UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Ruth Micaely de Figueiredo Gomes

Produto Educacional

Uma Proposta de Sequências Didáticas para o Ensino de Matrizes com Recursos Tecnológicos

Campina Grande - PB
Agosto/2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Ruth Micaely de Figueiredo Gomes

Uma Proposta de Sequências Didáticas para o Ensino de Matrizes com Recursos Tecnológicos

Produto Educacional vinculado ao Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo

Campina Grande - PB
Agosto/2024

Resumo

Este produto educacional apresenta três sequências didáticas (SDs) desenvolvidas para o ensino de matrizes no Ensino Médio, com foco na utilização de recursos tecnológicos como planilhas eletrônicas e o GeoGebra. As SDs foram elaboradas com o objetivo de organizar o processo de ensino-aprendizagem de matrizes de forma clara e gradual, promovendo a construção de conhecimento significativo, dinâmico e autônomo, utilizando uma abordagem contextualizada e explorando diferentes metodologias de ensino. Implementadas como disciplina eletiva no Novo Ensino Médio em Pernambuco, as sequências abordam conteúdos essenciais não obrigatórios da grade curricular, oferecendo uma complementação educacional. Espera-se que a implementação dessa proposta não só melhore a compreensão dos alunos sobre matrizes, mas também desenvolva suas habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas. Além disso, o uso de tecnologias pode preparar os alunos para o mundo digital e aumentar sua competência digital. Desta forma, espera-se destacar o papel fundamental que a Tecnologia pode desempenhar na melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Matrizes. Sequências Didáticas. Recursos Tecnológicos.

Abstract

This educational product presents three didactic sequences (DSs) developed for teaching matrices in high school, with a focus on the use of technological resources such as spreadsheets and GeoGebra. The DSs were designed to organize the teaching-learning process of matrices in a clear and gradual manner, promoting the construction of meaningful, dynamic, and autonomous knowledge, using a contextualized approach and exploring different teaching methodologies. Implemented as an elective subject in the New High School in Pernambuco, the sequences address essential non-mandatory content from the curriculum, offering educational supplementation. It is expected that the implementation of this proposal will not only improve students' understanding of matrices but also develop their critical thinking and problem-solving skills. Additionally, the use of technology can prepare students for the digital world and increase their digital competence. In this way, it is hoped to highlight the fundamental role that technology can play in improving the teaching and learning of Mathematics.

Keywords: Matrices. Didactic Sequences. Technological Resources.

1 Introdução

A Matemática é uma disciplina fundamental na Educação, ela fornece aos alunos habilidades essenciais que são aplicáveis em uma variedade de campos. Um dos tópicos importantes no Currículo de Matemática é o estudo de matrizes. O Ensino de matrizes é uma ferramenta importante que permite aos alunos resolver sistemas de equações lineares, desenvolver habilidades como o raciocínio lógico, a abstração, a interpretação e a resolução de problemas. No entanto, muitos estudantes apresentam dificuldades em compreender e aplicar esse conteúdo, seja pela sua complexidade, pela falta de motivação ou pelo método tradicional de ensino.

Nesse contexto, surge a necessidade de buscar novas estratégias pedagógicas que possam facilitar o aprendizado dos alunos e tornar o ensino de matrizes mais dinâmico, significativo e contextualizado. Uma dessas estratégias é o uso de recursos tecnológicos que podem oferecer diferentes formas de representação, manipulação e exploração desse conteúdo, além de possibilitar a interação, a colaboração e o feedback entre os alunos e o professor. Como afirma Ludvig (2016, p. 2),

> uma das maneiras mais eficazes de motivar os alunos que realmente querem construir conhecimento e desenvolver uma aprendizagem significativa é a utilização de metodologias que permitam o aprendente a manipular e construir os conceitos estudados, quando por meio dessa prática, ele possa vir a fazer relações e buscar aplicações dos conteúdos estudados em seu cotidiano.

Contudo, a eficácia desses recursos tecnológicos no ensino de matrizes ainda não foi totalmente explorada, uma vez que ela depende de vários fatores, como a qualidade do recurso tecnológico, a maneira como é integrado ao currículo e ao ensino, e a capacidade do professor de usá-lo efetivamente. Além disso, diferentes alunos podem responder de maneira distinta à tecnologia, dependendo de seus estilos de aprendizagens individuais.

Outra estratégia que pode contribuir para o aprendizado de matrizes é a utilização de Sequências Didáticas, que são conjuntos de atividades planejadas e articuladas com um objetivo comum, seguindo uma progressão lógica e coerente. As Sequências Didáticas podem favorecer a construção do conhecimento dos alunos, partindo dos seus saberes prévios, passando por situações desafiadoras e chegando a uma síntese conceitual.

A BNCC é um documento que estabelece as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica. A BNCC é norteada por dez competências gerais, que são habilidades que os alunos devem desenvolver para serem cidadãos críticos e aptos para o mundo do trabalho. A segunda competência geral da BNCC diz respeito à “curiosidade intelectual”. Essa competência destaca a importância de despertar e desenvolver a curiosidade dos alunos, de modo que eles sejam capazes de investigar, refletir e resolver problemas. Conforme detalhado no documento, o estudante deve:

> exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 9).

A habilidade de criar soluções, bem como a de resolver e formular problemas é um aspecto fundamental da competência geral da curiosidade intelectual. Essa destreza permite que os alunos reconheçam problemas em diversas situações da vida cotidiana, desenvolvam soluções criativas para esses e formulem novos problemas a partir de suas observações e experiências.

Nessa perspectiva, o ensino de matrizes pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade outrora citada, pois permite que os alunos representem dados de forma organizada e eficiente, encontrem soluções de sistemas lineares de forma rápida e precisa e desenvolvam raciocínio lógico e pensamento crítico. Além disso, pode ser um importante instrumento para a promoção da curiosidade intelectual e do desenvolvimento de habilidades essenciais no cotidiano dos discentes.

Explorar e questionar são aspectos fundamentais do Ensino de Matemática e de suas várias perspectivas. O uso de tecnologias digitais é uma abordagem que nos permite construir uma nova visão, procurando caminhos, estratégias e ferramentas para aprimorar o ensino. Na função do educador, o estímulo ao uso de tecnologias digitais deve ser uma ferramenta essencial para fazer com que os discentes tomem apreço pela Matemática.

Apoiar-se em documentos norteadores nos permite trilhar alguns caminhos que podem levar o aluno a construir uma base sólida. A Matemática é uma disciplina dinâmica e desafiadora, e é nosso papel como educadores facilitar a jornada de aprendizado por meio da integração eficaz da tecnologia.

A BNCC enfatiza que o uso das tecnologias no ambiente escolar amplia as alternativas de experiências, facilitando a aprendizagem. Isso ocorre porque as tecnologias podem estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico, a formulação, o teste de conjecturas e a construção de argumentações. Nos textos introdutórios da BNCC, é notável o apelo à inclusão das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na intersecção do aprendizado de disciplinas tradicionais, como Português e Matemática.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) conceituam a tecnologia como a transformação da ciência em força produtiva ou mediação do conhecimento científico. Elas destacam que a tecnologia está marcada, desde sua origem, pelas relações sociais que a levaram a ser produzida (BRASIL, 2018). Os documentos oficiais apontam que o uso das tecnologias no ensino de matemática pode trazer diversos benefícios para os estudantes. No entanto, é importante que os professores estejam preparados para utilizar as tecnologias de forma eficaz, selecionando softwares adequados e desenvolvendo atividades que sejam significativas para os estudantes.

Explorar estratégias didáticas eficazes para o ensino de Matemática é algo desejável, e a utilização das Tecnologias da Informação pode ser uma abordagem interessante para aprimorar a aprendizagem dos alunos (MORAN; MASSETO; BEHRENS, 2012).

A BNCC, em relação ao ensino da Matemática, prevê como uma de suas competências: "compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados e problemas" (BRASIL, 2018, p. 538). Desta forma, incluir o registro computacional como um meio possível de utilização na abordagem de conteúdos matemáticos, evidencia o reconhecimento e a validade dessa estratégia de ensino.

A presença de tecnologia na educação é um aspecto que acompanha a evolução do ensino. Esses recursos, que foram criados para aprimorar o processo de ensino-aprendizagem, estão cada vez mais presentes em diversas áreas do conhecimento. Com a crescente familiaridade dos alunos com as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs), torna-se essencial integrá-las ao ambiente escolar. Isso reflete a necessidade de um novo modelo de escola que reconheça e utilize a tecnologia como uma ferramenta valiosa para a formação dos alunos.

O uso adequado do computador nas aulas de Matemática proporciona um ambiente inovador e potencializa tanto o ensino quanto a aprendizagem. É crucial que o educador seja inovador, procurando métodos pedagógicos que se adequem à realidade do estudante. Existem inúmeros recursos disponíveis na internet que o professor pode utilizar para gerenciar suas aulas, como softwares e outros recursos (apresentações, simulações, plataformas e fóruns) que podem enriquecer o ensino e a aprendizagem.

De acordo com Weiss e Cruz (1999, p. 39),

> os softwares educativos possibilitam atividades que despertam a percepção visual, a organização espacial e temporal, o raciocínio logico matemático, estimulando à curiosidade, a criatividade, a imaginação desenvolvendo a autonomia e a interpretação.

Os softwares nas aulas de Matemática devem ser vistos como um recurso complementar, oferecendo uma abordagem distinta para o ensino e a aprendizagem, incentivando os alunos a construir seu próprio conhecimento. Isso dá ao aluno uma perspectiva investigativa, ajudando-os a buscar informações e comparar soluções de problemas. Nesse processo, o professor se torna um facilitador, em vez de uma figura tradicionalista.

Como ferramenta de interlocução, utilizaremos a metodologia de Sequências Didáticas que é um caminho que possibilita, aos nossos alunos, organizar o processo de aprendizagem de forma clara, desenvolver habilidades de modo gradual, conseguir desenvolver a compreensão de maneira mais profunda, promover a construção do conhecimento com mais autonomia, permitindo que eles construam seu conhecimento de forma estruturada e significativa.

Por conseguinte, o intuito desse Produto Educacional é trabalhar matrizes usando Tecnologias Digitais, integradas às Sequências Didáticas, com atividades contextualizadas e aplicações. A ideia de planejar ações de ensino com base em textos cuidadosamente organizados em torno desse objeto de aprendizagem se alinha às expectativas criadas em relação às novas atitudes também esperadas dos alunos.

O ensino de matemática, especialmente no que tange à disciplina de matrizes, exige estratégias eficazes que promovam a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de habilidades essenciais para os alunos. Nesse contexto, as SDs se configuram como ferramentas fundamentais para o planejamento e organização do ensino, possibilitando a articulação de diferentes elementos pedagógicos em um processo sistemático e reflexivo.

As SDs propostas neste trabalho podem ser aplicadas tanto individualmente quanto em grupo, preferencialmente no Laboratório de Informática, a fim de facilitar o acesso dos alunos aos recursos tecnológicos necessários. Nos capítulos seguintes apresentaremos as sequências em detalhes, incluindo seus objetivos, atividades, recursos utilizados e estratégias de avaliação.

1.1 Objetivos

Objetivo Geral:

Propor sequências didáticas inovadoras para o ensino de matrizes no Ensino Médio, utilizando recursos tecnológicos, como planilhas eletrônicas e o software GeoGebra, com o intuito de promover uma aprendizagem significativa, dinâmica e autônoma, bem como desenvolver o pensamento crítico e a resolução de problemas dos alunos.

Objetivos Específicos:

- Explorar e implementar recursos tecnológicos como planilhas eletrônicas e GeoGebra, no ensino de matrizes, para facilitar a compreensão e a visualização dos conceitos matemáticos;
- Desenvolver habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas nos alunos por meio de atividades que utilizem matrizes em contextos práticos e aplica-

dos;

- Promover a curiosidade intelectual e a investigação matemática utilizando métodos de ensino inovadores que incentivem os alunos a explorar, conjecturar e testar hipóteses sobre o conteúdo de matrizes;
- Fomentar a autonomia dos alunos na construção do conhecimento matemático através de atividades planejadas e articuladas em sequências didáticas, que estimulem a autoaprendizagem e a autoconfiança;
- Avaliar a eficácia das sequências didáticas propostas por meio da observação da evolução da aprendizagem dos alunos, identificando pontos de melhoria e consolidando práticas pedagógicas eficazes para o ensino de matrizes.

1.2 Organização

Visando alcançar os objetivos delineados na Seção 1.1, este Produto Educacional estrutura-se em quatro capítulos. No capítulo 1, exploramos a relevância do ensino de matrizes na Educação Básica, enfatizando a necessidade de inovar as estratégias pedagógicas. Investigamos como a combinação de recursos tecnológicos e Sequências Didáticas pode otimizar o aprendizado de matrizes, alinhando-se às competências da BNCC e explorando o potencial da tecnologia no ensino da matemática. Adicionalmente, apresentamos os objetivos e a estrutura geral do trabalho.

No capítulo 2, analisamos o impacto das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação, com uma ênfase particular no Ensino de Matemática. Realizamos uma análise comparativa entre tecnologia, TICs e TDICs, destacando suas características e aplicações no contexto educacional. Discutimos como as TDICs estão transformando as práticas pedagógicas, promovendo a personalização do ensino e incentivando a aprendizagem ativa e colaborativa. Também exploramos o papel das TDICs no Ensino de Matemática, destacando o uso de ferramentas como planilhas eletrônicas e o software GeoGebra para a visualização, manipulação e resolução de problemas relacionados a matrizes.

No capítulo 3, apresentamos três Sequências Didáticas que introduzem e aprofundam o conteúdo de matrizes de forma clara e contextualizada. A primeira sequência utiliza situações-problema do cotidiano e planilhas eletrônicas para construir uma base sólida sobre o conceito de matrizes. A segunda sequência aprofunda o conhecimento, explorando tipos de matrizes e suas propriedades através de atividades interativas e manipulação de exemplos concretos. A terceira sequência introduz operações essenciais com matrizes, utilizando ferramentas tecnológicas como GeoGebra e planilhas eletrônicas, promovendo um aprendizado dinâmico e prático.

No capítulo 4, traremos algumas considerações sobre este Produto Educacional, analisando os resultados obtidos ao longo das três sequências didáticas, avaliando a eficácia das metodologias empregadas e a aprendizagem dos alunos. Além disso, serão apresentadas reflexões sobre os desafios enfrentados durante a implementação das sequências e sugestões para futuras pesquisas. A partir dessa análise, espera-se contribuir para o aprimoramento do ensino de matrizes no Ensino Médio e para a formação de alunos mais preparados para os desafios do mundo contemporâneo.

2 TDICs: Conceito e Aplicações na Educação

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) emergiram como agentes impulsionadores de mudanças significativas no cenário educacional, redefinindo tanto os processos de ensino quanto os paradigmas de aprendizagem. Este capítulo se dedica a explorar o impacto transformador dessas tecnologias na educação, com um foco particular no ensino e aprendizagem de matemática, especificamente no estudo das matrizes.

A integração das TDICs na educação oferece oportunidades sem precedentes para repensar a forma como os conceitos matemáticos são apresentados, compreendidos e aplicados. Ao alavancar ferramentas digitais como as planilhas eletrônicas e o GeoGebra, podemos criar ambientes de aprendizagem dinâmicos e interativos que estimulam a curiosidade, a investigação e a colaboração entre os estudantes.

Este capítulo buscará não apenas examinar os benefícios concretos que as TDICs oferecem para o ensino de matemática, mas também explorar estratégias eficazes para a integração dessas tecnologias no currículo escolar. O objetivo é fornecer algumas diretrizes para educadores interessados em promover a inovação e a melhoria no ensino-aprendizagem de matemática através do uso criativo e significativo das TDICs.

2.1 Uma análise comparativa: Tecnologia, TICs e TDICs

No mundo dinâmico da educação, as tecnologias assumem um papel cada vez mais notório, moldando o cenário educacional e abrindo portas para um ensino inovador e produtivo. Para um melhor desenvolvimento deste trabalho, surge a necessidade de compreendermos as nuances dos termos "Tecnologia", "TICs" e "TDICs". Nesse sentido, Corrêa e Brandemberg (2021, p.4) tecem uma valiosa abordagem sobre suas definições, características e aplicações no contexto educacional.

As tecnologias, como bem definem os autores, são frutos da engenhosidade humana, nascidas da necessidade de solucionar problemas e desafios do cotidiano, acompanham a humanidade desde a pré-história. Da roda ao arco e flecha, do lápis e papel à caneta, do rádio à televisão, do computador à internet, a inventividade humana se manifesta em ferramentas que moldam nossa realidade. Essa trajetória evolutiva se estende até os dias atuais, com o surgimento de computadores, internet, smartphones e outros dispositivos digitais e, provavelmente, têm desempenhado um papel na transformação de certas práticas sociais, por exemplo a forma como nos comunicamos, socializamos, organizamos, mobilizamos e aprendemos.

Lalueza et al. (2010) afirmam que:

> A tecnologia contribui para orientar o desenvolvimento humano, pois opera na zona de desenvolvimento proximal de cada indivíduo por meio da internalização das habilidades cognitivas requeridas pelos sistemas de ferramentas correspondentes a cada momento histórico. Assim, cada cultura se caracteriza por gerar contextos de atividades mediados por sistemas de ferramentas, os quais promovem práticas que supõem maneiras particulares de pensar e de organizar a mente (LALUEZA et al., 2010, p. 51).

De acordo com Corrêa e Brandemberg (2021, p.5) , as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) abrangem uma gama de dispositivos eletrônicos e tecnológicos que possibilitam a troca de informações e a comunicação entre pessoas. Essa categoria engloba desde meios tradicionais como rádio, televisão e jornal até ferramentas mais recentes como computadores, internet, tablets e smartphones. A principal função das TICs reside na sua capacidade de informar e conectar indivíduos e comunidades, promovendo o fluxo de dados e a interação social.

As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação, também chamadas de Tecnologias Digitais (TDs), representam a evolução das TICs, marcadas pela convergência entre o mundo físico e o digital. Conforme Corrêa e Brandemberg (2021) , as TDICs se caracterizam por dispositivos que permitem a navegação na internet.

O termo “digital” deriva do latim “digitus”, que significa “dedo”, e faz referência à nossa capacidade de acessar um universo de informações ao toque dos dedos (CORRÊA; BRANDEMBERG, 2021, p.5) . Essa definição se aplica a alguns aspectos das TDICs:

- **Sinal digital:** a recepção de informações ocorre de forma digital, em vez de analógica, permitindo maior precisão e confiabilidade na transmissão de dados.

- **Linguagem binária:** as TDICs convertem qualquer tipo de informação em números, utilizando o sistema binário de representação (0 e 1), a linguagem compreendida pelos dispositivos digitais.

Ao discutirmos as TDs e seu impacto na sociedade atual, especialmente na educação e no ensino de Matemática, é fundamental reconhecer que as TDICs englobam um conjunto de ferramentas que não apenas facilitam a comunicação entre indivíduos, mas também permitem uma interação ativa com a tecnologia. Diferente das TICs, que tradicionalmente se focavam em aspectos de comunicação, as TDICs ampliam esse conceito ao integrar recursos que possibilitam o aprendizado, a investigação e a exploração por meio dessas tecnologias, como o uso de inteligência artificial e softwares de geometria e álgebra dinâmica.

As Tecnologias, TICs e TDICs representam marcos na história da humanidade, moldando nossa forma de comunicar, aprender e interagir com o mundo. Compreender as nuances entre esses conceitos é fundamental para definirmos qual deles é o mais ideal para o desenvolvimento do nosso trabalho. Neste sentido, é cabível aproveitarmos ao máximo o potencial transformador dos recursos digitais na educação para promover um ensino de Matemática mais engajador, produtivo e acessível a todos.

2.2 A influência das Tecnologias Digitais na educação

A educação do século XXI se caracteriza por um cenário em constante transformação, impulsionado pelas inovações tecnológicas que redefinem a forma como aprendemos, ensinamos e nos relacionamos com o conhecimento. Nesse contexto, essa pesquisa se propõe a analisar a influência abrangente das TDs na educação, explorando seus impactos, desafios e oportunidades, além de apresentar práticas pedagógicas inovadoras que otimizam seu uso em prol da aprendizagem eficaz.

O acesso à informação nunca foi tão vasto e instantâneo quanto hoje. A internet, juntamente com as ferramentas digitais, disponibiliza aos estudantes uma infinidade de recursos educacionais. As TDs, através de softwares de aprendizagem adaptativos e plataformas de ensino online, possibilitam que os estudantes progridam em seu próprio ritmo e permitem a personalização do ensino, adaptando o conteúdo e a abordagem pedagógica às necessidades individuais de cada estudante.

