UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Thiago dos Santos Silva

Produto Educacional

Matemática Integrada: Explorando a conexão entre Função e Sequências Numéricas

Campina Grande - PB
Agosto/2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Thiago dos Santos Silva

Matemática Integrada: Explorando a conexão entre Função e Sequências Numéricas

Produto Educacional vinculado ao Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr(a). Deise Mara Barbosa de Almeida

Campina Grande - PB
Agosto/2024

Resumo

O ensino de Matemática sempre foi um grande desafio. Mas, ao mesmo tempo, pode ser uma oportunidade de transformar a compreensão dos estudantes sobre o mundo ao seu redor. Em resposta a esse desafio, apresentamos a Cartilha Interativa, uma ferramenta tecnológica cuja interatividade está associada à interação direta dos estudantes com a Cartilha. Este recurso pedagógico foi desenvolvido como Produto Educacional de uma Dissertação de Mestrado, com o objetivo de favorecer o aprendizado de Função e Sequências Numéricas, de maneira ativa e reflexiva, além de explorar as conexões existentes entre estes conceitos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Cartilha Interativa. Função. Sequências Numéricas.

Abstract

Teaching Mathematics has always been a significant challenge, yet it presents an opportunity to transform students' understanding of the world around them. In response to this challenge, we present the Interactive Workbook, a technological tool designed to facilitate direct student interaction. Developed as an Educational Product for a Master's Thesis, this pedagogical resource aims to enhance the learning of Functions and Numeric Sequences in an active and reflective manner, while exploring the connections between these concepts.

Keywords: Mathematics Education. Interactive Workbook. Function. Numeric Sequences.

1 Introdução

Com o avanço tecnológico fomos levados a associar que a tecnologia está diretamente associada a aparelhos tecnológicos como computadores, smartphones, tablets, e ao uso da internet. No entanto, de acordo com Oliveira e Costa (2023) "a tecnologia é qualquer artefato ou técnica que o ser humano inventa para ampliar e aumentar seus poderes, facilitar seu trabalho ou sua vida ou simplesmente trazer-lhe maior satisfação e prazer". Seguindo este pensamento, este trabalho propõe como ferramenta tecnológica uma Cartilha Interativa, que na verdade a interatividade está ligada a interação direta do aluno com a Cartilha e não com o meio digital, apesar de também incluir opcionais relacionados como complementação.

Levando em conta a carência de bons recursos educacionais em muitas escolas, especialmente nas públicas, elaboramos uma tecnologia acessível como proposta de material pedagógico que apoia professores e estudantes no ensino e aprendizado. A nossa Cartilha não é apenas um material didático que trás explicações, aborda exemplos e propõe exercícios. Favorece uma experiência interativa, desenvolvida para engajar os alunos na construção do seu próprio conhecimento, promovendo a compreensão de Função e Sequências Numéricas de forma integrada.

Utilizando a plataforma de design fácil de usar, Canva, a Cartilha Interativa combina textos, gráficos, animações e exercícios interativos que estimulam a aprendizagem ativa dos estudantes. Fornece explicações claras e diretas dos conceitos, sem abrir mão do rigor matemático. São dicas, explicações que se interligam com imagens e/ou palavras-chave, construção de mapa mental, definições, exemplos, demonstrações, investigação com o uso da calculadora, algumas aplicações dos conceitos estudados e vários exercícios de completar, de pintura, de representações e de criptografia, entre outras oportunidades de interação. Além disso, trás também algumas comunicações com ferramentas digitais, como vídeos, plataforma de simulações interativas, planilhas eletrônicas, etc, através de Códigos QR.

A nossa Cartilha Interativa é um recurso que estimula o pensamento crítico e o raciocínio lógico por meio da interatividade. Não só promove o aprendizado de conceitos matemáticos, mas também prepara os estudantes para aplicar esses conhecimentos em situações reais, estando alinhada à BNCC, que durante a trajetória escolar dos estudantes, sugere e espera que eles consigam

> utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento

> computacional, o espírito de investigação e a criatividade (Ministério da Educação, 2018, p. 475).

A Cartilha pode ser um recurso valioso para utilizar em sala de aula pois é um material que, através da plataforma Canva, pode ser totalmente editável pelo professor antes de ser impresso, permitindo adaptações às particularidades individuais de suas turmas e à realidade de cada contexto educativo. Dessa forma, o tempo de preparação das aulas pode ser otimizado, oportunizando aos professores focar mais na interação e no acompanhamento do progresso dos estudantes.

1.1 Objetivos

1.2 Objetivo Geral

Utilizar uma tecnologia de fácil acesso nas aulas de Matemática para potencializar o aprendizado de Funções e Sequências Numéricas, estimulando o engajamento dos estudantes através da interatividade com este recurso pedagógico, e promovendo o desenvolvimento da criatividade e do pensamento crítico deles.

1.3 Objetivos Específicos

- Proporcionar aos estudantes a oportunidade de construir seu próprio conhecimento por meio das interações sugeridas, desafiando-os a pensar criticamente sobre Funções e Sequências Numéricas;
- Utilizar a tecnologia em sala de aula para criar um ambiente de aprendizado que desperte o interesse e favoreça o engajamento dos estudantes na aprendizagem dos conceitos estudados e suas conexões.

1.4 Organização

Este trabalho está dividido em dois capítulos. O Capítulo 1, a Introdução, contextualiza nosso produto educacional, a Cartilha Interativa, e apresenta os Objetivos Geral e Específicos. Já o Capítulo 2 descreve detalhadamente cada capítulo da cartilha, oferece alguns comentários e apresenta a Cartilha Interativa na íntegra.

2 Organização da Cartilha Interativa

2.1 Distribuição dos Capítulos

A Cartilha Interativa foi dividida em 6 capítulos. A partir deste ponto até o final desta seção, destacaremos em **negrito** os títulos de cada capítulo e em *itálico* os subtítulos contidos em cada um. O Capítulo 1, intitulado **Conceito de Função**, aborda as *Noções Básicas* deste conceito. Os estudantes são estimulados a refletirem o que ocorre com certos elementos (tanto objetos como números) ao serem transformados em outros por meio de uma regra e são levados a manipular a representação de Diagrama de Flechas. É apresentada a definição de função utilizando a Teoria dos Conjuntos e as definições de Domínio, Contra-domínio, Imagem e Lei de correspondência. Além disso, é discutido o significado de símbolos que representam notações do estudo de funções.

Já o Capítulo 2 da Cartilha, cujo título é **Função**, explora com mais detalhes esse objeto de conhecimento matemático. É investigado o conceito de *Bijetividade*, através das definições de Função Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva, além das suas representações através de Diagramas de Flechas e Gráficas. É explorado também o comportamento das funções em relação ao seu *Crescimento*, através das definições de Função Crescente e Decrescente. O segundo capítulo da Cartilha Interativa, também investiga *Função Inversa*, explorando a sua definição e representação em Diagrama de Flechas. As diferenças entre os conceitos *Contínuo vs Discreto* são abordados neste capítulo, por meio de ideias intuitivas de continuidade e discretude, que também serão exploradas através de uma sugestão de atividade envolvendo *Matemática nas Artes Visuais*. E é trabalhado o estudo de *Domínios Contínuos e Domínios Discretos de funções* através da construção de gráficos.

O título do Capítulo 3 da Cartilha Interativa é **Sequências Numéricas**. São discutidas *Noções Básicas* desde as triviais, como as posições dos termos dispostos ordenadamente em uma sequência, como também a importância do uso de variáveis indexadas para representar esses termos. Além disso, destaca a diferença nos significados e nas notações de elementos para conjuntos e termos para as sequências. É discutido também a maneira de definir recursivamente uma Sequência Numérica. Tanto a definição de *Sequência ou Sucessão* como a discussão sobre domínio de sequências finitas ou infinitas são estudados no terceiro capítulo. Ademais, aborda a *Lei de Correspondência* de uma sucessão e quando elas são aleatórias ou definidas através de fórmulas posicionais. São representados no plano cartesiano o *Gráfico* de uma Sequência Numérica qualquer.

