UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Tiago Emanoel Melo Pereira

Investigando Processos Infinitos: Uma Proposta de Disciplina Eletiva sob a Ótica do Novo Ensino Médio

Campina Grande - PB
Agosto/2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Tiago Emanoel Melo Pereira

Investigando Processos Infinitos: Uma Proposta de Disciplina Eletiva sob a Ótica do Novo Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Romildo Nascimento de Lima
Coorientador: Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Campina Grande - PB
Agosto/2024

P436i Pereira, Tiago Emanoel Melo.

Investigando Processos Infinitos: uma proposta de disciplina eletiva sob a ótica do novo ensino médio / Tiago Emanoel Melo Pereira. – Campina Grande, 2024.

241 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima, Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega".

Referências.

1. Processos Infinitos. 2. Proposta de Disciplina Eletiva. 3. Ensino Médio. 4. Ensino de Matemática. 5. História em Quadrinhos. I. Lima, Romildo Nascimento de. II. Nóbrega, Alânnio Barbosa. III. Título.

CDU 51:37(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA MEIRE EMANUELA DA SILVA MELO CRB-15/568

Tiago Emanoel Melo Pereira

Investigando Processos Infinitos: Uma Proposta de Disciplina Eletiva sob a Ótica do Novo Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 09 de Agosto de 2024:

Dr. Romildo Nascimento de Lima
Orientador - UFCG

Dr. Alânnio Barbosa Nobrega
Coorientador - UFCG

Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho
Membro Interno - UFCG

Dr. Leandro da Silva Tavares
Membro Externo - UFCA

Campina Grande - PB
Agosto/2024

Dedico este trabalho aos meus queridos pais, Maria do Socorro Melo Pereira e Fernando Pereira Lima, e a minha esposa, Ana Maria Souza Magalhães, que fazem tanto por mim.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, por todas as bênçãos que ELE tem proporcionado em minha vida. No meio de tantas bênçãos ELE me concedeu uma família que eu tanto amo e uma profissão na qual me sinto realizado e motivado a evoluir cada vez mais.

Durante o percurso para alcançar o título de Mestre em Matemática, recebi apoio e encorajamento de pessoas fundamentais em minha vida e de outras que conheci ao longo do processo. Cada uma delas teve uma importância fundamental nessa conquista.

Agradeço a minha esposa, Ana Maria, por todo amor, apoio, carinho, cuidado e incentivo. Gratidão aos meus pais, Maria do Socorro e Fernando, que fazem tanto por mim durante toda a minha vida, demonstrando todo o seu amor, carinho e zelando pelo meu futuro. Aos meus irmãos, Iago e Davi, agradeço por todo apoio e incentivo.

Agradeço o afeto dos meus familiares maternos, paternos e os familiares por afinidade da minha esposa que, me encorajaram e transmitiram boas energias com a sua torcida pelo meu sucesso.

Agradeço aos meus colegas de trabalho da Escola Técnica Estadual Clóvis Nogueira Alves que, externavam diariamente sua torcida e estavam sempre disponíveis para ajudar. Em especial, agradeço a Adriana, Amanda Barbosa, Amanda Beatriz, Edmilson, Eduardo, Gésica, Ingredy, Igor, Janaina, Janielle, John, José Ferreira Jr, Jozivânia, Lauriza, Marcílio, Mathaus, Matheus, Orlando, Raul, Reginalva, Vanécia e Victor Wagner. Gratidão, colegas da ETECNA, pela parceria e pelos ensinamentos que me oferecem enquanto trilhamos juntos o caminho para promover uma educação de excelência para os estudantes de Serra Talhada e região.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão aos alunos egressos da ETECNA, Carlos Henrique e João Gustavo. Sua colaboração e empenho foram fundamentais para a elaboração do produto educacional apresentado nesta Dissertação. Muito obrigado por contribuírem com sua expertise e por fazerem parte desta jornada.

Agradeço a todos os meus alunos, uma vez que é para melhor atendê-los que estou me capacitando. De maneira muito especial, agradeço aos meus alunos do 3º ano de Edificações que cursaram a Disciplina Eletiva Investigando Processos Infinitos, Ana Marcela, Arthur, Caike, Caliane, Enzo, Felix, Francisco Renato, Gabriel, Itauanny, Joaquim, José Vítor, Luana, Marcos, Maria Clara Ferreira, Maria Clara Lima, Mariza, Natan, Poliana, Sara, Thaiza, Thiago e Yasmin. Vocês tiveram uma participação significativa nessa conquista.

Externos meus agradecimentos a um grupo especial de amigos, os meus amigos Matemáticos, Airton Magalhães, Alex Magalhães, Fagner Magalhães, Isaías Lima, João Evayr, Matheus Queiroz, Ricardo Eryton e William Santana por todo apoio e torcida durante a minha trajetória.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a Matheus Queiroz, meu compadre, que foi fundamental na minha jornada de conclusão do Mestrado. Um grande amigo que me incentivou a ingressar no PROFMAT e em muitos momentos foi um excelente tutor e professor. Sua orientação e incentivo foram muito importantes para o meu desenvolvimento acadêmico.

Ao meu professor de Matemática do Ensino Médio, Isaías Lima, externo meus agradecimentos. Sua referência e incentivo me levaram a cursar Licenciatura em Matemática e seguir a carreira docente, uma profissão na qual me sinto completamente realizado.

Externo meus agradecimentos aos meus companheiros de turma, com quem batalhei lado a lado durante dois anos. Juntos, enfrentamos desafios, dedicamos horas de estudo e compartilhamos momentos intensos em nossa jornada acadêmica. Sou grato por ter compartilhado essa experiência com vocês, Alexandre, Antônia, Antônio, Emídio, Flávia, Geovane, Lucivaldo, Mozart, Pedro, Rejane, Renan, Renato, Ruth, Silvana e Thiago.

Quero expressar um caloroso agradecimento aos meus grandes amigos do PROFMAT, Geovane e Ruth. Dedicamos muitas horas de estudo juntos, compartilhando preocupações, angústias, pequenas vitórias e grandes conquistas ao longo do curso. Estivemos juntos do início ao fim, e a presença de vocês foi essencial para tornar essa jornada mais significativa e enriquecedora. Sou profundamente grato por cada momento que vivemos juntos e pelo apoio constante que oferecemos uns aos outros.

Gostaria de fazer um agradecimento especial aos meus companheiros de viagem, Ruth, Evayr, Lucivaldo, Márcio, Filipe, Márcia, Fagner e Adalberto. Juntos, percorremos muitos quilômetros, e as conversas bem-humoradas, as músicas, os cafés da manhã na estrada, o incentivo, os momentos de compartilhamento e reflexão tornaram a caminhada muito mais leve e agradável. A presença de cada um de vocês foi fundamental para tornar a minha jornada semanal de quase 700 km mais suportável e significativa. Agradeço profundamente por todos esses momentos que vivemos juntos e pela companhia de cada um de vocês.

Sou muito grato aos professores do PROFMAT-UFCG, em especial, Daniel Cordeiro, Jaime Alves, José de Arimatéia, José Fernando, Leomaques Francisco, Luiz Antônio e Marcelo Carvalho, que me proporcionaram ao longo do curso valiosos ensinamentos.

Aos meus orientadores, Alânnio Barbosa Nóbrega e Romildo Nascimento de Lima, agradeço de forma especial por todo apoio e valiosas orientações que me permitiram construir essa dissertação de Mestrado.

Expresso minha gratidão aos professores, Daniel Cordeiro e Leandro Tavares, que contribuíram significativamente com este trabalho, realizando correções e trazendo valiosas sugestões.

Agradeço aos colaboradores da UFCG e UAMAT pela receptividade, atenção e dedicação, especialmente a Isabela e Aninha.

Agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) que proporciona por meio do PROFMAT o desenvolvimento da formação acadêmica de milhares de professores de Matemática pelo Brasil.

Por fim, externo meus agradecimentos a CAPES pelo apoio financeiro.

"Toda a glória seja a Deus que,
por seu grandioso poder que atua em nós,
é capaz de realizar infinitamente mais
do que poderíamos pedir ou imaginar."
(Bíblia Sagrada, Efésios 3:20)

Resumo

A construção do presente trabalho sugere o estudo de processos infinitos e sua abordagem no Ensino Básico, com ênfase, numa investigação intuitiva de problemas clássicos que motivaram o surgimento do Cálculo. Essa temática impulsionou nossas pesquisas sobre o problema da tangente, o problema da velocidade instantânea e o problema da área. A própria Base Nacional Comum Curricular (BNCC) contempla competências e habilidades que nos fornece o embasamento necessário para tratar desse assunto no Ensino Básico. Tendo isso em vista, achamos pertinente recomendar ao leitor uma proposta de disciplina eletiva que elaboramos para o 3º ano do Ensino Médio. Com este intuito, fornecemos um plano de curso detalhado contendo as principais informações sobre a disciplina. Além disso, disponibilizamos atividades de sondagem, materiais textuais no formato de Histórias em Quadrinhos e um jogo confeccionado com material manipulável. Apresentamos também sugestões de duas sequências didáticas e o desenvolvimento de atividades dinâmicas utilizando software computacionais.

Palavras-chave: Processos Infinitos. Proposta de Eletiva. Histórias em Quadrinhos.

Abstract

The construction of this work suggests the study of infinite processes and their approach in Basic Education, with an emphasis on an intuitive investigation of classical problems that motivated the emergence of Calculus. This theme drove our research on the tangent problem, the instantaneous velocity problem, and the area problem. The Base Nacional Comum Curricular (BNCC) itself includes competencies and skills that provide us with the necessary foundation to address this topic in Basic Education. With this in mind, we find it pertinent to recommend to the reader an elective course proposal that we have developed for the 3rd grade of high school. To this end, we provide a detailed course plan containing the key information about the subject. Additionally, we provide diagnostic activities, textual materials in the form of comic strips, and a game made with manipulable materials. We also present suggestions for two didactic sequences and the development of dynamic activities using computational software.

Keywords: Infinite Processes. Elective Course Proposal. Comic Strips.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

É inegável que a Matemática em todos os seus níveis depende de processos infinitos, entretanto assim como outros fatos importantes a abordagem desses processos tem sido tradicionalmente esquecida, em especial, quando a Matemática Elementar é apresentada para os estudantes do Ensino Básico.

Destacar alguns processos infinitos que podem ser abordados no ensino da Matemática não é uma tarefa difícil, afinal são muitas as experiências que os jovens em idade escolar podem vivenciar, a título de exemplos, a obtenção de números especiais como o π e o cálculo de certas áreas por meio de aproximações.

Contudo, o real desafio é fornecer aos educandos experiências adequadas para apoiar o desenvolvimento de noções intuitivas como a ideia de limite e convergência que só serão melhores entendidas a médio e longo prazo. A princípio talvez o leitor possa achar que introduzir no Ensino Médio os problemas que abordaremos em nossa pesquisa seja um certo exagero ou até mesmo inviável dado o seu grau de abstração. Porém, mostraremos que é possível, fazendo a devida adequação.

A nossa principal motivação pela escolha do tema processos infinitos, se deu ao grande potencial que essa temática possui de proporcionar uma investigação mais ampla de temas que são abordados no Ensino Básico, em especial, no Ensino Médio.

Utilizando conhecimentos prévios que o aluno carrega em sua bagagem pedagógica podemos explorar, elementos do Cálculo, como exemplo, a noção intuitiva de limite. Isso possibilita ao educando um primeiro contato com uma componente bastante relevante na Matemática no contexto atual.

Além do mais, temos a oportunidade de contribuir com uma temática pouco abordada no banco de dissertações do PROFMAT. É bem verdade que, os problemas que abordaremos são bastante conhecidos e podemos até encontramos estudos isolados para cada um deles.

Em contrapartida, não observamos um único trabalho que concentre sua investigação na análise do problema da tangente, problema da velocidade instantânea e problema da área, sob a perspectiva que estamos propondo.

Para tanto, durante a construção deste trabalho, não poupamos esforços para tentar contribuir de forma significativa com a elaboração de novas formas de divulgação da Matemática. Apresentaremos ao leitor estratégias para introduzir, intuitivamente, cada problema bem como algumas ferramentas didáticas prontas para serem utilizadas.

Para alcançar os nossos objetivos realizamos pesquisas em artigos, sites e livros de autores que abordam essa temática. Elaboramos e aplicamos uma proposta de disciplina eletiva. Dentro da nossa proposta de eletiva aplicamos atividades de sondagem, realizamos uma breve análise de alguns dos resultados obtidos, propomos sequências didáticas, confeccionamos materiais didáticos textuais no formato de Histórias em Quadrinhos e um jogo.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Estudar e divulgar a temática dos processos infinitos em vários contextos, a fim de explorar mais profundamente temas estudados no Ensino Médio por intermédio da estruturação e aplicação de uma proposta de disciplina eletiva sob a ótica do Novo Ensino Médio.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Abordar aspectos históricos dos processos infinitos e apresentar problemas clássicos que impulsionam o desenvolvimento dessa temática;
- Entender a conexão entre a Matemática dos processos infinitos e o invento do Cálculo;
- Usar, intuitivamente, o conceito de limite para explorar mais profundamente temas estudados no Ensino Básico, como Funções e Geometria;
- Relacionar o problema da tangente e o problema da velocidade instantânea;
- Utilizar a Matemática dos processos infinitos para determinar uma fórmula fechada para calcular a área do círculo e a área sob o arco de parábola;
- Utilizar softwares computacionais, GeoGebra e Excel, para investigar processos infinitos;
- Elaborar e aplicar uma proposta de disciplina eletiva para o 3º ano do Ensino Médio com o intuito de divulgar processos infinitos;
- Produzir um material didático textual no formato de Histórias em Quadrinhos (HQ's) que sirva de motivação para a abordagem dos processos infinitos como disciplina eletiva para compor um itinerário formativo no Novo Ensino Médio;
- Produzir um jogo com material manipulável, o quebra-cabeça de setores, com o intuito de determinar a área de um círculo por meio aproximações.

1.2 Organização

Com o intuito de alcançar os objetivos apresentados na Seção 1.1, estruturamos o nosso trabalho em 6 capítulos.

No Capítulo 1, apresentaremos a introdução, expondo a nossa motivação para a escolha do tema, o objetivo geral e os objetivos específicos desta dissertação. Ainda no primeiro capítulo apresentaremos a forma como o trabalho foi estruturado.

No Capítulo 2, focaremos em abordar a contextualização história do nosso trabalho, onde temos pretensão de apresentar como a Matemática dos processos infinitos se desenvolveu ao longo do tempo e comentar brevemente sobre o surgimento de alguns problemas clássicos que serão abordados pensando em como os estudiosos da época obtinham êxito em suas soluções, mesmo com poucas ferramentas matemáticas quando comparadas ao que temos hoje.

No Capítulo 3, traremos os principais resultados sobre o problema da tangente e o problema da velocidade instantânea. Nos preocupamos em generalizar o conceito de reta tangente, estudar cada um dos problemas, trazer aplicações e relacioná-los.

No Capítulo 4, apresentaremos o problema da área. Abordaremos esse problema tendo como principal motivação usar, intuitivamente, a Matemática dos processos infinitos para investigar a área de uma região sob um arco de parábola e a área de um círculo.

No Capítulo 5, apresentaremos a proposta de disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos, englobando o plano de curso da disciplina, informações sobre a aplicação, os recursos didáticos utilizados e a análise de duas sequências didáticas.

No Capítulo 6, realizaremos as considerações finais e comentaremos as nossas impressões sobre os resultados obtidos com o desenvolvimento da pesquisa.

Neste trabalho também consta o registro de cinco apêndices, o Apêndice A diz respeito ao Sondando a Aprendizagem, um conjunto de atividades de sondagem que aplicamos em aulas da nossa proposta de eletiva. Nos Apêndices B, C e D trazemos as versões completas das histórias em quadrinhos que foram desenvolvidas. Por fim, no Apêndice E inserimos um e-book onde apresentamos o jogo quebra-cabeça de setores.

2 Contextualização Histórica

Neste capítulo, abordaremos a contextualização histórica do nosso trabalho, onde temos pretensão de introduzir o tema e apresentar alguns aspectos históricos que encabeçam nosso estudo acerca dos processos infinitos.

Quando pesquisamos, separadamente, as palavras *processo* e *infinito* no Dicionário Houaiss encontramos os seguintes significados: "processo" é a "realização contínua e prolongada de alguma atividade" e "infinito" é algo que "não tem limite ou fim".

Por esta razão, quando ouvimos a expressão *processo infinito* é natural pensarmos na realização de algum tipo de ação ou atividade que não tem fim. Mas, como podemos lidar com um processo que não tem fim dados os limites que nos são impostos? Nossas mentes finitas são realmente capazes de compreender o infinito?

Provavelmente, após analisar alguns aspectos históricos relacionados ao tema nos sentiremos mais confortáveis para responder a essas intrigantes perguntas.

Nossas principais referências, serão os livros *Introdução à História da Matemática* (EVES, 2004), *Tópicos de História da Matemática* (ROQUE; CARVALHO, 2012), *História da Matemática* (BOYER; MERZBACH, 2019) e algumas edições da *Revista Professor de Matemática (RPM).*

Os processos infinitos aparecem na Matemática há muito tempo e trouxeram importantes contribuições para o seu desenvolvimento. A Grécia antiga do século V a.C., serviu de palco para o desencadeamento de muitas questões ligadas ao infinito. Segundo Brolezzi (1996, p.21)

> Foram os gregos os primeiros a procurar a compreensão dos fenômenos ligados ao infinito, ao contínuo, ao infinitésimo, em busca de uma explicação para o movimento e as transformações dos seres.

Na Grécia Antiga, diversas **escolas filosóficas** exerciam um papel fundamental para o desenvolvimento intelectual da época. Dentre essas escolas, é do nosso interesse destacar a **Escola Eleática**, fundada por Parmênides de Eleia (c. 530 a.C), que se concentrou em estudar a metafísica[1] e a lógica através dos paradoxos de Zenão para explorar os conceitos de infinito e continuidade, e a **Escola Atomista**, fundada por Leucipo (c. 500 a.C) e Demócrito (c. 460 a.C), que introduziu a ideia de que tudo no universo é composto por átomos indivisíveis e o vazio, o que influenciou as noções de espaço e indivisibilidade.

[1] A metafísica é uma área da Filosofia que investiga a natureza fundamental da realidade, indo além do que é fisicamente perceptível. É um campo de estudo que busca entender o que está por trás dos aspectos mais básicos e abstratos da existência.

Com o engendramento dos seus paradoxos[2], Zenão de Eleia (c. 490 a.C), demonstrou que surgem problemas e contradições lógicas quando consideramos que o tempo e o espaço podem ser divididos infinitamente. Para Zenão, se o espaço e tempo podem ser infinitamente divididos, então a mudança e o movimento não são possíveis, pois haveriam um número infinito de divisões que não poderiam ser completadas.

Por outro lado, a Escola Atomista contrariava as ideias de Zenão, aceitando que o espaço o tempo poderiam ser divididos infinitamente sem causar problemas lógicos. De acordo com os Atomistas, a divisão infinita do espaço e do tempo é compatível com a realidade da mudança e do movimento.

É fato que, essa duplicidade de ideias entre as Escolas Eleática e Atomista gerou um fervoroso debate na Grécia Antiga. Além do mais, tais discussões também ajudou a moldar a evolução do pensamento científico e filosófico.

Segundo Brolezzi (1996), as repercussões desses fenômenos desenvolveram nos gregos o que se chamou de "horror ao infinito", episódio que teve consequências relevantes na Matemática. O ponto é que muito deve ser creditado a Zenão de Eleia e seus paradoxos sobre o referido "horror ao infinito" que emergiu na Grécia Antiga.

Surge com Antífon (c. 430 a.C.), o Sofista, um contemporâneo de Sócrates, uma questão inerente a um processo infinito. Antífon teve uma importante contribuição para a solução do *problema da quadratura do círculo* (EVES, 2004, p.418). Mas afinal, o que significa quadrar um círculo? E qual foi a solução proposta por Antífon para esse problema?

A quadratura do círculo é o processo pelo qual construímos um quadrado de área igual à do círculo, em um número finito de etapas, utilizando régua não graduada e compasso. Antífon antecipou a ideia de que por meio de sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito no círculo, a diferença entre a área do círculo e à do polígono inscrito "ao final" se esgotaria.

Como é possível construir um quadrado de área igual a de qualquer outro polígono, também seria possível construir um quadrado de área igual à do círculo (EVES, 2004, p.418). Contudo, embora seus argumentos tenham sido bastante importantes para a época, não ficaram impunes as críticas.

Por que tais críticas surgiram? Isso ocorreu porque suas ideias tinham por base o princípio de que uma grandeza poderia subdividir-se indefinidamente. Sendo assim, como esse processo poderia esgotar a área do círculo?

Uma importante *ferramenta matemática* que possibilitou resolver esse problema foi apresentada por Euclides no livro XII de sua grandiosa obra *Os Elementos*.

[2] Entre os principais paradoxos de Zenão os mais famosos são: o **Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga**, o **Paradoxo da Dicotomia** e o **Paradoxo da Flecha**. O leitor poderá consultar mais detalhes em (BOYER; MERZBACH, 2019, p.71-73).

Essa técnica antiga é o Método da Exaustão, normalmente atribuído a Eudoxo de Cnido (c. 370 a.C). "O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: *Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie."* (EVES, 2004, p.419).

Mas afinal, com qual intuito os gregos utilizavam esse procedimento? Por meio do Método da Exaustão, os estudiosos conseguiam fornecer provas rigorosas de propriedades geométricas conhecidas, por exemplo, validar expressões utilizadas para calcular áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos.

O Método da Exaustão consiste em inscrever e circunscrever uma figura plana que, almejamos determinar a área com polígonos cuja área sabemos calcular. Quando refinamos esse processo, aumentando o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos, suas áreas aproximam-se cada vez mais da área da figura original.

A realização do processo continua até que a diferença entre as áreas dos polígonos e da figura original seja suficientemente pequena. Desse modo, é possível demonstrar que os resultados obtidos são verdadeiros e precisos dentro dos limites da aproximação que foi utilizada.

Através desse método, os gregos antigos conseguiam driblar processos infinitos, o que vem bem a calhar, visto que os mesmos demonstravam uma dificuldade peculiar ao tentar compreender as noções de infinitamente pequeno e infinito de modo lógico e intuitivo.

Mas afinal, como os gregos conseguiam a partir do Método da Exaustão evitar uma passagem ao infinito? Bem, quando se propõe um processo infinito é natural pensarmos numa ação continua que se repete indefinidamente. De fato, podemos duplicar o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos continuamente.

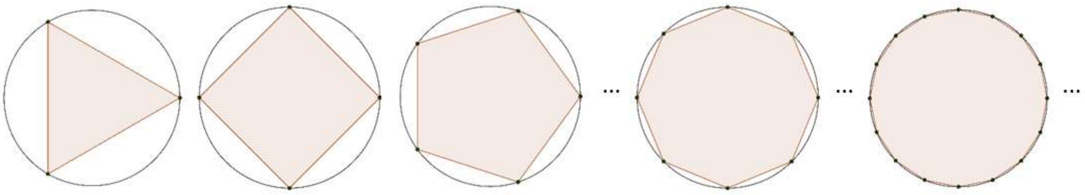
Entretanto, com o Método da Exaustão não é necessário "ir até o infinito" para solucionar o problema, isto significa que, não precisamos retirar pedaços da área do círculo indefinidamente até esgotá-lo. Em verdade, a ideia central é realizar um número finito de iterações[3] até obter-se uma grandeza menor do que a grandeza prefixada inicialmente.

Utilizando o Método da Exaustão, Arquimedes resolveu o *problema da quadratura do círculo.* Você recorda das objeções levantadas contra a solução sugerida por Antífon para o *problema da quadratura do círculo*? Conforme já mencionado neste capítulo, existiam algumas inconsistências na época devido a falta de um mecanismo que evitasse uma "passagem ao infinito".

[3] Definimos iterações como a repetição de um processo que nos permite aproximar do resultado desejado. Em nosso contexto, cada iteração ocorre com a duplicação sucessiva do número de lados dos polígonos regulares inscritos e circunscritos.

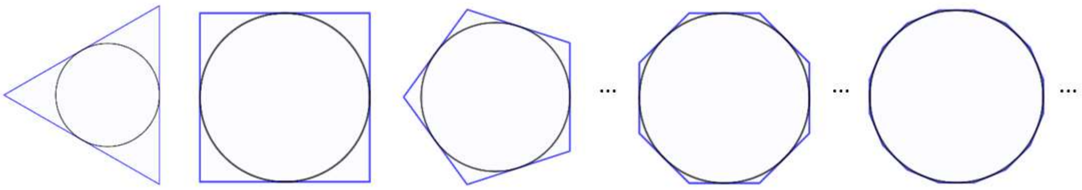
Agora, com o Método da Exaustão, isso deixa de ser um problema. Arquimedes usa em sua demonstração a ideia principal de aproximar a área do círculo por meio da área de polígonos regulares inscritos (ideia que Antífon antecipou) e circunscritos, conforme apresentamos nas Figuras 1 e 2.

Figura 1 – Inscrevendo o círculo com polígonos regulares



Fonte: O Autor via Software Geogebra.

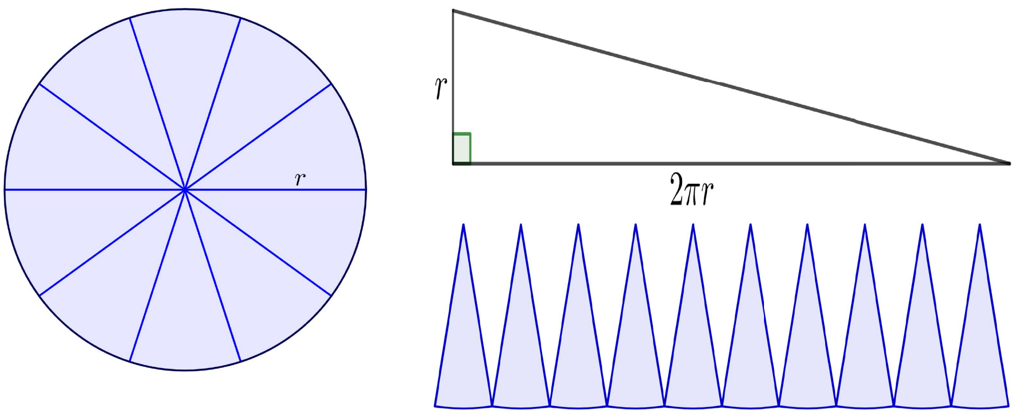
Figura 2 – Circunscrevendo o círculo com polígonos regulares



Fonte: O Autor via Software Geogebra.

O *insight* de Arquimedes estava em determinar uma fórmula fechada para a área do círculo encontrando um polígono que possuísse área equivalente, nesse caso um triângulo. Quando imaginamos um círculo decomposto em um grande número de setores iguais e os reunimos em fila, é perceptível que a soma de suas áreas resulta na área de qualquer triângulo cujas medidas de sua base b e altura h, são respectivamente, $b = 2\pi r$ e $h = r$, veja a Figura 3.

Figura 3 – Fatiando o círculo em n setores circulares



Fonte: O Autor via Software Geogebra.

Arquimedes provou que a área de um círculo é igual a área de um triângulo retângulo no qual um dos catetos é igual ao raio e o outro é a circunferência desse círculo. Caso o leitor deseje consultar mais detalhes, bem como a demonstração completa desse resultado, indicamos a leitura do livro *Tópicos de História da Matemática* (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.147-149).

Essa forma de visualizar a solução para o *problema da quadratura do círculo* é realmente impressionante.

Denotemos por A a área do triângulo, b sua base e h sua altura. Como o triângulo é retângulo, b e h são catetos e suas medidas são, respectivamente, $b = 2\pi r$ e $h = r$. Substituindo essas informações na expressão que utilizamos para calcular a área de um triângulo qualquer, obtemos:

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} \Rightarrow A = \pi r^2.$$

É inegável que o Método da Exaustão realmente minimizou o desconforto que gregos tinham com a ideia de infinito. Porém, segundo Eves (2004)

> O Método da Exaustão é rigoroso mas estéril. Em outras palavras, uma vez conhecida uma fórmula, o Método de Exaustão pode se constituir num elegante instrumento para prová-la, mas o método, por si só, não se presta para descoberta inicial do resultado.

Em sentido figurado, se diz que o Método da Exaustão é estéril para descrever que o método por si só, não gera uma descoberta inédita. Contudo, esse método mostrou-se uma ferramenta poderosa para provar resultados conhecidos, garantindo que todas as aproximações necessárias sejam consideradas.

Dos antigos, Arquimedes ficou conhecido como aquele que aplicou de forma mais elegante o Método da Exaustão. Entretanto, surge uma grande questão: como Arquimedes descobria as fórmulas que demonstrava pelo Método da Exaustão?

Na edição número 10 da *Revista Professor de Matemática - RPM 10*, o professor Geraldo Ávila, escreveu um artigo bastante interessante intitulado *Arquimedes, a esfera e o cilindro.* Em seu texto, Ávila comenta sobre uma grande descoberta do ilustre professor dinamarquês, J. L. Heiberg (1854-1928).

De acordo com Ávila (1987) "o novo livro de Arquimedes, dado a conhecer por Heiberg em 1906, é conhecido como "O Método"[4], justamente porque nele o geômetra grego descreve um "método mecânico" para investigar questões matemáticas".

Relatos históricos apontam que Arquimedes enviou uma carta para Eratóstenes de Alexandria explicando sobre "O Método". Um trecho dessa carta, apresentada por Ávila em seu artigo, diz o seguinte:

> Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria,

[4] O manuscrito original de Arquimedes, datado do século III a.C., foi perdido e posteriormente apagado para criar um novo manuscrito com textos religiosos. Essa obra ficou conhecida como Palimpsesto de Arquimedes. O termo "palimpsesto" tem origem grega e significa "raspado novamente" ou "escrito de novo".

> já que sua investigação pelo referido método não conduzisse a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, algum conhecimento das questões do que sem esse conhecimento...

De acordo com Eves (2004) o "método mecânico" proposto por Arquimedes para determinar áreas e volumes estava fundamentado na ideia de cortar as regiões correspondentes em um grande número de tiras planas ou fatias paralelas finas e imaginar esses pedaços pendurados numa das extremidades de uma alavanca dada, de modo que seja estabelecido um equilíbrio com uma figura cuja área ou volume e centroide são conhecidos.

Arquimedes registrou várias de suas descobertas utilizando essa ideia em seu livro "O Método". Por agora, não vamos apresentar nenhuma "demonstração" realizada por Arquimedes por meio do seu "método mecânico". Caso o leitor esteja curioso poderá encontrar mais informações em (EVES, 2004, p.422, 423) e (ÁVILA, 1987).

Em sua carta destinada a Eratóstenes, Arquimedes também escreveu o seguinte: "estou convencido de que ele (referindo-se ao "método mecânico") será valioso para a Matemática, pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorreram."

É inegável que a mensagem deixada nessa carta transmite uma certa atemporalidade. As descobertas de Arquimedes influenciaram grandes matemáticos no decorrer dos séculos, não é por acaso que "o chamado "método dos indivisíveis", inventado no século XVII, e que deu origem ao Cálculo Diferencial e Integral, é muito parecido com o antigo "método mecânico" de Arquimedes" (ÁVILA, 1987).

De acordo com (EVES, 2004), as raízes do "método dos indivisíveis" de Bonaventura Cavalieri (1598-1647) sustentam-se na Grécia antiga segundo as ideias de Demócrito de Abdera (c. 410 a.C.) e Arquimedes (c. 287-212 a.C.).

De acordo com (BOYER, 1959 apud BROLEZZI, 1996, p.22)

> A importância de Demócrito para o nosso assunto está no fato de ter sido, aparentemente, o primeiro a falar de infinitesimais e a considerar a possibilidade de trabalhar com o infinitamente pequeno a fim de recompor o todo como no caso de utilizar lâminas circulares infinitamente finas para calcular o volume de cilindros e cones, antecipando-se assim o teorema de Cavalieri, nesses casos.

Por outro lado, Eves (2004) também cita que a real motivação de Cavalieri talvez estivesse relacionada a trabalhos desenvolvidos por Johann Kepler (1571-1630), com o intuito de determinar o cálculo de volumes de barris de vinho usados em seu tempo (EVES, 2004, p.358).

Kepler teve forte influência no desenvolvimento da solução de muitos problemas ligados a processos infinitos. De acordo com Boyer e Merzbach (2019), ao tratar sobre problemas que envolviam áreas como, por exemplo, sua segunda Lei de Astronomia, "Kepler pensava na área formada por uma infinidade de pequenos triângulos, com um vértice no sol e outros dois vértices em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita".

Segundo Eves (2004) "Kepler considerava uma circunferência como um polígono regular de infinitos lados". Desse modo, visualizou que a circunferência poderia ser repartida em um número infinito de triângulos. Com isso, a altura desses triângulos infinitamente estreitos são iguais a r, onde r é o raio do círculo. Denotemos por $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ os comprimentos das bases infinitamente estreitas que estão contornando a circunferência. Note que, a área A do círculo será dada pela soma das áreas desses infinitos triângulos.

Daí, segue-se que

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_1 r}{2} + \frac{a_2 r}{2} + ... + \frac{a_n r}{2} + ... \\ &= \frac{1}{2} r(a_1 + a_2 + ... + a_n + ...) \end{aligned}$$

De sorte,

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n + ...) = 2\pi r$$

Logo,

$$A = \pi r^2.$$

De acordo com Boyer e Merzbach (2019, p.230), Kepler reuniu suas ideias em um livro que apareceu em 1615, intitulado *Stereometria doliorum (Medida de volume de barris)*. Duas décadas depois, Cavalieri desenvolveu e apresentou sistematicamente as ideias de Kepler em seu célebre livro *Geometria indivisibilibus*, publicado em 1635.

Cavalieri também registrou o *método dos indivisíveis* nesse mesmo livro. Parece ser um pouco confuso, mas segundo consta nos registros históricos, ao abordar esse assunto em suas obras, Cavalieri não definia com clareza o que vinha a ser "os indivisíveis".

Contudo, segundo as ideias por ele apresentadas, uma figura plana seria formada por uma infinidade de cordas paralelas entre si e uma figura sólida por uma infinidade de seções planas paralelas entre si, a essas cordas e seções Cavalieri dava o nome de indivisíveis.

Na edição número 72 da *RPM 72*, o professor Roberto Ribeiro Paterlini, escreveu um artigo intitulado *Os "Teoremas" de Cavalieri* (PATERLINI, 2010).

Ao comentar sobre *os Princípios de Cavalieri para Áreas e Volumes* (PATERLINI, 2010) destaca "que esse método é muito anterior a Cavalieri. Era conhecido dos antigos gregos, que o utilizavam para obter volumes dos sólidos". Conforme mencionamos anteriormente, Demócrito destacou-se entre os gregos ao realizar esses estudos.

Os gregos realizavam a demonstração dos resultados encontrados por *dupla redução ao absurdo* nos moldes do Método da Exaustão. Esse método ainda era utilizado por muitos matemáticos dos séculos XVI e XVII, já que nessa época ainda não se tinha uma Teoria de Integração.

O Princípio de Cavalieri é enunciado da seguinte forma: *Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas de mesma área, então estes sólidos têm volumes iguais.*

Segundo (MORGADO, 2001), o Princípio de Cavalieri não pode ser demonstrado com apenas os recursos da Matemática Elementar. Ele deve ser incorporado à teoria como um axioma, mas os argumentos anteriores são bastante intuitivos e convincentes.

A ideia inicial é que estamos "fatiando" as duas regiões. Se a quantidade de fatias for finita e se cada fatia de uma região tiver área sempre na mesma razão que a fatia correspondente da outra região, então somamos as áreas das fatias de cada região e obtemos o resultado.

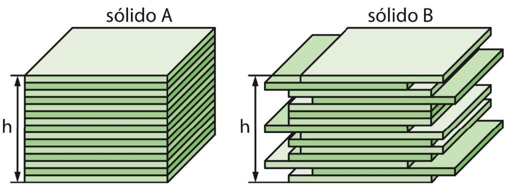
Ainda assim, analisando essas ideias sob uma perspectiva lógica percebemos que não é tão natural compreendê-las de forma imediata. No Princípio de Cavalieri as fatias são segmentos e, um segmento não possui área, apenas comprimento. Além do mais, a quantidade desses segmentos é infinita.

É bem verdade que "digerir" essas ideias pode gerar um certo embaraço em nossas mentes, nos fazendo refletir sobre o seguinte questionamento: como figuras planas ou sólidos de extensão finita podem ser formados por uma quantidade infinita de indivisíveis?

A seguir, faremos uma abordagem intuitiva do *Princípio de Cavalieri* segundo a abordagem do livro *Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 10 - Geometria Espacial - Posição e Métrica* (DOLCE; POMPEO, 1985).

Podemos pensar, intuitivamente, no princípio de Cavalieri considerando a existência de um conjunto finito de placas retangulares de mesmas dimensões.

Figura 4 – Empilhando placas retangulares

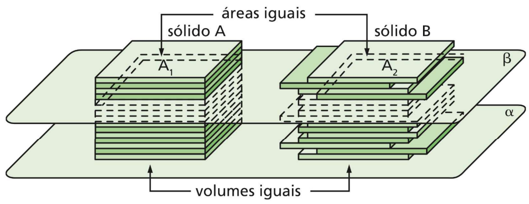


Fonte: DOLCE e Pompeo (1985)

Empilhando o conjunto de placas conforme apresentado na imagem visualizamos a construção de dois sólidos, A e B. Note que, como todas as placas possuem as mesmas dimensões, também possuem os mesmos volumes.

Além disso, visto que os sólidos A e B são formados pela mesma quantidade de placas, possuem a mesma altura e, consequentemente, possuem o mesmo volume. Imagine esses sólidos sobre um plano α, estando posicionados num mesmo semiespaço determinado por α.

Figura 5 – Princípio de Cavalieri para volumes



Fonte: DOLCE e Pompeo (1985)

Note que, a escolha de qualquer plano β que seja secante aos sólidos A e B e paralelo ao plano α, determina nesses sólidos superfícies que possuem mesma área. A situação que acabamos de abordar, intuitivamente, é generalizada pelo *Princípio de Cavalieri para Volumes*, já mencionado anteriormente.

Fato é, que a aceitação deste Princípio de Cavalieri simplifica a dedução de muitas fórmulas de volumes de sólidos apresentados no tratamento da Geometria Espacial no Ensino Médio. O que nos permite resolver, intuitivamente, muitos problemas que normalmente dependeriam de técnicas mais avançadas para calcular.

De acordo com Eves (2004), o método dos indivisíveis e outros equivalentes a ele, foram efetivamente utilizados por outros matemáticos, dentre eles, Pierre de Fermat.

Dentro da nossa temática não poderíamos deixar de abordar sobre algumas ideias de Pierre de Fermat, tais ideias deram o pontapé iniciação nos estudos da diferenciação[5]. Segundo Eves (2004)

> Pode-se dizer que a diferenciação se originou de problemas relativo ao traçado de tangestes a curvas e de questões objetivando a determinação de máximos e mínimos de funções. Embora essas considerações remontem aos gregos antigos, parece razoável afirmar que a primeira manifestação realmente clara do método diferencial se encontra em algumas ideias de Fermat, expostas em 1629.

No artigo intitulado, *The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass*, encontramos muitos detalhes interessantes sobre as ideias de Fermat e como o conceito de derivada se desenvolveu ao longo do tempo. Segundo Grabiner (1983), "primeiro a derivada foi utilizada, depois descoberta e desenvolvida, e só então definida".

[5] Diferenciação é o processo de encontrar a derivada de uma função. Conforme já mencionamos no Capítulo 3, a derivada mede a taxa de variação da função em relação a uma de suas variáveis.

No século XVII, os matemáticos europeus estavam cada vez mais familiarizados com a Matemática grega, o que permitiu ampliar e generalizar muitas das descobertas que nos foram deixadas de herança.

De acordo com Grabiner (1983), Descartes e Fermat inventaram a Geometria Analítica no ano de 1630. Isso permitiu que as curvas fossem representadas por equações, isto é, cada equação determinava uma curva. É fato que os gregos também haviam estudados curvas muito tempo antes, mas não tantas. Eles estudaram, especialmente, o círculo e as seções cônicas.

Com o desenvolvimento da Geometria Analítica o estudos de novas curvas teve um grande impacto no desenvolvimento da Matemática. Segundo Grabiner (1983), "os estudantes da Geometria das curvas foram subitamente confrontados com uma explosão de curvas a considerar".

É inegável que com o surgimento de tantas outras curvas os métodos da Geometria grega já não eram suficientes para investigá-las. Grabiner (1983) comenta que "os gregos definiram uma tangente como uma linha que toca uma curva sem cortá-la, e geralmente esperavam que ela tivesse apenas um ponto em comum com a curva".

Outro ponto importante a se considerar é que com o surgimento de novas curvas também surgiram novos problemas relacionados ao comprimentos de arcos e a determinação de áreas. Os gregos também se dedicaram a estudar alguns problemas isoperimétricos[6]. A título de exemplo, um desses problemas seria encontrar dentre todas as figuras planas de mesmo perímetro aquela que possui a maior área.

Segundo Grabiner (1983), os gregos não desenvolveram um método geral para resolver todos esses problemas e entre os matemáticos do século XVII havia uma grande expectativa que os novos modelos matemáticos que surgiam pudessem de algum modo ajudar, a resolver de uma vez por todas, todos os problemas envolvendo *máximos* e *mínimos*.

2.1 Resolvendo Problemas à Maneira de Pierre de Fermat

No ano de 1630, Pierre de Fermat, desenvolveu um método para encontrar máximos e mínimos. Segundo Grabiner (1983), Fermat resolveu um problema bastante simples para ilustrar seu método. Mas afinal, qual era esse problema?

Problema. Dado um segmento de reta, dividi-lo em duas partes para que o produto das partes seja máximo.

Solução. Seja B a medida do segmento de reta e dividamos esse segmento em dois pedaços cujas medidas são A e $B - A$.

[6] Os problemas isoperimétricos buscam maximizar ou minimizar áreas de figuras planas, mantendo constante o seu perímetro.

Fazendo o produto dessas duas partes, segue-se que:

$$A \cdot (B - A) = AB - A^2. \tag{2.1}$$

Fermat tomou como referência os escritos de Pappus de Alexandria. Ao realizar suas leituras ele observou que um problema que possui, em geral, duas soluções terá uma única solução no caso máximo. Essa observação o levou a criar seu método para determinar máximos e mínimos, ver (GRABINER, 1983).

Desse modo, digamos que existe uma segunda solução para este problema. Consideremos agora que a medida do segmento seja B e os dois pedaços que o repartiremos tenham medidas $A + E$ e $B - A - E$. Realizando o produto dessas duas quantidades, obtemos:

$$(A + E) \cdot (B - A - E) = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2. \tag{2.2}$$

Tomando como referência as ideias de Pappus sobre *máximos*, ao invés de considerar as duas soluções, existe somente uma. Com isso, Fermat tratou os produtos (2.1) e (2.2) "mais ou menos" iguais e igualou os dois resultados, chamando a expressão encontrada de pseudo-igualdade.

$$AB - A^2 = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2.$$

Aplicando a Lei do Corte, obtemos

$$2AE + E^2 = BE,$$

daí, dividindo a expressão por E, encontramos

$$2A + E = B.$$

Por fim, tomando $E = 0$, conclui-se que $A = \dfrac{B}{2}$, o que nos dá a divisão desejada. Isto é, para que o produto dos dois segmentos que juntos formam o segmento de medida B seja máximo, devemos ter um dos segmentos medindo $A = \dfrac{B}{2}$ e o outro medindo $B - A = B - \dfrac{B}{2} = \dfrac{B}{2}$, isto é, devemos repartir B em dois pedaços de mesmo tamanho.

De acordo com Grabiner (1983), Fermat não justificou o porque da "supressão" do E, não chamou E de infinitamente pequeno, nulo ou de limite. Ele também não justificou a divisão por E aplicada em uma das passagens, o que significa que ele adotou $E \neq 0$. Porém, na passagem seguinte o E foi descartado, isto é, Fermat, adotou $E = 0$, o que é bastante confuso.

Segundo Eves (2004, p.429), "embora a lógica do processo de Fermat deixe muito a desejar, vê-se que o método equivale a impor

$$\lim_{h \to 0} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

isto é, impor que a derivada de $f(x)$ em x seja nula". Em textos elementares do Cálculo, às vezes, esse método é referido como *Método de Fermat*.

Contudo, existem dois pontos importantes a serem considerados sobre as ideias de Fermat. Segundo Eves (2004, p.429), "Fermat, porém, ignorava que a condição de a derivada de $f(x)$ se anular não é suficiente para se ter um máximo ou mínimo comum, mas apenas necessária. O Método de Fermat também não se distinguia entre valor máximo e mínimo".

Uma grande proeza de Fermat foi a descoberta de um procedimento mais geral para determinar a reta tangente que passa por um determinado ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. Segundo Eves (2004)

> Sua ideia consistia em achar a subtangente relativa a esse ponto, isto é, o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo. A ideia da tangente usada pelo método é a da posição limite de uma secante quando os dois pontos de intersecção com a curva tendem a coincidir.

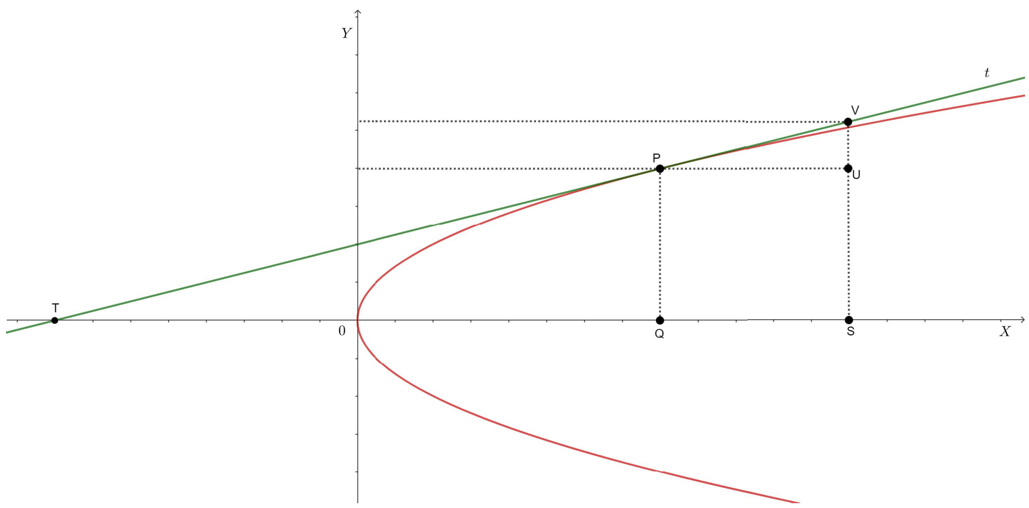
Na edição número 75 da *RPM*, o professor Raphael Alcaires de Carvalho, escreveu um artigo intitulado *Descartes, Barrow e Fermat: métodos de tangentes*, onde mostrou métodos criados por alguns matemáticos antigos para determinar a equação da reta tangente a um ponto dessa curva, ver (CARVALHO, 2011).

De acordo com Carvalho (2011) "o método de Fermat para as tangentes foi apresentado em 1629 junto com o método para determinar máximos e mínimos de funções". Vamos ilustrar o método proposto por Fermat utilizando como referência o exemplo abordado na *RPM 75*.

Exemplo. Escreva a equação da reta tangente à curva $y^2 = 2x$ no ponto $P = (8, 4)$.

Solução. Na figura a seguir, observamos os triângulos ΔPUV e ΔTSV.

Figura 6 – O método de Fermat



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Note que, estes triângulos são semelhantes, isto significa que os seus lados correspondentes são proporcionais. Desse modo, vale a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{VU}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PU}}{\overline{TQ}}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, obtemos:

$$\overline{VU} = \frac{\overline{PU} \cdot \overline{PQ}}{\overline{TQ}},$$

daí, tornando $\overline{PU} = E$ e $\overline{TQ} = c$, concluímos que

$$\overline{VU} = \frac{4 \cdot E}{c}.$$

Segundo Carvalho (2011), Fermat considerou o ponto V de coordenadas $(8+E, 4+\overline{VU})$ da reta t como sendo um ponto da curva de equação $y^2 = 2x$. Como $\overline{VU} = \dfrac{4 \cdot E}{c}$, devemos ter $V = \left(8 + E, 4 \cdot \left(1 + \dfrac{E}{c}\right)\right)$. Mas afinal, porque Fermat considerou V um ponto da curva, se V está fora dela? A justificativa se deu pelo simples fato desse ponto está muito próximo da curva.

Agora, substituindo as coordenadas de V na equação $y^2 = 2x$, devemos ter:

$$\begin{aligned}
\left[4 \cdot \left(1 + \frac{E}{c}\right)\right]^2 &= 2 \cdot (8 + E) \\
\Rightarrow \quad 16 \cdot \left(1 + \frac{2E}{c} + \frac{E^2}{c^2}\right) &= 16 + 2E \\
\Rightarrow \quad 16 + \frac{32E}{c} + \frac{16E^2}{c^2} &= 16 + 2E
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por E, obtemos:

$$\frac{32}{c} + \frac{16E}{c} = 2$$

Fazendo $E = 0$, obtemos $c = 16$. Note que, o coeficiente angular da reta tangente é $\dfrac{1}{4}$. De posse desse último resultado e conhecendo o ponto de tangência, podemos determinar a equação da reta tangente à curva $y^2 = 2x$. Finalmente, $y = \dfrac{x}{4} + 2$

O método de Fermat que acabamos de apresentar não é eficiente para determinar retas tangentes a uma curva qualquer em um dado ponto, por ser uma solução bastante trabalhosa, e sem contar que hoje podemos resolver esse mesmo problema de uma forma bem mais simples com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial.

Vale destacar que se hoje podemos resolver problemas dessa natureza de forma mais simplificada, é graças as grandiosas contribuições que muitos matemáticos, assim como Fermat e os gregos antigos, nos deixaram de herança. Inclusive, a ideia de contemplar aspectos históricos relacionados ao tema nos permite enxergar os processos infinitos de uma forma completamente diferente.

Neste capítulo, pouco falamos do Cálculo em si, até porque esse não era o nosso objetivo, nos dedicamos em apresentar aspectos históricos relacionados aos processos infinitos. Por outro lado, é inegável a relação intrínseca entre tais processos e o Cálculo Diferencial e Integral.

Contudo, as ideias que abordamos até aqui nos mostram que os processos infinitos surgiram muito antes do Cálculo e talvez o Cálculo seja uma síntese de todo esse conhecimento prévio construído desde os gregos antigos até o século XVII.

Diante disso, podemos dizer que os processos infinitos formam o pano de fundo por trás da evolução do Cálculo. Através dessa breve exposição sobre alguns aspectos históricos relacionados ao tema, contemplamos o propósito deste capítulo.

3 O Problema da Tangente e o Problema da Velocidade Instantânea

Neste capítulo, abordaremos o *problema da tangente* e o *problema da velocidade instantânea*. Optamos por dividir este capítulo em quatro seções, a fim de proporcionar ao leitor uma compreensão o mais significativa possível acerca do tema. Nos preocupamos em generalizar a definição de reta tangente, estudar os problemas citados, abordá-los formalmente e relacioná-los.

3.1 O Conceito de Tangência

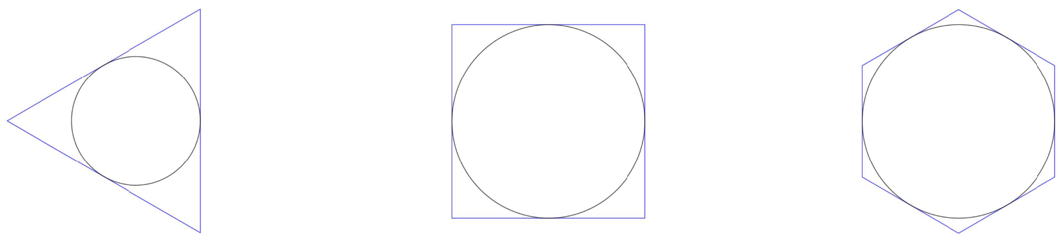
Provavelmente, o nosso primeiro contato com o conceito de tangência surgiu numa aula de Geometria Plana ou Geometria Analítica. A ideia de tangência, normalmente, é apresentada no Ensino Básico mediante o desenvolvimento dos seguintes conteúdos:

(i) Segmentos tangentes: polígonos regulares circunscritos à circunferência;

(ii) Posições relativas entre reta e circunferência.

Quando estudamos o conteúdo (i), relacionamos o conceito de tangência ao fato de cada lado do polígono "tocar" num único ponto da circunferência, como observamos nas figuras a seguir:

Figura 7 – Polígonos circunscritos à circunferências.

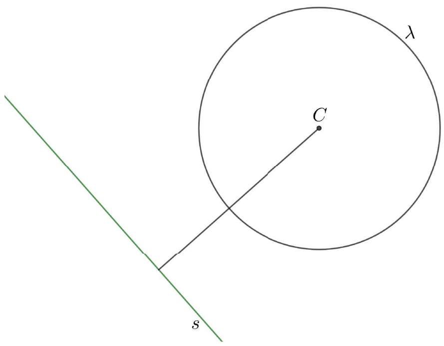


(a) Triângulo equilátero. (b) Quadrado. (c) Hexágono regular.

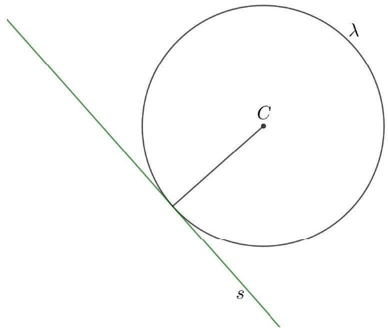
Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Ao estudar o conteúdo (ii) visualizamos três possibilidades de posições relativas entre a reta s e a circunferência λ, conforme veremos a seguir:

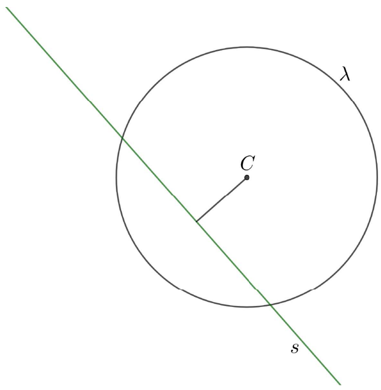
Figura 8 – Posições relativas entre reta e circunferência.



(a) A reta s é exterior.



(b) A reta s é tangente.



(c) A reta s é secante.

Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

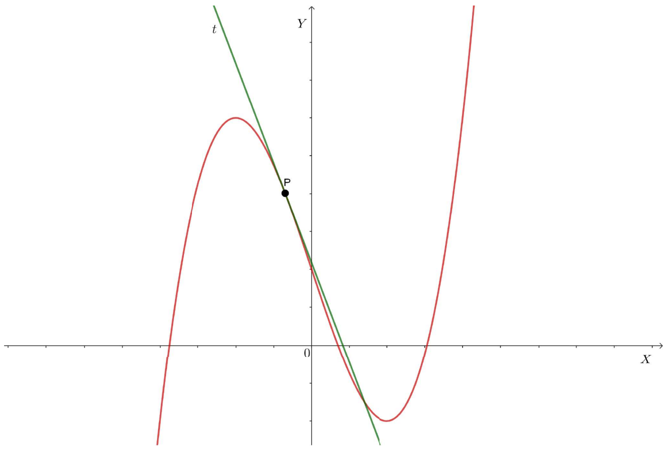
Seja d a distância entre o centro C da circunferência λ e a reta s. Vamos denotar por r a medida do raio da circunferência λ. Na Figura 8a, notamos que $d > r$, ou seja, a reta s é exterior a circunferência λ. Na Figura 8b, verificamos que $d = r$, isto significa que a reta s é tangente à circunferência λ. A Figura 8c denota que $d < r$, isto quer dizer que a reta s é secante à circunferência λ. Entendemos por *secante* a reta que corta uma curva em pelo menos dois pontos distintos, neste caso, a circunferência.

É bem verdade que, o educando normalmente absorve essas ideias sem muitas dificuldades. Contudo, ao vivenciar estes conteúdos o aluno compreende o conceito de reta tangente apenas para a circunferência. Após analisar o caso de tangência para a circunferência, muitos estudantes, normalmente definem reta *tangente* do seguinte modo: "é a reta que toca em um único ponto da curva".