De acordo com Moran (2018),

> a personalização (aprendizagem adaptada aos ritmos e necessidades de cada pessoa) é cada vez mais importante e viável. Cada estudante, de forma mais direta ou indireta, procura respostas para suas inquietações mais profundas e as pode relacionar com seu projeto de vida e sua visão de futuro. É importante aprender a relacionar melhor o que está disperso, a aprofundar as informações relevantes, a tecer costuras mais complexas, a navegar entre as muitas redes, grupos e ideias com as quais convivemos. Num mundo tão agitado, de múltiplas linguagens, telas e efervescências, aprender a desenvolver roteiros individualizados de acordo com as necessidades e expectativas é cada vez mais importante e viável (MORAN, 2018, p. 3).

As TDICs também possibilitam a personalização da aprendizagem em diversos níveis, através de plataformas adaptativas, softwares de reconhecimento de fala, realidade virtual e aumentada. De acordo com Lamattina (2023), as TDs permitem que o ensino seja adaptado às necessidades individuais de cada aluno, identificando seu estilo de aprendizagem, dificuldades específicas e áreas de interesse. Essa abordagem centrada no aluno não só intensifica a motivação e o envolvimento, mas também resulta em melhorias nos resultados acadêmicos, incluindo uma maior retenção de conhecimento e um desempenho superior em avaliações.

Limeira (2020, p. 2) afirma que "os avanços tecnológicos vivenciados nos últimos anos têm influenciado de forma significativa a área da educação". Nesse sentido, é essencial percebermos as TDs como parceiras que, em conjunto com o saber científico, oferecem aos estudantes processos de ensino mais envolventes e capazes de promover aprendizados mais relevantes.

> As tecnologias digitais atraem a atenção dos alunos, pois elas fazem parte do cotidiano, dentro e fora da escola, sendo utilizadas, muitas vezes, por tempo indeterminado sem o controle dos pais e/ ou responsáveis. Levá-las para sala de aula é uma das possibilidades de ensinar aos alunos o uso adequado das mesmas, bem como mostrar as opções de utilização para construir conhecimento e melhorar o desenvolvimento cognitivo (LIMEIRA, 2020, p. 4).

As TDICs englobam uma variedade de ferramentas e plataformas digitais que facilitam a comunicação e a propagação de informações. Limeira (2020) exemplifica que todas as ferramentas tecnológicas digitais que utilizamos para fins de criação, publicação e consumo de informação, além dos diversos componentes físicos e suas soluções que utilizamos para nos comunicar, são exemplos de TDs. No entanto, a escola, com uma postura inicialmente conservadora, demorou a reconhecer a inevitabilidade das TDs em seu cotidiano, resistindo à sua integração.

Chaves (1998, p. 48) aponta que:

> as escolas, enquanto instituições sociais, são muito conservadoras, resistindo sempre, às vezes com rigor, mesmo às mais tímidas tentativas de mudança de ordem estabelecidas. Especialmente quando se trata da introdução de inovações tecnológicas, a escola encontra as mais variadas maneiras de resistir.

A revolução provocada pelas TDICs no panorama educacional brasileiro abriu portas para um ensino e aprendizagem mais dinâmicos e inclusivos. Desde os primórdios do século XXI, o país vivenciou uma trajetória notável na integração de TDs ao ambiente educacional, proporcionando acesso a recursos e ferramentas que impulsionaram a democratização do conhecimento e a equidade educacional.

> A partir dos anos 2000, com a tecnologia acelerada, o uso da lousa digital, da gamificação e pelo uso de smartphones, tablets e computadores em sala de aula se apresentaram como instrumentos com a finalidade de ofertar maior dinamicidade para o processo ensino aprendizagem e até mesmo no engajamento dos discentes nesse processo (AULER; PIOVEZANA, 2022, p. 7).

A transformação digital é especialmente relevante quando consideramos que a atual geração de estudantes já nasce imersa em um ambiente tecnológico. A inserção da tecnologia na educação torna-se cada vez mais indissociável, uma vez que os alunos ingressam nas salas de aula já equipados com smartphones, tablets, notebooks e outros dispositivos eletrônicos (RODRIGUES; MAIA; CASTRO, 2023, p. 2).

Sob essa ótica, é notável que a globalização está cada vez mais presente e as TDICs fazem parte do dia a dia dos estudantes, um reflexo típico da sociedade moderna. Incorporar o valor educacional dessas tecnologias nos planos de ensino é essencial para apoiar tanto o ensino quanto a aprendizagem, rompendo com a abordagem de ensino convencional, onde o aluno é meramente um observador e o professor é o transmissor de informações.

Lopes et al. (2018, p.4) observa que o uso de recursos tecnológicos favorece ao aluno a capacidade de resolução de problemas de ordem mais complexa, da mesma forma que possibilita uma aplicabilidade prática do conhecimento adquirido.

Quando implementadas de maneira estratégica e integradas ao currículo, as TDICs têm o potencial de criar ambientes de aprendizado mais dinâmicos e participativos, enriquecendo a experiência educacional dos alunos. A escolha adequada das ferramentas digitais, juntamente com a orientação ativa dos educadores, é fundamental para a eficácia dessas tecnologias como recursos pedagógicos.

Na busca por uma melhoria na educação oferecida aos discentes, novas diretrizes sobre o uso de recursos digitais têm surgido para apoiar o progresso do aprendizado. A BNCC definiu em uma de suas dez competências gerais:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

A implementação pedagógica das TDs na educação envolve a adoção de práticas e abordagens inovadoras que utilizam o potencial das tecnologias para estimular o engajamento dos alunos e aprimorar os resultados de aprendizagem. Recentemente, tornou-se evidente que aulas sem inovações não despertam mais o interesse dos discentes de forma contínua, por isso, há a necessidade de inserir novas metodologias de ensino nesse processo (ALVES; CARNEIRO; CARNEIRO, 2022, p. 7).

Incorporar recursos digitais na educação é uma oportunidade de construir um futuro educacional mais inovador, inclusivo e eficiente. As TDICs surgem como uma solução promissora, oferecendo benefícios como inovação no ensino, aprendizado personalizado, aumento da motivação, acesso a recursos educacionais online e desenvolvimento de habilidades digitais, tornando-se importantes aliadas da educação para promover um aprendizado mais envolvente e eficaz.

2.3 TDICs no Ensino de Matemática

A incorporação das TDICs no ensino de matemática tem sido uma transformação fundamental no cenário educacional contemporâneo. A interseção entre a tecnologia e a matemática oferece oportunidades únicas para promover uma aprendizagem mais dinâmica e participativa. Ao integrar ferramentas digitais no ensino, podemos explorar novos métodos para abordar conceitos matemáticos complexos, tornando o processo de aprendizagem mais acessível para os alunos. A seguir, exploraremos o papel das TDICs no ensino de matemática, destacando os benefícios, desafios e oportunidades que essa integração oferece para o desenvolvimento do pensamento crítico, resolução de problemas e alfabetização digital dos estudantes.

2.3.1 Transformações no Ensino de Matemática

Em meio a um cenário educacional que se transforma continuamente, o currículo de Matemática tem experimentado uma série de mudanças didático-pedagógicas. Essas mudanças estão impactando diretamente a maneira como a matéria é ensinada e aprendida, tornando o ensino de Matemática um campo dinâmico e em constante evolução. Pereira, Costa e Alves (2019, p. 10), ressaltam que "o docente precisa ter a preocupação em ensinar Matemática utilizando ferramentas didáticas que tornem o aprendizado prazeroso e significativo para os aprendizes". Diante dessa realidade, é essencial que os professores reavaliem os paradigmas que orientam o planejamento de suas aulas. Eles precisam estar abertos a novas ideias e abordagens para tornar as aulas mais modernas e eficazes.

Para facilitar efetivamente o aprendizado matemático de seus alunos, é vital que os educadores tenham confiança nas abordagens e estratégias de ensino que optam por utilizar. Isso significa que eles precisam estar bem versados nas últimas pesquisas e desenvolvimentos no campo da educação matemática. Além disso, eles precisam ser capazes de adaptar essas estratégias às necessidades individuais de seus alunos, levando em consideração fatores como estilo de aprendizagem, nível de habilidade e interesses pessoais.

Conforme apontado por Cruz (2023, p. 48),

> o professor, no processo de ensino aprendizagem promove duas condições para aprendizagem, quando o conteúdo a ser ensinado é potencialmente revelador, e quando incentiva a criança a relacionar o material de maneira consistente e não arbitrária. Isso significa a adequação de sua formação continuada para acompanhar o processo que determinará a teoria sobre sua prática.

Para tanto, é fundamental que os professores estejam em constante processo de atualização e participem de treinamentos específicos voltados para o ensino dessa disciplina. Isso pode envolver a participação em workshops e seminários, a leitura de revistas e livros especializados, e a colaboração com outros profissionais da área. Ao se manterem atualizados, os professores podem garantir que estão oferecendo aos seus alunos o melhor ensino possível.

Historicamente, o ensino e a aprendizagem da Matemática têm sido vistos como desafiantes e pouco atrativos para os alunos. As aulas tradicionais de Matemática, muitas vezes, não conseguem despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes, levando alguns especialistas a classificá-las como obsoletas e ineficientes. De acordo com D'ambrosio (2009), professores que insistem em adotar uma abordagem puramente transmissiva do conhecimento estão destinados ao fracasso. Neste sentido, Pontes et al. (2018, p. 2) defende o seguinte:

> A matemática ensinada nas escolas e a realidade do mundo atual caminham em sentidos antagônicos, em uma verdadeira desarmonia. Enquanto a humanidade aprecia o aparecimento de novas tecnologias, a matemática continua sendo digerida nos mesmos moldes do início do século XX. As práticas de ensino adotadas no processo de ensino e aprendizagem de matemática não têm o caráter dinâmico e inovador, professor e aprendiz não ouçam refutar as "verdades" apresentadas em seus tópicos, por acreditar que são procedimentos usuais para alcançar o sucesso na escola. A sociedade da informação e a caracterização e mecanismos de transmissão do conhecimento, além dos muros da escola, exigirão uma mudança profunda ou até a extinção dos sistemas de ensino tradicionais que conhecemos.

Nesse contexto, emergem diversas tendências metodológicas em Educação Matemática, propondo alternativas para aprimorar os processos de ensino e aprendizagem. Estratégias como o uso de jogos e materiais concretos, a resolução de problemas, a modelagem matemática e a utilização de tecnologias digitais da informação e comunicação têm se mostrado eficazes em tornar as aulas de Matemática mais interativas e envolventes. Dias et al. (2022, p. 12), acerca dessas tendências, relata que

> apresentam pontos interessantes que podem contribuir para um ensino mais significativo, mais prazeroso, mais perto da realidade do aluno. Todavia até que os professores, ou quem sabe até mesmo o aluno, consigam enxergar a riqueza desses métodos de ensino, há um longo caminho a ser percorrido, afinal não podemos deixar de considerar que por mais que a formação docente no Brasil tenha melhorado de forma significativa, ainda há muitos profissionais da educação totalmente alheios a essa nova realidade.

No campo da educação matemática, existem inúmeros recursos disponíveis, como TDs, que podem ser essenciais para aproximar os alunos do conhecimento, tornando-o mais alinhado com as realidades com as quais interagem diariamente, levando em conta que "o uso dos recursos tecnológicos nas aulas de matemática tem assumido um papel diferenciado nos processos de ensino e aprendizagem" (QUARTIERI; CRUZ, 2018, p.

60). A matemática contemporânea, diferentemente da versão mais antiga, permite aos alunos identificar e resolver problemas atuais. Portanto, é impraticável manter a estrutura tradicional da matemática, que cansa os alunos ao forçá-los a absorver conhecimentos que não são úteis em seu contexto social.

Embora a Matemática esteja intrinsecamente relacionada a várias atividades do dia a dia, sua importância nem sempre é reconhecida pelos alunos no ambiente escolar. Essa desconexão com a vida real, aliada a outros fatores, contribui para a visão negativa que muitos estudantes têm em relação à disciplina, dificultando seu processo de aprendizagem.

Portanto, é importante que os professores façam um esforço consciente para tornar a Matemática relevante para seus alunos, mostrando-lhes como ela se aplica a situações do mundo real e como pode ser usada para resolver problemas práticos. Ao fazer isso, eles podem ajudar a mudar a percepção dos alunos sobre a Matemática e tornar o aprendizado dessa disciplina uma experiência mais positiva e gratificante.

2.3.2 O Papel das Tecnologias no Ensino de Matemática

O ensino de matemática é fundamental para o desenvolvimento cognitivo e analítico dos estudantes, e as tecnologias têm desempenhado um papel crescente nesse processo educacional. Nesta seção, exploraremos a maneira como as tecnologias têm impactado e transformado o ensino de matemática. Examinaremos como ferramentas digitais, tais como softwares interativos, aplicativos móveis e recursos online, podem ser incorporadas pelos educadores para melhorar a compreensão, a prática e a aplicação dos conceitos matemáticos, proporcionando uma experiência de aprendizado mais atrativa para os alunos.

Sabemos que a Didática da Matemática tem sido objeto de estudo há décadas, com um enfoque especial nas últimas cinco, enquanto as questões sobre o uso de tecnologias sempre estiveram presentes. Neto et al. (2001) ressaltam que não se trata de descartar os recursos tradicionais, como livros didáticos, quadro e lápis. Esses recursos são úteis para demonstrar teoremas e soluções, mas podem ser limitados em outras situações matemáticas que exigem uma abordagem mais interativa ou visual.

O uso de tecnologias no ensino vem sendo questão de debate por um longo período. Os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam o recurso das tecnologias da informação como uma das estratégias para a prática da matemática em sala de aula: "o trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as." (BRASIL, 1997, p. 35).

Todavia,

> as tecnologias no ensino da matemática não podem ser encaradas como uma fórmula milagrosa que irá fazer nosso aprendiz assimilar os conteúdos, isso vai depender de como utilizamos a ferramenta. Devemos com o auxílio das tecnologias minimizar as características do ensino tradicional onde o professor é o detentor do conhecimento e o estudante é um ser passivo diante de sua aprendizagem, contudo queremos que seu uso sirva para o surgimento de uma nova relação entre professor e estudante (PEREIRA; COSTA; ALVES, 2019, p. 10).

Borba e Villarreal (2005) destacam a grande contribuição dos softwares pela sua capacidade visual. Eles tornam as informações paramétricas visíveis através de representações instigantes e interessantes, como aponta Javaroni (2007). Isso significa que os softwares podem ajudar a tornar os conceitos matemáticos mais tangíveis e compreensíveis para os alunos, permitindo-lhes ver e manipular os conceitos de maneira que não seria possível com os métodos tradicionais.

Ainda nessa visão, Bona (2009, p. 36) acrescenta e discorre que

> Os softwares educativos podem compor o ensino de matemática, bem como em outras disciplinas, uma vez que possibilita a criação de um conjunto de situações, procedimentos e representações simbólicas. Tais recursos possuem potencial para atender boa parte dos conteúdos. Estas ferramentas permitem auxiliar aos alunos para que deem novos significados às tarefas de ensino e ao professor a oportunidade para planejar, de forma inovadora, as atividades que atendem aos objetivos do ensino.

A integração das TDICs nas aulas de matemática emerge como uma forte possibilidade de ferramenta pedagógica para auxiliar os docentes e promover a aprendizagem dos alunos. Essas ferramentas tecnológicas permitem minimizar desafios comuns no ensino de matemática, como a dificuldade de visualização e compreensão de conceitos abstratos, e despertam maior interesse nos alunos ao tornar o aprendizado mais interativo e envolvente.

Nesse sentido, Oliveira (2021, p. 12) afirma que

> Matemática, como se sabe e como exposto aqui, é o componente curricular em que os alunos apresentam mais dificuldade na aprendizagem dos conteúdos, logo fazer uso de um software que mostre ao aluno que aquele conteúdo pode sim ser compreendido por ele, torna-se bem significativo, além de atrair, divertir,ainda leva o aluno a querer aprender mais. Assim, percebe-se que o componente de Matemática, com o uso da tecnologia, será mais compreendido pelos alunos.

Segundo Filho, Paiva e Cavalcante (2020), o aprendizado da Matemática envolve criar estratégias que permitam aos alunos atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas, superando métodos baseados apenas no desenvolvimento de habilidades. Isso significa que o ensino de matemática deve ir além da mera transmissão de fórmulas e procedimentos, para ajudar os alunos a entender os conceitos subjacentes e a aplicá-los em contextos do mundo real.

No vasto cenário do século atual, a tecnologia digital emergiu como uma força transformadora, redefinindo múltiplos aspectos de nossas vidas diárias. Deste modo, torna-se inadmissível que os alunos aprendam matemática de forma decorativa e desvinculada da vida real. As práticas tradicionais, embora ainda presentes, não atendem às expectativas dos alunos nativos da era digital nem contribuem para seu desenvolvimento pessoal e profissional. Os educadores, atuando como investigadores de suas próprias metodologias, necessitam explorar novas interpretações para os conteúdos, fundamentando-se no progresso tecnológico e em suas implementações contemporâneas.

Conforme Araújo e Santos (2014, p. 12),

> A cada dia as tecnologias digitais vão se tornando rotineiras no ambiente escolar e é necessário que o professor esteja apto a utiliza-las de maneira correta. Quando começa a utilizar as tais tecnologias, o docente tem um sentimento de medo que é comum e normal, pois estão experimentando novas situações que não estão acostumados, diferentes das encontradas no ensino tradicional e de seu cotidiano.

Desse modo, é notório que a apropriação das TDICs no contexto educacional tem o potencial de transformar o conceito e a prática de ensino e aprendizagem da matemática. É por meio dessas ferramentas, com mediações eficazes, que as potencialidades da aprendizagem matemática se destacam. É inegável que as TDICs podem ajudar a tornar o ensino de matemática mais relevante e atrativo para os alunos, ao mesmo tempo que fornecem aos professores novas maneiras de apresentar e explorar conceitos matemáticos. Ao adotar essas tecnologias, os educadores podem ajudar a preparar os alunos para um mundo cada vez mais digital e baseado em dados, onde a matemática desempenha um papel fundamental.

2.3.3 Softwares e o Ensino de Matemática

Softwares educacionais no ensino de Matemática surgiram como ferramentas imprescindíveis, oferecendo novas abordagens e recursos interativos para engajar os discentes e aprimorar sua compreensão dos conceitos matemáticos. O interesse pelos softwares é mencionado por Hoyles e Noss (2003) por seu potencial transformador para o aprendizado matemático e engajamento dos alunos. Por meio desse engajamento, é possível permitir algumas percepções sobre as ideias e práticas dos alunos, pois, ao explorar e resolver problemas, seus pensamentos tornam-se visíveis e progressivamente moldados por suas interações com a ferramenta.

Nesta subseção, vamos ponderar o impacto positivo que alguns softwares podem promover no ensino de matemática, destacando suas funcionalidades, benefícios e potencialidades para enriquecer a experiência de aprendizagem dos estudantes. Ao analisar o papel dessas ferramentas no contexto educacional contemporâneo, podemos compreender melhor como elas têm contribuído com o ensino da matemática.

Planilhas Eletrônicas

Desde sua popularização nas décadas de 1970 e 1980, as planilhas eletrônicas têm se mostrado ferramentas úteis não apenas para organizar dados e calcular valores, mas também como recursos pedagógicos essenciais, especialmente no ensino de matemática. Sua capacidade diversificada permite explorar uma variedade de conceitos matemáticos de forma dinâmica e interativa, além do mais elas representam um recurso computacional fundamental, caracterizado por suas interfaces compostas por grades que organizam dados em linhas, colunas e células. Nestas células, dados são inseridos para execução de cálculos, sejam simples ou complexos, por meio de fórmulas previamente estabelecidas, proporcionando uma gama de aplicações que vão desde cálculos básicos até análises estatísticas detalhadas.

Borges (2023, p. 14) menciona que

> a planilha eletrônica é descrita como um tipo de programa com composição de uma representação matricial com linhas e colunas que dá a possibilidade de registrar, calcular e apresentar informações. A disponibilidade e o potencial de diversos recursos, que a planilha eletrônica apresenta, podem ser utilizados nas mais diversas aplicações para a sociedade.