No Capítulo 4 da Cartilha, cujo título é **Função Afim**, é apresentada a Definição desta função e analisado o modelo das coordenadas de quaisquer que sejam os pontos do seu gráfico. É neste capítulo que é respondida a pergunta: *"Por que o gráfico é sempre uma reta?"* através da demonstração, por construção, de um Teorema. Também é dada toda atenção às *Constantes reais a e b* da Função Afim, abordando suas nomenclaturas, seus significados no gráfico e suas relações com o zero da função. Os *Casos Particulares* de Função Afim são estudados: Função Linear, Função Identidade e Função Constante. E é neste quarto capítulo que é explorado uma aplicação de *Criptografia com Função Afim Inversa.*

Intitulado **Progressão Aritmética**, o Capítulo 5 da Cartilha, explora as *Noções Básicas* como a definição de PA, enfatizando o significado de razão e a sua relação com os tipos de progressões aritméticas: crescente, constante ou decrescente. Este capítulo explora o significado de *Termo Geral* sem fazer o uso de fórmulas e destaca diferentes representações para os termos de uma PA e as relações entre eles. Este capítulo utiliza a *A ideia de Gauss* para construir o raciocínio da *Soma dos termos de uma PA finita.*

O Capítulo 6 da Cartilha, por sua vez, cujo título é **Conexão entre Função Afim e PA**, analisa que toda Progressão Aritmética é a restrição de uma Função Afim cujo domínio é o conjunto dos números naturais, ou seja, *Função Afim com entrada natural gera uma PA*. Além disso, é explorado que a Progressão Aritmética possui razão igual a taxa de variação da Função Afim e o seu primeiro termo corresponde a soma da taxa de variação com o valor inicial desta função. É abordada a *Taxa de Variação vs Razão da PA*, destacando a integração desses conceitos e investigado uma Progressão Aritmética a_n qualquer quando é dado um aumento de uma unidade sobre n. Neste capítulo será construído *Gráfico* de PA e também será abordado que *Função Afim leva PA em PA*. No final o Capítulo 6, buscamos fazer uma revisão final do que foi estudado, *Revisitando Conceitos.*

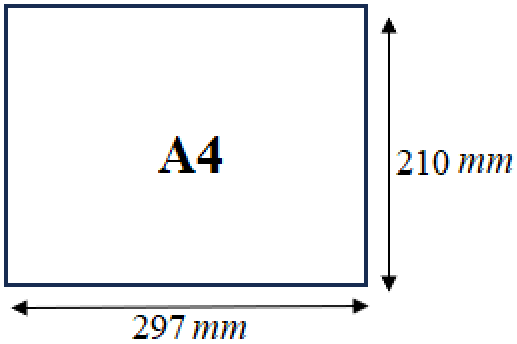
2.2 Alguns Comentários

A Cartilha Interativa é um recurso inovador que busca integrar a tecnologia nas aulas de Matemática, visando não apenas facilitar a compreensão dos conceitos estudados, mas também promover um ambiente de aprendizagem engajador e eficaz para os estudantes durante a construção do seu conhecimento.

Foi desenvolvida através da plataforma de design gráfico Canva, com o objetivo de promover a interação dos estudantes ao ensino e aprendizagem de Função e Sequências Numéricas, explorando as inter-relações entre esses conceitos. A plataforma Canva proporcionou uma abordagem acessível e dinâmica para criar conteúdos educacionais visualmente atrativos, incluindo elementos interativos como exercícios práticos, vídeos, gráficos entre outros.

O formato da Cartilha foi idealizado para ser impresso em folhas de papel ofício do tamanho A4, na configuração “livreto” e com orientação “paisagem”. A Figura 1 mostra a representação de uma folha de papel ofício nesse tamanho. Uma vez estando na direção horizontal, ou seja, na orientação “paisagem”, será possível imprimir quatro páginas da Cartilha por folha, considerando que as impressões serão feitas nos dois lados da folha de papel (frente e verso).

Figura 1 – Representação de uma folha de papel A4 na orientação paisagem.



Fonte: Autor.

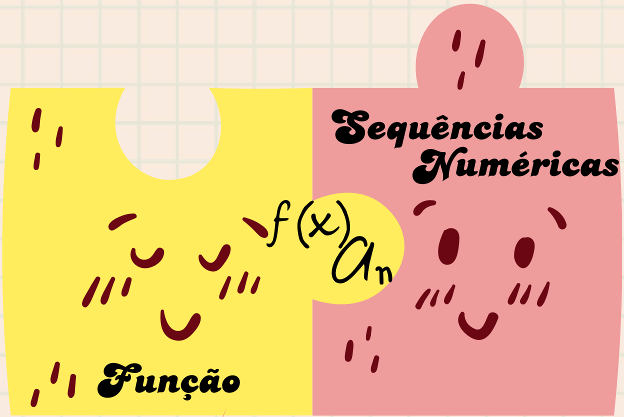
Como as dimensões do papel A4, são 297mm por 210mm, e considerando que serão duas páginas por folha, então cada página da Cartilha medirá 148.5mm por 210mm. Para visualizar nossa Cartilha Interativa, acesse o link <bit.ly/3S5o85a>. Para editar na plataforma Canva, utilize o *link de modelo* do template, disponível em <bit.ly/3XZO2v1> e transforme a maneira como você ensina e aprende matemática! Lembrem-se de estar atentos às letras maiúsculas e minúsculas dos links, pois elas fazem diferença.

Referências

Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Citado na página 5.

OLIVEIRA, I. da S.; COSTA, J. B. da. As tics como instrumentos dinamizadores nos processos de ensino e aprendizagem. *Rebena-Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem*, v. 5, p. 269–282, 2023. Citado na página 4.

MATEMÁTICA INTEGRADA: EXPLORANDO A CONEXÃO ENTRE FUNÇÃO E SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS



Aluno(a): ____

Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Orientadora: Dr(a). Deise Mara Barbosa de Almeida

Mestrando: Thiago dos Santos Silva

Escola Professora Maria Lúcia Alves

Matemática Integrada: Explorando a conexão entre Função e Sequências Numéricas

Campina Grande – PB

2024

EM13MAT302

1. CONCEITO DE FUNÇÃO

Noções Básicas

Considere uma máquina que transforma objetos quaisquer, inseridos na sua entrada, em outros objetos, de acordo com a sua aplicabilidade.

EXEMPLO 1

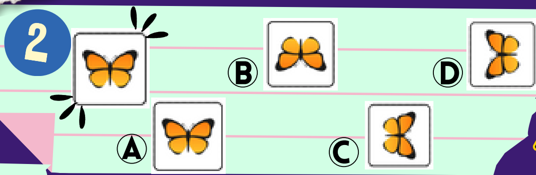
Admita que, neste momento, a máquina está programada para

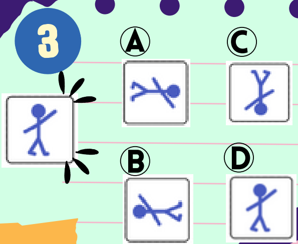
rotacionar os objetos de entrada em 90° e no sentido horário.

PERGUNTA-SE:

Inserindo nesta máquina a figura destacada nas três situações a seguir, qual será o formato mostrado na saída?

Assinale a alternativa correta.





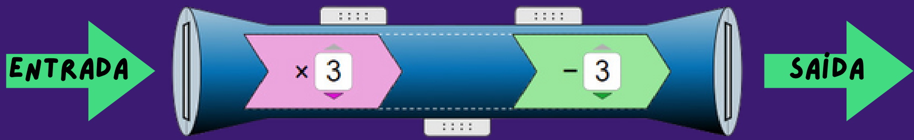
1. CONCEITO DE FUNÇÃO

Noções Básicas

EXEMPLO 2

Agora, admita que a máquina foi designada para

multiplicar o número por 3 e, em seguida, subtrair 3 do resultado.



PERGUNTA-SE:

Inserindo na entrada dessa máquina os números -3, -1, 0 e 4 quais serão os resultados a eles associados?

Preencha nos espaços correspondentes.

Entrada	Saída
-3	
-1	
0	
4	

RASCUNHO

DEFINIÇÃO

Dados os conjuntos A, B, uma função $f : A \to B$ é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$ (leia-se "y igual a f de x").

(Lima et al, 2023)

Se liga!

1. CONCEITO DE FUNÇÃO

Noções Básicas

Toda função contém, necessariamente, três ingredientes.