Mas afinal, qual é o problema de definir reta tangente dessa forma? Quando se pensa exclusivamente numa circunferência essa forma de definir está correta. Por outro lado, quando pensamos nessa definição para outras curvas devemos ser mais cautelosos.

O ponto chave é que esse conceito pode ser generalizado e estes conhecimentos prévios que o educando possui podem ser aproveitados. Vejamos, por exemplo, o que ocorre quando traçamos a reta tangente t ao gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$, passando pelo ponto P de coordenadas $(-0.35, 2)$.

Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Ao verificar a imagem, notamos que ainda que não tivéssemos a certeza que a reta t é tangente à curva, também não ficamos com a impressão que ela seja secante. Porém, a reta t não toca apenas num único ponto da curva. Este exemplo coloca em xeque aquela primeira definição de tangência. Será que faz sentido continuar afirmando que "reta tangente é aquela que toca em um único ponto da curva"?

Conforme vimos no exemplo, essa definição precisa ser generalizada. Sendo assim, só faz sentido definir reta tangente dessa forma se estivermos falando exclusivamente da reta que tangencia um círculo. Diante disso, é cabível apresentar uma definição mais geral do que venha a ser reta tangente, como faremos durante este capítulo.

3.2 O Problema da Tangente: Generalização

Nesta seção, apresentaremos formalmente o *problema da tangente*. Nossa abordagem será realizada segundo: (NETO, 2020) e (STEWART, 2016).

O *problema da tangente* nos instiga a procurar soluções para determinar a equação da reta tangente t a uma curva de equação $y = f(x)$, num ponto $(a, f(a))$ dado (Veja as Figuras 10a e 10b). Quando estudamos Geometria Analítica aprendemos a determinar a equação de uma reta conhecendo sua inclinação e um de seus pontos ou conhecendo dois dos seus pontos.

Talvez, relembrar brevemente esses passos simples para determinar a equação de uma reta, camufle os reais desafios que iremos encontrar a partir de agora. Mas afinal, do que realmente se trata o *problema da tangente*? Este problema surge quando resolvemos calcular a inclinação ou declive de uma reta tangente a uma curva dada, conhecendo apenas as coordenadas do ponto de tangência.

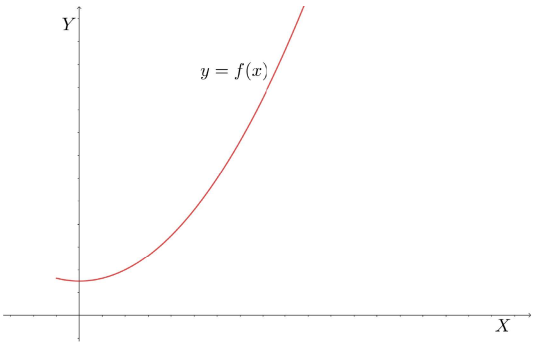
Por que isso é tão importuno? Ora, para determinar a inclinação de uma reta é necessário conhecer pelo menos dois dos seus pontos, mas conhecemos apenas o ponto de tangência $(a, f(a))$.

Contudo, para resolver o *problema da tangente* precisamos de uma estratégia para determinar a inclinação da reta. Note que, é possível investigar esse problema recorrendo a uma abordagem por meio de um *processo infinito*. Como faremos? Basicamente, a ideia é encontrar o coeficiente angular m_t da reta t, tangente à curva, aproximando-a por meio de um número indefinido de retas secantes. Isso pode ser feito escolhendo um ponto $(x, f(x))$ sobre a curva que esteja nas proximidades do ponto de tangência.

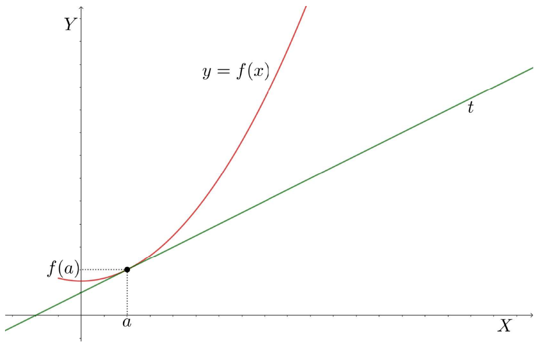
Em seguida, traçamos a reta s, secante à curva, que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ (veja a Figura 10c). O próximo passo é calcular a inclinação m_s da reta s (veja a Figura 10d). Por fim, faremos $x \to a$[1], escolhendo valores do domínio que pertençam ao intervalo (a, x). Ao realizar este último passo faremos a reta s aproximar-se cada vez mais da reta t.

A seguir apresentaremos algumas Figuras que citamos ao longo do texto, a fim de ilustrar as considerações que acabamos de realizar.

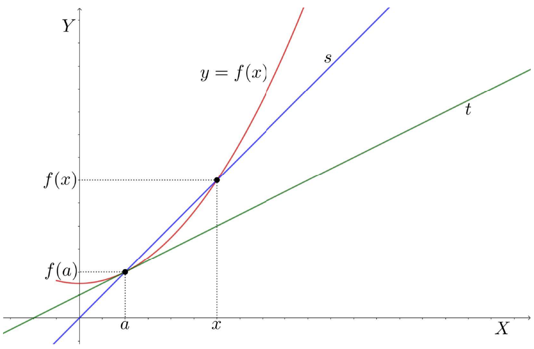
Figura 10 – Como determinar a inclinação da reta t?



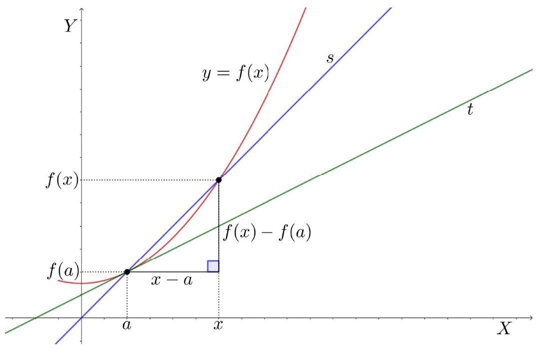
(a) Pedaço do gráfico da função f.



(b) A reta t.



(c) A reta s.



(d) A inclinação da s.

Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

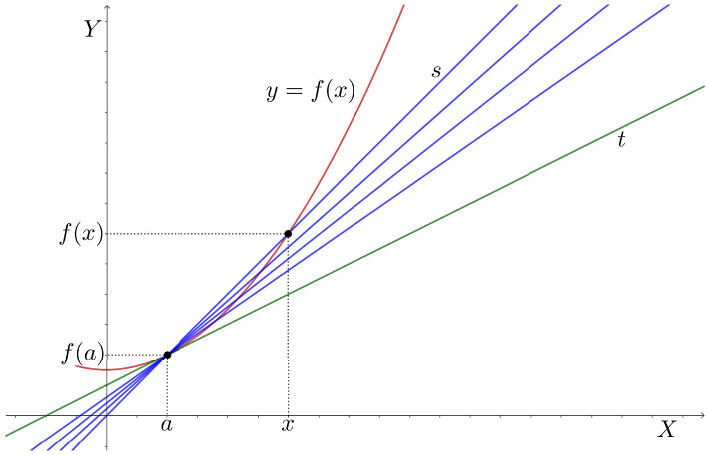
[1] Intuitivamente, esta notação indica que a variável x está se aproximando cada vez mais do valor a. Pense nisso como um processo em que x está "caminhando" em direção a a.

Da Figura 10d extraímos a seguinte expressão:

$$m_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ao analisar a Figura 11 começamos a assimilar como a solução deste problema está vinculada ao desdobramento de um processo infinito, vejamos:

Figura 11 – $(x, (f(x)) \to (a, f(a))$.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Ao observar a Figura 11 o leitor pensa de forma dinâmica, isto é, mentaliza o ponto $(x, f(x))$ movendo-se sobre a curva na direção do ponto $(a, f(a))$. Note, à medida que o ponto $(x, f(x))$ percorre a curva e ocupa novas posições, deduzimos que surgem uma quantidade infinita de retas secantes definidas pelo ponto fixo $(a, f(a))$ e pelo ponto móvel $(x, f(x))$.

Investigando melhor este efeito com o auxílio de um software dinâmico de Matemática, como o *GeoGebra*, por exemplo, ficamos com a impressão a reta secante gira na direção da tangente, tendo-a como sua *posição limite*. O número indefinido de aproximações entre a reta t e a reta s acarretam numa proximidade cada vez maior entre as suas inclinações.

Denotamos esse fato por meio da expressão

$$m_t = \lim_{x \to a} m_s$$

e, desse modo, conclui-se que a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes quando o ponto $(x, f(x))$ tende ao ponto $(a, f(a))$ ao longo da curva.

Tendo em vista proporcionar aos leitores deste trabalho uma abordagem mais formal deste problema, iremos recorrer ao Cálculo e comentar sobre derivadas, tipo especial de limite utilizado para determinar retas tangentes, que origina o pensamento central do Cálculo Diferencial.

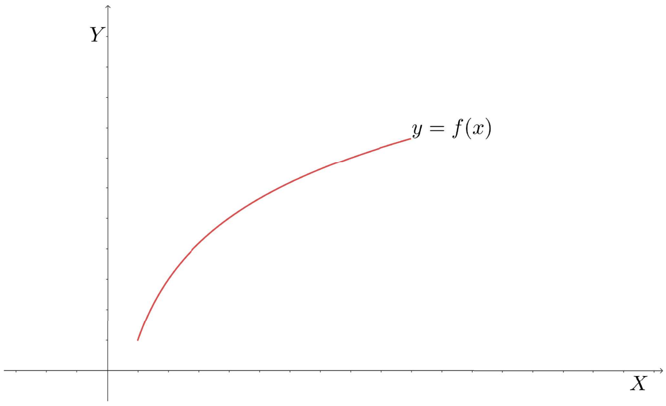
Com o intuito de melhor expressar as ideias desta seção, decidimos escrever as subseções 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3, onde abordaremos, respectivamente, os seguintes tópicos: *Derivadas*, *Aplicando a Teoria* e *Dialogando Sobre o Problema da Tangente*.

3.2.1 Derivadas

No início da seção, introduzimos o *problema da tangente*. Conforme mencionamos, o escopo da investigação deste problema centra-se em determinar a inclinação da reta tangente a uma curva dada, conhecendo-se apenas o ponto de tangência, o que nos permite determinar a equação dessa reta.

Nesse momento, não nos conteremos em recorrer apenas a nossa intuição para resolver o problema, nesta subseção apresentaremos uma definição formal para reta tangente. Seja $y = f(x)$ a curva que representa um "pedaço" do gráfico da função f.

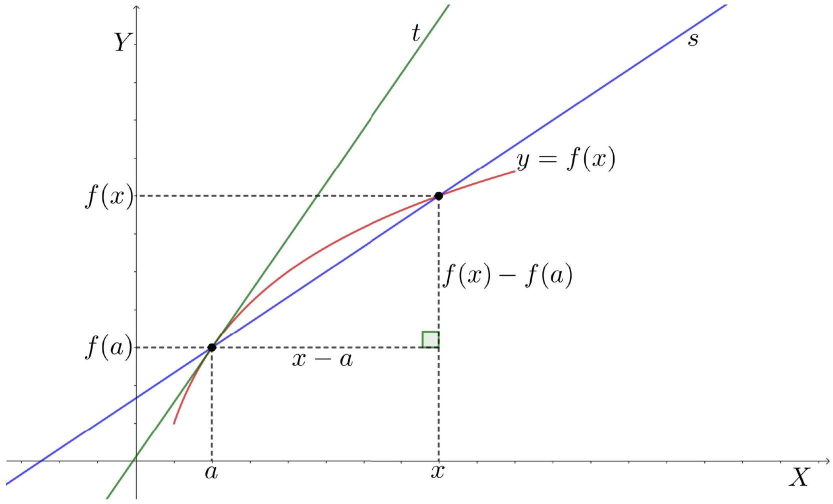
Figura 12 – Pedaço do gráfico da função f.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Queremos definir a reta t tangente ao gráfico da função f no ponto $(a, f(a))$. Como sabemos, a reta tangente fica determinada se apresentarmos sua declividade. Admita, então, a reta s que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$.

Figura 13 – Determinando a inclinação da reta s.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

O declive ou coeficiente angular da reta s, secante a curva, é dado pela expressão

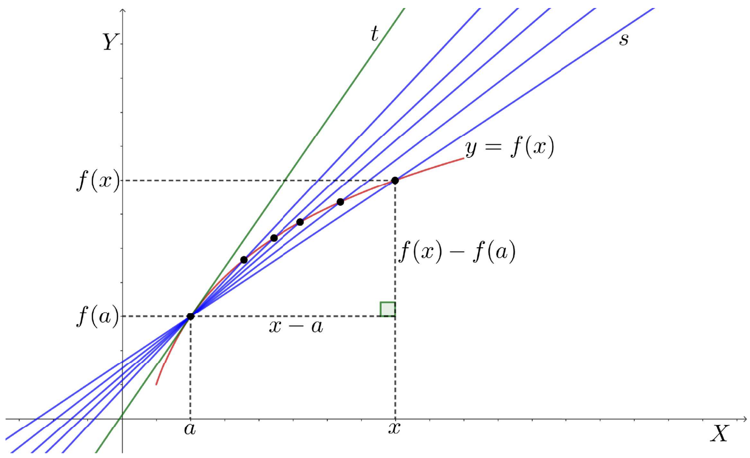
$$m_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Perceba que quando x tende a a, a inclinação da reta s tende a inclinação da reta t, fato este que podemos representar utilizando a expressão

$$m_t = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Esta expressão indica que, à medida que x se aproxima de a, a reta s vai tendendo a posição da reta t, cuja equação é dada por $y - f(a) = m_t(x - a)$. A próxima imagem ilustra os comentários feitos nos parágrafos anteriores, observe:

Figura 14 – Aproximando a reta t por infinitas retas secantes.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Naturalmente, definimos reta tangente a uma curva dada passando pelo ponto $(a, f(a))$ como sendo a reta de equação $y - f(a) = m_t(x - a)$.

Nos parágrafos anteriores ainda não apresentamos uma definição formal para derivadas, o que fizemos foi apenas introduzir a ideia destacando algumas expressões matemáticas importantes para o desenvolvimento do nosso estudo. Porém, insta salientar a conexão existente entre *o problema da tangente* e o *Cálculo Diferencial*, visto que, quando existem, as derivadas determinam a inclinação da reta tangente a uma função f, isto é, descrevem a taxa de variação instantânea da função num certo ponto.

Nos próximos parágrafos apresentaremos uma definição formal para **derivada de uma função**.

Definição. Seja f uma função e p um ponto de seu domínio D_f. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

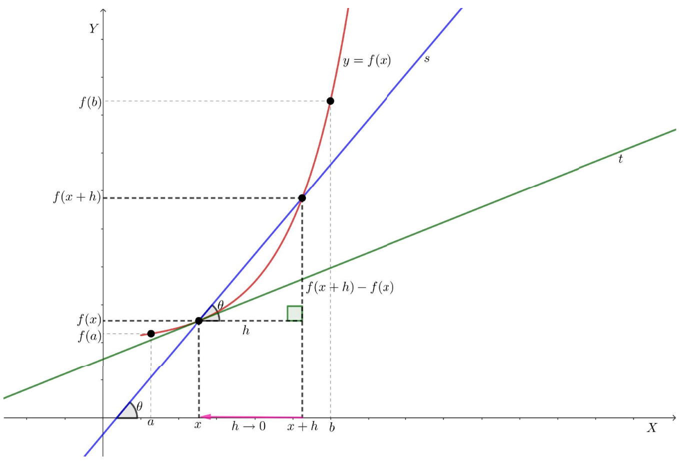
quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é derivável ou diferenciável em p. Dizemos que f é derivável ou diferenciável em $(a, b) \subset D_f$ se f for derivável em cada $p \in (a, b)$. Diremos, simplesmente, que f é uma função derivável ou diferenciável se f for derivável em cada ponto do seu domínio.

A Figura 15 mostra o pedaço de uma função do tipo $y = f(x)$ definida no intervalo (a, b). Este esboço traz informações importantes que nos permitem determinar a derivada da função f no ponto $(x, f(x))$.

Figura 15 – $(x + h, f(x + h)) \to (x, f(x))$.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Seja $h = (x + h) - x$. Observe que quando $h \to 0$, o ponto $(x + h, f(x + h))$ tende ao ponto $(x, f(x))$. Daí, segue das propriedades dos limites que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \text{ ou } f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

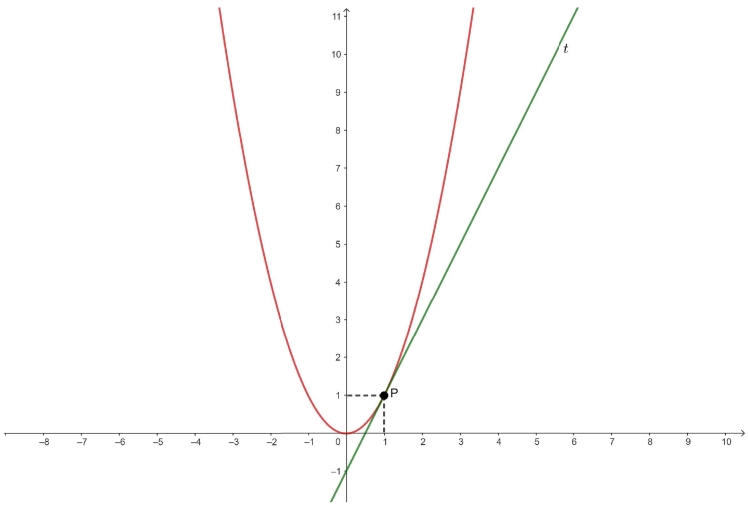
Conforme já mencionamos na subseção (3.2.1), a reta de equação $y - f(p) = f'(p)(x - p)$ é, por definição, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Logo, a derivada de f em p, é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p.

Com o intuito de fixar as ideias mencionadas anteriormente, incentivamos o leitor a analisar na próxima subseção um exercício, onde teremos a oportunidade de abordar mais detalhes envolvendo o *problema da tangente*.

3.2.2 Aplicando a Teoria

Nesta subseção, vamos analisar um exercício cujo objetivo é determinar, intuitivamente, a inclinação da reta tangente à curva de equação $y = x^2$ que passa pelo ponto P de coordenadas $(1, 1)$, como mostra a Figura 16.

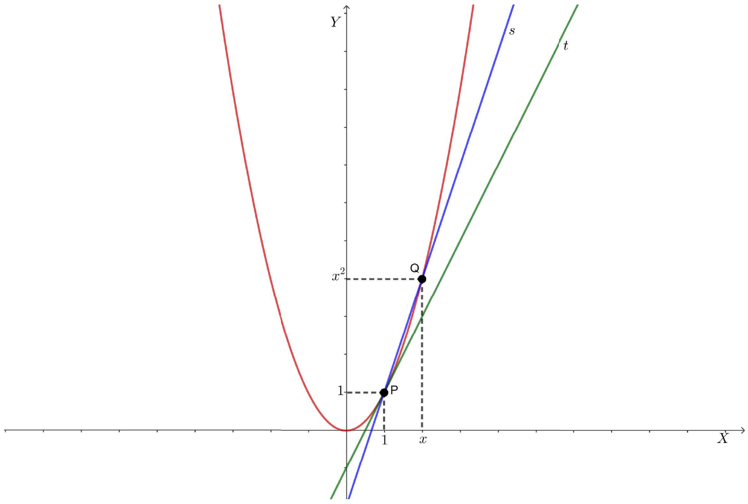
Figura 16 – A reta t tangente à curva $y = x^2$.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Conforme já mencionado neste capítulo, será realizado uma abordagem por meio de um processo infinito para encontrar a inclinação da reta tangente. Mas, como este procedimento será realizado? Marque sobre a curva o ponto Q de coordenadas (x, x^2); em seguida, trace por P e Q a reta s, secante à curva, conforme visualizamos na Figura 17.

Figura 17 – A reta s secante à curva $y = x^2$.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

No parágrafo anterior representamos o ponto Q genericamente, suas coordenadas são (x, x^2), isto é, basta escolher um valor x para a abscissa do ponto e ao fazer x^2 obteremos sua ordenada. Por outro lado, no gráfico apresentado anteriormente, trouxemos um caso particular, onde $Q(2, 4) = Q(2, 2^2)$. Perceba também que devemos ter $x \neq 1$, pois se $x = 1$ teríamos $P = Q$.

Conhecer dois pontos da reta s nos permite calcular sua inclinação. Para isto, basta utilizar a expressão

$$m_s = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}.$$

Substituindo as informações correspondentes na expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ \Rightarrow m_s &= \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} \\ \Rightarrow m_s &= \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} \\ \Rightarrow m_s &= x + 1. \end{aligned}$$

O resultado acima, representa o coeficiente angular da reta s, secante à curva, que passa pelos pontos $P(1, 1)$ e $Q(x, x^2)$. Quando pensamos em possíveis valores para x que estejam nas proximidades de $x_p = 1$, estamos buscando, cada vez mais, aproximar as retas s e t. De fato, se Q tende P, então m_s tende a m_t, como indicamos.

É importante salientar que ao escolhermos valores para x, estamos interessados em analisar apenas o que ocorre na "vizinhança" de $x_p = 1$, ou seja, valores muito próximos de 1, mas nunca iguais a 1. Cumprindo com os requisitos citados anteriormente, propomos escolher os valores $x \in \mathbb{R}$ dentro dos intervalos $[0,1)$ e $(1,2]$. Inevitavelmente, existem infinitos números reais pertencentes aos intervalos que acabamos de mencionar.

Utilizando a *planilha Excel*, podemos construir uma lista de valores que convergem para a inclinação da reta tangente. A ideia de analisar valores pertencentes aos dois intervalos é investigar o que ocorre em cada um deles, isto é, quando Q aproxima-se de P pela esquerda no intervalo $[0,1)$ e quando Q aproxima-se de P pela direita no intervalo $(1,2]$. Observe os valores dispostos nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1 – Atribuindo valores para x que estão à esquerda de 1.

x	0	$0,5$	$0,75$	$0,9$	$0,99$	...	$0,99999$	...
m_u	1	$1,5$	$1,75$	$1,9$	$1,99$	...	$1,99999$	...

Fonte: O Autor.

Tabela 2 – Atribuindo valores para x que estão à direita de 1.

x	2	$1,75$	$1,5$	$1,25$	$1,1$	...	$1,0009$	...
m_u	3	$2,75$	$2,5$	$2,25$	$2,1$	...	$2,0009$	...

Fonte: O Autor.

Ao analisar os valores apresentados em cada tabela, fica perceptível que quanto mais infinitamente próximos estão os pontos P e Q, a inclinação da reta secante tende a 2 ($m_s \to 2$), e consequentemente, as inclinações das retas s e t tendem a coincidir, o que nos permite afirmar que $m_t = 2$.

Apesar de exibirmos poucas aproximações para a inclinação da reta t, é do nosso conhecimento que x pode assumir infinitos valores, já que em cada um dos intervalos apresentados existem infinitos números reais.

Desse modo, concluímos que os pontos P e Q se aproximam cada vez mais e em algum momento esses pontos estarão tão próximos um do outro quanto se queira, o que intuitivamente nos garante que as retas s e t possuem a mesma inclinação.

Perante o exposto, justificamos a abordagem por meio de um *processo infinito* conhecido como *limite de uma secante*, tal processo nos permite determinar a inclinação da tangente aproximando-a por meio de um número indefinido de secantes.

Na próxima subseção, vamos acompanhar um possível diálogo entre um professor de Cálculo e um de seus alunos. Ao redigi-lo nos inspiramos em *"Um breve diálogo"* apresentado por (NETO, 2020) em um dos módulos do *Portal da Matemática - OBMEP*, o material intitulado, *O Problema da Tangente*, foi escrito pelo professor Angelo Papa Neto e revisado pelo professor Antônio Caminha Muniz Neto.

3.2.3 Dialogando Sobre o Problema da Tangente

Através desse diálogo, pretendemos explorar o *problema da tangente* de maneira formal e criativa, utilizando importantes resultados e propriedades dos números reais. O enredo cria forma quando, no clímax de uma aula, o professor propõe um método para determinar a reta tangente a uma curva em um ponto dado. Façamos a leitura com atenção, refletindo sobre cada passagem.

Professor: Por hora, analisaremos um método que nos permite determinar a equação da reta que tangencia o pedaço de uma curva $y = f(x)$ num ponto de coordenadas $(a, f(a))$. É importante destacar que o pedaço dessa curva é uma função. Inicialmente, devemos escolher um outro ponto da curva de coordenadas $(x, f(x))$, em seguida, trace a reta que passa pelos dois pontos destacados na curva, $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$.

Aluno: Mas, essa reta não seria secante à curva?

Professor: Você está certíssimo! Conforme já sabemos da Geometria Plana, se a reta "toca" na curva e não é tangente, ela será secante. Contudo, é de nosso interesse conceder uma "habilidade especial" para este segundo ponto de coordenadas $(x, f(x))$. A partir de agora este ponto poderá locomover-se livremente sobre a curva em direção ao ponto fixo de coordenadas $(a, f(a))$.

Aluno: Professor, não é desafiando seus conhecimentos, mas ainda penso que essa "jogada" de mover o ponto $(x, f(x))$ não resolve muita coisa. Defendo esse ponto de vista baseando-me nas seguintes observações:

- O intervalo (a, x) do domínio possui infinitos números reais, sendo assim, por mais próximo que estes pontos estejam um do outro a reta continuará secante a curva;

- Supondo ser possível em algum momento obtermos $(a, f(a)) = (x, f(x))$, não teríamos mais dois pontos distintos, mas um só ponto.

Seria mesmo possível, dizer que a reta fica bem determinada? Na verdade, não, o que podemos afirmar é que há feixe de retas que passam por esse ponto da curva. Daí, surge outra pergunta: podemos distinguir qual das retas do feixe é a tangente?

Professor: Você não está errado. Contudo, ao aproximarmos a reta tangente por um número indefinido de retas secantes podemos determinar a sua inclinação.

Aluno: Quer dizer então que é possível indicar uma estimativa para a inclinação da reta tangente considerando uma secante que esteja infinitamente próxima?

Professor: Na verdade, o que eu disse é muito mais forte que isso! Quando você utiliza a palavra estimativa fica evidente que você se refere a aproximações. Mas, o que estou afirmando é que é possível determinar de uma vez por todas a inclinação reta tangente.

<u>Aluno:</u> Me desculpe professor, mas como isso é possível?

<u>Professor:</u> Você precisa entender que ao aproximar retas secantes na direção da tangente obteremos informações importantes sobre sua inclinação. Quanto mais precisas forem essas aproximações, melhores serão as informações obtidas.

<u>Aluno:</u> O problema que vejo é que sempre haverá um erro, visto que, por mais próximas que as secantes e a tangente estejam suas inclinações jamais serão iguais.

<u>Professor:</u> A grande "sacada" é que este erro pode ser controlado!

<u>Aluno:</u> Um erro controlado? Como assim? Preciso de mais esclarecimentos.

<u>Professor:</u> Certo. Vamos refletir um pouco sobre isso! Escolhemos o ponto $(x, f(x))$ que está na vizinhança do ponto $(a, f(a))$. O quociente de Newton, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, nos dá a inclinação m_s da reta secante à curva que passa por estes dois pontos...

<u>Aluno:</u> Desculpe interrompê-lo professor. Mas acabamos de nos deparar com um grande inconveniente, o senhor não concorda?

<u>Professor:</u> Provavelmente, você está se referindo ao fato de que quando x aproxima-se de a, o denominador $(x - a) \to 0$. Se for realmente isso, eu concordo contigo. De fato, este é um grande inconveniente! Por outro lado, para algumas curvas podemos simplificar essa fração, como exemplo, podemos destacar o gráfico da função $f(x) = x^2$. Note que, considerando este caso particular de função e substituindo os pontos $(x, f(x))$ e $(a, f(a))$ na expressão utilizada para a inclinação da reta secante, devemos ter:

$$
\begin{aligned}
m_s &= \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\
\Rightarrow m_s &= \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} \\
\Rightarrow m_s &= x + a
\end{aligned}
$$

percebe o que está acontecendo agora? À medida que $x \to a$, $m_s \to 2a$.

<u>Aluno:</u> Professor, me perdoe, mas a nossa conversa sempre chega no mesmo lugar. Mais uma vez, estamos falando em estimativas, aproximações..., afinal, como posso garantir que a inclinação da reta tangente à curva se aproxima de $2a$, quando a inclinação das retas secantes também se aproxima de $2a$?

<u>Professor:</u> Veja bem, este é o ponto central da nossa argumentação: a inclinação da reta possui este valor específico porque é o único possível.

<u>Aluno:</u> Agora eu realmente cheguei numa conclusão: não entendi absolutamente nada! Como pode ser isso? O valor adequado é $2a$ porque não pode ser outro.

<u>Professor:</u> Calma! Você vai entender tudo na hora certa! É importante salientar que nossa pretensão não é supor apenas que existem boas aproximações para m_t. Na verdade, suporemos que existem aproximações arbitrariamente precisas para m_t. Afirmamos este fato quando escrevemos o limite $\lim\limits_{x \to a} m_s = m_t$.

Aluno: Esta suposição é bastante forte! Agora, só resta demonstrá-la.

Professor: Muito bem! Vamos a demonstração! Suponhamos por absurdo que $m_s \neq 2a$. Se isso ocorre, então $|m_t - 2a| > 0$. Utilizando a desigualdade triangular, podemos escrever,

$$|m_t - 2a| = |(m_t - m_s) + (m_s - 2a)| \leq |m_s - m_t| + |m_s - 2a|.$$

Talvez você esteja se perguntando porque este passo foi necessário? Estou certo? Ou você consegue justificar a utilização da desigualdade triangular nesta demonstração?

Aluno: A utilização deste artifício nos permite dizer que m_t e $2a$ são números reais que estão fixados no problema. Desse modo, a expressão modular $|m_t - 2a|$ é uma constante.

Professor: Note que, quando $x \to a$, estamos supondo que $m_s \to m_t$, e além disso, poderemos fazer esta aproximação torna-se tão precisa quanto queiramos. Podemos assegurar que o erro $|m_s - m_t|$ seja menor que $\dfrac{|m_t - 2a|}{2}$. Isso pode ser facilmente justificado considerando que queremos encontrar um a tão próximo de x que satisfaça a desigualdade $|m_s - m_t| < \dfrac{1}{2}|m_t - 2a|$. Por outra perspectiva, vale a pena relembrar o resultado $m_s = x + a$, que encontramos para a inclinação da reta secante. Sabe o que isto significa? Podemos escolher um valor para x que esteja tão próximo de a que valide a expressão $|m_s - m_t| < \dfrac{1}{2}|m_t - 2a|$.

Aluno: Ainda estou um pouco confuso, sem rumo..., teria como deixar essas ideias mais compreensíveis?

Professor: O que estou argumentando aqui é que obter $m_t \neq 2a$ é uma tarefa impossível. Você lembra da desigualdade triangular?

Aluno: Sim, lembro.

Professor: Pois bem! Nosso objetivo será usar a desigualdade para chegar numa contradição. Já sabemos que $|m_t - 2a| \leq |m_s - m_t| + |m_s - 2a|$ e, tomando um x adequado, $|m_s - m_t| < \dfrac{1}{2}|m_t - 2a|$ e $|m_s - 2a| < \dfrac{1}{2}|m_t - 2a|$. Das desigualdades apresentadas, segue-se que

$$\begin{aligned} |m_t - 2a| &\leq |m_s - m_t| + |m_s - 2a| \\ &< \frac{1}{2}|m_t - 2a| + \frac{1}{2}|m_t - 2a| \\ &= |m_t - 2a| \end{aligned}$$

Você percebe a contradição que acabamos de encontrar? Concluímos que

$$|m_t - 2a| < |m_t - 2a|$$

Veja que isso não faz sentido! Como pode um número ser estritamente menor do que ele próprio. É importante lembrar que tal contradição advém do fato de supormos que

$m_t \neq 2a$. Logo, não nos resta outra possibilidade a não ser $m_t = 2a$, como queríamos demonstrar.

Aluno: Professor, estou quase convencido! Tenho apenas mais uma pergunta: o que ocorreu com o m_s? Ele sumiu! Achei que ele seria importante.

Professor: E ele é! A sutileza desta demonstração está justamente no fato de se utilizar o número real m_s, visto que, m_s nos permite aproximar os números m_t e $2a$, números estes que queremos que sejam iguais. Diante disso, uma vez demonstrada a igualdade $m_t = 2a$, não há necessidade de continuar analisando o valor m_s.

Aluno: Hum, agora sim! A essência desta demonstração é mostrar que dois números são iguais, justificando tal fato por meio de uma aproximação desses números por uma mesma quantidade, dada por m_s, de tal modo que essa aproximação seja arbitrariamente precisa. Isto significa que não existe a possibilidade destes números, m_t e $2a$, serem distintos.

Professor: Muito bem! Para mim é muito satisfatório perceber que você realmente compreendeu as ideias e sanou todas as dúvidas.

O diálogo que acabamos de ler aborda *o problema da tangente* sob uma perspectiva mais formal. A estrutura do texto traz à tona um rigor matemático que nos permite deixar de lado a intuição e utilizar argumentos sólidos, que viabilizam a determinação do coeficiente angular da reta tangente.

3.3 Introduzindo o Problema da Velocidade Instantânea

Nesta seção, abordaremos *o problema da velocidade instantânea.* Para redigir o nosso texto, tomamos por base (NUSSENZVEIG, 2002) e (STEWART, 2016).

Certamente, quando você cursou o Ensino Médio, estudou um ramo da Física conhecido por *Mecânica*. Por ser muito abrangente a *Mecânica* se divide em alguns tópicos, dentre eles, é de nosso interesse destacar a *Cinemática*, uma parte da *Mecânica* que estuda o movimento dos corpos sem se preocupar com as suas causas.

Dentro da *Cinemática*, estudamos o *Movimento Uniforme*, onde o móvel percorre espaços iguais em intervalo de tempos iguais. Isto significa, que neste movimento não há aceleração, visto que, não ocorre variação de velocidade. Com isso, a velocidade do móvel se mantém sempre constante.

Em contrapartida, quando idealizamos situações reais concluímos que considerar a velocidade constante, ainda que seja durante pequenos intervalos de tempo, pode não fazer muito sentindo. Faça o seguinte teste: observe o comportamento do velocímetro do seu veículo durante uma viagem ou numa ida até o seu local de trabalho.

O que você vê? Certamente, percebeu que o velocímetro não marca a mesma velocidade durante longos intervalos de tempo. Essa observação, por si só, nos permite concluir que a velocidade do carro não é constante. O que podemos dizer, de fato, é que o veículo possui uma velocidade definida para cada instante, esse é o conceito de *velocidade instantânea*.

Com o intuito de proporcionar ao leitor uma explanação eficaz desse conceito, achamos interessante trazer outro diálogo, onde discorreremos sobre o *problema da velocidade instantânea*. O texto desenvolvido é uma adaptação do diálogo apresentado em (NUSSENZVEIG, 2002, p.25).

Você lembra daquele estudante teimoso do último diálogo? Pois bem, ele está de volta! Dessa vez, o estudante estava em sua motocicleta a caminho da Universidade quando um guarda de trânsito o fez parar, relatando que ele estava transitando na via com velocidade acima da permitida, vejamos o enredo dessa história.

3.3.1 Dialogando Sobre o Problema da Velocidade Instantânea

<u>Guarda:</u> Quando você passou pela lombada eletrônica foi registrado que a sua moto estava a 80 km/h, mas o *limite* de velocidade dessa via é de 40 km/h. Você não percebeu que estava rápido demais?

<u>Estudante:</u> Desculpe Sr. Guarda, acho que a lombada deve estar com algum defeito. Me explique como eu poderia estar a 80 km/h se só estava dirigindo por aqui há cerca de 1 minuto, e não durante 1 hora?

<u>Guarda:</u> A questão não é essa! No instante em que você passou pela lombada registrou-se a velocidade de 80 km/h, isto quer dizer que se você seguisse viagem mantendo constante essa velocidade, após 1 hora, teria percorrido 80 km.

<u>Estudante:</u> E com toda certeza, eu já teria ultrapassado a Universidade.

<u>Guarda:</u> Não tenho dúvidas disso! Contudo, se você tivesse continuado com essa velocidade durante 1 minuto, teria percorrido $1,33$ km, e em 1 segundo $22,22$ metros, e em $0,1$ segundos teria percorrido $2,22$ m e teria dado perfeitamente para prosseguir durante $0,1$ segundos sem ultrapassar a Universidade.

<u>Estudante:</u> Entendo, você determinou os espaços percorridos com essa velocidade para intervalos de tempo cada vez menores. Mas, para mim só faz sentido pensar dessa forma se o limite da via fosse $2,22$ metros em $0,1$ segundos.

<u>Guarda:</u> Mas, o que eu estou te dizendo são coisas equivalentes. O que vale é a *velocidade instantânea*, isto é, a velocidade no instante em que você passou pela lombada eletrônica. Então, quando você diz que a lombada está quebrada não faz muito sentido.

<u>Estudante:</u> Sr. Guarda, não me multe por favor! Estou a caminho da Universidade para assistir uma aula de Cálculo.

Guarda: Tenho certeza que você aprendeu alguma coisa de Cálculo com essa infração de trânsito. E sobre a multa..., não posso fazer nada! Da próxima vez que passar por aqui, dirija respeitando o limite de velocidade da via. Tenha um bom dia!

O diálogo que acabamos de analisar aborda o conceito de velocidade instantânea de forma intuitiva e descontraída. As falas do estudante durante a abordagem dão margem a duas interpretações distintas:

(i) Ele pode não conhecer o conceito de velocidade instantânea;

(ii) Ele estava se fazendo de desentendido para tentar se livrar da multa.

Não sabemos se o estudante é realmente leigo ou se fez de desentendido, mas fica evidente que ele apela para o conceito de velocidade média ao retrucar as observações feitas pelo guarda, o que não faz muito sentido, visto que, a lombada eletrônica registra a *velocidade instantânea.*

Por outro lado, o guarda foi bastante conciso e coerente durante a conversa. Ao realizar conversões entre as unidades de distância, tempo e velocidade e fazer cálculos para intervalos de tempo cada vez menores conseguiu mostrar que o estudante realmente ultrapassou o *limite* de velocidade permitida na via e a discussão foi encerrada.

É inegável que a velocidade de uma motocicleta ou até mesmo um carro não sofre nenhuma alteração significativa em intervalos de tempo muito pequenos, por exemplo, um intervalo de tempo inferior a $0,1$ segundos. Em contrapartida, para calcular a *velocidade instantânea* com uma maior precisão devemos pensar em intervalos de tempo cada vez menores, por exemplo, intervalos da ordem de 10^{-2} s, 10^{-3} s, 10^{-4} s, e assim por diante, isto é, para intervalos de tempo cada vez menores, o quociente

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

aproxima-se cada vez mais da velocidade instantânea. Definimos intuitivamente, velocidade instantânea, como a velocidade que o velocímetro do veículo marca num determinado instante.

Podemos explorar melhor essa ideia recordando um famoso resultado encontrado por Galilei Galilei alguns séculos atrás. Realizando alguns experimentos, sob circunstâncias ideias, ele descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda.

Defina $S(t)$ como a distância percorrida pelo móvel após t segundos. Segundo a Lei proposta por Galilei podemos expressar $S(t)$ do seguinte modo:

$$S(t) = \frac{gt^2}{2},$$

onde g representa a aceleração da gravidade local e adotaremos $g = 9,8m/s^2$ para efeito de cálculos. Daí,

$$S(t) = 4,9t^2.$$

Agora, considere a seguinte pergunta: se uma bola é solta do alto de uma torre que possui 450 metros de altura, qual é a velocidade da bola após o instante 6 segundos? Ao analisar esta pergunta nos deparamos com um pequeno inconveniente, queremos encontrar a velocidade da bola após 6 segundos, mas não conhecemos o intervalo de tempo. O que podemos fazer?

Como $t = 6$ s é nosso único instante de referência, podemos obter boas aproximações calculando a velocidade média V_m em intervalos de tempo tão pequenos quanto desejarmos. Para calcular V_m utilizamos a expressão

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

onde $\Delta S = S(t) - S(t_0)$ é a variação do espaço percorrido e $\Delta t = t - t_0$ é o intervalo de tempo para percorrer este espaço.

Na tabela, encontramos os registros das velocidades médias da bola em intervalos de tempo cada vez menores. A ideia é escolher um intervalo que esteja nas proximidades de $t = 6$, por exemplo, o intervalo $(6, 7]$. Observe:

Tabela 3 – Calculando velocidades médias em intervalos cada vez menores.

$\Delta S = S(t) - S(t_0)$ (em metros)	$\Delta t = t - t_0$ (em segundos)	$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$
$\Delta S = S(7) - S(6) = 63,7$	$\Delta t = 1$	$63,7$
$\Delta S = S(6,5) - S(6) = 30,625$	$\Delta t = 0,5$	$61,25$
$\Delta S = S(6,1) - S(6) = 5,929$	$\Delta t = 0,1$	$59,29$
$\Delta S = S(6,01) - S(6) = 0,58849$	$\Delta t = 0,01$	$58,849$
$\Delta S = S(6,001) - S(6) = 0,0588049$	$\Delta t = 0,001$	$58,8049$
$\Delta S = S(6,0001) - S(6) = 0,00588005$	$\Delta t = 0,0001$	$58,80049$
...	...	...

Fonte: O Autor.

À medida que fazemos o intervalo de tempo colapsar, isto é, $\Delta t \to 0$, notamos que a velocidade média aproxima-se cada vez mais de $58,8$ m/s. Ao verificarmos os dados apresentados na tabela passamos a compreender melhor o conceito de velocidade instantânea.

Note que, $t = 6$ é o instante que gera a velocidade instantânea definida como o *valor limite* para essas velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores, isto significa que a velocidade instantânea após 6 segundos é exatamente $58,8$ m/s.

Este valor é obtido como caso limite da sequência de aproximações, isto é, quando $\Delta t \to 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\Delta S &= S(6+\Delta t) - S(6) \\
\Rightarrow \Delta S &= 4,9(6+\Delta t)^2 - 4,9 \cdot 6^2 \\
\Rightarrow \Delta S &= 4,9 \cdot [36 + 12 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2] - 4,9 \cdot 36 \\
\Rightarrow \Delta S &= 4,9 \cdot [36 + 12 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2 - 36] \\
\Rightarrow \Delta S &= 4,9 \cdot [12 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2] \\
\Rightarrow \Delta S &= 58,8 \cdot \Delta t + 4,9 \cdot (\Delta t)^2.
\end{aligned}$$

Calculamos a velocidade instantânea fazendo $(6+\Delta t) \to 6$. Com efeito,

$$V_{(6+\Delta t)\to 6} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(6+\Delta t) - S(6)}{(6+\Delta t) - 6} = \frac{58,8 \cdot \Delta t + 4,9 \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t} = 58,8 + 4,9 \cdot \Delta t.$$

Note que, fazer $\Delta t \to 0$ acarreta $58,8 + 4,9 \cdot \Delta t \to 58,8$. Quando $\Delta t \to 0$, consequentemente, $\Delta S \to 0$. No entanto, o quociente entre estes números resulta em um número finito. O cálculo do *limite da função* $S(t) = 4,9 \cdot t^2$, chama-se *derivada* de S em relação a t no ponto t_0 e denotamos por meio da expressão

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=t_0}.$$

Esta expressão nos permite aproximar-se tanto quanto quisermos do resultado desejado, basta tomar um valor Δt suficientemente pequeno.

3.4 Relacionando os Problemas

Decerto, constatamos que o *problema da tangente* e o *problema da velocidade instantânea* são bastante parecidos. É fato que existe uma relação intrínseca entre esses dois problemas. Isso pode ser facilmente observado quando esboçamos o gráfico da função $S(t) = 4,9 \cdot t^2$, que representa o espaço S percorrido pela bola em função da variável t.

Façamos uma análise genérica, tomando sobre o gráfico da função $S(t) = 4,9 \cdot t^2$ os pontos $P(p, S(p))$ e $Q(p+h, S(p+h))$. A partir desses pontos, podemos determinar a inclinação m_{PQ} da reta secante à curva, utilizando a expressão

$$m_{PQ} = \frac{S(p+h) - S(p)}{(p+h) - p}.$$

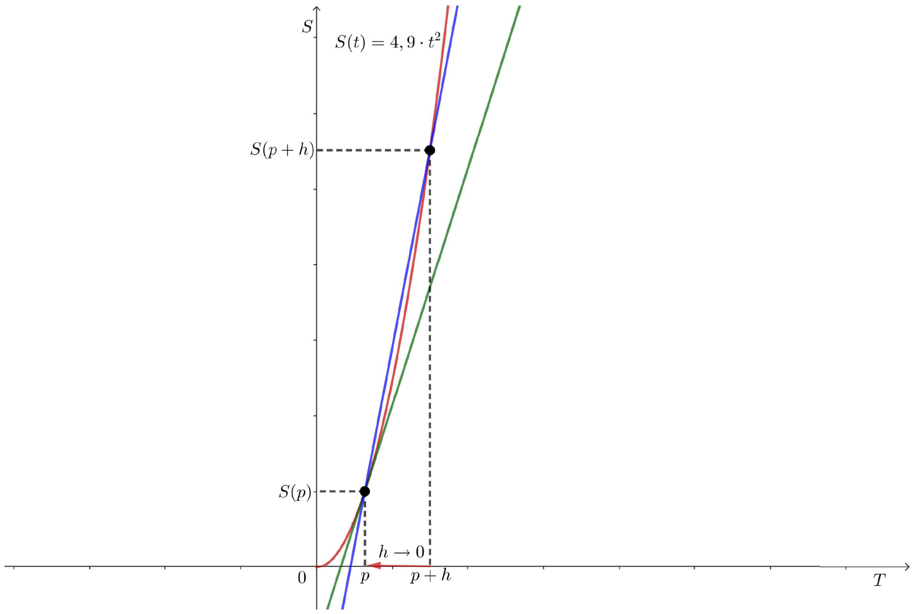
Substituindo os valores adequados na expressão acima, devemos ter

$$m_{PQ} = \frac{4,9 \cdot (p+h)^2 - 4,9 \cdot p^2}{(p+h) - p}.$$

Note que, esta última expressão também nos dá a velocidade média V_m no intervalo de tempo $[p, p+h]$.

Diante disso, podemos concluir que a velocidade no instante $t = p$ é o *limite* das velocidades médias quando o valor $h \to 0$, isto significa, que a velocidade instantânea é o próprio declive da reta tangente à curva no ponto $P(p, S(p))$. Finalmente, como já foi mencionado neste capítulo, a declividade ou coeficiente angular da reta tangente é o *limite* das inclinações das retas secantes.

Figura 18 – Gráfico da função $S(t) = 4,9 \cdot t^2$.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Com a exposição dessas quatro seções, contemplamos os objetivos propostos deste capítulo. Esperamos que o leitor possa refletir sobre as ideias apresentadas e filtrar aqueles pontos que podem ser trabalhados no Ensino Básico.

Embora muitas das ideias que apresentamos não façam parte do currículo de Matemática da Educação Básica, existe a possibilidade de investiga-las intuitivamente por meio da criação de uma disciplina eletiva e aborda-las de uma maneira mais lúdica e suave. No *Capítulo 5* comentaremos um pouco mais sobre isso.

Mas afinal, porque abordar o *problema da tangente* no Ensino Básico? Conforme vimos neste capítulo há alguns detalhes sobre o conceito de tangência que são de certa forma omitidos. Aprender a definir corretamente o conceito de reta tangente, por si só, já é um motivo bastante plausível para abordar essa temática no Ensino Básico.

Além do mais, apresentar essa temática no Ensino Básico, proporciona aos educandos a possibilidade de pensar de forma abstrata para resolver problemas. Outro ponto importante é que a partir do problema da tangente podemos estudar o problema da velocidade instantânea.

Ao investigar o problema da velocidade instantânea o aluno entende como os objetos realmente se movem. Por exemplo, carros numa estrada, objetos em queda livre, pessoas caminhando, a velocidade não é constante e varia no decurso do tempo.

4 O Problema da Área

No decorrer deste capítulo, apresentaremos o *problema da área*, um problema clássico estudado na Grécia Antiga que foi fundamental para o desenvolvimento do Cálculo. O desenvolvimento da nossa pesquisa está centrada na investigação do cálculo de certas áreas por meio de decomposições infinitas, em especial, o cálculo da área de um círculo e da região sob um arco de parábola.

4.1 Obtendo a Área da Região sob o Arco de Parábola

Nesta seção, trataremos da quadratura da parábola, onde temos pretensão de determinar uma fórmula fechada para a área de um seguimento parabólico, inscrevendo-o com um número indefinido de triângulos cujas áreas são conhecidas.

As ideias redigidas no desenrolar desta seção, foram enriquecidas segundo os valiosos relatos de (ROQUE; CARVALHO, 2012) e (EVES, 2004), em seus respectivos livros, *Tópicos de História da Matemática* e *Introdução à História da Matemática*.

Quadrar uma área limitada por uma curva plana significa construir com régua não graduada e compasso um quadrado que possui área igual à da curva utilizando um número finito de etapas. Na Grécia antiga do século V a.C, o *Método da Exaustão*, creditado a Eudoxo de Cnido, tornou-se uma poderosa ferramenta matemática para calcular áreas de figuras limitadas por linhas curvas.

Utilizando o Método da Exaustão, Arquimedes determinou elegantemente a área de um segmento de parábola. isto é, a área limitada entre um segmento de linha e um arco de parábola. Mas afinal, qual foi a técnica idealizada por Arquimedes para realizar esse grandioso feito?

Talvez pensar dessa forma possa parecer um pouco poético, mas a essência das ideias propostas por Arquimedes está na manipulação do infinito. Mas como poderia Arquimedes, um ser finito e limitado, manipular o infinito? Engenhosamente, ele fracionou um problema complexo em vários outros problemas cujas soluções eram muito mais simples. E quais problemas seriam esses? O problema complexo propriamente dito era calcular a área de um segmento de parábola e os problemas mais simples seriam calcular áreas de triângulos.

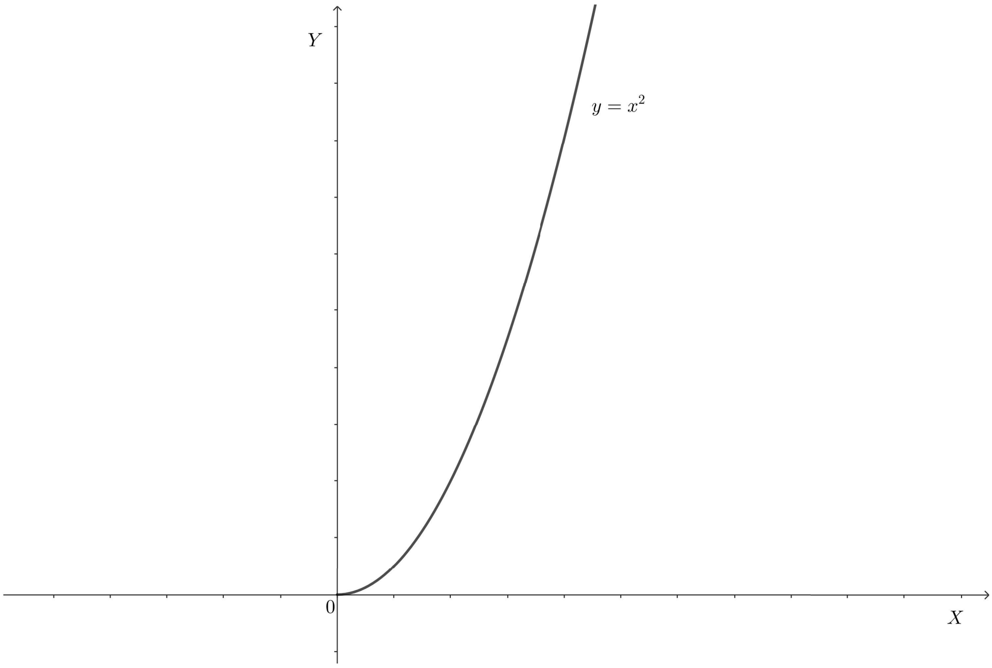
Para seguir com o nosso estudo faremos uso do plano cartesiano, um importante recurso matemático que não estava disponível na época de Arquimedes, sendo mencionado apenas no século XVII por René Descartes. Segundo Eves (2004)

> Com essa aritmetização da geometria, Descartes, na primeira parte de *La géometrie*, marcava x num eixo dado e então um comprimento

> y, formando um ângulo reto com esse eixo, com o objetivo de construir pontos cujo x e cujo y satisfizessem uma relação dada.

No plano cartesiano, vamos esboçar um pedaço de um ramo da parábola de equação $y = x^2$, conforme observamos na Figura 19.

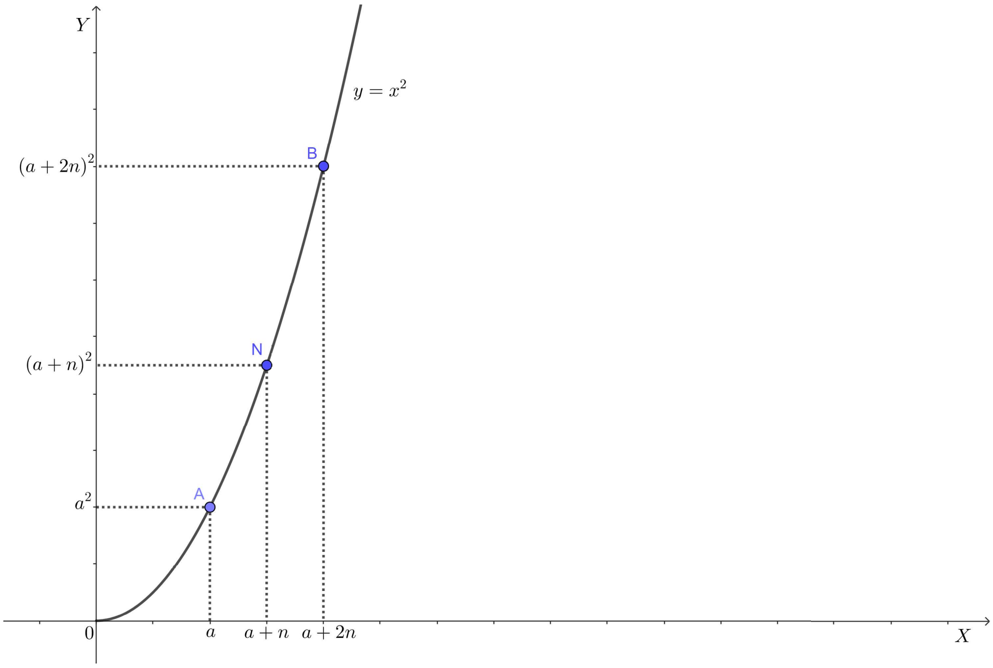
Figura 19 – Pedaço de um ramo da parábola de equação $y = x^2$.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Sejam $A(a, a^2)$ e $B(a + 2n, (a + 2n)^2)$ dois pontos dessa parábola. Perceba que $2n$ é a distância entre as abscissas dos pontos A e B. Agora, considere N um ponto do arco de parábola AB. É fácil ver que as distâncias entre as abscissas dos pontos A e N e as abscissas dos pontos N e B são ambas iguais a n, com isso descobrimos as coordenadas do ponto N, isto é, $N(a + n, (a + n)^2)$. Com o intuito de proporcionar maior clareza ao leitor incentivamos que a Figura 20 seja analisada cuidadosamente, caso seja necessário releia este parágrafo para recordar todas as informações citadas.

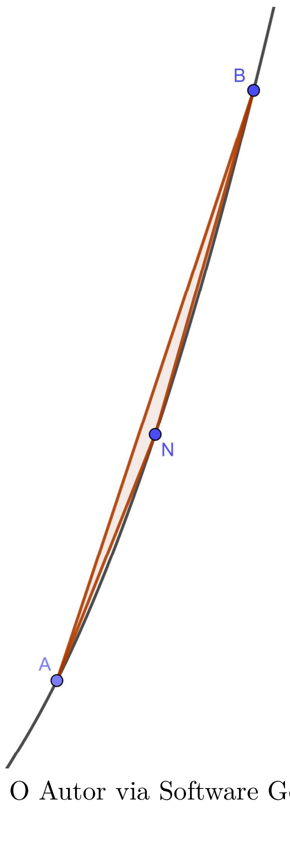
Figura 20 – Inserindo pontos genéricos.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Ao refletir um pouco sobre a Figura 20 podemos pensar no seguinte questionamento: seria a área do triângulo ANB uma boa aproximação para a área do segmento parabólico $\overline{AB}$? O que você acha?

