcial a parte comum é composta por duas Unidades Curriculares: Projeto de Vida e Intervenção Comunitária. Já o ensino médio em tempo integral por apresentar uma jornada escolar maior apresenta além de Projeto de Vida e Intervenção Comunitária as seguintes unidades curriculares: Ciências Integradas e Novas Tecnologias; Empreendedorismo Social; Língua Espanhola; Linguagens e Interartes; Matemática Criativa. Vale destacar, que a partir de 2022 a unidade curricular Intervenção Comunitária foi adaptada devido o agravamento do déficit educacional provocado pela pandemia da COVID-19, dessa maneira, nessa unidade curricular os estudantes desenvolveram atividades voltadas ao Plano de Recomposição da Aprendizagem em Mato Grosso do Sul (PRA-MS), que tem como foco “reaver aprendizagens não ou parcialmente consolidadas pelos estudantes, a partir do fortalecimento das habilidades essenciais...” (MATO GROSSO DO SUL, 2023).

Por outro lado, a parte flexível está dividida em dois percursos formativos: Percurso Formativo Propedêutico e Percurso Formativo Profissional. O Percurso

Formativo Propedêutico organiza-se em quatro unidades curriculares de aprofundamento nas áreas de conhecimento e uma unidade eletiva. O Percurso Formativo Profissional está organizado em três unidades curriculares.

Por meio dessas divisões, os itinerários permitem ao estudante fazer escolhas que irão compor seu currículo para aprofundar seus conhecimentos, ou para se preparar para o mundo do trabalho.

Nesse contexto, o Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul, apresenta também o layout de uma unidade curricular, disponível no (ANEXO – A), com o objetivo de auxiliar no processo de planejamento como descrito a seguir:

> “O layout das unidades curriculares foi construído e organizado em um processo de inteligência coletiva da equipe responsável, de modo a priorizar a visualização e acesso às informações necessárias para que o professor consiga planejar as ações pedagógicas que promoverão as temáticas abordadas, possibilitando ainda adequações conforme o público ou a realidade da sua escola. Assim, cada item do layout foi elaborado de forma intencional.” (Secretaria de Estado de Educação MS, 2021, pag.114)

A unidade curricular proposta no próximo capitulo está dentro da parte flexível do itinerário formativo, integrando-se ao percurso formativo propedêutico. Para a concepção da Unidade Curricular será utilizado o layout elaborado pelo Currículo de Referência para o Novo Ensino Médio de Mato Grosso do Sul, e a mesma irá compor a Área de Matemática e suas Tecnologias, permeando o Eixo Estruturante Investigação Cientifica, com objetivos definidos pelo currículo:

> “Investigação Científica - os estudantes podem participar da realização de uma pesquisa científica, compreendida como procedimento privilegiado e integrador de áreas e componentes curriculares. O processo pressupõe a identificação de uma dúvida, questão ou problema; o levantamento, formulação e teste de hipóteses; a seleção de informações e de fontes confiáveis; a interpretação, elaboração e uso ético das informações coletadas; a identificação de como utilizar os conhecimentos gerados para solucionar problemas diversos e a comunicação de conclusões com a utilização de diferentes linguagens” (Secretaria de Estado de Educação MS, 2021, pag.104)

Para a área de conhecimento Matemática e suas tecnologias a BNCC-EM destaca a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das habilidades desenvolvidas no ensino fundamental e para isso estabelece cinco competências específicas que devem ser desenvolvidas nessa etapa de ensino, a unidade curricular proposta tem o foco na consolidação da terceira habilidade:

> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das

> soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018c, pág. 531)

Sendo assim, a unidade curricular proposta, possui relação com outras unidades curriculares com foco na consolidação da terceira competência e são apresentadas no Catálogo de Unidades Curriculares de Mato Grosso do Sul – Matemática e suas tecnologias (2022), são elas: Um olhar social aos dados estatísticos; Sorte ou Matemática?

Isso acontece para que os professores tenham um suporte extra durante o semestre ou até mesmo consigam aprofundar o trabalho desenvolvido através de unidades curriculares que permeiam o mesmo conteúdo.

4. PROPOSTA DE UNIDADE CURRICULAR

Neste capítulo será apresentada a proposta de uma unidade curricular abordando a Lei de Benford, a mesma segue a estrutura, definições e elementos de uma unidade curricular que compõe o itinerário formativo propedêutico disponível no Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul para o Novo Ensino Médio (MATO GROSSO DO SUL, 2021, pg. 114).

4.1 Apresentação da Unidade Curricular

Área de Conhecimento: Matemática e suas Tecnologias

Nome da Unidade Curricular: Lei de Benford: Exploração e Aplicações

Carga horária: Semestral - semanal (02 aulas) carga horária total (40 aulas)

Descrição: Esta unidade curricular tem como proposta o estudo da Lei de Benford, através da coleta e análise de dados a ser realizada pelos estudantes, possibilitando assim que os mesmos aprendam o conteúdo de forma mais prática.

Como sugestão inicial é proposto aos estudantes que realizem o estudo de dados menores, como os da população do estado de Mato Grosso do Sul, e depois os estudantes são levados a aumentar seu banco de dados. Esse processo faz com que os mesmos entendam como funciona a Lei de Benford.

Em um segundo momento é sugerido aos estudantes o estudo da aplicação da Lei de Benford para a detecção de fraudes, tornando o estudo do conteúdo mais significativo e fazendo com que percebam que a matemática pode ser aplicada à situações do cotidiano.

Ao final da unidade curricular, os estudantes podem apresentar à comunidade escolar as pesquisas realizadas por eles durante o semestre.

Competências:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Eixos estruturantes relacionados: Investigação Científica:

Componentes curriculares e conhecimentos gerais articulados: Matemática e suas Tecnologias

Objetivos:

- Proporcionar a compreensão dos estudantes acerca dos conceitos da Lei de Benford e sua utilização em situações do mundo real.
- Subsidiar os estudantes nas pesquisas, estudos, desenvolvimento de habilidades, intensificando a partir da presença pedagógica para elaboração de gráficos e/ou *banner*, tabelas, dentre outros, sobre a distribuição de probabilidade do primeiro dígito de números de um conjunto de dados.

Relação com outras unidades:

- Um olhar social aos dados estatísticos,
- Sorte ou Matemática? (MATO GROSSO SO SUL, 2022)

Perfil docente:

Possuir licenciatura em Matemática.

Ter desenvolvido e/ou desenvolver atividades de pesquisa e estudos no campo de conhecimento correspondente à unidade curricular, tornando-a mais contextualizada e integrada aos outros componentes.

Desenvolver habilidades em metodologias de aprendizagem e tecnologias, que estabeleçam a dinâmica do trabalho em grupo, do incentivo à pesquisa, à autonomia e ao protagonismo, relacionados às competências socioemocionais dos estudantes.

Recursos:

Calculadoras, planilhas eletrônicas ou outras ferramentas que simplifiquem os cálculos de proporções, produção de relações, gráficos e planilhas.

Dispositivos eletrônicos com acesso à internet e à edição de texto, lousa digital e projetor.

Acervo impresso ou digital de material de pesquisa.

4.2 Organizador curricular

Habilidades por Eixo Estruturante:

Eixo Estruturante: Investigação Científica:

1) habilidades dos itinerários formativos, associadas às competências gerais da BNCC;

(MS.EMIFCG01) Identificar, selecionar, processar e analisar dados, fatos e evidências com curiosidade, atenção, criticidade e ética, inclusive utilizando o apoio de tecnologias digitais.

(MS.EMIFCG02) Posicionar-se com base em critérios científicos, éticos e estéticos, utilizando dados, fatos e evidências para respaldar conclusões, opiniões e argumentos, por meio de afirmações claras, ordenadas, coerentes e compreensíveis, sempre respeitando valores universais, como liberdade, democracia, justiça social, pluralidade, solidariedade e sustentabilidade.

(MS.EMIFCG03) Utilizar informações, conhecimentos e ideias resultantes de investigações científicas para criar ou propor soluções para problemas diversos

2) habilidades específicas dos itinerários formativos, associadas aos eixos estruturantes;

(MS.EMIFMAT01) Investigar e analisar situações-problema, identificando e selecionando conhecimentos matemáticos relevantes para uma dada situação, elaborando modelos para sua representação.

(MS.EMIFMAT03) Selecionar e sistematizar, com base em estudos e/ou pesquisas (bibliográfica, exploratória, de campo, experimental etc.) em fontes confiáveis, informações sobre a contribuição da Matemática na explicação de fenômenos de natureza científica, social, profissional, cultural, de processos tecnológicos, identificando os diversos pontos de vista e posicionando-se mediante argumentação, com o cuidado de citar as fontes dos recursos utilizados na pesquisa e buscando apresentar conclusões com o uso de diferentes mídias.

3) habilidades da BNCC;

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(MS.EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

(MS.EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(MS.EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que interrelacionem estatística, geometria e álgebra.

(MS.EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

(MS.EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise

Objetos de conhecimento:

Estatística: pesquisa e organização de dados, interpretação de gráficos, medidas de tendência central e medidas de dispersão;

Porcentagens: cálculo de índices, taxas e coeficientes;

Noções de probabilidade básica: espaço amostral, evento aleatório (equiprovável);

Cálculo e contagem de possibilidades;

Amostragem;

Gráficos e diagramas estatísticos: histogramas, polígonos de frequências.

