UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Tiago Emanoel Melo Pereira

Produto Educacional

Investigando Processos Infinitos: Um Almanaque de Histórias em Quadrinhos

Campina Grande - PB
Agosto/2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Tiago Emanoel Melo Pereira

Investigando Processos Infinitos: Um Almanaque de Histórias em Quadrinhos

Produto Educacional vinculado ao Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Romildo Nascimento de Lima
Coorientador: Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega

Campina Grande - PB
Agosto/2024

Resumo

A elaboração deste Produto Educacional sugere o estudo de processos infinitos e sua abordagem no Ensino Básico, com ênfase, numa investigação intuitiva de problemas clássicos que motivaram o surgimento do Cálculo. Essa temática impulsionou nossas pesquisas sobre o Problema da Tangente, o Problema da Velocidade Instantânea e o Problema da Área. A própria Base Nacional Comum Curricular (BNCC) contempla competências e habilidades que nos fornece o embasamento necessário para tratar desse assunto no Ensino Básico. Nesse intuito, disponibilizamos um Almanaque de Histórias em Quadrinhos, onde esses temas foram abordados de forma lúdica e atrativa.

Palavras-chave: Processos Infinitos. Histórias em Quadrinhos. Ensino da Matemática.

Abstract

The development of this Educational Product suggests the study of infinite processes and their approach in Basic Education, with an emphasis on an intuitive investigation of classical problems that motivated the emergence of Calculus. This topic has driven our research on the Tangent Problem, the Instantaneous Velocity Problem, and the Area Problem. The National Common Core Curriculum (BNCC) itself includes competencies and skills that provide the necessary foundation for addressing this topic in Basic Education. To this end, we have provided a Comic Book Almanac, where these topics are addressed in a playful and engaging manner.

Keywords: Infinite Processes. Comic Book Almanac. Mathematics Education.

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos um produto educacional obtido a partir da dissertação **"Investigando Processos Infinitos: Uma Proposta de Disciplina Eletiva sob a Ótica do Novo Ensino Médio"**.

O produto educacional que será apresentado foi elaborado e utilizado durante o desenvolvimento das aulas da disciplina eletiva *Investigando Processos Infinitos*, sua aplicação se deu no primeiro semestre letivo de 2024 na Escola Técnica Estadual Clóvis Nogueira Alves, localizada em Serra Talhada no Sertão Pernambucano.

Esse produto consiste numa coleção de Histórias em Quadrinhos (HQs), um Almanaque abordando a *Saga dos Processos Infinitos*, que elaboramos com o intuito de possibilitar a investigação de processos infinitos no Ensino Básico de forma lúdica, dinâmica e descontraída. Por meio desse material exploramos problemas abordados em aulas da disciplina, dentre eles:

- O Problema da Tangente;
- O Problema da Velocidade Instantânea;
- O Problema da Área.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Produzir um material didático textual no formato de Histórias em Quadrinhos (HQs) que sirva de motivação para a abordagem dos processos infinitos como disciplina eletiva para compor um itinerário formativo no Novo Ensino Médio.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Elaborar uma História em Quadrinhos sobre o Problema da Tangente;
- Elaborar uma História em Quadrinhos sobre o Problema da Velocidade Instantânea;
- Elaborar uma História em Quadrinhos sobre o Problema da Área.

A nossa principal motivação para o desenvolvimento desse produto educacional, se deu ao grande potencial que as Histórias em Quadrinhos possuem em capturar a atenção dos alunos, promover a leitura e desenvolver diferentes estilos de aprendizagem.

1.2 Organização

Com o intuito de alcançar os objetivos apresentados na Seção 1.1, estruturamos esse trabalho em 2 capítulos.

No Capítulo 1, apresentamos a introdução, expondo a nossa motivação para a produção desse material, seu objetivo geral e os seus objetivos específicos. Ainda no primeiro capítulo apresentamos a forma como o trabalho foi estruturado.

No Capítulo 2, focaremos em abordar um breve comentário sobre cada uma das Histórias em Quadrinhos que encabeçam o nosso Almanaque e logo em seguida traremos a versão completa.

2 Utilizando Histórias em Quadrinhos como Estratégias de Intervenção

O material foi elaborado inicialmente com o objetivo de servir como suporte para a disciplina eletiva "Investigando Processos Infinitos". No entanto, esse material também pode ser aproveitado por professores de Matemática em suas aulas, funcionando como uma ferramenta adicional para divulgar e enriquecer o Ensino da Matemática.

Antes de apresentarmos a versão completa do Almanaque, convidamos o leitor a analisar uma breve descrição de cada uma das Histórias em Quadrinhos (HQs) que o compõe e entender um pouco melhor os nossos objetivos ao investigar cada um dos problemas destacados.

HQ 1 - O Problema da Tangente

Por meio dessa HQ, utilizamos a noção intuitiva de limite para apresentar um conceito mais geral de reta tangente. A leitura proporciona aos alunos relembrar conceitos estudados em aulas da disciplina e a utilizar o GeoGebra, já que exibimos um manual com instruções para realizar algumas construções mais simples, entre elas: construir uma reta tangente à circunferência dado um ponto; construir retas secantes à circunferência dados dois de seus pontos e construir gráficos de funções. Ao analisar o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$, o aluno percebeu a necessidade de generalizar o conceito de reta tangente.

Figura 1 – Capa da HQ 1.

Fonte: O Autor

HQ 2 - O Problema da Velocidade Instantânea

Ao realizar a leitura dessa HQ, o estudante poderá relembrar alguns conceitos da Cinemática estudados na disciplina de Física geralmente abordados no 1º ano do Ensino Médio, a título de exemplo, os conceitos de velocidade média e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Após relembrar desses conteúdos o estudante poderá dar os primeiros passos para compreender o conceito de velocidade instantânea.

Para a criação dessa HQ, utilizamos como principal referência o livro (NUSSENZVEIG, 2002). A ideia de ilustrar uma situação real para investigar o problema tornou o texto mais acessível e atrativo. Com isso, conseguimos aplicar um modelo abstrato para resolver uma situação concreta do cotidiano. A principal ideia apresentada é a possibilidade de determinar intuitivamente a velocidade de um móvel em um determinado instante por meio de aproximações.

Para cumprir com esse objetivo apresentamos o gráfico da função que descreve o movimento do móvel e tabelas onde dados que obtemos por meio de cálculos estão organizados. Além disso, novamente, utilizamos a noção intuitiva de limite investigar o problema da velocidade instantânea e relacioná-lo com o problema da tangente.

Figura 2 – Capa da HQ 2.

Fonte: O Autor.

HQ 3 - O Problema da Área

O enredo apresentado nessa HQ foi elaborado com o intuito de investigar o cálculo de certas áreas por meio de aproximações. Aproveitamos a oportunidade para divulgar alguns feitos de importantes personagens e acontecimentos que fizeram parte da História da Matemática.

Para a criação dessa HQ, utilizamos como principais referências os livros, *Introdução à História da Matemática* (EVES, 2004) e *História da Matemática* (BOYER; MERZBACH, 2019).

Realizamos uma breve explanação sobre o *problema da quadratura do círculo* e a *área sob um arco de parábola.* Utilizamos construções realizadas via software GeoGebra a fim de facilitar a visualização de cada um desses problemas e em alguns casos dispomos as imagens sequencialmente para que o aluno consiga verificar a existência de certos padrões.

Ao investigar o problema da área conseguimos utilizar temas já conhecidos pelos discentes para introduzir, intuitivamente, a noção de limite. Além do mais, notamos que a HQ se mostrou uma importante ferramenta de revisão dos conteúdos apresentados durante as aulas da disciplina.

Figura 3 – Capa da HQ 3.

Fonte: O Autor

Esperamos que esse material possa fornecer aos colegas docentes uma nova alternativa de divulgação da Matemática. Além do mais, convidamos o leitor a conhecer a proposta de disciplina eletiva *Investigando Processos Infinitos* e caso deseje, aplicá-la em suas turmas do 3º ano do Ensino Médio.

Agora, convidamos o leitor a analisar nas próximas páginas a versão completa do nosso Almanaque de Histórias em Quadrinhos.


ALMANAQUE
SAGA DOS
PROCESSOS
INFINITOS
PROFMAT
CAPES
UFCG
ETE
ESCOLA TÉCNICA ESTADUAL
CLÓVIS NOGUEIRA ALVES

TÍTULO ORIGINAL
O Almanaque dos Processos Infinitos.
Edição Limitada.

Professor Efetivo da Rede Estadual de Pernambuco e Mestrando pelo PROFMAT-UFCG. Contribuiu ativamente com este projeto atuando como idealizador e roteirista das Histórias em Quadrinhos.

Professor Efetivo da Unidade Acadêmica de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - PB. Contribuiu significativamente com este projeto atuando como orientador e corretor.

Professor Efetivo da Unidade Acadêmica de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - PB. Contribuiu significativamente com este projeto atuando como orientador e corretor.

Estudante de graduação do curso de Desing Gráfico da Faculdade Anhanguera. Atua profissionalmente como Cartoonista e contribuiu de forma significa com este projeto dando vida as Histórias em Quadrinhos com os seus desenhos.

Estudante de graduação do Curso Comunicação Social: Publicidade e Propaganda do Centro Universitário Internacional - UNINTER. Atua profissionalmente como Redator Publicitário e contribuiu significativamente com este projeto realizando a diagramação das Histórias em Quadrinhos.

Este almanaque foi criado com o intuito de divulgar a Matemática. Neste material textual apresentamos três Histórias em Quadrinhos (HQ's) que foram apresentadas em aulas de uma disciplina eletiva planejada sob a ótica do Novo Ensino Médio. A disciplina eletiva **Investigado Processos Infinitos** foi o ponto de ignição que culminou na criação deste material, proporcionando aos alunos, vivenciar intuitivamente, a Matemática dos processos infinitos.

Durante a leitura deste almanaque você poderá entender de forma lúdica e descontraída alguns temas importantes abordados no Ensino da Matemática. O primeiro Quadrinho aborda **o problema da tangente** e nos possibilita um entendimento mais geral sobre o conceito de reta tangente, além de fornecer um manual completo para que o leitor possa realizar algumas construções no software GeoGebra. No segundo Quadrinho, vamos investigar **o problema da velocidade instantânea** e entender o que de fato é este conceito. Por fim, o terceiro Quadrinho ocupa-se de investigar **o problema da área** abordando aspectos históricos e estratégias para determinar uma fórmula fechada para a área sob um arco de parábola e a área de um círculo.


O PROBLEMA
DA TANGENTE
1ª EDIÇÃO
A SAGA DOS PROCESSOS INFINITOS
PROFMAT
CAPES
UFCG
ETE
CLÓVIS NOGUEIRA ALVES

TÍTULO ORIGINAL
O Problema da Tangente: a Saga dos Processos Infinitos. 1ª edição.

ROTEIRO
Tiago Emanoel Melo Pereira

REVISÃO | ORIENTAÇÃO
Dr. Alânnio Barbosa Nobrega
Dr. Romildo Nascimento de Lima

DESENHOS
João Gustavo Correia da Silva

DIAGRAMAÇÃO
Carlos Henrique Inácio Lima

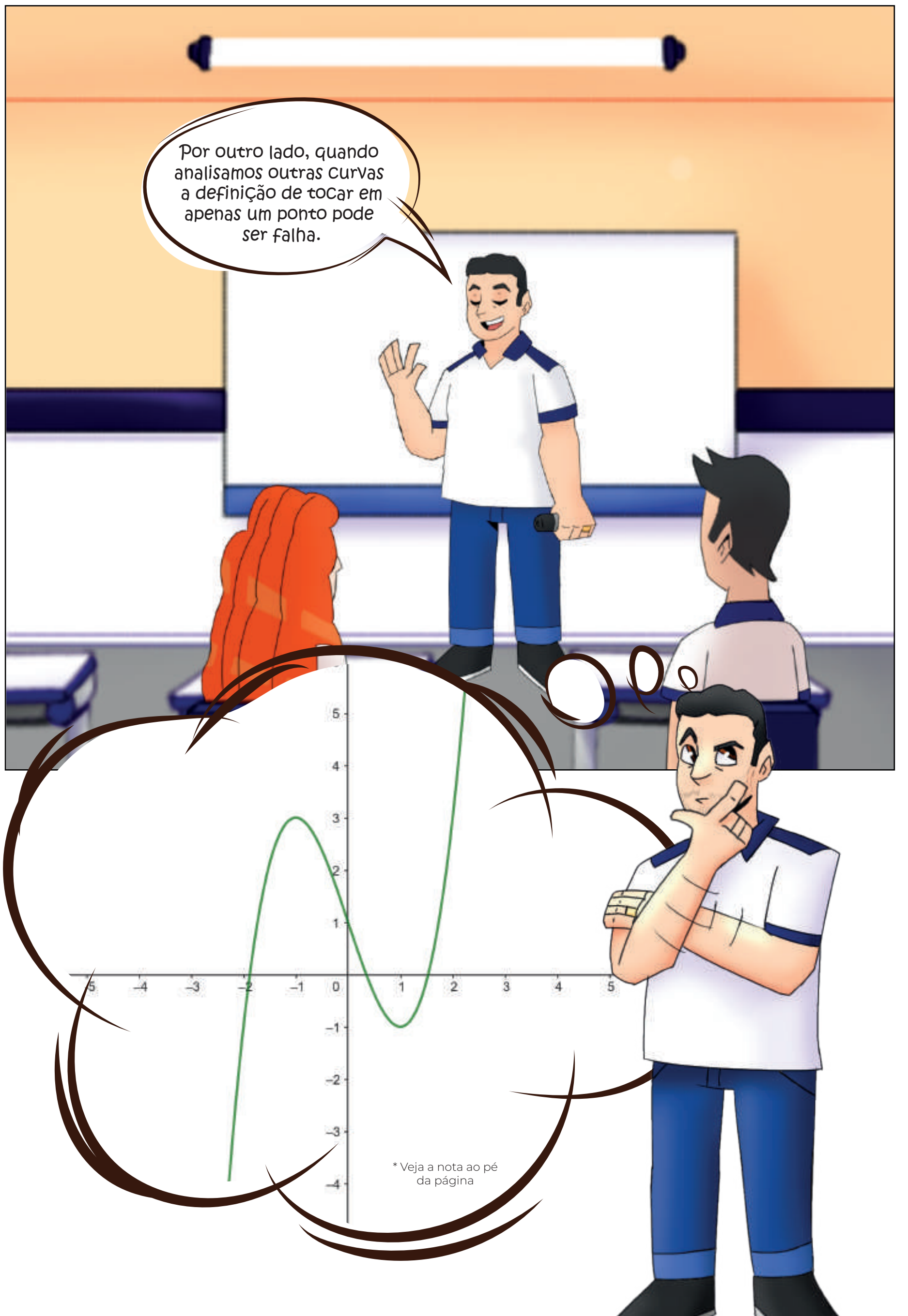
Esta história em quadrinhos foi criada com o intuito de divulgar a Matemática. Além do mais, por meio dessa importante ferramenta didática, visamos proporcionar aos educandos uma aprendizagem lúdica e significativa acerca de temas abordados na disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos.

AO LEITOR

Nesta história em quadrinhos vamos estudar **o problema da tangente.** Será uma ótima oportunidade para aprender a definir corretamente o conceito de reta tangente e investigar intuitivamente a ideia de limite.