→ **DOMÍNIO**

→ **CONTRA-DOMÍNIO**

→ **LEI DE CORRESPONDÊNCIA**

O domínio é o conjunto de partida da função. Nele, estão as variáveis independentes para as quais a função fica definida.

O contra-domínio é o conjunto de chegada. As variáveis dependentes da função pertencem a este conjunto.

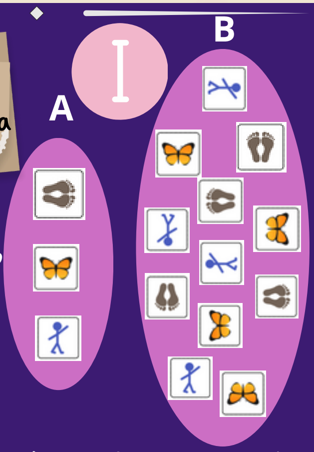
A lei de correspondência é a regra que associa a variável dependente em função da variável independente.

$f(x)$

Imagem é o valor do contra-domínio assumido pela função no ponto $x \in A$.

I

Com base no EXEMPLO 1, faça o que é pedido.



a) Represente esta situação através do diagramas de flechas ao lado.

b) Circule os elementos do domínio, sublinhe os elementos do contra-domínio e marque um "X" nos elementos da imagem.

c) Esta função possui lei de correspondência?

○ SIM. ○ NÃO. Qual?

II

No EXEMPLO 2, considere $f: A \to B$, com A = {-3, -1, 0, 4} e B = $\mathbb{Z}$.

a) Escreva a lei de correspondência e os elementos do domínio, do contra-domínio e da imagem desta função.

1. CONCEITO DE FUNÇÃO

Noções Básicas

MAPA MENTAL

Complete o MAPA MENTAL, preenchendo os espaços que estão vazios.

③ Nesse conjunto estão as variáveis

Aqui estão as variáveis ⑤

Para cada $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$

chama-se ______ de x pela função f.

⑥

Conjunto de partida.

②

④ Conjunto de chegada.

$$f : A \to B$$

Lê-se: ①

$$x \mapsto f(x)$$

Indica que:

⑦

Observação: A numeração acima, serve apenas como sugestão de ordem para o preenchimento das lacunas.

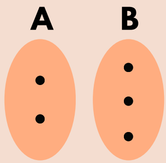
2. FUNÇÃO

BiJetividade

Relacione os conjuntos A e B em cada caso:

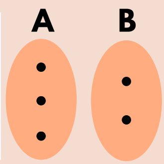
Injetiva ou Injetora

Elementos diferentes do domínio, possuem imagens diferentes.



Sobrejetiva ou Sobrejetora

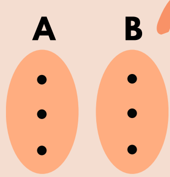
O contra-domínio é igual ao conjunto imagem.



Bijetiva ou Bijetora

ou ainda, Correspondência Biunívoca

Quando a função é **injetiva** e **sobrejetiva**, simultaneamente.



closed caption

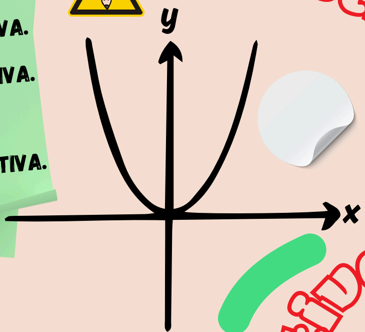
Associe os gráficos das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, conforme a legenda:

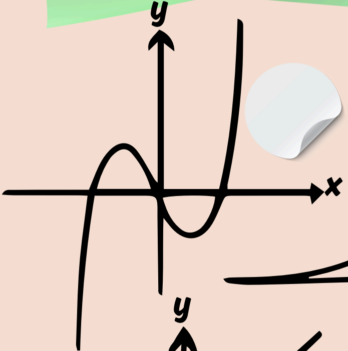
I – INJETIVA, MAS NÃO SOBREJETIVA.

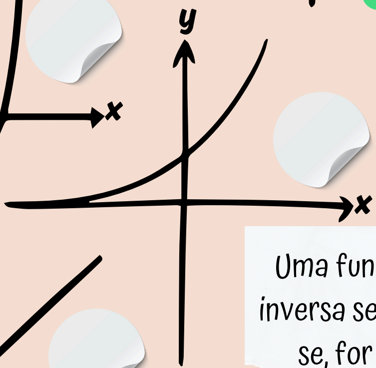
II – SOBREJETIVA, MAS NÃO INJETIVA.

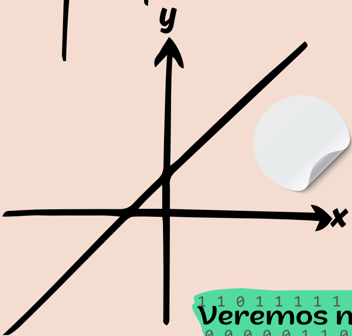
III – BIJETIVA.

IV – NEM INJETIVA, NEM SOBREJETIVA.









Inversa

Uma função possui inversa se, e somente se, for bijetiva.

Você já ouviu falar em CRIPTOGRAFIA?

Veremos mais adiante uma aplicação de Função Inversa muito interessante! Aguardem!

2. Função

Crescimento

EM13MAT404

Uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, é chamada de:

Crescente

quando

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Decrescente

quando

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

EXEMPLOS:

Sejam f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções cujas leis de formações são dadas a seguir.
Atribua valores para x_1 e x_2 obedecendo as relações de ordem, calcule as suas imagens e compare-as inserindo no espaço entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ o sinal de desigualdade correto.

a) $f(x) = 9x - 4$

x_1 ☐ $<$ ☐ x_2

RASCUNHOS

$f(x_1)$ ☐ ☐ ☐ $f(x_2)$

b) $g(x) = -4x + 9$

x_1 ☐ $<$ ☐ x_2

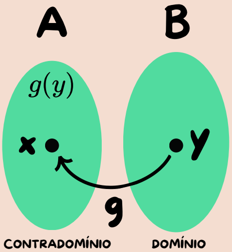
RASCUNHOS

$f(x_1)$ ☐ ☐ ☐ $f(x_2)$

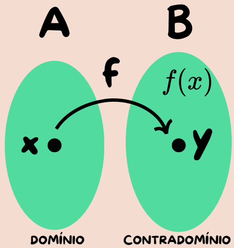
Também discutiremos, a posteriori, as definições de função CONSTANTE, LINEAR e IDENTIDADE.

2. FUNÇÃO

Função Inversa



Diz-se que uma função $g : B \to A$ é a **inversa** da função $f : A \to B$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$.



$f^{-1}(x)$

$g : B \to A$ **é inversa de** $f : A \to B$

$f : A \to B$ **é inversa de** $g : B \to A$

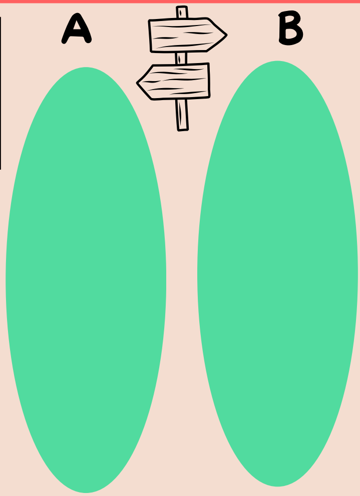
$g^{-1}(y)$

EXEMPLO:

Seja $f : A \to B$ uma função definida por $f(x) = -2x + 6$, com A = {-3, 0, 1, 2, 3, 6} e B = {-6, 0, 2, 4, 6, 12}.

a) Represente $f : A \to B$ no diagrama de flechas.

Escreva a letra f na placa que aponta para o sentido que a função está definida.



b) Justifique o porquê de f admitir inversa.

2. Função

Função Inversa

c) Na função f, troque x por y e isole y, para encontrar g, a inversa de f.

d) Determine a imagem de g. Volte ao diagrama do item a) para representar $g: B \to A$ e escreva a letra g na outra placa.

e) Verifique a veracidade de $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$.

2. Função
Contínuo Vs Discreto

Vamos explorar a ideia intuitiva dos conceitos de continuidade e discretude

1) Tempo

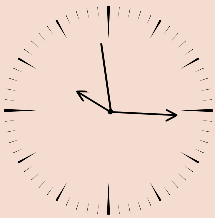
Vejamos 4 significados de "TEMPO", segundo o Dicionário Online de Português:

Disponível em: <https://www.dicio.com.br/tempo/> Acesso: 02 mar 2024.