Figura 21 – O triângulo ANB.

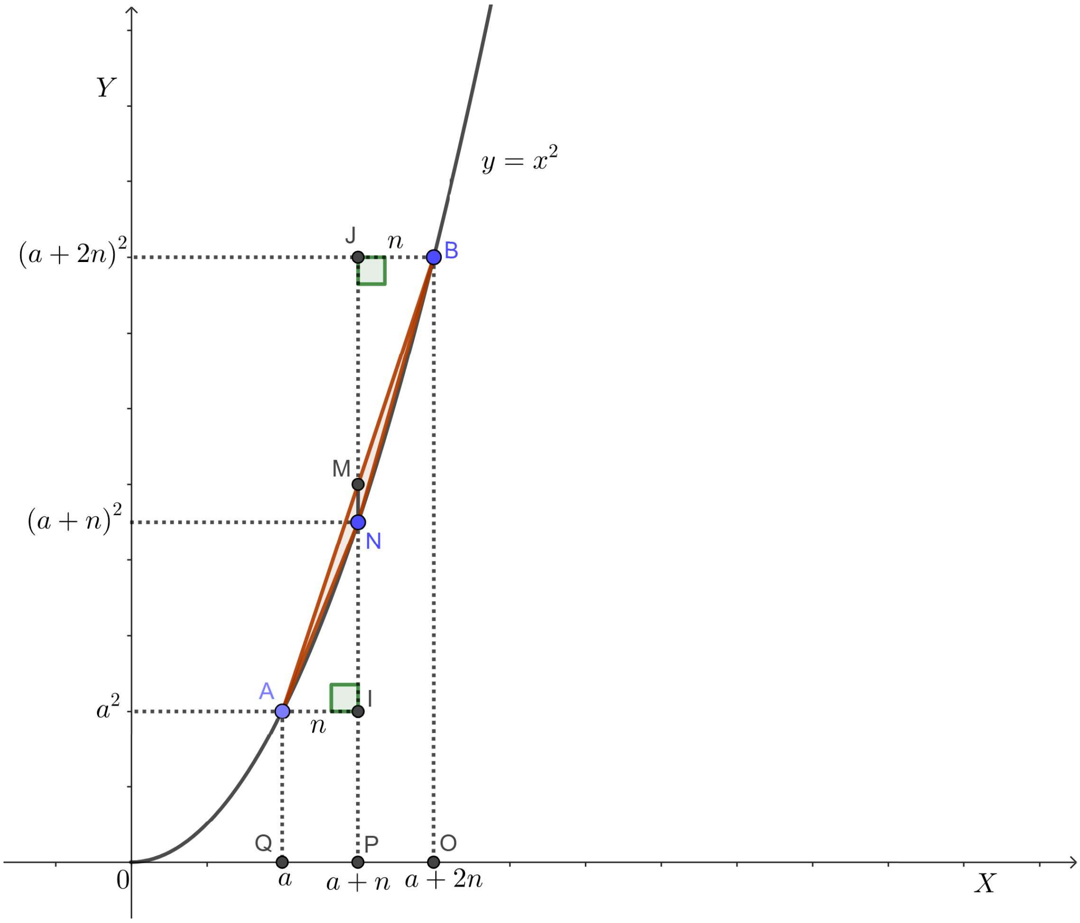


Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Provavelmente, sem hesitar, você respondeu SIM a essa pergunta. No entanto, a tarefa mais difícil vem agora! Qual artifício utilizaremos para calcular a área do triângulo ANB?

Inicialmente, dividiremos o triângulo ANB em dois novos triângulos, ANM e NBM, ambos possuem base igual a $\overline{MN}$. A escolha desses triângulos não foi por acaso, foi algo muito bem pensado. Note que, os triângulos ANM e NBM possuem duas características comuns, bases de mesmo comprimento e alturas de mesmo comprimento, isto significa que suas áreas também são iguais.

Figura 22 – Determinando a área do triângulo ANB.



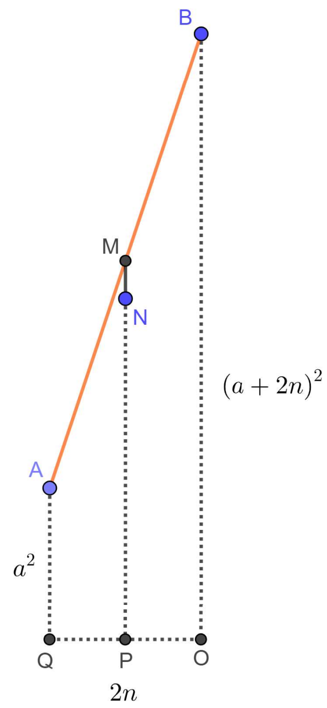
Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Seja $A(\Delta ANM)$ a área do triângulo ANM, onde

$$A(\Delta ANM) = \frac{1}{2} \cdot \overline{MN} \cdot \overline{AI}.$$

Observe que, a medida do segmento $\overline{MN}$ é o único elemento que nos resta determinar, visto que $\overline{AI} = n$. Como o faremos? Vamos marcar sobre plano cartesiano os pontos O, P e Q, cujas coordenadas são, respectivamente, $(a+2n, 0)$, $(a+n, 0)$ e $(a, 0)$. A forma que marcamos os pontos sobre o plano nos permite determinar o trapézio $ABOQ$, isto nos garante $AQ \parallel BO$. Por outro lado, podemos traçar a reta que passa pelos pontos M e P, onde P é ponto médio do segmento $\overline{OQ}$ e M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Figura 23 – O trapézio $ABOQ$.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

De sorte, o segmento $\overline{MP}$ é base média do trapézio $ABOQ$, isto é, $\overline{MP}$ é uma reta paralela as bases $\overline{AQ}$ e $\overline{BO}$ cuja dimensão pode ser facilmente obtida utilizando o teorema da base média, resultado que nos permite calcular $\overline{MP}$ fazendo a média aritmética das bases $\overline{AQ}$ e $\overline{BO}$. Daí, segue que

$$\overline{MP} = \frac{\overline{AQ} + \overline{BO}}{2}.$$

A última imagem fornece três informações importantes, são elas:

$$\overline{MP} = \overline{MN} + (a+n)^2; \tag{4.1}$$

$$\overline{AQ} = a^2; \tag{4.2}$$

$$\overline{BO} = (a+2n)^2. \tag{4.3}$$

Substituindo as informações (4.1), (4.2) e (4.3) na expressão da base média, devemos ter:

$$\overline{MN} + (a+n)^2 = \frac{a + (a+2n)^2}{2},$$

daí, multiplicando ambos os membros da igualdade por 2, obtemos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (\overline{MN} + a^2 + 2an + n^2) &= a^2 + a^2 + 4an + 4n^2 \\ \Rightarrow 2\overline{MN} + 2a^2 + 4an + 2n^2 &= 2a^2 + 4an + 4n^2 \end{aligned}$$

Aplicando a lei do corte em ambos os membros da igualdade, eliminamos as parcelas $2a^2$ e $4an$ e obteremos:

$$\overline{MN} = \frac{2n^2}{2},$$

assim,

$$\overline{MN} = n^2.$$

Finalmente, substituindo o valor de $\overline{MN}$ na expressão

$$A(\Delta ANM) = \frac{1}{2} \cdot \overline{MN} \cdot n,$$

encontramos:

$$A(\Delta ANM) = \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot n.$$

Daí, segue que

$$A(\Delta ANM) = \frac{n^3}{2}.$$

De modo análogo, obtemos a área do triângulo NBM. Conforme já mencionamos nesta seção, os triângulos ANM e MBN possuem a mesma área, consequentemente

$$A(\Delta NBM) = \frac{n^3}{2}.$$

Finalmente, adicionando a área desses triângulos obtemos a área do triângulo ANB. Logo,

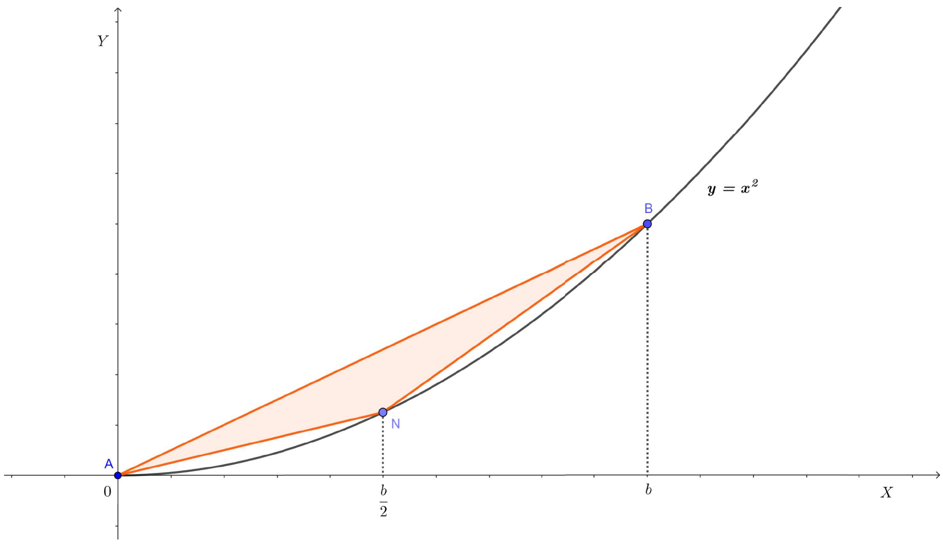
$$\begin{aligned} A(ANB) &= \frac{n^3}{2} + \frac{n^3}{2} \\ \Rightarrow A(\Delta ANB) &= \frac{2n^3}{2} \\ \Rightarrow A(\Delta ANB) &= n^3. \end{aligned}$$

O cálculo da área do triângulo ANB forneceu uma boa aproximação para a área delimitada pelo segmento $\overline{AB}$ e a parábola de equação $y = x^2$. Ainda assim, Arquimedes não se contentou apenas com essa aproximação. De fato, as ideias de Arquimedes corroboram com a investigação de um processo infinito, uma vez que sua motivação em continuar obtendo melhores aproximações para a área dessa região desencadeou um número indefinido de processos análogos ao que acabamos de realizar.

O feito de Arquimedes, desperta o nosso interesse na busca de melhores aproximações para a obtenção da área em questão e assim o faremos. Porém, resolvemos realizar pequenas modificações no escopo desse problema a fim de facilitar algumas manipulações que serão necessárias no futuro para alcançarmos o resultado desejado.

Com o intuito de tornar o problema um pouco mais simples, vamos deslocar o ponto A sobre a parábola, fixando-o na origem do sistema cartesiano, isto é, $A(0,0)$. Além disso, denotaremos por b a abscissa do ponto B e fixaremos sobre a parábola o ponto N, entre A e B, cuja abscissa é dada pela metade da distância entre as abscissas dos pontos A e B, ou seja, $x_N = \dfrac{b}{2}$.

Figura 24 – Deslocando o ponto A para a origem do gráfico.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Agora, lembre-se do resultado obtido para o caso mais geral que fizemos anteriormente, encontramos que a área do triângulo ANB é dada pela expressão

$$A(\Delta ANB) = n^3.$$

E nesse caso, qual seria o nosso n? O n é a distância entre a abscissa do ponto A e a abscissa do ponto N e também é a distância entre a abscissa do ponto N e a abscissa do ponto B. Desse modo, observe que a abscissa x_N é dada pela expressão $x_N = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, o que nos dá, $x_N = \dfrac{b}{2}$. Logo, $n = \dfrac{b}{2}$, bastando apenas substituirmos o valor n na expressão da área que havíamos encontrado anteriormente. Sendo assim,

$$\begin{aligned} A(\Delta ANB) &= n^3 \\ \Rightarrow A(\Delta ANB) &= \left(\frac{b}{2}\right)^3 \\ \Rightarrow A(\Delta ANB) &= \frac{b^3}{8}. \end{aligned}$$

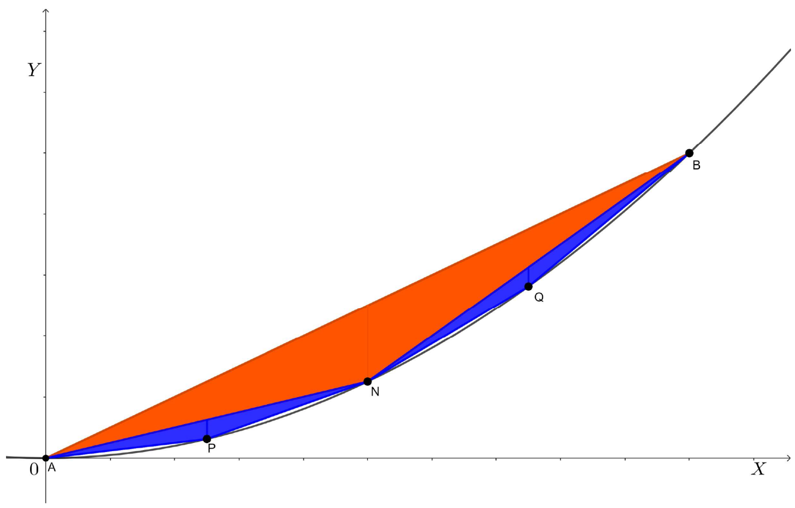
Denotaremos $A(\Delta ANB) = A_1$, onde A_1 é a primeira aproximação obtida para a área do segmento parabólico. Isso nos permite facilitar algumas manipulações futuras, substituiremos $\frac{b^3}{8}$ por A_1 sempre que for conveniente.

Ao analisar a Figura 24, percebemos que existem espaços vazios que poderiam ser cobertos com o objetivo varrer uma porção cada vez maior dessa área. Isso pode ser facilmente resolvido inscrevendo nessas regiões outros triângulos utilizando os mesmos critérios que foram estabelecidos anteriormente.

Tomemos sobre a parábola dois novos pontos que denotaremos por P e Q, onde $\left(\frac{b}{4}, \left(\frac{b}{4}\right)^2\right)$ e $\left(\frac{3b}{4}, \left(\frac{3b}{4}\right)^2\right)$ são suas respectivas coordenadas. Note que, as abscissas dos pontos P e Q, são obtidas, respectivamente, fazendo a média aritmética das abscissas dos pontos A e N e os pontos N e B. Você conseguiu visualizar aonde estamos querendo chegar com a realização desses passos?

Os novos triângulos que estamos inscrevendo nos espaços vazios são boas aproximações para a área sob os novos arcos de parábola, por exemplo, com a inclusão dos pontos P e Q sobre a parábola temos a possibilidade de estimar as áreas delimitadas entre pedaços da parábola e os segmentos $\overline{AN}$ e o segmento $\overline{NB}$, veja a Figura 25.

Figura 25 – Inscrevendo os triângulos APN e NQB.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

É fácil ver que as áreas dos triângulos APN e NQB são boas aproximações para essas regiões. Novamente, utilizaremos a expressão do caso mais geral para calcular a área desses triângulos, vejamos:

$$\begin{aligned} A(\Delta APN) &= n^3 \\ &= \left(\frac{b}{4}\right)^3 \\ \Rightarrow A(\Delta APN) &= \frac{b^3}{64}. \end{aligned}$$

Agora, vamos escrever a área $A(\Delta APN)$ em termos de A_1. Conforme exibimos anteriormente $A_1 = \frac{b^3}{8}$, o que nos permite dizer que $A(\Delta APN) = \frac{A_1}{8}$. A Figura 25, nos permite visualizar que os triângulos APN e NQB possuem bases e alturas de mesmo comprimento, consequentemente, possuem a mesma área. Desse modo,

$$A(\Delta NQB) = \frac{A_1}{8}.$$

Ao olhar novamente para a Figura 25 constatamos que agora obtemos uma aproximação muito melhor do que a anterior. Ainda assim, se continuarmos refinando esse processo obteremos aproximações cada vez melhores. Afinal, essa é essência do famoso *Método da Exaustão.*

Por hora, dividindo ao meio os segmentos $\overline{AP}$, $\overline{PN}$, $\overline{NQ}$ e $\overline{QB}$ e marque sobre a parábola os pontos R, S, T e U, cujas abscissas desses pontos são dadas, respectivamente, pela média aritmética das abscissas dos pontos que são extremidades dos segmentos citados no início deste parágrafo. Realizando alguns cálculos encontramos para as abscissas dos pontos R, S, T e U, respectivamente, os valores $\frac{b}{8}$, $\frac{3b}{8}$, $\frac{5b}{8}$ e $\frac{7b}{8}$.

Novamente, utilizaremos a expressão para calcular a área do triângulo a fim de obter boas aproximações para as áreas delimitadas entre os segmentos $\overline{AR}$, $\overline{RP}$, $\overline{PS}$, $\overline{SN}$, $\overline{NT}$, $\overline{TQ}$, $\overline{QU}$, $\overline{UB}$ e pedaços do arco de parábola. Contudo, é importante frisar que os novos triângulos, ARP, PSN, NTQ e QUB, possuem a mesma área. Afinal, a escolha de cada um desses conjuntos de vértices torna possível obter triângulos cujas bases e alturas possuem mesmos comprimentos, essa é a grande sutileza dessa ideia.

Desse modo, devemos ter:

$$A(\Delta ARP) = A(\Delta PSN) = A(\Delta NTQ) = A(\Delta QUB) = n^3,$$

como o valor de n em ambos os casos é $\frac{b}{8}$, segue-se que

$$\begin{aligned} A(\Delta ARP) &= A(\Delta PSN) = A(\Delta NTQ) = A(\Delta QUB) = \left(\frac{b}{8}\right)^3 \\ &= A(\Delta PSN) = A(\Delta NTQ) = A(\Delta QUB) = \frac{b^3}{512}. \end{aligned}$$

Desta forma,

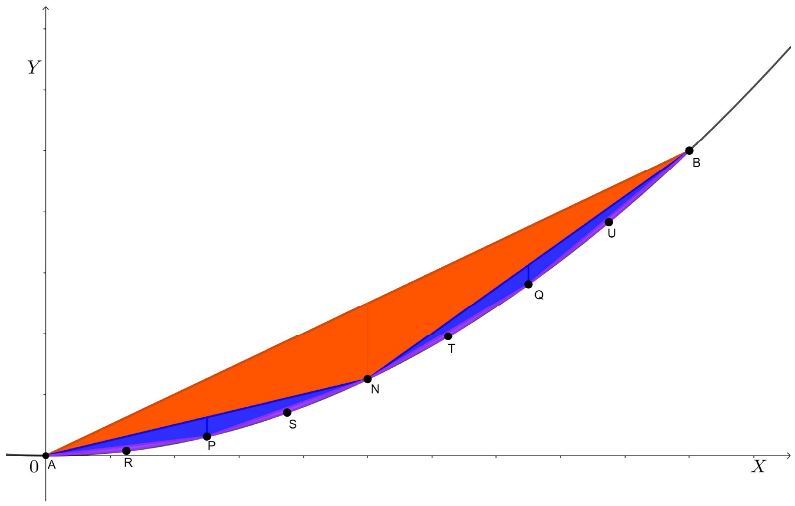
$$A(\Delta ARP) = \frac{b^3}{512}.$$

Escrevendo o valor encontrado para as áreas dos triângulos em termos de A_1, obtemos:

$$\begin{aligned} A(\Delta ARP) &= A(\Delta PSN) = A(\Delta NTQ) = A(\Delta QUB) = \frac{b^3}{8} \cdot \frac{1}{64} \\ \Rightarrow A(\Delta ARP) &= A(\Delta PSN) = A(\Delta NTQ) = A(\Delta QUB) = \frac{A_1}{64}. \end{aligned}$$

Acabamos de encontrar uma aproximação ainda melhor para a área delimitada pelo segmento $\overline{AB}$ e a parábola de equação $y = x^2$, veja a Figura 26.

Figura 26 – Inscrevendo os triângulos ARP, PSN, NTQ e QUB.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Seja A a área do segmento parabólico, onde A é dado pela soma das áreas dos triângulos inscritos. Desse modo, a expressão

$$A = A(\Delta ANB) + A(\Delta APN) + A(\Delta NQB) + A(\Delta ARP) + A(\Delta PSN) + A(\Delta NTQ) + \\ + A(\Delta QUB)$$

nos dá uma boa aproximação para a área da região. Realizando as substituições dos valores encontrados, obtemos:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + \frac{A_1}{8} + \frac{A_1}{8} + \frac{A_1}{64} + \frac{A_1}{64} + \frac{A_1}{64} + \frac{A_1}{64} \\ &= A_1 + \frac{2A_1}{8} + \frac{4A_1}{64} \\ &= A_1 + \frac{A_1}{4} + \frac{A_1}{16} \\ &= A_1 + \frac{A_1}{4} + \frac{A_1}{4^2}. \end{aligned}$$

De fato, este último resultado é uma ótima aproximação para a área que queremos determinar. No entanto, embora já não seja uma tarefa tão simples inscrever novos triângulos nessa região, se ampliarmos a imagem notamos que ainda existem espaços vazios que podem ser preenchidos, e sempre existirão.

Por outro lado, conseguimos estabelecer um padrão para a escolha de cada conjunto de vértices desses triângulos, tomando sempre a abscissa média entre dois pontos consecutivos sobre a parábola, o que nos permite determinar o valor de n e substituí-lo na expressão geral que encontramos para a área.

Ao realizar novas iterações constatamos intuitivamente que a medida que inscrevemos novos triângulos seguindo os padrões previamente estabelecidos encontramos definitivamente a expressão

$$A = A_1 + \frac{A_1}{4} + \frac{A_1}{4^2} + \frac{A_1}{4^3} + \cdots$$

onde A é a área sob o arco de parábola delimitado entre o segmento $\overline{AB}$ e a parábola e A_1 é a área do triângulo ANB, isto é, nossa primeira aproximação para a área da região. Escolhemos o vértice N de modo tal que a abscissa x_N seja dada pela média aritmética das abscissas dos pontos A e B.

Manipulando a expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + \frac{A_1}{4} + \frac{A_1}{4^2} + \frac{A_1}{4^3} + \cdots \\ &= A_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right). \end{aligned}$$

A expressão

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right),$$

representa a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão $q = \dfrac{1}{4}$. Diante disso, podemos utilizar a expressão

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q},$$

para calcular a soma dos termos. Na expressão, a_1 é o primeiro termo da P.G, isto é, $a_1 = 1$. Substituindo os valores de a_1 e q na expressão, encontramos:

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \Rightarrow S_\infty = \frac{4}{3}.$$

Por fim, substituindo o valor da soma dos termos na expressão, concluímos que

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cdot (A_1 + \frac{A_1}{4} + \frac{A_1}{4^2} + \frac{A_1}{4^3} + \cdots) \\ &= A_1 \cdot \frac{4}{3} \\ \Rightarrow A &= \frac{4A_1}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente, acabamos de encontrar uma fórmula fechada que nos permite calcular a área de qualquer segmento parabólico. É importante salientar que Arquimedes não procedeu dessa maneira, até porque em sua época não se tinha conhecimento sobre progressões geométricas. De acordo com Eves (2004, p.421) "aqui o trabalho foi abreviado usando-se a fórmula da soma da série geométrica; Arquimedes, porém, procedia por *dupla reductio ad absurdum*[1], nos moldes do método da exaustão."

No livro Tópicos de História da Matemática, encontramos maiores esclarecimentos sobre a demonstração realizada por Arquimedes. De acordo com Roque e Carvalho (2012, p.146)

> Arquimedes demonstra este resultado pelo que chamamos hoje "método da exaustão", provando que a área S do segmento parabólico não pode ser nem menor nem maior que $\frac{4}{3} \cdot T$ (soma das áreas dos triângulos). Logo, $S = \frac{4}{3} \cdot T$. Lembramos que este é o procedimento clássico do método da exaustão. Para provar que duas grandezas A e B são iguais, mostra-se que não pode ter $A > B$ e $A < B$, do que decorre, forçosamente, que $A = B$.

Todavia, pensando em abordar essa temática no Ensino Médio, se faz necessário utilizar conhecimentos prévios que o educando tenha vivenciado em sua jornada escolar. Por este motivo, optamos em trazer uma abordagem mais intuitiva para investigar esse resultado e não adentramos em muitos detalhes acerca da demonstração realizada por Arquimedes. Apesar disso, caso o leitor queira consultar mais detalhes, indicamos verificar as fontes mencionadas anteriormente.

4.2 O Número π: Encontrando Boas Aproximações

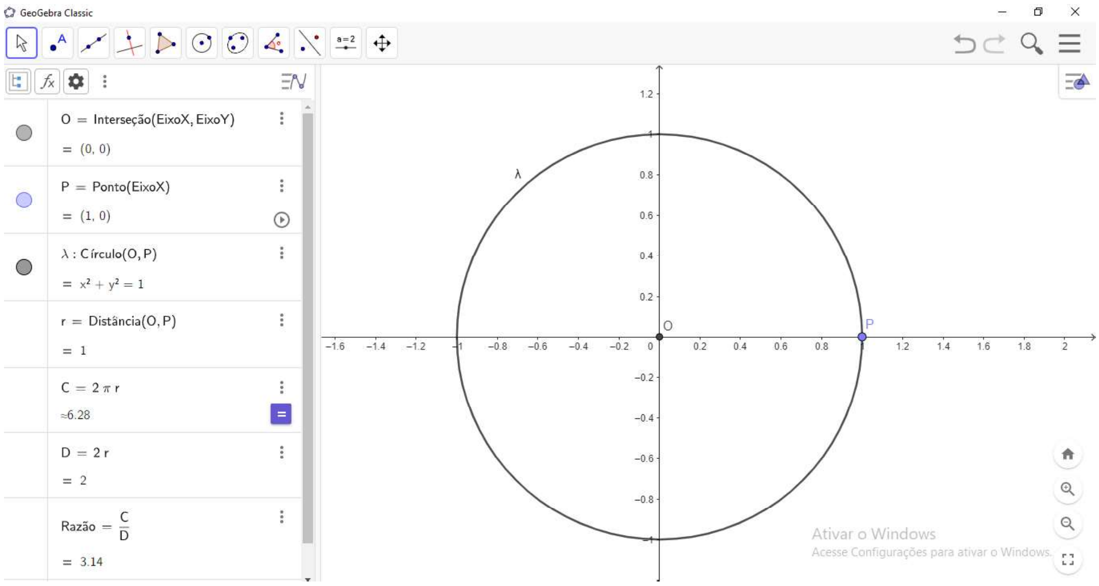
Há muito tempo atrás, já se sabia que o comprimento de uma circunferência era um pouco maior que três diâmetros, inclusive, utilizava-se a aproximação $C \approx 3D$ para o comprimento da circunferência, isto é, o comprimento da circunferência é praticamente igual ao triplo do seu diâmetro. No entanto, surge a seguinte indagação: será que existe alguma circunferência que invalida esse resultado? Podemos responder intuitivamente a essa pergunta analisando um caso particular que construiremos via software *GeoGebra*.

Inicialmente, vamos construir a circunferência λ centrada na origem do sistema de coordenadas e marcaremos sobre ela o ponto móvel P de coordenadas $(1, 0)$, isto significa que a circunferência possui raio unitário, mas à medida que deslocamos P sobre o eixo x seu raio se modifica, aumentando ou diminuindo, conforme deslocamos P para a direita ou para a esquerda.

[1] O Método da *dupla redução ao absurdo* é uma técnica de prova utilizada em Matemática para demonstrar a validade de uma proposição. Esse método combina duas reduções ao absurdo para chegar no resultado desejado.

Nas imagens a seguir, escrevemos na "zona de entrada" do *GeoGebra* algumas expressões e informações que serão fundamentais para tirarmos nossas próprias conclusões diante do questionamento apresentado. Incentivamos o leitor a analisar cuidadosamente cada uma das imagens e refletir sobre as informações que foram disponibilizadas.

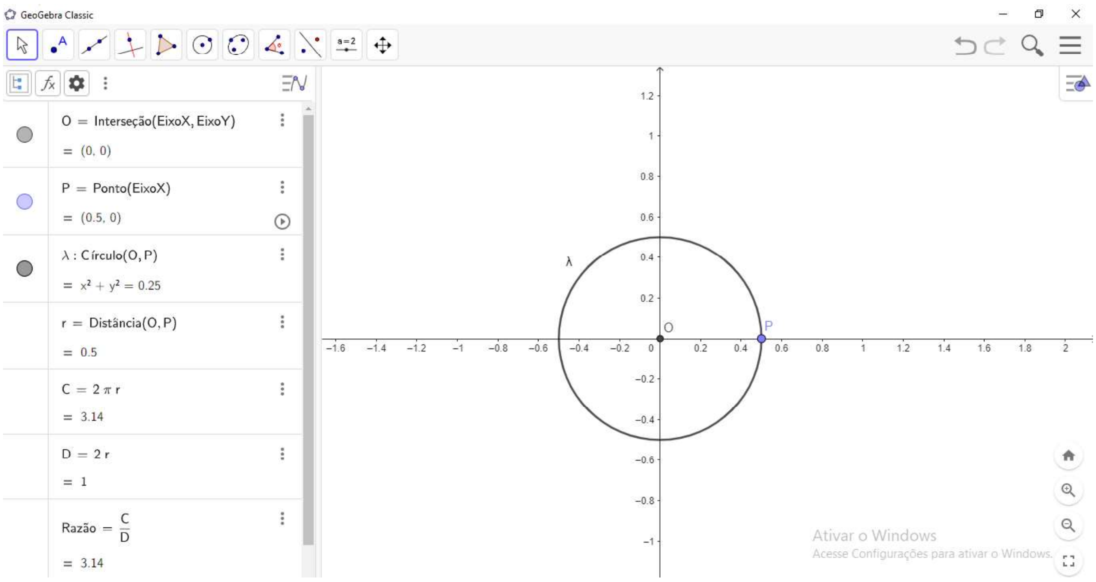
Figura 27 – Circunferência de raio unitário.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Os dados apresentados no canto esquerdo da Figura 27 mostram que $C > 3D$, ou seja, o comprimento da circunferência vale um pouco mais de três diâmetros conforme havíamos comentado no início desta seção. Agora, observe a Figura 28 e analise os valores C e D.

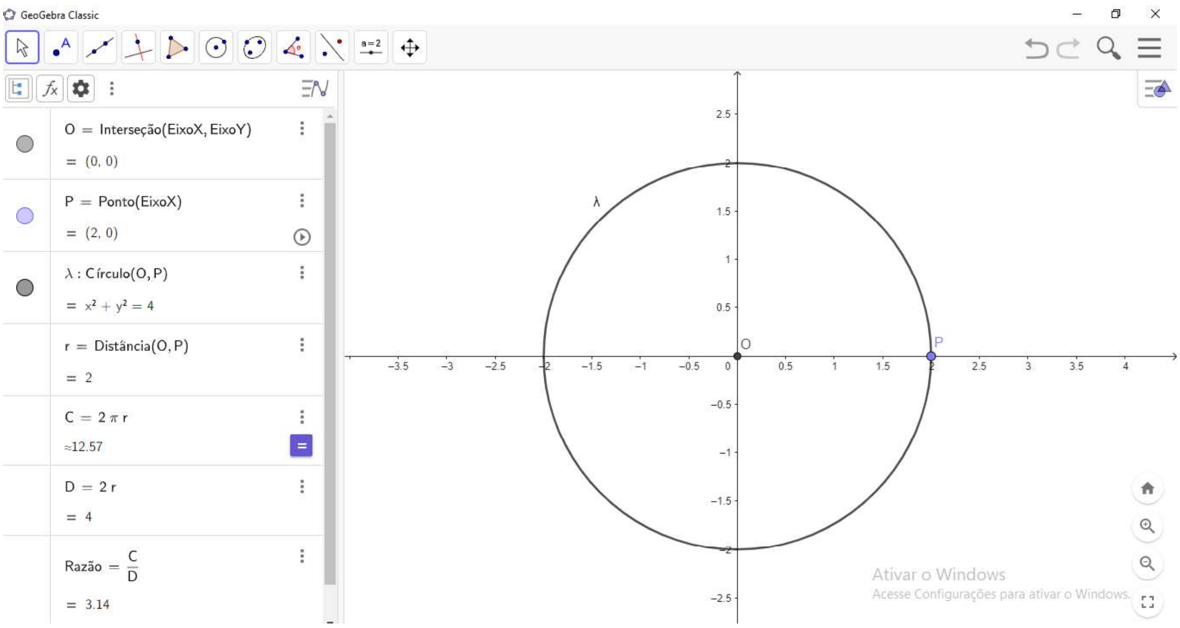
Figura 28 – Reduzindo o raio pela metade.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

A Figura 28 foi construída tomando como referência a Figura 27, reduzimos o raio da circunferência pela metade e ainda assim o resultado $C > 3D$ se mantém. Notamos, inclusive, que razão $\dfrac{C}{D}$ se mantém constante, mais tarde comentaremos sobre este fato mais detalhadamente.

Figura 29 – Circunferência de $r = 2$.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Ao observar a Figura 29, notamos que o seu raio é o dobro do raio da circunferência da imagem 27 e quatro vezes maior que o raio da circunferência da Figura 28, ainda assim, chegamos novamente a mesma conclusão, $C > 3D$.

As análises dessas imagens evidenciam, intuitivamente, que podemos obter qualquer circunferência a partir da primeira que traçamos, basta ampliar ou reduzir suas dimensões de forma proporcional, isso equivale a modificar o raio da circunferência, que por sua vez modifica seu diâmetro e o seu comprimento. Diante disso, aceitamos que não importa o tamanho da circunferência, sempre obteremos o resultado $C > 3D$.

Contudo, saber que $C > 3D$ não é suficiente. Isso nos instiga a buscar respostas para a seguinte pergunta: como podemos calcular o valor exato do comprimento de qualquer circunferência? Não é de hoje que conhecemos a expressão $C = \pi \cdot D$, utilizada para essa finalidade. A partir dessa expressão, podemos dizer também que o número π é dado pela razão $\dfrac{C}{D}$.

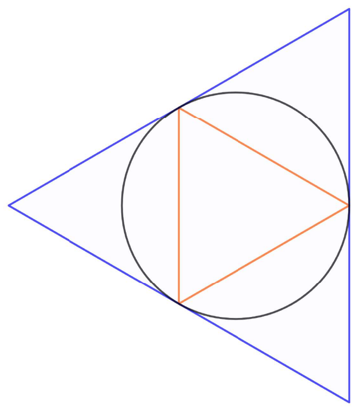
Hoje, sabemos que o número π é irracional. Contudo, nos resta saber como os nossos antepassados conseguiram determinar boas aproximações para este número. Aplicando processos infinitos, Arquimedes de Siracusa encontrou uma excelente aproximação para o número π. Sua ideia tinha por base inscrever e circunscrever circunferências idênticas com polígonos regulares.

Quando colocamos em prática o método idealizado por Arquimedes, percebemos à medida que o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos aumentam, que o comprimento da circunferência fica cada vez mais próximo do perímetro desses polígonos.

A seguir apresentaremos três casos que nos permitem investigar melhor este método. Em cada uma das construções denotaremos por r e D, respectivamente, raio e diâmetro da circunferência e por L e l, respectivamente, lados dos polígonos circunscritos e inscritos na circunferência.

Inicialmente, vamos inscrever e circunscrever a circunferência com triângulos equiláteros, conforme observamos a seguir:

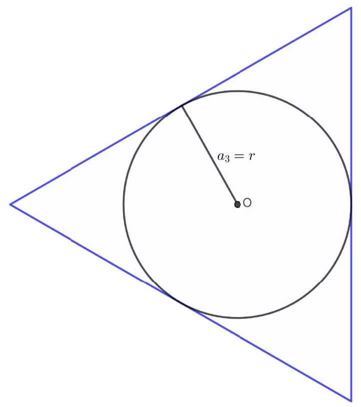
Figura 30 – Triângulo equilátero inscrito e circunscrito.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Ao analisarmos a Figura 30, fica perceptível que $3l < C < 3L$, isto significa que a medida C do comprimento da circunferência é um valor compreendido entre o perímetro do triângulo inscrito e o perímetro triângulo circunscrito. Contudo, podemos apresentar essa expressão de uma forma mais interessante escrevendo os perímetros desses triângulos em função do diâmetro da circunferência.

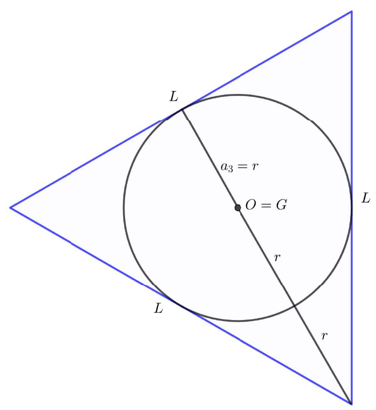
Figura 31 – Triângulo equilátero circunscrito.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Defina a_3 o apótema[2] do triângulo circunscrito, onde $a_3 = r$. Além disso, utilizaremos neste primeiro caso um resultado da Geometria Plana que nos garante que o centro C da circunferência inscrita no triângulo equilátero coincide com seu baricentro G, e G é um ponto notável do triângulo que divide sua *mediana* na proporção $2:1$, que por sua vez, representa a altura do *triângulo equilátero*.

Figura 32 – A altura do triângulo equilátero circunscrito.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra

Desse modo, denotando H altura do triângulo equilátero, devemos ter $H = 3r$, o que nos garante que $r = \dfrac{1}{3} \cdot H$. Por outro lado, sabemos que por ser altura de um triângulo equilátero, $H = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$. Substituindo este último valor de H na expressão

[2] Definimos *apótema* de um polígono regular como a distância perpendicular do centro desse polígono até o ponto médio de um dos seus lados.

anterior, obtemos

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{6},$$

isolando L, devemos ter

$$L = \frac{6r}{\sqrt{3}} \Rightarrow L = \sqrt{3}D.$$

Utilizando os mesmos procedimentos, calcularemos a medida do lado l do triângulo inscrito em função do diâmetro da circunferência. Note que, tomando como referência os mesmos resultados da Geometria Plana utilizados no cálculo anterior, devemos ter $r = \frac{2}{3} \cdot h$, onde h é altura do triângulo inscrito. Mas, como $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, podemos substituir este valor na expressão anterior, o que nos garante que

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}.$$

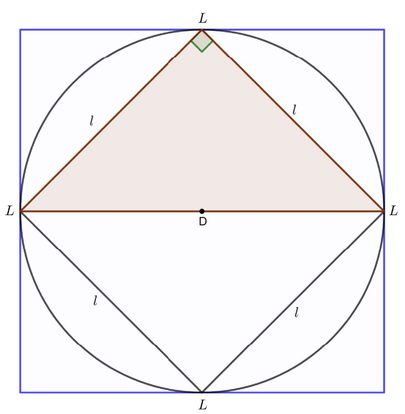
Por último, vamos isolar l, o que nos garante,

$$l = \frac{3r}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = \frac{3r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{2} \Rightarrow l = \frac{3D}{2\sqrt{3}} \Rightarrow l = \frac{\sqrt{3}D}{2}.$$

Finalmente, substituindo os valores encontrados para l e L na desigualdade $3l < C < 3L$ e adotando $\sqrt{3} \approx 1,73$, encontramos $2,60D < C < 5,20D$.

No próximo caso, inscrevemos e circunscrevemos a circunferência com quadrados, conforme ilustramos na Figura 33.

Figura 33 – Quadrado inscrito e circunscrito.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

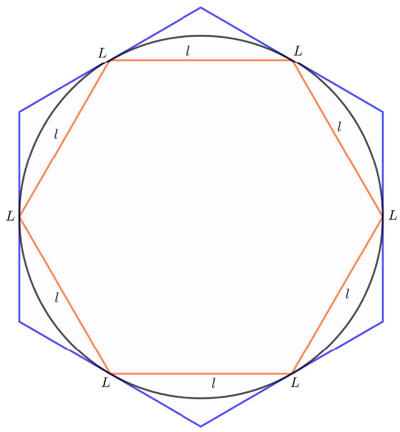
Note que, $4l < C < 4L$, isto é, a medida do comprimento C da circunferência está compreendida entre o perímetro do quadrado inscrito e o perímetro do quadrado circunscrito. Observe também que, o lado do quadrado circunscrito é igual ao diâmetro da circunferência, isto é, $L = D$, o que nos garante que $C < 4D$. Agora, basta determinar o valor do l em função do diâmetro da circunferência. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo destacado em vermelho, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} D^2 & = & l^2 + l^2 \\ \Rightarrow D^2 & = & 2l^2 \\ \Rightarrow l^2 & = & \dfrac{D^2}{2} \\ \Rightarrow l & = & \sqrt{\dfrac{D^2}{2}} \\ \Rightarrow l & = & \dfrac{D\sqrt{2}}{2}. \end{array}$$

Substituindo $l = \dfrac{D\sqrt{2}}{2}$ e $L = D$ na desigualdade $4l < C < 4L$, obtemos $2\sqrt{2}D < C < 4D$. Adotando $\sqrt{2} \approx 1,41$, estimamos $2,82D < C < 4D$.

Neste último caso, iremos inscrever e circunscrever a circunferência com hexágonos regulares, conforme ilustrado na Figura 34.

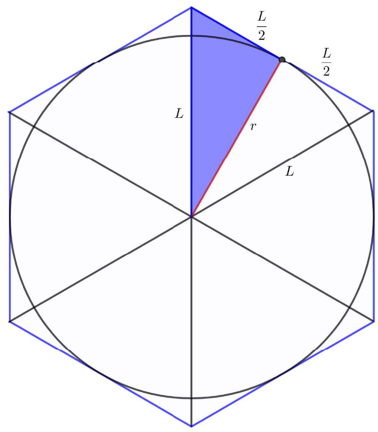
Figura 34 – Hexágono regular inscrito e circunscrito.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Podemos expressar o comprimento da circunferência através da desigualdade $6l < C < 6L$. A fim de facilitar nossa análise, apresentaremos as Figuras 35 e 36.

Figura 35 – Determinando L em função de D.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Na imagem acima, construímos um hexágono regular de lado L circunscrito a circunferência. Utilizando as dimensões expressas no desenho, vamos determinar o valor L em função de D. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo azul, obtemos:

$$L^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{L^2}{4} + r^2 = \frac{L^2}{4} + r^2.$$

Desta forma,

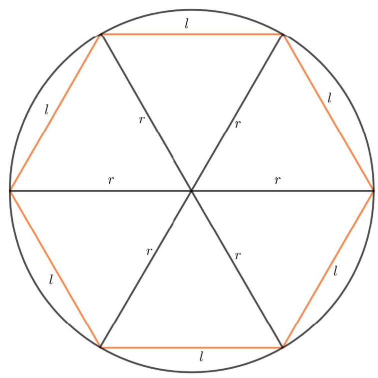
$$\begin{array}{rcl} \frac{3L^2}{4} & = & r^2 \\ \Rightarrow \; 3L^2 & = & 4r^2 \\ \Rightarrow \; \sqrt{3L^2} & = & \sqrt{4r^2} \\ \Rightarrow \; L\sqrt{3} & = & D. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} L & = & \frac{D}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow L & = & \frac{D\sqrt{3}}{3}. \end{array}$$

Na Figura 39, ilustramos um hexágono regular de lado l inscrito na circunferência.

Figura 36 – $l = r$.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Neste caso, $l = r$. Por fim, substituindo os valores encontrados para L e l na desigualdade $6l < C < 6L$ e adotando $\sqrt{3} \approx 1,73$, obtemos:

$$\begin{aligned} 6r < C < 6 \cdot \frac{D\sqrt{3}}{3} \\ \Rightarrow 3 \cdot 2r < C < 2\sqrt{3}D \\ \Rightarrow 3D < C < 3,46D. \end{aligned}$$

Ao refletirmos sobre os três casos analisados, notamos que à medida que aumentamos o número de lados dos polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência que os extremos do intervalo tendem a colapsar, isto é, os intervalos ficam cada vez mais achatados.

De fato, os aumentos do número de lados dos polígonos circunscritos acarretam aproximações cada vez mais expressivas entre o comprimento da circunferência e o perímetro desses polígonos por cima. Em contrapartida, os aumentos do número de lados dos polígonos inscritos geram aproximações cada vez maiores entre o comprimento da circunferência e os perímetros desses polígonos por baixo.

De acordo com relatos históricos, Arquimedes continuou esse processo para polígonos com número de lados cada vez maiores, a partir do hexágono regular ele começou a dobrar o número de lados dos polígonos regulares obtidos posteriormente, isso quer dizer que ele analisou os casos onde inscreveu e circunscreveu na circunferência polígonos regulares de 12, 24, 48 e 96 lados. Para este último número lados, obteve-se um resultado bastante interessante, mas antes de comentá-lo faremos uma manipulação nas expressões que encontramos anteriormente.

Inicialmente, vamos dividir a expressão

$$2,60D < C < 5,20D$$

por D, isto nos dá

$$\frac{2,60D}{D} < \frac{C}{D} < \frac{5,20D}{D},$$

o que implica

$$2,60 < \pi < 5,20.$$

Em seguida, vamos realizar o mesmo procedimento para as expressões

$$2,82D < C < 4D$$

e

$$3D < C < 3,46D.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{2,82D}{D} &< \frac{C}{D} < \frac{4D}{D} \\ \Rightarrow 2,82 &< \pi < 3,46 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{3D}{D} &< \frac{C}{D} < \frac{3,46D}{D} \\ \Rightarrow 3 &< \pi < 3,46. \end{aligned}$$

Finalmente, para polígonos de 96 lados, Arquimedes encontrou a expressão

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7},$$

isto é, o número π é um número compreendido entre os números racionais

$$\frac{223}{71} \text{ e } \frac{22}{7}.$$

Com a intenção de visualizarmos melhor boas aproximações para o número π escreveremos essas duas frações na sua forma decimal considerando em cada caso os quatro primeiros dígitos obtidos após a vírgula,

$$3,1408 < \pi < 3,1428.$$

Por meio desse método, Arquimedes conseguiu determinar as duas primeiras casas decimais do número π, não é à toa que normalmente utilizamos $3,14$ como aproximação para o número π.

A essência da técnica utilizada por Arquimedes direciona-se por meio da realização de um mesmo processo, repetindo-o várias vezes. É importante destacar, que com a realização desse método, os espaços entre a borda da circunferência e o contorno dos polígonos jamais irá exaurir-se, visto que, podemos repeti-lo um número infinito de vezes. Utilizando softwares dinâmicos de Matemática, como o GeoGebra, por exemplo, podemos determinar aproximações cada vez melhores para o número π.

Na próxima seção, investigaremos o cálculo de certas áreas trazendo uma abordagem por meio de decomposições infinitas. O nosso principal objeto de estudo será a obtenção da área do círculo.

4.3 Obtendo a Área do Círculo

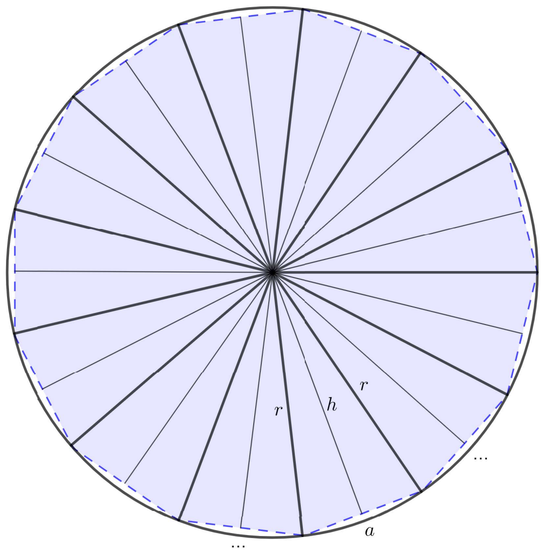
Nesta seção, trataremos da quadratura do círculo sob a perspectiva de um processo infinito. Mas antes disso, achamos interessante fazer um breve comentário pedagógico que visa melhorar a exposição desse conteúdo durante as aulas. É bem verdade que despertar o interesse dos educandos pela Matemática tem se tornado uma tarefa cada vez mais difícil e rever nossas práticas de ensino pode ser algo realmente desafiador.

Entretanto, devemos refletir sobre o seguinte questionamento: estou instigando os meus alunos a terem apreço pela Matemática? Embora responder essa pergunta possa gerar um certo embaraço, se faz necessário buscar melhores estratégias para a divulgação da Matemática no contexto escolar.

Quando o docente busca estratégias para apresentar uma fórmula fechada para calcular a área do círculo ao invés de simplesmente apresenta-la diretamente, pode-se obter resultados positivos no processo de ensino e aprendizagem. No livro *Temas e Problemas Elementares* da SBM (LIMA et al., 2013), o professor Elon, trata a área do círculo como um número real cujas aproximações por falta são áreas de polígonos regulares inscritos.

Tomando essa ideia como ponto partida podemos inscrever numa circunferência de raio r um polígono regular com n lados. Em seguida, dividamos o polígono em n triângulos isósceles iguais, ambos os triângulos com vértice no centro da circunferência, como vemos na Figura 37.

Figura 37 – Obtendo a área do círculo a partir de infinitos triângulos.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Note que, cada um desses triângulos possuem dois lados iguais a r, um lado igual a a e altura h relativa à base. Seja A_n área do polígono de n lados constituído por n triângulos idênticos.

Obtemos a seguinte fórmula para calcular A_n:

$$\begin{aligned} A_n &= n \cdot \frac{ah}{2} \\ &= \frac{na \cdot h}{2} \\ &= \frac{p_n \cdot h}{2}. \end{aligned}$$

Como p_n é o perímetro do polígono inscrito. Além disso, quando $n \to \infty$ isto acarreta $p_n \to C = 2\pi r$ e $h \to r$. Desse modo, obtemos a seguinte fórmula fechada para a área do círculo

$$A = \frac{2\pi r}{2} = \pi r^2.$$

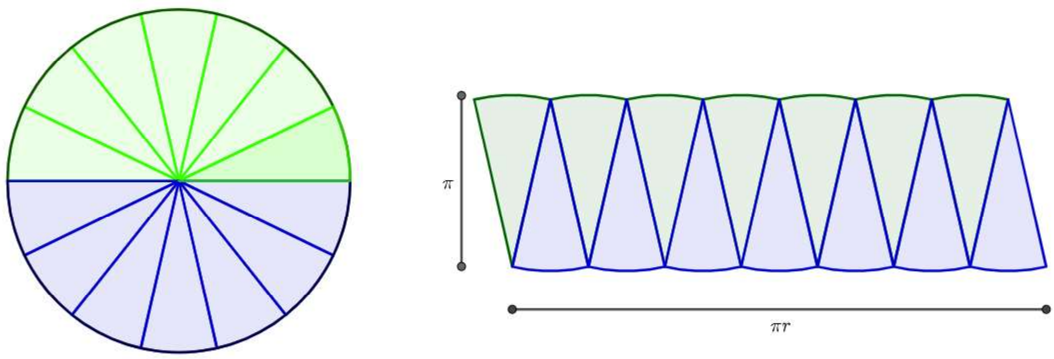
Não vamos aqui realizar uma demonstração formal para esse resultado. Apesar disso, incentivamos o leitor a consultar outro belíssimo livro do professor Elon, intitulado *Medida e Forma em Geometria* (LIMA et al., 2011), onde está disponível uma demonstração desse resultado.

4.4 Aproximando a Área do Círculo por meio de Setores: uma Abordagem via Software GeoGebra

Dividamos um círculo de raio r em $2n$ setores iguais, onde $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, obtemos o próprio círculo. No entanto, para $n \geq 2$, se encaixarmos os setores circulares de forma conveniente a nossa intuição geométrica nos garante a leve impressão que obteremos um paralelogramo no futuro.

Noutras palavras, quando reagrupamos esses setores e os encaixamos adequadamente, à medida que $n \to \infty$ notaremos que o rearranjo dessas "fatias" varrem cada vez mais a área de um retângulo de base $\pi \cdot r$ e altura r, o que nos dá, para um n suficientemente grande, um retângulo de área igual a $\pi \cdot r^2$.

Figura 38 – Reagrupando setores circulares na forma de uma retângulo.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Caso o leitor queira consultar mais detalhes acerca desse resultado indicamos novamente a leitura do livro *Medida e Forma em Geometria* do professor Elon Lages Lima, onde na Seção 3.7 do Capítulo 3 encontramos uma demonstração para o seguinte teorema: "o comprimento de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$." (LIMA et al., 2011). Embora o objetivo dessa demonstração seja outro, ao redigi-la, o professor Elon admite convenientemente que a fórmula $2\pi r$ resulta da expressão πr^2 utilizada para calcular a área do círculo.

Por outro lado, é fácil ver que esse processo pode ser ligeiramente invertido, isto é, se conhecemos o comprimento de uma circunferência podemos encontrar uma fórmula fechada para a área da região por ela delimitada. Essa ideia faz todo sentido, visto que percebemos a tendência natural que a figura possui de aproximar-se cada vez mais de um retângulo à medida que $n \to \infty$, consequentemente, seus lados paralelos possuem a mesma medida.

Diante disso, como cada uma das bases desse retângulo (lados de maior comprimento) são formadas pelo encaixe de setores que pertencem a um mesmo semicírculo, concluímos que suas medidas são dadas pelo produto πr e a soma de suas medidas correspondem ao perímetro da circunferência, isto é, $2\pi r$.

Finalmente, sendo πr a base do retângulo, r sua altura e denotando por A sua área, encontramos a seguinte fórmula fechada para a área do círculo:

$$A = \frac{C}{2} \cdot r = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2.$$

Sem demora, verificamos que conhecendo previamente a expressão $C = 2\pi r$ alcançamos a fórmula fechada $A = \pi r^2$ para a área do círculo, conforme comentamos anteriormente.

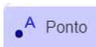
Você já utilizou essa abordagem em alguma de suas aulas? Qual foi a metodologia utilizada? Insta salientar que nos preocupamos em responder essas perguntas antes mesmo de sugeri-las aos leitores deste trabalho. É provável que surgirão diversas respostas para elas, contudo, nossa real intenção com esses questionamentos é incentivar o professor Matemática a refletir sobre suas práticas docentes e encorajá-lo a testar novas abordagens ao introduzir o conceito de área do círculo.

Posto isto, cabe destacar que estamos cientes das dificuldades enfrentadas pelo docente de Matemática no contexto escolar. Apesar disso, gostaríamos de compartilhar uma construção realizada com o auxílio do software *GeoGebra* que se mostrou uma importante ferramenta didática, para apresentar a área do círculo segundo a ideia que acabamos de comentar.

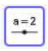
O objetivo da realização dessa atividade junto aos educandos é introduzir o cálculo da área de um círculo por meio de um processo infinito, onde reagrupamos setores circulares idênticos na forma de um retângulo cuja medida da base e altura são elementos conhecidos.

4.4.1 Um Manual de Instruções para Construir no Software GeoGebra

A seguir apresentaremos todos os procedimentos operacionais necessários para a realização dessa construção. Se não houver impedimento, incentivamos o leitor a abrir o software *GeoGebra* a fim de acompanhar de perto a execução de cada comando mencionado no texto. Caso não possua o software baixado em nenhum dispositivo eletrônico, poderá acessá-lo de forma online e gratuita através do endereço <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt>.

Inicialmente, clique no ícone  e selecione a opção 

. Em seguida, clique na origem do sistema de coordenadas para marcar o ponto $A(0,0)$, este ponto será o centro do círculo que vamos construir. Agora, crie um controle deslizante para definir valores para o raio do círculo.

Para isto, clique no ícone  e escolha a opção 

. Logo após, clique na malha quadricular do ambiente virtual de sua escolha para fixar o controle *(sugestão:*

escolha um local afastado do círculo para evitar que a visualização dos elementos seja comprometida). Neste instante, vamos personalizar o controle deslizante. Escreva r para rotular o raio do círculo, defina os valores mínimo e máximo que o raio poderá assumir e seu incremento (isto é, o valor acrescido ou diminuído ao elemento correspondente quando o controle deslizante é acionado). Por fim, para finalizar a personalização clique em OK. Sugerimos os valores apresentados na Figura 39.

Figura 39 – Determinando um controle deslizante para o raio do círculo.

Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Agora, clique na opção  , selecione 

e imediatamente clique no ponto $A(0, 0)$. Observe que, ao realizar estes últimos passos o GeoGebra automaticamente abre uma aba solicitando que seja definida a medida do raio do círculo, sugerimos que escreva exatamente $r = 1$.