"A Matemática é a linguagem em que Deus escreveu o Universo".
(Galileu Galilei)


O MATEMÁTICO EM UMA AULA
SOBRE O PROBLEMA DA TANGENTE
Galerinha, vamos começar nossa aula de hoje com a seguinte pergunta:
o que vocês entendem por reta tangente?
Professor, eu acho que é uma reta que toca a circunferência num único ponto.
Hum, uma reposta bastante interessante!
Nas aulas de Geometria Plana aprendemos isso mesmo. Quando uma reta é tangente a uma circunferência, ela intersecta a circunferência num único ponto.
E quando a reta intersecta a circunferência e não é tangente dizemos que ela é secante, isto é, a reta toca a circunferência em dois pontos distintos.
7



* Esta curva representa o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$.


GeoGebra
Com o auxílio do software GeoGebra vamos construir as duas situações comentadas anteriormente.
Primeiramente, vamos construir uma circunferência e uma reta tangente a ela.
A
9

GeoGebra

O que é o GeoGebra?

GeoGebra é um software dinâmico de Matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma.

Por hora, o GeoGebra será a nossa principal ferramenta de trabalho para investigar o problema da tangente.

Você ainda não utilizou o GeoGebra? Não o conhece?

Não se preocupe! Você aprenderá muitas coisas interessantes sobre o GeoGebra nesta aula.

Além disso, vamos deixar algumas instruções para você aprender a construir no GeoGebra.

INSTRUÇÕES

Instale o software GeoGebra em seu computador, baixe o App em seu smartphone ou pesquise GeoGebra Classic no Google para utilizá-lo de forma online. Agora você já pode abrir o software e explorar todas as suas funções!!

A primeira construção que iremos realizar se trata de uma circunferência e uma reta tangenciado em um dos seus pontos.

Para realizar a construção utilizaremos os ícones apresentados no último quadrinho da página anterior. Cada um desses ícones representa um comando do GeoGebra, vejamos o que cada um deles significa:

1º Passo: Clique em e logo em seguida na opção Círculo: Centro & Raio. Após realizar esses passos passe o mouse sobre o plano cartesiano e marque o centro da circunferência no local de sua preferência (sugestão: marque o ponto na origem do plano cartesiano), logo em seguida aparecerá uma aba na tela solicitando que você determine a medida do raio do círculo que será construído, escreva um valor de sua preferência (sugestão: 3);

2º Passo: Clique em A e logo em seguida na opção A Ponto. Agora, passe o mouse sobre a circunferência e marque o ponto no local de sua preferência;

3º Passo: Clique em e logo em seguida na opção Reta Tangente. Agora, você deve realizar dois cliques em sequência: 1º) clique no ponto que você marcou sobre a circunferência e 2º) clique em qualquer lugar da borda da circunferência.

E agora?


Observem!! A construção acabou de ser finalizada!
Nossa, que legal!

Vamos construir! 😎

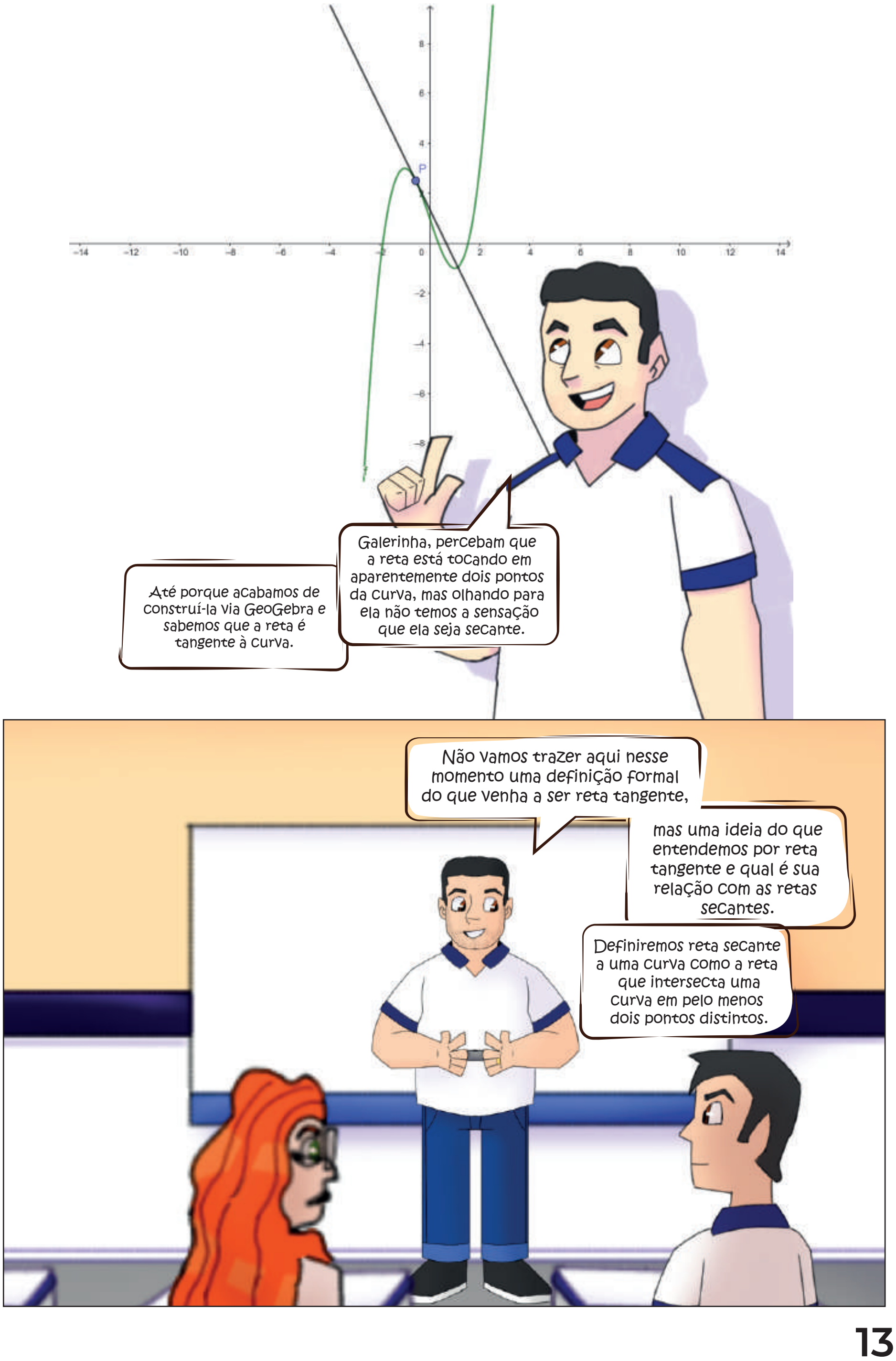
INSTRUÇÕES

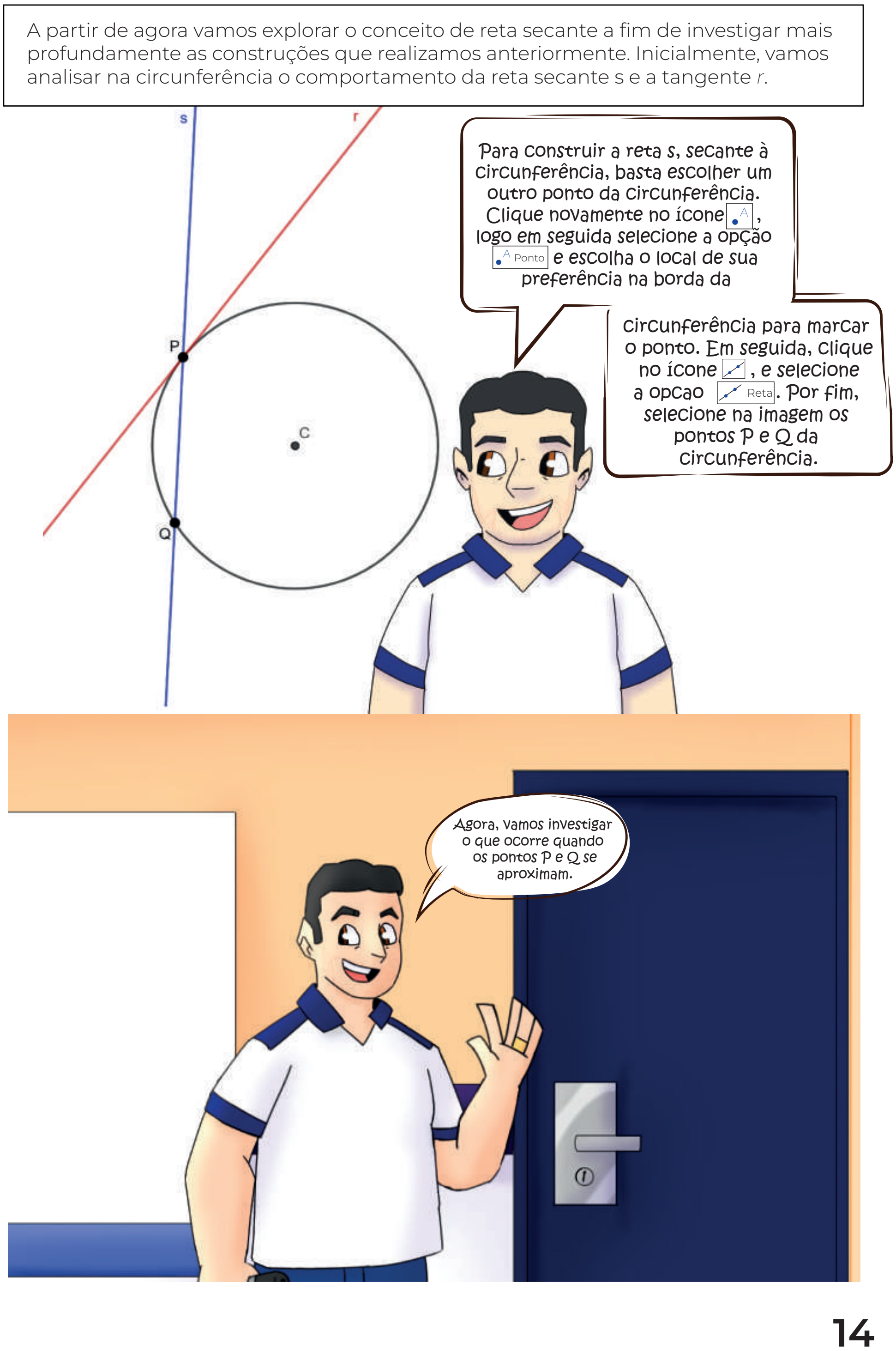
1º Passo: Escreva dentro do espaço da aba de entrada [+ | Entrada...] a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

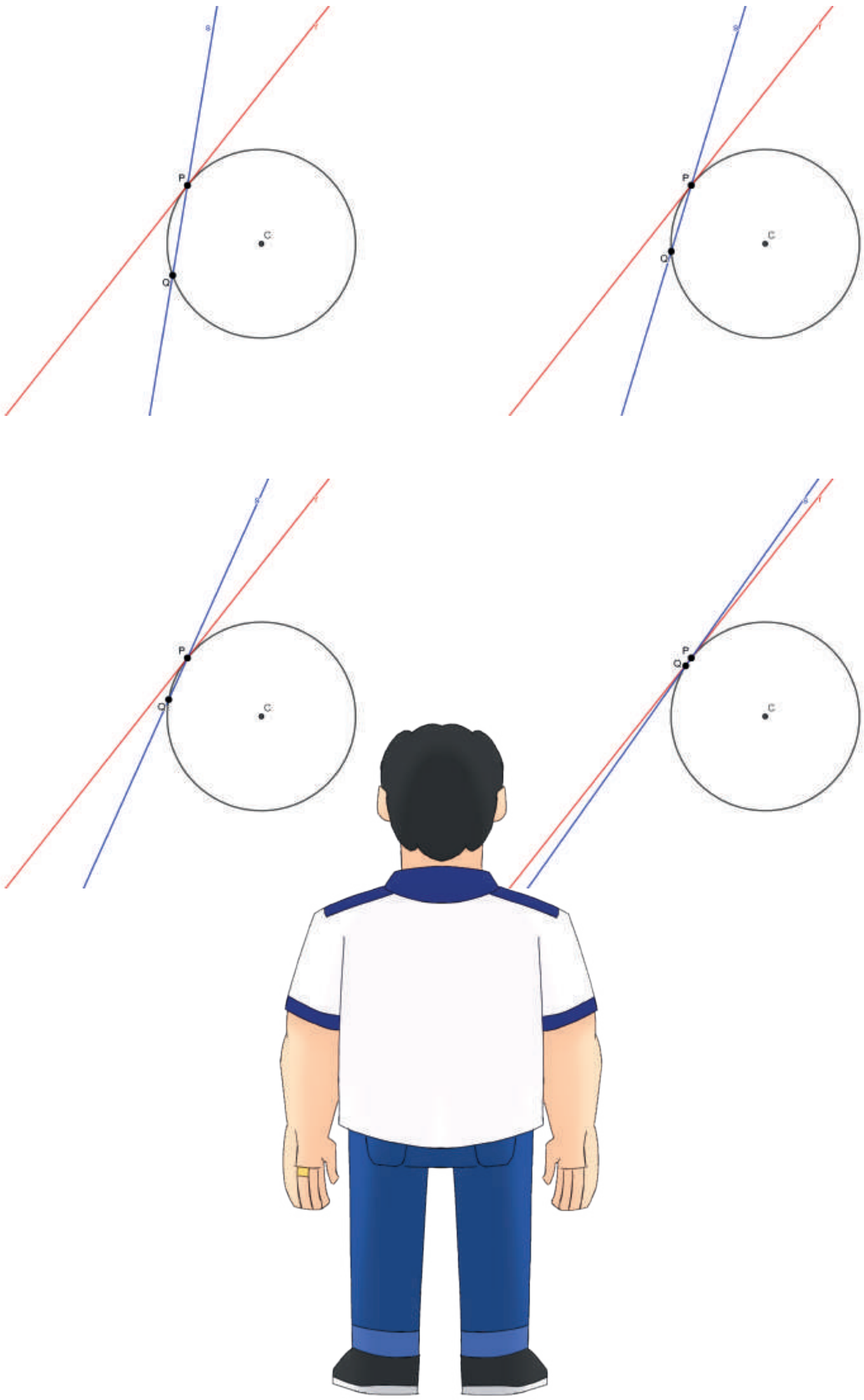
2º Passo: clique no ícone [•A] e logo em seguida selecione a opção [•A Ponto]. Agora, passe o mouse sobre a curva e marque o ponto no local de sua preferência.

3º Passo: clique no ícone [ ] e depois selecione a opção [Reta Tangente]. Por fim, realize as seguintes ações: 1º) clique no ponto que você marcou sobre a curva e 2º) clique em qualquer parte da curva.