Como bem sabemos "o tempo não para", e é justamente por ser ininterrupta, que a variável tempo, é considerada ______.

10:15:58
10:15:59
10:16:00
10:16:01
10:16:02
...

No entanto, note que há "saltos" entre um registro do tempo e outro, que é feito separadamente, instante a instante. Dessa forma, a marcação do tempo é uma variável ______.



2. Função

Contínuo Vs Discreto

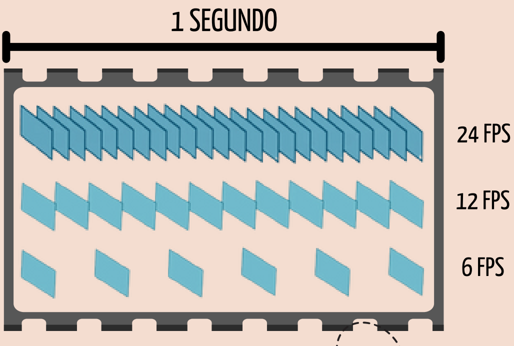
2) Stop-Motion

Stop-motion é uma técnica de animação que utiliza a fotografia de objetos e diversos materiais, foto por foto, com ligeiras diferenciações de posição ou formato dos objetos entre elas para criar a ilusão de movimento.

(Ribeiro, 2009)

FUNCIONA ASSIM...

Quanto mais fotos pudermos ver no intervalo de 1 segundo, maior será a percepção do movimento.
Esse conceito quantificador também é conhecido como "frame rate", "taxa de quadros" ou "quadros por segundo".



PERCEBERAM?

As fotos quando olhadas isoladamente, têm o sentido DISCRETO, no entanto, quando são vistas uma após a outra, o nosso cérebro tende cada vez mais a perceber o efeito do movimento CONTÍNUO.

2. FUNÇÃO

Matemática nas Artes Visuais

LUZ, CÂMERA, AÇÃO!

INSTRUÇÕES:

1) Reúna-se em grupo de no mínimo 3 e no máximo 5 participantes;

2) Baixe o aplicativo Stop Motion Studio, disponível gratuitamente nos sistemas Android e iOS;

3) Produza um vídeo de no mínimo 10 e no máximo 30 segundos;

4) O roteiro, as filmagens e as edições serão de total responsabilidade dos integrantes do grupo e deverão ser feitos na escola;

5) O vídeo em formato .mp4 e o folioscópio em formato .pdf deverão ser entregues, dentro do prazo combinado.

EM13MAT401

2. Função

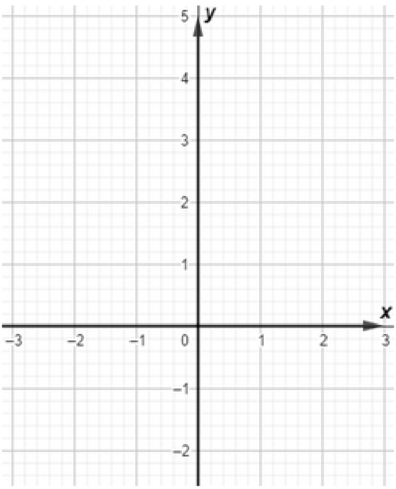
Domínio Contínuo e Domínio Discreto de Funções

Preencha as tabelas e construa os gráficos das funções f, g, h e i.

a) $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = x^2 - 1$

$x \mapsto f(x)$

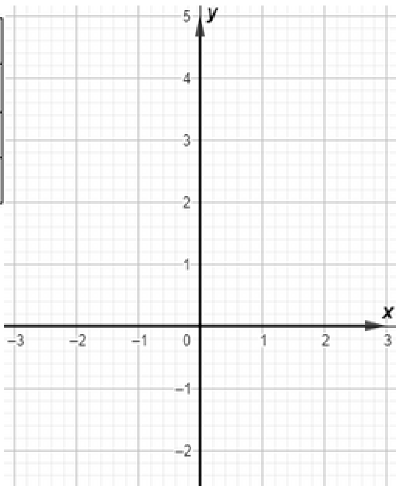
x	y
0	
1	
2	



b) $g : \mathbb{Z}_- \to \mathbb{Z}$ $\quad g(x) = x^2 - 1$

$x \mapsto g(x)$

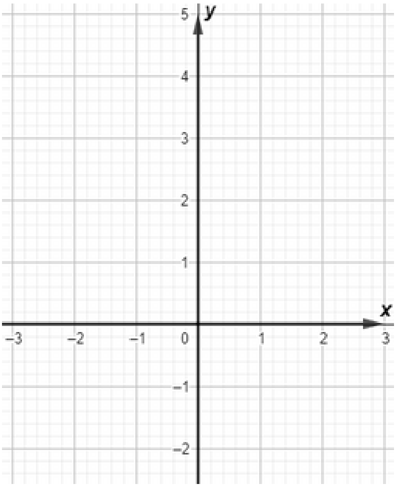
x	y
−2	
−1	
0	



c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad h(x) = x^2 - 1$

$x \mapsto h(x)$

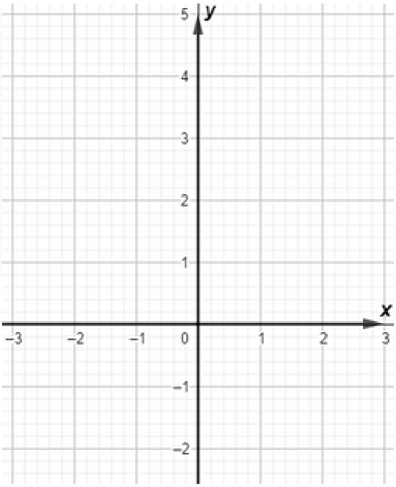
x	y
−2	
−1	
0	
1	
2	



d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad i(x) = x^2 - 1$

$x \mapsto i(x)$

x	y
−2	
−1	
0	
1	
2	



3. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS
Noções Básicas

Considere 12 pessoas dispostas uma ao lado da outra.

Analisando da esquerda para a direita, é fácil identificar a **primeira** pessoa, a **segunda**, a **terceira**, e assim sucessivamente, até a **décima segunda** pessoa.

De modo sucessivo;
Ordenadamente.

EXEMPLOS:

1) Sequência dos meses do ano que possuem 31 dias:

(janeiro, __________, __________, julho, __________, outubro, __________)

2) Sequência dos anos bissextos do século XXI em diante:

(______, ______, ______, 2016, ______, ______, 2028, ______, ...)

{1, 2, 3, 4} = {3, 1, 4, 2} Conjunto

(1, 2, 3, 4) ≠ (3, 1, 4, 2) Sucessão

Enquanto conjuntos têm elementos, as sequências possuem termos, e é conveniente utilizar variáveis indexadas para representá-los.

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

(a índice 1) a_1 ______________

(a índice 2) a_2 ______________

(a índice n) a_n ______________

Algumas sequências são definidas por recorrência. Uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

EXEMPLO:

3) Sequência de Fibonacci:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$$

(____, ____, ____, ____, ____, ____, ____, ...)

3. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Sequência ou Sucessão

Se liga!

DEFINIÇÃO

Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real a_n, chamado o n-ésimo termo da sequência.

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a_n$$

A cada número natural n, faz corresponder o valor da função

$$a(n) = a_n$$

$1 \mapsto a_1$

$2 \mapsto a_2$

$3 \mapsto a_3$

$\vdots$

$n \mapsto a_n$

EXEMPLOS:

1) (1, 3, 5, 7, 9)

$a(1) = a_1 =$

$a(4) = a_4 =$

2) (0, 5, 10, 15, 20, ...)

$a(2) = a_2 =$

$a(3) = a_3 =$

$a(6) = a_6 =$

As sequências (ou sucessões), podem ser FINITAS ou INFINITAS.

O domínio será formado por números naturais de 1 até n.

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$a : I_n \to \mathbb{R}$$

O domínio será o conjunto dos números naturais.

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Seja $\mathbb{R}$ o contradomínio das funções dos exemplos 1 e 2.

Escreva o domínio das sequências dos exemplos 1 e 2.