No âmbito educacional, especialmente no ensino de matemática, as planilhas eletrônicas desempenham um papel significativo. Elas oferecem uma abordagem prática e interativa para explorar conceitos matemáticos complexos, tornando o aprendizado mais intuitivo para os alunos. Sua utilização promove não apenas o desenvolvimento de habilidades computacionais, mas também habilidades analíticas e de resolução de problemas. Flores (2013) defende que esses recursos tecnológicos apresentam potencial para o fomento da criatividade e para a construção do conhecimento matemático a partir da visualização e da manipulação de dados.

Dentro da nossa realidade, é comum encontrar duas plataformas amplamente utilizadas: o Microsoft Excel e o LibreOffice Calc. Enquanto o Excel é mais difundido, o Calc é adotado em ambientes educacionais públicos devido à preferência por softwares livres, conforme legislação específica. Além disso, a disponibilidade de planilhas eletrônicas online, como as do Google e do Excel online, amplia ainda mais o acesso a essas ferramentas.

Valente (1993) ressalta a importância de utilizar o computador como um instrumento educativo, enfatizando a necessidade de um planejamento cuidadoso e direcionamento de conteúdos para alcançar resultados eficazes. Nesse sentido, esses recursos oferecem uma plataforma flexível e adaptável, capaz de atender às necessidades de diferentes estilos de aprendizado e níveis de capacidade dos estudantes, auxiliando na análise e solução de problemas complexos que envolvem matrizes. Por conseguinte, os alunos podem explorar diferentes cenários, modificar valores e observar como essas mudanças afetam os resultados. Isso promove o pensamento crítico, a experimentação ativa e a tomada de decisões, habilidades essenciais não apenas para o sucesso acadêmico, mas também para a vida cotidiana.

A BNCC reconhece o valor das planilhas eletrônicas como instrumentos educacionais eficazes. Ao integrar tecnologias digitais, como planilhas, no ensino de matemática, a BNCC busca promover uma educação mais contextualizada e adaptada aos desafios do século XXI. A BNCC enfatiza a importância de desenvolver habilidades digitais desde cedo, preparando os alunos para enfrentar os desafios de um mundo cada vez mais tecnológico.

> Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e **planilhas eletrônicas**, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. (BRASIL, 2018, p. 528, grifo nosso)

Prosseguindo com a discussão, ainda é importante destacar que

> a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, **planilhas eletrônicas** e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2018, p. 272, grifo nosso)

A inserção das planilhas eletrônicas no ensino de matemática é respaldada por estudos, como o dos autores Coxford, Shulte et al. (1999), que destacam sua eficácia como instrumentos de ensino, proporcionando aos alunos uma experiência significativa no processo de aprendizagem da matemática. Ademais, por meio do uso desses recursos tecnológicos, os professores podem implementar práticas pedagógicas inovadoras que estimulem a investigação, a colaboração e a construção do conhecimento pelos alunos. Essas ferramentas não apenas facilitam a compreensão de conceitos abstratos, como matrizes, mas também promovem a autonomia do aluno, permitindo que eles assumam um papel ativo em seu próprio processo de aprendizado.

Um dos campos da matemática em que as planilhas eletrônicas têm um impacto significativo é o estudo de matrizes. As matrizes, como sabemos, são amplamente aplicadas em diversas áreas, desde a resolução de sistemas lineares até a computação gráfica. Ao utilizar planilhas eletrônicas para manipular matrizes, os alunos podem visualizar facilmente matrizes de diferentes ordens e tipos, além de operações como adição, multiplicação, inversão e determinante, compreendendo intuitivamente os conceitos fundamentais por trás dessas operações.

Em resumo, as planilhas eletrônicas representam um software que se conecta efetivamente com a matemática, oferecendo uma variedade de funcionalidades que tornam a aula mais interativa e prática para explorar conceitos complexos, como matrizes. Ao alinhar-se com as diretrizes da BNCC, os educadores podem aproveitar todo o potencial desses recursos tecnológicos para promover um ensino matemático de qualidade, aumentando assim o interesse dos alunos pela matéria e, consequentemente, atingindo o objetivo desejado.

GeoGebra

O GeoGebra, baseado na linguagem de programação Java e disponível gratuitamente, rapidamente se tornou um recurso indispensável para o ensino de matemática em todos os níveis, integrando geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em uma plataforma única e acessível (GEOGEBRA, 2024). Originado em 2001 como parte do trabalho de mestrado de Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburgo, Áustria, continuou a ser desenvolvido durante seu pós-doutorado, o que facilitou sua difusão nas comunidades acadêmicas (BENTO et al., 2012).

Além de estar disponível para download gratuito em computadores com vários sistemas operacionais, esse aplicativo pode ser instalado em dispositivos móveis ou acessado online através do site geogebra.org. Real (2017) destaca que o GeoGebra é uma ferramenta de fácil utilização que permite aos usuários entender as construções geométricas desenvolvidas, consolidando seus conhecimentos anteriores e incentivando a descoberta de novos conceitos. Borba, Silva e Gadanidis (2020) ressaltam que este software tem sido uma tecnologia revolucionária na educação matemática ao longo dos anos, explorando vários conceitos e ideias.

Em consonância com essa visão, Rodrigues, Maia e Castro (2023, p. 8) destacam que

> A integração de softwares educacionais, como o GeoGebra, demonstra como as TDICs podem aprimorar significativamente o ensino de disciplinas como a Matemática, oferecendo representações dinâmicas

> e interativas que transcendem as limitações das abordagens estáticas. Essas ferramentas modernas são recursos valiosos para educadores que desejam criar experiências de aprendizagem mais eficazes e motivadoras para seus alunos.

Nesse cenário, o uso de softwares educacionais tem sido uma opção valiosa para diversificar as práticas pedagógicas e oferecer novas abordagens de conteúdo. O Geogebra fornece ferramentas visuais importantes para representações gráficas, além de promover o questionamento, a argumentação, a experimentação e a dedução, auxiliando na construção do conhecimento. O uso do computador no ensino da matemática dá aos alunos a confiança para criar e resolver situações matemáticas, desenvolvendo sua autonomia (D'AMBRÓSIO, 1997).

Para o professor, esse software é uma ferramenta flexível que permite a apresentação dos conteúdos matemáticos de várias maneiras, facilitando a compreensão de conceitos através da exploração e visualização em duas ou três dimensões. A capacidade de visualização oferecida pelo software ajuda o aluno a desenvolver a demonstração informal, tornando o aprendizado mais relevante.

Além de seu enorme potencial pedagógico, essa plataforma oferece fácil acesso ao software, sendo gratuito e disponível na internet. Portanto, torna-se viável utilizar essa tecnologia como um recurso de ampliação do processo de ensino-aprendizagem nos conteúdos de matemática, atendendo às necessidades dos alunos. O uso do GeoGebra durante as aulas de matemática amplia as possibilidades de participação dos estudantes e modifica o papel do professor no processo de ensino-aprendizagem, desde que o professor esteja apto a utilizar adequadamente o software e disponha de tempo para preparar atividades relevantes (MAIA; GONDIM; VASCONCELOS, 2023).

Deste modo, conclui-se que esse software educativo é uma inovação importante e de grande utilidade no ensino de matemática, uma vez que proporciona aos professores e alunos um método eficaz para explorar conceitos matemáticos de maneira interativa e cativante. Seu uso favorece uma abordagem mais dinâmica e expressiva do ensino de geometria e álgebra, auxiliando no desenvolvimento de habilidades cognitivas e metacognitivas dos alunos.

3 Sequências Didáticas

Uma sequência didática (SD) é uma metodologia de ensino que se refere a uma série de atividades planejadas de forma sequencial e sistematizada, com o objetivo de ensinar um determinado conteúdo ou habilidade aos alunos. Além disso, essa prática envolve a seleção de recursos, a organização das atividades e a definição de estratégias de ensino que visam alcançar os objetivos educacionais estabelecidos. Assim como outras metodologias de ensino, uma SD é uma abordagem sistemática e planejada para facilitar a aprendizagem dos alunos em sala de aula.

Zabala (2015) define as sequências didáticas (SDs) como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (ZABALA, 2015, p. 18). Ademais, "uma sequência didática envolve etapas interligadas, mas disjuntas, que tem como objetivo principal conduzir os alunos para uma aprendizagem efetiva, gerando significado para eles" (SOUZA, 2023, p. 75).

Inspirados nas ideias do autor, propomos uma abordagem para a construção de SDs que se baseia em quatro princípios fundamentais:

1. **Objetivo:** O ponto de partida de qualquer SD é a definição de um objetivo claro e específico, que represente o que se espera que os alunos aprendam ao final da sequência. Esse objetivo deve ser desafiador, mas alcançável, e estar alinhado com os currículos e diretrizes educacionais.

2. **Conteúdo:** O conteúdo a ser abordado deve ser cuidadosamente selecionado, considerando sua relevância para o aprendizado e sua conexão com o mundo real. É importante que seja apresentado de forma organizada e progressiva, permitindo que os alunos construam seus conhecimentos de forma gradual.

3. **Metodologia**: A escolha da metodologia adequada é crucial para o sucesso da SD. Diversas metodologias podem ser utilizadas, como a problematização, a investigação, a descoberta guiada e o trabalho em equipe. A metodologia escolhida deve ser compatível com o objetivo definido, com o conteúdo a ser abordado e com as características dos discentes.

4. **Avaliação:** A avaliação é um componente essencial das SDs, pois permite acompanhar o progresso dos alunos e identificar suas dificuldades e necessidades. A avaliação deve ser contínua e diversificada, utilizando diferentes instrumentos e técnicas de avaliação.

No que diz respeito à abordagem construtivista, Zabala (2015) valoriza a participação ativa do aluno na construção do conhecimento. Destaca que, a aprendizagem é um processo pessoal no qual os alunos constroem significados com a ajuda de outros. Os professores desempenham um papel crucial ao detectar conflitos, motivar os alunos e propor desafios relevantes. Esse processo não apenas ensina conteúdos, mas também promove habilidades de aprendizagem e autoimagem positiva. Ao entender esses princípios, uma série de perguntas permite avaliar e melhorar as estratégias de ensino, focando na validade das SDs e buscando maneiras de fortalecer ou complementar as atividades existentes:

> Na sequência didática existem atividades:
> a) que nos permitam determinar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
> b) cujos conteúdos são propostos de forma que sejam significativos e funcionais para os meninos e as meninas?
> c) que possamos inferir que são adequadas ao nível de desenvolvimento de cada aluno?
> d) que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levam em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária; portanto, que permitam criar zonas de desenvolvimento proximal e intervir?
> e) que provoquem um conflito cognitivo e promovam a atividade mental do aluno, necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
> f) que promovam uma atitude favorável, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos?
> g) que estimulem a autoestima e o autoconceito em relação às aprendizagens que se propõem, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena?
> h) que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender, que lhe permitam ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens? (ZABALA, 2015, p. 63).

Ao adotar essa abordagem construtivista e utilizar a sequência didática como ferramenta pedagógica, os professores podem transformar o ensino de matemática em uma experiência enriquecedora para os alunos, capacitando-os não apenas a compreender os conceitos matemáticos, mas também a aplicá-los em contextos diversos e a desenvolver habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e comunicação matemática.

O ensino de matemática, especialmente no que tange à disciplina de matrizes, exige estratégias eficazes que promovam a aprendizagem significativa e o desenvolvimento de habilidades essenciais para os alunos. Nesse contexto, as SDs se configuram como ferramentas fundamentais para o planejamento e organização do ensino, possibilitando a articulação de diferentes elementos pedagógicos em um processo sistemático e reflexivo.

Este estudo tem como objetivo principal demonstrar a efetividade das SDs aliada aos recursos tecnológicos como meio eficiente para a aplicação dos conteúdos de matemática no ensino básico, com ênfase no ensino de matrizes. Para tal, propomos a utilização de SDs em uma disciplina eletiva no Ensino Médio, buscando aprimorar o processo de aprendizagem e torná-lo mais dinâmico e engajador.

As SDs propostas neste trabalho podem ser aplicadas tanto individualmente quanto em grupo, preferencialmente no Laboratório de Informática, a fim de facilitar o acesso dos alunos aos recursos tecnológicos necessários. As seções seguintes apresentarão as sequências em detalhes, incluindo seus objetivos, atividades, recursos utilizados e estratégias de avaliação.

3.1 Sequência Didática 1 - Da teoria à prática: Explorando a introdução às matrizes e sua aplicação em planilhas eletrônicas

Nesta seção apresentaremos uma sugestão de SD destinada ao professor de Matemática que atua no Ensino Médio e deseja trabalhar a introdução do conteúdo de matrizes de maneira inovadora. Apresentaremos um planejamento estruturado e abrangente, propondo, inicialmente, a utilização de uma situação-problema para despertar a curiosidade dos alunos e proporcionar uma visão contextualizada do desenvolvimento do tema. Em seguida apontaremos uma breve relação das planilhas eletrônicas com matrizes a fim de demonstrar a relevância prática do conteúdo e a possibilidade de utilizar ferramentas digitais para auxiliar na aprendizagem.

Dando continuidade, esta SD traz a exploração de matrizes e planilhas eletrônicas em conjunto, visando mostrar que é uma ótima estratégia para aprofundar o conhecimento dos alunos e promover a interação com os softwares. Para finalizar, aprofundamos o conceito de matriz, sua representação genérica e um breve contexto histórico. Essas etapas são fundamentais para consolidar o conhecimento básico e enriquecer a experiência de aprendizagem.

A proposta de trabalho em grupo para essa SD é especialmente adequada, pois estimula a colaboração, o intercâmbio de ideias e a divisão de tarefas, além de promover o desenvolvimento de habilidades interpessoais essenciais.

Vale salientar que, a maioria das atividades descritas envolvem o uso de planilhas eletrônicas em um ambiente de laboratório de informática. A seguir, serão vistos detalhes sobre como a SD será desenvolvida em cada encontro, bem como orientações aos professores sobre como aplicá-la ou adaptá-la às suas turmas.

Recursos Didáticos:

- Quadro branco, pincel e apagador;

- Notebook e projetor (opcional);
- Laboratório de informática;
- Computadores com acesso a planilhas eletrônicas;
- Materiais de apoio (cópias de atividades, lápis, borracha, caneta, apostilas, etc.).

Tempo pedagógico: aproximadamente oito aulas de 50 minutos cada, sendo divididas do seguinte modo:

- Etapa 1: duas aulas;
- Etapa 2: duas aulas;
- Etapa 3: duas aulas;
- Etapa 4: duas aulas.

Público-alvo: estudantes do 2º ou 3º ano do Ensino Médio.

Objetivos da Sequência Didática:

- **Objetivo Geral:** introduzir a abordagem sobre matrizes, explorando conceitos iniciais, aplicações e a conexão com as planilhas eletrônicas.
- **Objetivos Específicos:**
  - Representar matrizes em planilhas eletrônicas;
  - Compreender e aplicar o conceito de matriz;
  - Resolver problemas envolvendo matrizes, planilhas e cálculo de médias;
  - Relacionar matrizes com situações-problema do cotidiano;
  - Dominar a definição formal de matriz e sua representação genérica;
  - Descobrir um pouco da história das matrizes e suas origens;
  - Trabalhar em equipe de forma colaborativa e eficiente.

Procedimentos metodológicos

Agora, vamos descrever as etapas necessárias para a implementação dos procedimentos metodológicos adotados na Sequência Didática 1.

Etapa 1

Nesta primeira etapa, a professora inicia a aula com a apresentação da SD aos estudantes, mostrando os objetivos a serem contemplados, o assunto que será abordado e o processo a ser realizado em cada etapa. Após essa explanação, divide a turma em grupos com, no máximo, 5 pessoas. Em seguida, introduz o conteúdo apresentando matrizes como representações matemáticas de tabelas numéricas que auxiliam na resolução e análise de sistemas lineares e, além disso, observa que o estudo de matrizes ajuda a entender as relações entre números em linhas e colunas; também ressalta que no campo da tecnologia, matrizes são essenciais para o desenvolvimento de animações computacionais, programação e resolução de dispositivos digitais como televisores, monitores e câmeras.

Logo após, apresenta uma situação-problema sobre a organização, em linhas e colunas, das notas de um boletim, propondo aos grupos completarem uma a tabela organizando as notas de um determinado aluno.

Por fim, faz uma breve introdução ao software de planilhas eletrônicas a ser utilizado, destacando como elas podem ser utilizadas para representar e manipular matrizes, apresentando exemplos práticos de como organizar dados em planilhas e realizar cálculos simples usando funções matemáticas.

Etapa 2

Nesta etapa, a professora propõe um conjunto de questões que envolvam o conceito inicial de matrizes, a representação em planilhas eletrônicas e o cálculo de média usando o software. Os grupos devem explorar as funcionalidades das planilhas eletrônicas na manipulação de matrizes e a realização dos cálculos necessários para solucionar as questões propostas. Neste momento, os grupos são incentivados a trabalharem juntos, compartilhando conhecimentos e buscando soluções para as questões.

Etapa 3

Neste momento é feita uma apresentação da definição formal de uma matriz, dos seus elementos, das linhas e colunas, utilizando linguagem clara e acessível aos alunos. Em seguida, uma explanação sobre a notação genérica para representar uma matriz, utilizando índices para identificar cada elemento. É importante ensinar aos alunos a lerem e interpretarem a notação corretamente, reconhecendo as dimensões da matriz e a posição de cada elemento. Por fim, é proposto um breve resumo da história das matrizes, destacando suas origens e os principais matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento.

Etapa 4

Nesta última etapa, a docente faz uma breve revisão dos principais conceitos abordados ao longo da sequência didática (representação genérica e definição de matriz, elementos de uma matriz, identificação dos elementos de uma matriz (linha e coluna) e notação), reforçando o aprendizado dos alunos. Em seguida, promove um momento de reflexão sobre os aprendizados, incentivando os estudantes a compartilharem suas experiências e dificuldades e, finalizando, com incentivo para os grupos apresentarem as soluções das questões que exploraram. Utilizando as planilhas eletrônicas, é solicitado que os estudantes demonstram os resultados, no intuito de promover a discussão entre os grupos, debater diferentes estratégias de resolução e reforçar os conceitos aprendidos.

Avaliação

A avaliação pode ser realizada por meio da observação da participação dos alunos nas atividades em grupo e individuais, avaliando seu nível de compreensão, engajamento e interesse no tema, além de uma análise dos trabalhos realizados, verificando se os conceitos foram assimilados e aplicados corretamente, identificando pontos fortes e áreas que precisam de aprimoramento.

Sugestões de Melhorias:

- **Variedade de níveis de dificuldade:** ofereça questões com diferentes níveis de dificuldade para atender às necessidades de todos os alunos.
- **Orientação e suporte:** forneça orientação e suporte aos grupos durante a resolução das questões, esclarecendo dúvidas e incentivando a colaboração.
- **Discussão em grupo:** promova discussões em grupo sobre as soluções encontradas, permitindo que os discentes compartilhem seus conhecimentos e aprendam uns com os outros.

A seguir, será apresentada a Sequência Didática 1, que foi elaborada com o objetivo de abordar os conceitos iniciais de matrizes por meio de recursos tecnológicos. Essa sequência foi planejada para promover uma compreensão mais aprofundada do tema, utilizando ferramentas digitais que facilitam a visualização e manipulação dos conteúdos.

MATRIZES:
CONCEITOS INICIAIS

Introdução

As matrizes podem ser entendidas como representações matemáticas de tabelas numéricas. A associação de matrizes e determinantes a sistemas lineares auxilia não apenas a resolução dos sistemas como permite a discussão da quantidade de soluções sem a necessidade de resolvê-los.

Tabelas são muito utilizadas no dia a dia, inclusive em meios eletrônicos, pois elas facilitam a organização, a leitura e a interpretação de dados. Em Matemática, podemos relacionar tabelas a matrizes, e o estudo desse tipo de representação contribui para que compreendamos as relações entre os números dispostos em linhas e colunas.

As matrizes são bastante utilizadas no campo da tecnologia, em especial, no desenvolvimento de animações por meio de computação gráfica e no trabalho com programação. Além disso, a resolução de televisores e monitores, bem como a de câmeras digitais, é um dos exemplos de aplicação envolvendo cálculos matriciais.

Organização das notas[1]

Em muitas escolas do Ensino Básico, bem como em cursos do Ensino Superior, é comum a atribuição de notas para a avaliação da aprendizagem. Essas notas podem ser atribuídas a provas, trabalhos, desempenho nas aulas ou outras dinâmicas praticadas no método de avaliação da escola.