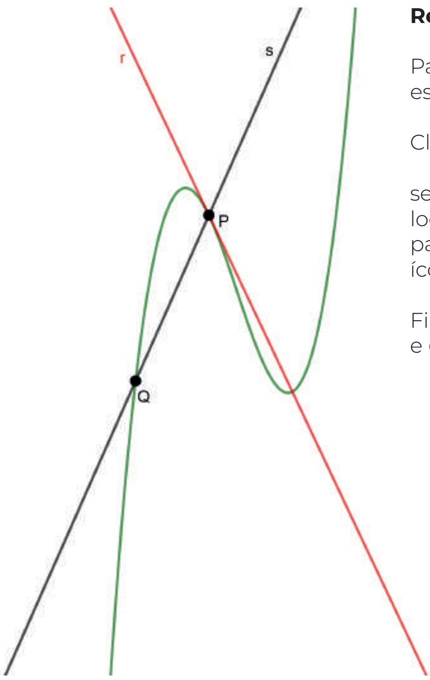
Construção realizada com sucesso! 😄


Galerinha, percebam que a reta está tocando em aparentemente dois pontos da curva, mas olhando para ela não temos a sensação que ela seja secante.
Até porque acabamos de construí-la via GeoGebra e sabemos que a reta é tangente à curva.
Não vamos trazer aqui nesse momento uma definição formal do que venha a ser reta tangente,
mas uma ideia do que entendemos por reta tangente e qual é sua relação com as retas secantes.
Definiremos reta secante a uma curva como a reta que intersecta uma curva em pelo menos dois pontos distintos.
13


A partir de agora vamos explorar o conceito de reta secante a fim de investigar mais profundamente as construções que realizamos anteriormente. Inicialmente, vamos analisar na circunferência o comportamento da reta secante s e a tangente r.
s
r
P
C
Q
Para construir a reta s, secante à circunferência, basta escolher um outro ponto da circunferência. Clique novamente no ícone A, logo em seguida selecione a opção A Ponto e escolha o local de sua preferência na borda da
circunferência para marcar o ponto. Em seguida, clique no ícone , e selecione a opcao Reta. Por fim, selecione na imagem os pontos P e Q da circunferência.
Agora, vamos investigar o que ocorre quando os pontos P e Q se aproximam.
14


P
Q
C
P
Q
C
P
Q
C
P
Q
C

Agora, vamos construir uma reta secante à curva $f(x) = x^3 - 3x + 1$, passando pelos pontos P e Q.



Realizando a construção

Para construir a reta s, secante à curva, basta escolher um outro ponto da curva.

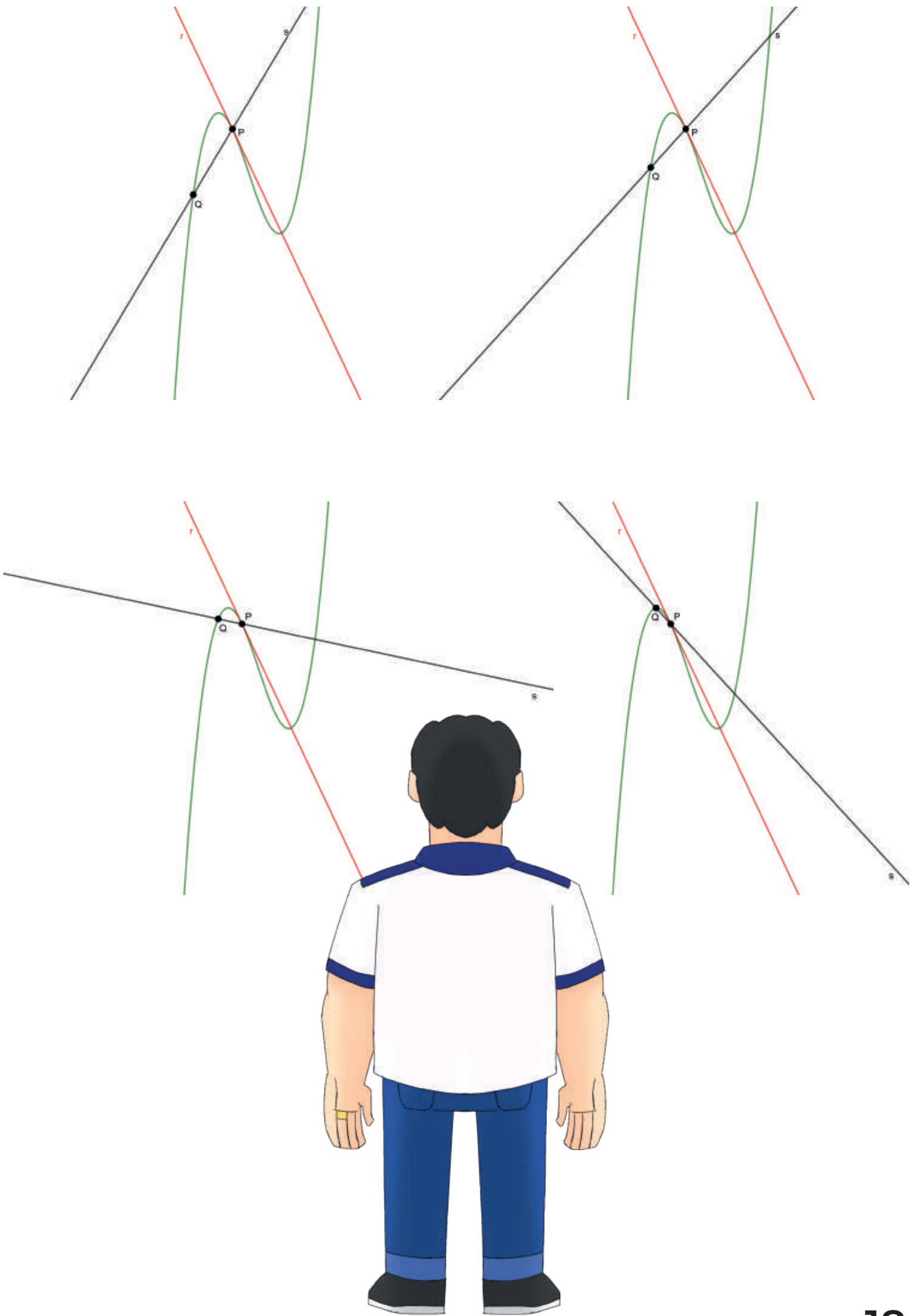
Clique novamente no ícone , logo em seguida selecione a opção 

e escolha o local de sua preferência no contorno da curva para marcar o ponto. Em seguida, clique no ícone , e selecione a opção 

.

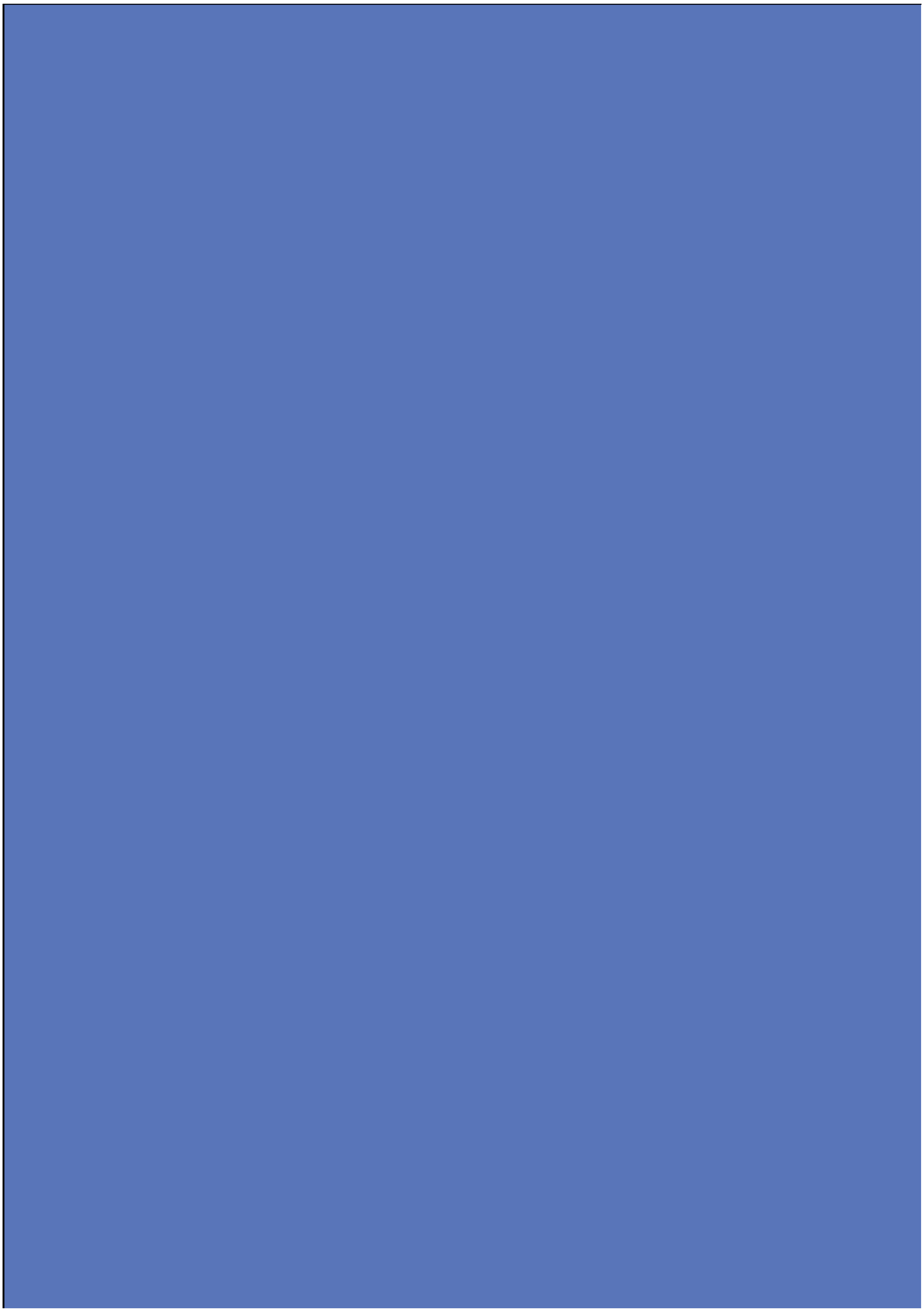
Finalmente, selecione na imagem os pontos P e Q da curva. Pronto, a construção foi realizada!


Novamente, imagine que você possa deslocar livremente o ponto Q pela curva com o intuito de deixar este ponto cada vez mais próximo de P.
Na próxima página apresentaremos uma sequência de imagens para ilustrar de forma dinâmica o deslocamento do ponto Q ao longo da curva. Lembre-se: a ideia é escolhermos o ponto Q de modo tal que ele esteja nas proximidades do ponto P.



Ao analisarmos, intuitivamente, esses dois exemplos podemos ter um melhor entendimento sobre o que realmente é reta tangente.
Dizemos que **RETA TANGENTE** é a reta cuja inclinação é o **LIMITE*** das inclinações das secantes, ou ainda, quando temos uma reta secante e seus pontos são infinitamente próximos.
*LI.MI.TE (s. m)
Significa: **fronteira.**
Do ponto de vista da Matemática a ideia é basicamente a mesma. O fato interessante é analisarmos um ponto Q que está localizado nas proximidades de um ponto P fixo e o que ocorre quando esses pontos se aproximam cada vez mais. De forma intuitiva, conclui-se que quanto maior for a proximidade desses pontos as inclinações das retas secantes irão convergir para um mesmo valor, este valor limite corresponde a inclinação da reta tangente.
19

20




O PROBLEMA
DA VELOCIDADE
INSTANTÂNEA
A SAGA DOS
PROCESSOS
INFINITOS
2º EDIÇÃO
PROFMAT
CAPES
UFCG
ETE

TÍTULO ORIGINAL
O Problema da Velocidade Instantânea: a Saga dos Processos Infinitos. 2ª edição.

ROTEIRO
Tiago Emanoel Melo Pereira

REVISÃO | ORIENTAÇÃO
Dr. Alânnio Barbosa Nobrega
Dr. Romildo Nascimento de Lima

DESENHOS
João Gustavo Correia da Silva

DIAGRAMAÇÃO
Carlos Henrique Inácio Lima

Esta história em quadrinhos foi criada com o intuito de divulgar a Matemática. Além do mais, por meio dessa importante ferramenta didática visamos proporcionar aos educandos uma aprendizagem lúdica e significativa acerca de conteúdos pouco abordados no Ensino Básico.

AO LEITOR

Nesta história em quadrinhos estudaremos **o problema da velocidade instantânea.**

O enredo apresentado nos permite relembrar alguns conceitos da Física normalmente estudados no 1º ano do Ensino Médio e entender como podemos determinar intuitivamente a velocidade de um móvel num determinado instante por meio de aproximações.

"Velocidade é tudo que eu preciso. Me poupe do que não é necessário..."
(A Ferro e Fogo – Engenheiros do Hawaii)

UM ESTUDANTE EM APUROS

O PROBLEMA DA VELOCIDADE INSTANTÂNEA

7


40
km/h
80
VRUM!
VRUM!
Ops! Agora é que eu não chego no horário mesmo!
PRIIII!
PRIIII!

8


PADARIA
Desculpe Sr. Guarda, acho que a lombada deve está com algum defeito. Me explique como eu poderia estar a 80 km/h se só estava dirigindo por aqui há cerca de 1 minuto, e não durante 1 hora?
Quando você passou pela lombada eletrônica foi registrado que a sua moto estava a 80 km/h, mas o limite de velocidade dessa via é de 40 km/h. Você não percebeu que estava rápido demais?
A questão não é essa! No instante em que você passou pela lombada registrou-se a velocidade de 80 km/h, isto quer dizer que se você seguisse viagem mantendo constante essa velocidade, após 1 hora, teria percorrido 80 km.
E com toda certeza eu já teria ultrapassado a Universidade.
9


Não tenho dúvidas disso! Contudo, se você tivesse continuado com essa velocidade durante 1 minuto, teria percorrido 1,33 km, e em 1 segundo 22,22 metros, e em 0,1 segundos teria percorrido 2,22 m e teria dado perfeitamente para você prosseguir durante 0,1 segundos sem ultrapassar a Universidade.
Entendo, você determinou os espaços percorridos com essa velocidade para intervalos de tempo cada vez menores. Mas, para mim só faz sentido pensar dessa forma se o limite de velocidade da via fosse 2,22 metros em 0,1 segundos.


Mas, o que eu estou dizendo são coisas equivalentes. O que vale é a velocidade instantânea, isto é, a velocidade no instante em que você passou pela lombada. Então, quando você diz que a lombada está quebrada não faz muito sentido.

10

Ao Leitor

Talvez você possa ter ficado um pouco confuso com tantos números aparecendo, mas afinal, o que o guarda fez? Tranquilize-se! Não foi nada demais! Ele apenas realizou algumas conversões para as unidades de tempo, distância e velocidade quando foi pertinente. Vejamos:

Inicialmente, ele argumentou que mantendo constante a velocidade de 80 *km/h*, após 1 hora, o estudante teria percorrido 80 *km*. Em seguida, o guarda realizou conversões com o intuito de determinar o espaço percorrido pelo estudante em intervalos de tempo cada vez menores. Por exemplo, como sabemos, 1 *hora* = 60 *minutos*, para calcular o espaço percorrido pelo móvel em 1 *minuto* basta fazer $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, onde $v_m = \frac{80}{60} \approx 1{,}33$ *km/min*, isto significa que em 1 *minuto* o estudante teria percorrido 1,33 *km*.