- Exemplo 1) ____________
- ____________
- Exemplo 2) ____________
- ____________

3. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Lei de Correspondência

Como vimos:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

Todo sequência é uma função.

f(x) f(x) y f(x) f(x)

Mas, toda função, possui três ingredientes:

FUNÇÃO

Assim, por transitividade, podemos concluir que:

Uma sequência também pode ser <u>aleatória</u>, ou definida através de uma <u>fórmula fechada</u>.

EXEMPLOS:

Sequência aleatória:

1) Lance um dado honesto, e preencha a sequência com os resultados obtidos.

(____, ____, ____, ____, ____, ____, ...)

Compare a sua sequência com a dos seus colegas.

É possível prever o sétimo termo dessa sequência? ○ SIM ○ NÃO

É possível prever algum termo dessa sequência? ○ SIM ○ NÃO

Qual é a <u>lei de correspondência</u> dessa sequência?

Sequência que possui fórmula fechada:

2) Complete as lacunas da sequência dos cubos perfeitos, definida nos inteiros positivos.

(_1_, _8_, ____, ____, _125_, ____, ...)

Compare a sua sequência com a dos seus colegas.

É possível prever o sétimo termo dessa sequência? ○ SIM ○ NÃO

É possível prever qualquer termo dessa sequência? ○ SIM ○ NÃO

Qual é a <u>lei de correspondência</u> dessa sequência?

3. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Gráfico

EXEMPLO:

Escreva nas laterais, os pares ordenados de todos os termos mostrados nas sequências a seguir. Construa no mesmo plano cartesiano, o gráfico dessas sucessões inserindo o máximo de pontos possível, utilizando as cores indicadas:

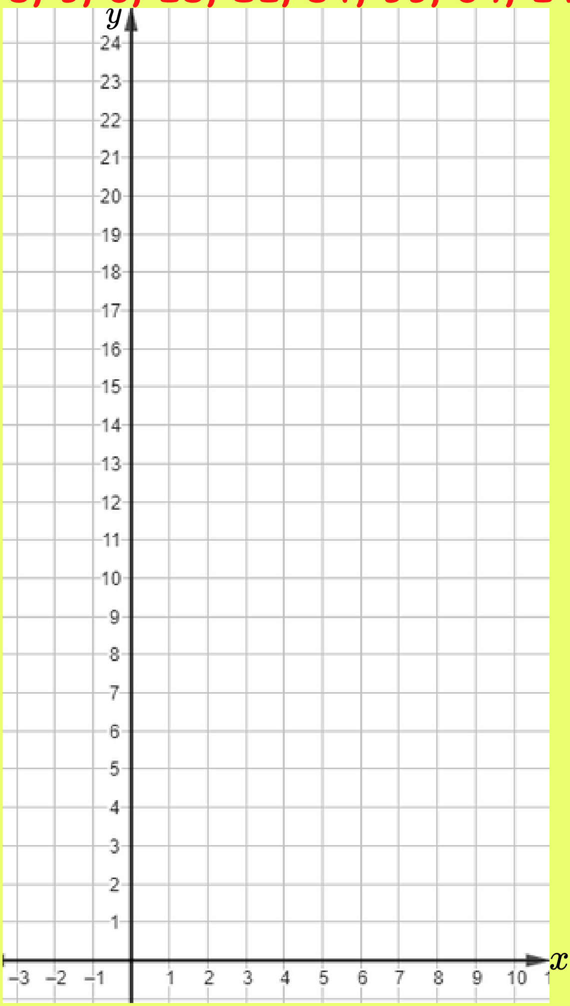
Sequência dos números primos positivos: (AZUL)

(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...)

Sequência de Fibonacci: (VERMELHO)

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...)

PARES ORDENADOS da sequência dos números primos positivos:



PARES ORDENADOS da sequência de Fibonacci:

4. FUNÇÃO AFIM

Por que o gráfico é sempre uma reta?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax + b$

$(**)$ $(*)$

DEFINIÇÃO

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma <u>função afim</u> quando existem constantes $a,\ b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

As imagens dessa função, para os valores do domínio $x_1, x_2, x_3,$ ... , são:

$f(x_1) = a \cdot x_1 + b$, $f(x_2) = a \cdot x_2 + b$, $f(x_3) = a \cdot x_3 + b$, ...

Dessa forma, as coordenadas desses pontos do gráfico de f, são:

...

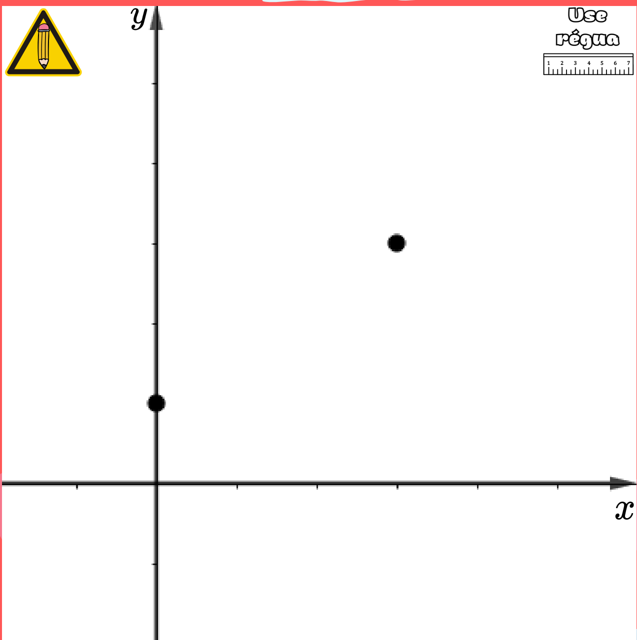
Quando x = 0, temos o valor de y cujo gráfico de f, toca o eixo das ordenadas.

$f(0) =$ $\Rightarrow$ $(**)$

- Os dois pontos destacados pertencem ao gráfico de f;
- Indique o ponto $B(0, b) \in f$ e destaque as suas coordenadas;
- Trace a reta s, que passa por B e é paralela ao eixo das abscissas;
- Indique o ponto $P(x, ax + b) \in f$ e destaque as suas coordenadas;
- Trace a reta t, que passa por P e é paralela ao eixo das ordenadas;
- Marque o ponto Q de interseção das retas s e t;
- Marque o ponto R de interseção da reta t com o eixo das abscissas;
- Indique as medidas de $\overline{PR}, \overline{QR}, \overline{PQ}$ e $\overline{BQ}$;
- Determine abaixo o seguinte quociente

$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}$ $(*)$

- Trace a reta r, que passa por B e P.



Perceba que no $\triangle BPQ$, a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente, ao ângulo $P\hat{B}Q$, é sempre uma constante. Ora, para que esse ângulo $P\hat{B}Q$ não mude, qualquer que seja o ponto do gráfico de f, só poderá se mover se estiver em uma RETA.

4. FUNÇÃO AFIM

EM13MAT101

Constantes reais a e b

Fazendo **f(x) = 0**, encontramos o **zero da função** $x = -\frac{b}{a}$.

$$f(x) = ax + b$$

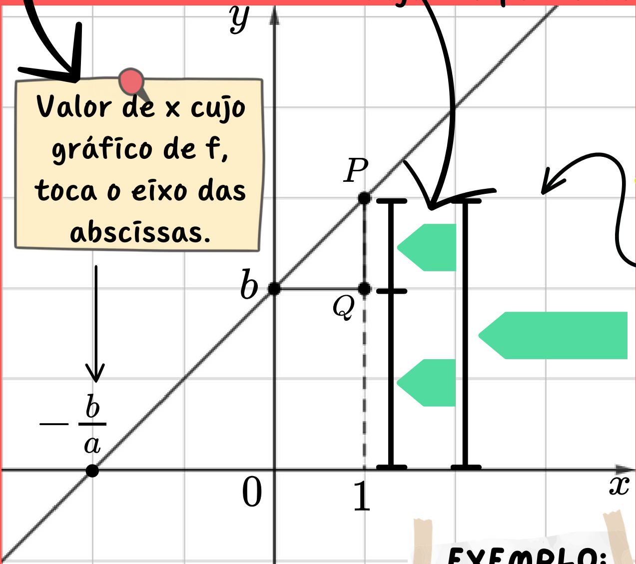
VALOR INICIAL

Qual o seu significado?