Normalmente, as notas seguem uma escala com números (por exemplo, de 0 a 10 ou de 0 a 100) ou com letras (como de A a F) e existe um valor mínimo estabelecido pela escola, que é conhecido como média. Muitas vezes essa média corresponde a uma porcentagem mínima a ser atingida; por exemplo, obter 50% de uma escala de 0 a 10 significa ter nota mínima 5, ou 60% de uma escala de A a F significa ter nota mínima C.

Figura 1: Modelo de um boletim.

Fonte: Autoria própria.

[1] Situação-problema retirada do livro "Matemática em contexto" (DANTE, 2020) com adaptações.

Considere uma escola em que as notas das provas obedecem à escala numérica de 0 a 10 e que, em determinado período, foram feitas três provas em cada matéria.

Para visualizar e analisar as notas que tirou, Mickael vai organizá-las em linhas e colunas, formando uma tabela. Ele fez as avaliações 1, 2 e 3 e tirou, respectivamente, 8, 9 e 10 em Língua Portuguesa, 9, 7 e 10 em Ciências Humanas e 8, 8 e 9 em Ciências da Natureza.

Questão 1. Complete a tabela abaixo organizando as notas de Mickael.

Tabela 1: Notas de Mickael.

Avaliação / Disciplina	Avaliação 1	Avaliação 2	Avaliação 3
Língua Portuguesa			
Ciências Humanas			
Ciências da Natureza			

Fonte: DANTE (2020).

Em Matemática, tabelas que apresentam dados (também chamados elementos ou termos) dispostos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais) podem ser organizadas em matrizes. Esses elementos, que geralmente são números, ficam entre parênteses ou entre colchetes. Vejamos como podemos representar a matriz correspondente aos dados numéricos da tabela que você representou.

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} & \begin{matrix}\leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow\end{matrix}\ \text{linhas} \\ \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\end{matrix} & \\ \text{colunas} & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} & \begin{matrix}\leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow\end{matrix}\ \text{linhas} \\ \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\end{matrix} & \\ \text{colunas} & \end{array}$$

PENSANDO ALÉM...

Como seria a matriz associada à tabela caso as linhas da tabela fossem as colunas e as colunas fossem as linhas?

Planilhas eletrônicas e Matrizes

Softwares de planilha eletrônica[2] são ferramentas que permitem aos usuários organizar, formatar e calcular dados com fórmulas usando um sistema de células dividido em linhas e colunas. Eles são amplamente utilizados em muitos campos para registrar dados, realizar cálculos financeiros, criar gráficos, e até mesmo programar.

Em um software de planilha eletrônica, você pode criar tabelas que organizam automaticamente os dados inseridos, realizar cálculos complexos com fórmulas, criar gráficos a partir dos dados inseridos, e muito mais. As planilhas eletrônicas, como por exemplo o Microsoft Excel, têm uma relação direta com as matrizes matemáticas. Ambas são organizadas em linhas e colunas e permitem a manipulação de dados de maneira estruturada.

[2] Informações obtidas no endereço eletrônico: https://ebaconline.com.br/blog/o-que-e-para-que-serve-excel.

Vejamos alguns dos aspectos em que podemos relacionar as matrizes com as planilhas eletrônicas:

- **Organização de Dados:** tanto as matrizes quanto as planilhas organizam os dados em um formato de grade, com linhas e colunas. Cada **célula** em uma planilha corresponde a um **elemento** em uma matriz;
- **Operações:** as operações que você pode realizar em matrizes, como adição, subtração e multiplicação, podem ser realizadas em planilhas usando fórmulas;
- **Referência de Células:** em uma matriz, um elemento é referenciado por sua posição na linha e na coluna. Da mesma forma, em uma planilha, uma célula é referenciada por sua coluna (**indicada por letras**) e sua linha (**indicada por números**);
- **Manipulação de Dados:** assim como as matrizes, as planilhas permitem a manipulação de dados. Você pode alterar os valores das células, realizar cálculos e analisar os dados.

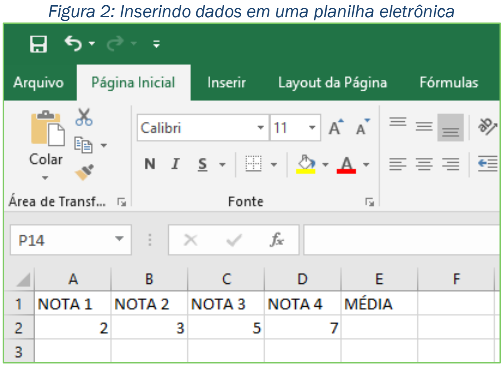
Portanto, se você entender como as matrizes funcionam, você terá uma base sólida para trabalhar com planilhas eletrônicas e vice-versa. As habilidades que você desenvolve ao trabalhar com um podem ser facilmente transferidas para o outro.

Já vimos que um software de planilha eletrônica nos permite realizar uma variedade de cálculos, isso inclui o cálculo de médias. A média, como bem sabemos, é a soma de um conjunto de números dividida pela quantidade de números no conjunto. No Excel, por exemplo, você pode calcular a média de um conjunto de números usando a função **=MÉDIA**.

Calcular a média em uma planilha eletrônica como o Excel é bastante simples. Observemos um passo a passo:

1. Insira seus dados em uma coluna ou linha da planilha;

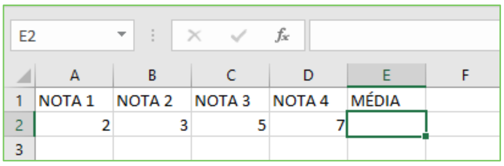
Figura 2: Inserindo dados em uma planilha eletrônica



Fonte: Elaborada pela autora no software Excel

2. Selecione a célula onde você deseja que a média apareça;

Figura 3: Selecionando uma célula em uma planilha eletrônica.



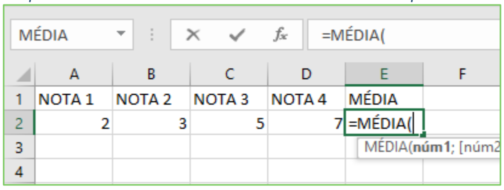
E2

	A	B	C	D	E	F
1	NOTA 1	NOTA 2	NOTA 3	NOTA 4	MÉDIA	
2	2	3	5	7		
3						

Fonte: Elaborada pela autora no software Excel.

3. Digite **=MÉDIA(**;

Figura 4: Aprendendo a calcular a média aritmética em uma planilha eletrônica.



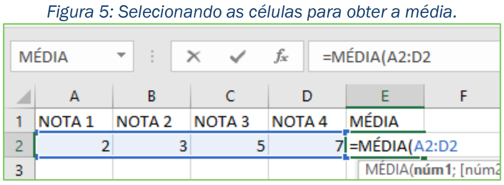
MÉDIA =MÉDIA(

	A	B	C	D	E	F
1	NOTA 1	NOTA 2	NOTA 3	NOTA 4	MÉDIA	
2	2	3	5	7	=MÉDIA(	
3					MÉDIA(núm1; [núm2	
4						

Fonte: Elaborada pela autora no software Excel.

4. Selecione o intervalo de células que contém os dados para os quais você deseja calcular a média. Por exemplo, se seus dados estão nas células A2 a D2, você digita A2:D2;

Figura 5: Selecionando as células para obter a média.



MÉDIA =MÉDIA(A2:D2

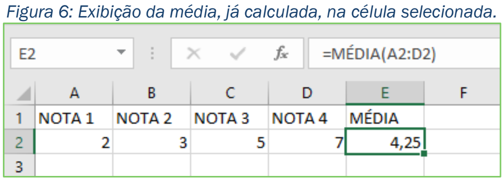
	A	B	C	D	E	F
1	NOTA 1	NOTA 2	NOTA 3	NOTA 4	MÉDIA	
2	2	3	5	7	=MÉDIA(A2:D2	
3					MÉDIA(núm1; [núm2	

Fonte: Elaborada pela autora no software Excel.

5. Feche o parêntese e pressione Enter.

A média dos números no intervalo de células selecionado será calculada e exibida na célula que você selecionou no passo 2.

Figura 6: Exibição da média, já calculada, na célula selecionada.



E2 =MÉDIA(A2:D2)

	A	B	C	D	E	F
1	NOTA 1	NOTA 2	NOTA 3	NOTA 4	MÉDIA	
2	2	3	5	7	4,25	
3						

Fonte: Elaborada pela autora no software Excel.

Observação: o Excel ignora as células vazias ou contendo texto ao calcular a média.

Questão 2. Vamos voltar ao boletim de Mickael e calcular suas médias, em cada uma das disciplinas, usando o que aprendemos sobre "cálculo de médias em planilhas eletrônicas". Para isso precisamos, antes de tudo, inserir os dados do boletim em uma planilha eletrônica.

Questão 3. Em qual disciplina Mickael teve o melhor desempenho nessas três avaliações? Justifique.

____

____

____

Questão 4. As notas de Sara nas mesmas avaliações foram 7, 5 e 8 em Língua Portuguesa, 6, 6 e 6 em Ciências Humanas e 9, 7 e 8 em Ciências da Natureza. Represente, na planilha eletrônica, a tabela dessas notas e calcule as médias de Sara.

Questão 5. Agora, represente abaixo a matriz correspondente às notas e às médias de Sara.

Explorando as matrizes

Muitas empresas possuem uma vasta quantidade de informações sobre clientes, potenciais clientes, vendas, compras, marketing, interesses de grupos, entre outros. No entanto, essas informações não teriam utilidade se não fossem organizadas de forma lógica ou se não pudessem ser recuperadas e correlacionadas facilmente.

A organização dessas informações é realizada por meio de um banco de dados, que pode ser compreendido como um conjunto de dados e tabelas inter-relacionados. E, como observamos em situações anteriores, tais tabelas podem ser vinculadas a **matrizes**.

Antes de definirmos formalmente o que são matrizes, vamos investigar mais uma situação-problema[3].

Vendas de livros no primeiro trimestre do ano

Em uma editora, a venda de livros de aventura, romance e ficção no primeiro trimestre de um ano foi organizada em uma tabela. Uma tabela desse tipo, em que os números estão dispostos em 3 linhas e 3 colunas, pode ser associada a uma **matriz 3×3** (lemos: matriz três por três).

[3] Situação-problema retirada do livro "Matemática em contexto" (DANTE, 2020) com adaptações.

Tabela 2: Vendas de livros de uma editora

Gênero \ Mês	Janeiro	Fevereiro	Março
Aventura	20 000	31 000	40 000
Romance	15 000	19 000	25 000
Ficção	16 000	20 000	28 000

Fonte: DANTE, 2020.

Matriz associada à tabela de vendas de livros: $\begin{pmatrix} 20\,000 & 31\,000 & 40\,000 \\ 15\,000 & 19\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 20\,000 & 28\,000 \end{pmatrix}$

Agora, percebamos que se desejarmos descobrir:

- o número de livros de aventura vendidos em fevereiro, simplesmente consultamos o número na primeira linha e na segunda coluna da matriz;
- o número de livros de romance vendidos em janeiro, simplesmente consultamos o número na segunda linha e na primeira coluna da matriz;
- o número de livros de ficção vendidos em março, simplesmente consultamos o número na terceira linha e na terceira coluna da matriz.

Usando as planilhas eletrônicas, você pode somar facilmente o conteúdo de várias células usando a função SOMA. Vejamos como proceder:

1. Insira os números que você deseja somar em células individuais na planilha;
2. Clique na célula onde você deseja que o resultado da soma apareça;
3. Digite =SOMA(;
4. Selecione as células que contêm os números que você deseja somar. Por exemplo, se seus números estão nas células A1 até A4, você digitaria A1:A4;
5. Feche o parêntese e pressione Enter.

Deste modo, a planilha somará os números nas células que você selecionou e exibirá o resultado na célula que você escolheu para a soma.

Vamos praticar!

Questão 6. Insira, na planilha eletrônica, os dados apresentados na tabela que representa a venda de livros.

Questão 7. Obtenha, usando a função =SOMA, a quantidade de livros vendidos em janeiro.

Questão 8. Agora, obtenha a quantidade de livros vendidos de cada gênero no primeiro trimestre.

Questão 9. Quantos livros a editora vendeu no primeiro trimestre? Explique como você obteve essa resposta.

____

____

Definição formal de uma matriz

Sejam *m* e *n* dois números inteiros maiores do que ou iguais a 1.

Definição: uma matriz $m \times n$ (lemos: matriz *m* por *n*) é toda tabela formada por $m \cdot n$ números reais, dispostos em *m* linhas e *n* colunas.

A ordem de uma matriz é uma descrição do número de linhas e colunas que ela possui. É geralmente expressa na forma "$m \times n$", dizemos que uma matriz é de ordem $m \times n$, onde "*m*" é o número de linhas e "*n*" é o número de colunas.

Observação: A ordem de uma matriz é importante porque determina as operações que podem ser realizadas com a matriz. Por exemplo, mais adiante, veremos que para adicionar ou subtrair duas matrizes, elas devem ter a mesma ordem. Para multiplicar duas matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

Analisemos alguns exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×2 (lemos: dois por dois), pois tem 2 linhas e 2 colunas.

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -5 & 3 \\ 4 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×3 (lemos: dois por três), pois tem 2 linhas e 3 colunas.

c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz de ordem 1×3.

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ é uma matriz de ordem 4×1.

Representação genérica de uma matriz

Para nomearmos uma matriz, geralmente utilizamos uma letra em maiúscula e, para representarmos um elemento específico dessa matriz, usamos uma letra em minúscula acompanhada de dois índices: o primeiro índice indica a linha onde o elemento está localizado e o segundo indica a coluna na qual o elemento se encontra. Por exemplo, um elemento genérico de uma matriz A é representado por a_{ij},

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \text{ com } 1 \le i \le m, 1 \le j \le n \text{ e } i, j \in \mathbb{N}.$$

(*Lemos: matriz A dos elementos a_{ij}, do tipo $m \times n$.*)

Essa matriz pode ser representada, genericamente, da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

O elemento a_{13} (lemos: a um três), por exemplo, tem $i = 1$ e $j = 3$, ou seja, ele está localizado na primeira linha e na terceira coluna.

Exemplo:
Acompanhe como escrever a matriz $M = (a_{ij})_{3\times 3}$, tal que

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, & se\ i = j \\ a_{ij} = 0, & se\ i \neq j \end{cases}.$$

Como a matriz M é de ordem 3×3, ela deve ter 3 linhas e 3 colunas tal que:

- $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$;
- $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$.

Dessa forma, temos a matriz de ordem 3×3: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Um pouco da história das matrizes

Na China[4], entre os séculos II a.C. e I a.C., diversos textos foram reunidos no livro *Jiuzhang suanshu*, provavelmente de diversos autores, para organizar conhecimentos matemáticos. *Jiu* e *zhang* são traduzidos como "nove capítulos", e *suan* e *shu* como "aritmética"; porém, esses termos provavelmente teriam como significado algo próximo de "a arte dos números" ou "procedimentos de cálculo". Atualmente, esse livro é popularmente conhecido como *Os nove capítulos da arte matemática*.

Nesse livro, foram organizados 246 problemas práticos, com o objetivo de apresentar métodos de resolução de problemas diversos da Matemática do dia a dia, bem como da engenharia, da topografia, do comércio e da tributação. Pela qualidade de exemplos, a obra teve papel fundamental no desenvolvimento posterior da Matemática na China.

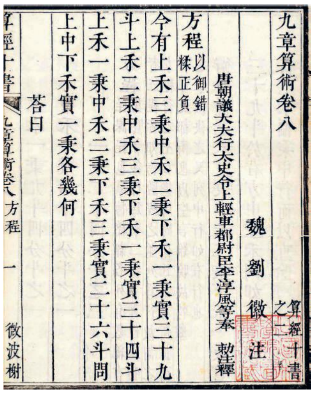
Um dos problemas dessa obra é apresentado a seguir, traduzido para o português.

"Existem três tipos de milho, dos quais três pacotes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro somam 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro somam 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro somam 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidas em um pacote de cada tipo?"

No livro referido, os dados contidos nesse problema são apresentados organizados como a seguir, dispostos da direita para a esquerda, conforme a cultura oriental.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Figura 7: Página do capítulo Fang Cheng ("Matrizes retangulares") do livro Jiuzhang suanshu.


九章算術卷八
算經十書之二
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勑釋
方程 以御錯糅正負
今有上禾三秉中禾二秉下禾一秉實三十九
斗上禾二秉中禾三秉下禾一秉實三十四斗
上禾一秉中禾二秉下禾三秉實二十六斗問
上中下禾實一秉各幾何
荅曰
算經十書 九章算術卷八 方程 一 微波榭

Fonte: Google Images.

[4] De acordo com BOYER (1996).

Dessa forma, podemos observar que os chineses, há mais de dois milênios, já utilizavam organizações em linhas e colunas com o propósito de coletar dados de um problema. No entanto, a representação de conjuntos de números na forma de matrizes só surgiu no século XIX.

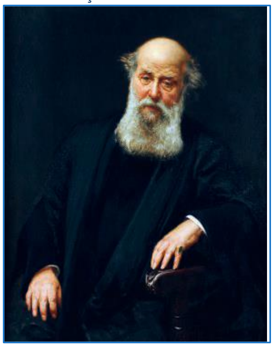
Em 1826, o matemático Augustin-Louis Cauchy foi o primeiro a dar um nome às matrizes, chamando-as de "tableaux" (tabela, em francês). No entanto, no século XIX, os matemáticos ingleses Arthur Cayley e James Joseph Sylvester deram um impulso significativo ao desenvolvimento das matrizes.

Cayley foi o primeiro a usar o termo "matriz" e a desenvolver uma teoria geral das matrizes. Sylvester desenvolveu o conceito de produto de matrizes e mostrou como as matrizes podem ser usadas para representar transformações lineares. Um século após as matrizes se tornaram uma ferramenta fundamental em matemática, física, engenharia e outras áreas.

Figura 8: Augustin-Louis Cauchy, século XIX (litografia). Demais informações desconhecidas.

Fonte: Google Images.

Figura 9: James Joseph Sylvester, século XIX (óleo sobre tela de 112 cm x 3 86 cm). Demais informações desconhecidas.



Fonte: Google Images.

Referências

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática em contextos: Trigonometria e Sistemas Lineares**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

FERREIRA, Fabrício Eduardo; SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ser protagonista: matemática e suas tecnologias: pensamento computacional e fluxogramas: ensino médio** – 1. Ed. – São Paulo: Edições SM, 2020.

O que é uma planilha eletrônica?. Escola Britânica de Artes criativas & Tecnologia, 2016. Disponível em: https://ebaconline.com.br/blog/o-que-e-para-que-serve-excel. Acesso em: 01 de março de 2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas: Ensino Médio.** – 1. Ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

3.2 Sequência Didática 2 - Tipos de Matrizes: Uma abordagem didática com enfoque em tecnologia e aplicações práticas

Nesta seção, a SD que iremos apresentar, com foco no tema "Tipos de Matrizes", destinada aos professores de Matemática que desejam trabalhar o tema, demonstra um planejamento estruturado e abrangente, capaz de conduzir os estudantes a um aprendizado significativo. As atividades propostas exploram diferentes tipos de matrizes, desde conceitos básicos até aplicações práticas, utilizando recursos variados e promovendo a participação ativa dos alunos.

A introdução do tema traz uma abordagem contextualizada, através de uma situação-problema relacionada a imagens digitais, conecta o conteúdo à realidade dos alunos e desperta seu interesse. Em seguida, aborda alguns dos principais conceitos relacionados às matrizes, incluindo diagonais, tipos de matrizes, igualdade de matrizes, transposta e matriz simétrica.

A proposta de atividades em grupo, resolução de problemas e utilização de planilhas eletrônicas promove o aprendizado ativo e colaborativo, além de desenvolver habilidades como trabalho em equipe, comunicação e resolução de problemas. A utilização de imagens e de planilhas eletrônicas contribui para tornar as aulas mais dinâmicas e facilitar a assimilação dos conceitos.

É importante destacar que a maioria das atividades propostas requer o uso de planilhas eletrônicas em um laboratório de informática. Posteriormente, serão apresentados detalhes sobre como a SD será implementada em cada etapa, além de diretrizes para os professores sobre como aplicá-la ou ajustá-la às necessidades de suas turmas.

Recursos Didáticos:

- Quadro branco, pincel e apagador;
- Notebook e projetor (opcional);
- Laboratório de informática;
- Computadores com acesso a planilhas eletrônicas;
- Materiais de apoio (cópias de atividades, lápis, borracha, caneta, apostilas, etc.).