Caso escreva o número 1, ao invés de $r = 1$, por exemplo, o controle deslizante não funciona, visto que ele está encarregado de modificar o raio do círculo. Além disso, se você diz que o raio é exatamente igual a 1, não faz sentido r assumir outros valores.

Note que, o círculo gerado possui raio unitário. Porém, ao mexer no controle deslizante podemos alterá-lo de acordo com os valores previamente estabelecidos, isto é, $1 \leq r \leq 5$. Enfatizamos que, ao empregar o controle deslizante em qualquer construção é interessante testá-lo para saber se realmente funciona.

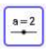
Novamente, aplique a ferramenta  para criar um novo controle deslizante. Dessa vez, será utilizado para escolher o número de lados de polígonos inscritos na circunferência. Por hora, personalize o controle deslizante de acordo com a Figura 40.

Figura 40 – Controle deslizante para o número de lados do polígono inscrito.

Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Denotamos o número de lados dos polígonos inscritos por n, onde $4 \leq n \leq 80$, e o incremento escolhido aumenta ou diminui o número de lados em duas unidades à medida que movemos o controle deslizante, respectivamente, para a direita ou para a esquerda. Cabe destacar que os valores foram escolhidos segundo nossa preferência, caso deseje, poderá customizar do seu jeito desde que faça escolhas coerentes em cada etapa.

Utilize a zona de entrada do GeoGebra para definir θ, que representa o ângulo de cada setor circular, onde $\theta = \dfrac{360°}{n}$. Novamente, utilize a zona de entrada para definir os pontos $P(r, 0)$ e $Q(rcos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$. Ao mexer no controle deslizante n notamos que θ também se modifica.

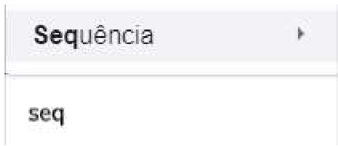
Dando continuidade, crie o primeiro setor circular da circunferência. Para isso, use mais uma vez a ferramenta , só que dessa vez clique na opção 

. Para que a ação se concretize clique, respectivamente, nos pontos $A(0, 0)$, $P(r, 0)$ e $Q(rcos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ e veja o setor circular d se formando.

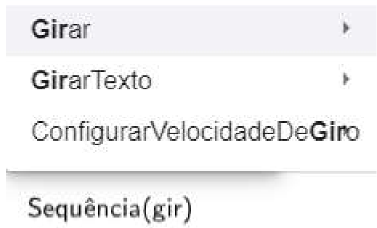
Ao definir valores para n talvez você possa ter ficado um pouco confuso esperando que surgissem polígonos inscritos. Entretanto, o intuito de definir valores para n não é esse. Em verdade, a intenção é determinar um ângulo interno para os setores circulares e garantir que o ponto Q se mova conforme o n se modifique.

Precisamos de bem mais setores para varrer a área do círculo, mas como podemos cria-los? Para criar novos setores circulares basta produzir uma sequência de setores circulares congruentes, esses setores irão cobrir toda circunferência. Tomando como referência o caso inicial para $n = 4$ iremos produzir 4 setores. Mas afinal, como faremos isso? A ideia é simples! Basta rotacionar o setor d no sentido anti-horário criando 3 novos setores e com ele teremos 4 setores.

Todavia, essa ação só será realizada se inserirmos na zona de entrada os seguintes comandos:
1º) comece a digitar a palavra Sequência, antes mesmo de terminar aparecerá a opção para clicar;



2º) em seguida clique na opção Sequência(Valor Final);
3º) dentro dos parênteses comece a digitar a palavra *Girar*, assim que aparecer a opção clique;



4º) logo após clique na opção Girar(Objeto, Ângulo);
5º) escreva dentro dos parênteses as informações destacadas a seguir:

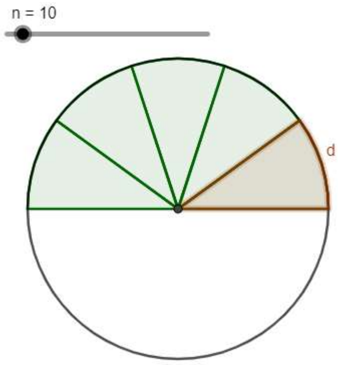
$$\text{Sequência}\left(\text{Girar}(d, t\,\theta), t, 0, \frac{n}{2} - 1\right)$$

A realização dessas etapas possibilita replicar o setor d. Mais uma vez, confirmamos que o número de setores está condicionado ao valor de n. O que fizemos foi criar uma sequência de setores obtidos por meio de uma rotação do setor d. Note que, o ângulo θ é o ângulo da rotação e a variável t representa um contador, onde $0 \leq t \leq \dfrac{n}{2} - 1$.

Cabe frisar que o contador t é um número inteiro, já que, determina a quantidade de setores que estamos tomando em cada sequência. A primeira sequência contém apenas os setores que estão delimitados pela região do primeiro e segundo quadrante do círculo.

Para entender melhor, veja um caso particular, onde $n = 10$ e $r = 3$.

Figura 41 – Fatiando o círculo - Parte 1.



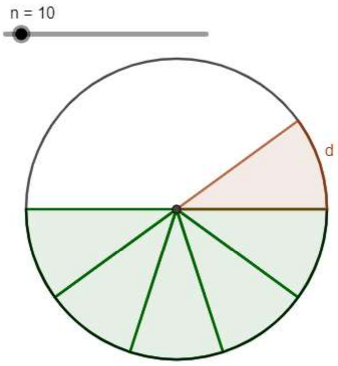
Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Na Figura 41, observamos 5 setores distribuídos entre o 1º e o 2º quadrante do círculo. Essa ilustração advém da função sequência que definimos anteriormente. Observe que $n = 10$, mas quando substituímos na expressão $0 \leq t \leq \dfrac{n}{2} - 1$, obtemos $0 \leq t \leq 4$. Talvez você esteja achando que houve algum equívoco, afinal o contador t está marcando no máximo $t = 4$, porém, na imagem vemos 5 setores. O que houve? Note que, quando $t = 0$ estamos contando com o setor determinado inicialmente, sendo assim, nesse caso, em particular, devemos considerar $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, o que nos dá um total de 5 setores.

Agora, gere os setores que estão compreendidos entre a região do 3º e 4º quadrante. Para realizar esse passo e rotacione o setor d no sentido horário utilizando novamente a função sequência e a função girar. Caso tenha esquecido as particularidades desses comandos retome a leitura dos parágrafos anteriores para relembrar.

Ainda, tomando como referência o caso particular $n = 10$ e $r = 3$, ao digitar o comando na zona de entrada do GeoGebra obtêm-se o resultado apresentado na Figura 42.

Figura 42 – Fatiando o círculo - Parte 2.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

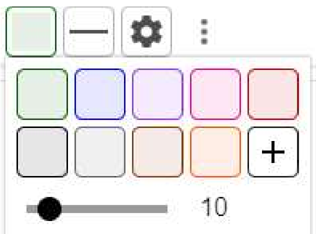
Neste último comando, realizamos algumas alterações na *função sequência.* Ainda assim, é provável que você tenha percebido o que essas modificações causaram ao compará-las com o que fizemos quando replicamos o setor inicial na região delimitada entre o 1º e 2º quadrante.

Ao utilizar a função girar escolhe-se o objeto d para rotacionar e defini-se o ângulo de rotação como $-t \cdot \theta$, onde t é o contador, θ o ângulo de cada setor e o sinal – indica que a rotação será realizada no sentido horário. Por outro lado, definimos $1 \leq t \leq \frac{n}{2}$, isto quer dizer que dessa vez o setor inicial não será contabilizado, já que o mesmo foi contado na sequência anterior.

Desse modo, tendo em vista $n = 10$ encontramos 5 setores circulares definidos pelo contador t inseridos na região delimitada pelo o 3º e o 4º quadrante. Observe que o GeoGebra escolhe automaticamente a mesma cor para os setores das sequências. Contudo, achamos conveniente alterar a cor dos setores que formam cada sequência, mais tarde nossas intenções ficarão mais claras. Para isso, certifique-se que o elemento cuja cor será alterada é aquele que você realmente deseja.

Por exemplo, se quisermos alterar a cor dos setores da última sequência basta clicar na "bolinha" ao lado da função sequência $l2 = \text{Sequência}\left(\text{Girar}(d, -t\ \theta), t, 1, \frac{n}{2}\right)$ e logo após clicar no ícone "cor e transparência" na parte superior da zona de entrada, conforme exibimos na Figura 43.

Figura 43 – Paleta de cores.



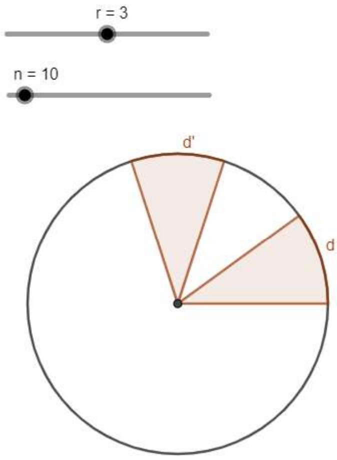
Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Escolha a cor de sua preferência, sugerimos cores diferentes com o intuito de diferenciar com mais eficiência os setores gerados por cada uma das sequências. Além disso, ao mover o cursor de transparência há possibilidade de deixar as cores da imagem mais claras ou mais escuras.

Por enquanto, exibimos duas sequências de setores idênticos, isto é, sequências compostas por setores que possuem a mesma área. Dando continuidade à construção, faremos uma animação com o intuito de comparar essas áreas. O primeiro passo será deixar o setor d na vertical.

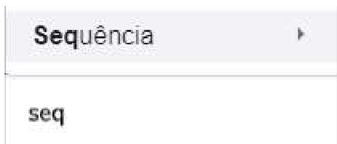
Para realizar essa ação utilize mais vez a *função girar*. Basta começar a escrever girar na zona de entrada que a opção vai aparecer; clique na opção *Girar* e em seguida clique em *Girar(Objeto,Ângulo)*. Escreva entre parênteses, respectivamente, as informações, d e $90° - \frac{\theta}{2}$, para o objeto e ângulo. Desse modo, determinamos d' que nada mais é do que uma cópia do setor d na posição vertical, conforme mostramos na Figura 44.

Figura 44 – Fatiando o círculo - Parte 3.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

A próxima ação a ser realizada é transladar o setor d' e suas cópias de modo tal que se consiga visualizar fora do círculo. Todavia, é necessário inserir na zona de entrada os seguintes comandos:
1º) digite a palavra Sequência, antes mesmo de terminar aparecerá a opção para clicar;



2º) em seguida clique na opção Sequência(Valor Final);
3º) dentro dos parênteses comece a digitar a palavra *Transladar*, assim que aparecer a opção clique;

4º) logo após clique na opção Transladar(Objeto, Vetor);
5º) finalmente, escreva dentro dos parênteses as seguintes informações:

$$\text{Sequência}\left(\text{Transladar}\left(d', \left(1.5\, r + t \cdot 2\, r\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right), -\frac{r}{2}\right)\right), t, 1, \frac{n}{2}\right)$$

.

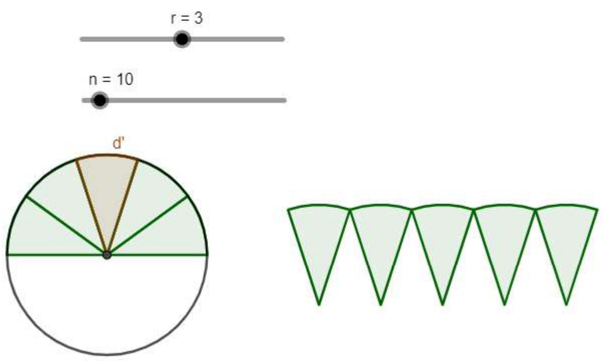
Este comando define uma composição entre a função sequência e a função translação. Note que, o que fizemos foi transladar o objeto d' na direção do vetor que possui coordenadas $\left(1,5 \cdot r + t \cdot 2rsen\left(\frac{\theta}{2}\right), -\frac{r}{2}\right)$. Mas afinal, porque o vetor escolhido possui tais coordenadas? A resposta é simples! Apenas por preferência, isto quer dizer que você pode escolher um outro vetor para definir a direção de translação do setor circular.

No entanto, ao escolher as coordenadas do vetor devem ser tomadas algumas precauções, por exemplo, tome cuidado para não haver nenhuma intersecção entre a fila de setores e o círculo. Caso contrário, isso poderia prejudicar a visualização.

Pensando nisso, escolhemos como abscissa $\left(1,5 \cdot r + t \cdot 2r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$. Essa informação permite empurrar os setores para uma região externa ao círculo e a sua direita, onde a primeira cópia está a $1,5 \cdot r$ unidades de distância do setor d' e os demais estão distribuídos em fila de acordo com a parcela $\left(t \cdot 2r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$, onde t é o contador da sequência e o fator $\left(2r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ garante que não haverá intersecção entre os demais setores da fila.

Em caso de dúvidas atribua outros valores, retire ou altere elementos desse comando para visualizar as modificações. Certamente, você perceberá alguns padrões importantes que possibilitam o cumprimento dos nossos objetivos. Após executar as ações obtemos o resultado apresentado na Figura 45.

Figura 45 – Reagrupando setores circulares.

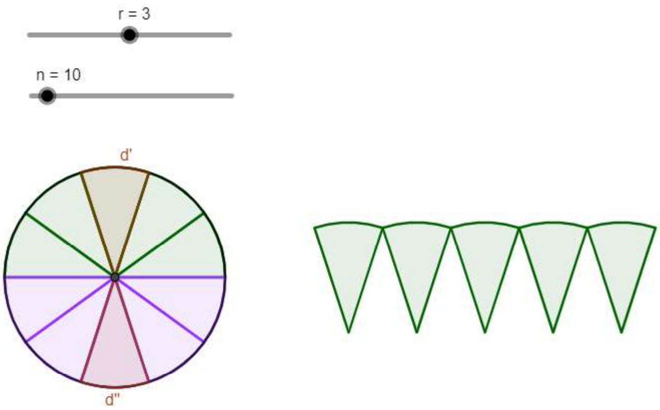


Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Agora, realize o mesmo processo para os setores que estão na parte inferior, isto é, na região delimitada pelo 3º e 4º quadrante. De modo análogo, vamos transladar esses setores de modo tal que eles permaneçam externos ao círculo e encaixados aos setores que transladamos anteriormente.

Tendo em vista a realização desse passo inverta o setor d', isto é, rotacione d' em 180°. Como podemos realizar esta ação? Utilize novamente o comando *Girar*, clique na opção *Girar(Objeto,Ângulo)*, onde o objeto é d' e o ângulo de rotação é 180°. Com isso, o setor d” foi determinado, onde d” representa o setor d' após um giro de 180°, observe a Figura 46.

Figura 46 – Determinando novas fatias.



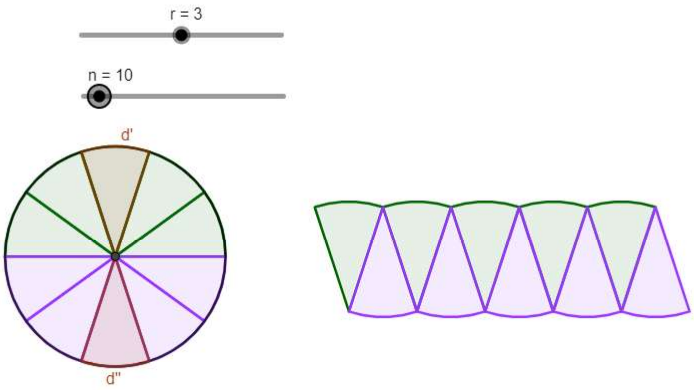
Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Agora, crie uma sequência com o intuito de encaixar os setores da parte inferior aos setores que foram transladados anteriormente. Para realizar esse passo utilize novamente a composição entre a função sequência e a função transladar. Escreva na zona de entrada o seguinte comando:

$$\text{Sequência}\left(\text{Transladar}\left(d'', \left(1.5\,r + r\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + t \cdot 2\,r\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right),\ r\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{r}{2}\right)\right), t, 1, \frac{n}{2}\right)$$

Observe que algumas modificações foram realizadas para que os setores fossem colocados na posição correta e estejam perfeitamente encaixados, entre essas modificações vamos destacar as parcelas $\left(r \cdot \text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$ e $\left(r \cdot cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$ que adicionamos, respectivamente, aos valores da abscissa e ordenada do vetor. Esta modificação permite o encaixe perfeito entre os setores das duas sequências. Veja a Figura 47.

Figura 47 – Reagrupando as fatias em forma de paralelogramo.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Caso tenha restado alguma dúvida o incentivamos a realizar modificações nos comandos e analisar cuidadosamente o que tais modificações acarretam na construção. Além do mais, você pode pensar nessa construção utilizando outras estratégias, aqui trouxemos apenas algumas sugestões e um modelo pronto para ser utilizado em sua aula.

5 Uma Proposta de Disciplina Eletiva

Neste capítulo apresentaremos uma proposta de disciplina eletiva que aplicamos no 3º ano do Ensino Médio Integrado do Curso Técnico em Edificações da Escola Técnica Estadual Clóvis Nogueira Alves, localizada no sertão pernambucano na cidade de Serra Talhada. O período de aplicação da disciplina se deu durante o primeiro semestre letivo do ano 2024.

Como já está bastante difundido com o Novo Ensino Médio as *eletivas* são disciplinas que os discentes escolhem de acordo com a sua preferência e que não estão dentro do itinerário formativo seguido pelo educando. Tais disciplinas seguem a mesma ideia das disciplinas *optativas* que estão presentes nos cursos de nível superior e possibilitam ao estudante a ampliação dos seus conhecimentos sobre assuntos específicos.

Por meio da disciplina eletiva *Investigando Processos Infinitos*, aspiramos estudar mais profundamente alguns temas abordados no Ensino Médio, a título de exemplo, o cálculo de certas áreas por meio de aproximações e a generalização do conceito de reta tangente. Além disso, percebemos a possibilidade de investigar outros temas como o conceito de velocidade instantânea.

O texto apresentado nas próximas linhas deste capítulo foi diluído em seis seções e representam o ponto central desta dissertação.

5.1 Por que Estudar Processos Infinitos?

Ao realizar a leitura do artigo intitulado, *Infinite Processes in Elementary Mathematics How Much Should We Tell the Children?* (GARDINER, 1985), encontramos respostas para os seguintes questionamentos: por que investigar processos infinitos no Ensino Elementar da Matemática? Até onde podemos ir? Abordar essa temática no Ensino Básico é realmente importante?

Para Gardiner (1985), é fato que a Matemática em todos os seus níveis de aprofundamento depende de processos infinitos. Contudo, este fato tem sido tradicionalmente esquecido e pouco divulgado no Ensino Básico. Essa crítica nos impulsiona a refletir sobre as nossas práticas docentes e a pensar na relevância dessa temática no ensino da Matemática.

É inegável que abordar ideias relacionadas à Matemática dos processos infinitos implica grandes desafios para os professores do Ensino do Básico que, além de gerir muito bem o seu tempo e planejar as aulas, precisam rever o seu próprio entendimento acerca do tema, preparar o material de forma adequada e analisar os melhores recursos didáticos a serem utilizados.

Segundo Gardiner (1985), durante a idade escolar o aluno tem acesso a várias experiências iniciais cujo contexto possibilita a abordagem de processos infinitos, podemos citar como exemplos, o próprio processo de contagem que, fornece ao educando seu primeiro vislumbre de um processo potencialmente interminável; o tempo e o calendário que, nos proporcionam a experiência de uma repetição cíclica e a intuição de algo infinito e sem começo; a reta numérica que, nos permite explorar a ideia de um processo infinito que, aparentemente preenche um intervalo finito cada vez de forma mais densa; medir certas áreas e volumes por meio de aproximações, conhecer número especiais como o número π, entre outros assuntos.

De acordo com Gardiner (1985), não há necessidade de introduzir estritamente a Matemática dos processos infinitos a nível escolar. Mas, os alunos devem, de alguma forma, ser alertados para diferenças entre "contos de fadas" e a Matemática utilizável.

Mas afinal, neste contexto, o que vem a ser um conto de fadas? Embora os estudantes vivenciem algumas experiências interessantes sobre processos infinitos na grande maioria das vezes essas experiências não são bem fundamentadas, acarretando como consequência imediata ideias equivocadas sobre a Matemática dos processos infinitos.

Certamente, você já ouviu por parte dos alunos coisas do tipo: "o infinito é o maior dos números", " $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ é na verdade uma soma finita muito longa cujo valor é sempre um pouco menor que 2", "o círculo é um polígono regular com infinitos lados" ou "a inclinação da reta tangente em A é a inclinação da reta AB quando $B = A$".

Após ouvir tais afirmações qual é o melhor caminho a seguir? Será possível abordar essas ideias intuitivamente e ajudar os nossos alunos do Ensino Básico a compreenderem a Matemática dos processos infinitos? Segundo Gardiner (1985) "nenhum professor sensível tentaria banir tais ideias: elas são a matéria prima sobre a qual devemos construir. Mas o aluno não deve ser encorajado a acreditar que tem algo a ver com a Matemática".

Por meio da nossa proposta de eletiva, visualizamos a possibilidade de confrontar os educandos com essa temática e encorajá-los a discutir e refletir sobre as implicações de problemas clássicos que abordamos nos capítulos anteriores desta dissertação.

Outro ponto importante é a possibilidade de explorar, intuitivamente, elementos do Cálculo e possibilitar ao educando um primeiro contato com essa componente tão relevante na Matemática dentro de um contexto atual.

Na *RPM 18*, o professor Geraldo Ávila, escreveu na seção *As Coisas Que Ensinamos*, o artigo intitulado *O ensino de Cálculo no 2º grau* (ÁVILA, 1991). Para Ávila (1991) "descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual".

Embora o cenário educacional brasileiro vivenciado por Ávila na época em que escreveu seu artigo seja outro, percebemos que hoje em dia, com a criação do Novo Ensino Médio, podemos utilizar disciplinas eletivas para propor uma investigação mais profunda de temas que estão presentes no currículo.

Contudo, insta salientar que ao propor a disciplina eletiva *Investigando Processos Infinitos* não temos pretensão de defender o ensino do Cálculo no Ensino Médio. Mas, percebemos à luz de muitos temas abordados que ele está presente. Isso nos motiva a investigar, intuitivamente, alguns elementos do Cálculo, levando em conta conhecimentos prévios que o aluno carrega em sua bagagem pedagógica.

Por exemplo, podemos utilizar a fórmula fechada utilizada para calcular a área do círculo para explorar, intuitivamente, a noção de limite. Também podemos generalizar o conceito de reta tangente a uma curva aproximando-a por meio de um número indefinido de retas secantes.

Além do mais, nos dedicamos a buscar metodologias que possam despertar o interesse do estudante acerca dessa temática. Durante a realização das aulas utilizamos recursos tecnológicos, softwares, materiais manipuláveis e materiais didáticos lúdicos que foram produzidos exclusivamente para o desenvolvimento das aulas da disciplina.

5.2 O Plano de Curso

Convidamos o leitor a analisar cuidadosamente algumas ideias e refletir sobre o plano de curso da nossa proposta de eletiva. Esse planejamento nos permite apresentar todas as principais informações acerca da disciplina e as ações realizadas aula por aula. Com essa proposta, sugerimos aos colegas docentes uma nova alternativa de divulgação da Matemática.

ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL DE PERNAMBUCO
ETE CLÓVIS NOGUEIRA ALVES | SERRA TALHADA – PE

1. DADOS DA COMPONENTE			
Disciplina Eletiva Investigando Processos Infinitos	Ano: 2024	Período: 2024.1	Turma: 3º ano do Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico em Edificações
Carga Horária total: h/a: 40 h/r: 33		Professor: Tiago Emanoel Melo Pereira	

2. JUSTIFICATIVA DA COMPONENTE CURRICULAR

É inegável que a Matemática em todos os seus níveis de aprofundamento depende de processos infinitos. Ainda quando éramos crianças tivemos nossos primeiros contatos com processos infinitos quando começamos a contar, escrever os números, conhecer números finitos cada vez maiores; aprender sobre o tempo, o calendário e outros processos que contribuem para a nossa noção de algo infinito e sem começo; à medida que fomos crescendo e avançando as etapas escolares estudamos os conjuntos numéricos, a reta numérica, comprimentos e medições, processos para a obtenção de áreas e volumes, sequências numéricas e tantos outros conceitos relacionados a processos infinitos.

No entanto, em diversas ocasiões tais processos têm sido habitualmente omitidos, em especial, quando a Matemática Elementar é apresentada para as crianças e adolescentes no Ensino Básico. A proposta de disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos, toma forma e torna-se viável quando consideramos a importância de desenvolver competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular que estão atreladas a essa temática.

No passado o Cálculo esteve presente no currículo do Ensino Médio e alguns estudiosos defendem fortemente que essa componente curricular jamais deveria ter sido descartada. Na edição número 18 da Revista Professor de Matemática – RPM18, o professor Geraldo Ávila, escreveu um artigo intitulado As Coisas Que Ensinamos, onde na época abordou sobre o ensino do Cálculo no 2º grau. Para Ávila,

> Descartar o Cálculo do ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

Desde o período de publicação desse artigo até os dias atuais já ocorreram várias mudanças na Educação Brasileira, sobretudo nos currículos de Matemática do Ensino Básico. Ainda assim, as ideias apresentadas não devem ser desprezadas, especialmente, quando pensamos no Novo Ensino Médio e nas possibilidades de alimentar o currículo com disciplinas eletivas que o docente possui autonomia para criar, desenvolver e aplicar.

É importante destacar que nossa pretensão com essa proposta de disciplina eletiva não é fazer apologia ao ensino do Cálculo no Ensino Médio, mas perceber à luz de muitos assuntos que são estudados que o Cálculo está presente. Nessa perspectiva enxergamos a possibilidade de abordar a Matemática dos processos infinitos no Ensino Básico de modo que possamos explorar intuitivamente elementos do Cálculo ao estudar mais profundamente temas abordados no Ensino Médio.

Entendemos que a inserção da disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos no currículo de Matemática do Ensino Médio irá proporcionar ao estudante o desenvolvimento de aprendizagens previstas na BNCC de forma construtiva, sistematizada e lúdica, possibilitando o aprimoramento desses estudantes para o cenário acadêmico.

Nesse contexto, destacamos as competências específicas 1 e 3 da área de Matemática e a competência específica 1 da área de Ciências da Natureza. A seguir apresentamos a descrição de cada uma dessas competências:

Área de Matemática

- Competência Específica 1: utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral;
- Competência Específica 3: utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Área de Ciências da Natureza

- Competência Específica 1: analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e/ou global.

Relacionadas a cada uma dessas competências indicaremos e descreveremos, posteriormente, as habilidades a serem desenvolvidas.

3. OBJETIVO GERAL DA COMPONENTE CURRICULAR

Estudar mais profundamente temas abordados no Ensino Médio, dentre eles, o cálculo de certas áreas por meio de aproximações e o conceito de reta tangente. Com o estudo mais detalhado desses temas enxergamos a possibilidade de investigar, intuitivamente, a ideia de limite e introduzir o conceito de velocidade instantânea.

4. OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA COMPONENTE CURRICULAR

1. Mostrar a importância do estudo de processos infinitos no Ensino Básico;
2. Apresentar aspectos históricos com o intuito de entender como a Matemática dos processos infinitos se desenvolveu ao longo do tempo;
3. Utilizar softwares computacionais, o GeoGebra e a Planilha Excel, para investigar intuitivamente a ideia de limite;
4. Usar, intuitivamente, a ideia de limite para explorar mais profundamente o cálculo de certas áreas e o conceito de reta tangente;
5. Estabelecer uma relação entre os conceitos de reta tangente e velocidade instantânea;
6. Determinar uma expressão para calcular a área do círculo e a área sob um arco de parábola;
7. Apresentar aos educandos materiais textuais no formato de Histórias em Quadrinhos (HQ's) e um material manipulável no formato de jogo a fim de instigar a curiosidade dos educandos sobre os temas abordados.

5. HABILIDADES DA BNCC A SEREM DESENVOLVIDAS
1. (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise de gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais; 2. (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximações por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplica-las em situações reais (como remanejamento e distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais; 3. (EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.
6. EMENTA
1. Uma Breve Introdução aos Processos Infinitos ▪ O que são processos infinitos?; ▪ Como tais processos surgiram na Matemática?; ▪ Panorama geral de alguns problemas clássicos. 2. O Problema da Tangente ▪ Entender e generalizar o conceito de reta tangente; ▪ Determinar a reta tangente a uma curva dada aproximando-a por meio de um número indefinido de retas secantes; ▪ Utilizar softwares computacionais, o GeoGebra e a Planilha Excel, para encontrar a inclinação da reta que tangencia uma curva dada. 3. O Problema da Velocidade Instantânea ▪ Relembrar importantes conceitos e expressões matemáticas apresentadas no estudo da Cinemática com a finalidade de preparar os alunos para estudar o conceito de velocidade instantânea; ▪ Apresentar o problema de forma contextualizada; ▪ Usar, intuitivamente, o conceito de reta tangente para explorar o problema da velocidade; ▪ Concluir que a inclinação da reta secante é a velocidade média e a inclinação da reta tangente é a velocidade instantânea. 4. O Problema da Área ▪ Abordar aspectos históricos; ▪ Usar, intuitivamente, a ideia de limite para encontrar boas aproximações para o número π; ▪ Realizar boas aproximações com o intuito de determinar fórmulas fechadas para a área de um círculo e a área sob um arco parabólico; ▪ Utilizar softwares computacionais para investigar a área do círculo, considerando os seguintes casos: i. Utilizando polígonos regulares inscritos e circunscritos;

ii. Utilizando setores circulares reagrupados no formato de um retângulo.

5. Explorando Ludicamente a Matemática dos Processos Infinitos
   - Elaborar e apresentar materiais textuais no formato de Histórias em Quadrinhos (HQ's) sobre cada um dos problemas estudados;
   - Elaborar e apresentar materiais manipuláveis no formato de jogo.

7. PLANO DE ENSINO

DATA	CONTEÚDOS E AÇÕES REALIZADAS	CH
06/02/2024	As aulas deste dia foram destinadas a divulgação de todas as disciplinas eletivas ofertadas pela escola. O processo de divulgação ocorre com o intuito de apresentar aos alunos um panorama geral do que será estudado em cada uma das disciplinas eletivas ofertadas durante o semestre letivo. O processo de divulgação é muito importante para nortear a escolha dos alunos.	2 h/a
13/02/2024	**Feriado de Carnaval**	2 h/a
20/02/2024	Aula 01 e 02: Aplicação do primeiro sondando a aprendizagem. Nesta primeira atividade de sondagem avaliamos os conhecimentos prévios dos alunos sobre o problema da tangente.	2 h/a
27/02/2024	Aula 01 e 02: Utilizar o software GeoGebra e a planilha Excel como ferramenta didática para investigar, intuitivamente, o problema da tangente.	2 h/a
05/03/2024	**Formação de professores**	2 h/a
12/03/2024	Aula 01 e 02: Aplicação do segundo sondando a aprendizagem. Nesta segunda atividade de sondagem avaliamos os "conhecimentos prévios" dos alunos sobre o problema da velocidade instantânea.	2 h/a
19/03/2024	Aula 01 e 02: Breve revisão sobre alguns importantes conteúdos considerados pré-requisitos para o desenvolvimento do problema da velocidade instantânea. Os seguintes conteúdos foram apresentados: I. Velocidade média; II. O conceito de Movimento Uniforme (MU); III. O conceito de Movimento Uniformemente Variado (MUV); IV. Função horária dos espaços no MUV; V. O gráfico da função $S \times t$ no MUV.	2 h/a
26/03/2024	Aula 01 e 02: Utilizar o software GeoGebra e a planilha Excel para investigar, intuitivamente, o problema da velocidade instantânea.	2 h/a
02/04/2024	Aula 01: Breve revisão sobre Queda Livre. Abordamos os seguintes tópicos: I. O conceito de Queda Livre; II. As condições ideias para a ocorrência do movimento; III. A fórmula $H(t) = 4{,}9 \cdot t^2$; IV. A representação gráfica do movimento. Aula 02: Apresentação e resolução de um problema motivador envolvendo Queda Livre, cujo objetivo é instigar o educando a pensar no conceito de velocidade instantânea para resolvê-lo.	2 h/a

09/04/2024	Aula 01 e 02: Aplicação do terceiro sondando a aprendizagem. Nesta segunda atividade de sondagem avaliamos os conhecimentos prévios dos alunos sobre o problema da área.	2 h/a
16/04/2024	**Semana de Avaliações**	2 h/a
23/04/2024	Aula 01 e 02: Utilizar o software GeoGebra e a planilha Excel para analisar o perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos num círculo de raio unitário, com o objetivo de determinar boas aproximações para o número π. A partir dessas ideias introduzimos, intuitivamente, a noção de limite.	2 h/a
30/04/2024	Aula 01: Realizar uma breve introdução histórica sobre a área do círculo; Aula 02: Utilizar o software GeoGebra para investigar a área do círculo aproximando-o por meio de polígonos inscritos e circunscritos.	2 h/a
07/05/2024	**Mudança de horário prevista no calendário escolar** No dia 06/05 é feriado municipal em Serra Talhada – PE, para evitar déficit de carga horária, no dia 07/05, iremos trabalhar com o horário da segunda-feira (06/05). **Obs.:** com essa alteração no horário ficamos impossibilitados de realizar as aulas da disciplinas eletiva neste dia.	2 h/a
14/05/2024	Aula 01 e 02: Utilizar o software GeoGebra para investigar a área do círculo quando o repartirmos em um número indefinido de setores circulares. Em seguida, realizar uma atividade em grupo utilizando materiais manipuláveis (o jogo quebra-cabeça de setores) com o intuito de verificar o entendimento dos educandos sobre as explanações realizadas com o auxílio do GeoGebra.	2 h/a
21/05/2024	Aula 01: Utilizar o software GeoGebra para introduzir o problema da área tendo em vista determinar a área sob um arco de parábola; Aula 02: Investigar padrões observados no GeoGebra a fim de definir estratégias para determinar uma fórmula fechada para a área sob um arco de parábola.	2 h/a
28/05/2024	Aula 01 e 02: Relembrar e utilizar as estratégias mencionadas na aula anterior para determinar uma fórmula fechada para calcular a área sob um arco de parábola;	2 h/a
04/06/2024	Aula 01: Aplicar atividade de verificação de aprendizagem sobre os conteúdos estudados nas aulas dos dias 21/05 e 28/05; Aula 02: Correção da atividade.	2 h/a
11/06/2024	Aula 01 e 02: Apresentar aos alunos a História em Quadrinhos número 1.	2 h/a
18/06/2024	**Formação de Professores**	2 h/a
25/06/2024	Aula 01 e 02: Apresentar aos alunos a História em Quadrinhos número 2.	2 h/a
26/06/2024	**Reposição da aula do dia 18/06/2024** Aula 01 e 02: Apresentar aos alunos a História em Quadrinhos número 3.	2 h/a
02/07/2024	**Culminância das disciplinas eletivas**	2 h/a

	Este dia foi destinado a apresentação dos resultados obtidos com o desenvolvimento da disciplina eletiva durante o primeiro semestre letivo 2024.1.	
8. METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO		
1. Exercícios individuais de sondagem; 2. Atividades em equipe; 3. Observação do desempenho individual e coletivo nas aulas e atividades desenvolvidas com um todo.		
9. BIBLIOGRAFIA BÁSICA		
[1] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. São Paulo: Atual, 1993. [2] LIMA, Elon Lages et al. Medida e forma em geometria. IMPA/VITAE, 1991. [3] RAMALHO, NICOLAU. TOLEDO. Os Fundamentos da Física Vol.1 Moderna, 2007. [4] WAGNER, Eduardo et al. Temas e Problemas Elementares. 2010.		
10. BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR		
[1] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de Física Básica: Mecânica (vol. 1). Editora Blucher, 2013. [2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo volume 1. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001. [3] STEWART, James. Cálculo. Pioneira Thomson Learning, 2006.		

5.3 Sondando a Aprendizagem

Quando propomos e realizamos atividades de sondagem tornamos os nossos alunos parte ativa do processo de ensino e aprendizagem. Com esse intuito, desenvolvemos três atividades de sondagem para conhecer e analisar as dificuldades individuais e coletivas da turma sobre os problemas que abordaremos nas aulas da disciplina.

A esse conjunto de atividades demos o nome *Sondando a Aprendizagem*. Elaborar os itens que compõem essas atividades não é uma tarefa simples, visto que, conforme comentamos em outros momentos, a temática abordada é uma novidade para os alunos.

Ao elaborar os itens buscamos apresentar o máximo de detalhes e informações possíveis para que o educando pudesse visualizar certos padrões e realizar inferências. A criação de gráficos, tabelas e imagens tornou as questões mais compreensíveis e permitiu analisar ideias mais abstratas.

Após a realização das atividades de sondagem nos preocupamos em analisar as respostas segundo dois critérios:

(i.) Revisão das respostas individuais;

(ii.) Identificação de erros recorrentes.

Com a *revisão das respostas individuais* conseguimos identificar as dificuldades apresentadas por cada educando. A *identificação de erros recorrentes* nos permite detectar quais são os conteúdos prioritários a serem trabalhados e traçar um panorama mais geral das demandas da turma.

Desse modo, conseguimos identificar quais itens tiveram maior e menor índice de acertos e consequentemente, os conceitos que foram menos compreendidos. A partir dessa análise podemos definir qual é o melhor planejamento a seguir e como devemos elaborar as sequências didáticas de forma adequada. Veja o *sondando a aprendizagem* no Apêndice A.

5.4 Utilizando Softwares para Investigar Processos Infintos

Hoje em dia, manter os alunos concentrados durante as aulas tem se tornado cada vez mais desafiador. Por que isso tem ocorrido com tanta frequência? Alguns dos possíveis motivos são a falta de interesse pela disciplina, a abstração dos conteúdos apresentados e a pouca diversificação das estratégias de ensino.

De fato, não podemos afirmar que a utilização de tecnologias digitais no ensino da Matemática é a solução para todos esses problemas. Todavia, podemos obter resultados exitosos se recorrermos aos softwares como estratégias de ensino.

Tendo isso em mente, procuramos utilizar tecnologias digitais durante as aulas da eletiva com o intuito de proporcionar aos educandos uma visualização mais ampla e intuitiva de conceitos que não são tão simples de entender analisando apenas a teoria.

A seguir, apresentaremos duas subseções onde vamos comentar brevemente sobre dois softwares, o *GeoGebra* e a *Planilha Excel*, que utilizamos em nossas aulas.

5.4.1 O Software GeoGebra

O *GeoGebra* é um software dinâmico de Matemática que fornece em sua plataforma um ambiente acessível e interativo permitindo a realização de várias construções matemáticas. Por meio dessas construções, podemos facilmente explorar conceitos de forma intuitiva, realizar cálculos e criar gráficos a fim de ilustrar e resolver problemas.

Conforme apresentamos no *plano de curso*, utilizamos o software para investigar, intuitivamente, o *problema da tangente* e o *problema da velocidade instantânea*. Além disso, por meio do GeoGebra investigamos o *problema da área* e visualizamos soluções para determinar uma fórmula fechada para a área sob um arco de parábola e a expressão para calcular a área do círculo. Também o utilizamos na elaboração das atividades de sondagem e na confecção de outros materiais didáticos que utilizamos.

O software mostrou-se uma ferramenta bastante prática e acessível. Além de ser gratuito, possui App para smartphones, pode ser instalado em computadores permitindo o acesso offline e ainda pode ser acessado de forma online através do endereço eletrônico <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt>.

A utilização do *GeoGebra* depende do desenvolvimento de duas habilidades específicas:

(i.) Conhecer o básico de Matemática, em especial, para cumprir com os nossos objetivos, ter conhecimento sobre certos tópicos de Geometria Plana, Geometria Analítica e Funções;

(ii.) Estar familiarizado com o uso do computador ou dispositivos móveis.

É bem verdade que algumas construções que levamos para a sala de aula podem não ser tão simples de executar. No entanto, pensando em construções mais acessíveis percebemos que incentivar o aluno a "mexer" no *GeoGebra* pode facilitar sua aprendizagem.

Utilizando seu próprio smartphone, o estudante, poderá repetir aquela construção realizada pelo professor. E porque não pensar em modificar valores, elementos e adicionar novas informações? Dessa forma, o aluno pode se beneficiar da sua facilidade em lidar com a tecnologia e entender a Matemática por trás de cada ação realizada.

5.4.2 A Planilha Excel

A *Planilha Excel* é um programa que nos permite organizar e analisar dados, realizar cálculos, criar tabelas e gráficos. Incluímos esse software em nossas aulas com o intuito de realizar cálculos de maneira mais eficiente e obter uma melhor visualização dos resultados encontrados.

Nosso principal interesse em sua utilização, se deu durante as aulas que comentamos intuitivamente a ideia de *limite*. Apesar de não ter sido projetado com esse intuito, o Excel, mostrou-se muito eficaz para realizar aproximações numéricas de limites. Mas afinal, como tais aproximações podem ser realizadas?

Podemos criar tabelas em que os valores são calculados cada vez mais próximos de um determinado ponto. Ao organizar estes dados percebemos como esses valores tendem a se aproximar cada vez mais de um certo número.

5.5 Produtos Educacionais como Estratégias de Intervenção

Os produtos educacionais são ferramentas didáticas criadas com o intuito de melhorar o processo de ensino e aprendizagem. Durante a realização das aulas da eletiva, percebemos a necessidade de apresentar aos estudantes materiais didáticos que instigassem seu interesse pela temática abordada e facilitassem o seu entendimento.

Pensando nisso criamos dois tipos de produtos educativos, são eles:

(i.) **Material textual** no formato de História em Quadrinhos (HQ's);

(ii.) **Material manipulável** tipo quebra-cabeças.

O *material textual* foi utilizado durante as revisões finais dos conteúdos, isso possibilitou ao aluno rever seus conhecimentos de forma leve e descontraída.

Para contemplar cada um dos problemas estudados durante as revisões, sentimos a necessidade de elaborar três HQ's, cada uma delas abordando a temática dos *processos infinitos* para investigar o *problema da tangente*, o *problema da velocidade instantânea* e o *problema da área*.

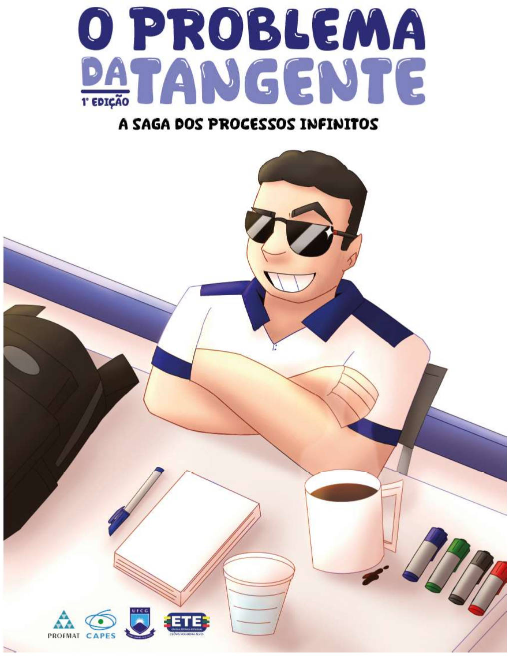
O *material manipulável* foi confeccionado com intuito apresentar uma forma diferente de encontrar uma fórmula fechada para se obter a área do círculo. O detalhe é que já havíamos resolvido esse problema utilizando o software GeoGebra, inclusive, no Capítulo 4 registramos um manual de instruções para que o leitor possa realizar essa construção.

Nas próximas subseções, apresentaremos um breve resumo sobre cada uma das HQ's e mais informações sobre o quebra-cabeça de setores.

5.5.1 HQ 1 - O Problema da Tangente

Por meio desta HQ, utilizamos a noção intuitiva de limite para apresentar um conceito mais geral para reta tangente. A leitura proporcionou aos alunos relembrar conceitos estudados em aulas da disciplina e a utilizar o GeoGebra, já que exibimos um manual com instruções para realizar algumas construções mais simples, entre elas: construir uma reta tangente à circunferência dado um ponto; construir retas secantes à circunferência dados dois de seus pontos e construir gráficos de funções. Ao analisar o gráfico de outras funções, como exemplo, a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$, o aluno percebeu a necessidade de generalizar o conceito de reta tangente. Veja a versão completa da HQ 1 no Apêndice B.

Figura 48 – Capa da HQ 1.



Fonte: O Autor

5.5.2 HQ 2 - O Problema da Velocidade Instantânea

Ao realizar a leitura desta HQ, o estudante poderá relembrar alguns conceitos da Cinemática estudados na disciplina de Física geralmente abordados no 1º ano do Ensino Médio, a título de exemplo, os conceitos de Velocidade Média e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Após relembrar desses conteúdos, o estudante poderá dar os primeiros passos para compreender o conceito de velocidade instantânea.

A ideia de ilustrar uma situação real para investigar o problema tornou o texto mais acessível e atrativo. Com isso, conseguimos aplicar um modelo abstrato para resolver uma situação concreta do cotidiano.

A principal ideia apresentada é a possibilidade de determinar intuitivamente a velocidade de um móvel em um determinado instante por meio de aproximações. Para cumprir com esse objetivo apresentamos o gráfico da função que descreve o movimento do móvel e tabelas onde dados que obtemos por meio de cálculos estão organizados.

Além disso, novamente, utilizamos a noção intuitiva de limite investigar o problema da velocidade instantânea e relacioná-lo com o problema da tangente. Veja a versão completa da HQ 2 no Apêndice C.

Figura 49 – Capa da HQ 2.

Fonte: O Autor.

5.5.3 HQ 3 - O Problema da Área

O enredo apresentado nesta HQ foi elaborado com o intuito de investigar o cálculo de certas áreas por meio de aproximações. Aproveitamos a oportunidade para divulgar alguns feitos de importantes personagens e acontecimentos que fizeram parte da História da Matemática.

Realizamos uma breve explanação sobre o *problema da quadratura do círculo* e a *área sob um arco de parábola*. Utilizamos construções realizadas via software GeoGebra a fim de facilitar a visualização de cada um desses problemas e em alguns casos dispomos as imagens sequencialmente para que o aluno consiga verificar a existência de certos padrões.

Ao investigar o problema da área conseguimos utilizar temas já conhecidos pelos discentes para introduzir, intuitivamente, a noção de limite. Além do mais, notamos que a HQ se mostrou uma importante ferramenta de revisão dos conteúdos apresentados durante as aulas da disciplina. Veja a versão completa da HQ 3 no Apêndice D.

Figura 50 – Capa da HQ 3.

Fonte: O Autor

5.5.4 O Quebra-Cabeça de Setores Circulares

Com o auxílio do GeoGebra dividimos círculos em setores circulares. Para facilitar a visualização de possíveis padrões e tornar o material mais dinâmico construímos oito configurações distintas.

Cada configuração é representada por círculos de mesmo tamanho e diferem entre si apenas pelo seu número de setores. Os círculos possuem $4, 6, 8, 10, 12, 24, 36$ ou 48 setores. A fim de deixar o material mais lúdico transformamos círculos de $2n$ setores em pizzas de $2n$ fatias.

Este material foi encaminhado para a gráfica e impresso em chapas de MDF adesivado de dimensões 21 cm x 21cm e 3 mm de espessura. Também foram confeccionadas oito bolsas plásticas para que pudéssemos guardar em cada uma delas peças de uma mesma configuração.

Figura 51 – Quebra-cabeça de setores.

Fonte: O Autor.

Na próxima seção apresentaremos uma sequência didática onde o jogo *quebra-cabeça de setores* foi utilizado. Caso o leitor demonstre interesse pelo material, queira confeccioná-lo ou utilizá-lo em suas aulas poderá consultar mais detalhes no Apêndice E.

5.6 Propondo Sequências Didáticas

Nesta seção, apresentaremos duas sequências didáticas que foram planejadas e aplicadas durante as aulas da disciplina. O desenvolvimento dessas sequências visa desenvolver a capacidade de abstração dos educandos e promover a resolução de problemas.

Quando pensamos numa sequência didática, estamos nos empenhando em planejar um conjunto de atividades pedagógicas e recursos didáticos para conduzir o processo de ensino e aprendizagem de modo gradativo. Desse modo, além de ter acesso a novos conhecimentos, o aluno também poderá desenvolver competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular.

A seguir, listaremos e descreveremos cada um dos elementos que irão compor as nossas sequências didáticas:

1. **Público-alvo:** indica a turma em que a sequência será aplicada;

2. **Objetivo geral:** define as metas que desejamos alcançar ao final do processo de ensino e aprendizagem;

3. **Objetivos específicos:** define as ações intermediárias fundamentais para atingir o objetivo geral;

4. **Conteúdos:** indica os temas que serão estudados;

5. **Habilidades da BNCC:** define as competências e habilidades que os educandos deverão desenvolver durante a aplicação da sequência;

6. **Recursos didáticos:** indica os materiais, ferramentas e tecnologias digitais utilizadas durante as aulas;

7. **Metodologia:** define as estratégias pedagógicas utilizadas para promover o ensino e aprendizagem dos conteúdos trabalhados;

8. **Avaliação:** verifica o desempenho do estudante em relação aos objetivos de aprendizagem preestabelecidos;

9. **Duração:** define o tempo necessário para a realização do conjunto de atividades;

10. **Descrição:** lista todas as ações realizadas de forma detalhada durante a aplicação da sequência.

5.6.1 Uma Sequência Didática para Investigar o Problema da Área

Nesta subseção, exibiremos uma das sequências didáticas aplicadas durante algumas aulas da disciplina, onde investigamos o *problema da área*. Exibiremos um planejamento detalhado, propondo, inicialmente uma *atividade de sondagem*, com o intuito de identificar o nível de conhecimento da turma sobre o tema e traçar estratégias de acordo com as demandas individuais e coletivas.

Em outro momento, apresentaremos *aspectos históricos* do conteúdo, a fim de contextualizar o tema e mostrar como os conhecimentos Matemáticos se desenvolveram ao longo do tempo. Dentro da contextualização histórica comentaremos sobre algumas contribuições dos matemáticos gregos da antiguidade que estudaram o círculo e enfatizaremos a importância de personagens da época como Antífon, Eudoxo e Arquimedes.

Em seguida, utilizaremos o software GeoGebra em dois momentos:

(i.) Com o intuito de exibir aproximações realizadas pelos antigos para obter a área do círculo, como calcular áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos;

(ii.) Para repartir o círculo em setores circulares e reagrupá-los com o objetivo de formar um polígono cuja área sabemos calcular.

Ao analisar os resultados obtidos no momento (i.), percebemos a possibilidade de organizar esses dados numa planilha para que o aluno possa observar, a partir das aproximações encontradas, certos padrões numéricos. Com a realização do momento (ii.), achamos conveniente introduzir uma nova etapa que consiste na apresentação de um jogo, o *quebra-cabeça de setores*.

Esta última etapa proporcionou a realização de uma atividade em equipe, promovendo comunicação e colaboração entre os alunos. A confecção de materiais manipuláveis para montar o jogo viabilizou a experimentação de conceitos matemáticos de forma tangível e concreta, facilitando a aprendizagem de conceitos abstratos.

Durante a explanação da sequência achamos interessante comentar sobre algumas respostas apresentadas pelos estudantes na atividade de sondagem e compartilhar as intervenções que foram desenvolvidas.

Agora, veremos mais detalhes sobre como a sequência didática foi desenvolvida, juntamente com algumas orientações de como aplicá-la.

Descrevendo a sequência didática

- **Público-alvo:** Alunos do 3º ano do Ensino Médio.
- **Conteúdo:** O prolema da área.
- **Habilidade da BNCC: (EM13MAT307)** empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximações por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplica-las em situações reais (como remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **Objetivo geral:** Estudar o cálculo da área de um círculo por meio de aproximações.
- **Objetivos específicos:**
  - Abordar, historicamente, o problema da área;
  - Utilizar softwares computacionais para estudar a área do círculo por meio de aproximações sucessivas, considerando os seguintes casos:
    * Utilizando polígonos regulares inscritos e circunscritos;
    * Utilizando setores reagrupados em forma de retângulo.
  - Utilizar material concreto para estudar a área do círculo por meio de aproximações sucessivas, considerando a utilização setores reagrupados em forma de um retângulo.
- **Recursos didáticos:**
  - Notebook;

  - Projetor;
  - Softwares computacionais:
    * GeoGebra;
    * Planilha Excel.
  - Material manipulável:
    * Jogo quebra-cabeça de setores.

- **Duração:**
  - **Etapa 1:** 2 aulas;
  - **Etapa 2:** 2 aulas;
  - **Etapa 3:** 2 aulas.

Etapa por etapa: os procedimentos metodológicos

Etapa 1:

Nesta primeira etapa, realizamos o *sondando a aprendizagem* sobre o problema da área. Essa atividade possui 6 questões, onde avaliamos os conhecimentos prévios da turma sobre o tema. Estruturamos as perguntas da atividade de sondagem sequencialmente de modo que o nível das perguntas aumentasse gradativamente.

Apresentamos imagens para que o aluno pudesse visualizar padrões e facilitar sua compreensão acerca dos questionamentos que foram levantados. Consideramos esta atividade um importante mecanismo pedagógico para definir o planejamento das etapas subsequentes. Conforme já mencionamos na Seção 5.3, disponibilizamos o *sondando a aprendizagem* no Apêndice A.

Etapa 2:

Nesta etapa, realizamos as nossas primeiras aulas expositivas. Durante a *primeira aula* comentamos brevemente alguns aspectos históricos sobre o problema da quadratura do círculo. Falamos sobre as contribuições de Antífon, o Sofista (c. 430 a.C) para resolver este problema; comentamos sobre o Método da Exaustão de Eudoxo e as ideias de Arquimedes que permitiram solucionar o problema.

Durante a *segunda aula* utilizamos recursos tecnológicos, o software GeoGebra e o Excel, para melhor investigar os fatos históricos mencionados na aula anterior. Convidamos o leitor a consultar a construção realizada via GeoGebra no link: <https://drive.google.com/file/d/1XjPNSLKoiKhW14UjNN6_YIxGJeH5X6m2/view?usp=drive_link>.

Por meio dessa construção, os alunos conseguiram obter um entendimento satisfatório sobre as questões 4 e 5 da atividade de sondagem. Na questão 4, elaboramos itens que avaliam respostas e justificativas dos alunos para perguntas e afirmações sobre o seguinte problema: “o que ocorre com um polígono regular de n lados, inscrito num círculo de raio unitário, quando n tende ao infinito?”.

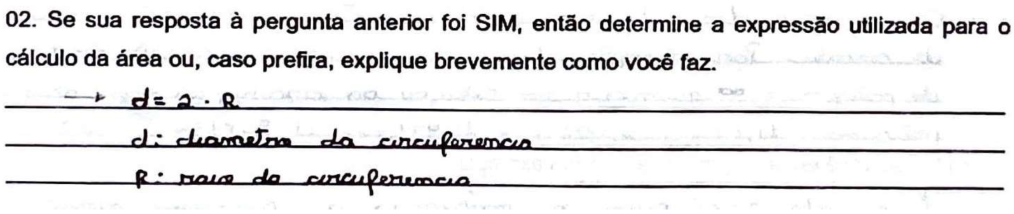
Na questão 5 elaboramos itens com o intuito de avaliar conhecimentos prévios da turma sobre o seguinte problema: “o que ocorre com um polígono regular de n lados, circunscrito num círculo de raio unitário, quando n tende ao infinito?”

A utilização do GeoGebra facilitou a compreensão dos alunos acerca do problema. À medida que o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos aumentava ficava perceptível que a área desses polígonos se aproximavam cada vez mais da área do círculo.

Outras questões da atividade de sondagem que alguns alunos demonstraram dificuldades foram a 1 e 2. A questão 1 pediu para assinalar ( ) SIM ou ( ) NÃO para a seguinte pergunta: “você lembra como calculamos a área do círculo?”

A questão 2 solicitava, caso o aluno tivesse assinalado SIM na questão anterior, que fosse apresentada a expressão utilizada para calcular a área do círculo ou explicasse brevemente como o cálculo era realizado. Constatamos que alguns alunos não lembravam da expressão “$A = \pi \cdot r^2$” e outros responderam de forma errada.

Figura 52 – Uma resposta do aluno G para a questão 2.



02. Se sua resposta à pergunta anterior foi SIM, então determine a expressão utilizada para o cálculo da área ou, caso prefira, explique brevemente como você faz.

→ $d = 2 \cdot R$

d: diametro da circuferencia

R: raio da circuferencia

Fonte: O Autor.