Se liga!

TAXA DE VARIAÇÃO

Valor de x cujo gráfico de f, toca o eixo das abscissas.



Seja P o ponto do gráfico de f para x = 1.

Ora, $f(1) = a \cdot 1 + b$

$$f(1) = a + b$$

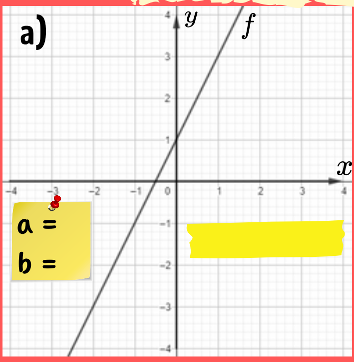
Preencha os espaços vazios indicando cada medida.

A <u>TAXA DE VARIAÇÃO</u> indica o quanto a função varia (cresce, se mantém constante ou decresce) cada vez que x aumenta uma unidade.

EXEMPLO:

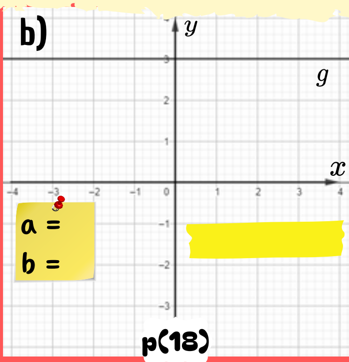
Observe nos gráficos das funções afins $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, identifique as constantes a e b e escreva as leis de correspondência de cada uma delas.

a)



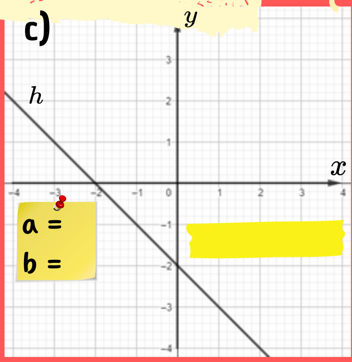
a =
b =

b)



a =
b =

c)



a =
b =

4. FUNÇÃO AFIM

EM13MAT501

Casos Particulares

São Funções Afins:

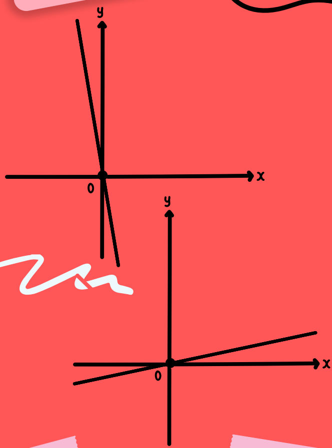
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Quando b = 0, a função

f(x) = ax

é chamada

<u>FUNÇÃO LINEAR</u>.



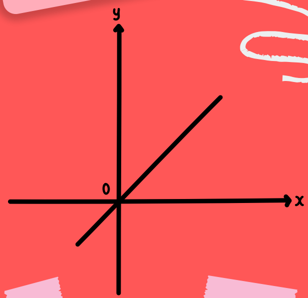
Esta função é o modelo matemático apropriado para os problemas de PROPORCIONALIDADE.

Quando b = 0 e a = 1, a função

f(x) = x

é chamada

<u>FUNÇÃO IDENTIDADE</u>.



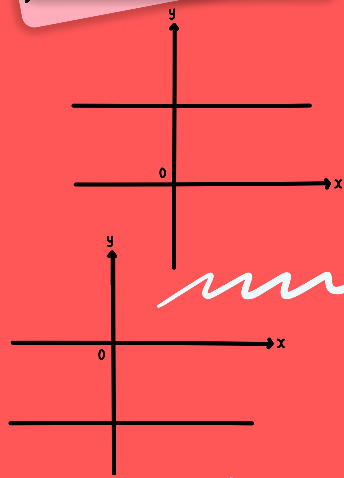
Toda função identidade é um caso particular da função linear.

Quando a = 0, a função

f(x) = b

é chamada

<u>FUNÇÃO CONSTANTE</u>.



Não há variação alguma nesse tipo de função, conforme x aumenta ou diminui.

EXEMPLO:

O plano cartesiano ao lado, mostra o gráfico de três funções afins de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, nas cores <u>azul</u>, <u>verde</u> e <u>laranja</u>. Associe esses gráficos com os seus nomes e suas tabelas, pintando esses objetos nas cores correspondentes. Por fim, escreva a lei de correspondência de cada função.

Tabelas:

Nome:

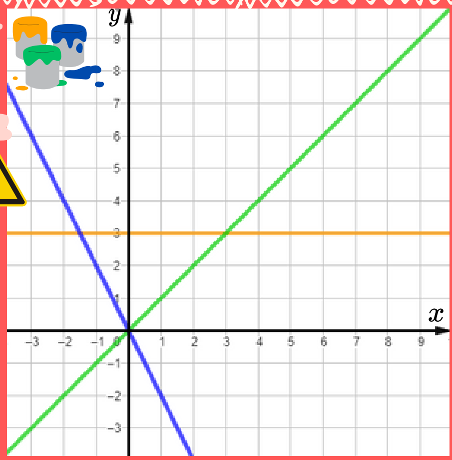
- IDENTIDADE
- CONSTANTE
- LINEAR

x	y
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3

x	y
-2	4
-1	2
0	0
1	-2
2	-4

x	y
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2

Lei:



4. FUNÇÃO AFIM

Criptografia com Função Afim Inversa

"A criptografia é a arte de cifrar, codificar, mensagens de forma que o texto fique incompreensível para leitores não autorizados. Apenas leitores autorizados terão acesso ao teor original da mensagem." (Neto, 2021)

EXEMPLO:

Vamos descriptografar a mensagem abaixo?

MENSAGEM CRIPTOGRAFRADA:

12 48 45 18 75 48 18 60

42 6 63 18 42 6 63 30 12 6 60

Inicialmente, vamos associar cada letra do nosso alfabeto (A, B, C, ..., X, Y, Z) com os números (0, 1, 2, ..., 23, 24, 25).

A ↔ 0	↔
B ↔ 1	↔
C ↔ 2	↔
↔	↔
↔	↔
↔	↔
↔	↔
↔	↔
↔	↔
↔	↔
↔	X ↔ 23
↔	Y ↔ 24
↔	Z ↔ 25

Sabendo que utilizou-se a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 6$ como método criptográfico, vamos utilizar a sua <u>inversa</u>, para decodificar a mensagem:

Lei de correspondência de $f^{-1}(x)$

Rascunhos:

MENSAGEM DESCRIPTOGRAFRADA:

5. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Noções Básicas

DEFINIÇÃO

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante.

Essa diferença constante é chamada de razão da PA.

E é representada pela letra r.

$$
\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= r\\
a_3 - a_2 &= r\\
a_4 - a_3 &= r\\
&\vdots\\
a_n - a_{n-1} &= r
\end{aligned}
$$

EXEMPLOS:

1) Escreva a razão de cada PA:

a) $(5, 17, 29, 41, 53, 65, 77, \ldots)$ r =

b) $(14, 6, -2, -10, -18, -26, -34)$ r =

c) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots)$ r =

Se $r < 0$ PA decrescente

Se $r > 0$ PA crescente

Se $r = 0$ PA constante

2) Pinte apenas as progressões aritméticas de acordo com a legenda:

PA decrescente: VERMELHA

PA constante: AMARELA

PA crescente: VERDE

$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots)$

$(-2009, -2024, -2039, \ldots)$

$(5, 25, 125, \ldots)$

$\left(-\frac{1}{9}, \frac{89}{9}, \frac{179}{9}, \ldots\right)$

$(2.71, 5.85, 8.99, \ldots)$

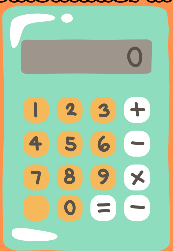
$\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots\right)$

$(-7, 7, -7, \ldots)$

$\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \ldots\right)$

$\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{7}{6}, \ldots\right)$

PA na calculadora!



1°) Escolha e digite o primeiro termo da PA;

A calculadora irá mostrar a_1.

2°) Some (ou subtraia) o número digitado a uma razão r qualquer de sua preferência e digite a tecla "=";

Primeira vez que digitar "=", a calculadora irá exibir a_2.