E em 1 *segundo*? Qual distância o estudante teria percorrido? Como 1 *minuto* = 60 *segundos*, sabemos que 60 *minutos* = 3600 *segundos* e para calcular o espaço percorrido pelo móvel em 1 segundo basta fazermos $v_m = \frac{80}{3600} \approx 0{,}02222$ *km/s*, ainda podemos melhorar este resultado lembrando que 1 *km* = 1000 *metros*, isto quer dizer que 0,02222 *km* = 22,22 *metros*, então em 1 *segundo* o estudante percorreria cerca de 22,22 *m*. Por último, vamos pensar no intervalo de tempo de 0,1 *segundos*. Neste intervalo qual seria o espaço percorrido pelo estudante? Note que, 0,1 *segundos* corresponde a $\frac{1}{10}$ de segundo, isto é, para determinar o espaço percorrido nesse intervalo de tempo basta dividirmos o espaço percorrido em 1 *segundo* em 10 partes iguais.

Desse modo, $\frac{22{,}22}{10} = 2{,}222$, isto significa que após 0,1 segundos o estudante percorreria 2,222 *metros*.

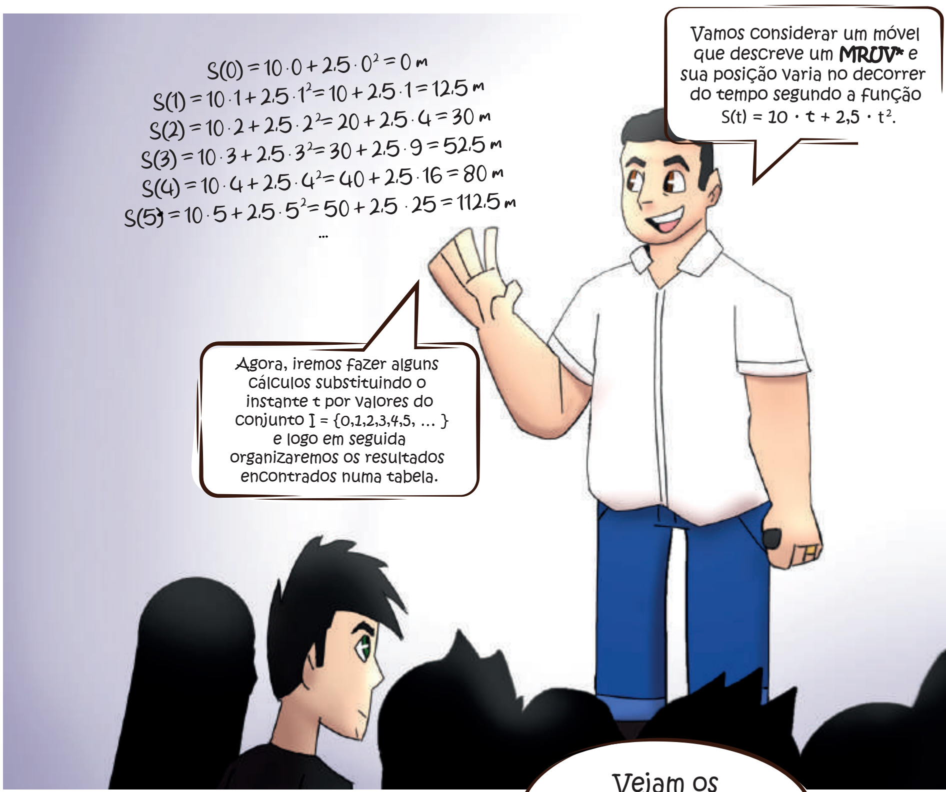
Autor

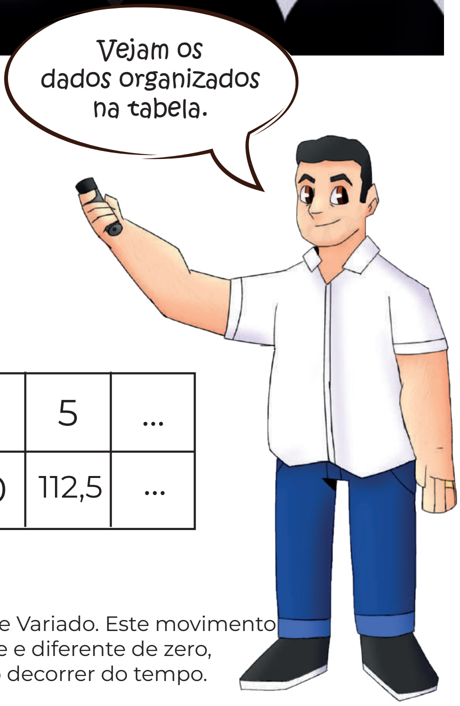
*Esse breve diálogo foi inspirado em Nussenzveig (2002, p.43,44).

12


UNIVERSIDADE
VU-UU-UU!
VRUM! VRUM!
Eh, ...fiz de tudo, mas não teve jeito. Vou chegar atrasado!
UFF...
13

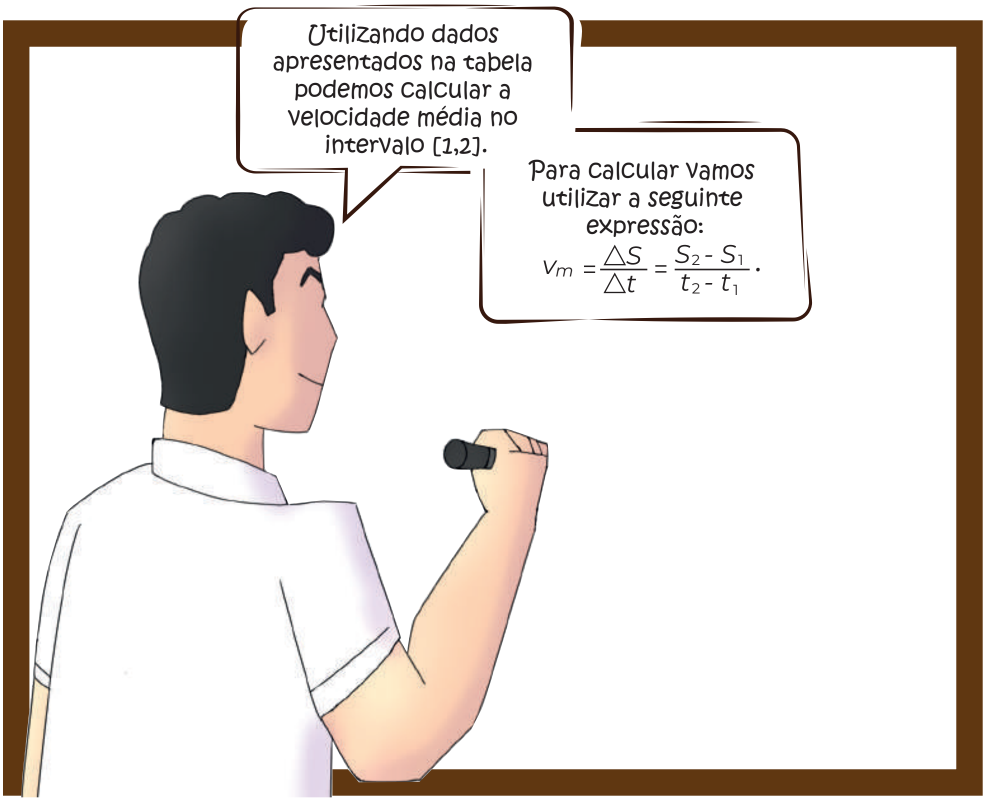

Muito bem turma, agora vamos investigar o problema da velocidade instantânea.
Ah, fala sério! Velocidade instantânea? De novo esse assunto? Já não basta a multa que levei... aff!
CRRRR!
14

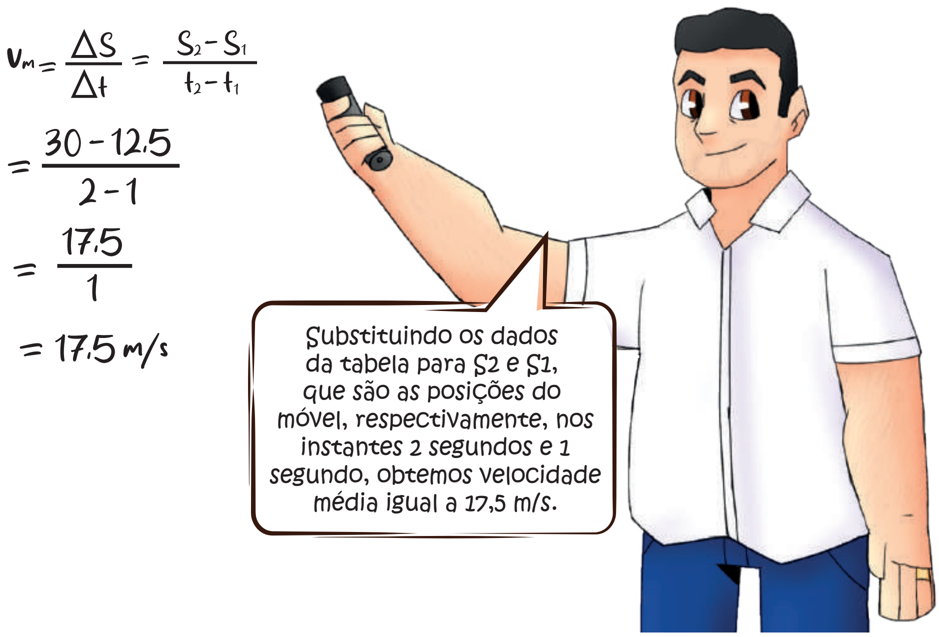




t	0	1	2	3	4	5	...
$S(t)$	0	12,5	30	52,5	80	112,5	...

***MRUV** é o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado. Este movimento é caracterizado por possuir aceleração constante e diferente de zero, isto significa que a velocidade do móvel varia no decorrer do tempo.


Utilizando dados apresentados na tabela podemos calcular a velocidade média no intervalo [1,2].
Para calcular vamos utilizar a seguinte expressão:
$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$.

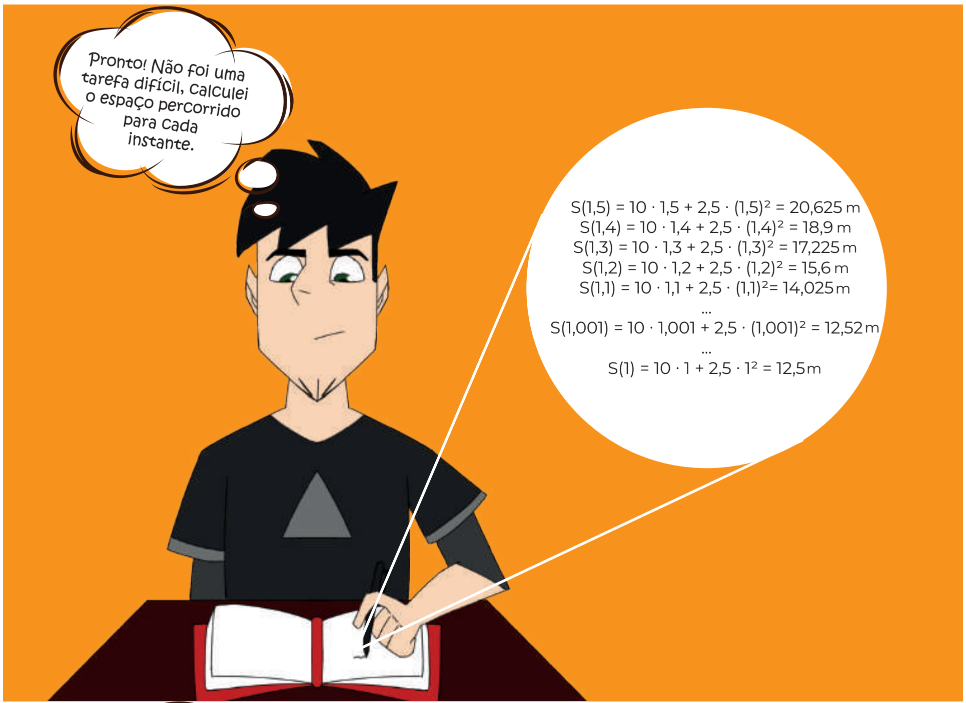

$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$
$= \frac{30 - 12.5}{2 - 1}$
$= \frac{17.5}{1}$
$= 17.5$ m/s
Substituindo os dados da tabela para S2 e S1, que são as posições do móvel, respectivamente, nos instantes 2 segundos e 1 segundo, obtemos velocidade média igual a 17,5 m/s.

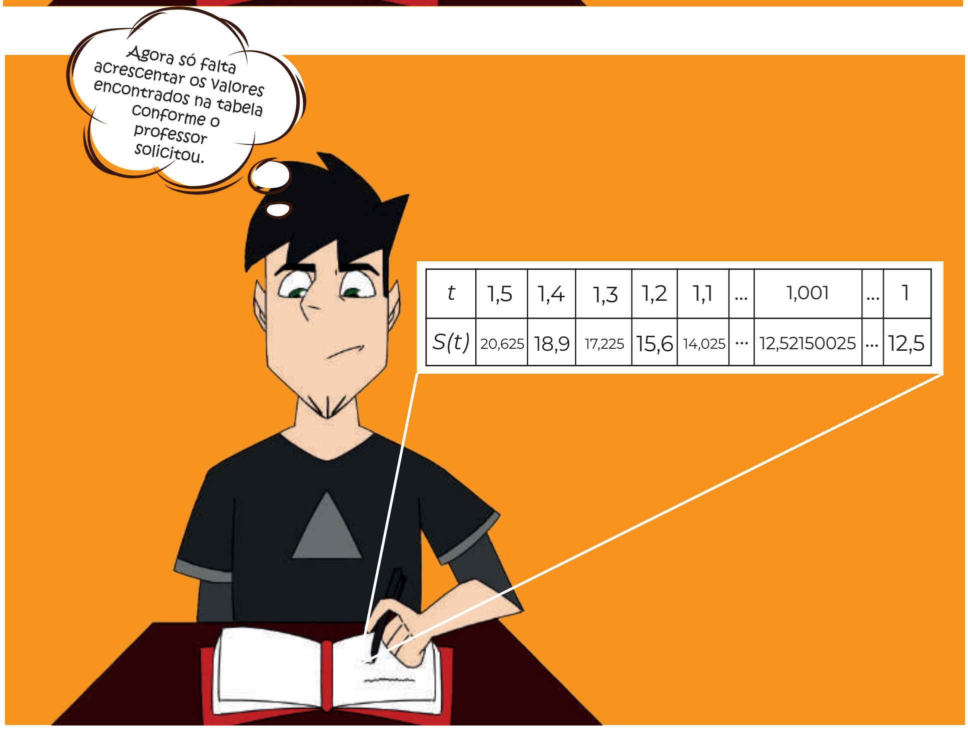

Foi exatamente esse o cálculo que imaginei quando estava falando com aquele guarda, mas pelo visto algo que pensei não estava correto.
Agora, faremos algo mais interessante! Vamos calcular o espaço percorrido pelo móvel em intervalos de tempo cada vez menores.
Hum... vamos analisar o que acontece.