Tempo pedagógico: aproximadamente oito aulas de 50 minutos cada, sendo divididas do seguinte modo:

- Etapa 1: uma aula;
- Etapa 2: três aulas;

- Etapa 3: três aulas;
- Etapa 4: uma aula.

Público-alvo: Estudantes do 2º ou 3º ano do ensino médio.

Objetivos da Sequência Didática:

- **Objetivo Geral:** Promover uma compreensão aprofundada e aplicada sobre os tipos de matrizes, através de uma abordagem contextualizada e intrigante que envolve o uso de imagens digitais, a exploração de conceitos fundamentais e tipos de matrizes, a resolução colaborativa de problemas utilizando planilhas eletrônicas.
- **Objetivos Específicos:**
  - Relacionar o conceito de matriz com imagens digitais, utilizando exemplos concretos e explorando a aplicação dessa ferramenta na área de processamento de imagens;
  - Identificar e diferenciar os diferentes tipos de diagonais presentes em uma matriz;
  - Classificar e caracterizar os diversos tipos de matrizes explorando suas propriedades e representações;
  - Resolver problemas envolvendo a representação de matrizes, utilizando planilhas eletrônicas como ferramenta auxiliar;
  - Aplicar as definições e conceitos aprendidos sobre matrizes na resolução de problemas práticos e desafiadores, individualmente e em grupo;
  - Definir o conceito de igualdade entre matrizes de forma precisa e rigorosa;
  - Compreender o conceito de matriz transposta e realizar a transposição de matrizes de forma correta, utilizando exemplos e diagramas;
  - Identificar e caracterizar matrizes simétricas;
  - Resolver problemas que envolvam os conceitos de igualdade, transposta e matriz simétrica, demonstrando domínio e aplicação prática dos conhecimentos aprendidos;
  - Utilizar o comando “=TRANSPOR” em planilhas eletrônicas para realizar a transposta de matrizes de forma eficiente e automatizada;
  - Aplicar exercícios desafiadores que integrem os diferentes conceitos aprendidos sobre matrizes, elevando o nível de dificuldade e estimulando o raciocínio crítico dos alunos;

- Desenvolver habilidades de trabalho em equipe, colaboração, comunicação e resolução de conflitos através da dinâmica de trabalho em grupo.

Procedimentos metodológicos:

Etapa 1

Na etapa inicial, a professora introduz a SD, delineando os objetivos, o tema central e a metodologia de cada fase. Após essa apresentação, a turma é organizada em grupos de até cinco integrantes. Dando seguimento, a professora inicia a exposição do conteúdo, apresentando as matrizes quadradas e um texto que desperta a curiosidade e o interesse dos alunos, conectando o tema com a realidade; o texto relaciona as imagens digitais com as matrizes quadradas demonstrando a aplicabilidade do conteúdo. Finalizando, propõe questões interpretativas e contextualizadas relacionadas ao que foi abordado.

Etapa 2

Nesta etapa, a SD apresenta os tipos de diagonais (principal e secundária) e discute os diferentes tipos de matrizes (quadrada, identidade, nula, diagonal, triangular linha e coluna), propõe a resolução de questões, com e sem o apoio de tecnologias digitais, relacionadas ao tema com o intuito de desenvolver a percepção espacial e o raciocínio lógico dos alunos.

Etapa 3

Neste momento, a professora traz uma definição clara e precisa da igualdade de matrizes, garantindo que os alunos compreendam o conceito de forma correta. Logo após, apresenta a definição da transposta de uma matriz de forma didática para facilitar a compreensão desse conceito, além disso explora o conceito de matriz simétrica com exemplos. Para que os conceitos estudados sejam consolidados, propõe a resolução de questões envolvendo igualdade, transposta e matriz simétrica e, sugere a utilização do comando "=TRANSPOR" em planilhas eletrônicas para que sejam desenvolvidas habilidades digitais e os estudantes se familiarizem com ferramentas úteis.

Etapa 4

Na fase final, a professora recapitula os principais conceitos explorados na sequência didática, consolidando o aprendizado. Em seguida, conduz uma reflexão sobre as aprendizagens, convidando os alunos a compartilharem suas vivências e desafios. Para finalizar, os grupos apresentam suas soluções para as questões investigadas, utilizando, quando necessário, planilhas eletrônicas para exibir os resultados. O objetivo é fomentar a discussão entre os grupos, analisar diferentes estratégias de resolução e solidificar os conhecimentos adquiridos.

Avaliação

A avaliação ocorrerá de forma contínua e abrangente, através do acompanhamento minucioso da participação dos alunos nas atividades propostas, tanto em grupo quanto individualmente. Serão levados em conta a compreensão dos conceitos apresentados, o envolvimento nas discussões e o entusiasmo demonstrado pelo tema. Adicionalmente, os trabalhos realizados serão examinados detalhadamente, buscando verificar a correta absorção e aplicação do conhecimento, identificando os pontos positivos de cada aluno e os aspectos que demandam maior atenção e desenvolvimento.

Sugestões de Melhorias

- **Levantamento de hipóteses:** incentive os alunos a levantarem hipóteses sobre como as imagens são formadas por matrizes antes da revelação.
- **Demonstração prática:** apresente uma simulação simples de como uma imagem é convertida em matriz e vice-versa, utilizando softwares ou ferramentas online.
- **Atividades interativas:** crie atividades interativas, como jogos ou quizzes, para revisar os conceitos de forma lúdica e engajadora.

Recomendamos a implementação dessa SD com as devidas adaptações ao contexto da turma e da escola, com o acompanhamento e avaliação constante do professor para garantir o sucesso do processo de ensino e aprendizagem.

MATRIZES: ALGUNS TIPOS

Introdução

Anteriormente, estudamos os conceitos iniciais de matrizes e sua generalização. Nessa aula, veremos que nem todas as matrizes são iguais. Existem vários tipos de matrizes, cada uma com suas próprias propriedades e características únicas, que recebem nomes especiais.

A seguir, exploraremos alguns dos tipos mais comuns de matrizes, incluindo matrizes quadradas, diagonais, identidade, nulas, simétricas, entre outras, e discutiremos suas propriedades e aplicações.

Matriz quadrada

Uma matriz de ordem $m \times n$ é denominada **matriz quadrada** quando a quantidade de linhas é igual a de colunas, isto é, $m = n$. Nesse caso, dizemos que a matriz é quadrada de ordem $n \times n$ ou, simplesmente, matriz quadrada de ordem n. Indicamos essa matriz por A_n.

Quantos *pixels*?[1]

Você já deve ter ouvido falar em resoluções *HD*, *Full HD*, 4K e afins. Mas, afinal, o que é resolução? Qual a diferença entre essas resoluções? Existe uma relação entre a resolução da imagem e o tamanho da tela?

Toda imagem que aparece na tela dos dispositivos eletrônicos é dividida em milhares ou milhões de minúsculos pontos luminosos chamados *pixels*. Talvez você consiga vê-los se aproximar bem os olhos de um televisor ou monitor, principalmente os maiores, mas são praticamente imperceptíveis na tela de *smartphones*, *tablets* ou *smartwatches*. A imagem é formada porque eles são dispostos em linhas e colunas justapostas e podem assumir diferentes cores, em diferentes tonalidades.

Por convenção popular, a resolução nada mais é do que a quantidade de *pixels* em cada linha e em cada coluna da tela, por exemplo, uma imagem exibida com resolução 1920 × 1080, também conhecida por *Full HD*, é formada por 2073600 *pixels*. Por conveniência, o primeiro número indica a quantidade de colunas. A posição de um *pixel* na imagem permite que ele seja codificado por uma descrição exata e minuciosa de sua localização e uma intensidade de cor, possibilitando que sejam realizadas, por exemplo, alterações e que haja o reconhecimento de padrões nesse tipo de imagem.

[1] Situação-problema retirada do livro "Diálogo: Matemática e suas tecnologias" (TEIXEIRA, 2020).

Em relação às cores, duas representações são frequentemente utilizadas para um *pixel*. Uma delas é o sistema RGB, cuja combinação em diferentes intensidades resulta em outra cor do espectro luminoso, com variações entre o preto (ausência de cor) e o branco (intensidade máxima). A outra representação corresponde à escala de cinza. Em ambos os casos, a intensidade de uma cor é definida por números inteiros de 0 a 255.

No sistema RGB, a cor **verde** é codificada por três números: "(0, 255, 0)", indicando não haver contribuição alguma das cores vermelha e azul, estando na intensidade máxima da cor verde.

Na escala de **cinza**, no sistema RGB, o código 0 é utilizado para a cor preta e o 255, para a cor branca, sendo que qualquer número inteiro nesse intervalo corresponde a determinado tom de cinza.

No sistema RGB, a cor **branca** é representada pelos números "(255, 255, 255)". Já a cor preta é representada pelos números "(0, 0, 0)".

Questão 1. Cite alguns aparelhos que geram imagens digitais.

____

____

____

Questão 2. Como os *pixels* são dispostos na composição de uma imagem digital? De que modo participam da constituição da imagem?

Veja o significado e a tradução de algumas abreviaturas:

Pixel: *picture element*, do inglês, elemento de imagem.

Full HD: *full high definition*, do inglês, alta definição completa.
PPI: *pixel per inches*, do inglês, *pixels* por polegadas.

RGB: *red*, *green*, *blue*, do inglês, vermelho, verde, azul.

____

____

Questão 3. Conhecendo o número de linhas e de colunas de *pixels* em uma imagem, que procedimento pode ser realizado para determinar a quantidade de *pixels* que compõe essa imagem?

____

____

____

Questão 4. Pesquise sobre as demais resoluções citadas no início do texto (HD e 4K) e calcule a quantidade de *pixels* que forma uma imagem em cada uma delas.

____

____

____

Questão 5. Escreva semelhanças e diferenças entre o sistema RGB e a escala de cinza.

____

____

____

Questão 6. (Fatec-SP) Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um *pixel* na tela. Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada *pixel*, do preto absoluto (código da cor: 0) passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127) ao branco absoluto (código da cor: 255). Suponha que na figura estejam representados 25 *pixels* de uma tela.

Figura 1: 25 pixels de uma tela.

Fonte 1: Fatec-SP.

Pixel: menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir uma cor.

A matriz numérica que corresponde às cores da figura apresentada é dada por:

$$\begin{pmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{pmatrix}.$$

Seja $M = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 5, em que i representa o número da linha e j representa o número da coluna, é definida da seguinte maneira:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & se \quad i = j \\ 127, & se \quad i > j \\ 255, & se \quad i < j \end{cases}.$$

A matriz *M* corresponde a uma matriz de cores em escala de cinza, descrita pelo texto, em uma tela. Represente a matriz M abaixo:

Sobre essa matriz de cores, pode-se afirmar que ela:

i. terá o mesmo número de *pixels* brancos e cinzas.
ii. terá o mesmo número de *pixels* brancos e pretos.
iii. terá o mesmo número de *pixels* pretos e cinzas.
iv. terá uma diagonal com cinco *pixels* brancos.
v. terá uma diagonal com cinco *pixels* cinzas.

Diagonais de uma matriz

Em uma matriz quadrada de ordem *n*, os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ constituem a diagonal principal da matriz (são os elementos a_{ij} com $i = j$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 13 \\ 2 & 0 & 4 \\ 10 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Diagonal Principal   Diagonal Principal

A outra diagonal da matriz quadrada, que vai do último elemento da 1ª linha até o 1º elemento da última linha, é chamada de diagonal secundária da matriz (são os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$).

Observação: O traço de uma matriz quadrada de ordem n é a soma de todos os elementos da diagonal principal:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}.$$

Algumas matrizes quadradas, por suas características, recebem denominações especiais: matriz triangular, matriz diagonal e matriz identidade. A seguir, vamos estudar as características de cada uma delas.

Matriz triangular

Matriz triangular é a matriz quadrada de ordem *n* cujos elementos, acima ou abaixo da diagonal principal, são todos nulos. Nesse tipo de matriz,

$$a_{ij} = 0 \text{ para } i < j \text{ ou } a_{ij} = 0 \text{ para } i > j \text{ .}$$

Exemplos:

i. Matriz triangular de ordem 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

ii. Matriz triangular de ordem 3.

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Observação: Toda matriz triangular cujos elementos nulos estão abaixo da diagonal principal chama-se matriz triangular superior, e toda matriz triangular cujos elementos nulos estão acima da diagonal principal chama-se matriz triangular inferior.

Matriz diagonal

Matriz diagonal é a matriz quadrada de ordem *n* cujos elementos que não estão na diagonal principal são todos nulos, ou seja, na matriz diagonal $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplos:

i. Matriz diagonal de ordem 2.

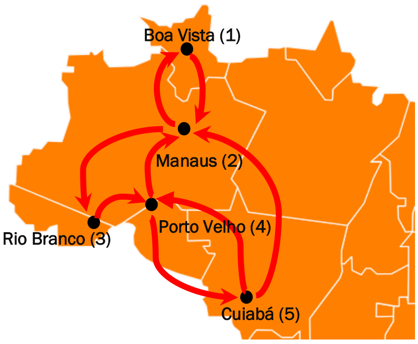
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

ii. Matriz diagonal de ordem 3.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Questão 7. O mapa apresenta as rotas, indicadas pelas setas vermelhas, oferecidas por uma companhia aérea que atua em certa região do Brasil[2].

Figura 2: Rotas aéreas.



Fonte: Google images com adaptações.

a) Escreva a matriz $C = (c_{ij})_{5\times5}$, tal que:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe percurso direto da cidade i para j e se } i = j \\ 0, & \text{se não existe percurso direto da cidade i para j} \end{cases} .$$

____

____

____

____

b) Thayná pretende fazer uma viagem de Rio Branco a Boa Vista. Sabendo que a passagem para cada percurso custa R$ 210,00, qual é o menor custo para uma viagem de ida e volta de Rio Branco a Boa vista? Por quê?

____

____

____

c) A matriz C é uma matriz triangular? É uma matriz diagonal?

____

____

d) Represente a matriz do item a) em uma planilha eletrônica.

Matriz identidade

Matriz identidade é a matriz quadrada de ordem n cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais, iguais a 0. A matriz identidade de ordem n é indicada por I_n.

---

[2] Situação-problema retirada do livro "Diálogo: Matemática e suas tecnologias" (TEIXEIRA, 2020) com adaptações.

Em linguagem matricial podemos dizer que na matriz identidade,

$a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$.

Exemplos:

i. Matriz identidade de ordem 2.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii. Matriz identidade de ordem 3.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

Matriz nula é aquela em que todos os elementos são iguais a zero. A matriz nula de ordem $m \times n$ é indicada por $0_{m \times n}$. A matriz quadrada nula de ordem n é indicada por 0_n .

Exemplos:

i. Matriz nula de ordem 2.

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii. Matriz nula de ordem 2×3.

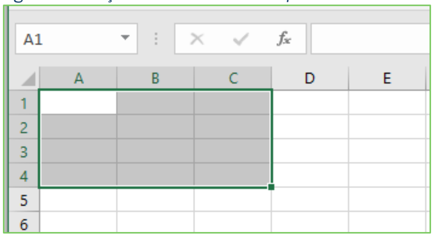
$$0_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Você sabia?

Em uma planilha eletrônica podemos colocar todos os elementos de uma matriz nula ao mesmo tempo. Por exemplo, se quisermos representar uma matriz $0_{4\times3}$ através de uma tabela, basta seguirmos estes passos:

i. selecionamos 4 linhas e 3 colunas;

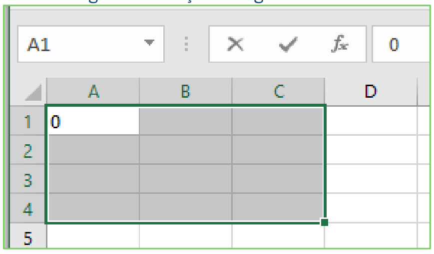
Figura 3: Seleção de células em uma planilha eletrônica.



Fonte: Elaborada pela autora no excel.

ii. inserimos o algarismo 0 (zero) na barra de fórmulas;

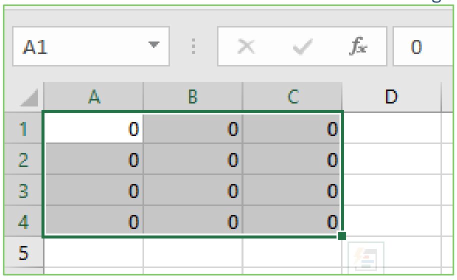
Figura 4: Inserção do algarismo zero.



Fonte: Elaborada pela autora no excel.

iii. e por fim teclamos “CTRL+SHIFT+ENTER”.

Figura 5: Preenchimento de todas as células selecionadas com o algarismo zero.



Fonte: Elaborada pela autora no excel.

Questão 8. Agora faça você mesmo!
Represente na planilha eletrônica uma matriz nula de ordem 4×5, por exemplo.

Matriz linha e matriz coluna

As matrizes que têm apenas uma linha ou apenas uma coluna recebem, respectivamente, os nomes **matriz linha** e **matriz coluna**. De modo geral, uma matriz do tipo:

$1 \times n$ é chamada **matriz linha**;
$m \times 1$ é chamada **matriz coluna**.

Exemplos:

i. Matriz linha de ordem 1×3.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ii. Matriz coluna de ordem 4×1.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

É possível obter uma matriz linha ou coluna que seja uma matriz nula? Dê um exemplo.

Igualdade de matrizes

Dadas as matrizes A e B, dizemos que essas matrizes são iguais ($A = B$) se, e somente se, elas possuem a mesma ordem e os elementos que ocupam a mesma posição em ambas (elementos correspondentes) são iguais. De maneira simbólica, temos:

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Se existir pelo menos um elemento a_{ij}, tal que $a_{ij} \neq b_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, então $A \neq B$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} \frac{8}{2} & \frac{4}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{6}{2} \end{pmatrix}$$

As matrizes A e B são iguais, pois são de mesma ordem (2×2) e os elementos correspondentes são iguais.

Observação: Se duas matrizes A e B têm ordens diferentes, então $A \neq B$.

Questão 9. Classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.
a) Toda matriz quadrada nula é triangular.
b) A matriz identidade é um exemplo de matriz diagonal.
c) Toda matriz quadrada é triangular superior.
d) Quando pelo menos um elemento da matriz é igual a 0, então a matriz é denominada nula.
e) O traço da matriz identidade é numericamente igual à sua ordem.

Entre em **www.kahoot.it** e use o pin abaixo.

PIN do jogo:

Transposta de uma matriz

Chama-se matriz transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, e indica-se por A^t a matriz do tipo $n \times m$ que tem as colunas ordenadamente iguais às linhas de A.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3 \quad 5} \\ \boxed{9 \quad 4 \quad 7} \end{pmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Observação: Note que:
- A ordem de A é 2×3 e a de A^t é 3×2;
- A 1ª linha de A corresponde à 1ª coluna de A^t;
- A 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de A^t.

Matriz simétrica

Matriz simétrica é uma matriz quadrada A, em que $A = A^t$. Em uma matriz simétrica $A = (a_{ij})_n$, temos $a_{ij} = a_{ij}$ para qualquer i e j, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.
Dessa maneira, os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplos:

i. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica, pois $A = A^t$.

ii. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica, pois $B = B^t$.

Questão 10. A Olimpíada é um dos maiores eventos esportivos da atualidade. Nela, participam atletas de diversas nacionalidades, os quais se reúnem a cada quatro anos em uma cidade escolhida como sede para a disputa dos jogos[3].
Veja na tabela abaixo a quantidade de medalhas conquistadas pelo Brasil nas quatro últimas edições das Olimpíadas.

Medalhas conquistadas pelo Brasil nas Olimpíadas - 2008 a 2020			
Olimpíada	Quantidade de medalhas		
	Ouro	Prata	Bronze
Tóquio (2020)	7	6	8
Rio (2016)	7	6	6
Londres (2012)	3	5	9
Pequim (2008)	3	4	10

Fonte: Comitê Olímpico Brasileiro. O Brasil nos jogos. Disponível em: <https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas>. Acesso em: 04 mar. 2024.

a) Escreva uma matriz A que represente as informações da tabela.

b) Escreva a matriz A^t .

[3] Situação-problema retirada do livro "Matemática interligada" ANDRADE (2020) com adaptações.

c) As linhas da matriz A apresentam as mesmas informações das linhas da matriz A^t? Por quê?

____

____

____

d) Na matriz A^t, o que representam as:
• colunas?

____

• linhas?