3°) A partir desse momento, cada vez que for pressionada a tecla "=", será apresentado no visor da calculadora um novo termo da PA.

Na segunda vez que digitar "=", a calculadora irá mostrar a_3, na terceira vez será exibido a_4, na quarta a_5, e assim sucessivamente.

5. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Termo Geral

Uma boa maneira para representar os termos de uma progressão aritmética, é dispô-los sob uma reta, dividida em intervalos de mesmo comprimento, cuja medida, seja igual a razão da PA.

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad \ldots$

$r \quad r \quad r \quad r \quad r \quad r \quad r \quad r$

! Considere o deslocamento dos termos sendo no sentido da esquerda para a direita!

Para se deslocar um termo, basta somar a razão.

$$a_4 = a_3 + r$$

$a_3 \quad a_4$

r

$$a_2 =$$

$a_1 \quad a_2$

r

Para se deslocar dois termos, basta somar duas vezes a razão.

$$a_8 = a_6 + 2r$$

$a_6 \quad a_8$

$r \quad r$

$$a_3 =$$

$a_1 \quad a_3$

$r \quad r$

Para se deslocar três termos, basta somar três vezes a razão.

$$a_6 = a_3 + 3r$$

$a_3 \quad a_6$

$r \quad r \quad r$

$$a_4 =$$

$a_1 \quad a_4$

$r \quad r \quad r$

Para se deslocar n termos, basta somar n vezes a razão.

5. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Termo Geral

A figura abaixo mostra a representação de uma escada cujos degraus possuem todos a mesma altura r e os seus comprimentos medem $d_1, d_2, ..., d_{21}$.

i) Sendo d_1 e d_{21} o primeiro e o vigésimo primeiro degrau, respectivamente, enumere os demais degraus escrevendo em cima de cada um;

ii) Relacione os pares de degraus destacados, obedecendo o sentido do deslocamento entre eles.

5. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

A ideia de Gauss

Certa vez na Alemanha, um professor de Matemática solicitou aos seus alunos que calculassem a soma dos números inteiros de 1 até 100.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

Para a surpresa de todos que ali estavam, sobretudo do professor, poucos instantes depois, um deles, acertadamente, responde: 5 050.

Mas como ele conseguiu resolver esse problema em pouco tempo?

Ao analisar estes números, o estudante percebeu que adicionando o primeiro número da lista ao último $(1 + 100)$, o segundo com o penúltimo $(2 + 99)$, o terceiro ao antepenúltimo $(3 + 98)$ e assim sucessivamente, a soma era sempre a mesma, 101.

Portanto restava apenas descobrir quantas somas iguais a 101 haviam em S.

Escrevendo S duas vezes, uma com os os seus números em ordem crescente e a outra, de modo decrescente, será fácil ver que serão 50 somas iguais a 101.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \ldots + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Basta somar as duas linhas acima, parcela a parcela, que obtemos:

$$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101$$

$$\Rightarrow \ 2S = (101) \cdot 100 \quad \Rightarrow S = \frac{(101) \cdot 100}{2} \quad \Rightarrow S = (101) \cdot 50$$

E multiplicando 101 por 50, obtemos como produto 5 050.

Mais tarde Gauss se tornaria um dos maiores matemáticos da humanidade tendo também dado contribuições na Física e na Astronomia.

5. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Soma dos termos de uma PA finita

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ uma PA de razão r.
Vamos utilizar a ideia de Gauss para determinar uma expressão que fornaça a soma dos termos de uma progressão aritmética finita qualquer.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

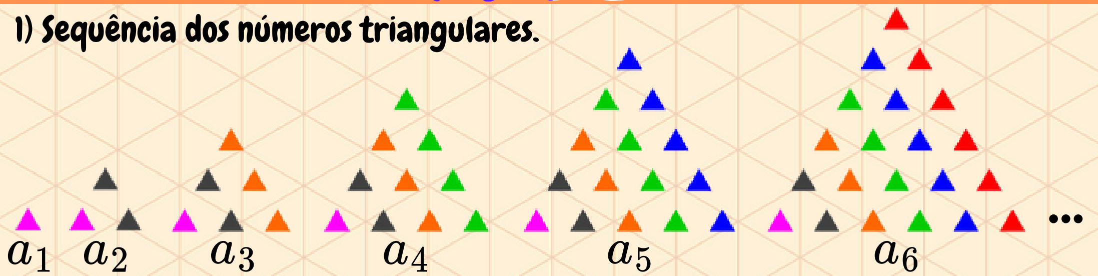
$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como são n somas iguais, podemos escrever:

$$2S = (a_1 + a_n) \cdot n \quad \Rightarrow \quad S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

EXEMPLOS:

1) Sequência dos números triangulares.



a) Preencha os espaços abaixo e escreva os termos indicados desta sequência.

$a_1 = 1 =$

$a_2 = 1 + 2 =$

$a_3 = 1 + 2 + 3 =$

$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 =$

$a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 =$

$a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =$

$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$(\_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \ldots)$

b) Expresse a sua lei de correspondência e encontre o milésimo número triangular.

5. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Soma dos termos de uma PA finita

EXEMPLOS:

2) Sequência dos números quadrangulares.

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$ ...

a) Preencha os quadros abaixo e escreva os termos indicados desta sequência.

$a_1 = 1 =$ ☐

$a_2 = 1 + 3 =$ ☐

$a_3 = 1 + 3 + 5 =$ ☐

$a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 =$ ☐

$a_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$ ☐

$a_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$ ☐

$a_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + n$

(____, ____, ____, ____, ____, ____, ...)

b) Expresse a sua lei de correspondência e encontre o centésimo número quadrangular.

Uma curiosa relação entre os números triangulares e quadrangulares

I) Escreva nas células das linhas 1, 2 e 3, os dez primeiros termos das sequências dos números naturais, triangulares e quadrangulares, respectivamente.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Números Naturais	1									
2	Números Triangulares (T_n)	1									
3	Números Quadrangulares (Q_n)	1									

5. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Soma dos termos de uma PA finita

II) Some um número triangular qualquer (a partir do segundo) com o seu anterior e compare os resultados obtidos com os números quadrangulares. O que você percebeu?

III) Escreva a relação do item II), utilizando a linguagem de planilhas eletrônicas (COLUNAS/LINHAS), para todas as células mostradas no item I).

IV) Seja $t_1, t_2,$ ..., o primeiro, o segundo, ..., número triangular e $q_1, q_2,$ ..., o primeiro, o segundo, ..., número quadrangular. Reescreva o item III) em função dessas variáveis.

V) Mostre que a soma do enésimo número triangular com o seu anterior é sempre igual ao enésimo número quadrangular.

6. CONEXÃO ENTRE FUNÇÃO AFIM E PA

EM13MAT507

Função Afim com entrada natural gera uma PA

Se pegarmos uma função afim

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax + b$

E discretizarmos o seu domínio

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f(n) = an + b$

O resultado será uma PA de razão **a** e primeiro termo **a + b**.

Se liga!

Temos aqui an, não a_n!

Isso ocorre porque a fórmula do termo geral de uma PA

$a_n = a_1 + (n-1)r$

define o valor de a_n em função de n, o que também ocorre com

$f(n) = an + b.$ $(*)$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_n = a_1 + rn - r$$
$$a_n = rn + (a_1 - r) \quad (**)$$

Comparando (*) com (**), encontramos os valores da razão e do primeiro termo:

$rn = an$

$$\boxed{r = a}$$

$a_1 - r = b$

$a_1 - a = b$

$$\boxed{a_1 = a + b}$$

Mais uma constatação de que sequência é, de fato, uma função.

EXEMPLOS:

1) Escreva a PA associada a cada uma das funções afins a seguir.

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = 5n - 13$

b) $g: I_6 \to \mathbb{R}$, $g(n) = -4n + 7$

c) $h: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $h(n) = -2n + 7$

2) Defina as funções afins associadas as progressões aritméticas a seguir.

a) (6, 25, 44, 63, 82)

b) (−7, −12, −17, ...)

c) (−23, −20, −17, −14)

6. CONEXÃO ENTRE FUNÇÃO AFIM E PA

EM13MAT507

Taxa de Variação vs Razão da PA

Toda PA é a discretização de uma função afim.