17

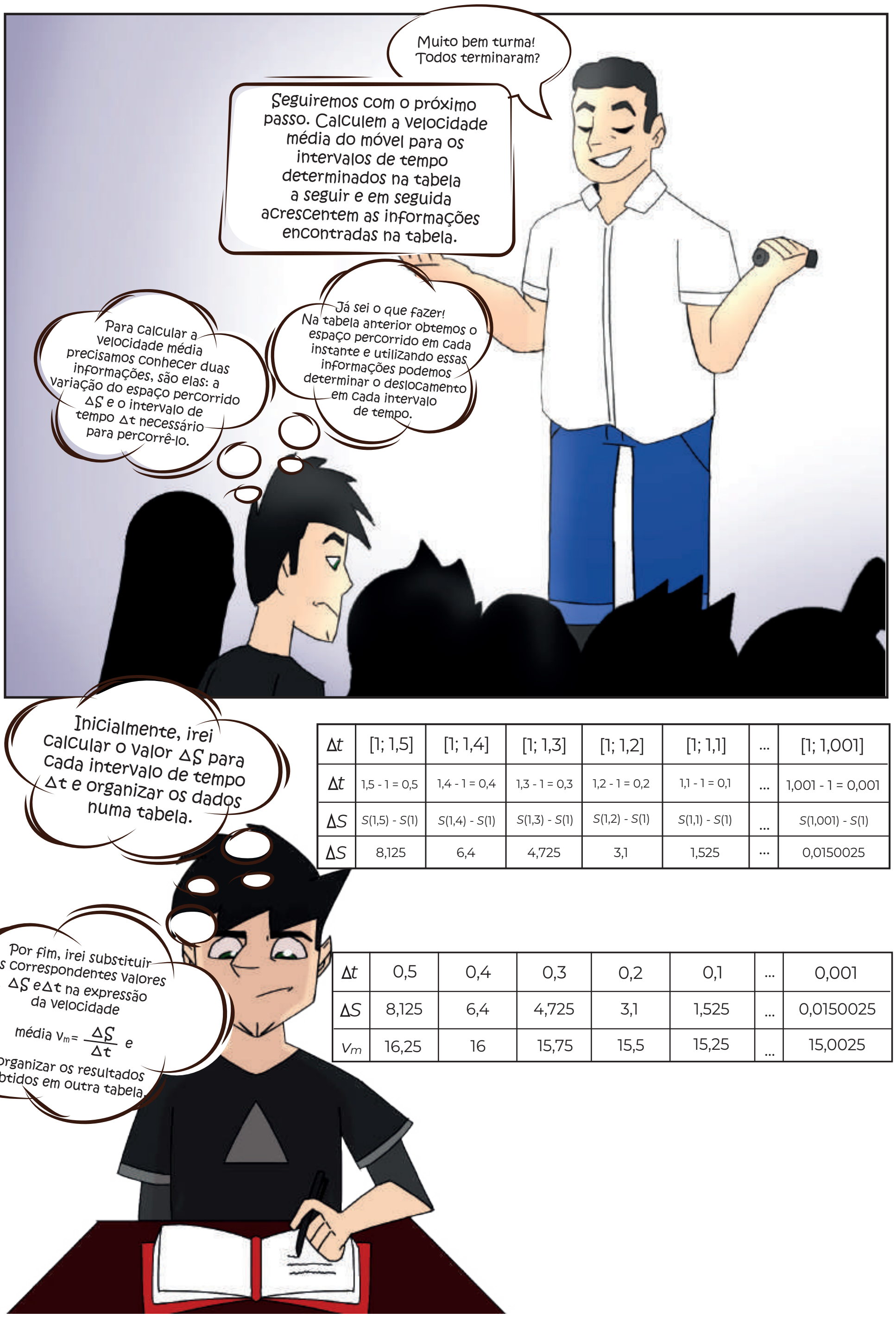
t	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	...	1,001	...	1

18


Pronto! Não foi uma tarefa difícil, calculei o espaço percorrido para cada instante.
S(1,5) = 10 · 1,5 + 2,5 · (1,5)² = 20,625 m
S(1,4) = 10 · 1,4 + 2,5 · (1,4)² = 18,9 m
S(1,3) = 10 · 1,3 + 2,5 · (1,3)² = 17,225 m
S(1,2) = 10 · 1,2 + 2,5 · (1,2)² = 15,6 m
S(1,1) = 10 · 1,1 + 2,5 · (1,1)²= 14,025m
...
S(1,001) = 10 · 1,001 + 2,5 · (1,001)² = 12,52m
...
S(1) = 10 · 1 + 2,5 · 1² = 12,5m

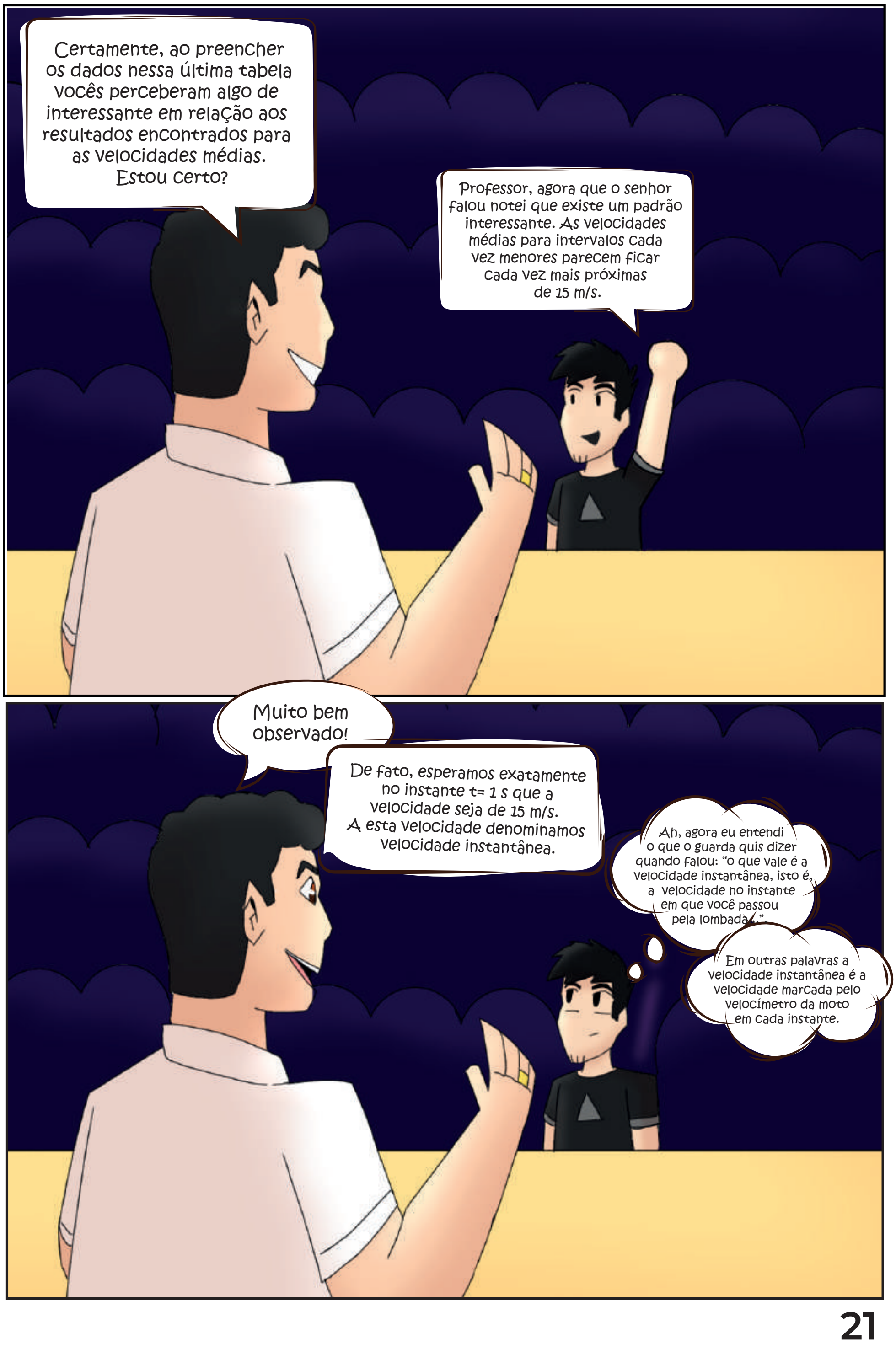

Agora só falta acrescentar os valores encontrados na tabela conforme o professor solicitou.
t | 1,5 | 1,4 | 1,3 | 1,2 | 1,1 | ... | 1,001 | ... | 1
S(t) | 20,625 | 18,9 | 17,225 | 15,6 | 14,025 | ... | 12,52150025 | ... | 12,5

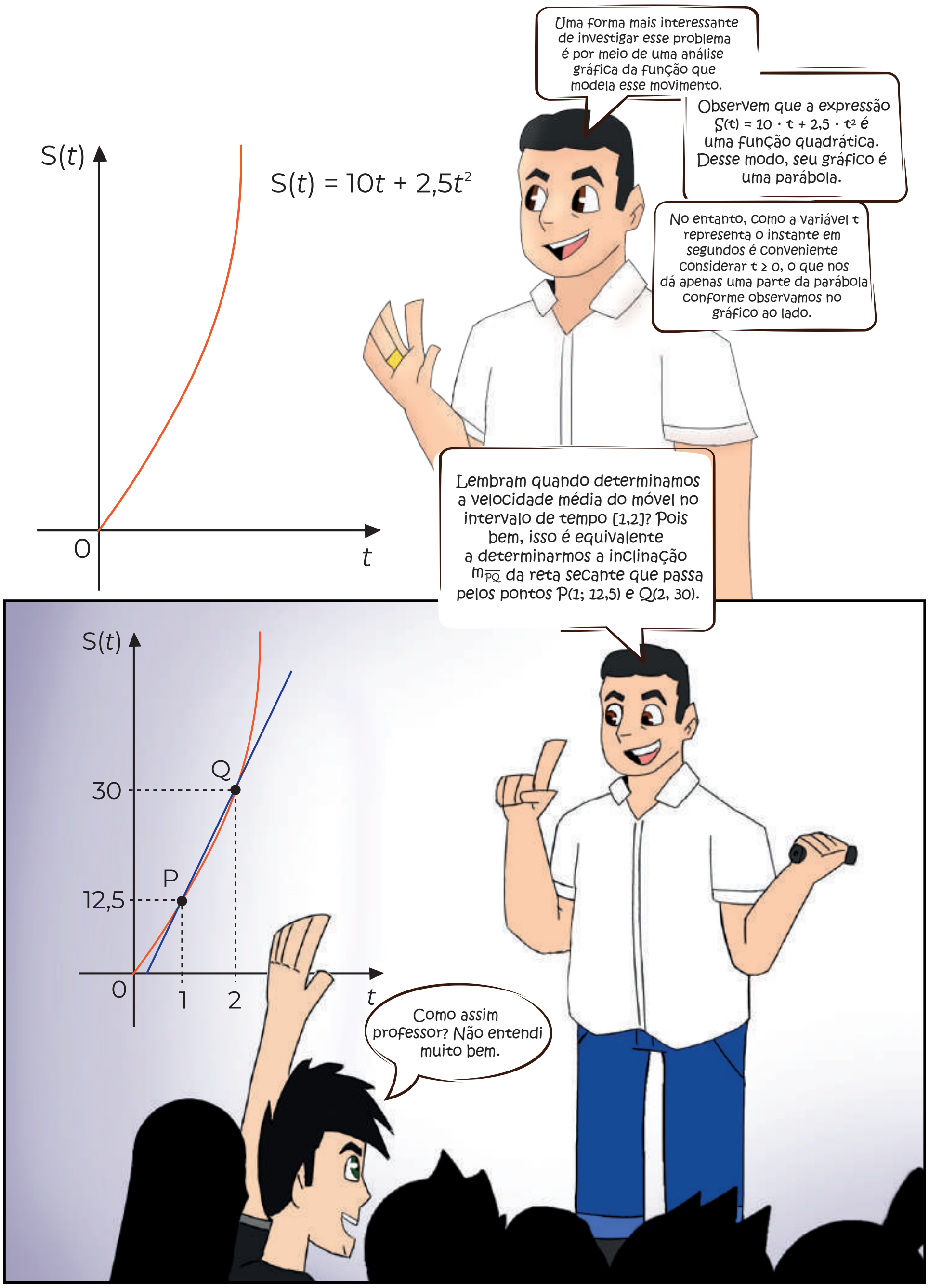
19

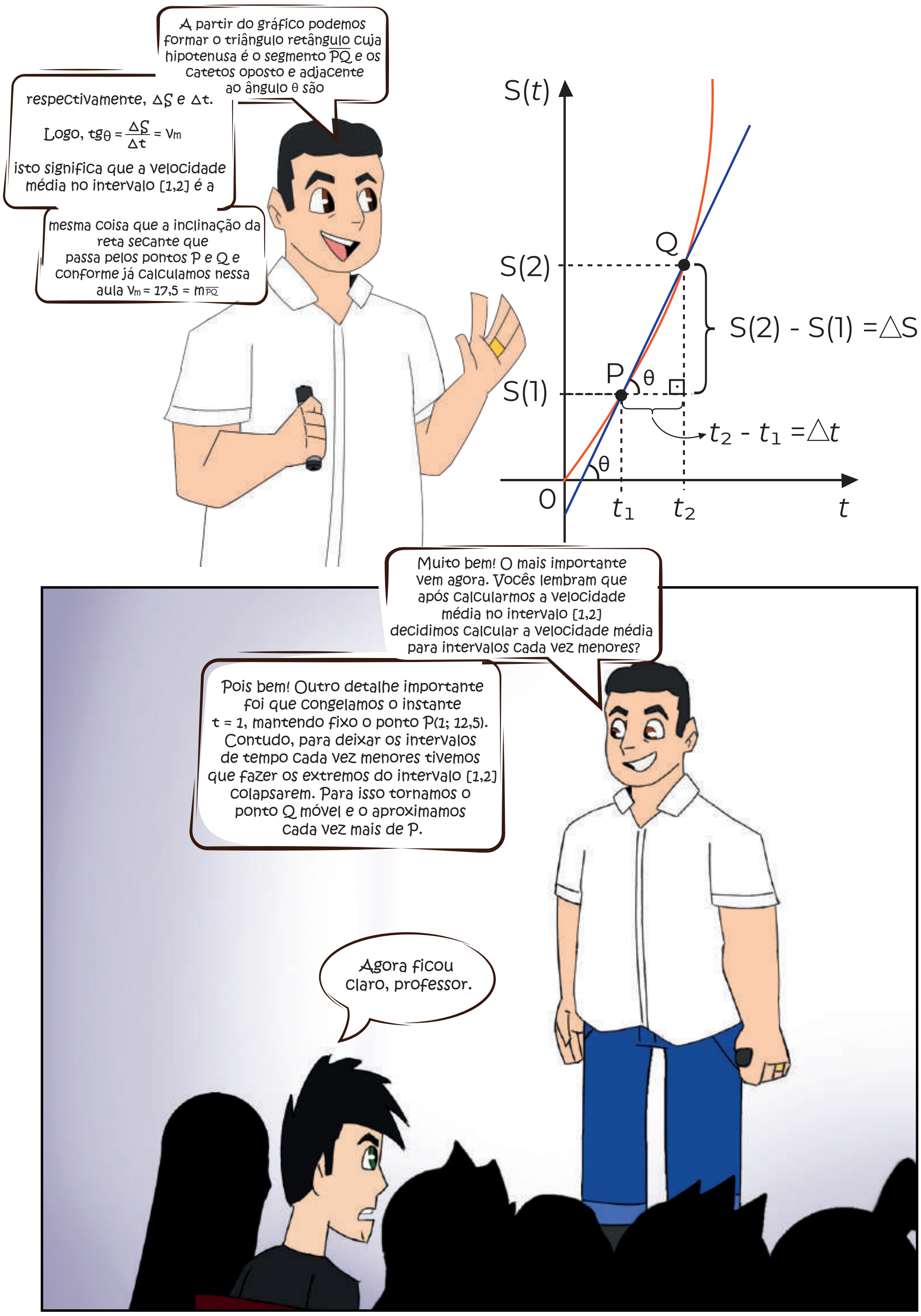


Δt	[1; 1,5]	[1; 1,4]	[1; 1,3]	[1; 1,2]	[1; 1,1]	...	[1; 1,001]
Δt	1,5 - 1 = 0,5	1,4 - 1 = 0,4	1,3 - 1 = 0,3	1,2 - 1 = 0,2	1,1 - 1 = 0,1	...	1,001 - 1 = 0,001
ΔS	$S(1,5) - S(1)$	$S(1,4) - S(1)$	$S(1,3) - S(1)$	$S(1,2) - S(1)$	$S(1,1) - S(1)$	...	$S(1,001) - S(1)$
ΔS	8,125	6,4	4,725	3,1	1,525	...	0,0150025