Sugestões didáticas associadas aos eixos estruturantes:

Primeiro Momento: A aula será iniciada através das seguintes perguntas norteadoras:

1. Qual a probabilidade de números de celular em que o primeiro dígito do sufixo (últimos quatro números) é igual a 1?
2. Qual a probabilidade de números de casa em que o primeiro dígito é 1?

Através das discussões em sala de aula, espera-se que os estudantes cheguem ao resultado de que, para o primeiro dígito do sufixo, a probabilidade seja 10%, e para o número da casa, a probabilidade seja 11,11% (pois o 0 não pode ser considerado primeiro dígito do número de uma casa). Essa suposição se dá ao fato de que os estudantes ainda não conhecem a Lei de Benford, tornando esse questionamento um ponto de partida.

A próxima etapa envolve a análise do comportamento desses dados, levando em consideração que a população em questão consiste em todos os estudantes da sala de aula. O professor irá orientar os estudantes sobre a coleta de dados, na qual eles registrarão o primeiro dígito tanto dos números do sufixo dos números de celular quanto dos números da casa.

Uma sugestão para facilitar essa coleta de dados é o uso do seguinte quadro (Quadro 3):

Quadro 3: Modelo de quadro para coleta de dados do primeiro dígito do sufixo dos números de celular e primeiro dígito do número da casa.

Nome do Estudante	Sufixo do celular	Número da casa
Estudante 1		
Estudante 2		
...		
Estudante N		

Fonte: Elaborado pela autora

Nesse quadro, os estudantes podem inserir o sufixo dos números de celular e os números da casa, cada linha representa um estudante diferente e isso permitirá que os mesmos registrem e analisem os dados de forma organizada.

Após coletar os sufixos dos celulares e os números das casas dos estudantes, os dados podem ser transcritos na lousa e os estudantes podem ser orientados a calcular a distribuição de probabilidade dos primeiros dígitos em ambos os conjuntos de dados.

Em uma turma de estudantes pequena, é provável que não consiga atingir a quantidade de dados necessários para a observação dos dados, uma sugestão para solucionar esse problema é pedir para que os estudantes realizem entrevistas com estudantes e professores de outras turmas, fazendo assim com que o número de elementos em seu banco de dados fique maior, possibilitando uma observação da Lei de Benford mais notória.

Posteriormente ao cálculo da distribuição de probabilidade, os estudantes observam que os primeiros dígitos dos números de telefone seguem uma distribuição uniforme. No entanto, é interessante notar que é mais comum que os endereços comecem com dígitos menores. Nesse ponto, o professor pode conduzir uma análise dos resultados encontrados pelos estudantes e promover uma discussão em sala de aula sobre os padrões e as razões por trás dessas descobertas.

Para uma melhor visão de como funcionaria a análise desses dados em sala de aula, foram coletados dados de uma turma pequena, com 14 estudantes e também dados de uma turma um pouco maior, com 25 estudantes. É importante destacar, que o número de dados referentes ao número da casa dos estudantes será menor que o número de dados referente ao sufixo dos celulares, pois alguns moram em fazenda e não apresentam número da casa. Vamos denominar turma 1, a turma que possuir 14 estudantes e turma 2 a que apresenta 25 estudantes.

Nos quadros a seguir, teremos a coleta de dados da turma 1 (Quadro 4), que apresentou dois estudantes sem o número da casa e posteriormente da turma 2 (Quadro 5), que apresentou 5 estudantes sem o número da casa.

Quadro 4 – Resultado da coleta de dados referente ao sufixo do celular e número da casa da turma 1.

Turma 1							
Sufixo do celular				Número da casa			
1444	4113	1835	8999	26	839	1302	1618
7509	0904	8236	8180	843	36	1896	400
4745	2868	6838	3090	227	686	56	2439
1259	2095						

Fonte: Elaborado pela autora

Quadro 5 – Resultado da coleta de dados referente ao sufixo do celular e número da casa da turma 2.

Turma 2							
Sufixo do celular				Número da casa			
6154	0413	9203	6652	2773	198	1804	401
7324	3028	4598	3037	490	1302	665	782
1104	2832	2982	5386	344	203	1934	1844
2337	0412	0938	0457	804	68	2274	471
3870	9673	4019	4400	1367	531	282	594
8581	5754	3514	1223				
203							

Fonte: Elaborado pela autora

Nas Tabelas 6 e 7, foram realizadas análise da frequência do primeiro dígito para o sufixo dos celulares e número das casas das turmas 1 e 2.

Tabela 6 - Frequência do primeiro dígito para o sufixo dos celulares e número das casas na turma 1

1º dígito	Frequência do 1º dígito no sufixo dos celulares	Proporção	Frequência do 1º dígito no número das casas	Proporção
1	3	21,4%	3	25%
2	2	14,4%	3	25%
3	1	7,1%	1	8,3%
4	2	14,4%	1	8,3%
5	0	0%	1	8,3%
6	1	7,1%	1	8,3%
7	1	7,1%	0	0%
8	3	21,4	2	16,7%
9	1	7,1%	0	0%

Fonte: Elaborado pela autora

Ao realizar a análise da frequência do primeiro dígito do número das casas na turma 1, é possível perceber que os dígitos 1 e 2 apresentam uma frequência maior, porém no restante a porcentagem é mais uniforme. Em relação a frequência do primeiro dígito do sufixo dos celulares a porcentagem é mais uniforme.

Tabela 7: Frequência do primeiro dígito para o sufixo dos celulares e número das casas na turma 2

1º dígito	Frequência do 1º dígito no sufixo dos celulares	Proporção	Frequência do 1º dígito no número das casas	Proporção
1	2	8 %	6	30%
2	4	16 %	4	20%
3	4	16%	1	5%
4	5	20%	3	15%
5	2	8%	2	10%
6	3	12%	2	10%
7	1	4%	1	5%
8	1	4%	1	5%
9	3	12%	0	0%

Fonte: Elaborado pela autora

Por outro lado, na análise da frequência do primeiro dígito da turma 2, em relação ao número das casas é possível perceber que a frequência se aproxima da esperada pela Lei de Benford, sendo maior nos primeiros dígitos e menor nos últimos, apresentando uma irregularidade no dígito 4.

Nesse contexto a Lei de Benford pode ser apresentada aos estudantes, justificando a diferença do comportamento dos dados. É interessante explanar a história da Lei de Benford e também algumas aplicações. O professor pode solicitar aos estudantes que construam um gráfico onde se esboce os resultados encontrados na distribuição de probabilidade de forma mais visual. É importante destacar que quanto mais elementos houver no banco de dados, mais próxima será a representação da Lei de Benford, uma sugestão é incluir os dados de outra turma, tornado assim a representação mais precisa.

Para exemplificar o que acontece quando se aumentam os elementos do banco de dados, foram coletados dados de mais duas turmas, uma com 19 estudantes e outra com 28 estudantes, dentre esses três moradores de fazenda que não possuem número da casa. Os dados serão expressos a seguir (Quadro 6).

Quadro 6 – Resultado da coleta de dados referente ao sufixo do celular e número da casa das turmas 3 e 4

Turmas 3 e 4							
Sufixo do celular				Número da casa			
1864	7725	7462	9867	1165	260	430	448
4116	0878	6905	6473	505	195	346	477
5976	8751	7442	7408	440	626	353	462
0555	8022	9683	7063	2174	762	170	322
8588	1272	9964	4547	260	55	2033	1363
8372	8731	5850	5826	488	761	1533	984
5925	4631	0191	3488	1867	449	1918	2561
6122	1141	7553	3387	1876	81	136	1582
8319	2664	2835	2733	823	368	788	1352
3932	5710	2642	4869	312	120	584	1644
3815	7768	5120	1731	832	340	2796	70
1797	3821	9667					

Fonte: Elaborado pela autora

Os dados das turmas 3 e 4 foram unidos com os dados das turmas 1 e 2 e realizada a análise da frequência do primeiro dígito das quatro turmas, demonstrado na tabela a seguir.

Tabela 8 - Frequência do primeiro dígito para o sufixo dos celulares e número das casas nas turmas 1, 2, 3 e 4

1º dígito	Frequência do 1º dígito no sufixo dos celulares	Proporção	Frequência do 1º dígito no número das casas	Proporção
1	10	11,6%	22	29%
2	10	11,6%	13	17,1%
3	10	11,6%	8	10,5%
4	11	12,8%	11	14,5%
5	9	10,5%	6	7,9%
6	8	9,3%	4	5,2%
7	9	10,5%	5	6,6%
8	11	12,8%	6	7,9%
9	8	9,3%	1	1,3%

Fonte: Elaborado pela autora

Com um banco de dados maior fica nítido como a frequência do primeiro dígito no caso do sufixo do celular apresenta bastante regularidade, enquanto a frequência do primeiro dígito no caso dos números das casas está bem próxima à proposta pela Lei de Benford, apresentando uma curva.

Sendo assim se faz necessária uma familiarização dos estudantes com a Lei de Benford, para isso o professor pode propor a eles que realizem a análise do primeiro dígito de sequências numéricas conhecidas que satisfaçam a Lei de Benford, como a sequência de Fibonacci e a sequência 2^n, com $n \geq 0$ já realizada pelo autor no primeiro capítulo.

Dando continuidade ao estudo dos conjuntos de dados que seguem a distribuição de probabilidade proposta pela Lei de Benford, os estudantes serão orientados a gerar de maneira aleatória vinte números, para isso poderá ser utilizado o Excel aplicando a fórmula =ALEATÓRIO() em vinte células e um número aleatório maior ou igual a 0 e menor que 1 será gerado em cada célula, pressionando F9 um novo número aleatório é gerado. Os números também podem ser gerados utilizando uma calculadora científica clicando no botão Ran#. Após isso solicita-se que os estudantes registrem em um quadro, com duas linhas e dez colunas, os três primeiros dígitos significativos dos números gerados.