____

e) Construa abaixo uma tabela com base em A^t.

f) Agora, vamos obter a matriz transposta usando uma planilha eletrônica. Para isso, siga as instruções: digite a tabela dada na planilha; selecione a quantidade de linhas e colunas da matriz A^t; na barra de fórmulas insira o comando "=TRANSPOR(intervalo das células da matriz original)"; pressionar "CTRL+SHIFT+ENTER".

Referências

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: matrizes, sistemas lineares e geometria analítica/obra coletiva**; editora responsável. 1 ed. São Paulo: Scipione, 2020.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática em contextos: Trigonometria e Sistemas Lineares**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, volume 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas: Ensino Médio.** – 1. Ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida. **Diálogo: matemática e suas tecnologias: Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas**. – 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2020.

3.3 Sequência Didática 3 - Operações Matriciais com GeoGebra e Planilhas Eletrônicas

Esta sequência didática, com foco nas operações com matrizes, promete um processo de aprendizagem empolgante para os alunos, guiando-os desde a introdução dos conceitos até a resolução de problemas complexos, utilizando ferramentas digitais como o GeoGebra e planilhas eletrônicas. Através de atividades diversificadas, trabalho em equipe e situações-problema, os estudantes poderão desenvolver habilidades matemáticas essenciais, para aprimorar seu raciocínio lógico e criatividade.

Inicialmente, será apresentada uma situação-problema real e contextualizada que envolva operações com matrizes. Em seguida, será promovida uma discussão em grupo sobre a situação-problema, incentivando a exploração de diferentes abordagens e soluções. Paralelamente, será realizada uma breve introdução à interface do GeoGebra, destacando as ferramentas essenciais para representações matemáticas.

Logo após, a SD apresentará o conceito de matriz oposta e das propriedades da adição de matrizes, definirá a subtração de matrizes, relacionando-a com a adição de matrizes opostas e fará a proposta da resolução de questões envolvendo adição e subtração de matrizes, utilizando o GeoGebra para a visualização e cálculo das operações.

Dando continuidade, será apresentada uma nova situação-problema que envolva a multiplicação de uma matriz por um número real, a definição da multiplicação de uma matriz por um número real e a exposição das propriedades da multiplicação de uma matriz por um número real.

Finalmente, introduzirá a multiplicação de matrizes através de situação-problema antes da definição do produto entre matrizes, além de sugerir a resolução de questões envolvendo a multiplicação de matrizes, utilizando o GeoGebra para a visualização e cálculo das operações.

Vale ressaltar que a maioria das atividades propostas nesta SD demanda a utilização do GeoGebra e de Planilhas eletrônicas, preferencialmente em um laboratório de informática equipado. A seguir, serão detalhadas as etapas de implementação da SD, fornecendo aos professores orientações claras sobre como aplicar as atividades e adaptá-las às necessidades específicas de suas turmas.

Recursos Didáticos:

- Quadro branco, pincel e apagador;
- Notebook e projetor (opcional);
- Laboratório de informática;

- Computadores com acesso ao GeoGebra e a planilhas eletrônicas;
- Materiais de apoio (cópias de atividades, lápis, borracha, caneta, apostilas, etc.).

Tempo pedagógico: aproximadamente oito aulas de 50 minutos cada, sendo divididas do seguinte modo:

- Etapa 1: uma aula;
- Etapa 2: duas aulas;
- Etapa 3: duas aulas;
- Etapa 4: duas aulas;
- Etapa 5: uma aula.

Público-alvo: Estudantes do 2º ou 3º ano do Ensino Médio.

Objetivos da Sequência Didática:

- **Objetivo Geral:** Desenvolver o conhecimento e a compreensão dos alunos sobre as operações com matrizes, utilizando o GeoGebra e planilhas eletrônicas como ferramentas para a exploração, resolução de problemas e aprimoramento do raciocínio lógico, do pensamento crítico e da capacidade de resolução de problemas.
- **Objetivos Específicos:**
  - Definir e aplicar os conceitos de matriz oposta, adição, subtração, multiplicação de uma matriz por um número real e multiplicação de matrizes;
  - Resolver problemas envolvendo operações com matrizes de forma eficiente e criativa;
  - Utilizar o GeoGebra e planilhas eletrônicas como ferramentas para representar, manipular e visualizar operações com matrizes;
  - Desenvolver habilidades de trabalho em equipe, comunicação e colaboração na resolução de problemas matemáticos;
  - Aprimorar o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas complexos.

Procedimentos metodológicos

A metodologia desta SD se baseia na abordagem construtivista, priorizando a aprendizagem ativa dos alunos. As atividades propostas incentivam a investigação, a exploração, a experimentação e a resolução de problemas reais e contextualizados, utilizando recursos tecnológicos como ferramentas de apoio ao aprendizado.

Etapa 1

Nesta etapa inicial, a professora apresenta uma situação-problema real e contextualizada que envolve operações com matrizes, despertando a curiosidade e o interesse dos alunos pelo tema; pode-se promover uma discussão em grupo sobre a situação-problema, buscando diferentes abordagens e soluções, utilizando questionamentos como: "Que tipo de informação as matrizes podem representar nesse caso?", "Como podemos utilizar as matrizes para resolver o problema?". Logo após, apresenta uma breve introdução à interface do GeoGebra, demonstrando as ferramentas básicas para representações matemáticas.

Etapa 2

Neste momento, apresenta o conceito de matriz oposta de forma clara e concisa, utilizando exemplos para facilitar a compreensão; expõe as propriedades da adição de matrizes, como a propriedade comutativa, associativa, distributiva e elemento neutro, utilizando exemplos práticos e demonstrações matemáticas. Em seguida, define a subtração de matrizes, relacionando-a com a adição de matrizes opostas e propõe a resolução de questões envolvendo adição e subtração de matrizes, utilizando o GeoGebra para a visualização e cálculo das operações. Logo após, pede-se a resolução de questões que combinem adição e subtração de matrizes, incentivando os alunos a explorarem diferentes estratégias e soluções.

Etapa 3

Nesta terceira etapa, a professora apresenta uma nova situação-problema que envolva a multiplicação de uma matriz por um número real, conectando o conceito à realidade e despertando a curiosidade dos alunos. A seguir, define a multiplicação de uma matriz por um número real, utilizando exemplos para facilitar a compreensão; além disso, expõe as propriedades da multiplicação de uma matriz por um número real. Neste momento, pode-se fazer alguns questionamentos aos alunos, tais como: “Imagine que você precisa ajustar a luminosidade de uma imagem digital representada por uma matriz. Como a multiplicação de uma matriz por um número real pode auxiliar nesse processo?”, “Uma empresa analisa os custos de produção de diferentes produtos representados por matrizes. Como podemos utilizar a multiplicação de uma matriz por um número real para analisar o aumento ou a diminuição desses custos?”.

Dando continuidade, a professora ensina aos alunos como utilizar o GeoGebra para facilitar a visualização e o cálculo da multiplicação de uma matriz por um número real. Isto pode envolver a criação de objetos matemáticos (matrizes) e o uso de comandos específicos do software.

Etapa 4

Nesta etapa, traz uma situação-problema que envolva a multiplicação de matrizes, conectando o conceito à realidade e despertando a curiosidade dos alunos. Dando continuidade, define o produto entre matrizes de forma clara e concisa, apresenta o algoritmo da multiplicação de matrizes passo a passo, utilizando exemplos práticos e faz a exposição das propriedades da multiplicação de matrizes. Por fim, sugere a resolução de questões envolvendo a multiplicação de matrizes, utilizando o GeoGebra para a visualização e cálculo das operações e incentivando os alunos a explorarem diferentes estratégias e soluções.

Etapa 5

Nesta etapa culminante, será apresentada uma situação-problema complexa que demanda a aplicação integrada dos diversos conceitos explorados sobre operações com matrizes, desafiando os alunos a mobilizarem seus conhecimentos de forma criativa e eficaz. Cada grupo será convidado a apresentar sua solução para a turma, fomentando uma rica discussão sobre as diferentes estratégias utilizadas, os resultados obtidos e os aprendizados decorrentes. Ao final, será promovido um momento de reflexão individual e coletiva sobre o processo de aprendizagem vivenciado ao longo da SD, incentivando os alunos a compartilharem os desafios enfrentados, as habilidades desenvolvidas e os conhecimentos adquiridos, consolidando assim a experiência e o aprendizado.

Avaliação

O processo avaliativo será contínuo e formativo, acompanhando o desenvolvimento dos alunos em cada etapa da SD. Serão utilizados diferentes instrumentos e estratégias para verificar o alcance dos objetivos de aprendizagem, considerando as individualidades e o progresso de cada estudante. Na terceira sequência didática, as atividades propostas visam à integração das competências desenvolvidas nos dois softwares, bem como à consolidação dos conteúdos abordados nas sequências anteriores. A avaliação, portanto, será mais abrangente, contemplando a complexidade das atividades propostas.

- **Instrumentos de Avaliação:**

    1. **Observação Participativa:** o professor observará a participação dos alunos nas atividades em grupo e individuais, avaliando:
       o Engajamento e colaboração nas discussões e resolução de problemas;
       o Compreensão e aplicação dos conceitos de matrizes;
       o Utilização do GeoGebra e planilhas eletrônicas como ferramentas de apoio;
       o Comunicação clara e concisa das ideias e soluções;
       o Raciocínio lógico e crítico na abordagem dos problemas.

2. **Avaliação dos trabalhos em grupo:** serão analisados os trabalhos realizados pelos grupos, considerando:
   o Coerência e correção das soluções apresentadas;
   o Criatividade e originalidade na resolução dos problemas;
   o Organização e clareza na apresentação dos resultados;
   o Utilização adequada do GeoGebra e planilhas eletrônicas.
3. **Avaliação Individual:** serão aplicadas atividades individuais, como testes, exercícios e resolução de problemas, para verificar:
   o Domínio dos conceitos e operações com matrizes;
   o Capacidade de resolver problemas em diferentes contextos;
   o Habilidade em utilizar o GeoGebra e planilhas eletrônicas;
   o Raciocínio lógico e crítico na resolução de problemas.
4. **Autoavaliação e Reflexão:** os alunos serão incentivados a realizar autoavaliações e reflexões sobre seu próprio aprendizado, considerando:
   o Desafios enfrentados e superados;
   o Habilidades desenvolvidas;
   o Conhecimentos adquiridos;
   o Estratégias de estudo e resolução de problemas.

- **Critérios de Avaliação:**
  - **Compreensão dos Conceitos:** demonstrar compreensão dos conceitos de matrizes e suas operações, aplicando-os corretamente na resolução de problemas;
  - **Resolução de Problemas:** apresentar soluções coerentes e eficazes para problemas envolvendo matrizes em diferentes contextos.
  - **Utilização de Ferramentas:** utilizar o GeoGebra e planilhas eletrônicas de forma adequada para auxiliar na resolução de problemas.
  - **Trabalho em Equipe:** colaborar efetivamente com os colegas, participando ativamente das discussões e contribuindo para a resolução dos problemas.
  - **Comunicação:** expressar ideias e soluções de forma clara, concisa e organizada, utilizando linguagem matemática adequada.
  - **Raciocínio Lógico e Crítico:** demonstrar capacidade de analisar, interpretar e resolver problemas, utilizando o raciocínio lógico e crítico.

Ao longo da SD, o professor fornecerá feedback individual e coletivo aos alunos, destacando os pontos positivos e as áreas que necessitam de aprimoramento. O acompanhamento individualizado permitirá identificar as dificuldades de cada aluno e oferecer suporte adequado para o seu desenvolvimento.

O professor poderá adaptar os instrumentos e critérios de avaliação de acordo com as necessidades e características de cada turma, garantindo que o processo avaliativo seja justo, transparente e contribua para o aprendizado de todos os estudantes.

Sugestões de Melhorias:

- **Incluir atividades de pesquisa:** Incentivar os alunos a pesquisarem sobre aplicações práticas das operações com matrizes em diferentes áreas do conhecimento, como engenharia, física, economia e computação.
- **Promover debates:** Estimular debates em sala de aula sobre os conceitos de matrizes e suas implicações no mundo real.
- **Utilizar diferentes recursos didáticos:** Além do GeoGebra e das planilhas eletrônicas, explorar outros recursos didáticos, como vídeos, simulações e jogos educativos, para tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo.
- **Propor atividades de avaliação:** Criar atividades de avaliação diversificadas para verificar o aprendizado dos alunos e identificar pontos que precisam ser reavaliados.

Sugerimos que o professor personalize a implementação da SD, levando em consideração o nível de conhecimento prévio, as necessidades específicas e os interesses de cada turma. É fundamental realizar uma avaliação contínua da efetividade das atividades, adaptando-as e ajustando-as sempre que necessário, a fim de garantir uma melhor experiência de aprendizado para todos os alunos.

OPERAÇÕES COM MATRIZES

PARTE I

Hoje, vamos começar a aprender sobre as operações com matrizes: adição e subtração. Essas operações são fundamentais para entender como podemos manipular as estruturas matriciais e para resolver problemas do mundo real.

Adição e subtração de matrizes

Adição de matrizes

O direito igualitário ao voto entre homens e mulheres no Brasil é uma conquista que as mulheres obtiveram com muita luta ao longo de nossa história. Para elas, o direito de votar e de receber votos foi instituído apenas a partir de 1932. Contudo, percebe-se ainda a necessidade de um avanço significativo na participação das mulheres na composição dos políticos eleitos no Brasil.

Observe a quantidade de homens e de mulheres eleitos deputados federais e senadores da república no Brasil nas últimas duas eleições para tais cargos[1].

Tabela 1: Quantidade de candidatos eleitos para a Câmara Federal do Brasil por gênero.

Ano da Eleição \ Gênero	Feminino	Masculino
2018	77	436
2022	91	422

Fonte: TSE

Tabela 2: Quantidade de candidatos eleitos para o Senado Federal do Brasil por gênero.

Ano da Eleição \ Gênero	Feminino	Masculino
2018	7	47
2022	4	23

Fonte: TSE

Com base nas tabelas, podemos construir as matrizes $A = \begin{pmatrix} 77 & 436 \\ 91 & 422 \end{pmatrix}$, para a Câmara Federal, e $B = \begin{pmatrix} 7 & 47 \\ 4 & 23 \end{pmatrix}$, para o Senado Federal. Ao adicionarmos os elementos de mesma posição nas matrizes A e B, obtemos uma matriz que representa o total de candidatos eleitos por sexo no Brasil para a Câmara Federal e para o Senado Federal nos anos de 2018 e 2022.

$$\begin{pmatrix} 77 & 436 \\ 91 & 422 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 47 \\ 4 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77+7 & 436+47 \\ 91+4 & 422+23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 483 \\ 95 & 445 \end{pmatrix}.$$

[1] Exemplo retirado do livro "Diálogo: Matemática e suas tecnologias" (TEIXEIRA, 2020) com adaptações.

Ao adicionarmos os elementos correspondentes das matrizes *A* e *B*, estamos adicionando essas matrizes, ou seja, calculando *A* + *B*.

Consideremos as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem $m \times n$. A soma $A + B$ é igual à matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

GeoGebra

O *GeoGebra* é um software matemático gratuito e de código aberto desenvolvido por Markus Hohenwarter, em sua tese de doutorado no ano de 2001 na Universidade de Salzburgo, Áustria. Ele o criou com o objetivo de obter uma ferramenta adequada ao ensino de Matemática, combinando entes geométricos aos algébricos (daí vem o nome: *GeoGebra* = Geometria e Álgebra)[2].

Esse software de Geometria Dinâmica nos permite explorar conceitos matemáticos de forma interativa e visual. Ele combina geometria, álgebra, planilha eletrônica, gráficos e estatística em uma única plataforma, tornando-o uma ferramenta fundamental para o ensino e a aprendizagem da matemática.

Principais Recursos

- **Construções geométricas:** Criar pontos, retas, segmentos, polígonos, círculos e outras formas geométricas com precisão e facilidade.
- **Manipulação dinâmica:** Arrastar e soltar objetos para observar como suas propriedades mudam em tempo real.
- **Cálculos e medidas:** Realizar cálculos matemáticos, visualizar medidas de ângulos e distâncias, e explorar relações geométricas.
- **Gráficos e funções:** Criar e visualizar gráficos de funções, explorar equações e desigualdades, e analisar o comportamento de funções.

Interface[3]

A interface do *GeoGebra* ao ser carregado apresenta a seguinte configuração padrão:

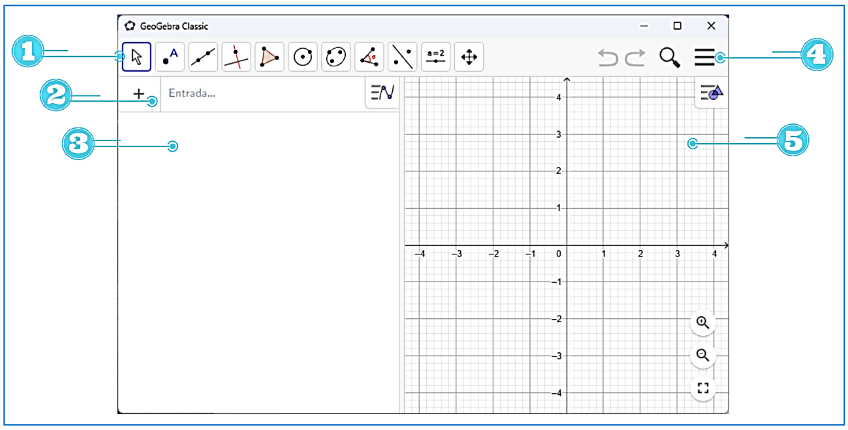
1. **Barra de Ferramentas:** A Barra de Ferramentas concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.
2. **Entrada:** Campo de entrada para digitação de comandos.
3. **Janela de Álgebra:** Área em que é exibida as coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos.

---

[2] Informações obtidas no endereço eletrônico: https://docente.ifrn.edu.br/thiagopardo/atividades/tutorial-do-geogebra/view.
[3] Informações obtidas no endereço eletrônico: https://ogeogebra.com.br/.

4. **Barra de Menus:** A barra de menus disponibiliza opções para salvar o projeto em arquivo (*.ggb*) e para controlar configurações gerais.
5. **Janela de Visualização:** Área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse usando ícones da Barra de Ícones ou comandos digitados na Entrada.

Figura 1: Interface do GeoGebra



Fonte: Autoria própria.

Barra de ferramentas

A **Barra de Ferramentas** do *GeoGebra*, localizada na parte superior da interface, é a porta de entrada para um mundo de possibilidades matemáticas. Composta por onze conjuntos de ícones intuitivos, ela oferece as ferramentas essenciais para você construir, manipular e explorar objetos geométricos com maestria.

Figura 2: Barra de Ferramentas do GeoGebra.

Fonte: Autoria própria.

Vamos entender um pouco sobre os ícones da barra de ferramentas.

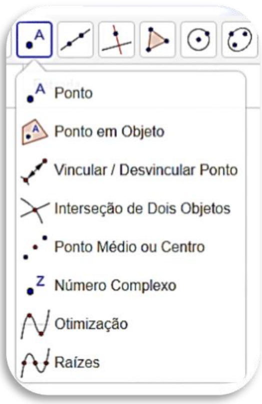
- **Mover**

Figura 3: 1º ícone da barra de ferramentas.

Fonte: Autoria própria.

- **Ponto**

Figura 4: 2º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

- **Linhas retas**

Figura 5: 3º ícone da barra de ferramentas.

Fonte: Autoria própria.

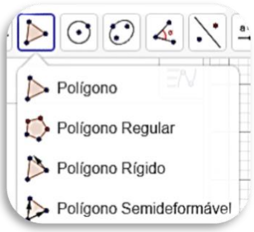
- **Posições relativas**

Figura 6: 4º ícone da barra de ferramentas.

Fonte: Autoria própria.

- **Polígonos**

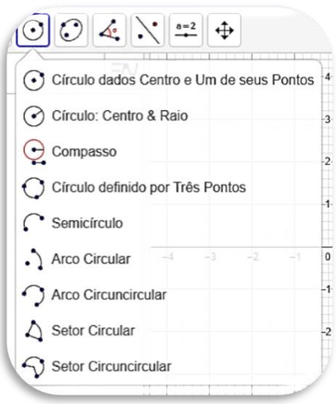
Figura 7: 5º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

- **Formas circulares**

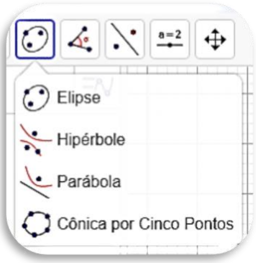
Figura 8: 6º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

- Cônicas

Figura 9: 7º ícone da barra de ferramentas.