Por exemplo, na resposta apresentada na Figura 52 notamos que o aluno “trocou” a expressão utilizada para calcular a área do círculo pela expressão que utilizamos para determinar o seu diâmetro. Constatamos que muitos alunos que tiveram dificuldades para solucionar a questão 3 que perguntava “qual é a área de um círculo de raio unitário ($r = 1$)?”

Novamente, a utilização das tecnologias digitais permitiu que os alunos encontrassem respostas. Achamos mais interessante responder inicialmente a pergunta 3, e somente depois responder as perguntas 1 e 2. Mas por que fizemos essa escolha?

A construção do GeoGebra que estamos exibindo nesse momento da aula também se trata de um círculo de raio unitário, onde analisamos duas situações:

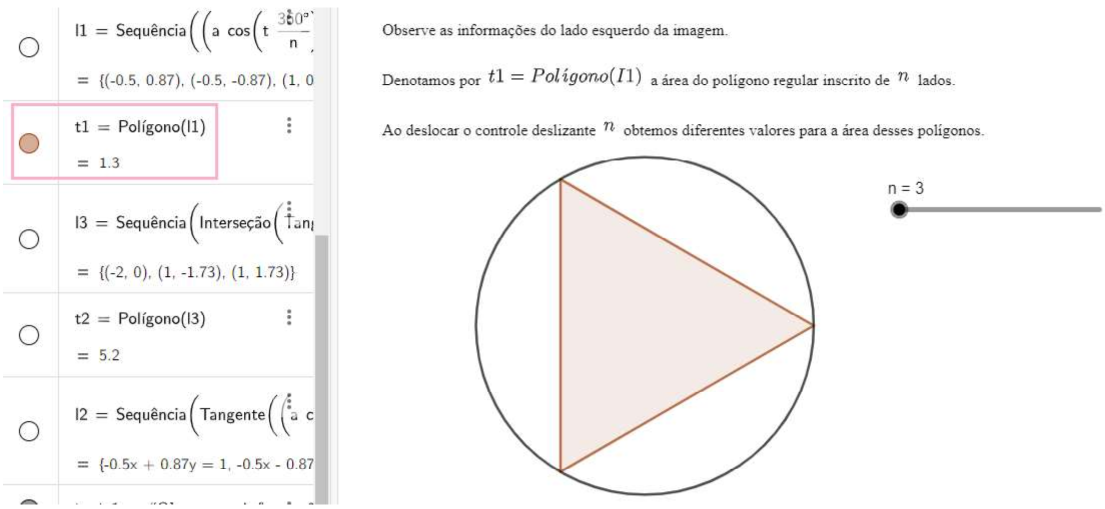
(i.) Caso em que os polígonos regulares estão inscritos;

(ii.) Caso em que os polígonos regulares estão circunscritos no círculo.

Com o GeoGebra determinamos a área dos polígonos inscritos e circunscritos. A partir da realização dessa ação conseguimos coletar informações sobre os valores das áreas de um certo número de polígonos e registrar numa planilha elaborada no Excel.

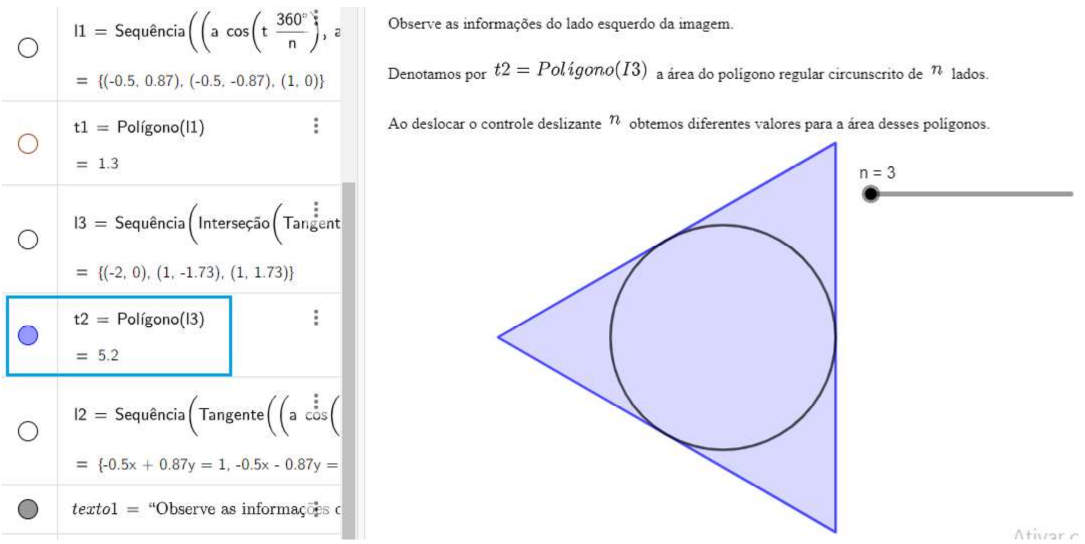
As Figuras 53 e 54 que exibiremos a seguir ilustram o processo de obtenção das áreas e registros realizados no Excel.

Figura 53 – Determinando a área dos polígonos inscritos.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Figura 54 – Determinando a área dos polígonos circunscritos.



Fonte: O Autor via Software GeoGebra.

Figura 55 – Utilizando o Excel para investigar o problema da área.

DETERMINANDO A ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS E CIRCUNSCRITOS NUM CÍRCULO DE RAIO UNITÁRIO		
NÚMERO DE LADOS	ÁREA DOS POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS	ÁREA DOS POLÍGONOS REGULARES CIRCUNSCRITOS
3	1,3	5,2
4	2	4
5	2,38	3,63
6	2,6	3,46
7	2,74	3,37
8	2,83	3,31
9	2,89	3,28
10	2,94	3,25
11	2,97	3,23
12	3	3,22
...	...	...
24	3,11	3,16
...	...	...
36	3,13	3,15
...	...	...
48	3,1326	3,1461
...	...	...
96	3,1394	3,1427

Fonte: O Autor via Planilha Excel.

O que foi constatado com a organização desses dados? Instigamos os alunos a perceberem que à medida que o número de lados desses polígonos, inscritos e circunscritos, aumenta indefinidamente o valor da área desses polígonos convergem para um mesmo valor. Como o círculo possui raio unitário, este valor é o número π, respondendo a questão 3. A partir daí, outra indagação surgiu: "podemos dizer que o círculo é um polígono regular de infinitos lados?"

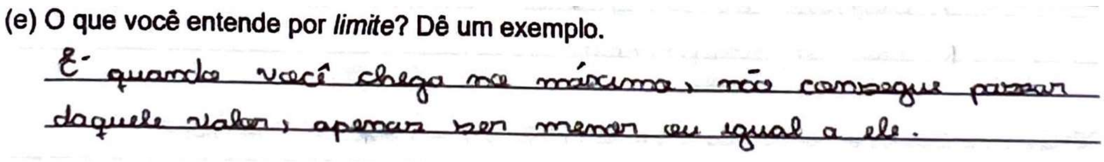
Este foi um momento bastante oportuno para introduzir a ideia de *limite*. Na atividade de sondagem, realizamos algumas perguntas com esse propósito. Algumas delas foram:

- O que você entende por *limite*? Dê um exemplo;
- Podemos concluir que a área do círculo *limita superiormente* a área dos polígonos regulares inscritos? Justifique sua resposta;
- Podemos concluir que a área do círculo *limita inferiormente* a área dos polígonos regulares circunscritos? Justifique sua resposta.

Já era de se esperar que essas perguntas gerariam algumas dúvidas e até mesmo um certo desconforto por parte da maioria dos alunos, visto que, até então, o conceito de limite era algo inédito para eles. Contudo, não interferimos com explicações durante a aplicação da atividade para obter resultados fidedignos sobre o conhecimento da turma acerca do tema.

Com o intuito de responder a essas perguntas durante a aula, convidamos a turma a refletir sobre a construção do GeoGebra, os dados organizados na planilha Excel e as perguntas citadas anteriormente. Alguns alunos relacionaram a ideia de limite como "uma fronteira que não pudesse ser ultrapassada", conforme a resposta que apresentamos na Figura 56

Figura 56 – Uma resposta do aluno G para o item (e) da questão 4.


(e) O que você entende por *limite*? Dê um exemplo.

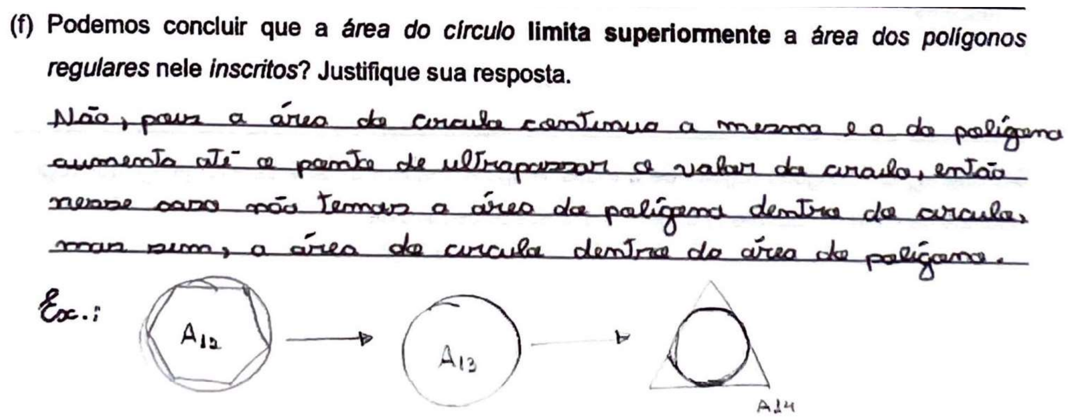
É quando você chega no máximo, não consegue passar daquele valor, apenas ser menor ou igual a ele.

Fonte: O Autor.

A partir dessa ideia comentamos que a área do círculo seria o limite (a fronteira inultrapassável) das áreas dos polígonos inscritos e circunscritos quando o número de lados tende ao infinito, isto é, aumenta indefinidamente. Essa conclusão nos permitiu ampliar a discussão e comentar sobre as expressões "limita superiormente" e "limita inferiormente".

Vejamos uma das respostas que um dos alunos apresentou na Figura 57:

Figura 57 – Uma resposta do aluno G para o item (f) da questão 4.


(f) Podemos concluir que a *área do círculo* limita superiormente a *área dos polígonos regulares* nele *inscritos*? Justifique sua resposta.

Não, pois a área do círculo continua a mesma e a do polígono aumenta até o ponto de ultrapassar o valor do círculo, então nesse caso não temos a área do polígono dentro do círculo, mas sim, a área do círculo dentro da área do polígono.

Ex.:

Fonte: O Autor.

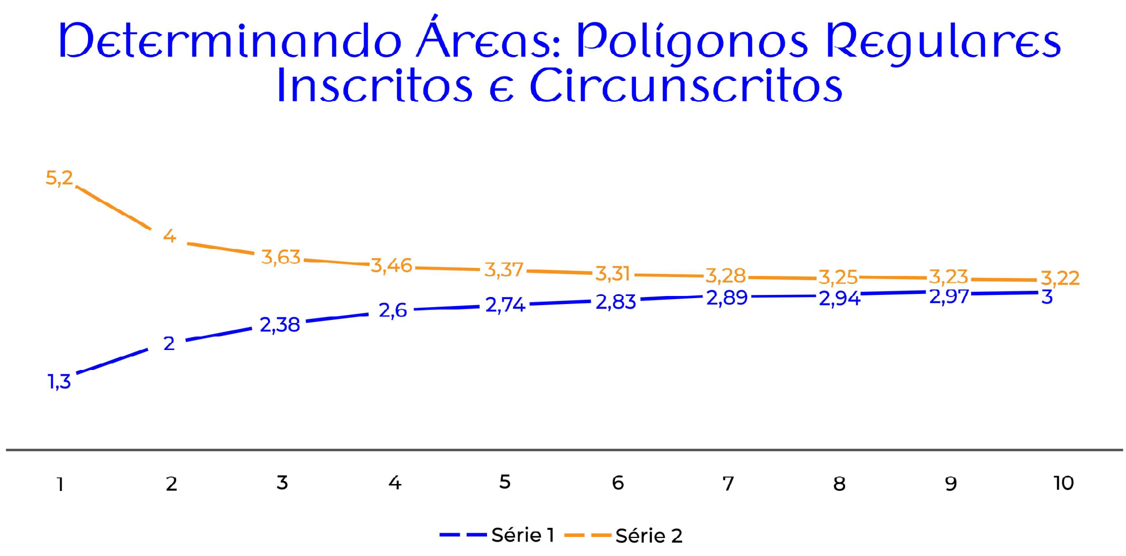
Note que, o aluno não respondeu o item corretamente. Um erro bastante visível está no fato do educando achar que ao aumentar o número de lados do polígono regular inscrito indefinidamente ele se torna um polígono circunscrito. O curioso é que o mesmo aluno apresentou uma resposta aceitável para a pergunta da Figura 56.

Sugerimos aos educandos que observassem novamente os dados organizados na planilha Excel (Figura 55). Verificamos para os polígonos regulares inscritos que à medida que n tende ao infinto, essas áreas tendem a aumentar cada vez mais e convergem para o número π, isto significa que a área do círculo limita superiormente (por cima) a área dos polígonos inscritos.

De modo análogo, pedimos que os alunos realizassem a mesma consulta de dados na tabela e verificassem o que ocorre com os polígonos circunscritos. Após a experiência anterior, a análise ficou mais intuitiva nos levando a concluir que, à medida que n tende ao infinito, essas áreas tendem a diminuir cada vez mais e convergem para o número π, isto significa que a área do círculo limita inferiormente (por baixo) a área dos polígonos circunscritos.

Com os dados apresentados nas dez primeiras linhas da Planilha Excel, exibidas na Figura 55, geramos um gráfico onde destacamos dois conjuntos de dados, a *Série 1* e *Série 2*. A curva azul que representa a *Série 1* é formada pelos valores das áreas dos polígonos regulares inscritos, enquanto a curva laranja que representa a *Série 2* é formada pelos valores das áreas dos polígonos regulares circunscritos.

Figura 58 – Um gráfico gerado via Excel.



Fonte: O Autor via Planilha Excel.

A apresentação do gráfico da Figura 58 permitiu que os educandos percebessem numericamente o quanto a área dos polígonos regulares inscritos e circunscritos se aproximam cada vez mais da área do círculo, complementando a percepção visual apresentada anteriormente com o auxílio do GeoGebra.

Além do mais, o comportamento das curvas do gráfico nos permite comentar novamente sobre as expressões "limita superiormente" e "limita inferiormente". Os educandos perceberam com maior clareza que a *Série 1* aproxima-se da área do círculo por baixo, enquanto a *Série 2* aproxima-se por cima. Com a análise desses resultados encerramos as aulas que compõem esta etapa.

Etapa 3:

Nesta última etapa, dividimos as aulas em dois momentos. Durante a primeira aula apresentamos aos alunos uma nova construção do GeoGebra. Essa construção traz um círculo de raio r repartido em $2n$ setores circulares iguais. Esses setores foram reagrupados e encaixados. Na Seção 4.4 do Capítulo 4, disponibilizamos um manual de instruções para que o leitor possa, se assim desejar, realizar essa construção. Caso o leitor prefira, poderá acessar a construção no link: <https://drive.google.com/file/d/18oVsAeBvNwhcwzh82S2cJQUp0YXbhEbP/view?usp=drive_link>.

Quando aumentamos esse número de setores indefinidamente, começamos a perceber um certo padrão. Neste momento instigamos a turma a responder seguinte pergunta: "o que ocorre com a figura formada pelos setores encaixados quando o número de setores aumenta indefinidamente?". Após visualizar um série de configurações, fica mais perceptível que a figura aproxima-se cada vez mais de um retângulo.

Essa pergunta nos permitiu analisar a questão 5 da atividade de sondagem. Nessa questão, achamos conveniente realizar questionamentos do tipo:

- Como calculamos a área de um retângulo? Escreva a expressão que você utiliza (nomeie cada um dos entes matemáticos da expressão) ou descreva o processo brevemente;

- Ao analisar as imagens formadas pelo encaixamento dos setores você consegue visualizar os entes matemáticos necessários para calcular a área do retângulo? Determine os valores desses entes matemáticos;

A maioria dos alunos lembraram da expressão que utilizamos para calcular a área de um retângulo. A resposta mais frequente foi "$A = b \cdot h$", onde b é a medida da base e h sua altura. Contudo, nenhum dos estudantes conseguiu determinar o valor desses entes matemáticos. Consequentemente, não conseguiram a partir dos questionamentos e ilustrações apresentados utilizar a expressão da área do retângulo para determinar uma fórmula fechada para calcular a área do círculo, como queríamos.

Dessa vez, ao contrário do que percebemos na etapa anterior, utilizar somente softwares digitais não foi suficiente para que os alunos conseguissem entender os conceitos de forma ampla. Os alunos não conseguiram por si só determinar as medidas da base e da altura do "retângulo" obtido com o rearranjo dos setores circulares.

Durante a segunda aula desta etapa, realizamos uma abordagem diferente para tentar solucionar o mesmo problema. Dessa vez, propomos aos alunos um jogo que criamos, o *quebra-cabeça de setores*. Por hora, vamos analisar como jogar e quais são os objetivos desse jogo.

Nome do jogo: o quebra-cabeça de setores

- **Objetivo do jogo:** reorganizar os setores de cada círculo para formar "retângulos" e observar como a área desses "retângulos" se relacionam com a área do círculo;

- **Materiais necessários:**
  - Círculos formados por diferentes números de setores (utilizamos em nosso jogo 8 círculos formados por 4, 6, 8, 10, 12, 24, 36 e 48 setores);
  - Área de trabalho para montagem dos "retângulos" (sugestões: bancada, mesas, tapete).

- **Regras do jogo:**
  1. **Momento de preparação:**
     - Defina a área de trabalho da equipe e distribua o material;
     - Certifique-se que a equipe tenha acesso a todos os setores dos círculos correspondentes;
  2. **Jogando:**
     - A equipe se divide em pequenos grupos e escolhem uma configuração para começar a jogar;
     - Os jogadores se reúnem na área de trabalho e iniciam o jogo montando círculos com os setores disponibilizados em cada configuração;
     - Após a montagem de todos os círculos ser realizada, os jogadores começam a reagrupar os setores de cada círculo para formar um "retângulo" ou uma figura que se aproxime de um retângulo;
     - Os jogadores devem se preocupar em construir um retângulo perfeito, onde todos os setores se encaixem sem sobras ou espaços vazios;
     - Os jogadores devem discutir estratégias e colaborar uns com os outros para encontrar a melhor forma de organizar os setores.

Figura 59 – Jogando com o quebra-cabeça de setores.

Fonte: O Autor.

Figura 60 – A procura do retângulo perfeito.

Fonte: O Autor.

3. **Observações e discussões:**

   - Enquanto os jogadores reorganizam os setores, o professor pode participar incentivando discussões sobre a relação existente entre o número de setores e a construção de um retângulo ideal;
   - Os jogadores devem observar como a área da figura formada pelos setores reagrupados se aproxima da área de um retângulo ideal à medida que mais setores são adicionados.

4. **Reflexão:**
   - Após terminarem de organizar todos os "retângulos", os jogadores devem discutir suas observações e tentar encontrar padrões que permitam, a partir das configurações encontradas, determinar uma fórmula fechada para a área do círculo.

5. **Conclusões:**
   - A equipe deve registrar suas observações e conclusões sobre os resultados encontrados de forma oral ou escrita;
   - O professor deve conduzir uma discussão em grupo para compartilhar as descobertas de cada jogador, analisar as observações feitas pela equipe e chegar na expressão $A = \pi \cdot r^2$ para calcular a área do círculo;
   - A expectativa é que o aluno perceba que à medida que o número n de setores aumenta indefinidamente, isto é, $n \to \infty$, as configurações tendem a ficar cada vez mais próximas de um retângulo perfeito cujas medidas da base e altura são, respectivamente, πr e r.

Figura 61 – Encontrando padrões a partir do quebra-cabeças de setores.

Fonte: O Autor.

- **Avaliação:** Realizamos a avaliação observando a participação dos alunos nas atividades individuais e coletivas. O processo avaliativo foi organizado do seguinte modo:

– **Desempenho Individual:**
  1. **Atividade de sondagem:** observamos o nível de compreensão dos alunos e o interesse em resolver as questões propostas;
  2. **Engajamento e participação:** observamos a participação dos alunos durante a explanação dos conteúdos e interesse pela temática abordada durante o período de aplicação da sequência didática;

– **Desempenho coletivo:** observamos a participação dos alunos durante a realização do jogo *quebra-cabeça de setores* e levamos em consideração três competências:
  * **Colaboração:** analisamos a capacidade de interagir e trabalhar em equipe, compartilhando ideias e contribuindo de forma significativa para o progresso do grupo;
  * **Pensamento crítico e resolução de problemas:** analisamos a capacidade de identificar padrões, aplicar conceitos matemáticos e desenvolver estratégias para resolver problemas;
  * **Conhecimento matemático:** analisamos a capacidade de compreender e aplicar conhecimentos matemáticos relevantes para o jogo.

5.6.2 Uma Sequência Didática para Investigar o Problema da Tangente

Nesta subseção, a sequência didática que iremos apresentar foi planejada para investigar o *problema da tangente*. Assim como fizemos na sequência anterior, propomos, inicialmente uma atividade de sondagem a fim de conhecer as dificuldades individuais e coletivas da turma.

Posteriormente, utilizamos as questões da sondagem para nortear o planejamento das aulas expositivas. A ideia central desta proposta didática é mostrar ao aluno a conexão existente entre o problema da tangente e a Matemática dos processos infinitos.

A utilização de softwares digitais para o desenvolvimento desta sequência mostrou-se bastante eficaz. Com o auxílio do software GeoGebra realizamos algumas construções com o intuito de fornecer aos educandos uma ideia mais geral sobre o conceito de reta tangente.

O uso do Excel possibilitou a observação de dados organizados e certos padrões numéricos. Estes dados foram obtidos calculando taxas de variação de uma função em diferentes pontos. Com isso, conseguimos explorar, intuitivamente, a ideia de limite, que é fundamental para entender esse problema.

A partir de agora, apresentaremos mais detalhes sobre esta sequência didática, bem como alguns comentários, resultados obtidos com a análise da atividade de sondagem e orientações de como aplicá-la.

Descrevendo a sequência didática

- **Público-alvo:** alunos do 3º ano do Ensino Médio;
- **Conteúdo:** o problema da tangente;
- **Habilidade da BNCC:** (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise de gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **Objetivo geral:** Estudar mais profundamente o conceito de reta tangente.
- **Objetivos específicos:**
  - Encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva dada aproximando-a por um número indefinido de retas secantes;
  - Utilizar os softwares computacionais, por exemplo, GeoGebra e planilha Excel para investigar, intuitivamente, a ideia de limite.
- Recursos didáticos:
  - Notebook;
  - Projetor;
  - Softwares computacionais;
    - GeoGebra;
    - Planilha Excel.
    - Lousa e Pincel.
- **Duração:**
  - Etapa 1: 2 aulas;
  - Etapa 2: 2 aulas;
  - Etapa 3: 2 aulas.

Etapa por etapa: os procedimentos metodológicos
Etapa 1:

Durante a primeira etapa, realizamos o *sondando a aprendizagem* sobre o problema da tangente. As 4 questões que compõem essa atividade foram organizadas de forma sequencial e o seu grau de dificuldade foi aumentando gradativamente.

Construímos imagens e tabelas com o intuito de fornecer aos educandos informações mais detalhadas em cada item analisado. Esta atividade mostrou-se uma importante ferramenta pedagógica para traçar as estratégias de aprendizagem das etapas subsequentes. Veja a atividade completa no Apêndice A.

Etapa 2:

Nesta etapa, realizamos aulas expositivas. Analisamos cada uma das questões da atividade de sondagem, utilizamos o GeoGebra e a planilha Excel como recursos didáticos. A abordagem e perguntas adicionais que realizamos durante as explanações tiveram por base as respostas observadas na atividade de sondagem.

Iniciamos a aula com a seguinte pergunta: "o que é reta tangente?", alguns alunos deram a resposta: "é uma reta que toca em apenas um ponto". Essa resposta nos forneceu um terreno fértil para continuar com as nossas discussões. Evidentemente, essa resposta faz todo sentido, se pensarmos numa reta que tangencia um círculo.

E certamente, a resposta dada foi baseada na experiência do aluno em estudar alguns tópicos de Geometria Plana, onde a ideia de reta tangente ao círculo foi apresentada. No entanto, nosso objetivo é que a partir deste conhecimento, o discente possa generalizar o conceito de reta tangente para outras curvas.

No GeoGebra realizamos as seguintes construções:

1. Uma circunferência e dois dos seus pontos, P e Q. Por P traçamos a tangente r e pelos pontos P e Q traçamos a secante s;
   (Para visualizar a construção acesse o link: <https://drive.google.com/file/d/1KaawlFhtdr-Ju7k7DYDmwj7b8nlhgP7j/view?usp=drive_link>).

2. O gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 3$ e dois dos seus pontos, P e Q. Por P traçamos a tangente r e pelos pontos P e Q traçamos a secante s.
   (Para visualizar a construção acesse o link: <https://drive.google.com/file/d/10ABa6AZSI572cpm3ldaSNBX-s3eazmyZ/view?usp=drive_link>).

Ao analisar a primeira construção os alunos verificaram que a resposta inicial estava correta. Contudo, para a segunda construção, a depender da posição que o ponto de tangência P se encontre a reta tangente r pode tocar em mais de um ponto da curva. Com isso, dizer que reta tangente é a reta que toca em apenas um ponto da curva não é uma definição adequada para um contexto mais geral.

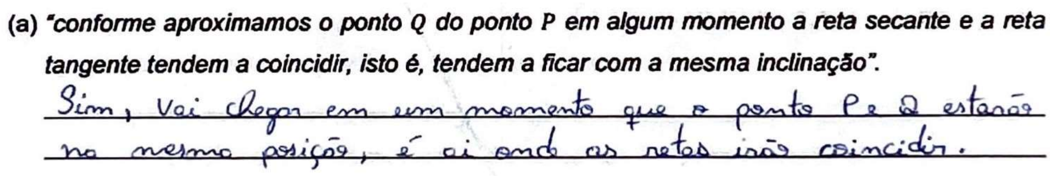
Realizamos um outro procedimento a fim de instigar uma outra discussão. Mantendo o ponto P fixo, nos dois casos, e movendo o ponto Q sobre a curva fica evidente que podemos aproximar uma reta tangente por um número indefinido de retas secantes. Na atividade de sondagem pedimos que os alunos justificassem na questão 3 os seguintes itens:

(a) "conforme aproximamos o ponto Q do ponto P em algum momento a reta secante e a reta tangente tendem a coincidir, isto é, tendem a ficar com a mesma inclinação";

(b) "é possível determinar a inclinação de uma reta tangente realizando aproximações por meio de infinitas retas secantes".

Para o item (a), observamos muitas respostas em branco, em outras apenas um SIM sem justificativas e algumas completamente fora de contexto. Ainda assim, observamos duas respostas interessantes. Vejamos as Figuras 62 e 63.

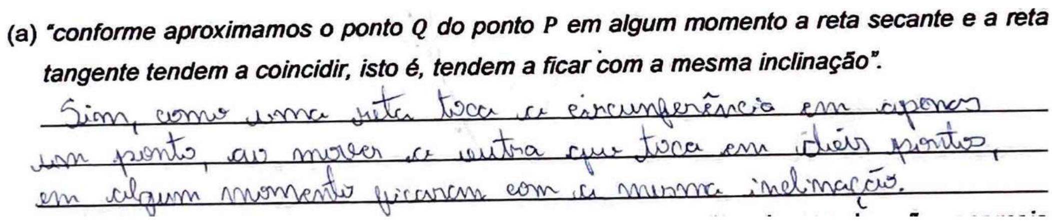
Figura 62 – Questão 3.(a) - resposta do aluno E.


(a) "conforme aproximamos o ponto Q do ponto P em algum momento a reta secante e a reta tangente tendem a coincidir, isto é, tendem a ficar com a mesma inclinação".

Sim, Vai chegar em um momento que o ponto P e Q estarão na mesma posição, é ai onde as retas irão coincidir.

Fonte: O Autor.

Figura 63 – Questão 3.(a) - resposta do aluno T.


(a) "conforme aproximamos o ponto Q do ponto P em algum momento a reta secante e a reta tangente tendem a coincidir, isto é, tendem a ficar com a mesma inclinação".

Sim, como uma reta toca a circunferência em apenas um ponto, ao mover a outra que toca em dois pontos, em algum momento ficaram com a mesma inclinação.

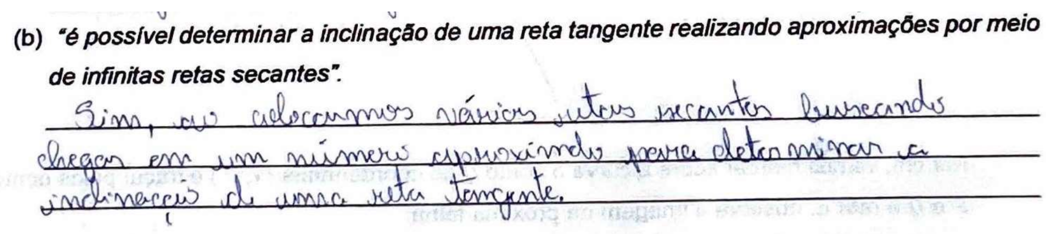
Fonte: O Autor.

Observamos que, mesmo sem conhecer precisamente a ideia de limite os alunos redigiram em suas respostas coisas do tipo: "... vai chegar em um momento que o ponto P e Q estarão na mesma posição ..." ou "... em algum momento ficarão com a mesma inclinação". Nesse contexto, a expressão "em algum momento" sugere a existência de uma convergência entre as retas r e s.

No entanto, alguns detalhes precisam ser ajustados. Os pontos P e Q realmente coincidem ou tendem a coincidir? A resposta correta seria os pontos P e Q tendem a coincidir. Por outro lado, quando aplicamos o limite estes pontos irão, de fato, coincidir.

Para o item (b) não foi diferente, muitas respostas em branco, outras apenas SIM ou NÃO sem justificativas e outras fora do contexto. Entretanto, observamos uma resposta interessante, vejamos a figura 64:

Figura 64 – Questão 3.(b) - resposta do aluno T.


(b) ***"é possível determinar a inclinação de uma reta tangente realizando aproximações por meio de infinitas retas secantes".***

Sim, ao colocarmos várias retas secantes buscando chegar em um número aproximado para determinar a inclinação de uma reta tangente.

Fonte: O Autor.

A resposta do aluno sugere que a afirmação é verdadeira. Embora não conheça a ideia de limite, a justificativa dada baseia-se em, a partir de várias retas secantes, encontrar um valor aproximado para determinar a inclinação da tangente. Agora, precisamos nos certificar se o aluno realmente compreendeu como devemos escolher os pontos dessas retas secantes.

Outra dúvida que surge é a seguinte: o valor obtido para a inclinação da reta tangente é um valor aproximado ou um valor exato? A forma como o aluno se expressou deixou a entender que a inclinação da reta tangente seria dada por um valor aproximado.

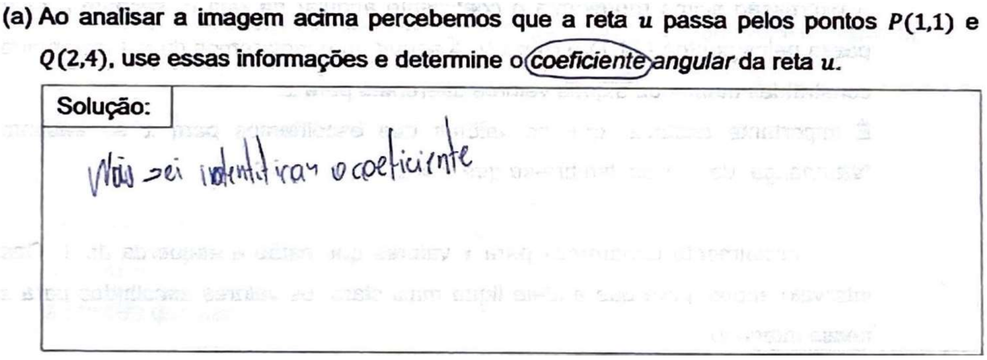
Porém, embora estejamos realizando um processo de aproximações sucessivas o valor obtido é exato, desde que o conceito de limite seja utilizado corretamente. Vale ressaltar que isso já era esperado, afinal, os educandos ainda não conhecem a ideia de limite.

Na questão 4 da atividade de sondagem analisamos a afirmação do item 3.(b) mais profundamente. Destacamos no enunciado a imagem da curva $y = x^2$ e marcamos o ponto $P = (1, 1)$. Logo em seguida, traçamos a reta t, tangente à curva que passa por P. Por fim, marcamos sobre a curva o ponto genérico $Q = (x, x^2)$ e traçamos por P e Q a reta u secante à curva.

Inicialmente, solicitamos no item (a) da questão 4 que os alunos analisassem um caso particular. A mesma situação descrita anteriormente para os pontos $P = (1, 1)$ e $Q = (2, 4)$. A partir dessas informações pedimos que o coeficiente angular da reta u fosse determinado.

Ao analisarmos as respostas, observamos que a maioria dos alunos deixaram este item em branco. Dentre o grupo de alunos que resolveram, nem todos apresentaram a solução correta. Veja as Figuras 65, 66, 67 e 68.

Figura 65 – Questão 4.(a) - resposta do aluno P.



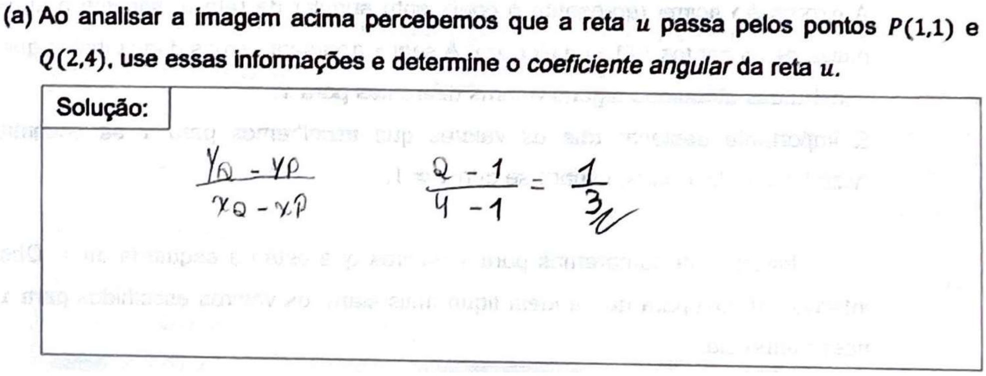
(a) Ao analisar a imagem acima percebemos que a reta *u* passa pelos pontos *P*(1,1) e *Q*(2,4), use essas informações e determine o *coeficiente angular* da reta *u*.

Solução:

Não sei indentificar o coeficiente

Fonte: O Autor.

Figura 66 – Questão 4.(a) - resposta do aluno A.



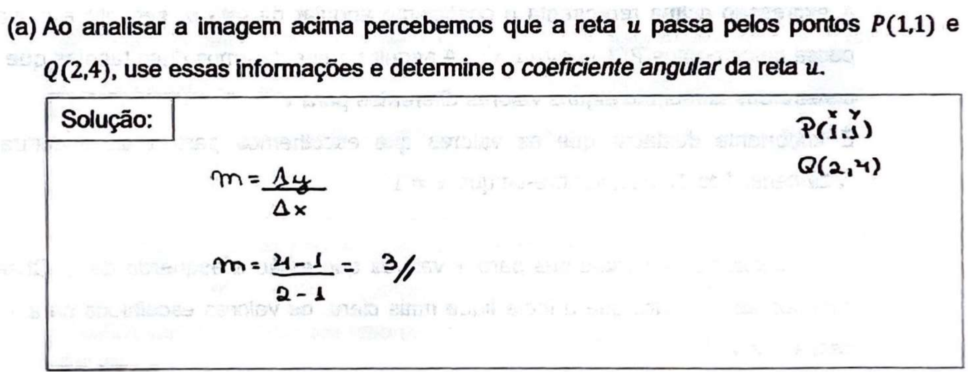
(a) Ao analisar a imagem acima percebemos que a reta *u* passa pelos pontos *P*(1,1) e *Q*(2,4), use essas informações e determine o *coeficiente angular* da reta *u*.

Solução:

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \qquad \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

Fonte: O Autor.

Figura 67 – Questão 4.(a) - resposta do aluno G.



(a) Ao analisar a imagem acima percebemos que a reta *u* passa pelos pontos *P*(1,1) e *Q*(2,4), use essas informações e determine o *coeficiente angular* da reta *u*.

Solução:

$P(1,1)$

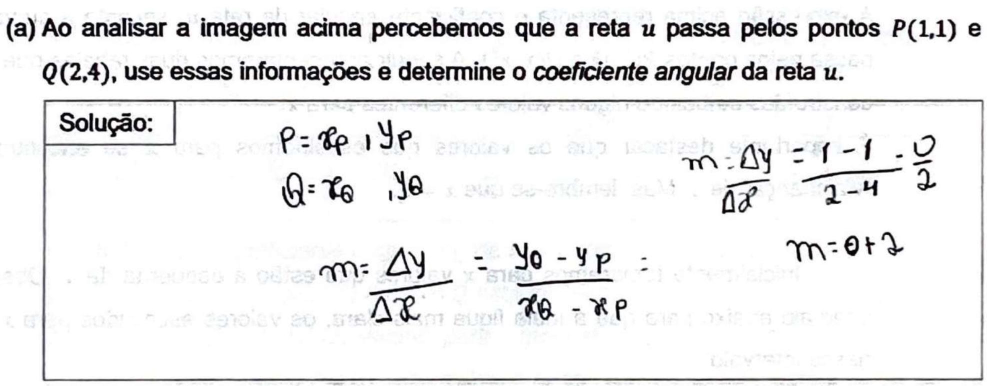
$Q(2,4)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

Fonte: O Autor.

Figura 68 – Questão 4.(a) - resposta do aluno Y.


(a) Ao analisar a imagem acima percebemos que a reta u passa pelos pontos $P(1,1)$ e $Q(2,4)$, use essas informações e determine o *coeficiente angular* da reta u.

Solução:

$P = x_P, y_P$

$Q = x_Q, y_Q$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} =$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1-1}{2-4} = \dfrac{0}{2}$

$m = 0 + 2$

Fonte: O Autor.

As respostas apresentadas anteriormente nos deixaram bastante preocupados. Como podemos ir além e estudar conceitos mais abstratos, enquanto dúvidas tão elementares ainda existem? São nesses momentos que o professor enxerga a heterogeneidade da sua turma e precisa buscar estratégias para minimizar os déficits de aprendizagem.

No item (b) da questão 4, pedimos para que o mesmo cálculo fosse realizado, mas com uma pequena modificação. Agora, os pontos em questão são $P = (1, 1)$ e $Q = (x, x^2)$. Nossa expectativa era que os alunos encontrassem o seguinte resultado: $m_u = x + 1$. Contudo, observamos que grande maioria dos alunos tiveram dificuldades para encontrar este resultado.

Como já era de se esperar, os alunos que não resolveram o caso particular também não resolveram o caso mais geral. Por outro lado, nem todos os alunos que obtiveram sucesso na solução do caso particular chegaram no resultado desejado para o caso mais geral. Notamos que alguns estudantes não lembraram de alguns resultados básicos que seriam importantes para realizar manipulações, por exemplo, o desenvolvimento de produtos notáveis.

Diante das dificuldades apresentadas, relembramos brevemente alguns conceitos fundamentais para a resolução dos itens comentados anteriormente, entre eles:

1. Equação reduzida da reta;

2. Coeficiente angular da reta;

3. Produtos notáveis: diferença entre dois quadrados.

Em seguida, resolvemos cada um dos itens detalhadamente na lousa para que todos os alunos sanassem eventuais dúvidas e tivessem acesso as respostas corretas. O último resultado que encontramos foi o valor da inclinação da reta u, secante à curva de equação $y = x^2$.

Conforme comentamos anteriormente, $m_u = x + 1$. Agora, podemos determinar a inclinação da reta t atribuindo valores para x. Isso nos permite realizar aproximações e apresentar aos educandos, intuitivamente, a noção de limite.

Na atividade de sondagem apresentamos duas tabelas com possíveis valores para x e os respectivos valores m_u. Os valores para x foram escolhidos nas proximidades de $x_P = 1$, mas de modo tal que $x \neq x_P = 1$. As tabelas foram organizadas da seguinte forma:

- **Tabela 1:** Atribuindo para x valores que estão à direita de 1;
- **Tabela 2:** Atribuindo para x valores que estão à esquerda de 1.

Na atividade pedimos para que os alunos comentassem sobre a seguinte afirmação: "afirmar que x tende a 1 pela direita ou pela esquerda é equivalente a dizer que o ponto Q tende ao ponto P pela direita ou pela esquerda".

No entanto, poucos alunos comentaram algo sobre esta afirmação, a maioria deixou em branco ou sinalizou coisas do tipo: "não sei" e "não entendi, professor". Dentre as respostas obtidas, apenas uma não estava fora do contexto. O aluno responde:

Figura 69 – Questão 4(d) - resposta do aluno G.

Agora comente as afirmações a seguir:

Afirmação 1: ***"afirmar que x tende a 1 pela direita ou pela esquerda é equivalente a dizer que o ponto Q tende ao ponto P pela direita ou pela esquerda".***

Sim, pois em algum momento o ponto Q vai se cruzar com o ponto P, tanto pela direito quanto pela esquerda

Fonte: O Autor.

De acordo com a resposta da Figura 69, notamos que o aluno percebe a existência de uma convergência entre os pontos Q e P. Contudo, sabemos que estes pontos "não irão se cruzar", conforme ele mencionou. Estes pontos tendem a coincidir, é diferente. Somente, quando aplicamos o limite, de fato, é que os pontos se encontram.

Para facilitar a compreensão dos educandos, com o auxílio da planilha Excel, construímos novamente as duas tabelas e atribuímos possíveis valores para x, conforme havíamos colocado na atividade de sondagem.

Figura 70 – Atribuindo possíveis valores para x - Tabela 1.

ATRIBUINDO VALORES PARA X QUE ESTÃO À ESQUERDA DE 1								
x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	...	0,99999	...
m_u	1	1,5	1,75	1,9	1,99	...	1,99999	...

Fonte: O Autor via Planilha Excel.

Figura 71 – Atribuindo possíveis valores para x - Tabela 2.

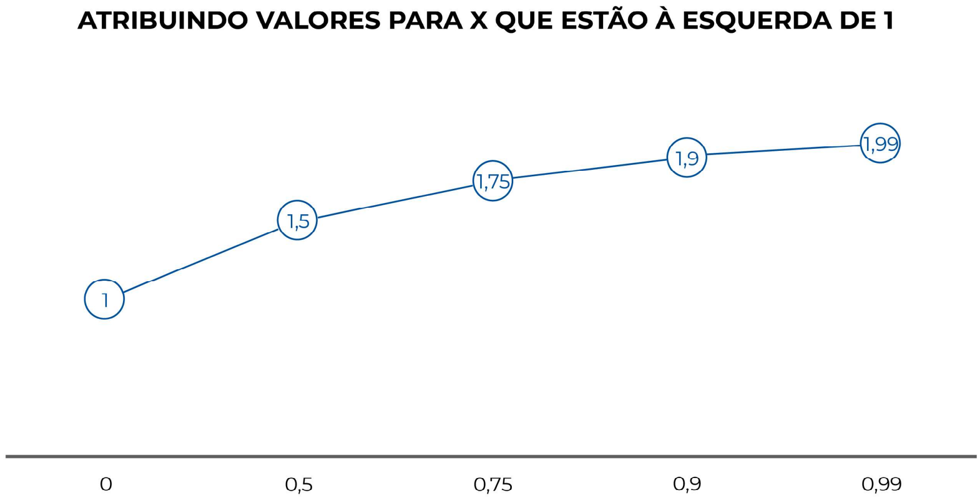
ATRIBUINDO VALORES PARA X QUE ESTÃO À DIREITA DE 1								
x	2	1,75	1,5	1,25	1,1	...	1,0009	...
m_u	3	2,75	2,5	2,25	2,1	...	2,0009	...

Fonte: O Autor via Planilha Excel.

À medida que acrescentamos possíveis valores para x o Excel calculava automaticamente valores para m_u. Após inserir uma certa quantidade de valores cada vez mais próximos de $x = 1$, instigamos a turma a perceberem um certo padrão. Observe que com os dados apresentados nas tabelas podemos introduzir novamente, intuitivamente, a ideia de limite de forma intuitiva.

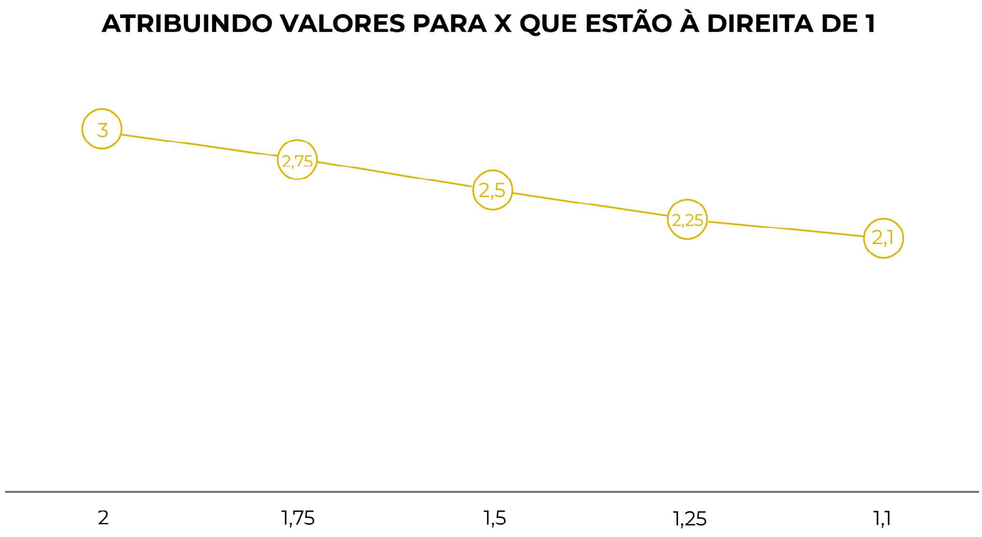
A partir dos dados numéricos registrados nas tabelas, geramos gráficos para exibir o comportamento das curvas quando os valores de x se modificam, vejamos as Figuras 72 e 73.

Figura 72 – Gerando um gráfico para os dados da Tabela 1.



Fonte: O Autor via Planilha Excel.

Figura 73 – Gerando um gráfico para os dados da Tabela 2.



Fonte: O Autor via Planilha Excel.

Com a apresentação dos gráficos, ficou mais perceptível que o valor de m_u está convergindo para 2 à medida que os valores atribuídos para x aproximam-se cada vez mais de 1 pela esquerda ou pela direita. Desse modo, os educandos perceberam que à medida que Q tente a P, o valor de m_u fica cada vez mais próximo de 2. Isto quer dizer que quando esses pontos estiverem infinitamente próximos obteremos $m_u = 2$.

A apresentação desse último resultado encerrou as aulas dessa etapa. Constatamos que a utilização de recursos tecnológicos foi imprescindível para que as explanações se tornassem mais claras e acessíveis, em especial, quando introduzimos a ideia de limite.

Etapa 3:

Nesta etapa, nos preocupamos revisar algumas das ideias apresentadas nas aulas anteriores. Confeccionamos uma História em Quadrinhos e entregamos cópias impressas para toda a turma. Você pode conferir a versão completa da HQ apresentada nesta sequência didática no Apêndice B. As aulas desta etapa foram realizadas no laboratório de informática e estruturadas da seguinte forma:

- **1º Momento:** leitura da História em Quadrinhos;
- **2º Momento:** utilização do GeoGebra para realizar as construções;
- **3º Momento:** compartilhamento.

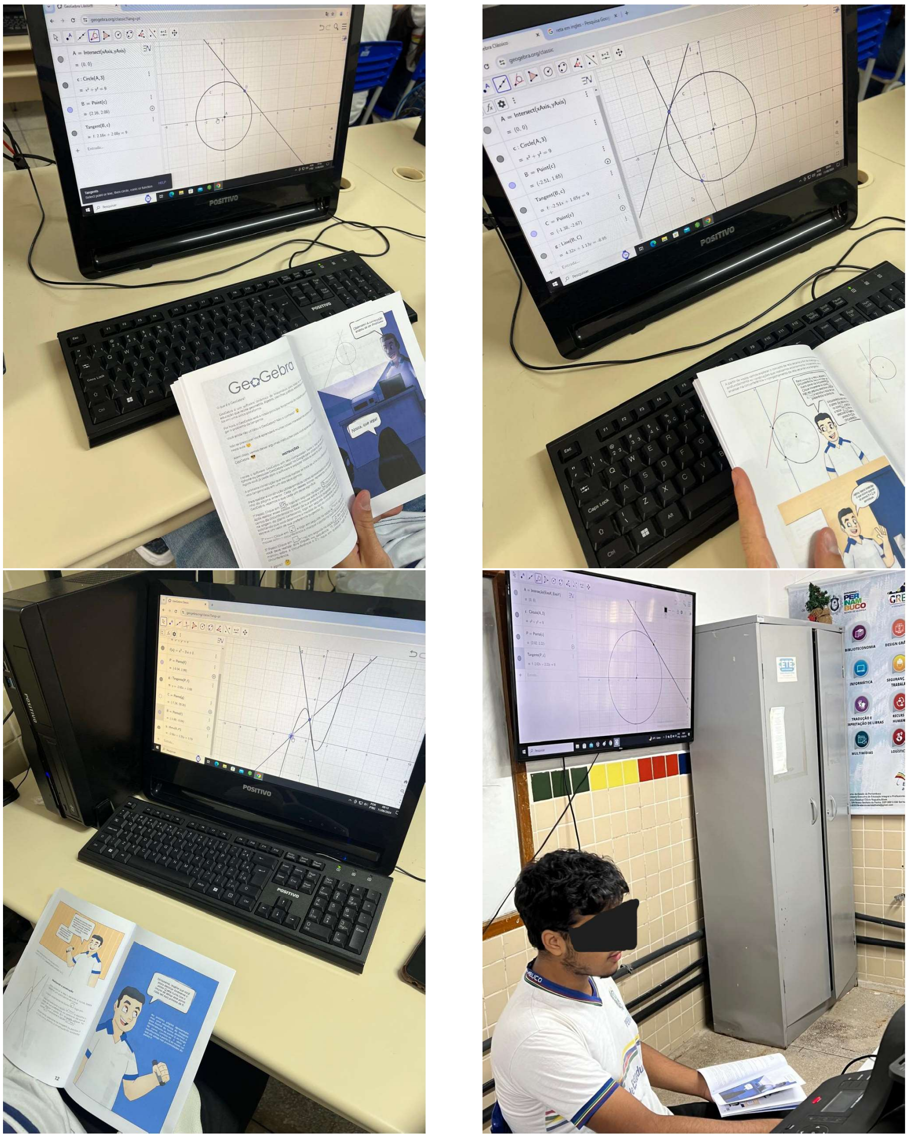
Durante o *primeiro momento*, os estudantes realizaram a leitura individual da HQ. No *segundo momento*, cada aluno utilizou um dos computadores do laboratório de informática para realizar construções com o auxílio do software GeoGeobra. Todas as construções foram indicadas na HQ e acompanhadas de um manual com um passo a passo detalhado.

Durante a realização dessa atividade prestamos todo suporte necessário aos estudantes, em especial aqueles que apresentaram maiores dificuldades para utilizar o software. Constatamos que a grande maioria dos alunos conseguiram realizar a atividade consultando apenas as informações do manual.

Durante o *terceiro momento*, ocorreu o compartilhamento de informações e troca de experiências acerca das atividades realizadas. Observamos que a leitura da HQ se mostrou clara e detalhada. A ideia de apresentar um manual para realizar construções proporcionou uma nova experiência aos educandos.

Por meio do GeoGebra, exploramos o problema da tangente de forma interativa e dinâmica. Isso proporcionou aos educandos uma maior clareza na visualização de conceitos mais abstratos.

Figura 74 – Uma aula de Matemática com história em quadrinhos.



Fonte: O Autor.

6 Conclusões

Neste capítulo, faremos o apontamento de breves considerações acerca dos nossos estudos, principais resultados obtidos e os desafios enfrentados. Por fim, apresentaremos algumas sugestões para futuros trabalhos.

Esperamos que a pesquisa desenvolvida nesta dissertação possa contribuir de alguma forma para ampliar a divulgação e o conhecimento acerca do tema abordado. Além do mais, temos grandes expectativas que a proposta de disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos, apresentada no Capítulo 5, possa ser aplicada por outros professores juntamente com os materiais didáticos que foram produzidos.

Os processos infinitos surgiram há muito tempo e trouxeram importantes contribuições para o avanço da Matemática. A partir das pesquisas realizadas passamos a enxergar o Cálculo como uma síntese de todo esse conhecimento prévio desenvolvido ao longo do tempo.

A realização da pesquisa sobre o contexto histórico, apresentado no Capítulo 2, trouxe algumas reflexões, entre elas, a importância do docente de Matemática conhecer aspectos históricos sobre os conteúdos que leciona e sempre que for conveniente apresentá-los durante as aulas.

É bem verdade, que algumas circunstâncias, como o pouco tempo e a quantidade de conteúdos presentes nos currículos limita nosso planejamento, mas percebemos que a introdução de fatos históricos pode despertar o interesse dos alunos e proporcionar uma compreensão mais profunda do tema.

Com o desenvolvimento dos Capítulos 3 e 4, onde estudamos os problemas clássicos que abordamos em aulas da disciplina eletiva percebemos a importância de rever o nosso entendimento sobre os temas abordados. Essa preparação é fundamental para desenvolver o planejamento das aulas e proporcionar experiências adequadas para os educandos.

Constatamos que ao abordar, intuitivamente, a Matemática dos processos infinitos no Ensino Básico, podemos contribuir para o desenvolvimento de competências e habilidades previstas na BNNC.

A aplicação da nossa proposta de disciplina eletiva, proporcionou aos educandos investigar problemas clássicos, pensar de forma abstrata, acessar novos conhecimentos e rever sua aprendizagem sobre conteúdos mais elementares.

Analisar, intuitivamente, a ideia de limite trouxe uma visão mais ampla de estudos que poderão ser realizados no futuro. De fato, este foi um ponto bastante relevante, tendo em vista que os alunos participantes da eletiva estudam numa Escola Técnica Estadual e cursam o Técnico em Edificações.

Muitos desses alunos pretendem seguir na área, ampliar seus conhecimentos e sua área de atuação. Desse modo, podem cursar Engenharia Civil, Arquitetura e outros cursos da Educação Superior que trazem o Cálculo como disciplina obrigatória.

Todavia, insta salientar a importância da utilização de recursos didáticos adequados para facilitar a compreensão dos educandos. Com a aplicação das sequências didáticas, apresentadas no Capítulo 5, observamos a importância de conhecer as dificuldades da turma antes de realizar o planejamento das aulas. Por meio das atividades de sondagem, conseguimos avaliar melhor as demandas individuais e coletivas e traçar as estratégias de ensino que julgamos ser mais adequadas.

A utilização de softwares computacionais, como o GeoGebra e a Planilha Excel, proporcionaram representações visuais e interativas, facilitando a compreensão de conceitos abstratos. A elaboração de um material textual no formato de Histórias em Quadrinhos permitiu realizar as revisões dos conteúdos abordados de forma lúdica e acessível.

O uso de materiais manipuláveis para confeccionar o jogo, quebra-cabeça de setores, permitiu apresentar elementos matemáticos de maneira concreta e assim como os softwares utilizados mostrou ser uma ferramenta didática bastante eficaz.

Talvez, sem a utilização desses recursos didáticos a realização dessa proposta de eletiva se tornaria inviável. Ainda assim, muitos desafios foram enfrentados durante o desenvolvimento deste trabalho.

A criação do plano de curso da disciplina exigiu muita pesquisa e dedicação. Buscar estratégias e metodologias para instigar a participação dos alunos durante todas as aulas e atividades não foi uma tarefa simples.