Quadro 7 – Números gerados aleatoriamente utilizando o botão Ran# da calculadora cientifica

803	270	644	629	523	929	765	967	424	275
681	437	165	690	645	599	978	275	274	728

Fonte: Elaborado pela autora

Em seguida, solicita-se que os estudantes registrem em um novo quadro a frequência do primeiro dígito dos números gerados e também sua porcentagem, para isso o professor pode entregar aos estudantes, de forma impressa, uma tabela em branco, como mostrado no exemplo preenchido a seguir:

Tabela 9 - Frequência do 1º dígito nos 20 números gerados de forma aleatória

1º Dígito	Frequência do 1º dígito	Proporção
1	1	5%
2	4	20%
3	0	0%
4	2	10%
5	2	10%
6	5	25%
7	2	10%
8	1	5%

9	3	15%

Fonte: Elaborado pela autora

Posteriormente o professor deve orientar os estudantes a multiplicar cada um dos números gerados aleatoriamente da primeira linha por cada um dos números da segunda linha. Assim serão gerados 100 novos números através da multiplicação, esses números devem ser observados e ter registrados seu primeiro dígito, como no exemplo a seguir (Quadro 8):

Quadro 8 – Resultado da multiplicação dos elementos da primeira linha com os elementos da segunda linha do Quadro 7

x	803	270	644	629	523	929	765	967	424	275
681	5	1	4	4	3	6	5	6	2	1
437	3	1	2	2	2	4	3	4	1	1
165	1	4	1	1	8	1	1	1	6	4
690	5	1	4	4	3	6	5	6	2	1
645	5	1	4	4	3	5	4	6	2	1
599	4	1	3	3	3	5	4	5	2	1
978	7	2	6	6	5	9	7	9	4	2
275	2	7	1	1	1	2	2	2	1	7
274	2	7	1	1	1	2	2	2	1	7
728	5	1	4	4	3	6	5	7	3	2

Fonte: Elaborado pela autora

Na sequência os estudantes devem registrar novamente a frequência do primeiro dígito dos números gerados através das multiplicações e também suas porcentagens.

Tabela 10 - Frequência do 1º dígito nos 100 números gerados pela multiplicação

1º Dígito	Frequência do 1º dígito	Proporção
1	26	26%
2	18	18%
3	10	10%
4	16	16%
5	11	11%
6	9	9%
7	7	7%
8	1	1%
9	2	2%

Fonte: Elaborado pela autora

Após realizados os registros o professor deverá solicitar aos estudantes que analisem seus registros e verifiquem o que aconteceu com as distribuições de probabilidade. Os estudantes deverão perceber que os dados gerados de maneira aleatória seguem uma distribuição de probabilidade uniforme, já os dados gerados através do produto cartesiano entre as linhas 1 e 2 seguem uma distribuição de probabilidade semelhante a Lei de Benford. Nesse momento o professor pode levantar o seguinte questionamento aos estudantes: “Por que se espera que alguns conjuntos de dados seguem a distribuição de probabilidade proposta pela Lei de Benford? E o mesmo não acontece com outros conjuntos de dados?”.

Nesse momento o professor pode comentar com os estudantes sobre como conjuntos de dados gerados por números atribuídos e números influenciados pelo pensamento humano não satisfazem a distribuição de probabilidade proposta pela Lei de Benford.

Para enriquecer a atividade o professor pode solicitar que os resultados individuais dos estudantes sejam anexados em uma única análise de toda a turma, tornando assim o banco de dados maior e fazendo com que os resultados se aproximem ainda mais da distribuição de probabilidade proposta pela Lei de Benford e que intuitivamente os estudantes já consigam perceber que quanto maior o banco de dados mais próximo da Lei de Benford estarão os resultados.

Segundo Momento: Assistir ao episódio “Dígitos” (46m) da série documental “A Era dos Dados”, disponível na Netflix. A série é apresentada pelo jornalista científico Latif Nasser, no episódio o apresentador explica de uma forma muito didática a Lei de Benford, através de várias entrevistas com pesquisadores da área e apresentando algumas situações do nosso cotidiano em que a lei é utilizada, dentre os exemplos apresentados no episódio temos: sonegação fiscal, notas musicais, dados esportivos, fenômenos naturais, imagens fakes, contas de redes sociais fakes, fraude em eleições.

Uma sugestão de conteúdo para contribuir no estudo da Lei de Benford é o texto “A curiosa, mas não sobrenatural, Lei de Benford” (disponível em: https://www.blogs.unicamp.br/zero/2497/) , que é uma publicação no projeto Blogs de Ciências da Unicamp), o texto pode ser entregue impresso aos estudantes ou os mesmos podem acessar o blog.

Depois dos estudantes assistirem o episódio e lerem o texto o professor pode levantar os seguintes questionamentos:

- Para você, o que é a Lei de Benford?
- Quais situações da nossa vida satisfazem a lei de Benford?
- Das situações apresentadas na série e no texto, qual você achou mais curiosa? E qual você acha que interfere diretamente na sua vida?
- Vocês conseguem citar uma outra situação além das que apareceram no episódio que satisfazem a Lei de Benford?

Os questionamentos sugeridos acima tem como objetivo despertar a curiosidade sobre conjuntos de dados em que a Lei de Benford pode ser aplicada e também situações da vida cotidiana em que ela pode auxiliar na resolução.

O episódio apresenta vários exemplos de situações que seguem a Lei de Benford, uma situação que pode ser explorada nesse momento é a análise do número de seguidores das redes sociais dos estudantes. Solicite que os estudantes verifiquem em todos os perfis que os seguem a quantidade de seguidores que eles possuem e façam os registros das mesmas e depois analisem o primeiro dígito e construam um gráfico, os estudantes podem apresentar seus resultados através de gráficos aos colegas de turma, nesse momento é importante a orientação do professor sobre as diversas maneiras gráficas de apresentação dos resultados. Ao final das apresentações o professor pode reunir todos os resultados dos estudantes e verificar o que acontece.

Para ilustrar a atividade proposta, foi coletado no dia 11/06/24, dos perfis que seguem o Instagram @tenazfit a quantidade de seguidores que eles possuem e analisado a frequência do primeiro dígito. Na data da coleta de dados o perfil possuía 411 seguidores. Os resultados da análise serão apresentados na tabela e gráfico a seguir:

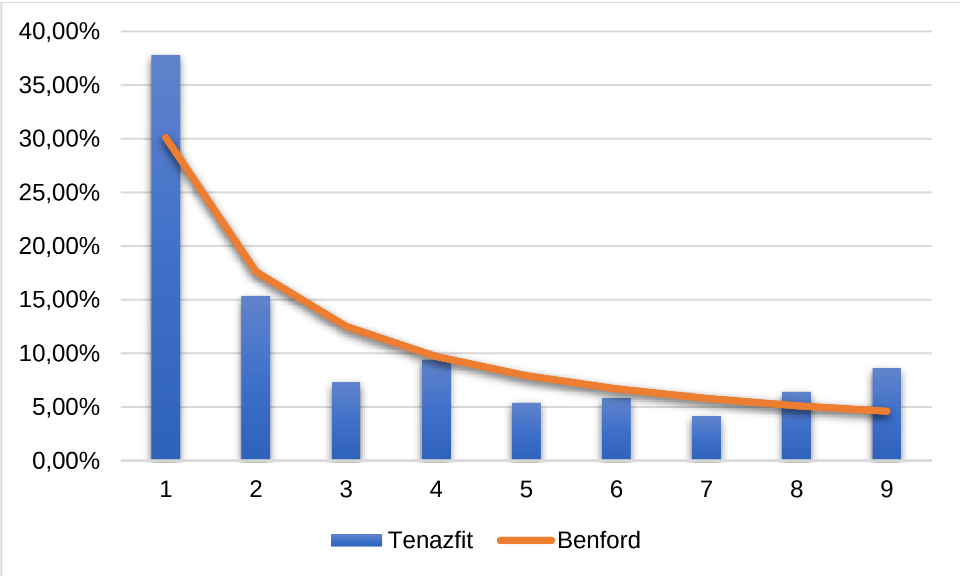
Tabela 11 - Frequência do primeiro dígito dos seguidores do perfil do Instagram @tenazfit

1º Dígito	Frequência do 1º dígito	Proporção	Benford
1	156	37,8%	30,1%
2	63	15,3%	17,6%
3	30	7,3%	12,5%

4	39	9,4%	9,7%
5	22	5,4%	7,9%
6	24	5,8%	6,7%
7	17	4,1%	5,8%
8	27	6,4%	5,1%
9	36	8,6%	4,6%

Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 8 - Frequência do primeiro dígito dos seguidores do perfil do Instagram @tenazfit



Fonte: Elaborado pela autora

Através dessa coleta de dados é possível perceber que nos dígitos menores foi apresentado uma frequência maior, aproximando-se do esperado pela Lei de Benford, ocorrendo irregularidades nos dígitos 3 e 9.

Ao final dessas atividades é esperado que os estudantes consigam perceber as situações cotidianas onde a Lei de Benford pode ser observada e também idealizar os tipos de conjuntos numéricos modelados por ela.