Fonte: Autoria própria.

- Ângulos e medidas

Figura 10: 8º ícone da barra de ferramentas.

Fonte: Autoria própria.

- Transformações

Figura 11: 9º ícone da barra de ferramentas.

Fonte: Autoria própria.

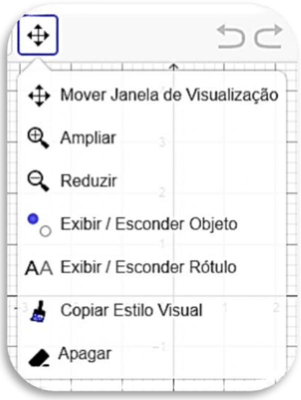
- Controle

Figura 12: 10º ícone da barra de ferramentas.

Fonte: Autoria própria.

- Visualização

Figura 13: 11º ícone da barra de ferramentas.



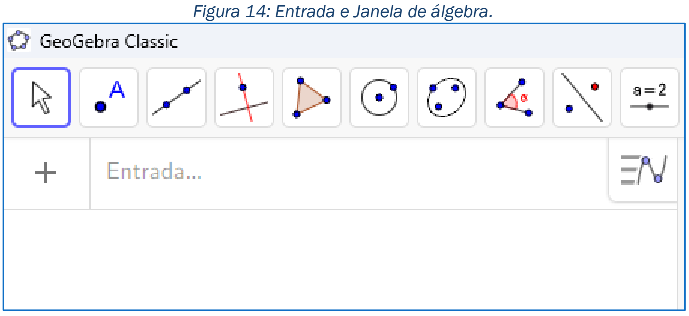
Fonte: Autoria própria.

Agora que já conhecemos um pouco sobre o *GeoGebra*, vamos aprender como ele pode nos auxiliar calculando e verificando os resultados das operações com matrizes. Vejamos um passo a passo de como proceder.

Para inserir uma matriz dois por dois no *GeoGebra*, siga estas etapas:

i. Abra o software *GeoGebra*.
ii. Deixe o eixo e a janela de álgebra aparecendo.

Figura 14: Entrada e Janela de álgebra.



Fonte: Autoria própria.

iii. Vamos fazer o que se pede.
Seja A uma matriz quadrada de ordem 2. Digite na janela de entrada:

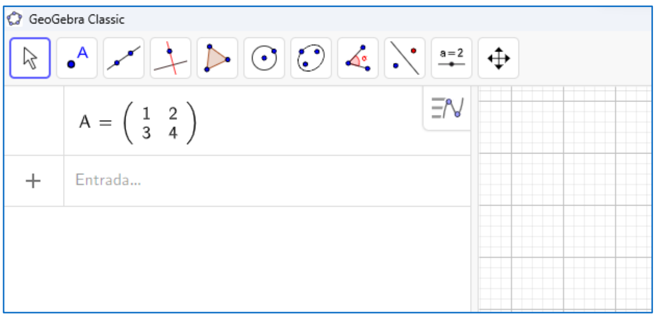
A = {{1,2},{3,5}}

Explicação:

- Cada linha da matriz deve ser colocada entre chaves. Para separar cada uma delas usamos uma vírgula.
- Cada elemento da matriz deve ser separado por uma vírgula.

Resultado:
A matriz será inserida na página em branco, conforme o exemplo abaixo.

Figura 15: Visualização da matriz na janela de álgebra.



Fonte: Autoria própria.

Atenção: a matriz só apareceu na janela de álgebra. Não se preocupe, mais adiante, vamos fazer com que ela apareça também na janela de visualização, no formato de texto.

Questão 1. A empresa de telefonia fixa de Marcos oferece a seus clientes duas opções de planos residenciais. As matrizes J, F e M indicam, respectivamente, as vendas desses planos em uma área de cobertura que compreende quatro bairros nos meses de janeiro, fevereiro e março. Em cada uma delas, as linhas indicam os tipos de plano I e II (de cima para baixo) e as colunas, os bairros A, B, C e D (da esquerda para a direita)[4].

$$J = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 22 & 19 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 22 & 25 & 20 & 23 \\ 22 & 20 & 26 & 19 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 22 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 23 \end{pmatrix}$$

a) Insira as matrizes J, M e F no *GeoGebra*.

b) Calcule, com a ajuda do *Geogebra*, a matriz $T_{2\times4}$ que representa o total de vendas dos planos I e II em cada bairro no trimestre apresentado.

c) Em qual bairro foram vendidas mais unidades do plano I? E do plano II?

____

____

Matriz oposta

Observe a adição das matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) & -3+3 \\ -2+2 & 0+0 & 5+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, como $A + B$ resulta em uma matriz nula, dizemos que B é a matriz oposta de A, e vice-versa.

Dada uma matriz A, denominamos **matriz oposta** de A, indicada por $-A$, a matriz cuja adição à A resulta em uma matriz nula de mesma ordem, ou seja, $A_{m\times n} + (-A_{m\times n}) = 0_{m\times n}$. Nas matrizes A e -A, os elementos correspondentes são opostos.

[4] Situação-problema retirada do livro "Diálogo: Matemática e suas tecnologias" (TEIXEIRA, 2020) com adaptações.

Propriedades da adição de matrizes

A adição de matrizes tem as mesmas propriedades básicas da adição de números reais, uma vez que foi definida por meio da adição de seus elementos correspondentes. Assim, considerando A, B e C matrizes de mesma ordem $m \times n$, temos:

- propriedade comutativa: $A + B = B + A$;
- propriedade associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- elemento neutro: $A + 0 = A$;
- elemento oposto: $A + (-A) = 0$.

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$, denominamos diferença entre A e B, indicada por $A - B$, a matriz C obtida ao calcularmos a adição de A com o oposto de B, ou seja, $A - B = A + (-B) = C$.

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, segue que:

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + (-3) & 3 + (-3) \\ -5 + (-2) & 4 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Sendo $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, com $A - B = C$, temos que $a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$. Assim, também podemos calcular $A - B$ subtraindo de cada elemento de A o elemento correspondente de B.

Exemplo: Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}$, temos:

$$A - B = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 - 3 & 5 - 5 & 8 - 0 \\ 9 - 2 & 4 - (-3) & -1 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & -12 \end{pmatrix}.$$

Questão 2: Observe a previsão de temperatura para algumas cidades pernambucanas:

Tabela 3: Previsão de temperatura mínima para janeiro de 2024.

Cidade \ Dia	11	12	13	14	15
Afogados da Ingazeira	23° C	23° C	23° C	22° C	22° C
São José do Egito	23° C	22° C	22° C	22° C	22° C
Serra Talhada	24° C	23° C	23° C	23° C	23° C
Tabira	23° C	23° C	23° C	22° C	22° C

Fonte: <http://tempo.cptec.inpe.br>. Acesso em: 09 de jan. 2024.

Tabela 4: Previsão de temperatura máxima para janeiro de 2024.

Cidade \ Dia	11	12	13	14	15
Afogados da Ingazeira	32° C	32° C	34° C	35° C	34° C
São José do Egito	32° C	32° C	33° C	33° C	33° C
Serra Talhada	32° C	32° C	33° C	34° C	34° C
Tabira	33° C	33° C	34° C	35° C	34° C

Fonte: <http://tempo.cptec.inpe.br>. Acesso em: 09 de jan. 2024.

a) Insira no *GeoGebra* as matrizes M e N que apresentam, respectivamente, as temperaturas mínimas e máximas segundo o dia e a cidade.

b) Verifique, utilizando o *GeoGebra*, por qual das matrizes a seguir é dada a variação de temperatura de cada dia:

- $A = M + N$
- $B = N - M$
- $C = M - N$

____

c) Escreva a matriz encontrada no item b.

d) Para qual cidade estava prevista a maior variação de temperatura em 14 de janeiro de 2024? E a menor?

____

____

e) Em qual dia Afogados da Ingazeira apresentou a maior previsão de variação de temperatura?

____

____

Questão 3. Junte-se a um colega e estabeleçam quatro matrizes, A, B, C e 0, de mesma ordem, e verifiquem **numericamente** a validade das seguintes propriedades.

a) $A + B = B + A$

b) $(A+B)+C=A+(B+C)$

c) $A+0=A$

d) $A+(-A)=0$

Você já ouviu falar em transplante de órgãos?

É uma intervenção cirúrgica que envolve a substituição de um órgão (como coração, pulmão, rim, pâncreas, fígado) ou tecido (como medula óssea, ossos, córneas) de um paciente doente (receptor) por um órgão ou tecido saudável de um doador, que pode estar vivo ou morto[5].

Esses procedimentos são recomendados para condições graves e irreversíveis, quando todas as outras formas de tratamento falharam em restaurar a saúde. Os transplantes mais frequentes envolvem o coração, fígado, pulmão, rim, córnea ou medula óssea. A maneira como o transplante é realizado depende da parte doada, seja um órgão, tecido ou células.

No Brasil, o Sistema Nacional de Transplantes (SNT), cuja função central é desempenhada pelo Ministério da Saúde, é responsável pela regulamentação, controle e supervisão do processo de doação e transplante realizado no país. O Brasil tem o maior programa público de transplante de órgãos, tecidos e células do mundo, garantido a toda a população através do SUS[6].

[5] Transplante: quando é indicado, como é feito, recuperação (e outras dúvidas) - Tua Saúde (tuasaude.com).
[6] Sistema Nacional de Transplantes — Ministério da Saúde (www.gov.br).

Questão 4. Analise a seguir algumas informações sobre doação de órgãos no Brasil.

Tabela 5: Quantidade de transplantes de coração realizados no Brasil (2021 – 2022).

Região / Ano	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	26	0	53	26	229
2022	32	0	55	44	232

Fonte: <https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Tabela 6: Quantidade de transplantes de fígado realizados no Brasil (2021 – 2022).

Região / Ano	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sul	Sudeste
2021	112	0	351	501	1094
2022	115	4	358	578	1107

Fonte: <https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saes/snt/estatisticas/transplantes-serie-historica/transplantes-realizados>. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Para calcularmos o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, podemos usar matrizes.

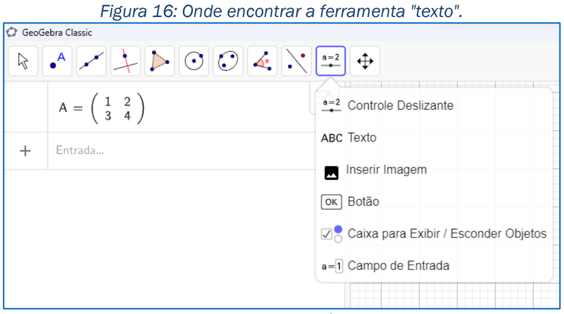
a) Inicialmente, represente no *GeoGebra* cada tabela por meio de uma matriz.

b) Calcule o total de transplantes de coração ou de fígado realizados em cada região do Brasil, nos anos de 2021 e 2022, usando matrizes.

c) Vamos agora visualizar a representação textual das matrizes construídas na tela de trabalho do software. Para isso, siga os passos abaixo:

i. Usando a ferramenta "texto", clique na área de trabalho.

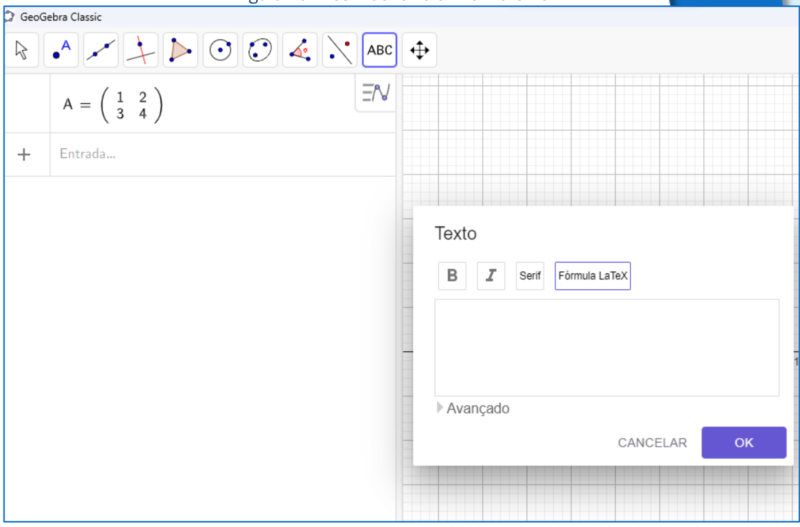
Figura 16: Onde encontrar a ferramenta "texto".



Fonte: Autoria própria.

ii. Na caixa que se abre, escolha a opção "*Latex*".

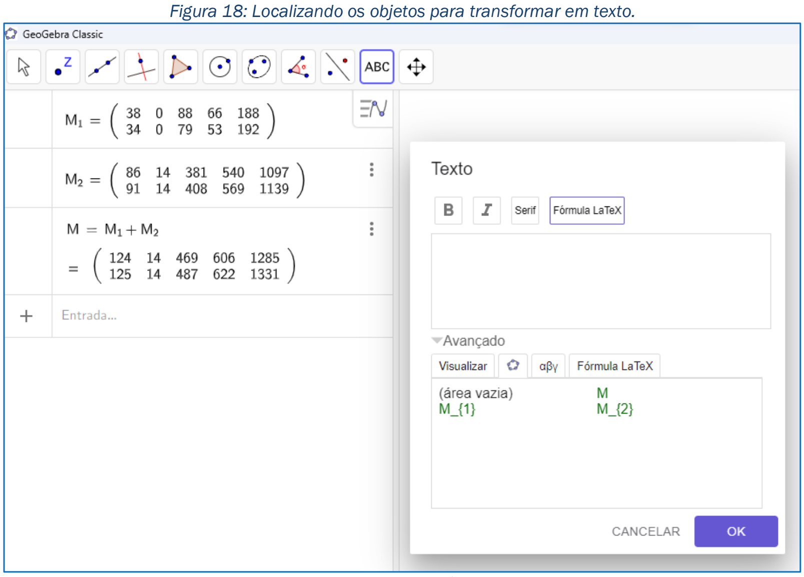
Figura 17: Inserindo texto em formato "tex".



Fonte: Autoria própria.

iii. Escolha a opção “Avançado” e clique na aba que contém a logo do software.

Figura 18: Localizando os objetos para transformar em texto.



Fonte: Autoria própria.

iv. Em seguida, reproduza os passos descritos abaixo:

a) Clique no objeto que representa a matriz do total de transplantes de coração;

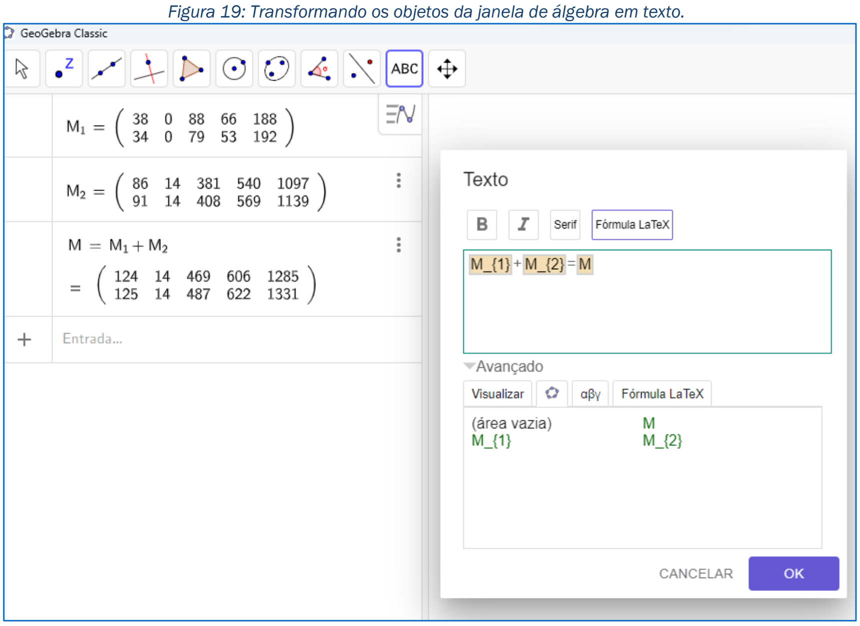
b) Digite o símbolo de adição (+);

c) Clique no objeto que representa a matriz do total de transplantes do fígado;

d) Digite o sinal de igual (=);

e) Clique no objeto que representa a adição das duas matrizes anteriores.

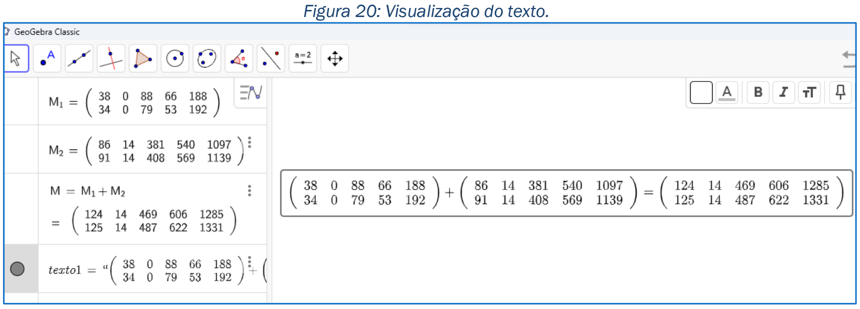
Figura 19: Transformando os objetos da janela de álgebra em texto.



Fonte: Autoria própria.

v. Agora clique em OK. Esconda os eixos da tela e a malha quadriculada para uma visualização melhor.

Figura 20: Visualização do texto.



Fonte: Autoria própria.

d) Em relação à matriz $A + B$, qual é o elemento da segunda linha e terceira coluna? O que ele indica?

____

____

____

____

Questão 5. Leia, a seguir, parte de uma reportagem de 28 de novembro de 2023.

Brasil acumula 1,91 milhão de novos postos de trabalho gerados em 2023

No Brasil, já são 1,91 milhão de empregos formais gerados em 2023. A variação em onze meses é positiva nos cinco grandes setores da economia e em todas as 27 unidades da Federação. Segundo dados do Novo Caged, divulgados nesta quinta-feira, 28 de dezembro, o mês de novembro registrou um saldo positivo de 130.097 postos de trabalho com carteira assinada, resultante de 1.86 milhão de admissões e 1,73 milhão de desligamentos. Com isso, o estoque total recuperado para o Caged foi de 44.358.892 postos de trabalho formais.

O maior crescimento do emprego formal, em novembro, ocorreu no setor de Serviços, com um saldo de 92,6 mil postos, com destaque para a área de “Informação, comunicação e atividades financeiras, imobiliárias, profissionais e administrativas”, que teve saldo positivo de 62,4 mil empregos. […]

*BRASIL, **Brasil acumula 1,91 milhão de novos postos de trabalho gerados em 2023.** Disponível em: https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2023/12/brasil-acumula-1-91-milhao-de-novos-postos-de-trabalho-gerados-em-2023. Acesso em: 09 de jan. 2024.*

Agora, analise as informações abaixo.

Tabela 7: Contratações no setor de serviços de algumas regiões metropolitanas brasileiras, 5º bimestre de 2023.

Região Metropolitana \ Mês	Setembro	Outubro
Belém	4982	4982
Curitiba	25957	27917
Recife	11696	10960
Rio de Janeiro	41433	42924

Fonte: Novo Caged (gov.br).

Tabela 8: Demissões no setor de serviços de algumas regiões metropolitanas brasileiras, 5º bimestre de 2023.

Região Metropolitana \ Mês	Setembro	Outubro
Belém	4770	4312
Curitiba	25971	24807
Recife	9044	9150
Rio de Janeiro	36659	36087

Fonte: Novo Caged (gov.br).

Junte-se a um colega e pesquisem como representar essas duas tabelas por meio de matrizes e calcular a diferença entre elas usando uma planilha eletrônica. Em seguida, elaborem um texto explicando os procedimentos realizados e o que representam os elementos da matriz correspondente à diferença obtida com base no contexto apresentado.

____

____

____

____

____

____

____

____

Referências

BRASIL, **Brasil acumula 1,91 milhão de novos postos de trabalho gerados em 2023.** Disponível em: https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2023/12/brasil-acumula-1-91-milhao-de-novos-postos-de-trabalho-gerados-em-2023. Acesso em: 09 de jan. 2024.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, volume 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

O Geogebra. Disponível em: https://ogeogebra.com.br/site/. Acesso em: 06 de mar. 2024.