Apresentar conceitos novos e abstratos, como a ideia de limite, foi um dos maiores desafios enfrentados, tendo em vista, que a maioria dos alunos apresentaram dificuldades para compreender tópicos mais elementares. Desse modo, nossa ideia inicial de utilizar conhecimentos prévios dos educandos para entender conteúdos mais avançados teve de ser revista em alguns momentos.

Para amenizar esse problema explicamos aqueles detalhes dos conteúdos que são fundamentais para o entendimento das explanações dos problemas clássicos que abordamos na disciplina. Desse modo, conseguimos avançar e estudar os conteúdos propostos na ementa da disciplina.

À medida que realizamos nossos estudos acerca dos processos infinitos percebemos outros tópicos em potencial que poderão ser investigados em trabalhos futuros, a título de exemplo, a investigação de funções, os paradoxos de Zenão e o problema do volume.

A estruturação desta dissertação, promove uma proposta completa para o desenvolvimento de uma disciplina eletiva sob a ótica do Novo Ensino Médio.

Por fim, com os desfecho deste trabalho, pretende-se proporcionar aos colegas docentes do Ensino Médio uma nova forma de divulgação da Matemática que possibilita o estudo dos processos infinitos.

Referências

BOYER, C. B. *The history of the calculus and its conceptual development:(The concepts of the calculus).* [S.l.]: Courier Corporation, 1959. Citado na página 25.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática.* [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 25 e 26.

BROLEZZI, A. C. *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática.* Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 25.

CARVALHO, R. A. de. *Descartes, Barrow e Fermat: métodos das tangentes.* 2011. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/75/9.htmll>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar–Volume 10.* [S.l.]: São Paulo, Ática Editora, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática.* [S.l.]: Unicamp, 2004. Citado 11 vezes nas páginas 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 31, 55 e 66.

GARDINER, T. Infinite processes in elementary mathematics how much should we tell the children? *The Mathematical Gazette*, Cambridge University Press, v. 69, n. 448, p. 77–87, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.

GRABINER, J. V. The changing concept of change: the derivative from fermat to weierstrass. *Mathematics magazine*, Taylor & Francis, v. 56, n. 4, p. 195–206, 1983. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 30.

LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares.* [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2013. Citado na página 76.

LIMA, E. L. et al. *Medida e forma em geometria.* [S.l.]: IMPA/VITAE, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.

MORGADO, A. C. *Temas e Problemas/Augusto Cesar Morgado, Elon Lages Lima, Paulo Casar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner.–.* [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2001. Citado na página 27.

NETO, P. A. P. *O Problema da Tangente.* 2020. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/hk2jbnsaawqw.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 44.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Mecânica (vol. 1).* [S.l.]: Editora Blucher, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

PATERLINI, R. R. *Os "Teoremas" de Cavaliere.* 2010. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/72/11.html>. Citado na página 26.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 20, 24, 55 e 66.

STEWART, J. *cálculo*. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 48.

ÁVILA, G. *Arquimedes, a esfera e o cilindro*. 1987. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/10/3.htm>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

ÁVILA, G. *O ensino de Cálculo no 2º grau*. 1991. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm>. Citado na página 90.

APÊNDICE A – Sondando a Aprendizagem

Escola Técnica Estadual Clóvis Nogueira Alves

Disciplina Eletiva: Investigando Processos Infinitos

Professor: Tiago Melo

Aluno ou (a): ____

Turma: 3º ano do Curso Técnico em Edificações

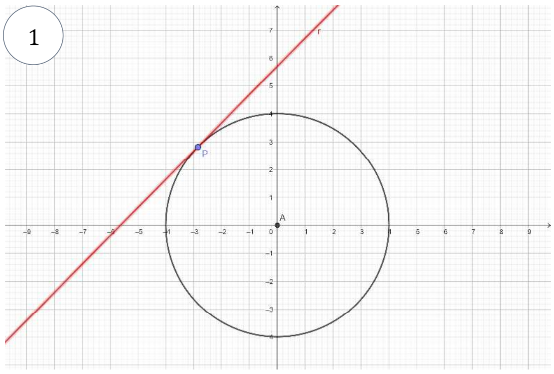
1º Sondando a Aprendizagem

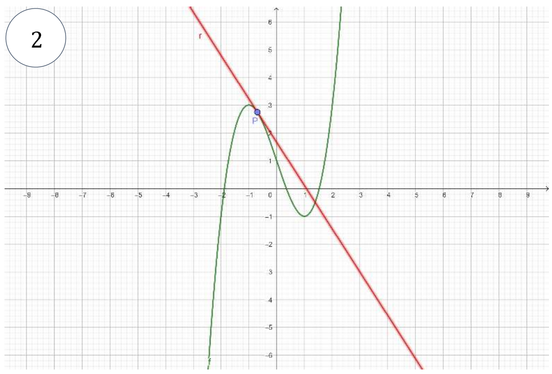
Os questionamentos que serão apresentados a seguir têm por finalidade verificar os conhecimentos prévios dos alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre o conceito de reta tangente.

Instruções: Leia as questões atentamente e responda cada pergunta expondo suas ideias de forma clara e detalhada.

Analisando O Problema da Tangente e suas particularidades

01. Analise as imagens a seguir e responda o que se pede em cada item.





(a) Comente sobre as seguintes afirmações:

1) Figura 1: *"a reta r é tangente a circunferência no ponto P".*

____

____

____

2) Figura 2: *"a reta r é tangente a curva no ponto P".*

____

____

____

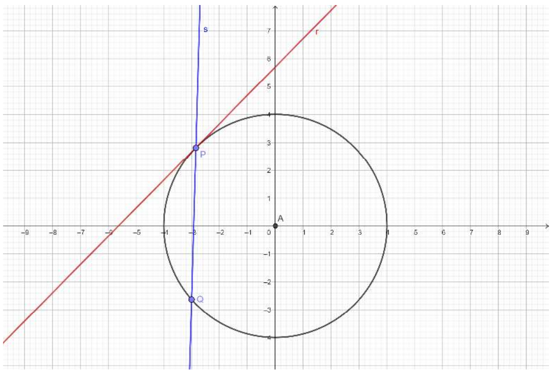
(b) Após analisar as duas imagens e comentar brevemente sobre as afirmações 1) e 2), como você define *reta tangente*?

____

____

____

02. Observe a imagem a seguir e responda o que se pede.



(a) O que você nota de diferente quando visualiza a posição das retas r (reta em vermelho) e s (reta em azul) em relação a circunferência?

____

____

____

____

(b) Comente a seguinte afirmação: "a reta s é secante a circunferência nos pontos P e Q".

____

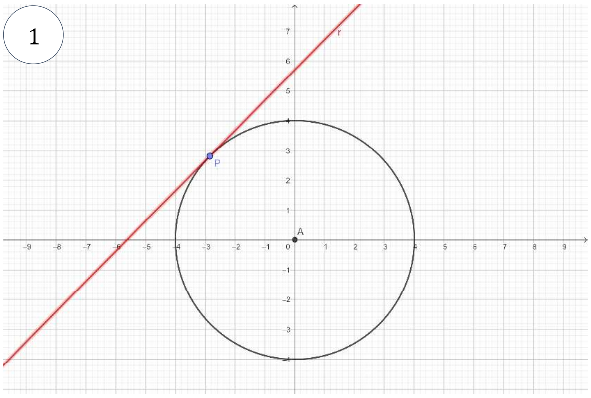
____

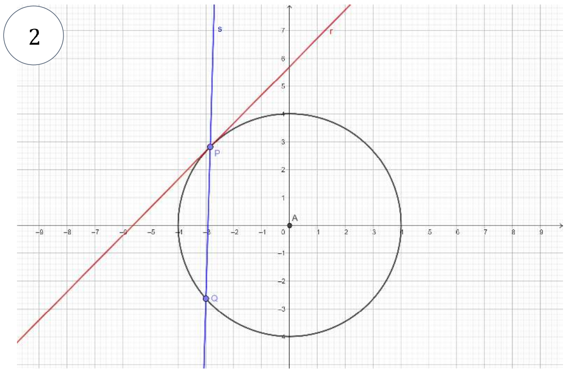
____

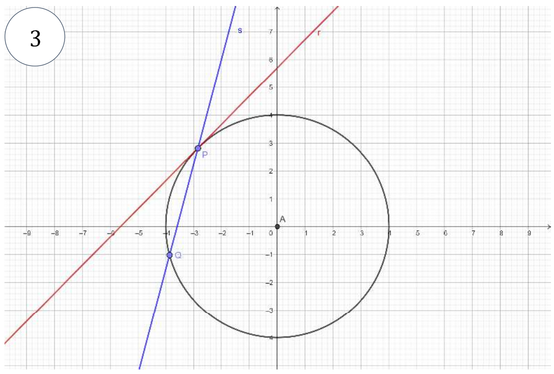
____

03. As imagens a seguir, produzidas utilizando o *software GeoGeobra*, possuem o intuito de apresentar uma *“sequência de deslocamentos”* da reta s em relação a reta r. Em outras palavras a ideia é que você visualize as imagens de forma dinâmica, isto é, olhe para as imagens e imagine intuitivamente os movimentos relativos entre as retas r e s.

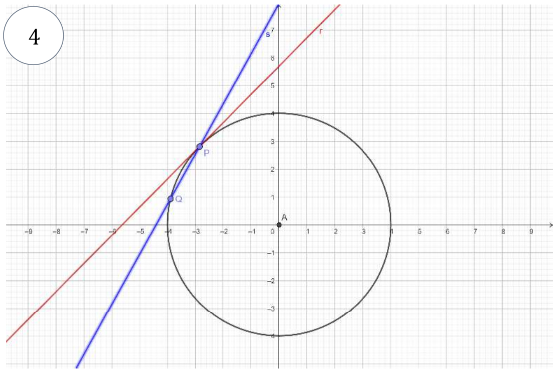
Analise as imagens a seguir respeitando a sequência indicada.



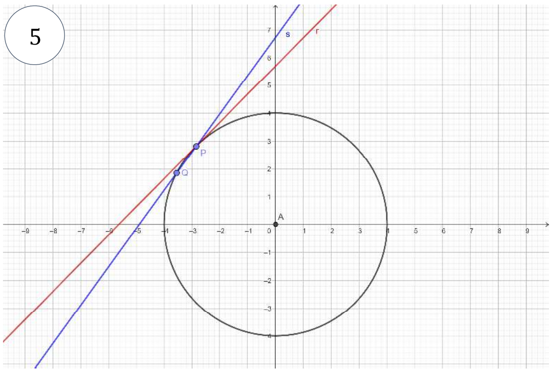




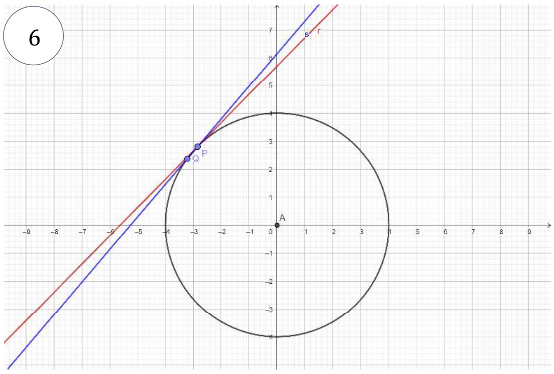
4



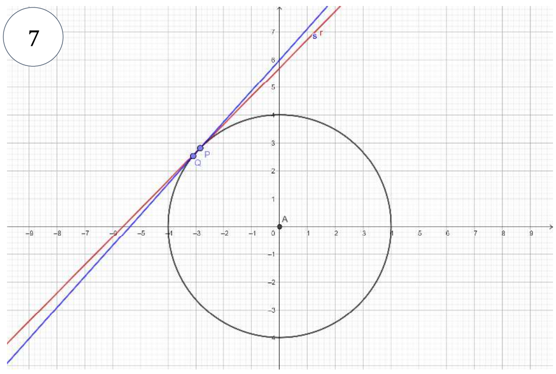
5

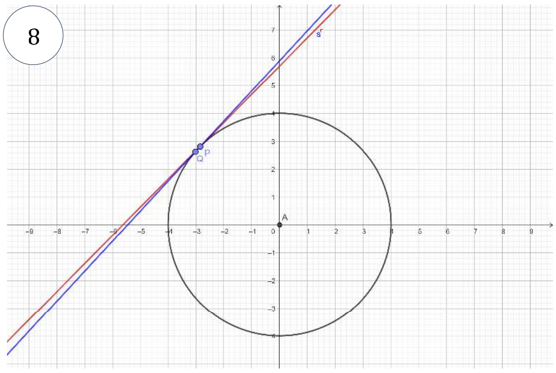


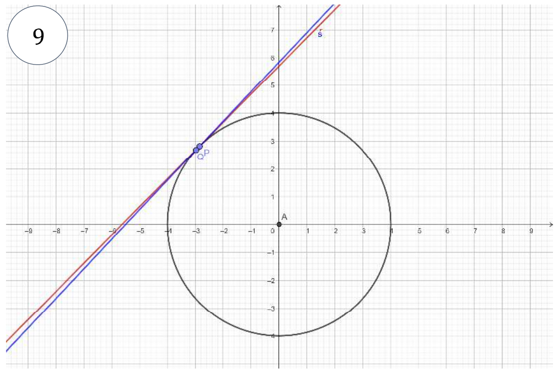
6



7





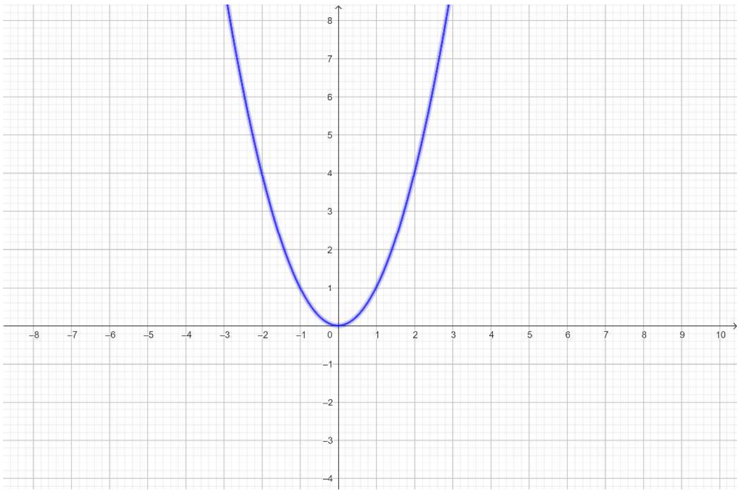


Após analisar as imagens e realizar algumas inferências você certamente deve ter notado alguma relação entre as retas r e s. A partir de suas conclusões comente as afirmações a seguir:

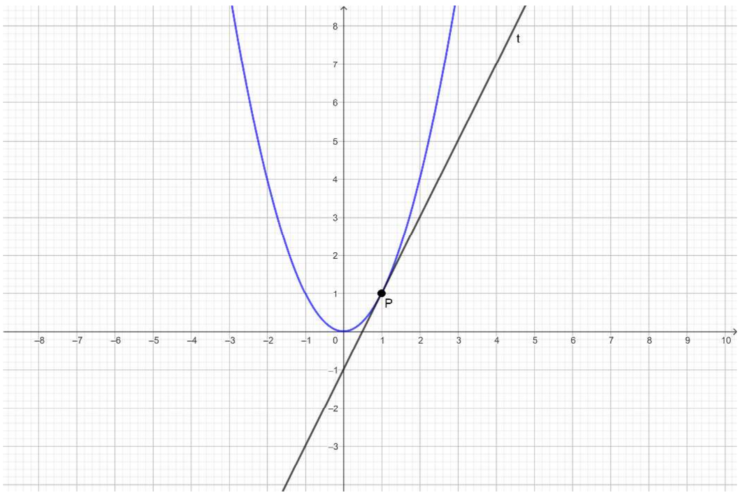
(a) *"conforme aproximamos o ponto Q do ponto P em algum momento a reta secante e a reta tangente tendem a coincidir, isto é, tendem a ficar com a mesma inclinação".*

(b) *"é possível determinar a inclinação de uma reta tangente realizando aproximações por meio de infinitas retas secantes".*

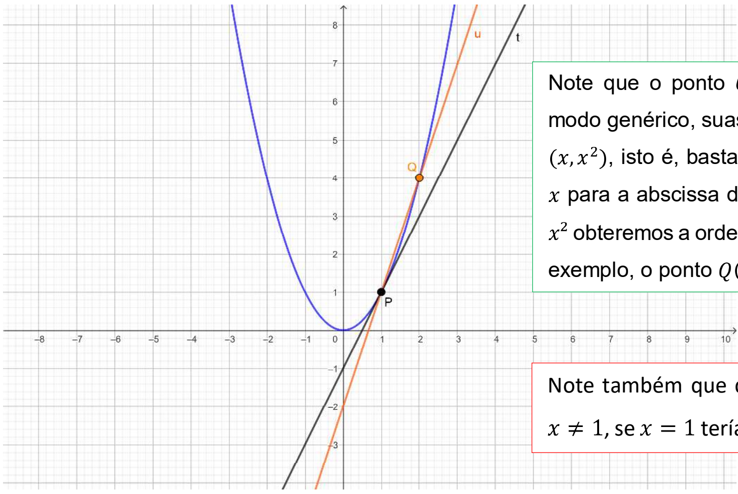
04. Quando estudamos *geometria analítica* aprendemos a determinar a *equação de uma reta tangente* a uma curva dada. A equação da reta tangente nos diz qual é a *inclinação* da reta e seu *coeficiente linear*. O gráfico da curva $y = x^2$ está representado no verso da folha, veja:



Agora vamos marcar no gráfico acima o ponto P de coordenas $(1{,}1)$ e logo em seguida traçar por esse ponto a reta t tangente a curva $y = x^2$, observe o gráfico:



Por fim, vamos marcar sobre a curva o ponto Q de coordenadas (x, x^2) e traçar pelos pontos P e Q a reta u, observe a imagem na próxima folha:



Note que o ponto Q foi denotado de modo genérico, suas coordenadas são (x, x^2), isto é, basta escolher um valor x para a abscissa do ponto e ao fazer x^2 obteremos a ordenada do ponto. Por exemplo, o ponto $Q(2,4) = Q(2,2^2)$.

Note também que devemos ter $x \neq 1$, se $x = 1$ teríamos $P = Q$.

Utilize seus conhecimentos prévios, reflita sobre a leitura e as imagens apresentadas no enunciado para responder os itens que se seguem.

(a) Ao analisar a imagem acima percebemos que a reta u passa pelos pontos $P(1,1)$ e $Q(2,4)$, use essas informações e determine o *coeficiente angular* da reta u.

Solução:

(b) Agora vamos pensar de uma forma mais geral! Considere que a reta u passa pelos pontos $P(1,1)$ e $Q(x, x^2)$. Qual é coeficiente angular da reta u?

Solução:

(c) Imagine que você tivesse o *"poder"* de mover o ponto Q livremente pela parábola. Se você escolhesse mover o ponto Q de modo tal que ele fique cada vez mais próximo de P, o que ocorreria com a inclinação da reta u em relação a inclinação da reta t?

____

____

____

ATENÇÃO!

No item (d) achamos interessante exibir a resposta do item (b) para explorarmos outras ideias, intuitivamente, utilizando esse resultado. Caso você não tenha encontrado anteriormente a resposta para o item (b) é importante que você **NÃO** retorne ao item (b) para reescrever a resposta apresentada no enunciado deste item, **DEIXE EM BRANCO**.

Afinal, o intuito dessa atividade é realizar uma sondagem acerca dos seus conhecimentos prévios. Por outro lado, isso não impede que você investigue e resolva o item (d) usando o resultado apresentado.

(d) Se você respondeu corretamente o item (b), certamente, deve ter encontrado

$$m_u = x + 1$$

A expressão acima representa o coeficiente angular da reta u, secante a curva, que passa pelos pontos $P(1,1)$ e $Q(x, x^2)$. A seguir apresentaremos duas tabelas que foram construídas atribuindo alguns valores diferentes para x.

É importante destacar que os valores que escolhemos para x se encontram na *"vizinhança"* de 1. Mas, lembre-se que $x \neq 1$.

Inicialmente tomaremos para x valores que estão à esquerda de 1. Observe o intervalo abaixo para que a ideia fique mais clara, os valores escolhidos para x estão nesse intervalo.

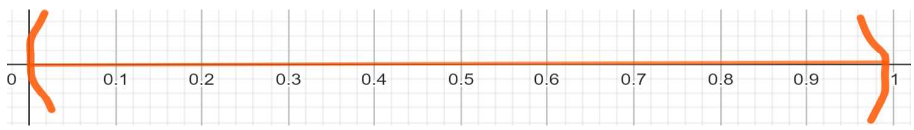


Tabela 1: Atribuindo valores para x que estão à esquerda de 1.

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	...	0,99999	...
m_u	1	1,5	1,75	1,9	1,99	...	1,99999	...

Agora vamos atribuir para x valores que estão à direita de 1. Observe novamente o intervalo destacado na próxima folha para entender melhor a ideia, os valores escolhidos para x estão nesse intervalo.

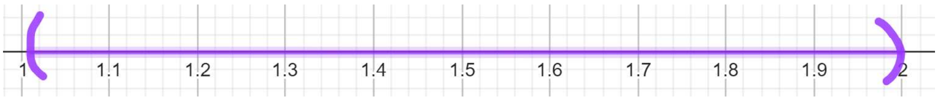


Tabela 2: Atribuindo valores para x que estão à direita de 1.

x	2	1,75	1,5	1,25	1,1	...	1,0009	...
m_u	3	2,75	2,5	2,25	2,1	...	2,0009	...

Reflita um pouco sobre as informações apresentadas no item (d), caso seja necessário volte um pouco e reveja as três imagens trazidas na abordagem inicial do enunciado da questão 04.

Agora comente as afirmações a seguir:

Afirmação 1: *"afirmar que x tende a 1 pela direita ou pela esquerda é equivalente a dizer que o ponto Q tende ao ponto P pela direita ou pela esquerda".*

____

____

____

Afirmação 2: *"o coeficiente angular m_t da reta t corresponde ao valor do coeficiente angular m_u da reta u quando o ponto Q está infinitamente próximo do ponto P, ou seja, à medida que são atribuídos valores para x que estão na vizinhança de 1 (e além disso, $x \neq 1$), os pontos P e Q se aproximam cada vez mais e em algum momento esses pontos estarão tão próximos um do outro quanto se queira, o que garante nesse momento que essas duas retas possuam a mesma inclinação (isto é, possuam mesmo coeficiente angular)".*

____

____

____

____

"A matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza". (Bertrand Russel).

Escola Técnica Estadual Clóvis Nogueira Alves

Disciplina Eletiva: Investigando Processos Infinitos

Professor: Tiago Melo

Aluno ou (a): ____

Turma: 3º ano do Curso Técnico em Edificações

2º Sondando a Aprendizagem

Os questionamentos que serão apresentados a seguir têm por finalidade verificar os conhecimentos prévios dos alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre a área do círculo.

Instruções: Leia as questões atentamente, utilize seus conhecimentos prévios e responda cada pergunta expondo suas ideias de forma clara e detalhada.

O Problema da Área sob diferentes perspectivas

01. Você lembra como calculamos a área de um círculo? Marque apenas uma das opções a seguir.

(   ) Sim.   (   ) Não.

02. Se sua resposta à pergunta anterior foi SIM, então determine a expressão utilizada para o cálculo da área ou, caso prefira, explique brevemente como você faz.

____

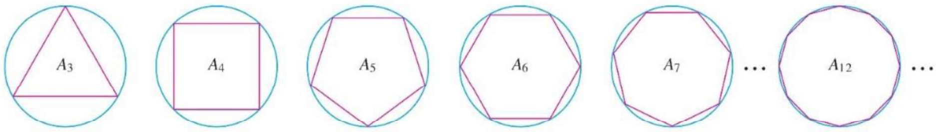
____

____

03. Qual é a área de um círculo de raio unitário (isto é, $r = 1$ unidade de medida)?

Rascunho

04. Seja A_n um polígono regular de n lados. A figura abaixo traz uma lista de polígonos regulares inscritos num círculo de raio r, onde $r = 1$ unidade de medida.



Reflita um pouco sobre a figura acima e responda os itens a seguir:

(a) O que está ocorrendo com o número de lados dos polígonos regulares inscritos no círculo?

(b) Comente a seguinte afirmação: *“a área dos polígonos regulares inscritos que foram apresentados é menor que a área do círculo, independentemente da quantidade de lados que cada um deles possui”*.

(c) Comente a seguinte afirmação: *“à medida que aumentamos o número de lados do polígono regular inscrito sua área fica cada vez mais próxima da área do círculo”*.

(d) Agora imagine que fosse possível construir um polígono regular inscritível com um número infinito de lados. O que podemos dizer sobre área desse polígono e a área do círculo?

(e) O que você entende por *limite*? Dê um exemplo.

(f) Podemos concluir que a *área do círculo* **limita superiormente** a *área dos polígonos regulares* nele *inscritos*? Justifique sua resposta.

(g) Comente a seguinte afirmação: *"Quando o número de lados* $\boldsymbol{n}$ *de um polígono regular inscrito num círculo assume valores cada vez maiores, isto é,* $\boldsymbol{n}$ *tende ao infinito, podemos dizer que a área desse polígono é exatamente igual a área do círculo"*.

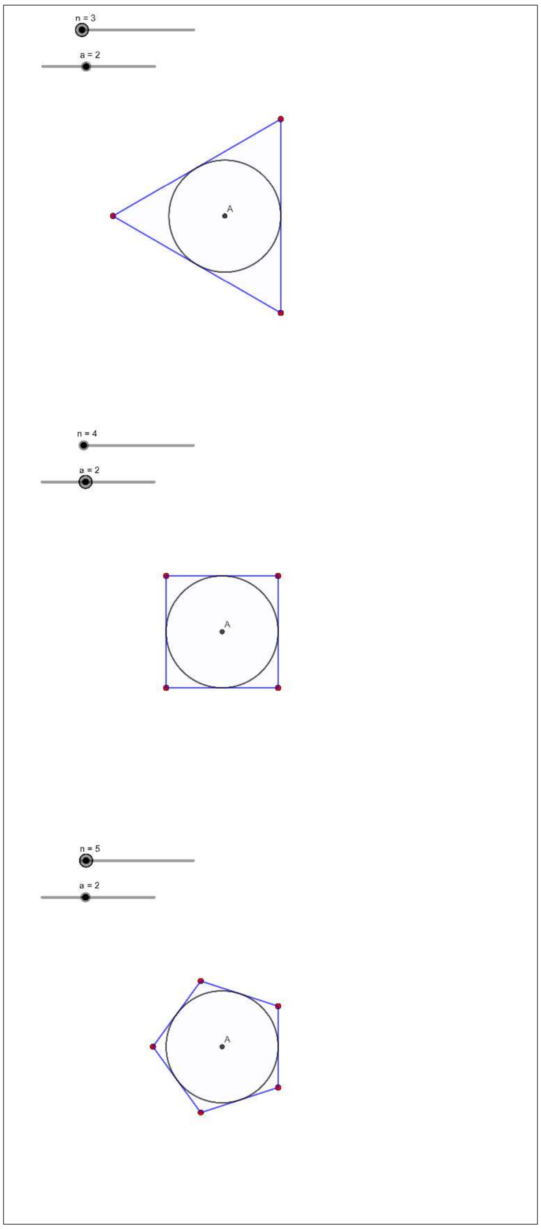
____

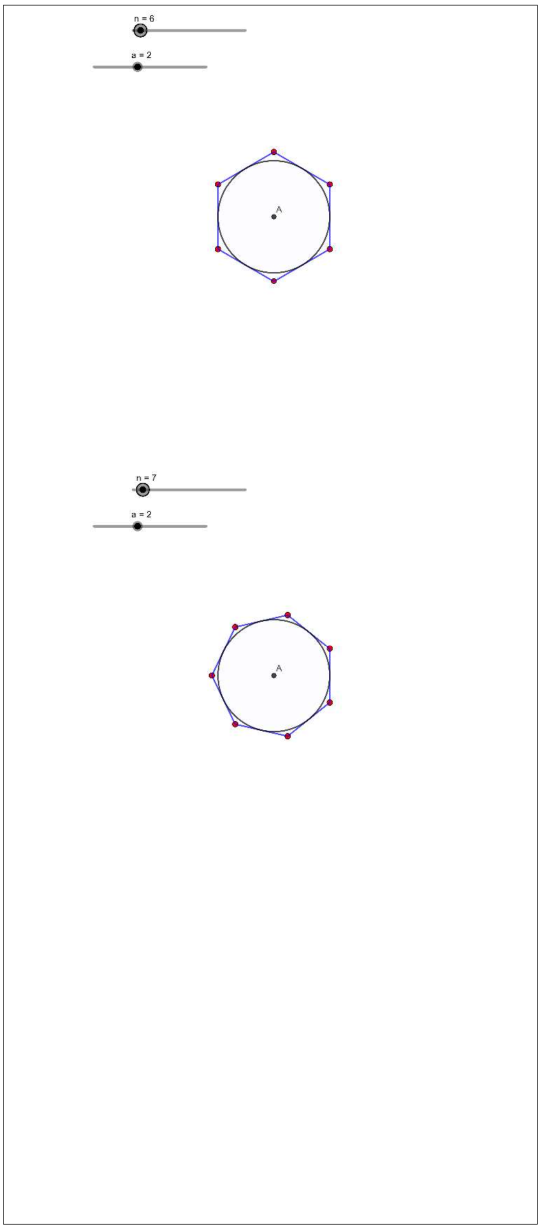
____

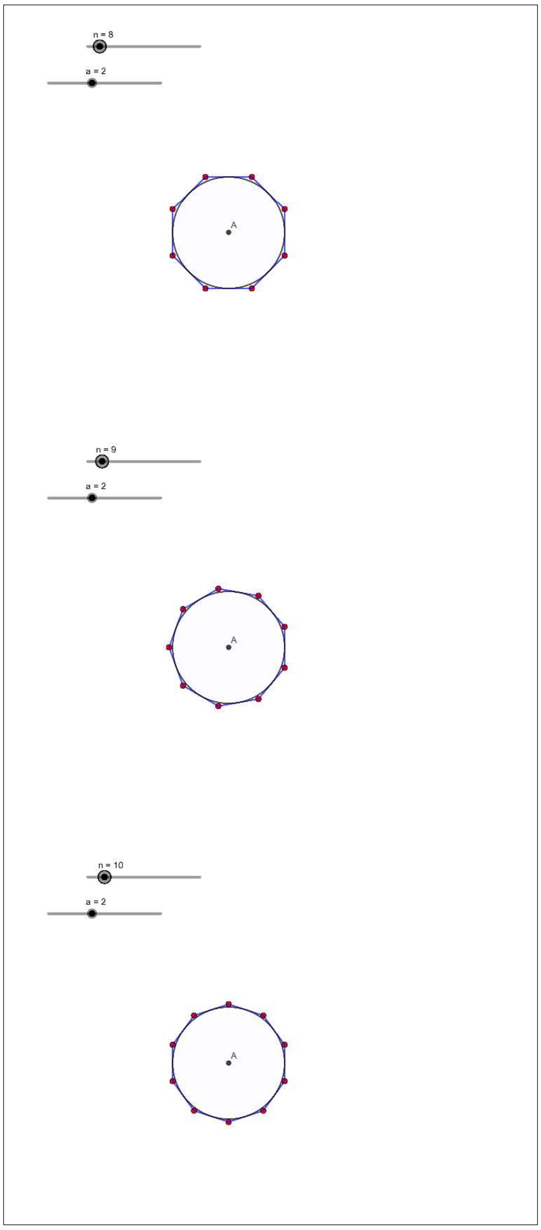
____

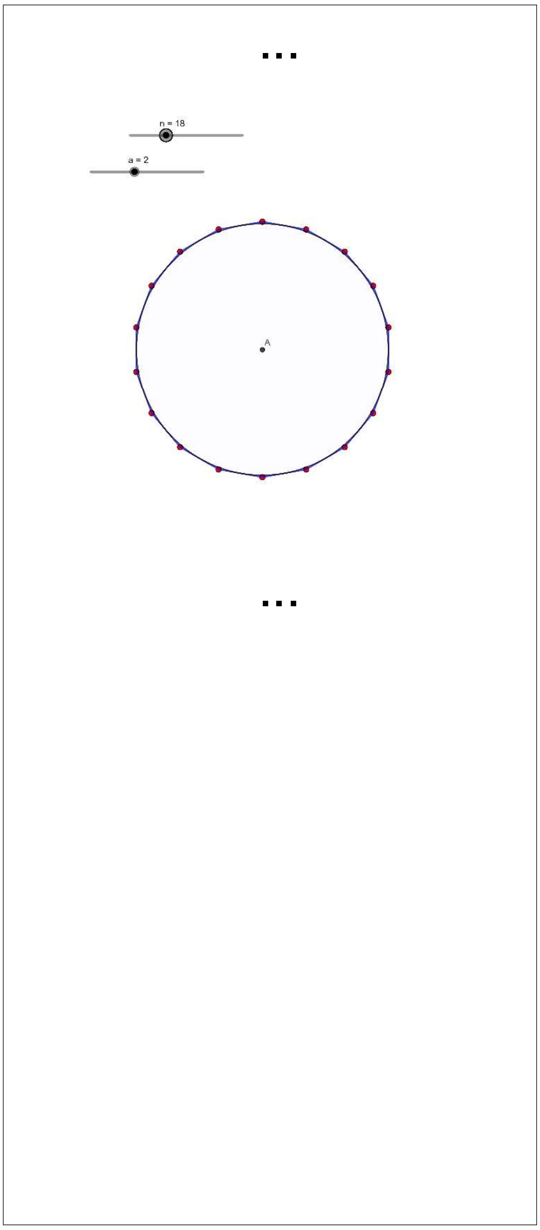
____

05. Utilizando o *software GeoGebra* construímos as imagens a seguir:









Note que em cada uma das imagens apresentadas anteriormente figuram dois **controles deslizantes**, são eles: $\boldsymbol{n}$ que *representa o número de lados dos polígonos regulares circunscritos* e $\boldsymbol{a}$ que *representa a medida do raio do círculo*.

Para resolver este exercício você deverá manter o valor de a fixo $(a = 2)$ e analisar o que ocorre quando o número de lados dos polígonos circunscritos se modifica, isto é, aumenta indefinidamente.

Agora é com você! Após fazer a leitura do enunciado e refletir cuidadosamente sobre as imagens resolva cada um dos itens a seguir:

(a) O que está acontecendo com o número de lados do polígono circunscrito no círculo?

____

(b) Comente a seguinte afirmação: *“a área dos polígonos regulares circunscritos que foram apresentados é maior que a área do círculo, independentemente da quantidade de lados que cada um deles possui”*.

(c) Comente a seguinte afirmação: *“à medida que aumentamos o número de lados do polígono regular circunscrito sua área fica cada vez mais próxima da área do círculo”*.

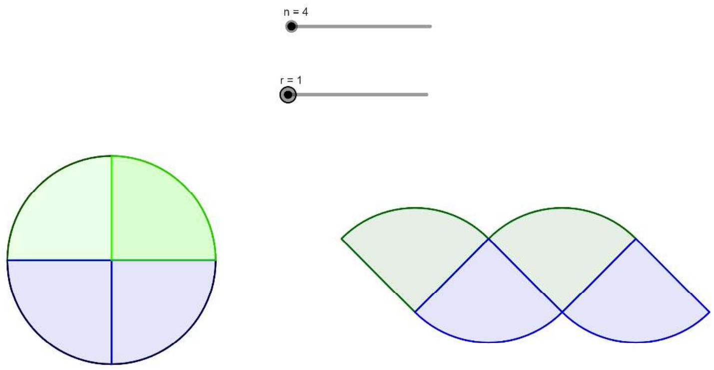
(d) Agora imagine que fosse possível construir um polígono regular circunscritível com um número infinito de lados. O que podemos dizer sobre área desse polígono e a área do círculo?

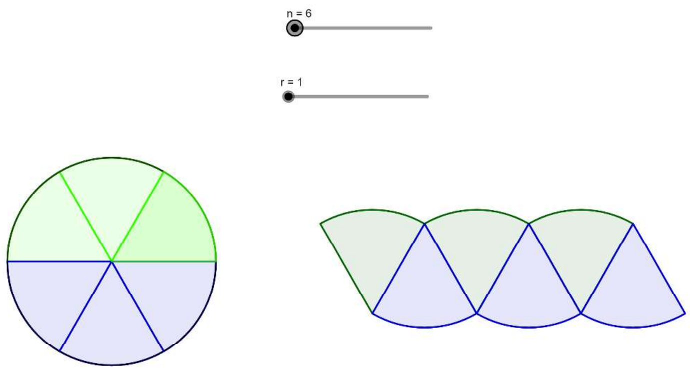
(e) Tendo em vista o que você entende por limite responda a seguinte pergunta: podemos concluir que a *área do círculo* **limita inferiormente** a *área dos polígonos regulares* nele *circunscritos*? Justifique sua resposta.

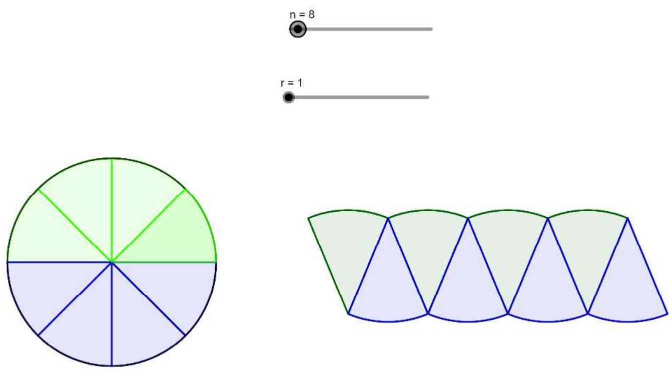
(f) Comente a seguinte afirmação: *“Quando o número de lados n de um polígono regular circunscrito num círculo assume valores cada vez maiores, isto é, n tende ao infinito, podemos dizer que a área desse polígono é exatamente igual a área do círculo”*.

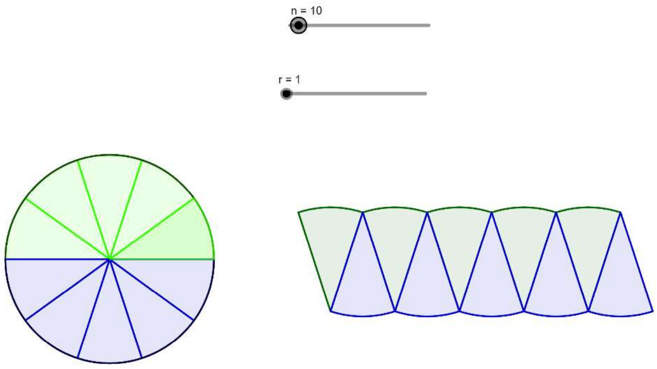
06. As imagens a seguir foram produzidas utilizando o *software GeoGebra*. Em cada uma das imagens aparecem dois **controles deslizantes**, são eles: $\boldsymbol{n}$ que *representa o número de setores circulares* e $\boldsymbol{r}$ que *representa a medida do raio do círculo*.

No entanto, neste exercício vamos considerar o raio unitário ($\boldsymbol{r} = \mathbf{1}$) e analisar apenas o que ocorre quando o número de setores se modifica, isto é, aumenta indefinidamente.

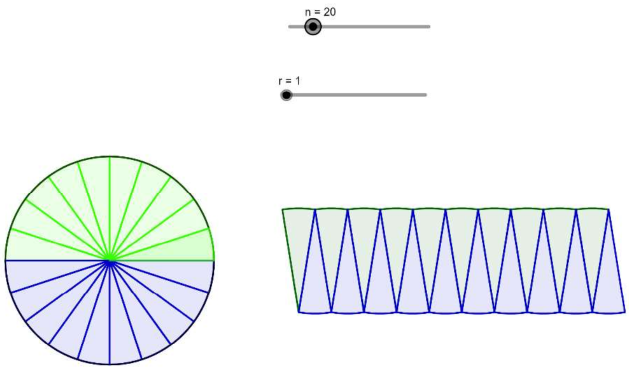








...



...

Agora que você já analisou cuidadosamente cada umas das imagens acima responda o que se pede nos itens a seguir.

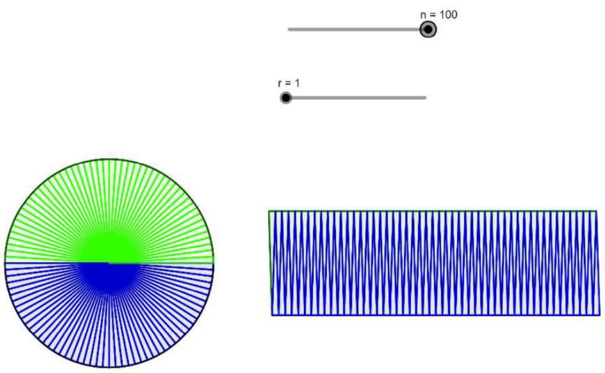
(a) Descreva brevemente o que está ocorrendo nas configurações acima.

(b) Comente a seguinte afirmação: *"Quando o número de setores circulares $\boldsymbol{n}$ do círculo assume valores cada vez maiores, isto é, $\boldsymbol{n}$ tende ao infinito, afirmamos que a área do círculo é igual a área de um retângulo formado pelo encaixamento dos setores do círculo".*

(c) Como calculamos a área de um retângulo? Escreva a expressão que você utiliza (nomeie cada um dos entes matemáticos da expressão) ou descreva o processo brevemente.

(d) Ao analisar as imagens formadas pelo encaixamento dos setores você consegue visualizar os entes matemáticos necessário para calcular a área do retângulo (lembre-se da sua resposta no item anterior)? Determine os valores desses entes matemáticos.

(e) A imagem a seguir apresenta uma configuração onde o número de setores circulares é igual a 100 (isto é, $\boldsymbol{n = 100}$).



Reflita sobre as respostas anteriores e *determine a área do retângulo formado pelos setores encaixados* (considere o valor genérico $\boldsymbol{r}$ para o *raio do círculo*). Há alguma relação entre o valor encontrado e a área do círculo?

Rascunho

"O importante é entender profundamente as coisas e as relações entre elas. É nisso que reside a inteligência". (Laurent Schwartz)

Escola Técnica Estadual Clóvis Nogueira Alves

Disciplina Eletiva: Investigando Processos Infinitos

Professor: Tiago Melo

Aluno ou (a): ____

Turma: 3º ano do Curso Técnico em Edificações

3º Sondando a Aprendizagem

Os questionamentos que serão apresentados a seguir têm por finalidade verificar os conhecimentos prévios dos alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre o conceito de velocidade instantânea.

Instruções: Leia o texto e as questões com atenção! Responda cada pergunta expondo suas ideias de forma clara e detalhada.

Analisando o Problema da Velocidade Instantânea

Quando estudamos a Cinemática, classificamos os movimentos dos corpos em uniformes, que possuem velocidade constante, e em variados, cuja velocidade varia com o tempo. É bem verdade que os movimentos em que a velocidade varia no decurso do tempo são os mais comuns de observarmos, a título de exemplo, o deslocamento de um veículo, uma pessoa caminhando, um objeto em queda livre, entre outros.

Uma particularidade do movimento uniforme é que a velocidade média em qualquer intervalo de tempo é sempre constante e além disso, será sempre igual a velocidade em qualquer instante. Por outro lado, no movimento variado, os conceitos de velocidade média definida num determinado intervalo de tempo e velocidade instantânea são distintos.

Vale destacar também que ao falarmos sobre movimentos variados é do nosso interesse abordar apenas problemas que envolvam o Movimento Uniformemente Variado (MUV), isto é, movimentos que possuem aceleração constante e diferente de zero, o que faz a velocidade apresentar variações iguais em intervalos de tempos iguais.

Reflita sobre os conceitos apresentados no texto e responda o problema a seguir:

Um móvel descreve um movimento uniformemente variado (MUV) numa trajetória retilínea e os seus espaços variam no decorrer do tempo segundo a função horária: $S_t = 10t + 2{,}5t^2$, onde S_t é o espaço percorrido no instante t (t em segundos e S em metros).

Agora, responda os itens a seguir:

(a) Na tabela a seguir encontramos duas informações, t e S_t, onde t é o instante e S_t é o espaço percorrido no instante t. Complete a tabela substituindo os valores t na função horária que foi dada.

t	0	1	2	3	4	5
S_t						

(b) Calcule a velocidade média (V_m) no intervalo $[1,2]$.

(c) Vamos calcular o espaço percorrido pelo móvel em intervalos cada vez mais próximos de $t = 1$. Os dados estão organizados na tabela abaixo, observe:

t	1	...	1,001	...	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
S_t	12,5	...	12,5150025	...	14,025	15,6	17,225	18,9	20,625

Agora, utilize os dados da tabela acima e calcule a velocidade média do móvel nos seguintes intervalos:

Δt	$[1; 1{,}5]$	$[1; 1{,}4]$	$[1; 1{,}3]$	$[1; 1{,}2]$	$[1; 1{,}1]$	...	$[1; 1{,}001]$
V_m						...	

<u>Nota:</u> você pode utilizar a calculadora para facilitar o seu trabalho.

(d) Ao analisar os resultados obtidos na tabela acima você notou algum padrão ou percebeu algo interessante em relação aos valores obtidos para as velocidades médias? Justifique sua resposta.

___

___

___

(e) Tomando como base a última tabela do item (c) é possível deduzir qual é a velocidade do móvel no instante $t = 1$? Justifique sua resposta.

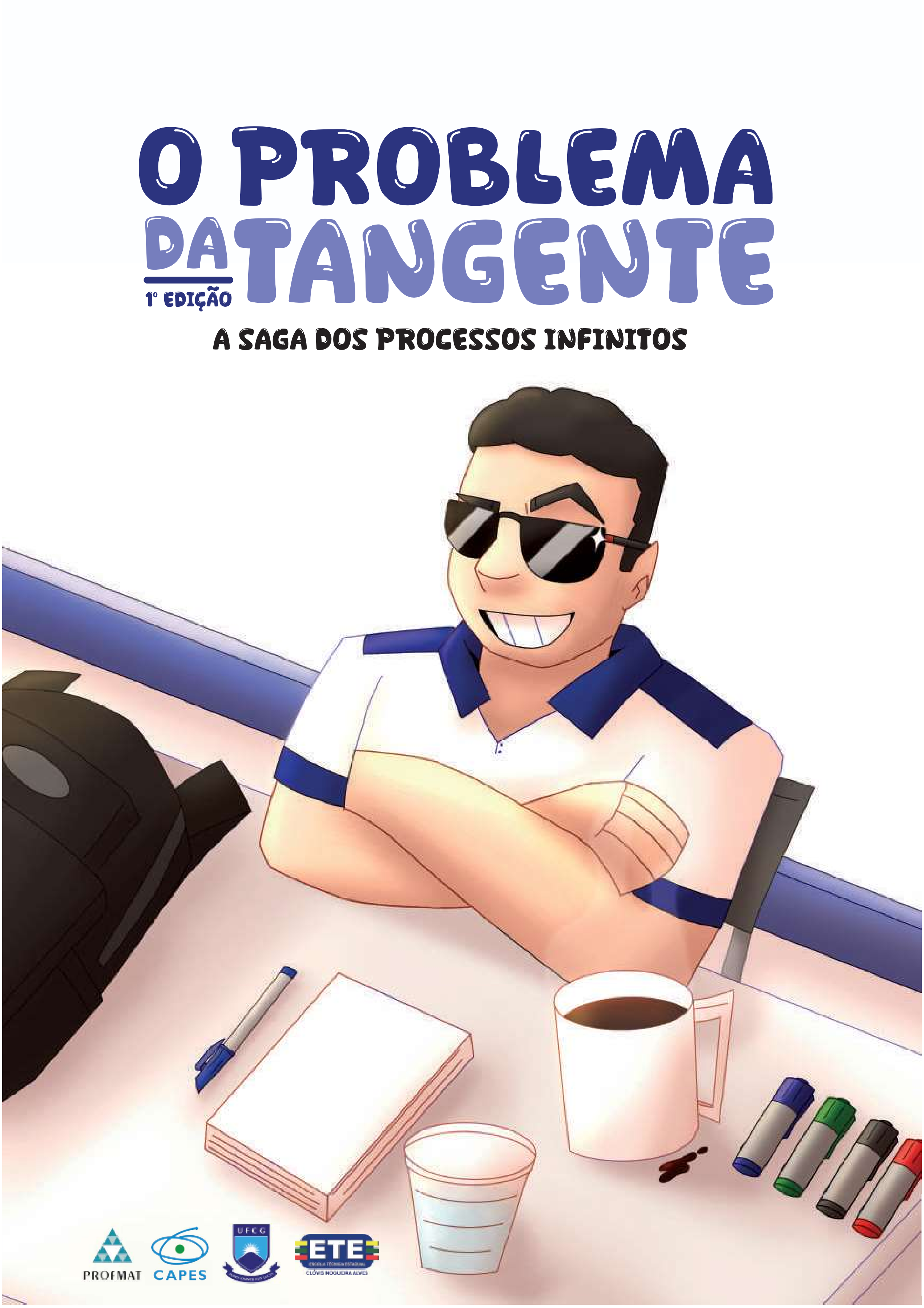
___

___

___

"A beleza da Matemática só se mostra aos seguidores mais pacientes". (Maryam Mirzakhani).

APÊNDICE B – HQ 1


O PROBLEMA
DA TANGENTE
1º EDIÇÃO
A SAGA DOS PROCESSOS INFINITOS
PROFMAT
CAPES
UFCG
ETE

TÍTULO ORIGINAL
O Problema da Tangente: a Saga dos Processos Infinitos. 1ª edição.

ROTEIRO
Tiago Emanoel Melo Pereira

REVISÃO | ORIENTAÇÃO
Dr. Alânnio Barbosa Nobrega
Dr. Romildo Nascimento de Lima

DESENHOS
João Gustavo Correia da Silva

DIAGRAMAÇÃO
Carlos Henrique Inácio Lima

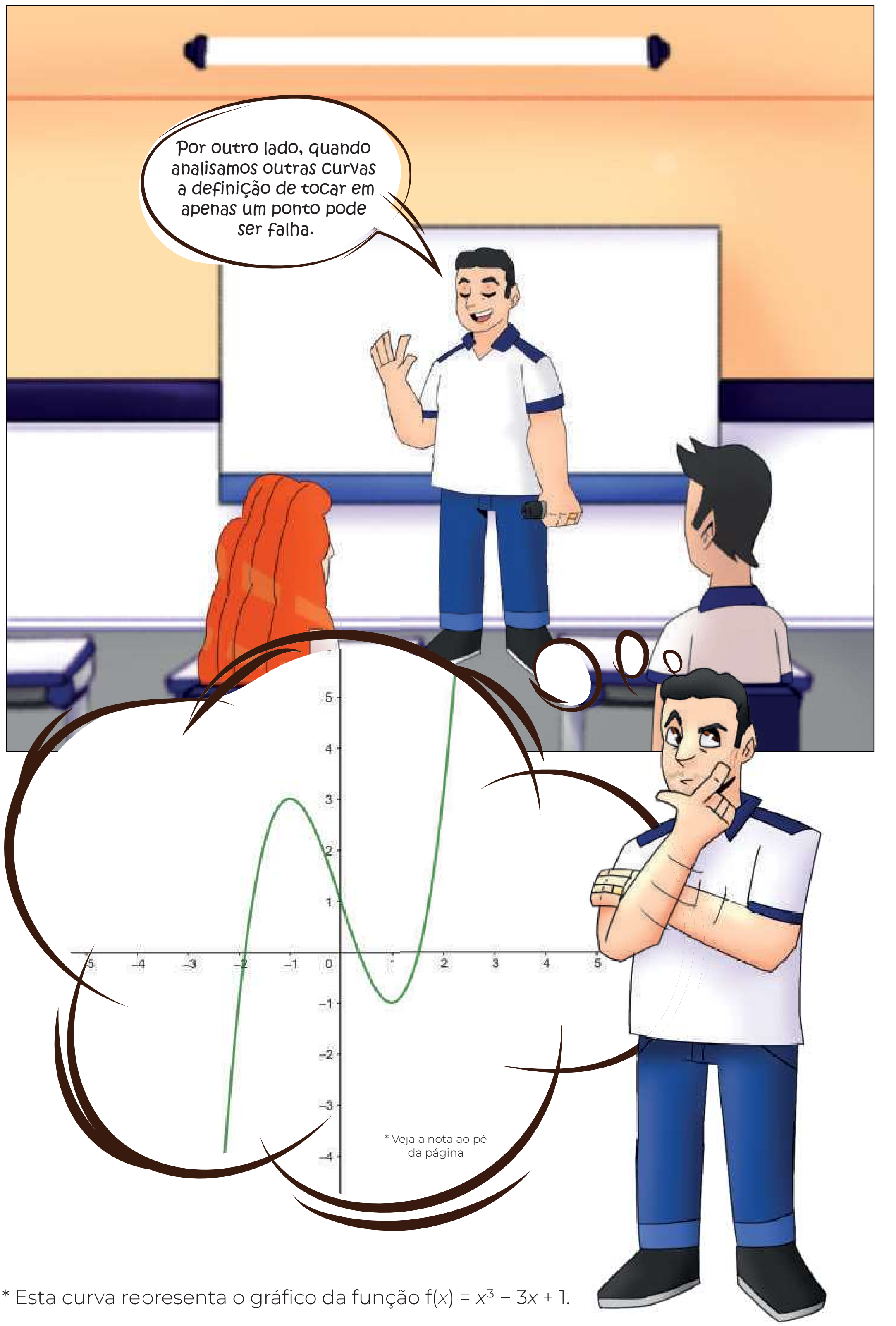
Esta história em quadrinhos foi criada com o intuito de divulgar a Matemática. Além do mais, por meio dessa importante ferramenta didática, visamos proporcionar aos educandos uma aprendizagem lúdica e significativa acerca de temas abordados na disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos.

AO LEITOR

Nesta história em quadrinhos vamos estudar **o problema da tangente.** Será uma ótima oportunidade para aprender a definir corretamente o conceito de reta tangente e investigar intuitivamente a ideia de limite.

"A Matemática é a linguagem em que Deus escreveu o Universo".
(Galileu Galilei)

O MATEMÁTICO EM UMA AULA SOBRE O PROBLEMA DA TANGENTE



* Esta curva representa o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

8


GeoGebra
Com o auxílio do software GeoGebra vamos construir as duas situações comentadas anteriormente.
Primeiramente, vamos construir uma circunferência e uma reta tangente a ela.
A

O que é o GeoGebra?

GeoGebra é um software dinâmico de Matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma.

Por hora, o GeoGebra será a nossa principal ferramenta de trabalho para investigar o problema da tangente.

Você ainda não utilizou o GeoGebra? Não o conhece?

Não se preocupe! Você aprenderá muitas coisas interessantes sobre o GeoGebra nesta aula.

Além disso, vamos deixar algumas instruções para você aprender a construir no GeoGebra.

INSTRUÇÕES

Instale o software GeoGebra em seu computador, baixe o App em seu smartphone ou pesquise GeoGebra Classic no Google para utilizá-lo de forma online. Agora você já pode abrir o software e explorar todas as suas funções!!

A primeira construção que iremos realizar se trata de uma circunferência e uma reta tangenciado em um dos seus pontos.

Para realizar a construção utilizaremos os ícones apresentados no último quadrinho da página anterior. Cada um desses ícones representa um comando do GeoGebra, vejamos o que cada um deles significa:

1º Passo: Clique em e logo em seguida na opção Círculo: Centro & Raio Após realizar esses passos passe o mouse sobre o plano cartesiano e marque o centro da circunferência no local de sua preferência (sugestão: marque o ponto na origem do plano cartesiano), logo em seguida aparecerá uma aba na tela solicitando que você determine a medida do raio do círculo que será construído, escreva um valor de sua preferência (sugestão: 3);

2º Passo: Clique em A e logo em seguida na opção A Ponto. Agora, passe o mouse sobre a circunferência e marque o ponto no local de sua preferência;

3º Passo: Clique em e logo em seguida na opção Reta Tangente. Agora, você deve realizar dois cliques em sequência: 1º) clique no ponto que você marcou sobre a circunferência e 2º) clique em qualquer lugar da borda da circunferência.

E agora?


Observem!! A construção acabou de ser finalizada!
Nossa, que legal!