Terceiro Momento: Uma maneira eficaz de aprender a Lei de Benford consiste no experimento de banco de dados e analisando o comportamento desses, para isso é necessário que o professor dialogue com os estudantes sobre quais conjuntos de dados seguem a Lei de Benford e realizar testes com os conjuntos sugeridos, o professor deve aproveitar esse momento para dialogar com os estudantes sobre as fontes onde esses dados poderão ser coletados, concluindo que a fonte mais segura para coletar de dados é o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) , que fornece dados como: população, desemprego, inflação, entre outros, que podem ser analisados pelos estudantes.

Os estudantes podem começar essa etapa da aprendizagem analisando conjuntos de dados menores e verificando o que acontece, uma proposta para iniciar a análise do comportamento de dados consiste no estudo de dados do estado do Mato Grosso do Sul, como sugestão pode ser realizada a análise da frequência do primeiro dígito no número de habitantes dos 79 munícipios do Mato Grosso do Sul, com apoio do site do IBGE (disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/sintese/ms?indicadores=96385) , solicite que os estudantes registrem em uma tabela a frequência do primeiro dígito nos 79 munícipios do Mato Grosso do Sul e depois calculem a porcentagem da frequência de cada dígito, como na tabela 12.

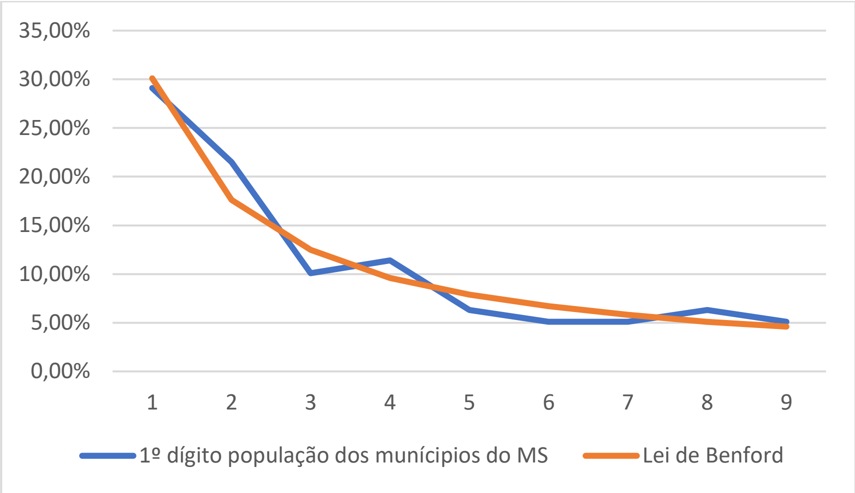
Tabela 12 - Frequência do primeiro dígito na população dos 79 munícipios do Mato Grosso do Sul.

1º dígito	Frequência do 1º dígito	Porcentagem
1	23	29,10%
2	17	21,50%
3	8	10,10%
4	9	11,40%
5	5	6,30%
6	4	5,10%
7	4	5,10%
8	5	6,30%
9	4	5,10%

Fonte: Elaborada pela autora.

Após a elaboração da tabela o professor solicita aos estudantes que realizem a comparação das porcentagens com a Lei de Benford, para que a análise se torne mais visual para os estudantes a elaboração de um gráfico é de extrema importância, o gráfico pode ser construído pelo professor e exibido em um projetor ou pelos próprios estudantes, como mostrado no Gráfico 9.

Gráfico 9 - Comparação da frequência do primeiro dígito na população dos 79 munícipios do Mato Grosso do Sul com a Lei de Benford.



Fonte: Elaborado pela autora

Para iniciar um diálogo com os estudantes o professor pode utilizar as seguintes perguntas norteadoras:

- As porcentagens encontradas ficaram iguais as da Lei de Benford?
- Por que isso aconteceu?

Após os questionamentos espera-se que os estudantes consigam entender que as porcentagens ficaram próximas às da Lei de Benford, porém como o conjunto de dados era pequeno houve uma divergência com a mesma. Nesse momento o professor pode argumentar com os estudantes sobre quais estratégias poderiam ser tomadas para melhorar essa análise de dados e torná-la mais próxima da Lei de Benford, para isso o conjunto de dados analisado precisa ser maior, é importante que nesse momento o professor discuta com os estudantes sobre como a análise pode ser feita, a fim de que os mesmos pensem em uma solução para a dificuldade encontrada na análise dos dados.

Uma das soluções pode incluir na coleta de dados um estado vizinho ou mesmo todos os munícipios do centro-oeste. Como sugestão para realizar essa coleta de dados da região centro-oeste tem-se dividir os estudantes em dois grupos, um realiza a análise do estado do Mato Grosso que possui 141 municípios e outro de Goiás com 246 municípios, após a coleta de dados são incluídas as do Mato Grosso do Sul e Distrito Federal que contém apenas o município de Brasília, que conta com 2.817.068

habitantes, sendo assim, a região centro-oeste totaliza 467 municípios. Como sugestão podem ser utilizadas as Tabelas 13 e 14.

Tabela 13 - Frequência do primeiro dígito na população dos 246 munícipios de Goiás

1º Dígito	Frequência do 1º Dígito
1	58
2	53
3	47
4	30
5	11
6	9
7	17
8	12
9	9

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 14: Frequência do primeiro dígito na população dos 141 munícipios de Mato Grosso

1º Dígito	Frequência do 1º Dígito
1	42
2	27
3	19
4	13
5	11
6	8
7	9
8	9
9	3

Fonte: Elaborada pela autora

Se achar necessário o professor pode fazer a comparação das porcentagens de cada estado com a Lei de Benford e analisar junto aos estudantes, para depois juntar todos os estados.

Tabela 15 - Frequência do primeiro dígito na população dos munícipios da região Centro-Oeste

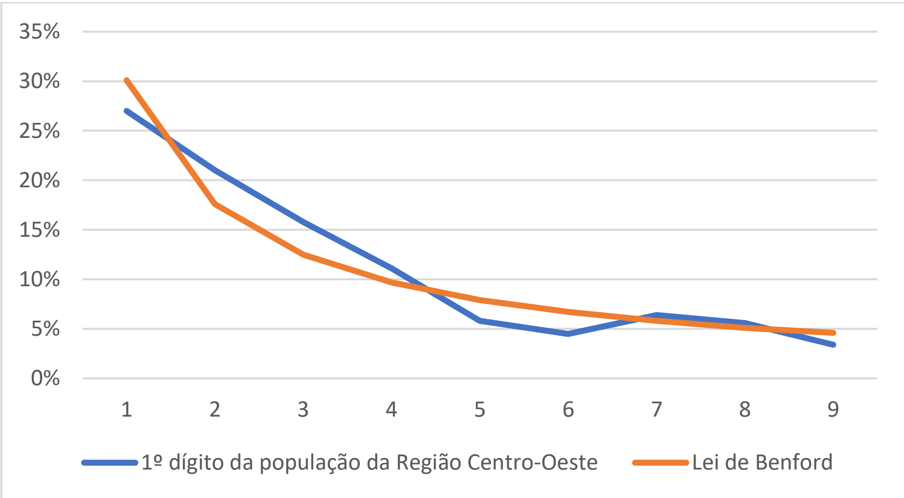
1º dígito	Frequência do 1º Dígito	Porcentagem	Lei de Benford
1	123	27%	30,10%
2	98	21%	17,60%
3	74	15,80%	12,50%
4	52	11,10%	9,70%
5	27	5,80%	7,90%
6	21	4,50%	6,70%
7	30	6,40%	5,80%

8	26	5,60%	5,10%
9	16	3,40%	4,60%

Fonte: Elaborado pela autora

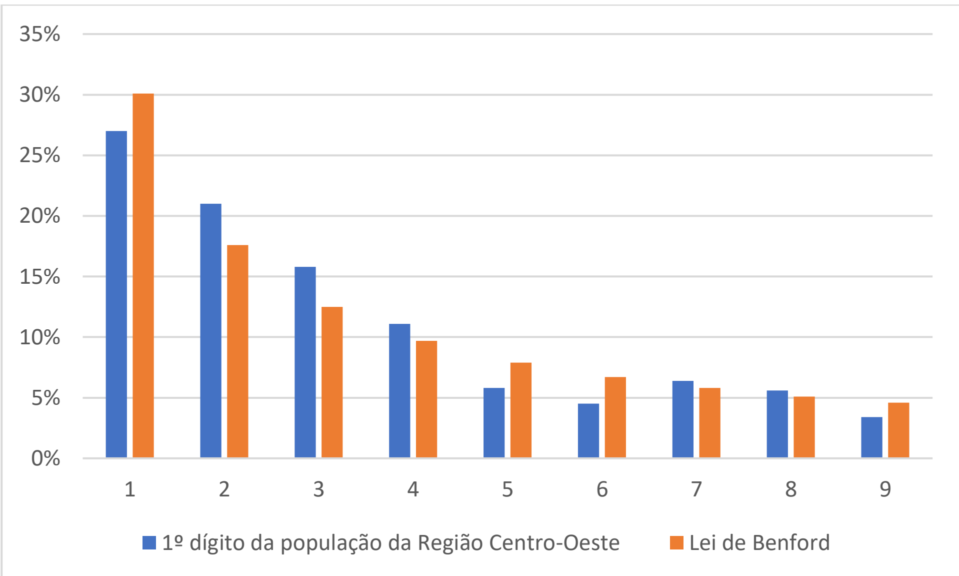
Após os dados da região Centro-Oeste terem sido coletados, o professor solicita aos estudantes que construam um gráfico para realizar a comparação com a Lei de Benford, nesse momento o professor pode dialogar com os estudantes sobre qual gráfico melhor interpretaria os dados coletados por eles, é esperado que os estudantes concluam que os gráficos que melhor interpretam os dados são o gráfico de linhas e gráfico de colunas agrupado, como mostrado nos Gráficos 10 e 11 a seguir.