Previsão de Tempo - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos – INPE. Disponível em: http://tempo.cptec.inpe.br/. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas: Ensino Médio.** – 1. Ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida. **Diálogo: matemática e suas tecnologias: Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas**. – 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2020.

Transplante: quando é indicado, como é feito, recuperação (e outras dúvidas). Disponível em: https://www.tuasaude.com/transplante/. Acesso em: 09 de jan. de 2024.

Tutorial do GeoGebra — Thiago Pardo (ifrn.edu.br). Disponível em: https://docente.ifrn.edu.br/thiagopardo/atividades/tutorial-do-geogebra/view. Acesso em: 05 de mar. 2024.

OPERAÇÕES COM MATRIZES

PARTE II

Hoje, vamos continuar aprendendo sobre as operações com matrizes: multiplicação de matrizes por um número real e multiplicação entre matrizes.

Multiplicação de uma matriz por um número real

Uma livraria fez uma doação para as bibliotecas de duas escolas de determinada cidade. Os títulos foram selecionados de acordo com a faixa etária, visando atender a estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF I), dos anos finais do Ensino Fundamental (EF II) e do Ensino Médio (EM)[1].

Observe o número de livros doados para as bibliotecas.

Tabela 1: Livros doados para as Bibliotecas.

Segmento / Autor	EF I	EF II	EM
AI	60	105	129
AB	112	170	220

Fonte: BONJORNO (2020).

Em parceria com a livraria que fez a doação dos livros para as bibliotecas, uma gráfica doou cadernos para as duas escolas próximas a essas bibliotecas. Para cada exemplar de livro doado, essa gráfica doou dois cadernos.

Nessa doação, os exemplares eram livros de autores internacionais (AI) e livros de autores brasileiros (AB).

Observe uma maneira de calcular o número de cadernos doados por essa gráfica.

Tabela 2: Cadernos doados pela gráfica, de acordo com o total de livros.

Segmento / Autor	EF I	EF II	EM
AI	$60 \cdot 2 = 120$	$105 \cdot 2 = 210$	$129 \cdot 2 = 258$
AB	$112 \cdot 2 = 224$	$170 \cdot 2 = 340$	$220 \cdot 2 = 440$

Fonte: BONJORNO (2020).

Perceba que esse cálculo equivale a multiplicar por 2 cada elemento da matriz que representa o número de livros doados para as bibliotecas. Assim, temos:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 60 & 105 & 129 \\ 112 & 170 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 60 & 2 \cdot 105 & 2 \cdot 129 \\ 2 \cdot 112 & 2 \cdot 170 & 2 \cdot 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 210 & 258 \\ 224 & 340 & 440 \end{pmatrix}.$$

[1] Situação-problema retirada do livro “Prisma matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas” (BONJORNO, 2020) com adaptações.

Adicionando os elementos da última matriz (lembra como podemos fazer isso através de uma planilha eletrônica?), temos a quantidade de cadernos doados pela gráfica, ou seja, 1592 cadernos.

De modo geral, definimos:

> Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e um número real k, o produto de k por A, indicado por $k \cdot A$, é a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$, em que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1,2,3, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1,2,3, \dots, n\}$.

Ou seja, para multiplicar um número real por uma matriz, multiplicamos esse número por todos os elementos da matriz, e o resultado será uma matriz de mesma ordem.

Propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz

Dadas as matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e a e b números reais, valem as propriedades:

- **1ª propriedade:** $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- **2ª propriedade:** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- **3ª propriedade:** $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- **4ª propriedade:** $1 \cdot A = A$.

Atividade

Para a atividade proposta a seguir, você vai usar alguns conceitos que já foram abordados anteriormente. É importante lembrar de: lei de formação de uma matriz, matriz identidade e matriz transposta.

Questão 1. Considerando a matriz identidade I_4 e a matriz $A = (a_{ij})_{4\times 4}$, tal que:

$$a_{ij} = 2i - j,$$

determine:

a) $I_4 + A$

b) $3A^t - I_4$

Atenção! Podemos usar o *GeoGebra* para resolver as operações. É importante usar o que aprendemos antes nas aulas sobre adição e subtração de matrizes. O tutorial para a multiplicação de uma matriz por um número real está abaixo.

Para multiplicar um número real por uma matriz no *GeoGebra*, você pode seguir os passos abaixo:

i. Abra o GeoGebra e clique em "Álgebra" no painel à esquerda.
ii. No campo de entrada, digite a matriz que você deseja multiplicar. Por exemplo, para criar $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, você pode digitar A={{1,2},{3,4}} e pressione Enter.
iii. Em seguida, digite o número real que você deseja multiplicar pela matriz. Por exemplo, se você quiser multiplicar a matriz por 3, você pode digitar n=3 e pressione Enter.
iv. Agora, para multiplicar o número real pela matriz, digite B=n*A e pressione Enter. A matriz resultante será exibida no painel "Álgebra".

Questão 2. Crie duas matrizes A e B de mesma ordem e verifique, usando o *Geogebra*, se a igualdade matricial é verdadeira ou falsa.

a) $4 \cdot A + 4 \cdot B = 4 \cdot (A + B)$
b) $3 \cdot A + 2 \cdot A = (3 + 2) \cdot A$
c) $-2 \cdot (5 \cdot B) = (-2 \cdot 5) \cdot B$
d) $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + B$
e) $-1 \cdot (-B) = B$

Questão 3. (GOMES, 2024) Cauãn Deyvid é um engenheiro civil e está trabalhando em um projeto de construção de um prédio. Cauãn obteve uma matriz que representa a quantidade de materiais de construção necessários para cada andar do prédio. No entanto, devido a um aumento no orçamento, Cauãn agora tem que aumentar a quantidade de materiais de construção em 50%.
A matriz original de materiais de construção é a seguinte:

$$M = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 180 & 130 \\ 110 & 210 & 140 \end{pmatrix}.$$

Onde cada linha representa um andar do prédio e cada coluna representa um tipo diferente de material de construção (por exemplo, concreto, aço e madeira).

a) Como ele pode usar a multiplicação de matriz por um número real para calcular a nova quantidade de materiais de construção necessários para cada andar do prédio?

____

____

____

b) Calcule a nova quantidade de materiais de construção necessários para cada andar do prédio.

____

____

____

Multiplicação de matrizes

Acompanhe a seguinte situação.

Um projeto desenvolvido por uma escola busca identificar a Pegada Hídrica das frutas consumidas com maior frequência na merenda em determinado mês. A seguir, são apresentadas informações da Pegada Hídrica de duas frutas e a quantidade de quilogramas dessas frutas consumidas em uma escola em cada semana de um mês[2].

A Pegada Hídrica do produto corresponde à quantidade de água consumida ou poluída em todas as etapas do processo de sua produção e pode ser medida em litro por quilograma (L/kg).

Tabela 3: Pegada Hídrica da banana e da laranja.

Fruta	Banana	Laranja
Pegada Hídrica (L/kg)	790	560

Fonte: PRODUCT gallery. Water footprint network.

Tabela 4: Consumo de banana e de laranja na escola, em quilogramas, em cada semana do mês.

Fruta \ Semana	I	II	III	IV
Banana	20	15	10	15
Laranja	10	30	20	15

Fonte: SOUZA (2020) com adaptações.

Qual foi a quantidade de água utilizada ou poluída na produção dessas frutas consumidas em cada semana do mês nessa escola?

Para calcular essa quantidade de água, podemos considerar a Pegada Hídrica de cada fruta e a quantidade de cada fruta consumida por semana:

- semana I: $790 \cdot 20 + 560 \cdot 10 = 15800 + 5600 = 21400$, ou seja, 21 400 L;
- semana II: $790 \cdot 15 + 560 \cdot 30 = 11850 + 16800 = 28650$, ou seja, 28 650 L;
- semana III: $790 \cdot 10 + 560 \cdot 20 = 7900 + 11200 = 19100$, ou seja, 19 100 L;
- semana IV: $790 \cdot 15 + 560 \cdot 15 = 11850 + 8400 = 20250$, ou seja, 20 250 L.

Agora, observe como podemos utilizar a multiplicação de matrizes para representar essa resolução. Representamos as tabelas **3** e **4** por meio das matrizes A e B, respectivamente. Os resultados obtidos anteriormente podem ser registrados em uma matriz C, correspondente ao produto da matriz A pela matriz B, nessa ordem.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 790 & 560 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 & 15 \\ 10 & 30 & 20 & 15 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 21400 & 28650 & 19100 & 20250 \end{pmatrix}}_{C=A\cdot B}$$

[2] Situação-problema retirada do livro "Multiversos Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas: Ensino Médio" (SOUZA, 2020).

Para refletir!

O que indicam os elementos da matriz C obtida?

____

____

O produto de duas matrizes $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $n \times p$ é igual à matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times p$, tal que c_{ij} é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha *i* de *A* e da coluna *j* de *B* e adicionando as parcelas correspondentes aos produtos obtidos.
O produto *AB* de matrizes existe se, e somente se, a quantidade de colunas de *A* for igual à quantidade de linhas de *B*. Além disso, a matriz *C* correspondente ao produto *AB* tem a mesma quantidade de linhas de *A* e de colunas de *B*.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Questão 4. (UFPB) As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Alpha, são trocadas usando uma linguagem de códigos, onde cada número inteiro entre 0 e 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Alpha o nome de um espião codificado na matriz

$$A = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para decodificar uma palavra de cinco letras, dada por uma matriz A, de ordem 5×1, formada por inteiros entre 0 e 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e, usando-se a tabela dada, converter os números em letras. Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

a) DIEGO
b) SHUME
c) SADAN
d) RENAN
e) RAMON

De acordo com as informações do enunciado, devemos calcular o produto $C \cdot A$.
Faça o procedimento manualmente, em seguida, verifique o resultado utilizando o *GeoGebra* e conclua a resolução.

Questão 5. Veja parte da tabela de classificação da série A do campeonato pernambucano de futebol, de 2024, em determinada rodada[3].

Tabela 5: Classificação do Campeonato Pernambucano de Futebol de 2024 na 9ª rodada.

Resultado / Time	Vitórias	Empates	Derrotas
Sport	7	0	2
Retrô	6	2	1
Náutico	6	2	1
Santa Cruz	6	1	2
Central	3	3	3

Fonte: https://ge.globo.com/pe/futebol/campeonato-pernambucano/.

Note que a quantidade de vitórias, empates e derrotas de cada time pode ser representada pela matriz a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Para obter a pontuação dos times, são atribuídos três pontos para vitória, um para empate e zero para derrota, formando a matriz $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Determine a matriz C que fornece o total de pontos de cada time até essa rodada.

[3] Situação-problema adaptada do livro “#Contato Matemática” (SOUZA, 2016).

b) Qual foi a pontuação obtida pelo Sport? E pelo Santa Cruz?

____

____

____

Questão 6. (GOMES, 2024) Nikole é uma gerente de uma rede de cinemas. Cada cinema tem um número diferente de salas e cada sala tem um número diferente de assentos. Ela tem uma matriz A que representa o número de salas em cada cinema e uma matriz B que representa o número de assentos em cada sala.
A matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Onde cada linha representa um cinema (por exemplo, cinema de Caruaru; cinema de Recife; cinema de Serra Talhada) e cada coluna representa o tipo de sala (por exemplo, sala normal e sala VIP).
A matriz B é dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 120 & 200 \\ 150 & 250 \end{pmatrix}$$

Onde cada linha representa o tipo de sala e cada coluna representa o número de assentos (por exemplo, assentos normais e assentos reclináveis).

a) Como Nikole pode usar a multiplicação de matrizes para calcular o número total de assentos em cada tipo de sala em cada cinema?

____

____

____

b) Obtenha, com o auxílio de uma planilha eletrônica, o número total de assentos em cada tipo de sala em cada cinema.

Referências

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas.** - 1. Ed. - São Paulo: Editora FTD, 2020.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, volume 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas**. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas: Ensino Médio.** - 1. Ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida. **Diálogo: matemática e suas tecnologias: Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas**. - 1. Ed. - São Paulo: Moderna, 2020.

4 Considerações Finais

O produto educacional desenvolvido busca oferecer uma alternativa inovadora para o ensino de matrizes no Ensino Médio, integrando tecnologia e metodologias ativas de aprendizagem. As três sequências didáticas propostas foram elaboradas para proporcionar um ensino mais significativo e engajador, que não apenas facilita a compreensão dos conceitos de matrizes, mas também desenvolve habilidades essenciais como o pensamento crítico e a resolução de problemas. A utilização de ferramentas tecnológicas como planilhas eletrônicas e GeoGebra permite uma melhor abordagem do conteúdo, promovendo um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e colaborativo.

A implementação dessas sequências didáticas evidenciou que o uso de tecnologia no ensino de Matemática pode desempenhar um papel fundamental na motivação dos alunos e no desenvolvimento de competências para o mundo digital. No entanto, é necessário que os professores estejam preparados para integrar essas tecnologias de maneira eficaz e significativa, adaptando as atividades às necessidades e estilos de aprendizagem dos alunos.

Acredita-se que este produto educacional contribua para a melhoria do ensino de matrizes no Ensino Médio e para a formação de alunos mais bem preparados para os desafios do mundo contemporâneo, destacando o papel fundamental da tecnologia como ferramenta de aprendizagem. Futuros estudos podem aprofundar a análise sobre a eficácia das metodologias empregadas e explorar novas formas de integrar tecnologia no ensino e na aprendizagem matemática.

Referências

ALVES, D. M.; CARNEIRO, R. d. S.; CARNEIRO, R. d. S. Gamificação no ensino de matemática: uma proposta para o uso de jogos digitais nas aulas como motivadores da aprendizagem. *Revista Docência e Cibercultura*, v. 6, n. 3, p. 146–164, 2022. Citado na página 14.

ARAÚJO, A. J. S.; SANTOS, R. S. D. *O uso de tecnologias digitais no ensino da matemática*. [S.l.]: Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Amapá. Macapá, 2014. Citado na página 19.

AULER, S. M.; PIOVEZANA, L. As tidcs na educação escolar. *TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO: PESQUISAS EM INOVAÇÕES TECNOLÓGICAS-VOLUME 3*, Editora Científica Digital, v. 3, n. 1, p. 57–73, 2022. Citado na página 13.

BENTO, M. M. et al. Educação tecnológica: Software geogebra, uma ferramenta a favor do ensino e aprendizado da matemática. 2012. Citado na página 22.

BONA, B. d. O. Análise de softwares educativos para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. *Experiências em ensino de ciências*, v. 4, n. 1, p. 29–50, 2009. Citado na página 18.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. v. 39. Citado na página 18.

BORBA, M. d. C.; SILVA, R. S. R. d.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. [S.l.]: –3 ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020. Citado na página 22.

BORGES, R. d. S. L. A utilização de planilhas eletrônicas como instrumento didático no processo de ensino e aprendizagem da matemática: uma análise bibliográfica. Universidade Federal da Paraíba, 2023. Citado na página 20.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. [S.l.]: Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEC. v. 3, 1997. Citado na página 17.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 nov 2023. Citado 4 vezes nas páginas 5, 6, 14 e 21.

BRASIL, C. N. d. E. C. Diretrizes curriculares nacionais para o ensino médio. Brasília. 2018. Citado na página 6.

CHAVES, E. O. Tecnologia e educação: o futuro da escola na sociedade da informação. *Campinas: Mindware Editora*, p. 1–194, 1998. Citado na página 13.

CORRÊA, J. N. P.; BRANDEMBERG, J. C. Tecnologias digitais da informação e comunicação no ensino de matemática em tempos de pandemia: desafios e possibilidades. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 8, n. 22, p. 34–54, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. et al. As idéias da álgebra. *São Paulo: Atual*, 1999. Citado na página 21.

CRUZ, K. R. D. Uso de tecnologias digitais no ensino de matemática: desafios em tempos de crise de covid-19. *Rebena-Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem*, v. 6, p. 42–55, 2023. Citado na página 15.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática.* [S.l.]: 17 ed. Campinas, SP: Papirus, 2009. Citado na página 16.

DIAS, T. J. F. et al. Tendências metodológicas em educação matemática: uma revisão de literatura. *Research, Society and Development*, v. 11, n. 6, p. e36411629362–e36411629362, 2022. Citado na página 16.

D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. *Temas e Debates. SBEM. Ano II N*, v. 2, p. 15–19, 1997. Citado na página 23.

FILHO, J. L. C.; PAIVA, C. G. de; CAVALCANTE, M. S. A. As tecnologias da informação e comunicação no ensino da matemática. 2020. Citado na página 18.

FLORES, J. B. O uso de planilhas eletrônicas nas aulas de matemática no ensino fundamental. *Caderno de Estudos Tecnológicos*, v. 1, n. 1, 2013. Citado na página 20.

GEOGEBRA. *GeoGebra – Aplicativos Matemáticos.* 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 12 mar 2024. Citado na página 22.

HOYLES, C.; NOSS, R. What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? *Second international handbook of mathematics education*, Springer, p. 323–349, 2003. Citado na página 19.

JAVARONI, S. L. Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2007. Citado na página 18.

LALUEZA, J. L. et al. As tecnologias da informação e da comunicação e os processos de desenvolvimento e socialização. In: *Psicologia da educação virtual: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e da comunicação.* [S.l.: s.n.], 2010. p. 47–65. Citado na página 11.

LAMATTINA, A. d. A. *Educação 4.0 [livro eletrônico] : transformando o ensino na era digital.* [S.l.]: .– Formiga, MG : Editora Union, 2023. Citado na página 12.

LIMEIRA, L. G. d. S. A utilização das tdics como estratégia de ensino e seus desafios ao processo de aprendizagem. Universidade de Passo Fundo, 2020. Citado na página 13.

LOPES, A. M. et al. Utilização das tdic no ensino de matemática na educação básica. *CIET:EnPED*, 2018. ISSN 2316-8722. Disponível em: <https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2018/article/view/725>. Citado na página 14.

LUDVIG, I. R. *INFORMÁTICA: UMA FERRAMENTA PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*. 2016. Acesso em: 22 de novembro de 2023. Citado na página 4.

MAIA, L. E. d. O.; GONDIM, R. d. S.; VASCONCELOS, F. H. L. Utilização do geogebra para o ensino de geometria: uma revisão sistemática de literatura. *Ensino da Matemática em Debate*, v. 10, n. 1, p. 31–51, 2023. Citado na página 23.

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso*, p. 02–25, 2018. Citado na página 12.

MORAN, J. M.; MASSETO, M. T.; BEHRENS, M. A. L. *Novas tecnologias e mediações pedagógicas*. [S.l.]: Campinas, SP. Papirus, 2012. Citado na página 6.

NETO, H. B. et al. A sequência de fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas. *Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste. Educação–EPENN*, v. 15, 2001. Citado na página 17.

OLIVEIRA, E. R. d. *O uso da tecnologia no ensino da matemática contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau*. Dissertação (Mestrado), 2021. Citado na página 18.

PEREIRA, C. C. M.; COSTA, A. C.; ALVES, F. J. d. C. *O uso de Tecnologias no Ensino de Matemática*. [S.l.]: Volume 2, Universidade do Estado do Pará, Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PMPEM/UEPA), 2019. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 18.

PONTES, E. A. S. et al. Abordagens imprescindíveis no ensino contextualizado de matemática nas séries iniciais da educação básica. *RACE-Revista de Administração do Cesmac*, v. 1, p. 3–15, 2018. Citado na página 16.

QUARTIERI, M. T.; CRUZ, R. P. da. Tecnologias digitais em aulas de matemática. *Ensino e Tecnologia em Revista*, v. 2, n. 1, p. 56–70, 2018. Citado na página 16.

REAL, L. P. V. *Transformações geométricas: aplicação de matrizes na computação gráfica. 2017. 244 f. Dissertação (Mestrado)*. [S.l.]: Dissertação de mestrado. Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2017. Citado na página 22.

RODRIGUES, I. A. d. A.; MAIA, D. L.; CASTRO, R. L. d. O papel das tdics na compreensão e motivação dos alunos do 8º ano em matemática. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, v. 9, n. 8, p. 2335–2352, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 22.

SOUZA, B. V. d. *Problemas do 2º grau: Uma proposta de sequências didáticas sob a perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas*. [S.l.]: Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Campina Grande, 2023. Citado na página 24.

VALENTE, J. Diferentes usos do computador na educação. *Em aberto*, v. 12, n. 57, 1993. Citado na página 20.

WEISS, A. M. L.; CRUZ, M. L. R. M. d. *A informática e os problemas escolares de aprendizagem*. [S.l.]: Rio de Janeiro: DP&A, 2ª edição., 1999. Citado na página 6.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. [S.l.]: Penso Editora, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.