Vamos construir! 😎

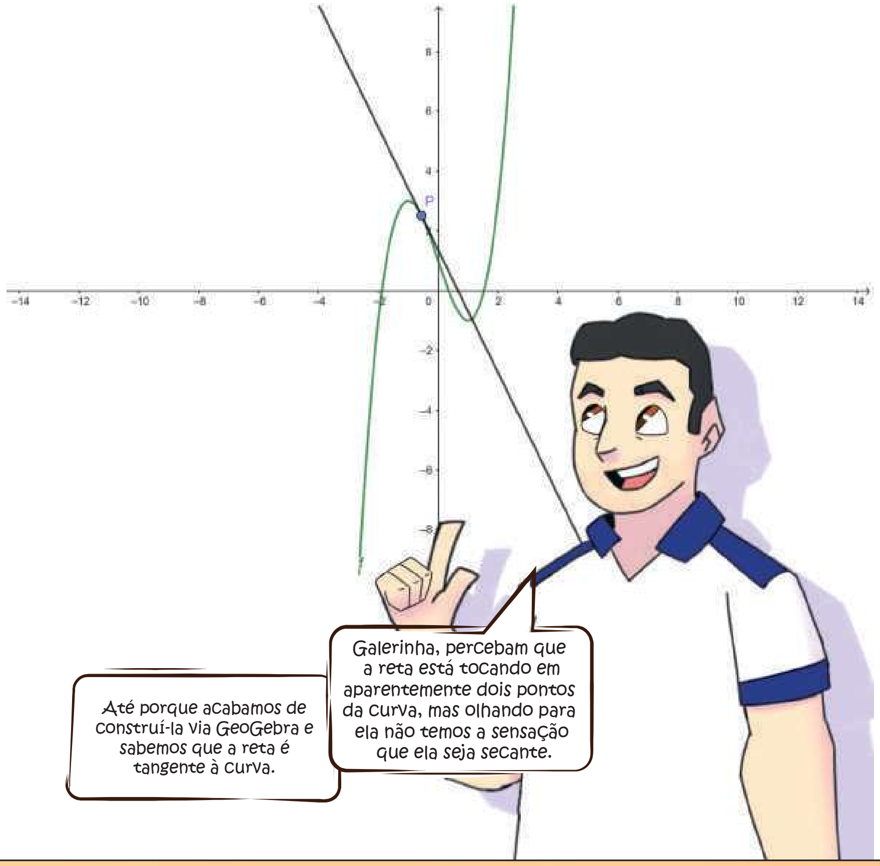
INSTRUÇÕES

1º Passo: Escreva dentro do espaço da aba de entrada | + | Entrada... | a função f(x) = $x^3 - 3x + 1$.

2º Passo: clique no ícone e logo em seguida selecione a opção Ponto. Agora, passe o mouse sobre a curva e marque o ponto no local de sua preferência.

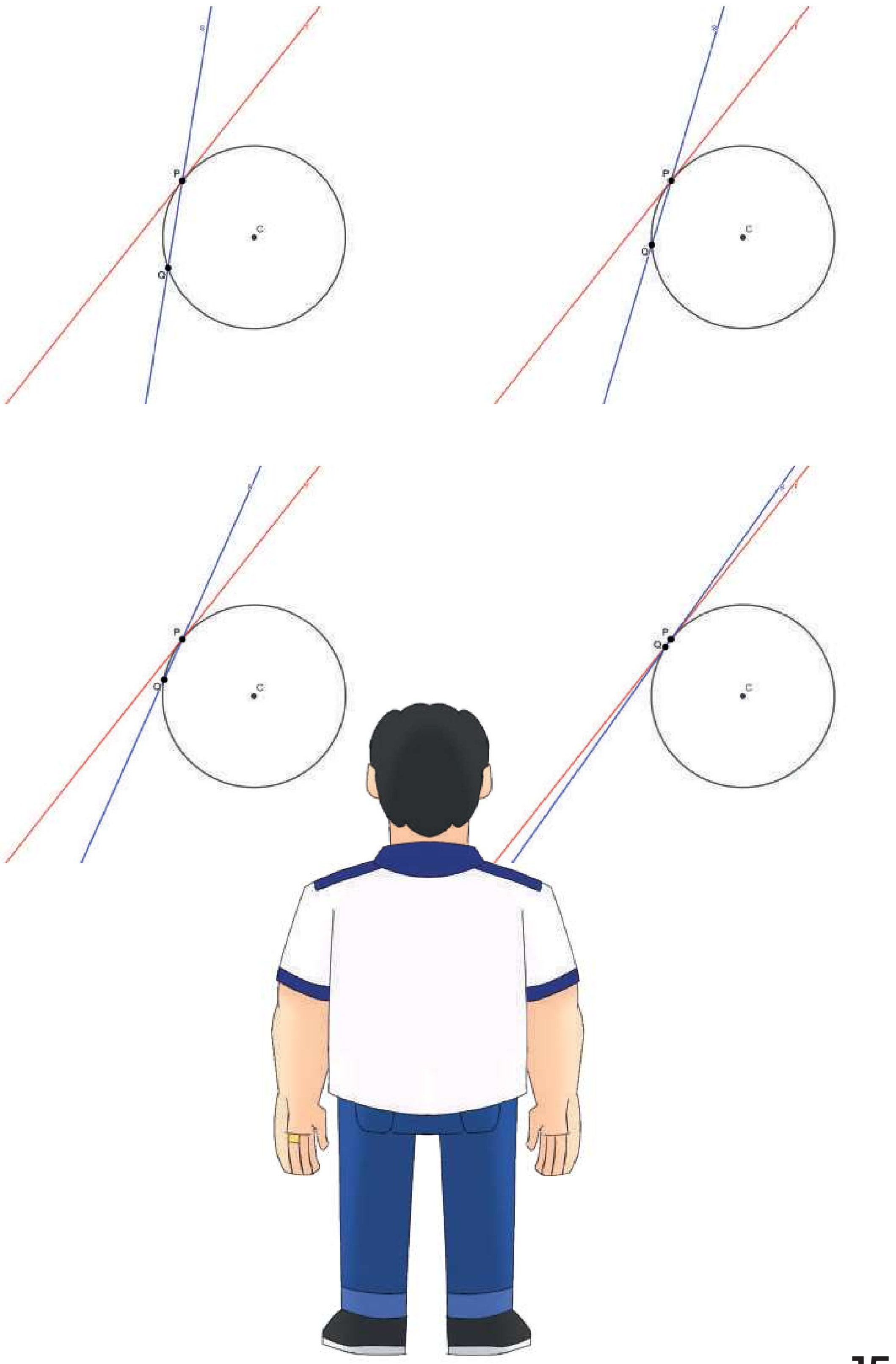
3º Passo: clique no ícone e depois selecione a opção Reta Tangente. Por fim, realize as seguintes ações: 1º) clique no ponto que você marcou sobre a curva e 2º) clique em qualquer parte da curva.

Construção realizada com sucesso! 😄

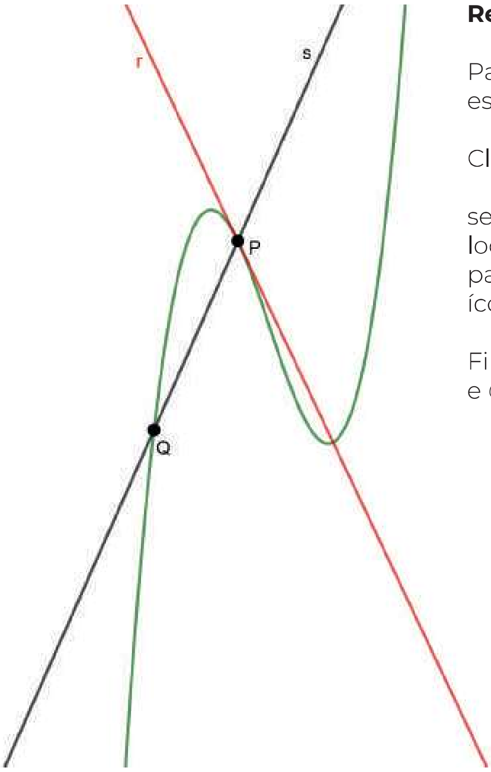

Galerinha, percebam que a reta está tocando em aparentemente dois pontos da curva, mas olhando para ela não temos a sensação que ela seja secante.
Até porque acabamos de construí-la via GeoGebra e sabemos que a reta é tangente à curva.


Não vamos trazer aqui nesse momento uma definição formal do que venha a ser reta tangente,
mas uma ideia do que entendemos por reta tangente e qual é sua relação com as retas secantes.
Definiremos reta secante a uma curva como a reta que intersecta uma curva em pelo menos dois pontos distintos.

A partir de agora vamos explorar o conceito de reta secante a fim de investigar mais profundamente as construções que realizamos anteriormente. Inicialmente, vamos analisar na circunferência o comportamento da reta secante s e a tangente *r*.



Agora, vamos construir uma reta secante à curva $f(x) = x^3 - 3x + 1$, passando pelos pontos P e Q.



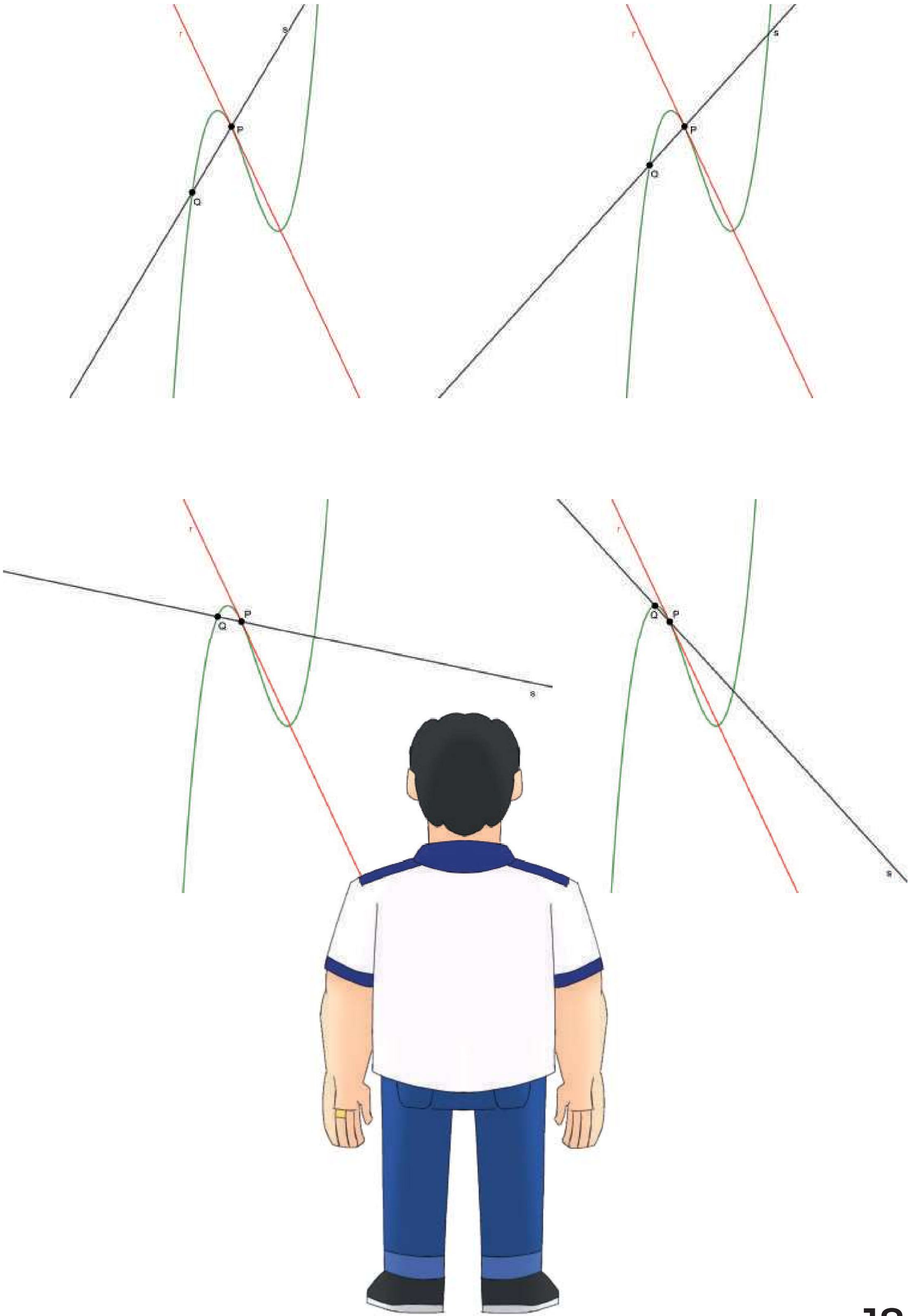
Realizando a construção

Para construir a reta s, secante à curva, basta escolher um outro ponto da curva.

Clique novamente no ícone A, logo em seguida selecione a opção A Ponto e escolha o local de sua preferência no contorno da curva para marcar o ponto. Em seguida, clique no ícone, e selecione a opção Reta.

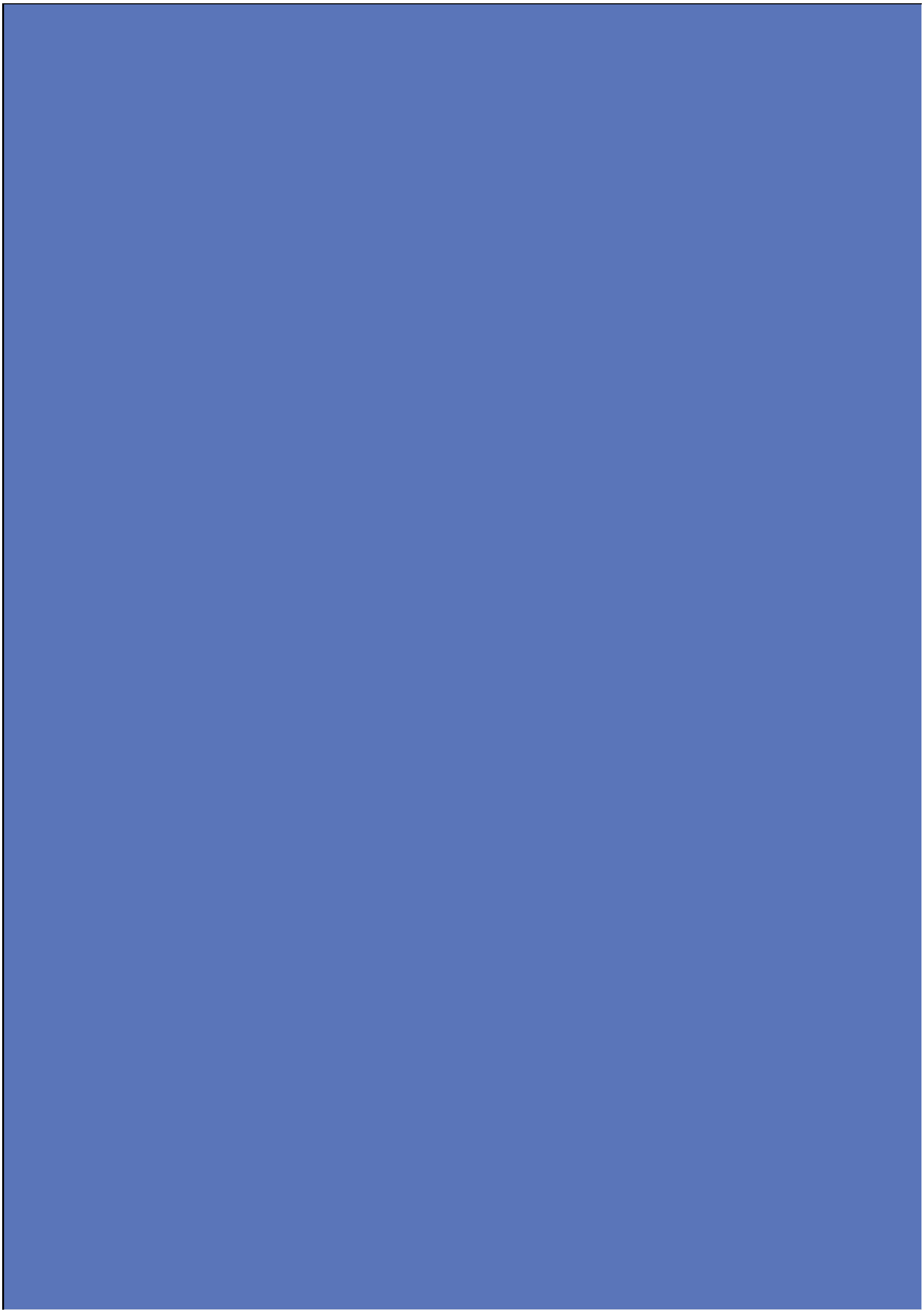
Finalmente, selecione na imagem os pontos P e Q da curva. Pronto, a construção foi realizada!


Novamente, imagine que você possa deslocar livremente o ponto Q pela curva com o intuito de deixar este ponto cada vez mais próximo de P.
Na próxima página apresentaremos uma sequência de imagens para ilustrar de forma dinâmica o deslocamento do ponto Q ao longo da curva. Lembre-se: a ideia é escolhermos o ponto Q de modo tal que ele esteja nas proximidades do ponto P.


r
s
P
Q
r
s
P
Q
r
P
Q
s
r
Q
P
s


Ao analisarmos, intuitivamente, esses dois exemplos podemos ter um melhor entendimento sobre o que realmente é reta tangente.
Dizemos que **RETA TANGENTE** é a reta cuja inclinação é o **LIMITE*** das inclinações das secantes, ou ainda, quando temos uma reta secante e seus pontos são infinitamente próximos.
*LI.MI.TE (s. m)
Significa: **fronteira.**
Do ponto de vista da Matemática a ideia é basicamente a mesma. O fato interessante é analisarmos um ponto Q que está localizado nas proximidades de um ponto P fixo e o que ocorre quando esses pontos se aproximam cada vez mais. De forma intuitiva, conclui-se que quanto maior for a proximidade desses pontos as inclinações das retas secantes irão convergir para um mesmo valor, este valor limite corresponde a inclinação da reta tangente.
19


Galerinha, por hoje é só. Até a próxima aula.



APÊNDICE C – HQ 2


O PROBLEMA
DA VELOCIDADE
INSTANTÂNEA
A SAGA DOS
PROCESSOS
INFINITOS
2º EDIÇÃO
PROFMAT
CAPES
UFCG
ETE

TÍTULO ORIGINAL
O Problema da Velocidade Instantânea: a Saga dos Processos Infinitos. 2ª edição.

ROTEIRO
Tiago Emanoel Melo Pereira

REVISÃO | ORIENTAÇÃO
Dr. Alânnio Barbosa Nobrega
Dr. Romildo Nascimento de Lima

DESENHOS
João Gustavo Correia da Silva

DIAGRAMAÇÃO
Carlos Henrique Inácio Lima

Esta história em quadrinhos foi criada com o intuito de divulgar a Matemática. Além do mais, por meio dessa importante ferramenta didática visamos proporcionar aos educandos uma aprendizagem lúdica e significativa acerca de conteúdos pouco abordados no Ensino Básico.

AO LEITOR

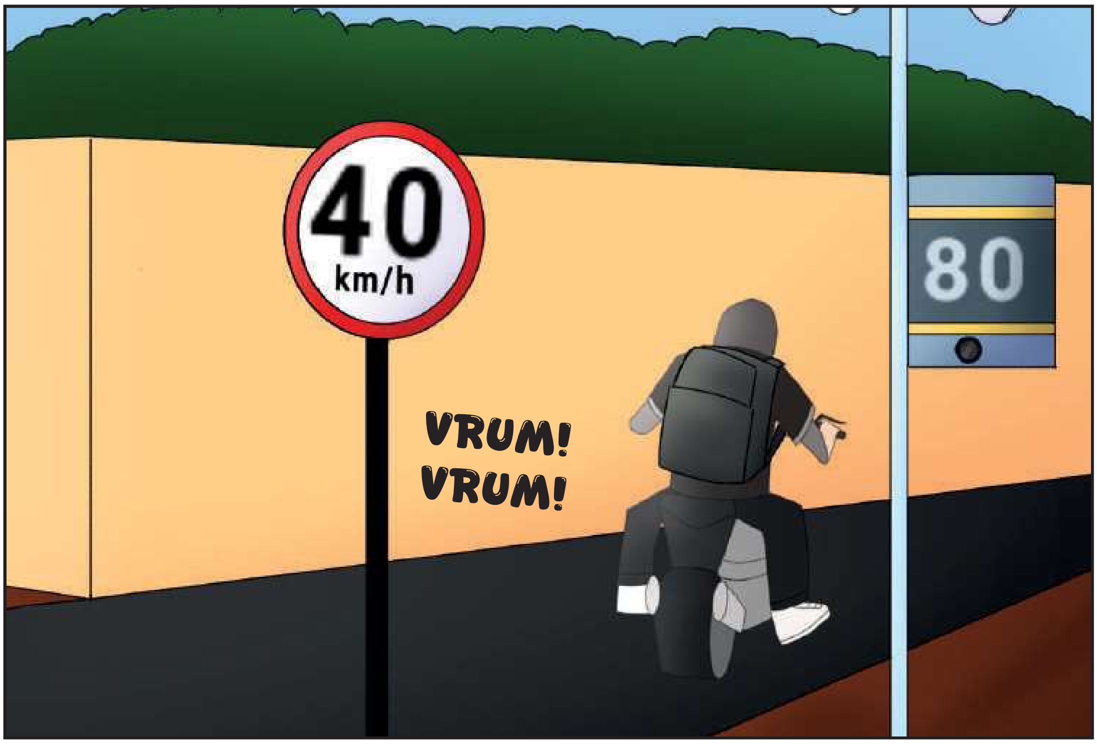
Nesta história em quadrinhos estudaremos **o problema da velocidade instantânea.**

O enredo apresentado nos permite relembrar alguns conceitos da Física normalmente estudados no 1º ano do Ensino Médio e entender como podemos determinar intuitivamente a velocidade de um móvel num determinado instante por meio de aproximações.

"Velocidade é tudo que eu preciso. Me poupe do que não é necessário..."
(A Ferro e Fogo – Engenheiros do Hawaii)

UM ESTUDANTE EM APUROS

O PROBLEMA DA VELOCIDADE INSTANTÂNEA


40
km/h
80
VRUM!
VRUM!


Ops! Agora é que eu não chego no horário mesmo!
PRIIII!
PRIIII!


PADARIA
Quando você passou pela lombada eletrônica foi registrado que a sua moto estava a 80 km/h, mas o limite de velocidade dessa via é de 40 km/h. Você não percebeu que estava rápido demais?
Desculpe Sr. Guarda, acho que a lombada deve está com algum defeito. Me explique como eu poderia estar a 80 km/h se só estava dirigindo por aqui há cerca de 1 minuto, e não durante 1 hora?
A questão não é essa! No instante em que você passou pela lombada registrou-se a velocidade de 80 km/h, isto quer dizer que se você seguisse viagem mantendo constante essa velocidade, após 1 hora, teria percorrido 80 km.
E com toda certeza eu já teria ultrapassado a Universidade.


Não tenho dúvidas disso! Contudo, se você tivesse continuado com essa velocidade durante 1 minuto, teria percorrido 1,33 km, e em 1 segundo 22,22 metros, e em 0,1 segundos teria percorrido 2,22 m e teria dado perfeitamente para você prosseguir durante 0,1 segundos sem ultrapassar a Universidade.
Entendo, você determinou os espaços percorridos com essa velocidade para intervalos de tempo cada vez menores. Mas, para mim só faz sentido pensar dessa forma se o limite de velocidade da via fosse 2,22 metros em 0,1 segundos.


Mas, o que eu estou dizendo são coisas equivalentes. O que vale é a velocidade instantânea, isto é, a velocidade no instante em que você passou pela lombada. Então, quando você diz que a lombada está quebrada não faz muito sentido.

Ao Leitor

Talvez você possa ter ficado um pouco confuso com tantos números aparecendo, mas afinal, o que o guarda fez? Tranquilize-se! Não foi nada demais! Ele apenas realizou algumas conversões para as unidades de tempo, distância e velocidade quando foi pertinente. Vejamos:

Inicialmente, ele argumentou que mantendo constante a velocidade de 80 *km/h*, após 1 hora, o estudante teria percorrido 80 *km*. Em seguida, o guarda realizou conversões com o intuito de determinar o espaço percorrido pelo estudante em intervalos de tempo cada vez menores. Por exemplo, como sabemos, 1 ***hora*** = 60 *minutos*, para calcular o espaço percorrido pelo móvel em 1 *minuto* basta fazer $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, onde $v_m = \frac{80}{60} \approx 1{,}33$ *km/min*, isto

significa que em 1 *minuto* o estudante teria percorrido 1,33 *km*.

E em 1 *segundo*? Qual distância o estudante teria percorrido? Como 1 *minuto* = 60 *segundos*, sabemos que 60 *minutos* = 3600 *segundos* e para calcular o espaço percorrido pelo móvel em 1 segundo basta fazermos $v_m = \frac{80}{3600} \approx 0{,}02222$ *km/s*,

ainda podemos melhorar este resultado lembrando que 1 *km* = 1000 *metros*, isto quer dizer que 0,02222 *km* = 22,22 *metros*, então em 1 *segundo* o estudante percorreria cerca de 22,22 *m*. Por último, vamos pensar no intervalo de tempo de 0,1 *segundos*. Neste intervalo qual seria o espaço percorrido pelo estudante? Note que, 0,1 *segundos* corresponde a $\frac{1}{10}$ de segundo,

isto é, para determinar o espaço percorrido nesse intervalo de tempo basta dividirmos o espaço percorrido em 1 *segundo* em 10 partes iguais.
Desse modo, $\frac{22{,}22}{10} = 2{,}222$, isto significa que após 0,1 segundos o estudante percorreria

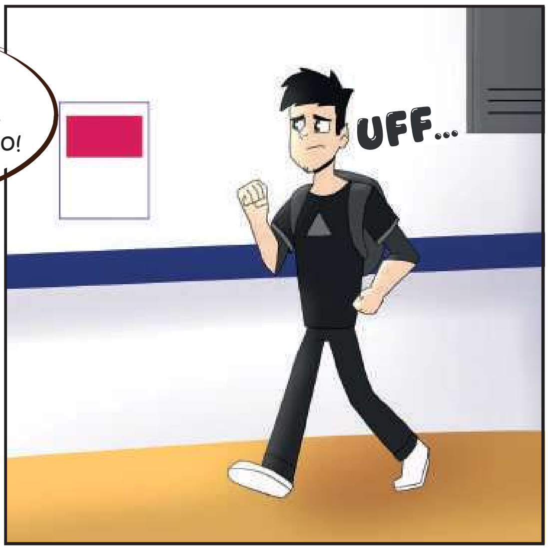
2,222 *metros*.

Autor

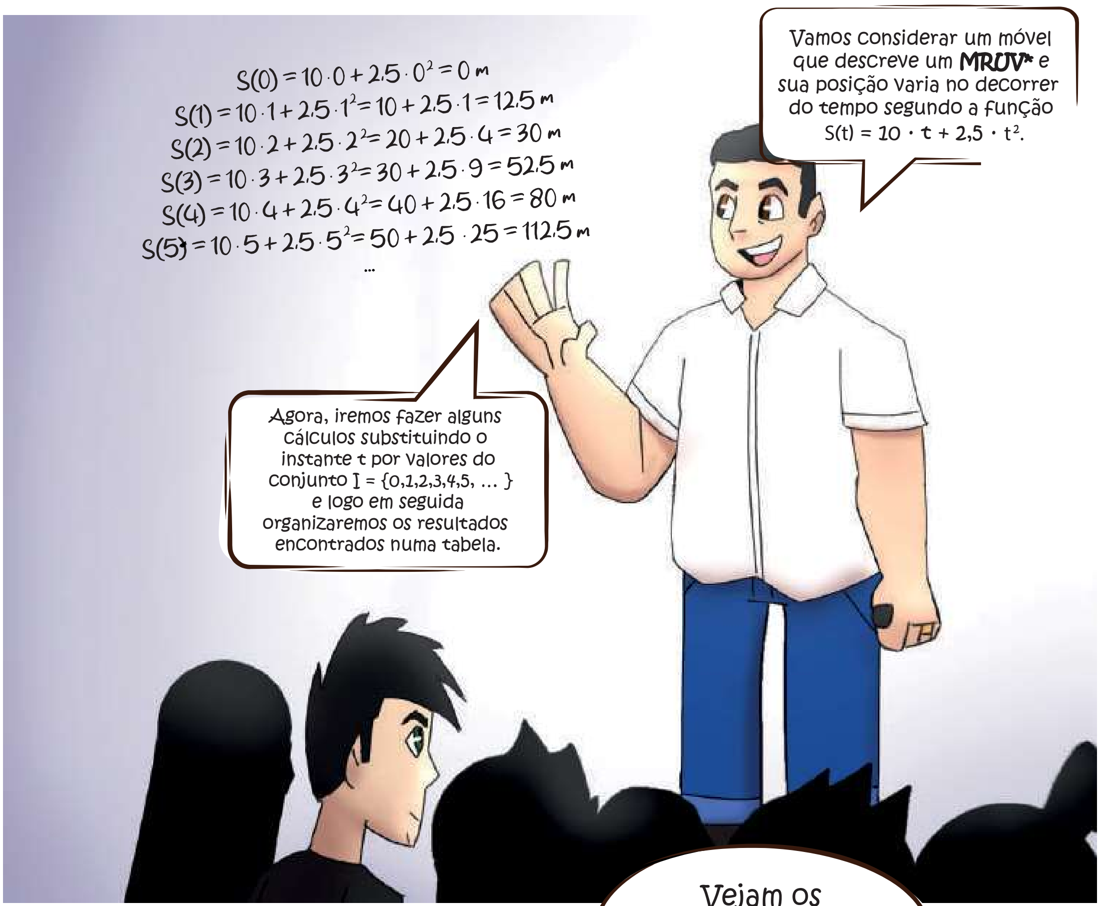
*Esse breve diálogo foi inspirado em Nussenzveig (2002, p.43,44).

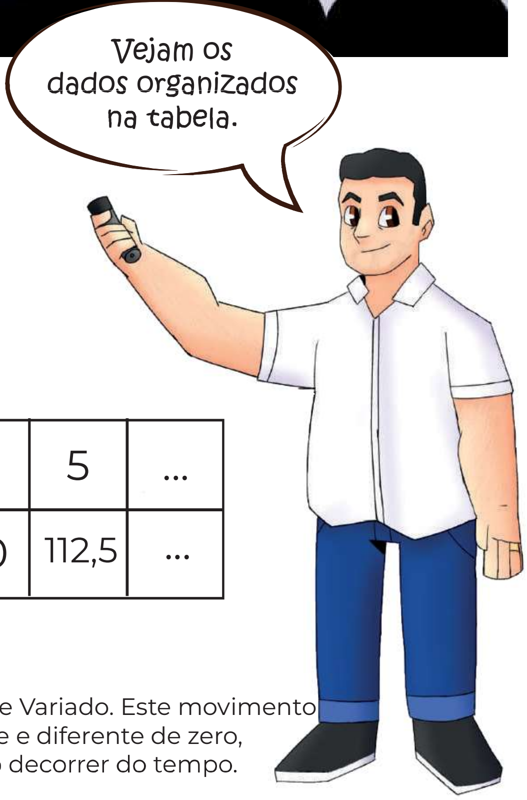

UNIVERSIDADE
VU-UU-UU!
VRUM!
VRUM!


Eh, ...fiz de tudo, mas não teve jeito. Vou chegar atrasado!


UFF...

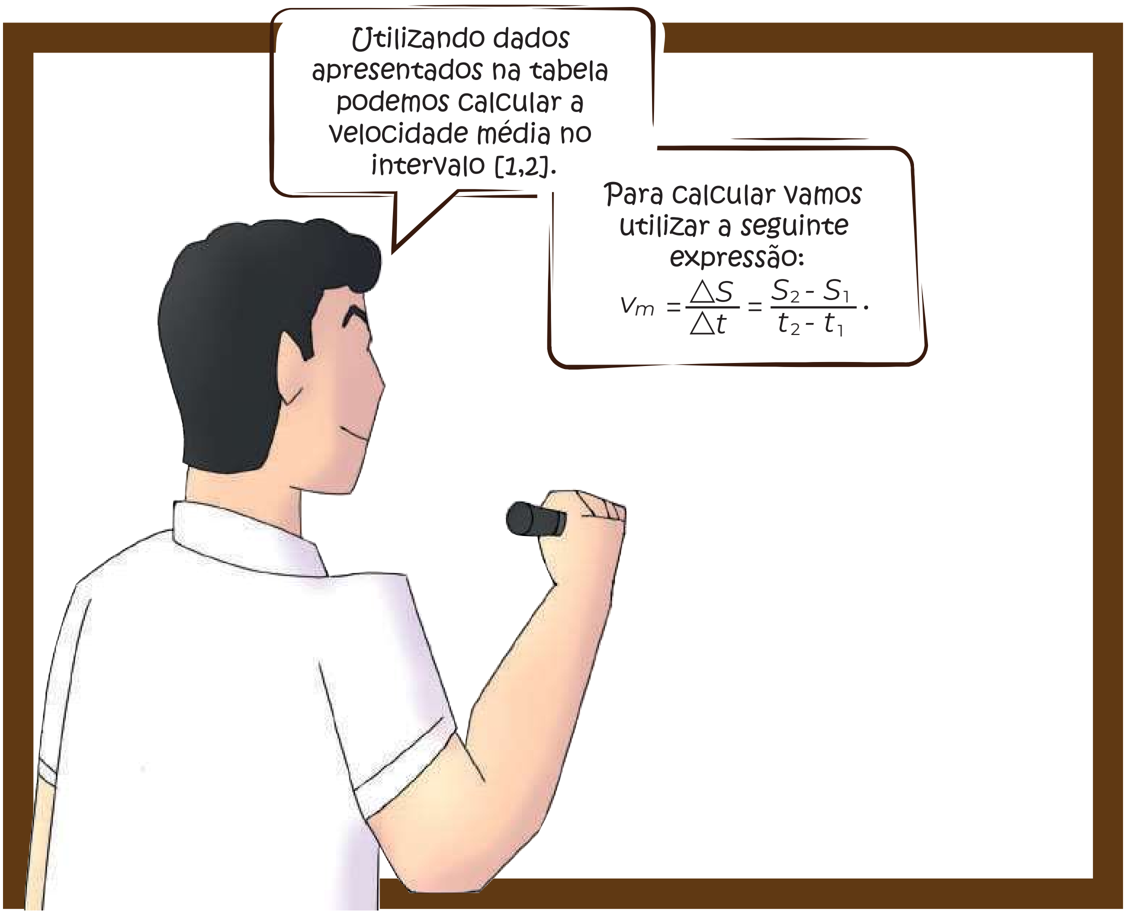

Ah, fala sério!
Velocidade instantânea?
De novo esse assunto?
Já não basta a multa
que levei... aff!
Muito bem turma, agora vamos investigar o problema da velocidade instantânea.
CRRRR!

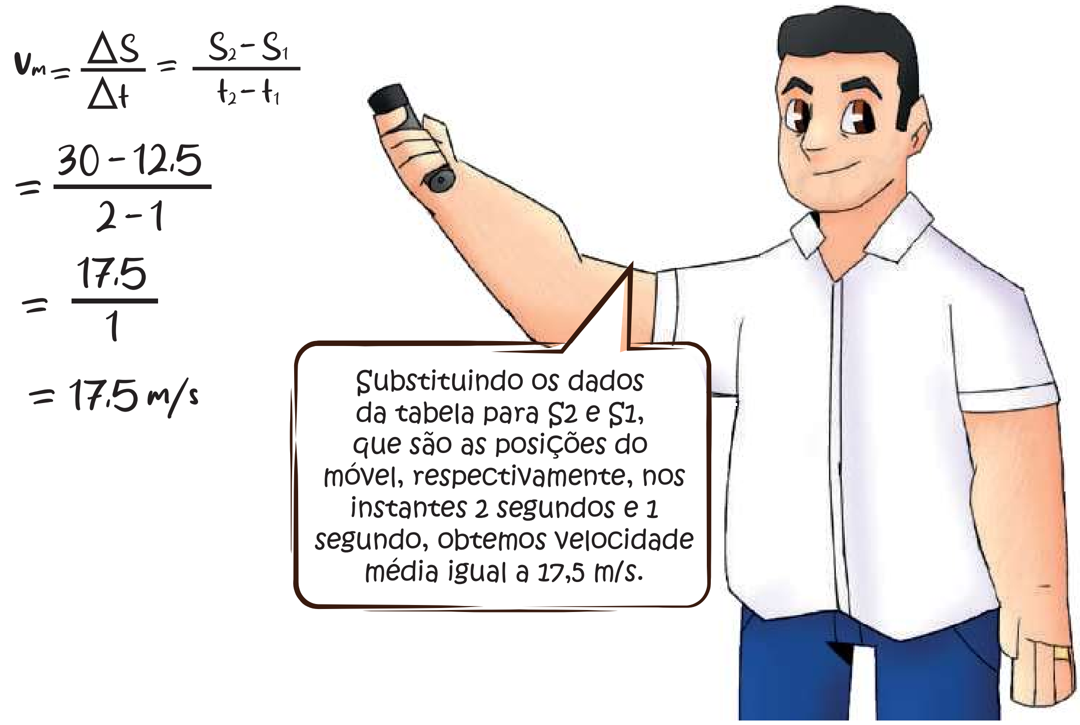




t	0	1	2	3	4	5	...
$S(t)$	0	12,5	30	52,5	80	112,5	...

***MRUV** é o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado. Este movimento é caracterizado por possuir aceleração constante e diferente de zero, isto significa que a velocidade do móvel varia no decorrer do tempo.

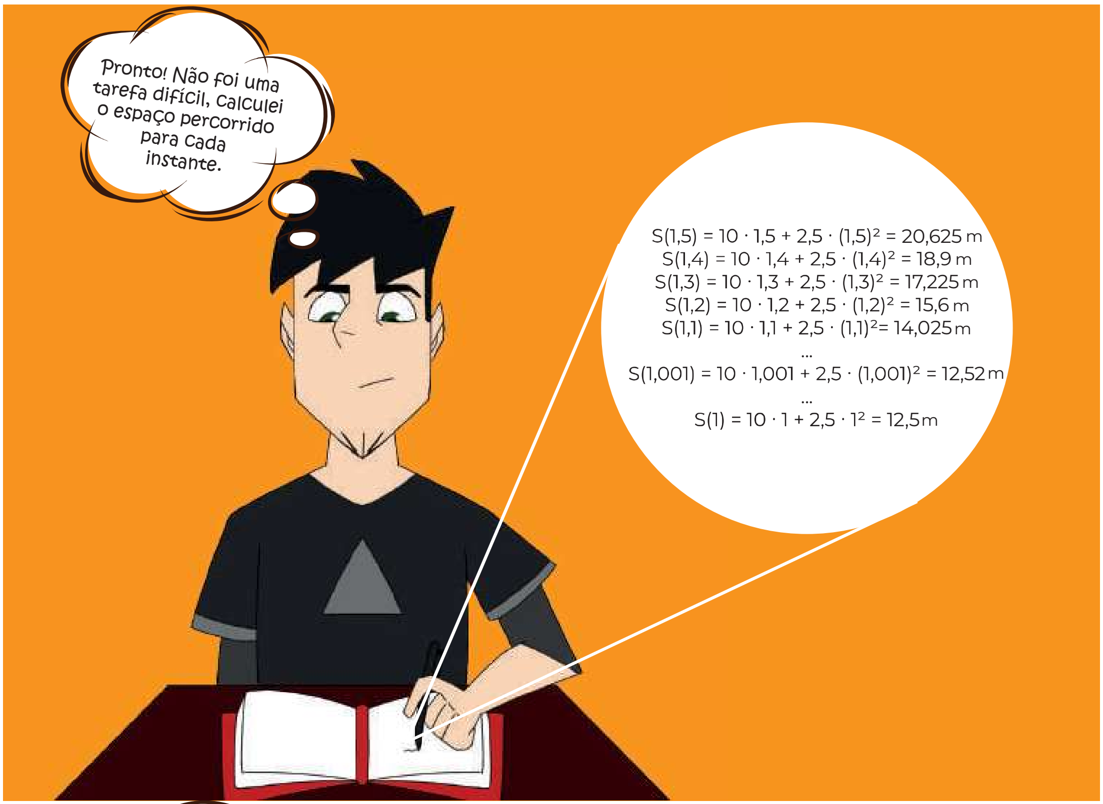

Utilizando dados apresentados na tabela podemos calcular a velocidade média no intervalo [1,2].
Para calcular vamos utilizar a seguinte expressão:
$v_m = \frac{\triangle S}{\triangle t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$.

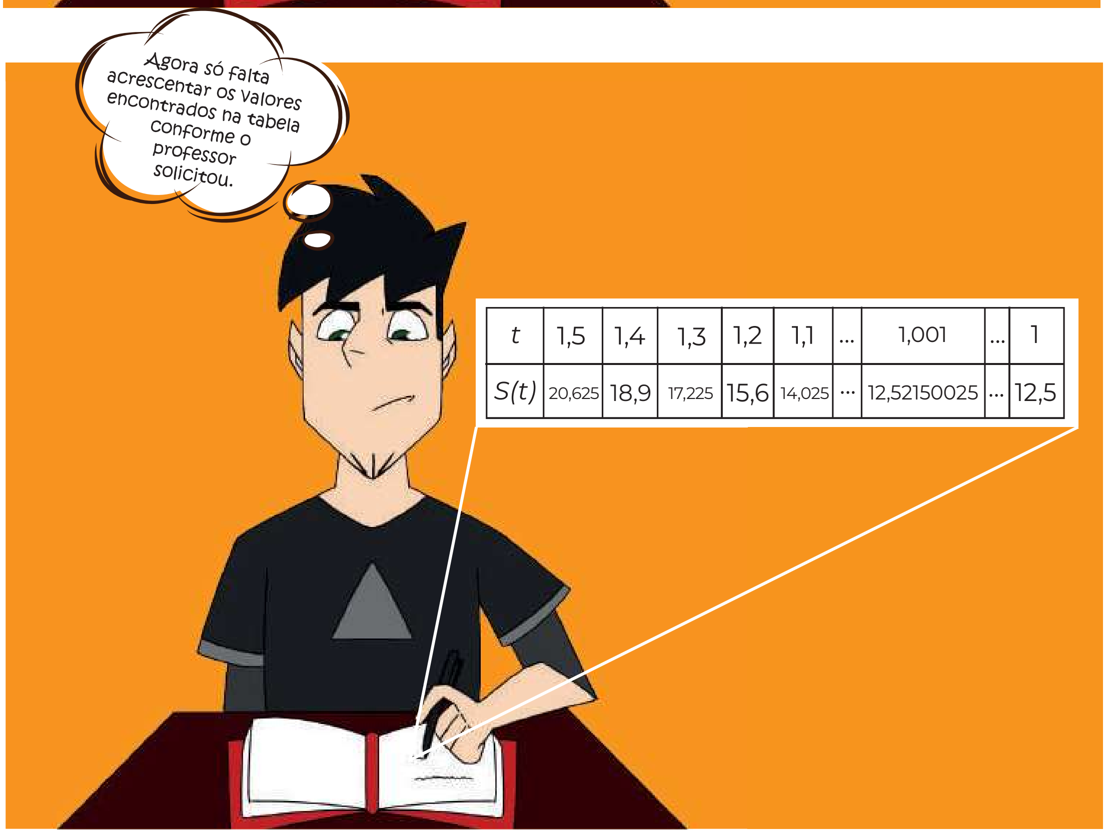

$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$
$= \frac{30 - 12{,}5}{2 - 1}$
$= \frac{17{,}5}{1}$
$= 17{,}5$ m/s
Substituindo os dados da tabela para S2 e S1, que são as posições do móvel, respectivamente, nos instantes 2 segundos e 1 segundo, obtemos velocidade média igual a 17,5 m/s.


Foi exatamente esse o cálculo que imaginei quando estava falando com aquele guarda, mas pelo visto algo que pensei não estava correto.

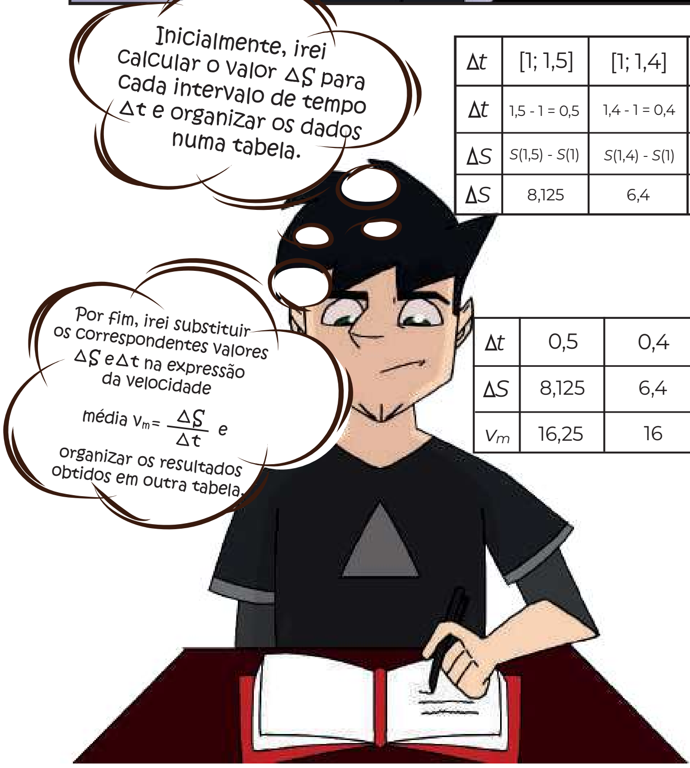

Agora, faremos algo mais interessante! Vamos calcular o espaço percorrido pelo móvel em intervalos de tempo cada vez menores.
Hum... vamos analisar o que acontece.

t	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	...	1,001	...	1





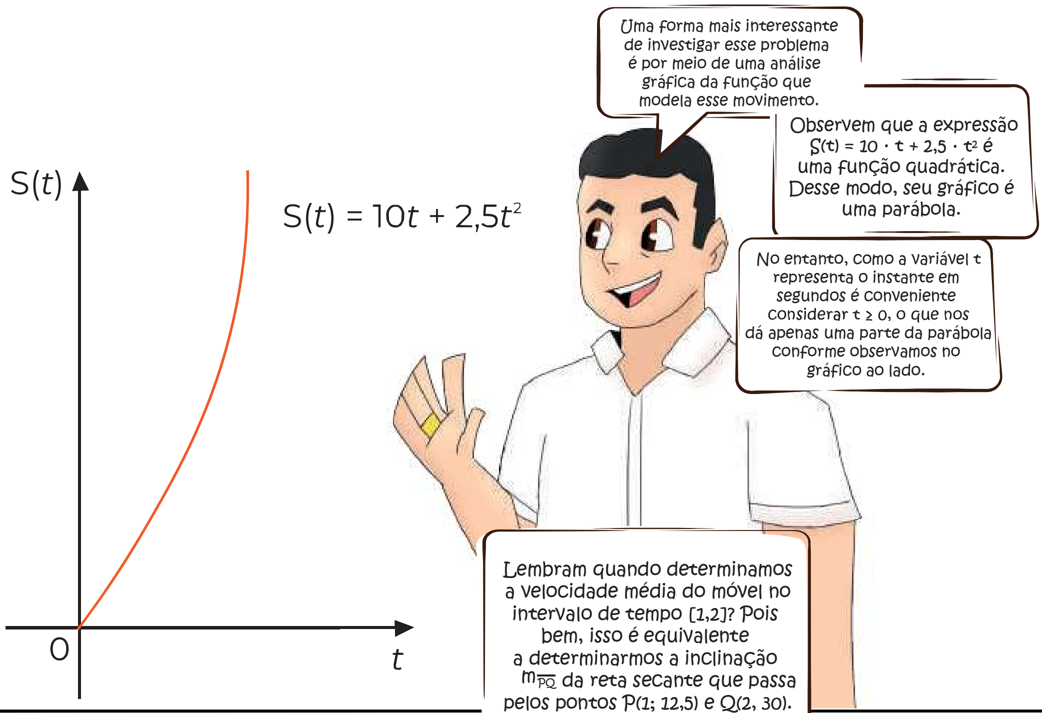
t	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	...	1,001	...	1
$S(t)$	20,625	18,9	17,225	15,6	14,025	...	12,52150025	...	12,5

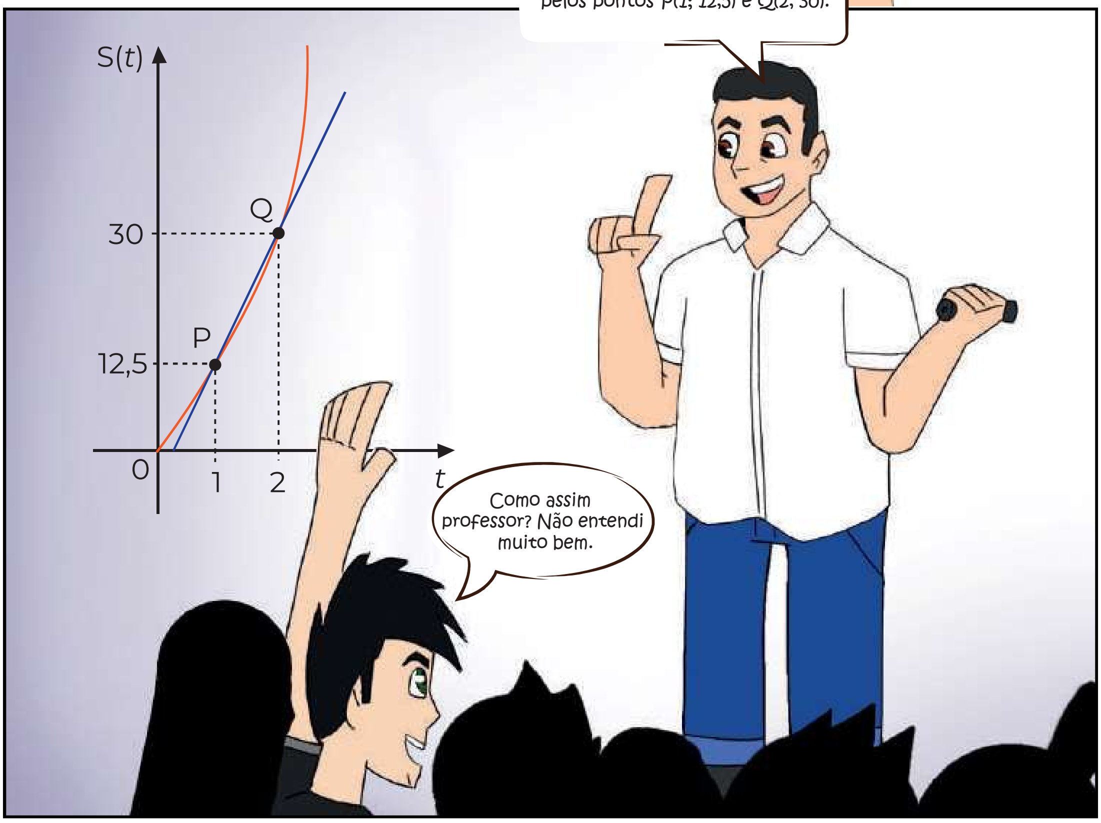


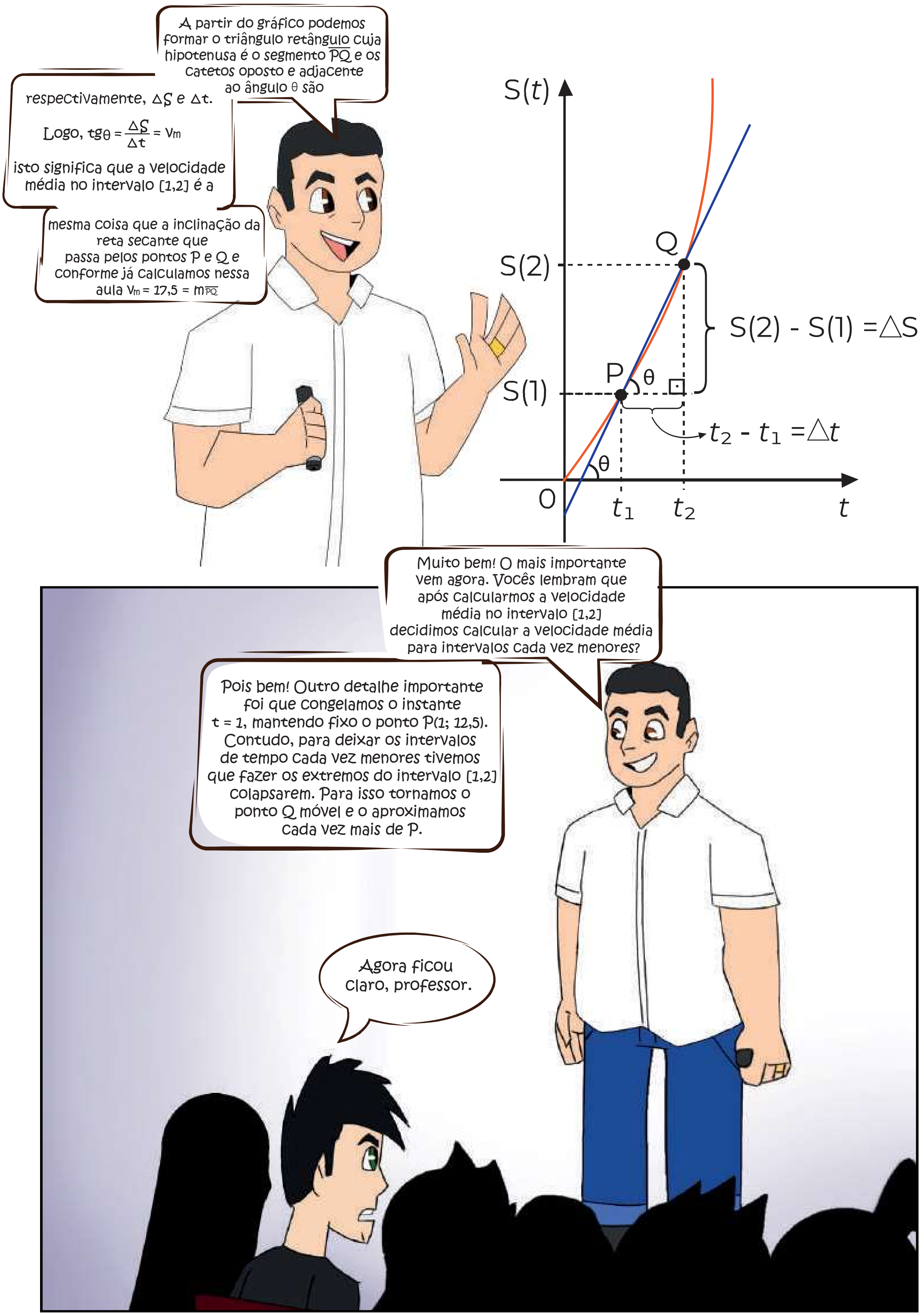
Δt	[1; 1,5]	[1; 1,4]	[1; 1,3]	[1; 1,2]	[1; 1,1]	...	[1; 1,001]
Δt	1,5 - 1 = 0,5	1,4 - 1 = 0,4	1,3 - 1 = 0,3	1,2 - 1 = 0,2	1,1 - 1 = 0,1	...	1,001 - 1 = 0,001
ΔS	S(1,5) - S(1)	S(1,4) - S(1)	S(1,3) - S(1)	S(1,2) - S(1)	S(1,1) - S(1)	...	S(1,001) - S(1)
ΔS	8,125	6,4	4,725	3,1	1,525	...	0,0150025

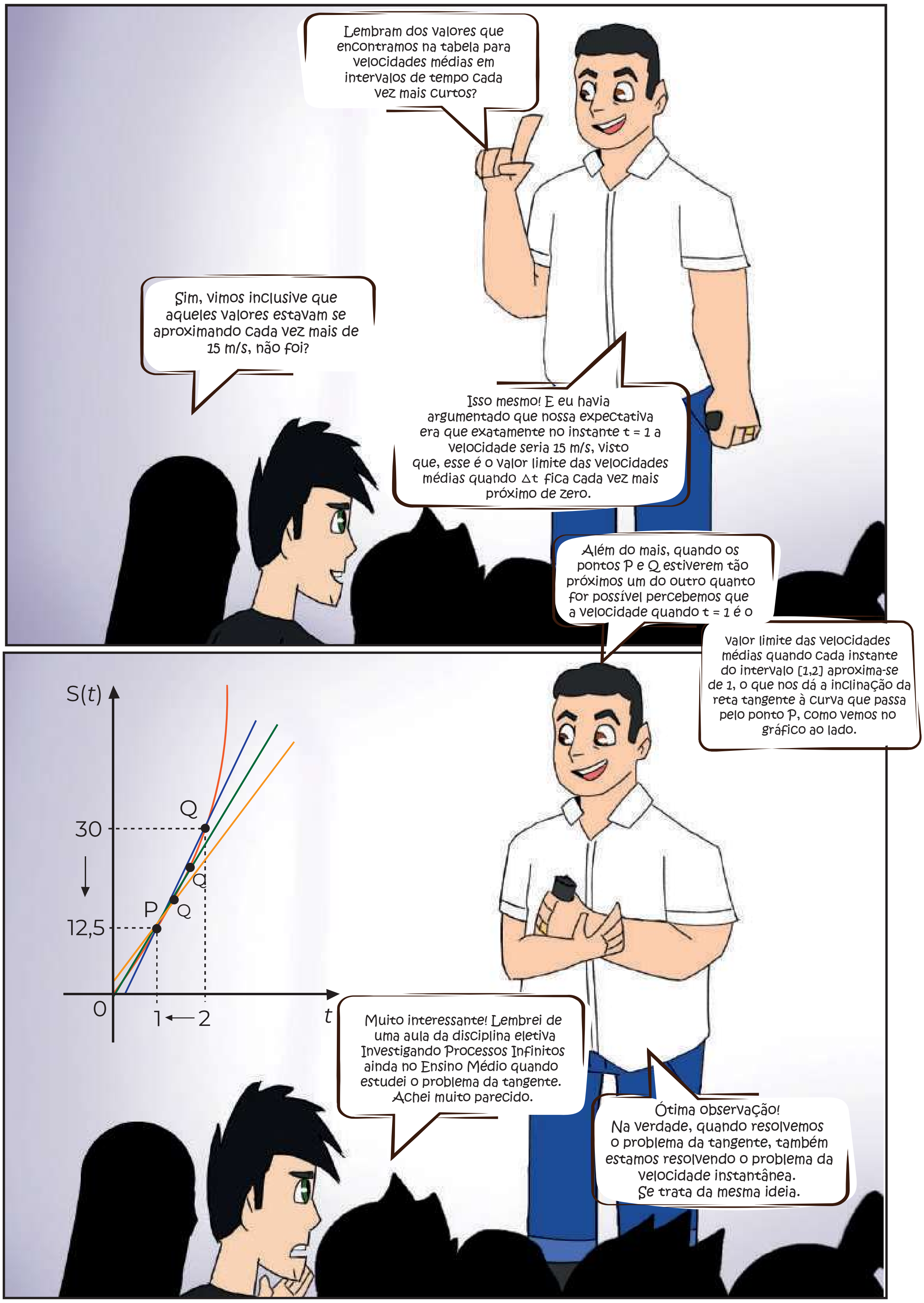
Δt	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	...	0,001
ΔS	8,125	6,4	4,725	3,1	1,525	...	0,0150025
v_m	16,25	16	15,75	15,5	15,25	...	15,0025


Certamente, ao preencher os dados nessa última tabela vocês perceberam algo de interessante em relação aos resultados encontrados para as velocidades médias. Estou certo?
Professor, agora que o senhor falou notei que existe um padrão interessante. As velocidades médias para intervalos cada vez menores parecem ficar cada vez mais próximas de 15 m/s.
Muito bem observado!
De fato, esperamos exatamente no instante t= 1 s que a velocidade seja de 15 m/s. A esta velocidade denominamos velocidade instantânea.
Ah, agora eu entendi o que o guarda quis dizer quando falou: "o que vale é a velocidade instantânea, isto é, a velocidade no instante em que você passou pela lombada...".
Em outras palavras a velocidade instantânea é a velocidade marcada pelo velocímetro da moto em cada instante.