Gráfico 10 - Frequência do primeiro dígito na população dos munícipios da região Centro-Oeste/ Gráfico de Linhas



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 11 - Frequência do primeiro dígito na população dos munícipios da região Centro-Oeste/ Gráfico de Colunas agrupado



Fonte: Elaborado pela autora

Quarto momento: Com a finalidade de que os estudantes entendam como funciona a aplicação da Lei de Benford na detecção de fraudes o professor deverá propor uma atividade com os estudantes para que os mesmos percebam o que acontece com um determinado conjunto de dados quando eles são "fabricados" e não produzidos a partir de situações verdadeiras.

Com a intenção de que os estudantes entendam como a utilização da Lei de Benford para a detecção de fraudes funciona o professor pode propor aos mesmos que analisem três conjuntos de dados contendo cinquenta números cada, declarando serem transações comerciais mensais de uma empresa, e pedir para que eles comparem os conjuntos de dados e determinem se esses dados foram fabricados ou não. Como sugestão o professor pode utilizar os seguintes conjuntos de dados fictícios, representados nos Quadros 12, 13 e 14.

Quadro 12 – Conjunto de dados fictício 1/ janeiro de 2024

Transações comerciais referentes a janeiro de 2024				
R$ 1.778,00	R$ 3.651,11	R$ 971,07	R$ 28.022,04	R$ 102.972,25
R$ 26.827,46	R$ 24.750,00	R$ 4.518,98	R$ 91.799,81	R$ 1.436,22
R$ 842,96	R$ 5.147,63	R$ 6.428,56	R$ 314.873,19	R$ 2.598,54
R$ 1.128,99	R$ 380,70	R$ 2001,07	R$ 1009,37	R$ 3.400,85
R$ 4.177,84	R$ 200.065,74	R$ 8.812,44	R$ 446,00	R$ 37.182,22
R$ 779,27	R$ 167,40	R$ 172.527,31	R$ 3.546,74	R$ 7.302,96
R$ 2448,00	R$ 130,15	R$ 39.644,92	R$ 18.654,91	R$ 94,86
R$ 3.347,56	R$ 15.900,00	R$ 251.209,93	R$ 23.054,12	R$ 235,50
R$ 136.176,10	R$ 28.689,00	R$ 350,24	R$ 3.370,00	R$ 6500,00
R$ 3028,34	R$ 2.169,20	R$ 7.198,83	R$ 4.158,66	R$ 83.060,83

Fonte: Elaborado pela autora

Quadro 13 – Conjunto de dados fictício 2/ fevereiro de 2024

Transações comerciais referentes a fevereiro de 2024				
R$ 22.456,15	R$ 4.175,13	R$ 971,55	R$ 147,00	R$ 4.000,00
R$ 3.605,87	R$ 90.684,12	R$ 83,50	R$ 274,99	R$ 4.800,60
R$ 40.520,00	R$ 350.699,99	R$ 3.370,00	R$ 93,50	R$ 4.680,00

R$ 425,69	R$ 450.009,98	R$ 354,55	R$ 750,69	R$ 9.147,20
R$ 15.900,00	R$ 697,00	R$ 421,15	R$ 8.951,74	R$ 8.914,58
R$ 9.587,41	R$ 48.634,12	R$ 650,87	R$ 68.605,47	R$2.655,84
R$ 785,97	R$ 28.689,00	R$ 726,00	R$ 4.225,25	R$ 6500,00
R$ 392,21	R$ 5.125,55	R$ 499,99	R$ 442,00	R$ 974,52
R$ 52.674,61	R$ 411,13	R$ 88.863,00	R$ 956.500,00	R$ 70.600,00
R$ 41,50	R$ 74,70	R$ 11.034,52	R$ 85.362,00	R$ 4.405.44

Fonte: Elaborado pela autora

Quadro 14 – Conjunto de dados fictício 3/ março de 2024

Transações comerciais referentes a março de 2024				
R$ 152.63,88	R$ 125,80	R$ 3.370,00	R$ 1.215,08	R$ 980,03
R$ 1.312,10	R$ 366,80	R$ 287,51	R$ 2.690,00	R$ 203,77
R$ 235,15	R$ 2.237,00	R$ 192,30	R$ 27,50	R$ 45,50
R$ 15.900,00	R$ 458,73	R$ 83,74	R$ 6500,00	R$ 53,20
R$ 963,00	R$ 18.729,45	R$ 26.652,00	R$ 11.034,52	R$ 2.644,85
R$ 40.158,00	R$ 154,80	R$ 100,30	R$ 369,07	R$ 10.658,65
R$ 2.009,00	R$ 5.350,00	R$ 52.987,50	R$ 28,50	R$ 850,00
R$ 5.814,36	R$ 7.854,69	R$ 190,36	R$ 6.725,00	R$ 36,99
R$ 586,00	R$ 10.520,00	R$ 4.096,00	R$ 42.153,87	R$ 22,87
R$ 4.999,99	R$ 15,50	R$ 26.450,00	R$ 23.841.80	R$ 3.700,50

Fonte: Elaborado pela autora

Na sequência, solicitar aos estudantes que realizem a análise do primeiro dígito para cada um dos três conjuntos de dados, como mostrado nas Tabelas 16, 17 e 18.

Tabela 16 – Análise do primeiro dígito para o conjunto de dados fictício 1

1º Dígito	Frequência do 1º dígito	Proporção
1	11	22%
2	12	24%
3	11	22%
4	4	8%
5	1	2%
6	2	4%
7	3	6%
8	3	6%
9	3	6%

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 17 – Análise do primeiro dígito para o conjunto de dados fictício 2

1º Dígito	Frequência do 1º dígito	Proporção
1	3	6%
2	4	8%
3	5	10%
4	15	30%
5	2	4%
6	4	8%
7	5	10%
8	5	10%
9	7	6%

Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 18 – Análise do primeiro dígito para o conjunto de dados fictício 3

1º Dígito	Frequência do 1º dígito	Proporção
1	14	28%
2	13	26%
3	5	10%
4	6	12%
5	5	10%
6	2	4%
7	1	2%
8	2	4%
9	2	4%

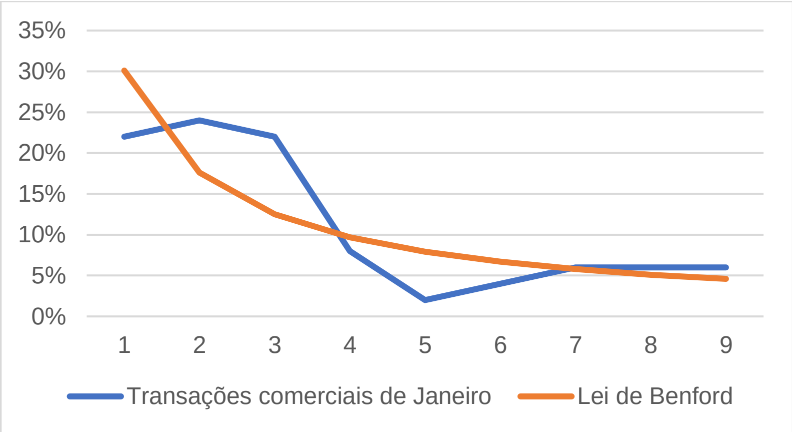
Fonte: Elaborado pela autora

Após a análise dos três conjuntos de dados o professor pode levantar o seguinte questionamento: "Existe algum indicativo de que algum dos conjuntos de dados referentes as transações comerciais da empresa apresentem indícios de fraude?".

É esperado que os estudantes consigam identificar que as transações comerciais referentes ao mês de fevereiro possuem indícios de fraude, pois possuem uma distribuição de probabilidade bem divergente da Lei de Benford, espera-se também que os estudantes consigam identificar através dos estudos anteriores que os conjuntos de dados não seguirão exatamente a Lei de Benford e sim terão uma aproximação com a Lei.