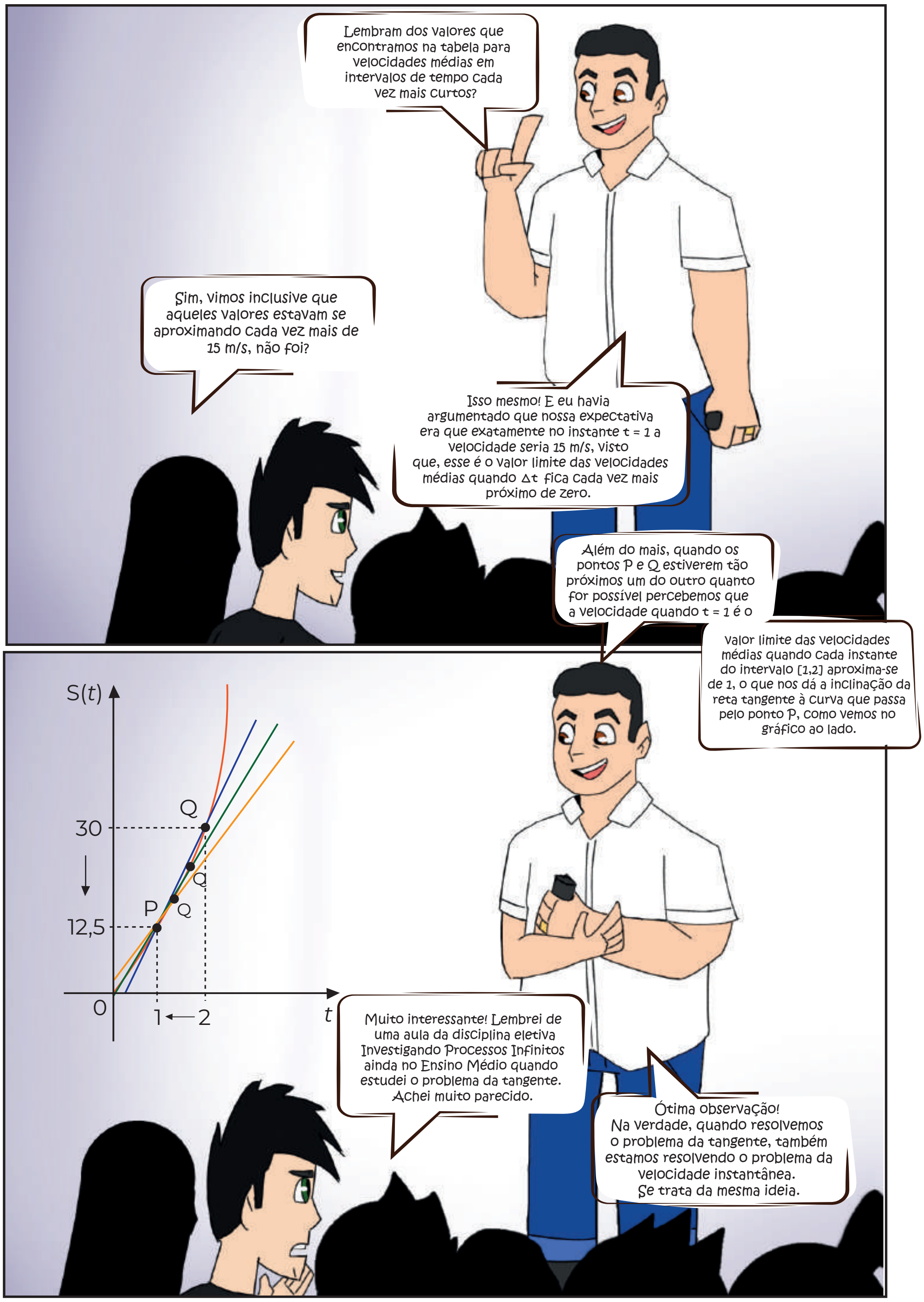
Δt	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	...	0,001
ΔS	8,125	6,4	4,725	3,1	1,525	...	0,0150025
v_m	16,25	16	15,75	15,5	15,25	...	15,0025


Certamente, ao preencher os dados nessa última tabela vocês perceberam algo de interessante em relação aos resultados encontrados para as velocidades médias. Estou certo?
Professor, agora que o senhor falou notei que existe um padrão interessante. As velocidades médias para intervalos cada vez menores parecem ficar cada vez mais próximas de 15 m/s.
Muito bem observado!
De fato, esperamos exatamente no instante t= 1 s que a velocidade seja de 15 m/s. A esta velocidade denominamos velocidade instantânea.
Ah, agora eu entendi o que o guarda quis dizer quando falou: “o que vale é a velocidade instantânea, isto é, a velocidade no instante em que você passou pela lombada...”.
Em outras palavras a velocidade instantânea é a velocidade marcada pelo velocímetro da moto em cada instante.
21


Uma forma mais interessante de investigar esse problema é por meio de uma análise gráfica da função que modela esse movimento.
Observem que a expressão $S(t) = 10 \cdot t + 2,5 \cdot t^2$ é uma função quadrática. Desse modo, seu gráfico é uma parábola.
No entanto, como a variável t representa o instante em segundos é conveniente considerar $t \geq 0$, o que nos dá apenas uma parte da parábola conforme observamos no gráfico ao lado.
S(t)
$S(t) = 10t + 2,5t^2$
0
t
Lembram quando determinamos a velocidade média do móvel no intervalo de tempo [1,2]? Pois bem, isso é equivalente a determinarmos a inclinação $m_{\overline{PQ}}$ da reta secante que passa pelos pontos P(1; 12,5) e Q(2, 30).
S(t)
30
12,5
Q
P
0
1
2
t
Como assim professor? Não entendi muito bem.


A partir do gráfico podemos formar o triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento $\overline{PQ}$ e os catetos oposto e adjacente ao ângulo θ são
respectivamente, ΔS e Δt.
Logo, $tg_{\theta} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = v_m$
isto significa que a velocidade média no intervalo [1,2] é a
mesma coisa que a inclinação da reta secante que passa pelos pontos P e Q e conforme já calculamos nessa aula $v_m = 17{,}5 = m_{\overline{PQ}}$
$S(t)$
Q
$S(2)$
$S(2) - S(1) = \Delta S$
P
θ
$S(1)$
$t_2 - t_1 = \Delta t$
θ
O
t_1
t_2
t
Muito bem! O mais importante vem agora. Vocês lembram que após calcularmos a velocidade média no intervalo [1,2] decidimos calcular a velocidade média para intervalos cada vez menores?
Pois bem! Outro detalhe importante foi que congelamos o instante t = 1, mantendo fixo o ponto P(1; 12,5). Contudo, para deixar os intervalos de tempo cada vez menores tivemos que fazer os extremos do intervalo [1,2] colapsarem. Para isso tornamos o ponto Q móvel e o aproximamos cada vez mais de P.
Agora ficou claro, professor.

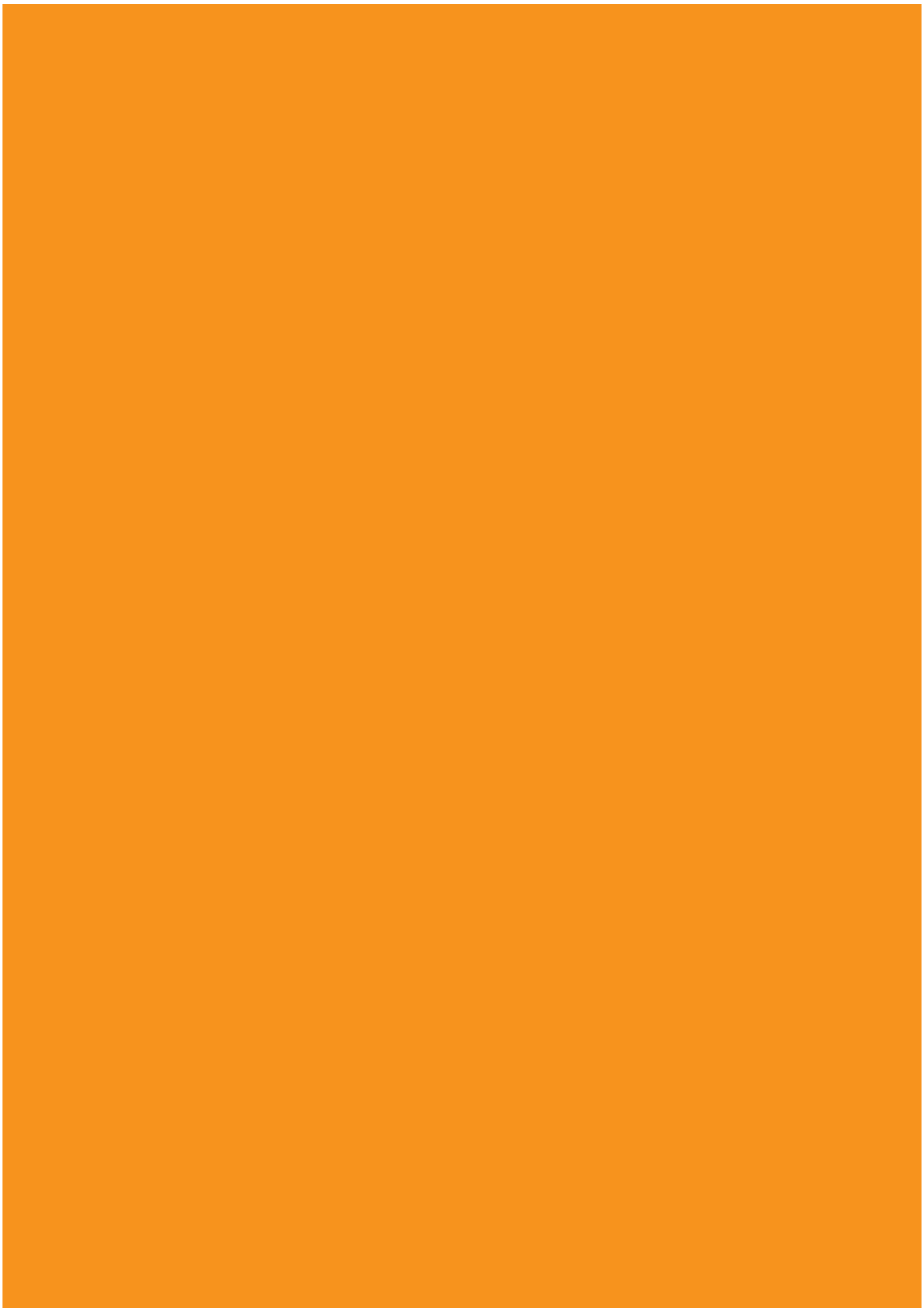
23

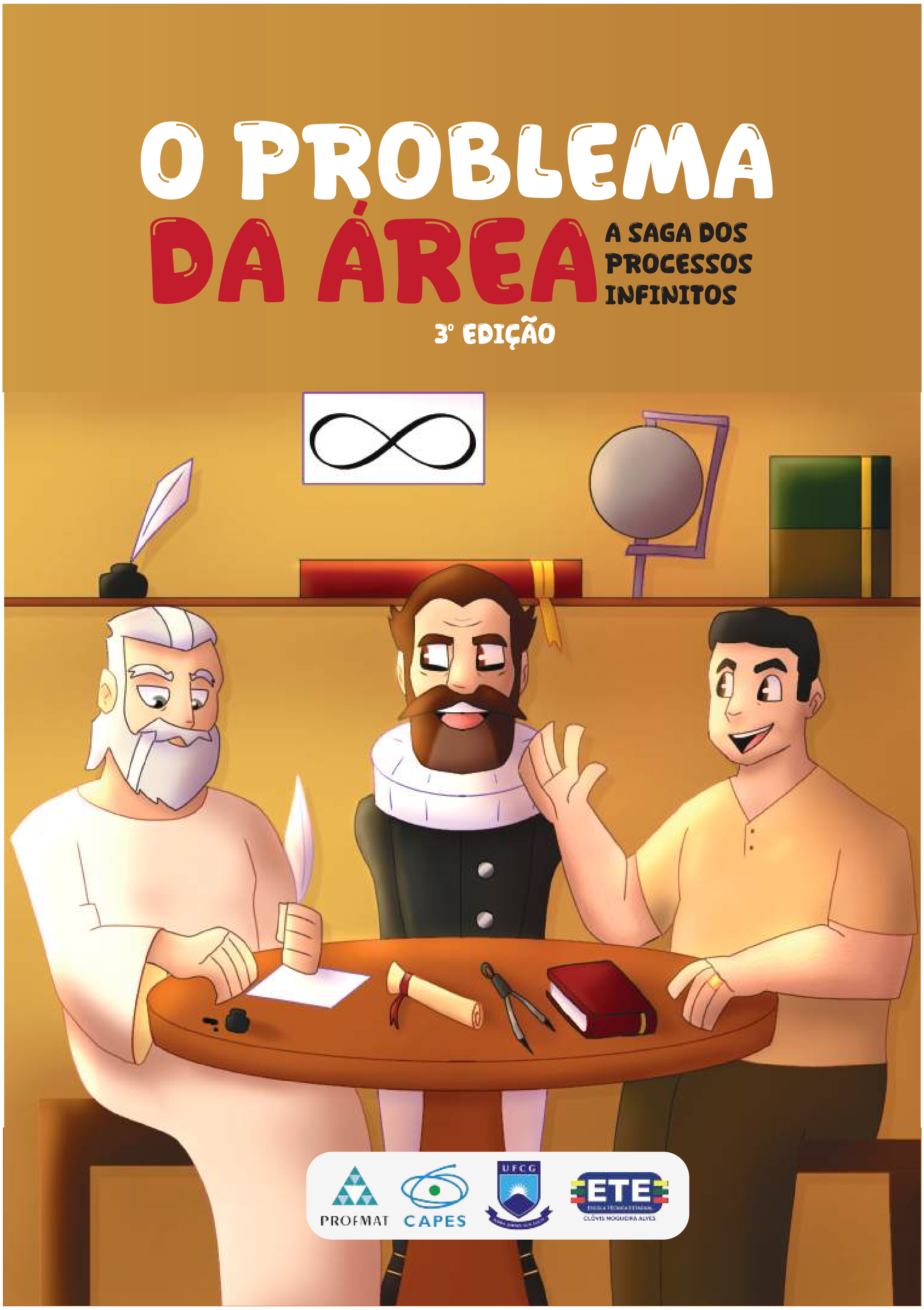

Lembram dos valores que encontramos na tabela para velocidades médias em intervalos de tempo cada vez mais curtos?
Sim, vimos inclusive que aqueles valores estavam se aproximando cada vez mais de 15 m/s, não foi?
Isso mesmo! E eu havia argumentado que nossa expectativa era que exatamente no instante t = 1 a velocidade seria 15 m/s, visto que, esse é o valor limite das velocidades médias quando Δt fica cada vez mais próximo de zero.
Além do mais, quando os pontos P e Q estiverem tão próximos um do outro quanto for possível percebemos que a velocidade quando t = 1 é o
valor limite das velocidades médias quando cada instante do intervalo [1,2] aproxima-se de 1, o que nos dá a inclinação da reta tangente à curva que passa pelo ponto P, como vemos no gráfico ao lado.
S(t)
30
12,5
0
Q
Q
Q
P
1
2
t
Muito interessante! Lembrei de uma aula da disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos ainda no Ensino Médio quando estudei o problema da tangente. Achei muito parecido.
Ótima observação! Na verdade, quando resolvemos o problema da tangente, também estamos resolvendo o problema da velocidade instantânea. Se trata da mesma ideia.