Uma forma mais interessante de investigar esse problema é por meio de uma análise gráfica da função que modela esse movimento.
Observem que a expressão S(t) = 10 · t + 2,5 · t² é uma função quadrática. Desse modo, seu gráfico é uma parábola.
No entanto, como a variável t representa o instante em segundos é conveniente considerar t ≥ 0, o que nos dá apenas uma parte da parábola conforme observamos no gráfico ao lado.
S(t)
S(t) = 10t + 2,5t²
0
t
Lembram quando determinamos a velocidade média do móvel no intervalo de tempo [1,2]? Pois bem, isso é equivalente a determinarmos a inclinação m_PQ da reta secante que passa pelos pontos P(1; 12,5) e Q(2, 30).

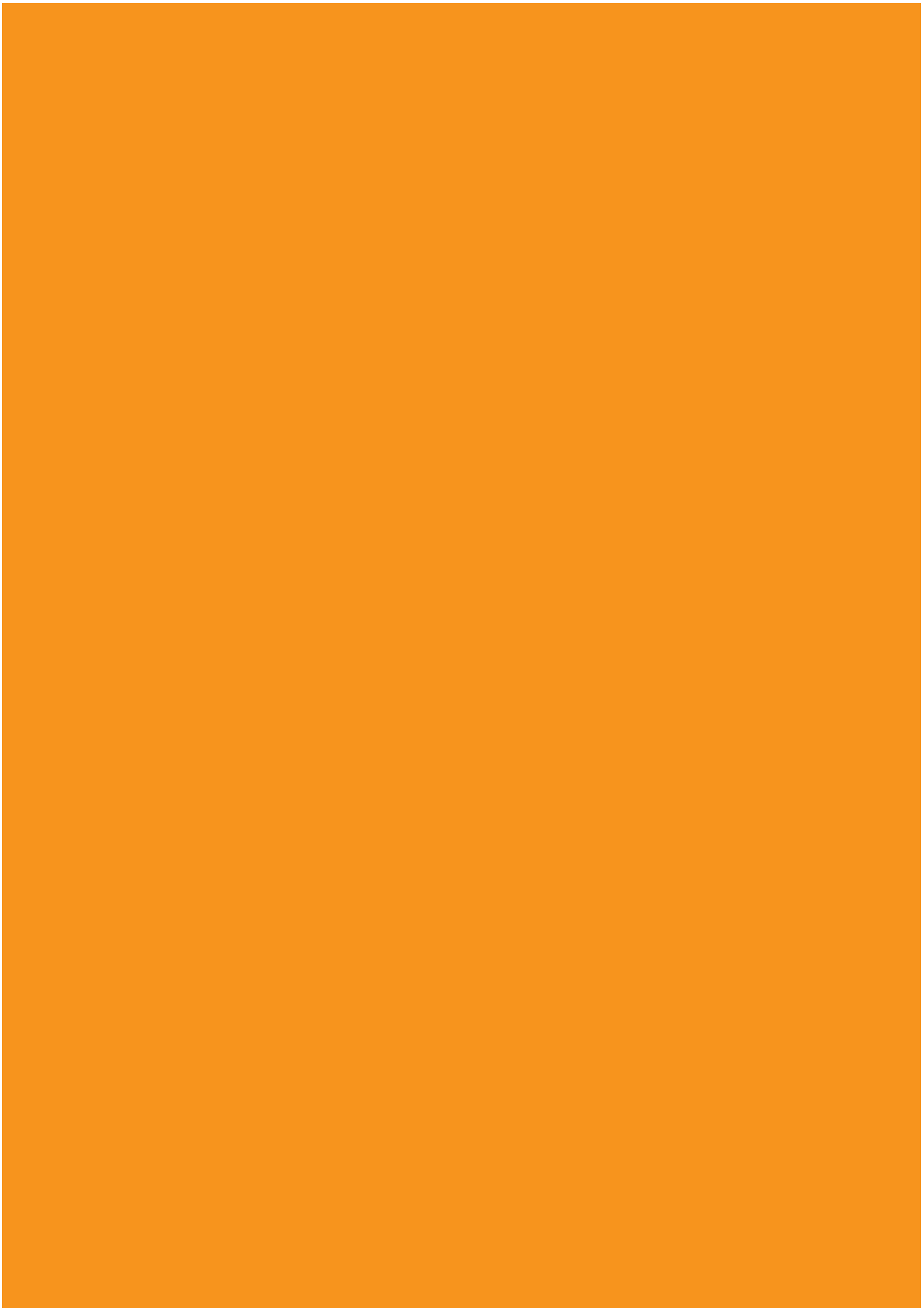

S(t)
Q
30
P
12,5
0
1
2
t
Como assim professor? Não entendi muito bem.


A partir do gráfico podemos formar o triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento $\overline{PQ}$ e os catetos oposto e adjacente ao ângulo θ são
respectivamente, ΔS e Δt.
Logo, $tg\theta = \frac{\Delta S}{\Delta t} = v_m$
isto significa que a velocidade média no intervalo [1,2] é a
mesma coisa que a inclinação da reta secante que passa pelos pontos P e Q e conforme já calculamos nessa aula $v_m = 17{,}5 = m_{\overline{PQ}}$
S(t)
Q
S(2)
S(2) - S(1) =ΔS
P
θ
S(1)
$t_2 - t_1 = \Delta t$
θ
O
t_1
t_2
t
Muito bem! O mais importante vem agora. Vocês lembram que após calcularmos a velocidade média no intervalo [1,2] decidimos calcular a velocidade média para intervalos cada vez menores?
Pois bem! Outro detalhe importante foi que congelamos o instante t = 1, mantendo fixo o ponto P(1; 12,5). Contudo, para deixar os intervalos de tempo cada vez menores tivemos que fazer os extremos do intervalo [1,2] colapsarem. Para isso tornamos o ponto Q móvel e o aproximamos cada vez mais de P.
Agora ficou claro, professor.

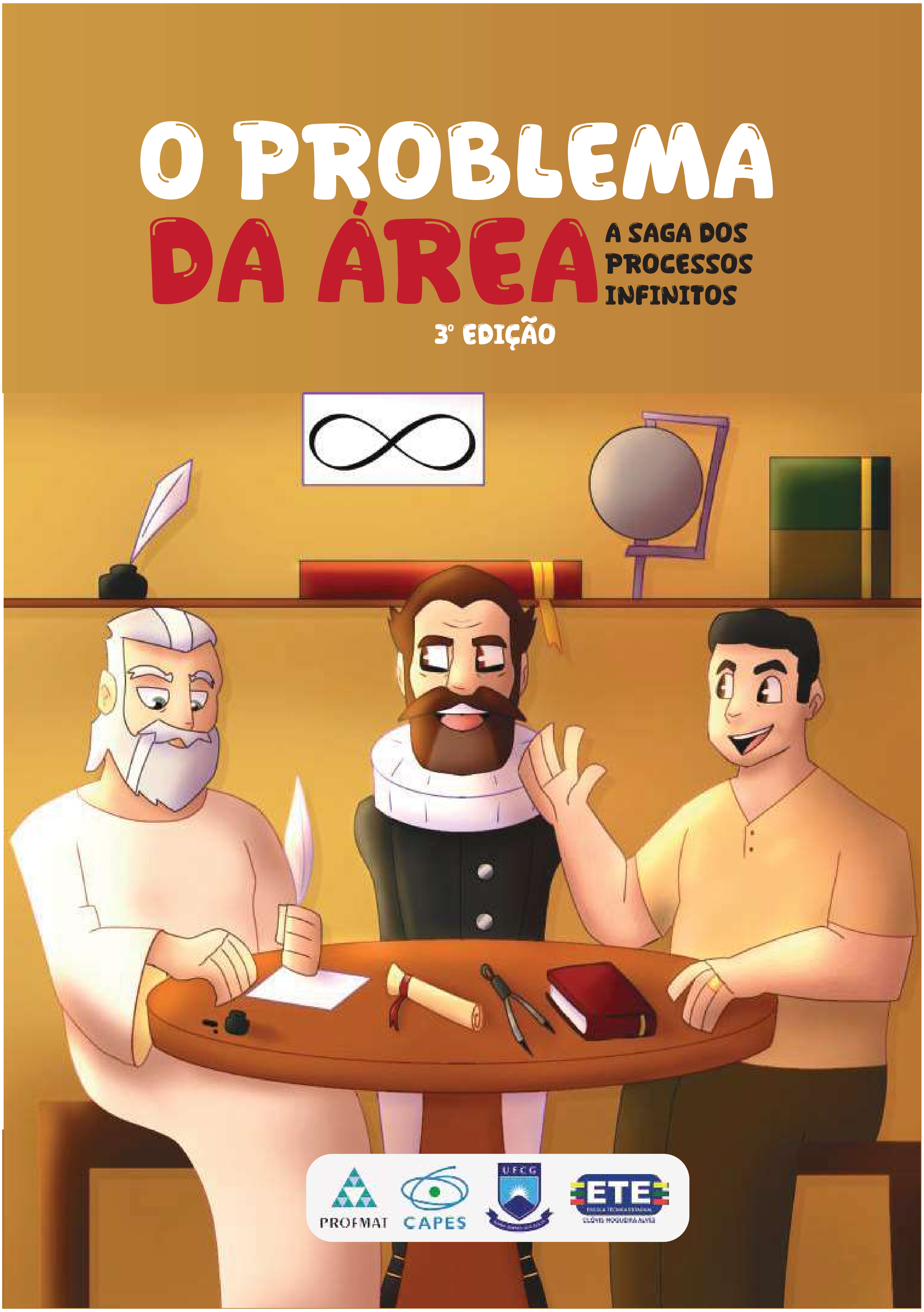

Lembram dos valores que encontramos na tabela para velocidades médias em intervalos de tempo cada vez mais curtos?
Sim, vimos inclusive que aqueles valores estavam se aproximando cada vez mais de 15 m/s, não foi?
Isso mesmo! E eu havia argumentado que nossa expectativa era que exatamente no instante t = 1 a velocidade seria 15 m/s, visto que, esse é o valor limite das velocidades médias quando Δt fica cada vez mais próximo de zero.
Além do mais, quando os pontos P e Q estiverem tão próximos um do outro quanto for possível percebemos que a velocidade quando t = 1 é o
valor limite das velocidades médias quando cada instante do intervalo [1,2] aproxima-se de 1, o que nos dá a inclinação da reta tangente à curva que passa pelo ponto P, como vemos no gráfico ao lado.
S(t)
Q
30
Q
P
Q
12,5
0
1
2
t
Muito interessante! Lembrei de uma aula da disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos ainda no Ensino Médio quando estudei o problema da tangente. Achei muito parecido.
Ótima observação! Na verdade, quando resolvemos o problema da tangente, também estamos resolvendo o problema da velocidade instantânea. Se trata da mesma ideia.

24


Então é isso pessoal, por hora encerramos nossas aulas. Hoje aprendemos sobre o problema da velocidade instantânea, um problema bastante interessante e que nos possibilita investigar várias aplicações em nosso cotidiano.
Nem me fale, muitas aplicações mesmo, inclusive de multas.



APÊNDICE D – HQ 3


O PROBLEMA
DA ÁREA
A SAGA DOS PROCESSOS INFINITOS
3° EDIÇÃO
PROFMAT
CAPES
UFCG
ETE

TÍTULO ORIGINAL
O Problema da Área: a Saga dos Processos Infinitos.
3ª edição.

ROTEIRO
Tiago Emanoel Melo Pereira

REVISÃO | ORIENTAÇÃO
Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega
Dr. Romildo Nascimento de Lima

DESENHOS
João Gustavo Correia da Silva

DIAGRAMAÇÃO
Carlos Henrique Inácio Lima

Esta história em quadrinhos foi criada com o intuito de divulgar a Matemática. Além do mais, por meio dessa importante ferramenta didática visamos proporcionar aos educandos uma aprendizagem lúdica e significativa acerca de temas abordados na disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos.

AO LEITOR

Nesta história em quadrinhos estudaremos **o problema da área.**
O enredo apresentado foi elaborado com o intuito de investigar o cálculo de certas áreas por meio de decomposições infinitas e divulgar importantes personagens e acontecimentos da História da Matemática.

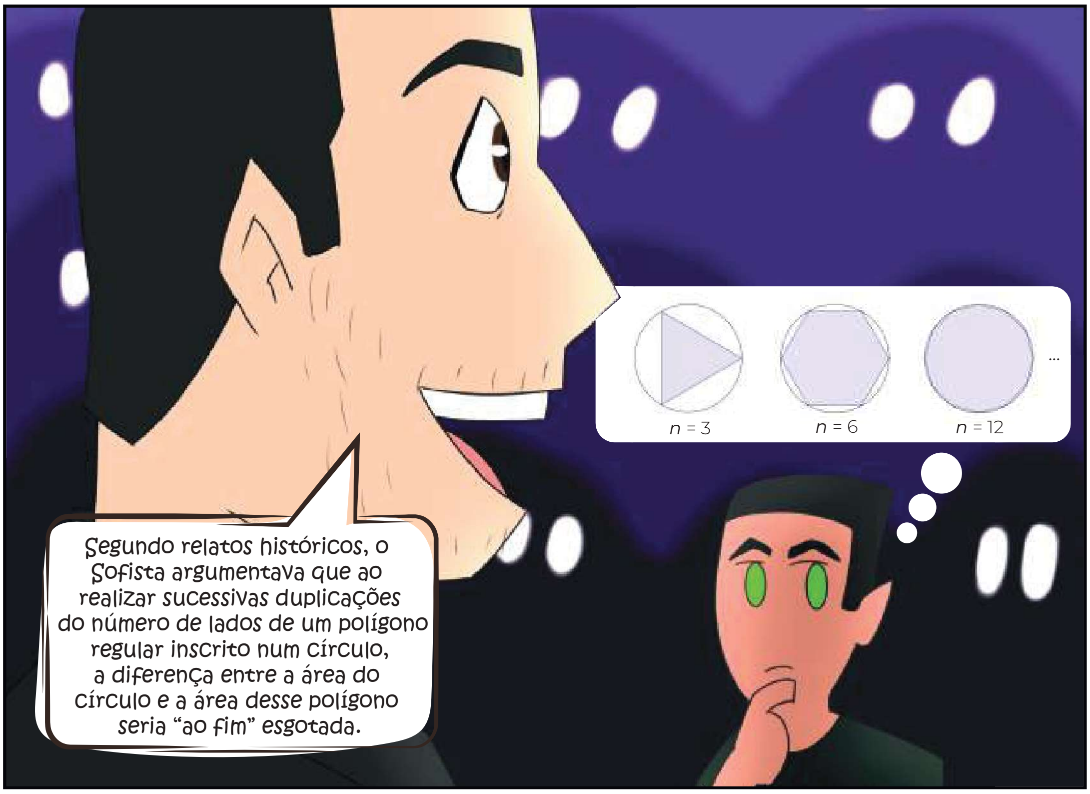
"Às vezes não acertamos com medo de errar e erramos com medo de acertar."
(Arquimedes)

O PROBLEMA DA ÁREA:

COMO ARQUIMEDES E OS ANTIGOS ENXERGAVAM O INFINITO?

Nossas principais referências foram os livros Introdução à História da Matemática (EVES, 2004) e História da Matemática (BOYER; MERZBACH, 2019).


A quadratura do círculo é o processo pelo qual se reduz um círculo a um quadrado de mesma área.
Hum!

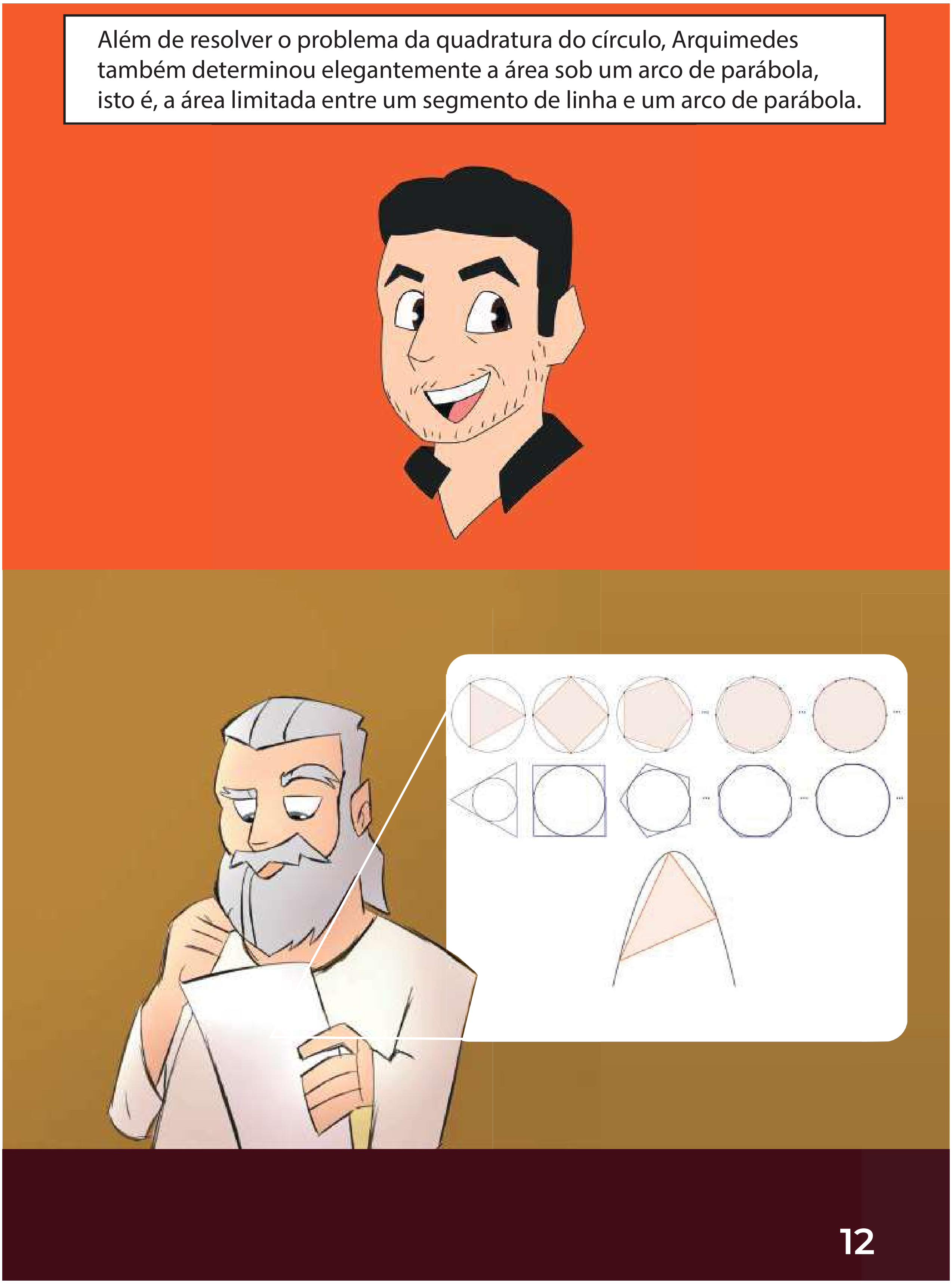

n = 3
n = 6
n = 12
...
Segundo relatos históricos, o Sofista argumentava que ao realizar sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre a área do círculo e a área desse polígono seria "ao fim" esgotada.


E já que podemos construir um quadrado de área igual a de qualquer polígono, a quadratura do círculo seria possível.
Professor, o processo idealizado por Antifon em algum momento esgotará a área do círculo?
Curiosamente, nessa época, as ideias de Antifon foram alvo de críticas embasadas no argumento de uma grandeza se dividir indefinidamente, isto é, os lados do polígono regular inscrito no círculo estavam sempre se duplicando e desse modo, jamais a área do círculo se esgotaria.
Apesar desse contraponto, os visionários argumentos de Antífon continham traços do Método da Exaustão, creditado a Eudoxo de Cnido (c. 370 a.C).
Método da Exaustão?


O Método da Exaustão foi uma ferramenta matemática utilizada pelos antigos gregos para evitar processos infinitos. Afinal, registros históricos apontam que no passado os gregos demonstraram uma dificuldade peculiar ao tentar compreender noções de infinitamente pequeno e infinito de modo lógico e intuitivo, desenvolvendo o que ficou conhecido como“horror ao infinito”.
10

Dentre os gregos antigos ninguém utilizou o Método da Exaustão de forma tão brilhante como Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.).

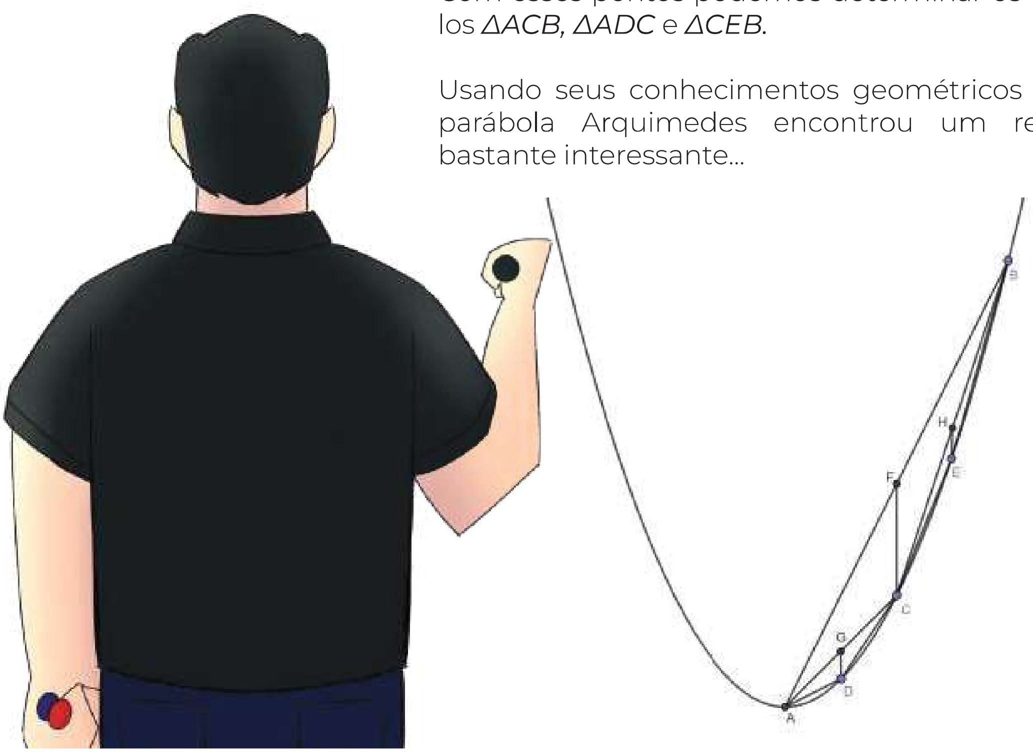
Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.).


Além de resolver o problema da quadratura do círculo, Arquimedes também determinou elegantemente a área sob um arco de parábola, isto é, a área limitada entre um segmento de linha e um arco de parábola.
12

Inicialmente, vamos colocar os pontos *A* e *B* sobre a parábola. Em seguida, colocamos sobre a parábola o ponto *C* de modo tal que a reta que tangencia a parábola neste ponto seja paralela a reta que passa pelos pontos *A* e *B*. Agora, vamos inserir os pontos *F*, *G* e *H*, respectivamente, pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$. Depois, vamos adicionar os pontos *D* e *E* de modo tal que as retas que tangenciam a parábola nestes pontos sejam paralelas, respectivamente, as retas determinadas pelos pontos *A* e *C* e *C* e *B*.

Com esses pontos podemos determinar os triângulos *ΔACB, ΔADC* e *ΔCEB.*

Usando seus conhecimentos geométricos sobre a parábola Arquimedes encontrou um resultado bastante interessante...



Por meio da geometria da parábola, mostramos que:

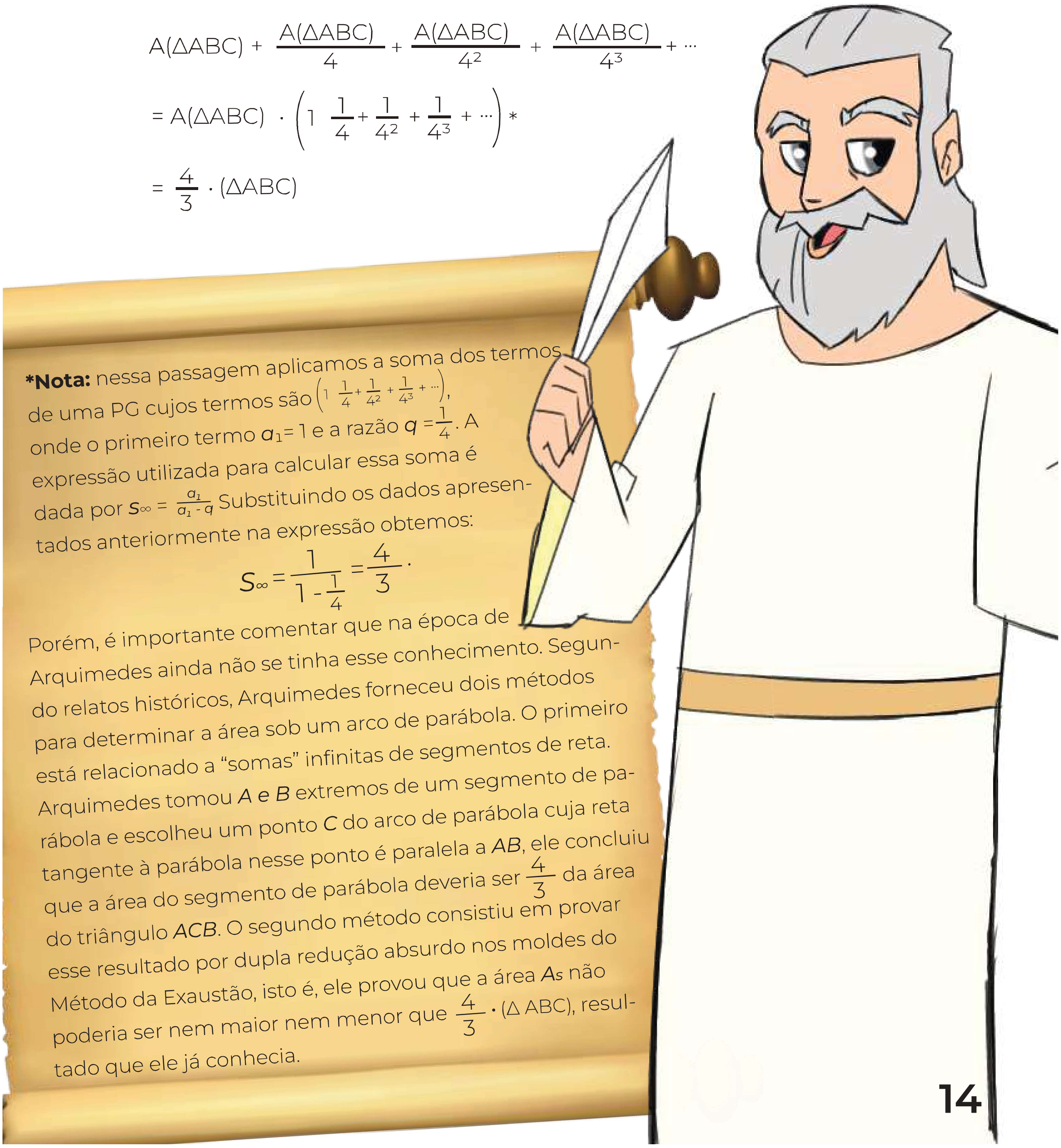
$$A(\Delta ADC) + A(\Delta CEB) = \frac{A(\Delta ACB)}{4}$$

Note que, se repetirmos esse raciocínio continuamente, concluímos que a área sob o arco de parábola poderá ser obtida por meio da expressão

$$A(\Delta ABC) + \frac{A(\Delta ABC)}{4} + \frac{A(\Delta ABC)}{4^2} + \frac{A(\Delta ABC)}{4^3} + \cdots$$

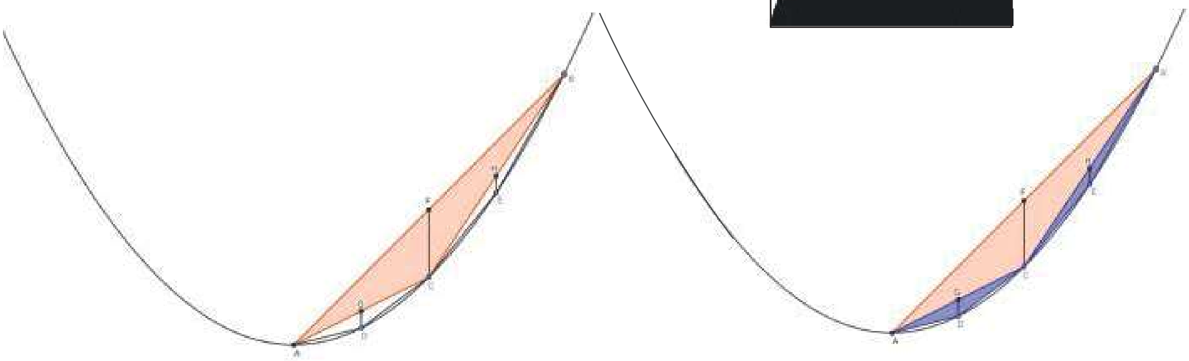
$$= A(\Delta ABC) \cdot \left(1 \; \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right) *$$

$$= \frac{4}{3} \cdot (\Delta ABC)$$

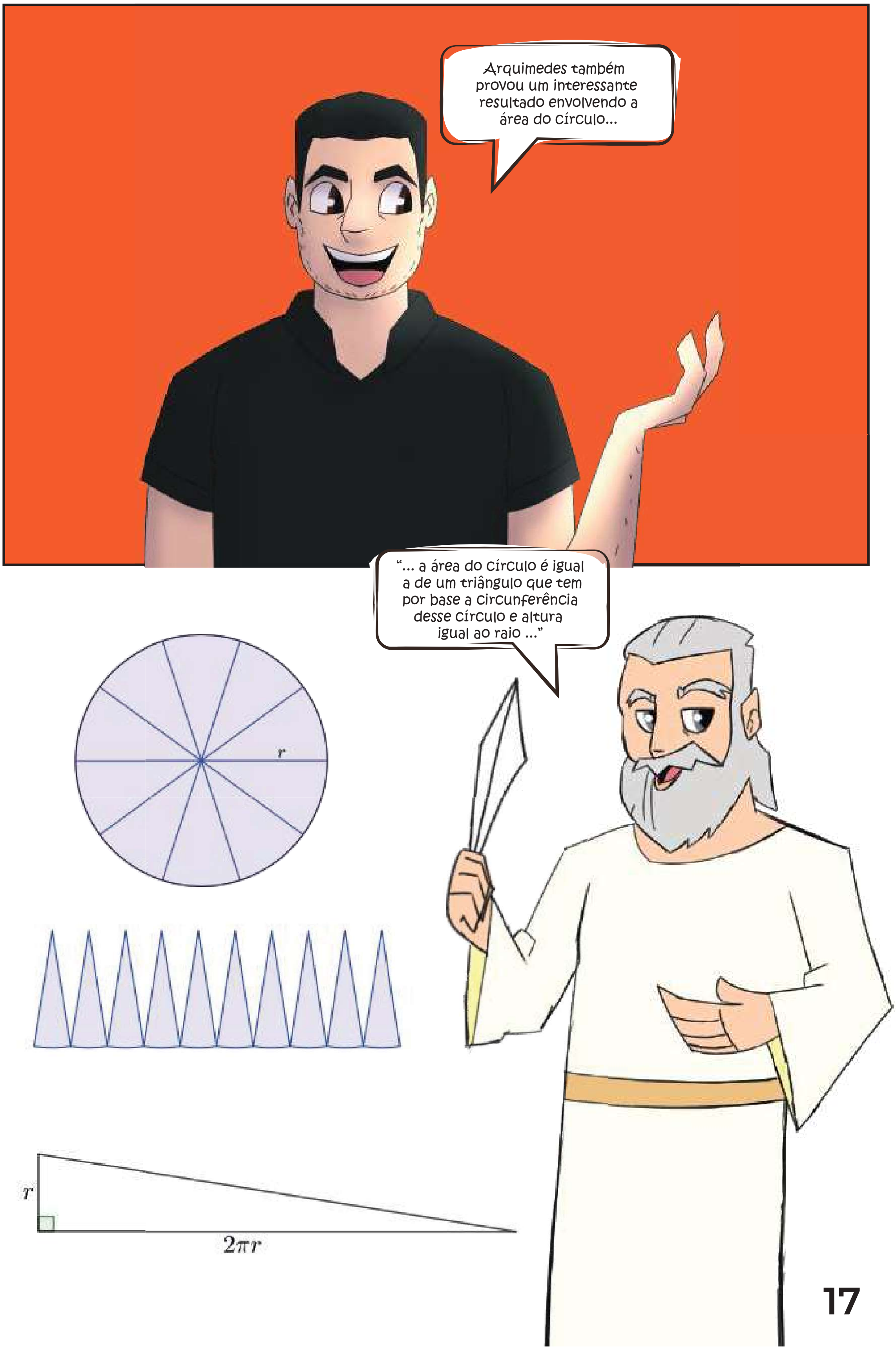


Note que, embora a área do ΔACB já fosse uma boa aproximação para a área sob o arco de parábola, Arquimedes não se contentou e continuou preenchendo os espaços vazios com novos triângulos seguindo os mesmos critérios utilizados na construção do triângulo inicial.

Depois de conhecer este grandioso feito de Arquimedes basta escolher adequadamente o triângulo que nos dá a primeira aproximação para a área sob o arco de parábola e utilizar a fórmula fechada $A_S = \frac{4}{3} \cdot A_T$, onde A_S é a área sob o arco de parábola e A_T é a área do triângulo escolhido inicialmente.




Após analisar uma possível solução para este problema talvez tenhamos a falsa impressão que o problema não é tão complexo quanto parecia inicialmente.
A verdade é que visualizar a solução da forma que Arquimedes idealizou exige um toque de genialidade. Afinal, lidar com um processo que não tem fim dadas as limitações matemáticas impostas em sua época não era uma tarefa fácil.
Lembram do problema da quadratura do círculo que comentamos no início da aula?
16


Arquimedes também provou um interessante resultado envolvendo a área do círculo...
“... a área do círculo é igual a de um triângulo que tem por base a circunferência desse círculo e altura igual ao raio ...”
r
r
2πr
17

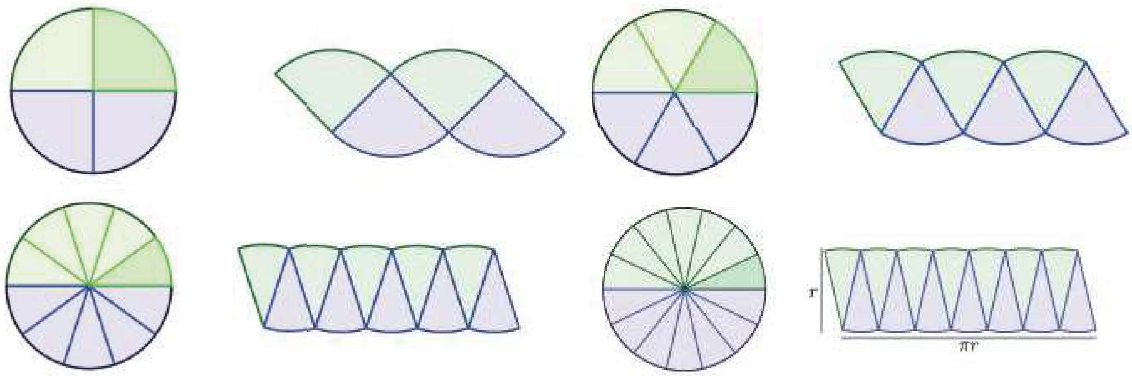
Por certo, Arquimedes estava imaginando o círculo decomposto em um grande número de setores circulares. Organizando esses setores lado a lado notamos, intuitivamente, que o resultado demonstrado por Arquimedes faz todo sentido. Afinal, para calcular a área *A* do triângulo utilizamos a expressão:

$$A = \frac{base \times altura}{2}$$

Como sabemos a medida da base é igual a $2\pi r$ e a altura mede r. Desse modo,

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} \Longrightarrow A = \pi r^2$$

Existem outras maneiras de pensarmos na obtenção de uma fórmula fechada para a área do círculo. Entretanto, um fato curioso é que todas elas nos levam a um processo infinito, o que exige um raciocínio engenhoso semelhante ao de Arquimedes.



Como a área de um retângulo é dada pelo produto das medidas de sua base pela sua altura, segue-se que:

$$A = \textit{base x altura}$$
$$= \pi r \cdot r$$
$$= \pi r^2$$


Nossa! Que ideia incrível! Arquimedes era genial!
Outra ideia interessante para a área do círculo foi comentada por Johann Kepler. Ele considerava um círculo como um polígono regular de infinitos de lados. Como sabemos, podemos dividir um polígono regular de n lados em n triângulos iguais. Desse modo, para um polígono de infinitos lados teríamos infinitos triângulos.
Muito interessante! Se o polígono regular possui infinitos lados, então teremos infinitos triângulos idênticos formando este polígono.

A área do círculo corresponde a soma das áreas dos infinitos triângulos estreitos, todos de altura igual ao raio do círculo. Note que, a área de cada um dos triângulos é dada pela expressão $A_n = \frac{b_n \cdot h}{2}$, onde A_n é a área do n-ésimo triângulo cuja base mede b_n e altura $h = r$.

Desse modo, realizando a soma das infinitas áreas desses triângulos, obtemos:

$$A = \frac{b_1 \cdot r}{2} + \frac{b_2 \cdot r}{2} + \frac{b_3 \cdot r}{2} + \cdots + \frac{b_n \cdot r}{2} + \cdots$$

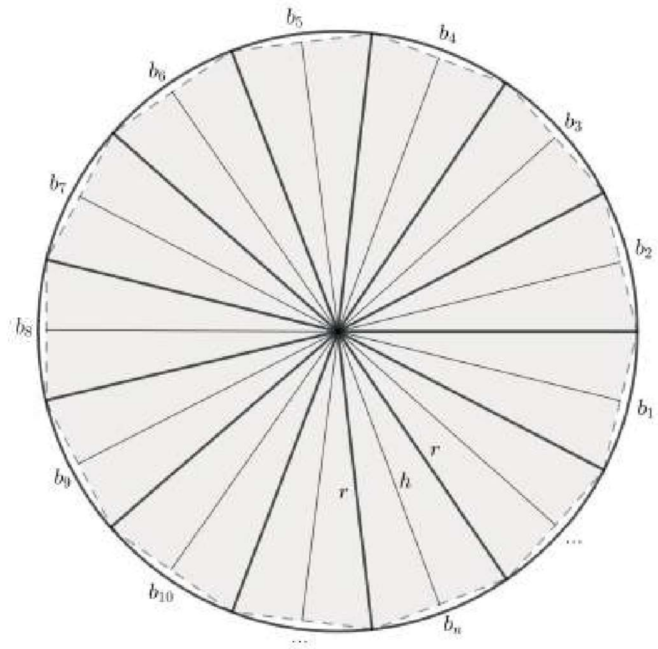
$$A = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots) \cdot \frac{r}{2}$$

De sorte,

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = 2\pi r$$

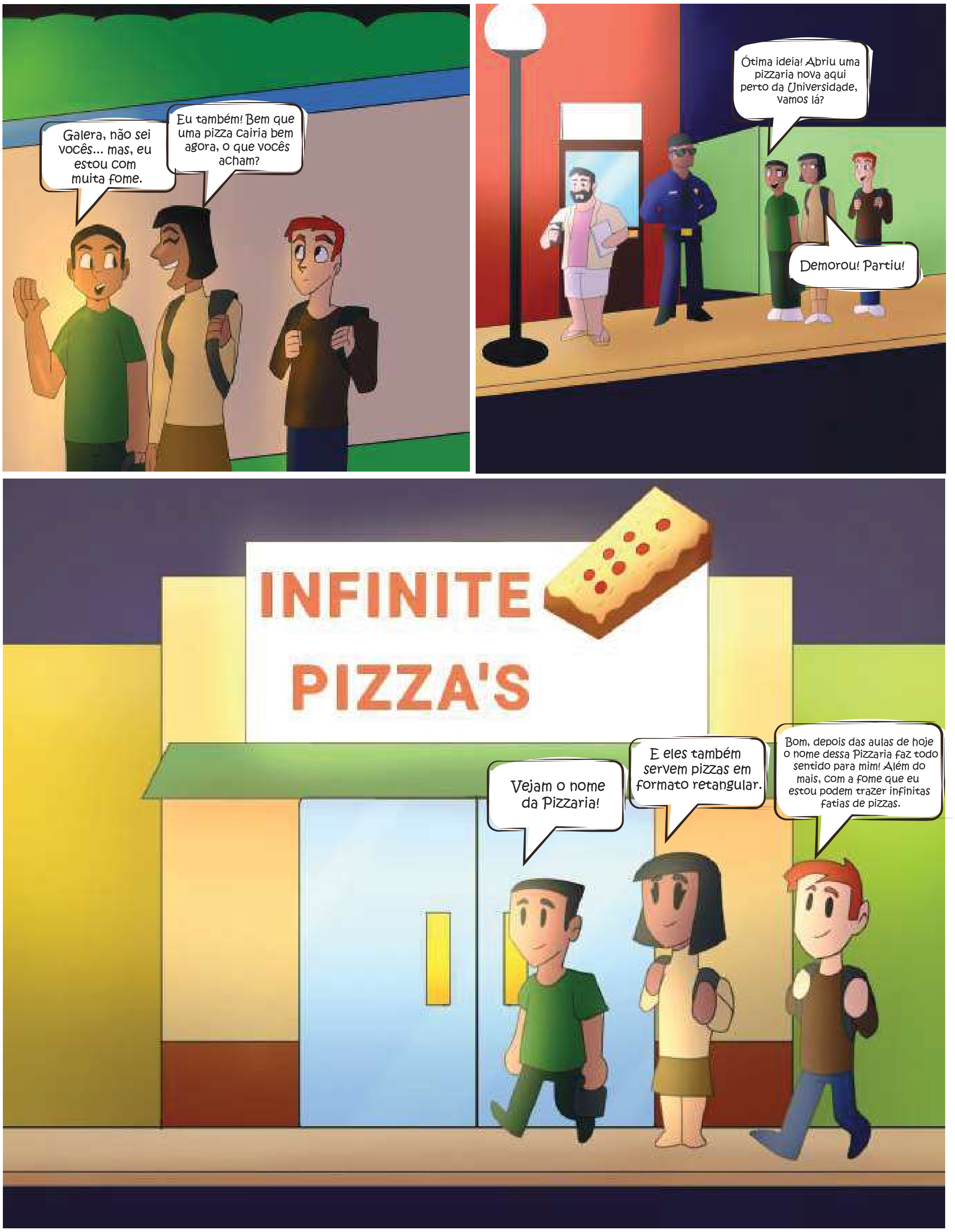
Logo,

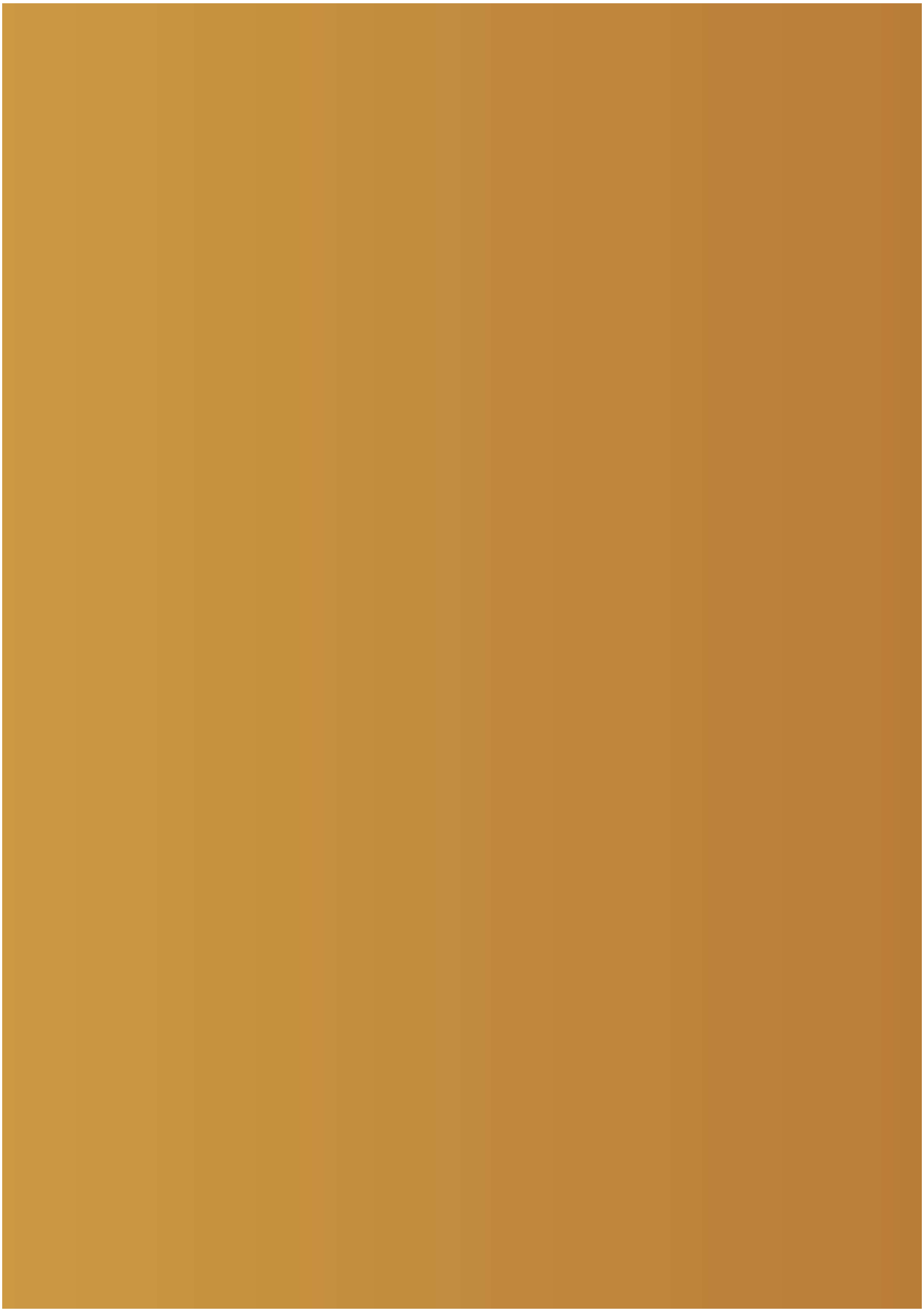
$$A = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} \Longrightarrow A = \pi r^2$$



Johann Kepler (1571 - 1630).


Sem dúvidas, essa é uma forma muito interessante de visualizar a fórmula fechada para calcular a área do círculo.
Realmente, professor! E pela primeira vez eu compreendi esse resultado.
Que ótimo! Esse último resultado encerra a nossa aula de hoje turma. Até a próxima!


Galera, não sei vocês... mas, eu estou com muita fome.
Eu também! Bem que uma pizza cairia bem agora, o que vocês acham?
Ótima ideia! Abriu uma pizzaria nova aqui perto da Universidade, vamos lá?
Demorou! Partiu!
INFINITE PIZZA'S
Vejam o nome da Pizzaria!
E eles também servem pizzas em formato retangular.
Bom, depois das aulas de hoje o nome dessa Pizzaria faz todo sentido para mim! Além do mais, com a fome que eu estou podem trazer infinitas fatias de pizzas.



APÊNDICE E – O Quebra-cabeça de setores


QUEBRA-CABEÇA
DE SETORES
PROFMAT
CAPES
UFCG
ETE
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL
CLÓVIS NOGUEIRA ALVES

O QUEBRA-CABEÇA DE SETORES
Brincando com a Matemática dos Processos Infinitos.

ELABORAÇÃO
Tiago Emanoel Melo Pereira

REVISÃO | ORIENTAÇÃO
Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega
Dr. Romildo Nascimento de Lima

DIAGRAMAÇÃO
Carlos Henrique Inácio Lima

QUEBRA-CABEÇA DE SETORES

OBJETIVO DO JOGO

Reorganizar os setores de cada círculo para formar “retângulos” e observar como a área desses “retângulos” se relacionam com a área do círculo;

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Círculos formados por diferentes números de setores (utilizamos em nosso jogo 8 círculos formados por 4, 6, 8, 10, 12, 24, 36 e 48 setores);
- Área de trabalho para montagem dos retângulos (sugestões: bancada, mesas ou tapete).

COMO O MATERIAL DO JOGO FOI CONFECCIONADO?

- Com o auxílio do software GeoGebra dividimos alguns círculos em setores circulares. Para facilitar a visualização de possíveis padrões e tornar o material mais dinâmico construímos oito configurações diferentes;
- Cada configuração é representada por círculos de mesmo tamanho e diferem entre si apenas pelo seu número de setores. Os círculos possuem 4, 6, 8, 10, 12, 24, 36 ou 48 setores. A fim de deixar o material mais lúdico transformamos círculos de $2n$ setores em pizzas de $2n$ fatias;
- Este material foi encaminhado para a gráfica e impresso em chapas de MDF adesivado de dimensões 21 cm x 21cm e 3 mm de espessura. Também foram confeccionadas oito bolsas plásticas para que pudéssemos guardar em cada uma delas peças da mesma configuração.

REGRAS DO JOGO

1. MOMENTO DE PREPARAÇÃO

🍕 Defina a área de trabalho da equipe e distribua o material;
🍕 Certifique-se que a equipe tenha acesso a todos os setores dos círculos correspondentes;

2. JOGANDO

🍕 A equipe se divide em pequenos grupos e escolhem uma configuração para começar a jogar;
🍕 Os jogadores se reúnem na área de trabalho e iniciam o jogo montando círculos com os setores disponibilizados em cada configuração;
🍕 Após a montagem de todos os círculos ser realizada, os jogadores começam a reagrupar os setores de cada círculo para formar um "retângulo" ou uma figura que se aproxime de um retângulo;
🍕 Os jogadores devem se preocupar em construir um retângulo perfeito, onde todos os setores se encaixem sem sobras ou espaços vazios;
🍕 Os jogadores devem discutir estratégias e colaborar uns com os outros para encontrar a melhor forma de organizar os setores.

OBSERVAÇÕES E DISCUSSÕES

🍕 Enquanto os jogadores reorganizam os setores, o professor pode participar incentivando discussões sobre a relação existente entre o número de setores e a construção de um retângulo ideal;
🍕 Os jogadores devem observar como a área da figura formada pelos setores reagrupados se aproxima da área de um retângulo ideal à medida que mais setores são adicionados.

REFLEXÕES

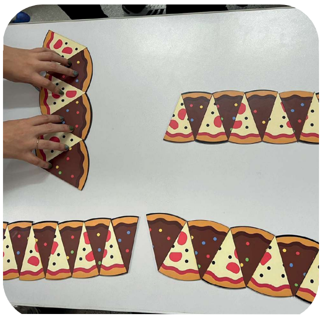
Após terminarem de organizar todos os "retângulos", os jogadores devem discutir suas observações e tentar encontrar padrões que permitam, a partir das configurações encontradas, determinar uma fórmula fechada para a área do círculo.

CONCLUSÃO

A equipe deve registrar suas observações e conclusões sobre os resultados encontrados de forma oral ou escrita. Em seguida, o professor deve conduzir uma discussão em grupo para compartilhar as descobertas de cada jogador, analisar as observações feitas pela equipe e concluir que a área do círculo é dada pela fórmula fechada $A = \pi \cdot r^2$.

O ideal é que este resultado seja encontrado a partir da visualização de certos padrões. Nesse sentido, o professor atua como mediador e facilitador instigando os educandos com questionamentos e orientações que os ajudarão a enxergar detalhes que podem passar despercebidos.

A expectativa é que os alunos percebam que à medida que o número de setores aumenta indefinidamente, isto é, $n \to \infty$, as configurações tendem a ficar cada vez mais próximas de um retângulo perfeito cujas medidas da base e altura são, respectivamente, $\pi \cdot r$ e r. Por fim, basta realizar o produto dessas medidas e encontraremos a fórmula fechada $A = \pi \cdot r^2$, como queríamos.



AO LEITOR

O que você achou do Quebra-cabeça de setores? Gostaria de utilizá-lo em suas aulas?

Muito bem! A seguir, disponibilizamos um material que poderá ser utilizado para confeccionar cada uma das configurações utilizadas no jogo.

Esperamos que esse jogo possa tornar a aula deste conteúdo mais dinâmica e divertida.

Boa aula!