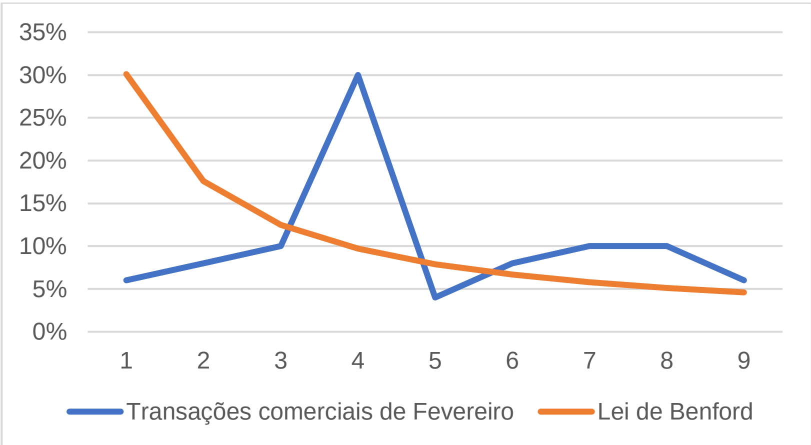
Os estudantes precisam entender que por mais que nos períodos de janeiro e março as distribuições de probabilidade não sigam exatamente a Lei de Benford, elas possuem a característica de que os dígitos menores começam com uma probabilidade maior e vai diminuindo nos dígitos maiores. Caso os estudantes não consigam fazer essas deduções apenas analisando as tabelas o professor pode solicitar para que eles construam um gráfico de linha de cada conjunto de dados e compará-los com a Lei de Benford, como mostrado nos Gráficos 12, 13 e 14 exemplificados a seguir:

Gráfico 12 - Comparação do conjunto de dados fictício 1 com a Lei de Benford



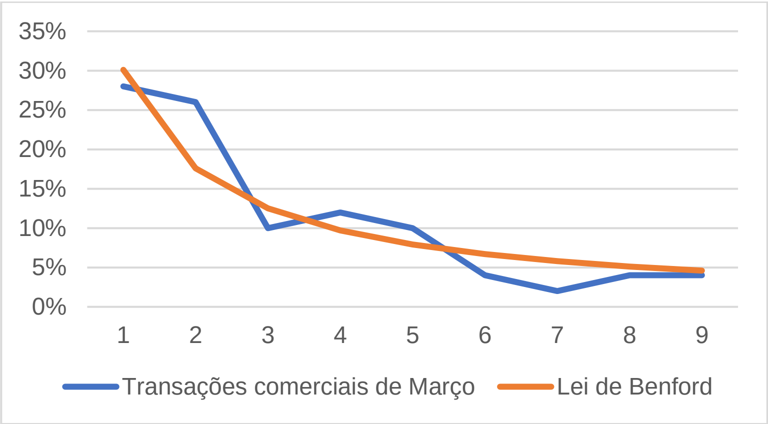
Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 13 - Comparação do conjunto de dados fictício 2 com a Lei de Benford



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 14 Comparação do conjunto de dados fictício 3 com a Lei de Benford



Fonte: Elaborado pela autora

Ao comparar os gráficos é possível perceber que o conjunto de dados referente às transações financeiras de fevereiro possuem uma grande discrepância com a Lei de Benford, já o conjunto de dados referente ao mês de janeiro possui uma divergência em alguns dígitos e o conjunto de dados referente ao mês de março é o que mais se aproxima da distribuição de probabilidade proposta pela Lei de Benford. Ressalta-se que os conjuntos de dados analisados são pequenos (possuindo apenas cinquenta termos) e a distribuição apenas se aproximará da proposta pela lei.

Nesse momento o professor consegue dialogar com os estudantes sobre como a Lei de Benford é utilizada para identificar fraudes contábeis, enfatizando que a mesma é um instrumento preliminar para identificar se o conjunto de dados possui discrepância e assim direcionar a pessoa que está analisando para possíveis irregularidades. É interessante nesse momento pontuar que a partir da análise do primeiro dígito de conjuntos de dados são realizados outros testes, como teste do segundo dígito, teste dos dois primeiros dígitos, teste da soma, entre outros. Há a possibilidade de o professor solicitar aos estudantes que realizem uma pesquisa sobre os outros testes para a detecção de fraudes contábeis que derivam da Lei de Benford.

Quinto momento: Nessa etapa do estudo os estudantes já estão preparados para a realização de análise de detecção de fraudes em conjuntos de dados reais e também utilização de outros testes, como o teste do segundo dígito.

Para essa análise sugere-se a proposta de preços fornecida pela empresa GTARQUITETOS na licitação de contratação de empresa de engenharia para a realização de reforma na estrutura física do almoxarifado do TCE/MS a fim de instalar um laboratório de solos para a fiscalização de obras e serviços de engenharia em pavimentação rodoviária, na forma tomada de preços, em 2022, disponível no link (https://www.tce.ms.gov.br/transparencia/licitacoes).

Quadro 8 - Proposta de preços fornecida pela empresa GTARQUITETOS

Item	Descrição	Quantidade	Valor Unit.	Total
1	Alvenaria de vedação de blocos cerâmicos.	113,52 m^2	92,40	10.489,24
2	Chapisco aplicado em alvenaria	227,04 m^2	8,83	2.004,76
3	Emboço ou massa única em argamassa.	227,04 m^3	59,77	13.570,18
4	Revestimento cerâmico para paredes internas	14,5 m^2	77,54	1.124,33
5	Massa única, para recebimento de pintura	227,04 m^2	35,35	8.025,86
6	Bancada de granito cinza andorinha	18,9 m^2	761,75	14.397,07
7	Piso em granilite	5,2 m^2	121,52	631,90
8	Aplicação de fundo selador	227,04 m^2	2,54	576,68
9	Aplicação de lixamento de massa látex	227,04 m^2	17,05	3.871,03
10	Aplicação manual de pintura	302,56 m^2	14,33	4.335,68
11	Kit de porta de madeira	2	1.126,71	2.253,42
12	Peitoril linear em granito	2,4 m	143,88	345,31
13	Soleira em granito	10,12 m	115,31	1.166,93
14	Instalação de vidro temperado	1,21 m^2	528,00	638,88
15	Escavação manual de vala	4,98 m^2	82,89	412,79
16	Reaterro manual	4,98 m^2	50,26	250,29
17	Caixa sifonada	2	80,78	161,56
18	Serviço de instalação de tubo	25	80,14	2.003,50
19	Caixa enterrada hidráulica: 0,6x0,6x0,6	1	562,66	562,66
20	Caixa enterrada hidráulica: 0,4x0,4x0,4	3	288,77	866,31
21	Curva curta 90°	1	41,15	41,15
22	Tubo PVC 40mm	6 m	22,10	132,60
23	Tubo PVC 50mm	6 m	15,99	95,94

24	Joelho 45° 50mm	4	8,84	35,36
25	Joelho 45° 40mm	6	7,82	46,92
26	Tampa de ferro 30x30	3	180,52	541,56
27	Tampa de ferro quadrada 60x60	1	1272,07	1271,07
28	Rasgos em alvenaria	12,1 m	6,91	83,61
29	Enchimento de rasgos	12,1 m	4,98	60,25
30	Tubo PVC soldável	12,1 m	24,47	298,08
31	Registro de gaveta	4	62,22	248,88
32	Instalação de tubos PVC	15 m	47,28	709,20
33	Joelho 90°	10	13,26	132,60
34	Cuba de embutir oval	1	136,21	136,21
35	Cuba de embutir de aço	1	333,18	333,18
36	Sifão do tipo flexível	2	12,55	25,10
37	Válvula em metal cromado	2	102,10	216,2077
38	Vaso Sanitário	1	592,29	592,29
39	Assento sanitário	1	45,88	48,88
40	Torneira cromada para tanque	1	77,97	77,97
41	Torneira cromada de mesa	2	112,70	225,40
42	Demolição de piso de granilite	4,32 m^2	29,33	126,70
43	Locação de caçamba	5	243,77	1218,85
44	Estaca broca de concreto	13,5 m	84,13	1135,75
45	Escavação manual de vala	1,12 m^2	300,25	236,28
46	Armação de bloco 5mm	23,9 kg	20,07	479,67
47	Armação de bloco 8mm	45 kg	17,34	780,30
48	Execução de estruturas de concreto armado.	0,51 m^2	3419,13	1743,75
49	Adensamento e acabamento de concreto em estruturas	3,05 m^3	284,99	569,22
50	Armação aço CA-50	46,8 kg	17,03	797,00
51	Concreto FCK=20MPA	2,54 m^3	438,42	1.113,58
52	Limpeza final da obra	214,51 m^2	3,50	750,78
53	Chuveiro químico	1	3.364,10	3.364,10
54	Mobilização de materiais	1	3.216,86	3.216,86
55	Locação de Container	2 meses	809,34	1618,68
56	Coifa de aço inox com filtro	1	1901,86	1.901,86
57	Instalação de vidro temperado	2,78 m^2	528,00	1.467,84
58	Exaustor	1	171,88	171,88
59	Mestre de obras	2 meses	6.569,17	13.138,34
60	Engenheiro civil	20h.	131,75	2.635,00
61	Instalação de eletrocalha	42m.	39,51	1.659,42
62	Junção para eletrocalha	14	24,11	337,54
63	Suporte horizontal para eletrocalha	28	12,61	353,08

64	Eletroduto de aço	60m.	31,29	1.877,40
65	Curva 90° para eletroduto	20	20,55	411,00
66	Luva de emenda para eletroduto	40	12,95	518,00
67	Luva sem rosca	40	5,70	228,00
68	Conduíte de alumínio	40	44,76	1.790,40
69	Tomada para uso geral 10A	20	38,34	766,80
70	Tomada para uso geral 20A	20	40,12	802,40
71	Tomada embutir 32A	4	57,83	232,32
72	Abraçadeira metálica	52	5,46	283,92
73	Quadro de distribuição de energia	1	1.296,58	1.296,58
74	Disjuntor monopolar	9	12,52	112,68
75	Disjuntor bipolar	10	64,39	643,90
76	Disjuntor termomagnético	2	535,69	1.071,38
77	Dispositivo de proteção contra surto de tensão	4	80,37	321,48
78	Cabo de cobre flexível isolado 2,5mm	1100m	4,03	4.433,00
79	Cabo de cobre flexível isolado 4mm	1200m	6,47	7.764,00
80	Luminária de sobrepor	15	384,65	5.769,75
81	Interruptor simples (2 módulos)	1	41,91	41,91
82	Interruptor simples (1 módulos)	2	26,48	52,96

Fonte: Adaptação do orçamento da empresa GTARQUITETOS, para a reforma na estrutura física do almoxarifado do TCE/MS

Para esse orçamento o professor deve solicitar que os estudantes realizem a análise do primeiro dígito para o valor unitário e também para o valor total e depois comparem os resultados, como na tabela 19.