24


Então é isso pessoal, por hora encerramos nossas aulas. Hoje aprendemos sobre o problema da velocidade instantânea, um problema bastante interessante e que nos possibilita investigar várias aplicações em nosso cotidiano.
Nem me fale, muitas aplicações mesmo, inclusive de multas.

25




O PROBLEMA
DA ÁREA
A SAGA DOS
PROCESSOS
INFINITOS
3º EDIÇÃO
PROFMAT
CAPES
UFCG
ETE

TÍTULO ORIGINAL
O Problema da Área: a Saga dos Processos Infinitos.
3ª edição.

ROTEIRO
Tiago Emanoel Melo Pereira

REVISÃO | ORIENTAÇÃO
Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega
Dr. Romildo Nascimento de Lima

DESENHOS
João Gustavo Correia da Silva

DIAGRAMAÇÃO
Carlos Henrique Inácio Lima

Esta história em quadrinhos foi criada com o intuito de divulgar a Matemática. Além do mais, por meio dessa importante ferramenta didática visamos proporcionar aos educandos uma aprendizagem lúdica e significativa acerca de temas abordados na disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos.

AO LEITOR

Nesta história em quadrinhos estudaremos **o problema da área.**
O enredo apresentado foi elaborado com o intuito de investigar o cálculo de certas áreas por meio de decomposições infinitas e divulgar importantes personagens e acontecimentos da História da Matemática.

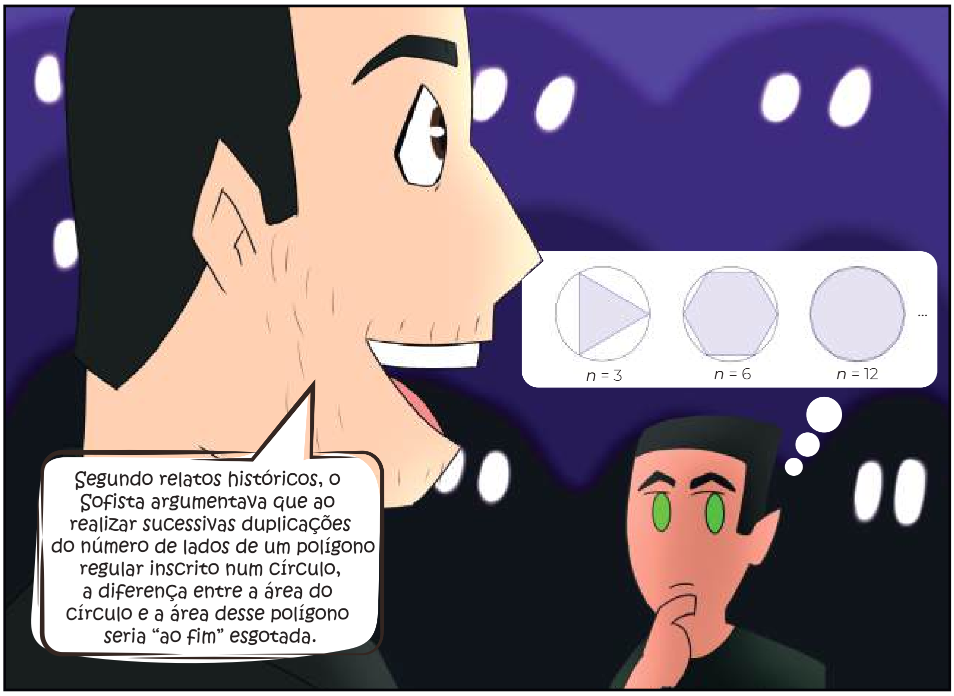
"Às vezes não acertamos com medo de errar e erramos com medo de acertar. "
(Arquimedes)

O PROBLEMA DA ÁREA:

COMO ARQUIMEDES E OS ANTIGOS ENXERGAVAM O INFINITO?

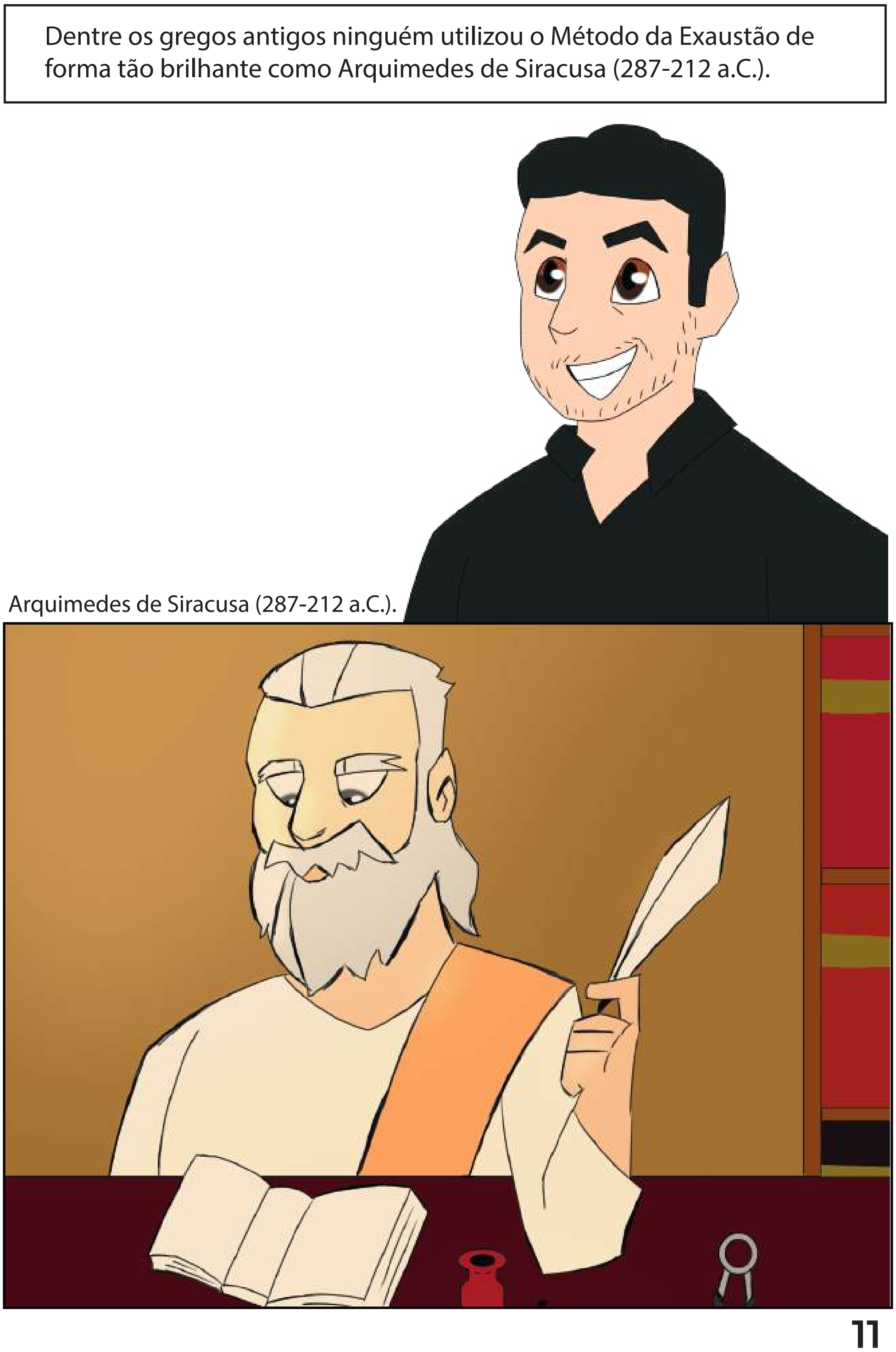
Nossas principais referências foram os livros Introdução à História da Matemática (EVES, 2004) e História da Matemática (BOYER; MERZBACH, 2019).

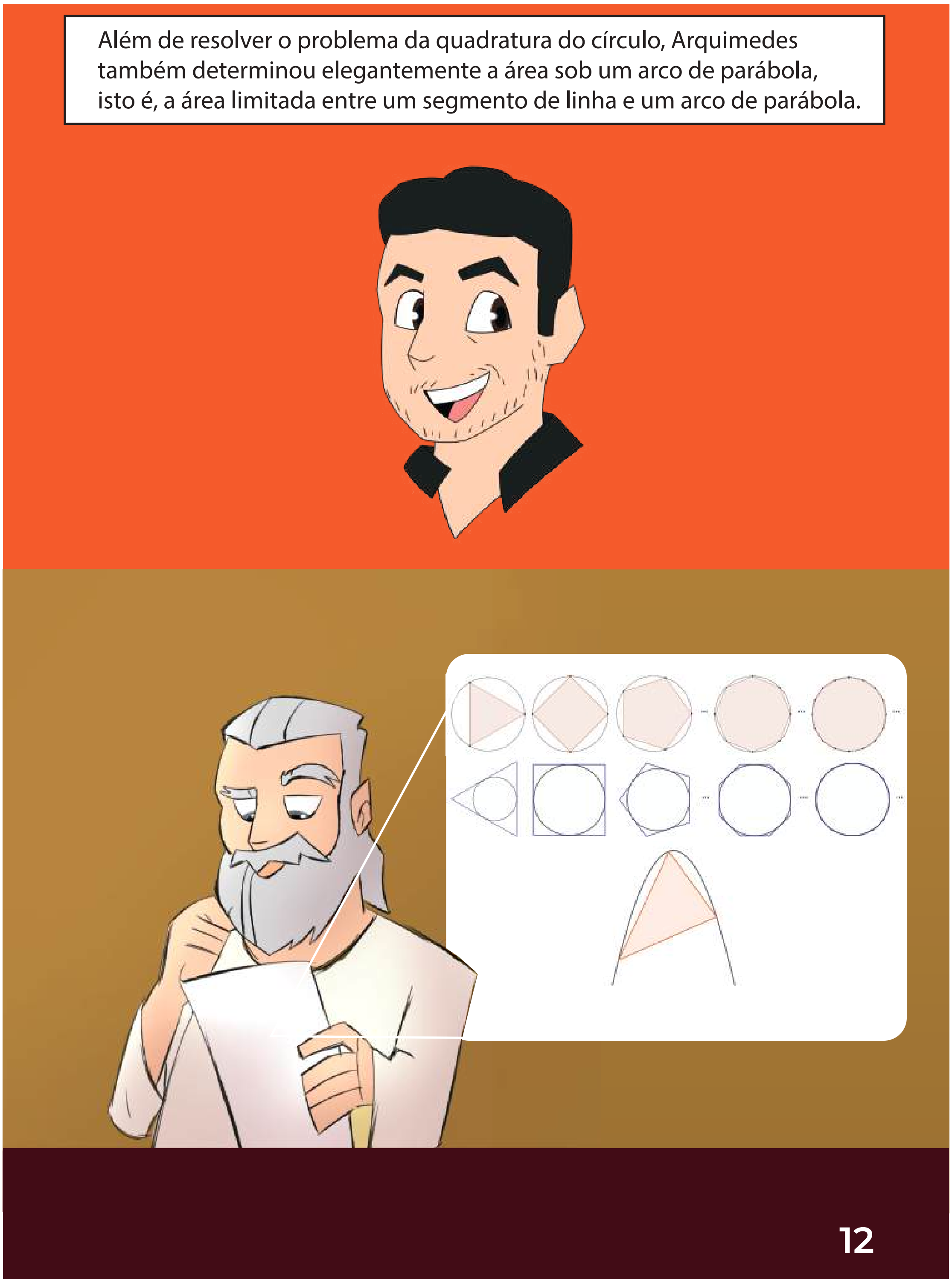

A quadratura do círculo é o processo pelo qual se reduz um círculo a um quadrado de mesma área.
Hum!


n = 3
n = 6
n = 12
...
Segundo relatos históricos, o Sofista argumentava que ao realizar sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre a área do círculo e a área desse polígono seria "ao fim" esgotada.


E já que podemos construir um quadrado de área igual a de qualquer polígono, a quadratura do círculo seria possível.
Professor, o processo idealizado por Ántifon em algum momento esgotará a área do círculo?
Curiosamente, nessa época, as ideias de Antífon foram alvo de críticas embasadas no argumento de uma grandeza se dividir indefinidamente, isto é, os lados do polígono regular inscrito no círculo estavam sempre se duplicando e desse modo, jamais a área do círculo se esgotaria.
Apesar desse contraponto, os visionários argumentos de Antífon continham traços do Método da Exaustão, creditado a Eudoxo de Cnido (c. 370 a.C).
Método da Exaustão?
9


O Método da Exaustão foi uma ferramenta matemática utilizada pelos antigos gregos para evitar processos infinitos. Afinal, registros históricos apontam que no passado os gregos demonstraram uma dificuldade peculiar ao tentar compreender noções de infinitamente pequeno e infinito de modo lógico e intuitivo, desenvolvendo o que ficou conhecido como“horror ao infinito”.
10

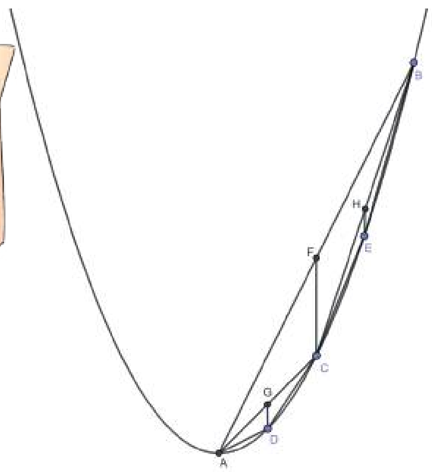

Dentre os gregos antigos ninguém utilizou o Método da Exaustão de forma tão brilhante como Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.).
Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.).
11


Além de resolver o problema da quadratura do círculo, Arquimedes também determinou elegantemente a área sob um arco de parábola, isto é, a área limitada entre um segmento de linha e um arco de parábola.
12

Inicialmente, vamos colocar os pontos A e B sobre a parábola. Em seguida, colocamos sobre a parábola o ponto C de modo tal que a reta que tangencia a parábola neste ponto seja paralela a reta que passa pelos pontos A e B. Agora, vamos inserir os pontos F, G e H, respectivamente, pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$. Depois, vamos adicionar os pontos D e E de modo tal que as retas que tangenciam a parábola nestes pontos sejam paralelas, respectivamente, as retas determinadas pelos pontos A e C e C e B.