Aumentando uma unidade no n, a_n aumentará r unidades.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$

Variação da função quando x aumenta uma unidade.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$f(n) = an + b$

Variação da PA quando n aumenta uma unidade.

a

TAXA DE VARIAÇÃO da função afim.

RAZÃO da PA

De fato, se aumentarmos "uma" unidade no n, será aumentado "a" unidades no f(n).

Seja $f(n) = an + b, n \in \mathbb{N}$.

Aumentando uma unidade no n:

$f(n+1) = a(n+1) + b$

$f(n+1) = an + a + b$

$f(n+1) = (an + b) + a$

Aumenta-se a unidades no f(n):

$f(n+1) = f(n) + a$

EXEMPLO:

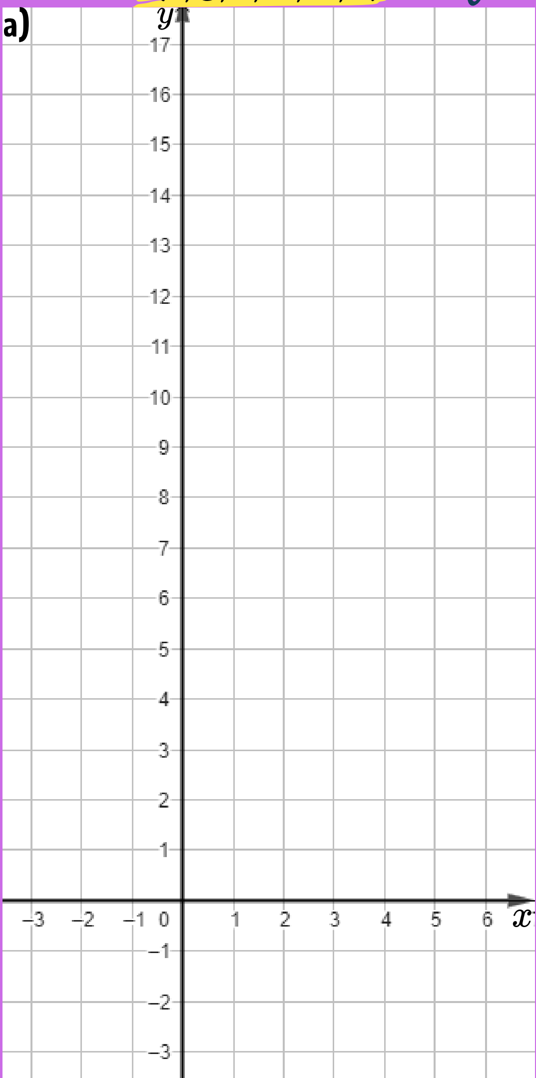
1) Construa nas malhas quadriculadas da página seguinte, os gráficos das progressões aritméticas a) (5, 8, 11, 14, 17, ...) e b) (15, 11, 7, 3, −1, ...) e o gráfico das suas funções afins, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, correspondentes. Investigue o que foi estudado.

6. CONEXÃO ENTRE FUNÇÃO AFIM E PA

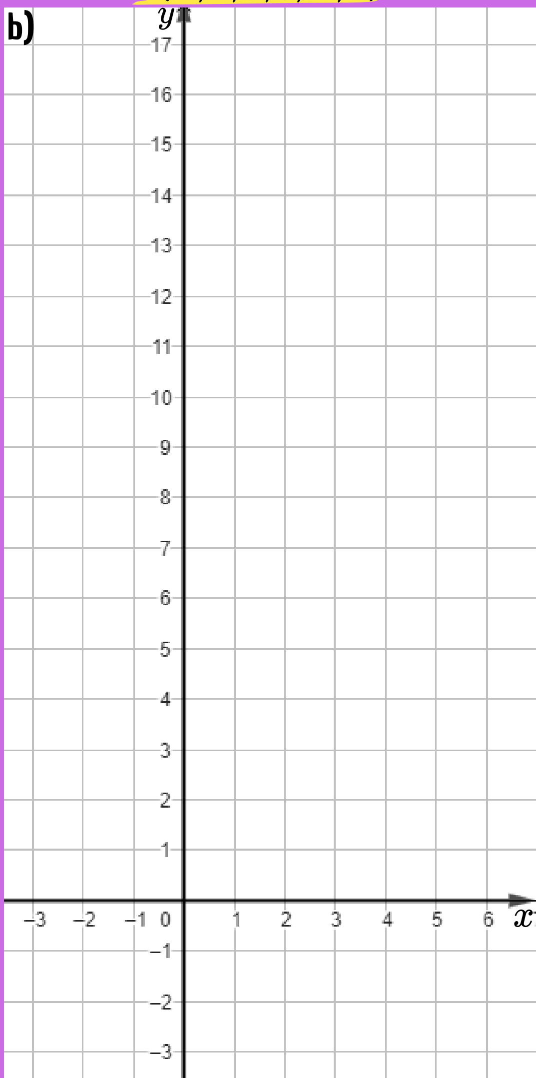
EM13MAT401
EM13MAT507

Gráfico

a) (5, 8, 11, 14, 17, ...)



b) (15, 11, 7, 3, −1, ...)



6. CONEXÃO ENTRE FUNÇÃO AFIM E PA

EM13MAT507

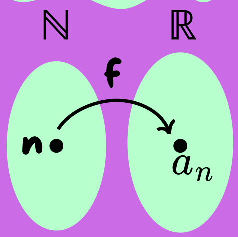
Função Afim leva PA em PA

Como vimos:

Toda função afim cujo domínio é o conjunto dos naturais gera uma PA.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f(n) = an + b$



Mas o que aconteceria se em todos os valores de entrada de uma função afim, inseríssemos termos de uma PA qualquer de razão r?

PA de razão r:

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$

Conjunto D formado pelos termos da PA de razão r:

$D = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots\}$

$f: D \to \mathbb{R}$

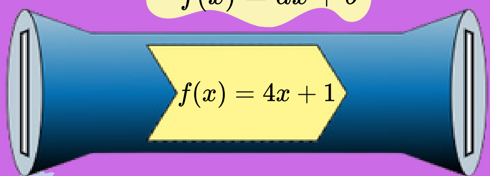
$f(x) = ax + b$

A função f, transforma os elementos de D em outra PA de razão $a \cdot r$.

TAXA DE VARIAÇÃO da função f.

RAZÃO da PA.

PA de razão r. ENTRADA



SAÍDA **PA de razão $a \cdot r$.**

EXEMPLO:

1) Considere que a máquina acima está programada para transformar valores da entrada através da função $f(x) = 4x + 1$.

a) Se inserirmos, nesta ordem, os termos da PA (−7, −2, 3, 8, 13, 18, 23), quais serão os novos termos da sequência obtida na saída da máquina?

(_____, _____, _____, _____, _____, _____, _____)

b) Preencha a tabela inserindo a taxa de variação “a” da função programada na máquina, a razão “r” da PA dada no item a) e o produto desses dois valores. Certifique-se de que este produto é igual à razão da PA obtida na saída da maquina.

a	r	$a \cdot r$

6. CONEXÃO ENTRE FUNÇÃO AFIM E PA

Revisitando Conceitos

Pinte, na cor que preferir, o caminho correto que leva a saída do labirinto!

START

Uma PA de 20 termos é tal que $3 \mapsto 19$ e $9 \mapsto 67$.

Quanto vale a razão dessa PA?

11

Encontre o seu último termo.

163

Toda PA é uma discretização de qual tipo de função?

8

3

155

147

Afim

O seu primeiro termo é igual a:

-5

A soma de todos os termos dessa PA vale:

1580

Qual é o domínio dessa PA?

11

2

1850

$\mathbb{N}$

I_{20}

Um par ordenado do gráfico dessa PA possui coordenadas

$f(n) = 8n - 5$

A lei de correspondência dessa PA é:

injetiva, mas não sobrejetiva.

Sendo $\mathbb{N}$ o contra-domínio da PA, podemos dizer que esta função é

$(10, 75)$

$f(n) = 3n + 8$

$f(n) = 8n + 5$

$f(n) = 8n + 3$

sobrejetiva, mas não injetiva.

Aplicando essa PA numa função linear $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja taxa de variação é -4, obtemos como imagem:

$(-12, -44, \ldots, -620)$

Os termos de uma PA são exemplos de variáveis

dependentes

EXIT

Rascunhos