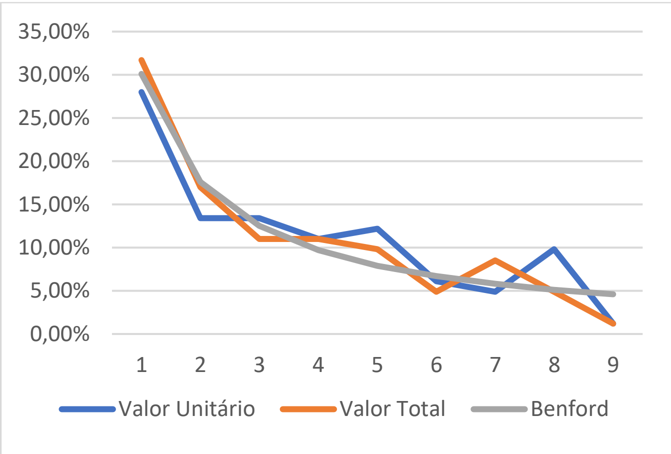
Tabela 19 - Frequência do primeiro dígito para os valores unitários e totais do orçamento para a reforma na estrutura física do almoxarifado do TCE/MS

1º Dígito	f_A Valo Unitário	f_r Valor Unitário	f_A Valor Total	f_r Valor Total	Benford
1	23	28,0%	26	31,7%	30,1%
2	11	13,4%	14	17,0%	17,6%
3	11	13,4%	9	11,0%	12,5%
4	9	11,0%	9	11,0%	9,7%
5	10	12,2%	8	9,8%	7,9%
6	5	6,1%	4	4,9%	6,7%
7	4	4,9%	7	8,5%	5,8%
8	8	9,8%	4	4,9%	5,1%
9	1	1,2%	1	1,2%	4,6%

Fonte: Elaborado pela autora

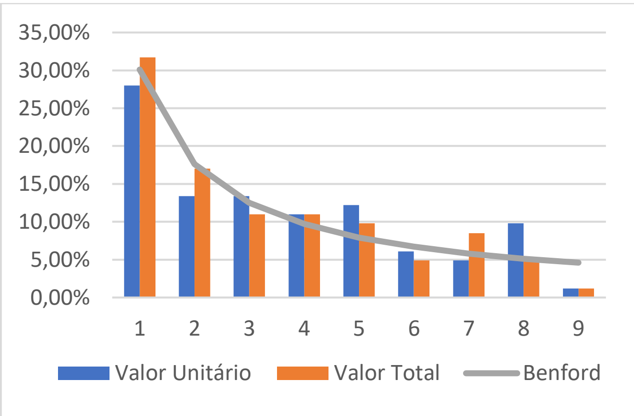
Para melhor visualização dos dados e posterior comparação o professor deve solicitar aos estudantes que construam um gráfico com a frequência relativa do primeiro dígito para os valores unitários e totais do orçamento e também a frequência esperada pela Lei de Benford, como sugestão os estudantes podem construir o gráfico de duas maneiras, utilizando linhas para os três valores (Gráfico 15) ou utilizando colunas para os valores do orçamento e linha para a lei de Benford (Gráfico 16). Caso o professor verifique que a turma ainda não está preparada para realizar a análise dos valores unitários e total em conjunto, orienta-se que os estudantes realizem a tabela e o gráfico de forma separada.

Gráfico 15 - Frequência do primeiro dígito para os valores unitários e totais do orçamento para a reforma na estrutura física do almoxarifado do TCE/MS (linhas)



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 16 - Frequência do primeiro dígito para os valores unitários e totais do orçamento para a reforma na estrutura física do almoxarifado do TCE/MS (colunas e linha)



Fonte: Elaborado pela autora

Após a realização das análises o professor pode levantar os seguintes questionamentos aos estudantes:

1. Analisando a frequência relativa do orçamento para o valor unitário, existe algum dígito que apresentou discrepância com a lei de Benford?
2. Analisando a frequência relativa do orçamento para o valor total, existe algum dígito que apresentou discrepância com a lei de Benford?
3. Em relação aos orçamentos dos valores unitários e total, qual mais se aproximou da distribuição de probabilidade proposta pela dei de Benford? Por que isso acontece?".

Para o primeiro questionamento, espera-se que os estudantes consigam identificar os dígitos 2,5 e 8, e para o segundo questionamento espera-se que o dígito 7 seja observado. Já para o terceiro questionamento os estudantes devem identificar que o orçamento total se aproxima melhor da distribuição de probabilidade proposta pela Lei de Benford, pois é o orçamento que será utilizado, o outro corresponde a uma consulta de valor unitariamente.

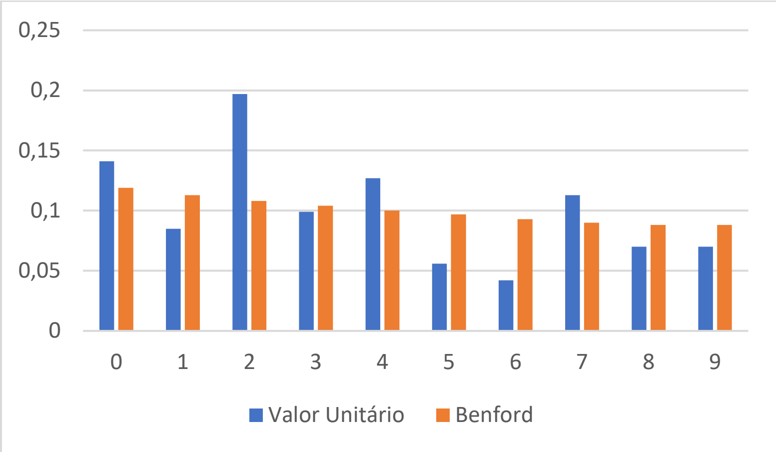
Nessa fase, é esperado que os estudantes estejam preparados para realizar a análise do segundo dígito, aprofundando assim, seu estudo sobre a Lei de Benford em fraudes contábeis. Para isso os estudantes analisarão o orçamento do valor unitário e valor total de forma separada, pois para o valor unitário serão analisados apenas 71 itens, pois os valores menores foram excluídos por não apresentarem segundo dígito, como mostrado na Tabela 20 a seguir:

Tabela 20 - Teste do segundo dígito para os valores unitários da planilha de orçamento para a reforma na estrutura física do almoxarifado do TCE/MS

Dígito	Frequência Absoluta (f_A)	Frequência Relativa (f_r)	Benford
0	10	0,141	0.119
1	6	0,085	0.113
2	14	0,197	0.108
3	7	0,099	0.104
4	9	0,127	0.100
5	4	0,056	0.097
6	3	0,042	0.093
7	8	0,113	0.090
8	5	0,070	0.088
9	5	0,070	0.088

Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 17 - Teste do segundo dígito para os valores unitários da planilha de orçamento para a reforma na estrutura física do almoxarifado do TCE/MS



Fonte: Elaborado pela autora

Após a realização do teste do segundo dígito para os valores unitários da planilha orçamentária, os estudantes devem perceber que o dígito 2 apresentou discrepância com a Lei de Benford, tendo uma atenção maior nos itens dessa categoria em uma auditoria.

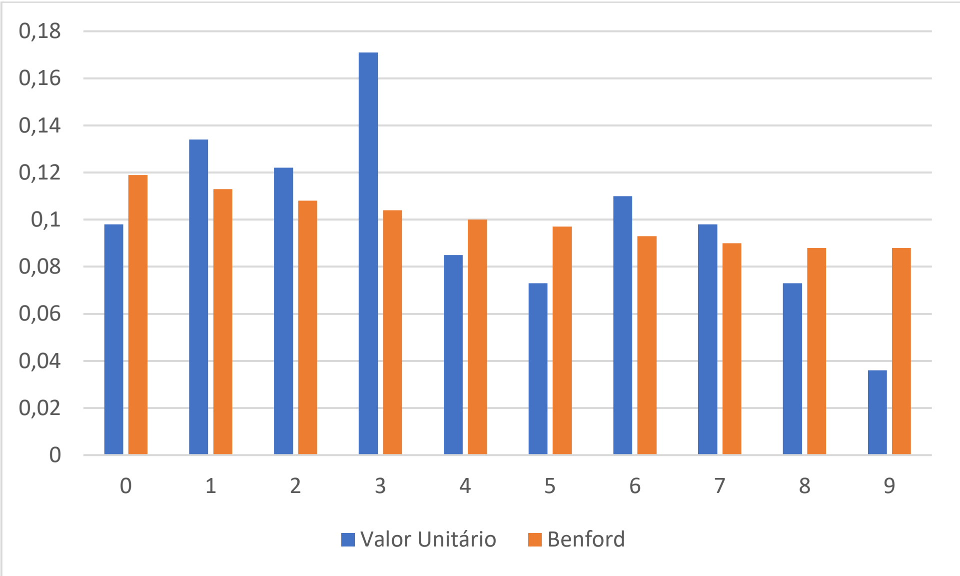
Agora os estudantes devem realizar o teste do segundo dígito para os valores totais da planilha orçamentária, para esse teste serão utilizados os 82 itens da planilha, como demostrado na Tabela 21:

Tabela 21 - Teste do segundo dígito para os valores totais da planilha de orçamento para a reforma na estrutura física do almoxarifado do TCE/MS

Dígito	Frequência Absoluta (f_A)	Frequência Relativa (f_r)	Benford
0	8	0,098	0.119
1	11	0,134	0.113
2	10	0,122	0.108
3	14	0,171	0.104
4	7	0,085	0.100
5	6	0,073	0.097
6	9	0,110	0.093
7	8	0,098	0.090
8	6	0,073	0.088
9	3	0,036	0.088

Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 18 - Teste do segundo dígito para os valores totais da planilha de orçamento para a reforma na estrutura física do almoxarifado do TCE/MS



Fonte: Elaborado pela autora

Após a realização do teste do segundo dígito para os valores totais da planilha orçamentária, os estudantes devem perceber que os dígitos 3 e 9 apresentaram discrepância com a Lei de Benford, tendo uma atenção maior nos itens dessa categoria em uma auditoria.

Diante do estudo sobre a lei de Benford até aqui, os estudantes possuem o aprendizado necessário para realizar análises de dados selecionados por eles, de fontes reais como, por exemplo a prestação de contas de partidos políticos, orçamentos de obras públicas disponíveis no portal da transparência.

REFERÊNCIAS

A ERA DOS DADOS, EP. 4: DÍGITOS. Direção: Arianna Lapenne. Produção: Zero Point Zero Production Inc. Reino Unido: Netflix , 2020. Disponível em: https://www.netflix.com/watch/81084953?trackId=14170287. (46 min.)

BONJORO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática e suas tecnologias: Estatística, Combinatória e Probabilidade**. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 20 de dez. de 1996; 175º da Independência e 108º da República. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 30 de março de 2024.

BRASIL. Ministério da Educação, Conselho Nacional de Educação, Câmara de Educação Básica. **Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018**. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Diário Oficial da União. 21 de novembro de 2018a.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. **Resolução n. 4, de 17 de dezembro de 2018**. Institui a Base Nacional Comum Curricular na Etapa do Ensino Médio (BNCC-EM). Brasília: MEC, 2018b

BRASIL. Ministério da Educação**, Base Nacional Comum Curricular**. Terceira versão complementada e revisada. Brasília: MEC, 2018c. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf, Acesso em: 30 de março de 2024.

BRASIL. **Portaria nº 1.432, de 28 de dezembro de 2018.** Estabelece os referenciais para elaboração dos itinerários formativos conforme preveem as Diretrizes Nacionais do Ensino Médio. Diário Oficial da União nº 66, 05.04.2019, Seção 1, p.94

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática e suas tecnologias: Estatística, Probabilidade e matemática financeira.** 1. ed. São Paulo: Editora SM, 2020.

CUNHA, Flávia; BUGARIM, Maurício. Lei de Benford e Auditoria de Obras Públicas: uma análise de sobrepreço na reforma do Maracanã. **Revista do Tribunal de Contas**

da União. Brasil, n. 131, p. 46 - 53, setembro/dezembro 2014. Disponível em: https://revista.tcu.gov.br/ojs/index.php/RTCU/issue/view/11. Acesso em: 12 de março de 2024.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA Fernando. **Matemática em Contexto: Estatística e Matemática Financeira**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

DURTSCHI, C., HILLISON, W. & Pacini, C., 2004. **The Effective Use of Benford's Law toAssist in Detecting Fraud in Accounting**. *Journal of Forensic Accounting,* pp. 17-34.

GELMAN, Andrew; NOLAN, Deborah. **Teaching Statistics:** A Bag of Tricks. 2. ed. USA: Oxford University Press, 4 de julho de 2017. 384 p.

HAZZAN, Samuel Fundamentos de matemática elementar, 5: **combinatória, probabilidade**.8. ed. — São Paulo: Atual, 2013.

HILL,Theodore. **A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law.** Statist. Sci. 10 (4) 354 - 363, November, 1995.

HILL, Theodore P. “Base-invariance implies Benford’s law.” Proceedings of the American Mathematical Society 123.3 (1995): 887-895.

MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Estado de Educação. **Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul: Ensino Médio e Novo Ensino Médio**. Organizadores: Helio Queiroz Daher; Davi de Oliveira Santos; Marcia Proescholdt Wilhelms. Campo Grande - MS: SED, 2021. (Série Currículo de Referência; 2).

MATO GROSSO SO SUL. Secretaria de Estado de Educação. **Catálogo de Unidades Curriculares – Itinerários Formativos – Matemática.** Organizadores: Helio Queiroz Daher; Davi de Oliveira Santos; Marcia Proescholdt Wilhelms. Campo Grande – MS. SED, 2022.

MATO GROSSO DO SUL. Secretária de Estado da Educação. **Plano de Recomposição: PRA-MS 2023**. Organizadores: Adriana Aparecida Burato Marques Buytendorp; Arlene Dantas Paiva. Campo Grande – MS. SED, 2023.

NEWCOMB, S. **Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers.** American Journal of Mathematics, v. 4, n. 1, p. 39-40, 1881

NIGRINI, M., 1994. **Using Digital Frequencies to detect Fraud**. The White Paper, Aprl/Mat pp. 3-6.5

NIGRINI, Mark; MITTERMAIER, Linda J. **The use of Benford's Law as an aid in analytical procedures**. Auditing., v.16, 2017.

NIGRINI, Mark; **Benford’s Law: Applications for Forensic Accounting Auditing, and Fraud Detection**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2012.

NIGRINI, Mark; MILLER, S. Data Diagnostics Using Second-Order Tests of Benford's Law.Auditing: A Journal of Practice & Theory 28(2), 305-324. 2006.

SILVA, Marcos Henrique de Paula Dias da. **A curiosa, mas não sobrenatural, Lei de Benford**. *In*: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Zero – Blog de Ciência da Unicamp. Volume 4. Ed. 1. 2º semestre de 2020. Campinas, 27 dez. 2020. Disponível em: https://www.blogs.unicamp.br/zero/2497/. Acesso em: 13 de outubro de 2023.

VIALI, Lorí. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A ORIGEM DA TEORIA DA PROBABILIDADE. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [s. l.], v. 8, n. 16, p. 143–153, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2008v8n16143-153. Disponível em: https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/177 . Acesso em: 21 abr. 2024.

ANEXO A - Layout de Unidade Curricular para os Itinerários Formativos apresentado no Currículo de Referência para o Novo Ensino Médio de Mato Grosso do Sul, pág. 114

I. Apresentação da Unidade Curricular

Área de Conhecimento: identificação da Área de Conhecimento à qual o Itinerário Formativo está relacionado.

Nome da Unidade Curricular: nome da unidade a ser apresentada aos estudantes.

Carga horária: padrão de 40 horas-aulas por semestre. Nesse caso, é feito o dimensionamento da proposta da unidade curricular ao tempo destinado à sua execução.

Descrição: explicita os aspectos consensuados relacionados pela comunidade escolar:

1. à concepção e ao vínculo lógico da Unidade Curricular na composição do Itinerário Formativo, de modo a mostrar/justificar a delimitação temática (recorte epistemológico) que consubstancia a unidade no âmbito do Itinerário;
2. à apropriação, adaptação e reconstrução contextual das competências e habilidades da BNCC na Unidade Curricular;
3. ao interesse cognitivo dos estudantes que impulsiona o Itinerário Formativo na escola.

A descrição deverá ser apresentada de forma simples, clara e sucinta, com vistas a captar a essência da Unidade Curricular. Nesse campo, a proposta é deixar claro o tema, atentando-se para que a descrição consiga convencer o público-alvo de sua pertinência.

Competências: descrição das competências da Área de Conhecimento que serão desenvolvidas na Unidade Curricular, atentando-se também para a quantidade, de modo a identificar somente aquelas que são aderentes ao tema.

Eixos estruturantes relacionados: identificação dos eixos estruturantes predominantes, listando-os em formato de tópicos.

Componentes curriculares e conhecimentos gerais articulados: identificação dos componentes curriculares da Formação Geral Básica articulados à unidade curricular do Itinerário Formativo. Ainda, são explicitadas as contribuições específicas dos componentes para a composição da unidade curricular (indicação dos conhecimentos gerais articulados).

Objetivos: identificação dos objetivos da unidade curricular em tópicos, com atenção à quantidade de objetivos, haja vista o tempo destinado à execução da unidade.

Relação com outras unidades: consideração da estruturação lógica entre as unidades curriculares e identificação daquelas que se correlacionam.

Perfil docente: definição das características do professor para ministrar a unidade curricular, como a formação, experiências e/ou interesse no campo de pesquisa, conhecimento e/ou disposição para o uso de metodologias ativas e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), dentre outras.

Recursos: relação dos recursos necessários, observando se tudo que foi citado será utilizado ou contemplado nas sugestões didáticas e se o acesso a eles é coerente com a realidade da escola. Quando aplicável, mencionar as parcerias.

II. Organizador curricular

Habilidades por Eixo Estruturante: indicação do código alfanumérico e transcrição das habilidades aplicadas, de acordo com:

1) habilidades dos Itinerários Formativos, associadas às Competências Gerais da BNCC;

2) habilidades específicas dos Itinerários Formativos, associadas aos eixos estruturantes;

3) habilidades da BNCC, quando for o caso.

Objetos de conhecimento: descrição em tópicos, utilizando marcadores.

Sugestões didáticas associadas aos eixos estruturantes: identificação da metodologia para desenvolver as habilidades e descrição das etapas a serem desenvolvidas em forma de tópicos, conforme os eixos estruturantes elencados.

III. Fontes: indicação do texto-base (filme, imagem, texto literário, obra de arte, obra clássica etc.) e materiais de apoio (outros materiais que podem ser utilizados no desenvolvimento da unidade curricular, como artigos, livros, vídeos, jogos, dentre outros).