Com esses pontos podemos determinar os triângulos ΔACB, ΔADC e ΔCEB.

Usando seus conhecimentos geométricos sobre a parábola Arquimedes encontrou um resultado bastante interessante...



Por meio da geometria da parábola, mostramos que:

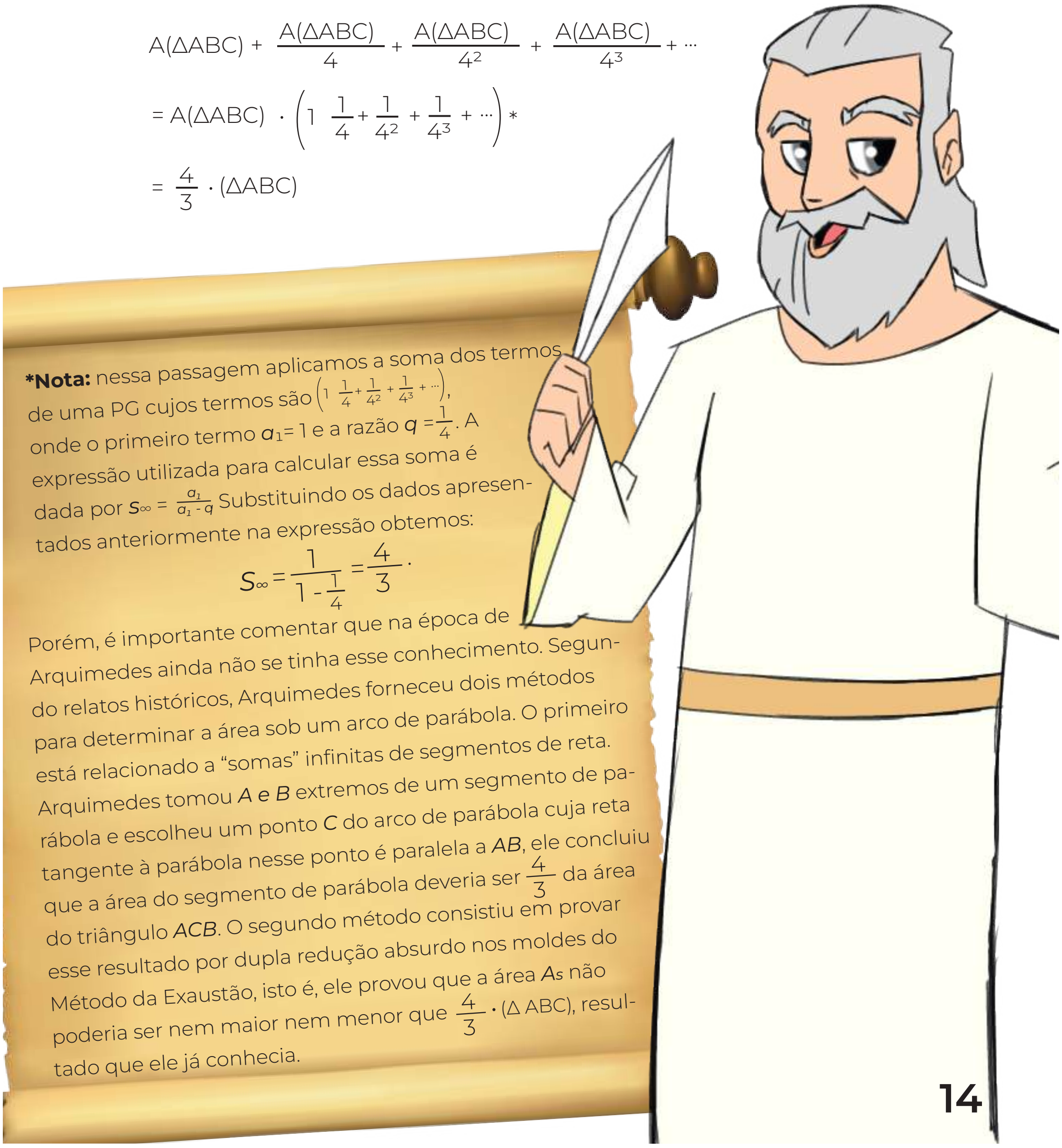
$$A(\Delta ADC) + A(\Delta CEB) = \frac{A(\Delta ACB)}{4}$$

Note que, se repetirmos esse raciocínio continuamente, concluímos que a área sob o arco de parábola poderá ser obtida por meio da expressão

$$A(\Delta ABC) + \frac{A(\Delta ABC)}{4} + \frac{A(\Delta ABC)}{4^2} + \frac{A(\Delta ABC)}{4^3} + \cdots$$

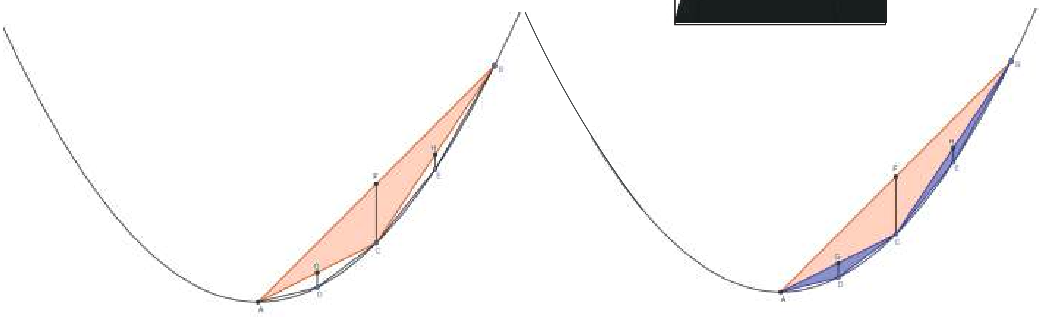
$$= A(\Delta ABC) \cdot \left(1 \; \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right) *$$

$$= \frac{4}{3} \cdot (\Delta ABC)$$

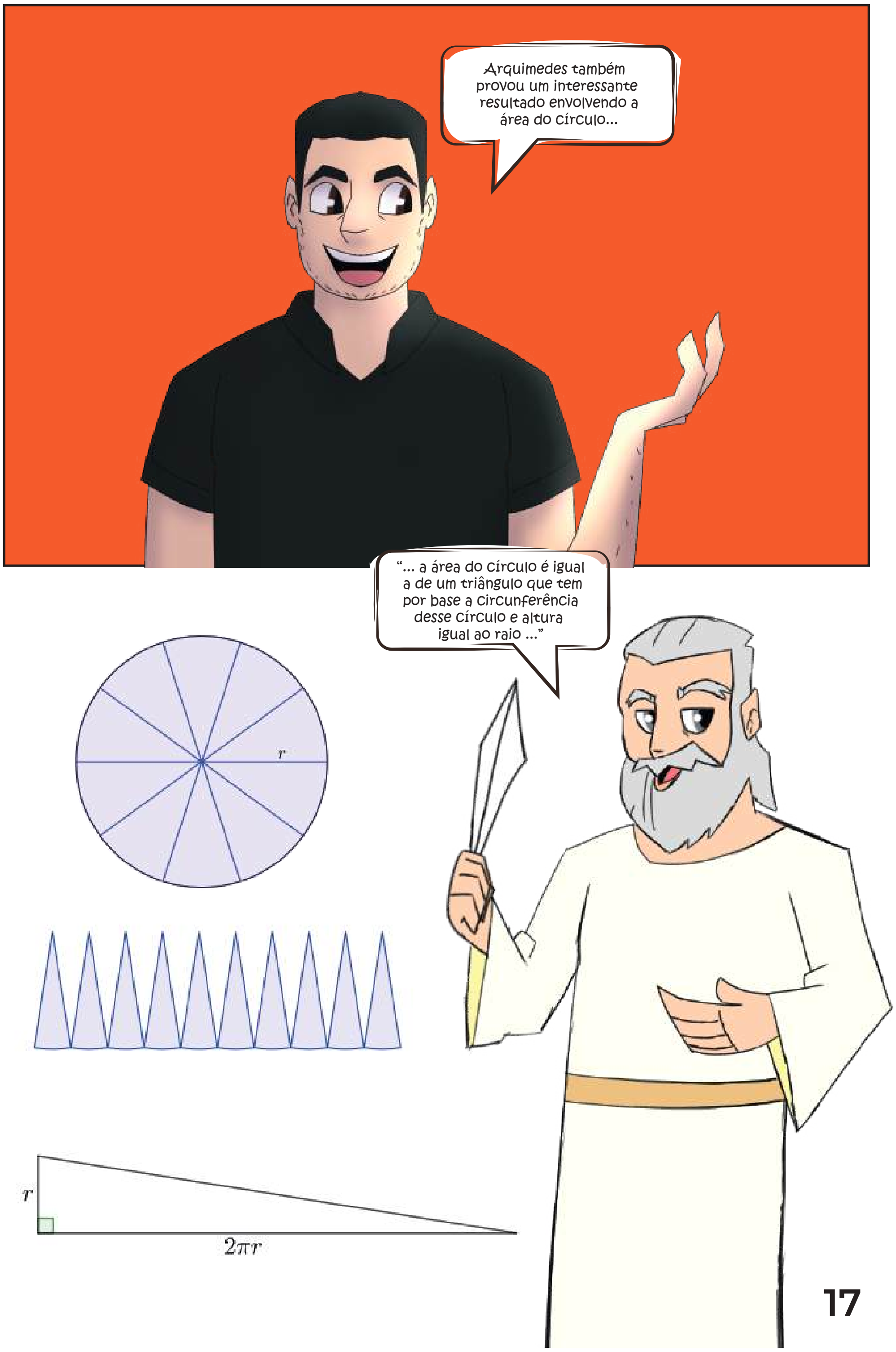


Note que, embora a área do ΔACB já fosse uma boa aproximação para a área sob o arco de parábola, Arquimedes não se contentou e continuou preenchendo os espaços vazios com novos triângulos seguindo os mesmos critérios utilizados na construção do triângulo inicial.

Depois de conhecer este grandioso feito de Arquimedes basta escolher adequadamente o triângulo que nos dá a primeira aproximação para a área sob o arco de parábola e utilizar a fórmula fechada $A_S = \frac{4}{3} \cdot A_T$, onde A_S é a área sob o arco de parábola e A_T é a área do triângulo escolhido inicialmente.




Após analisar uma possível solução para este problema talvez tenhamos a falsa impressão que o problema não é tão complexo quanto parecia inicialmente.
A verdade é que visualizar a solução da forma que Arquimedes idealizou exige um toque de genialidade. Afinal, lidar com um processo que não tem fim dadas as limitações matemáticas impostas em sua época não era uma tarefa fácil.
Lembram do problema da quadratura do círculo que comentamos no início da aula?
16


Arquimedes também provou um interessante resultado envolvendo a área do círculo...
"... a área do círculo é igual a de um triângulo que tem por base a circunferência desse círculo e altura igual ao raio ..."
r
r
$2\pi r$
17

Por certo, Arquimedes estava imaginando o círculo decomposto em um grande número de setores circulares. Organizando esses setores lado a lado notamos, intuitivamente, que o resultado demonstrado por Arquimedes faz todo sentido. Afinal, para calcular a área *A* do triângulo utilizamos a expressão:

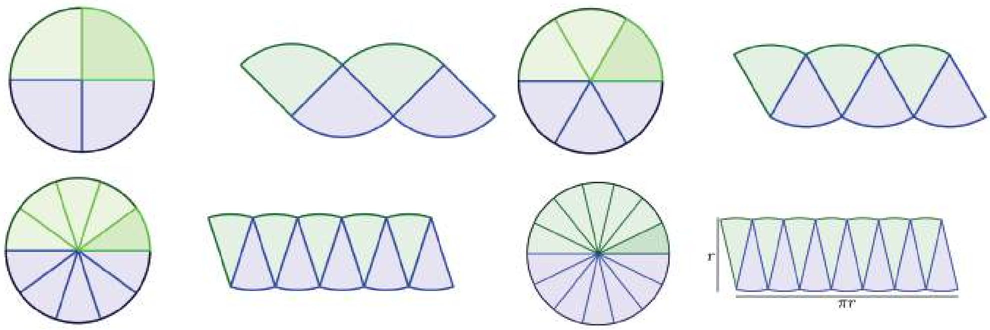
$$A = \frac{base\ x\ altura}{2}$$

Como sabemos a medida da base é igual a $2\pi r$ e a altura mede r. Desse modo,

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} \implies A = \pi r^2$$

Existem outras maneiras de pensarmos na obtenção de uma fórmula fechada para a área do círculo. Entretanto, um fato curioso é que todas elas nos levam a um processo infinito, o que exige um raciocínio engenhoso semelhante ao de Arquimedes.

18



Como a área de um retângulo é dada pelo produto das medidas de sua base pela sua altura, segue-se que:

$$\begin{aligned} A &= \textit{base x altura} \\ &= \pi r \cdot r \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$


Nossa! Que ideia incrível! Arquimedes era genial!
Outra ideia interessante para a área do círculo foi comentada por Johann Kepler. Ele considerava um círculo como um polígono regular de infinitos de lados. Como sabemos, podemos dividir um polígono regular de n lados em n triângulos iguais. Desse modo, para um polígono de infinitos lados teríamos infinitos triângulos.
Muito interessante! Se o polígono regular possui infinitos lados, então teremos infinitos triângulos idênticos formando este polígono.
20

A área do círculo corresponde a soma das áreas dos infinitos triângulos estreitos, todos de altura igual ao raio do círculo. Note que, a área de cada um dos triângulos é dada pela expressão $A_n = \frac{b_n \cdot h}{2}$, onde A_n é a área do n-ésimo triângulo cuja base mede b_n e altura $h = r$.

Desse modo, realizando a soma das infinitas áreas desses triângulos, obtemos:

$$A = \frac{b_1 \cdot r}{2} + \frac{b_2 \cdot r}{2} + \frac{b_3 \cdot r}{2} + \dots + \frac{b_n \cdot r}{2} + \dots$$

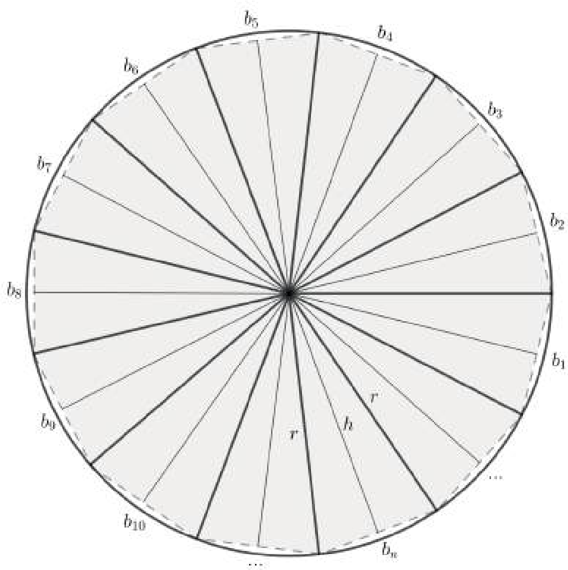
$$A = (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots) \cdot \frac{r}{2}$$

De sorte,

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 2\pi r$$

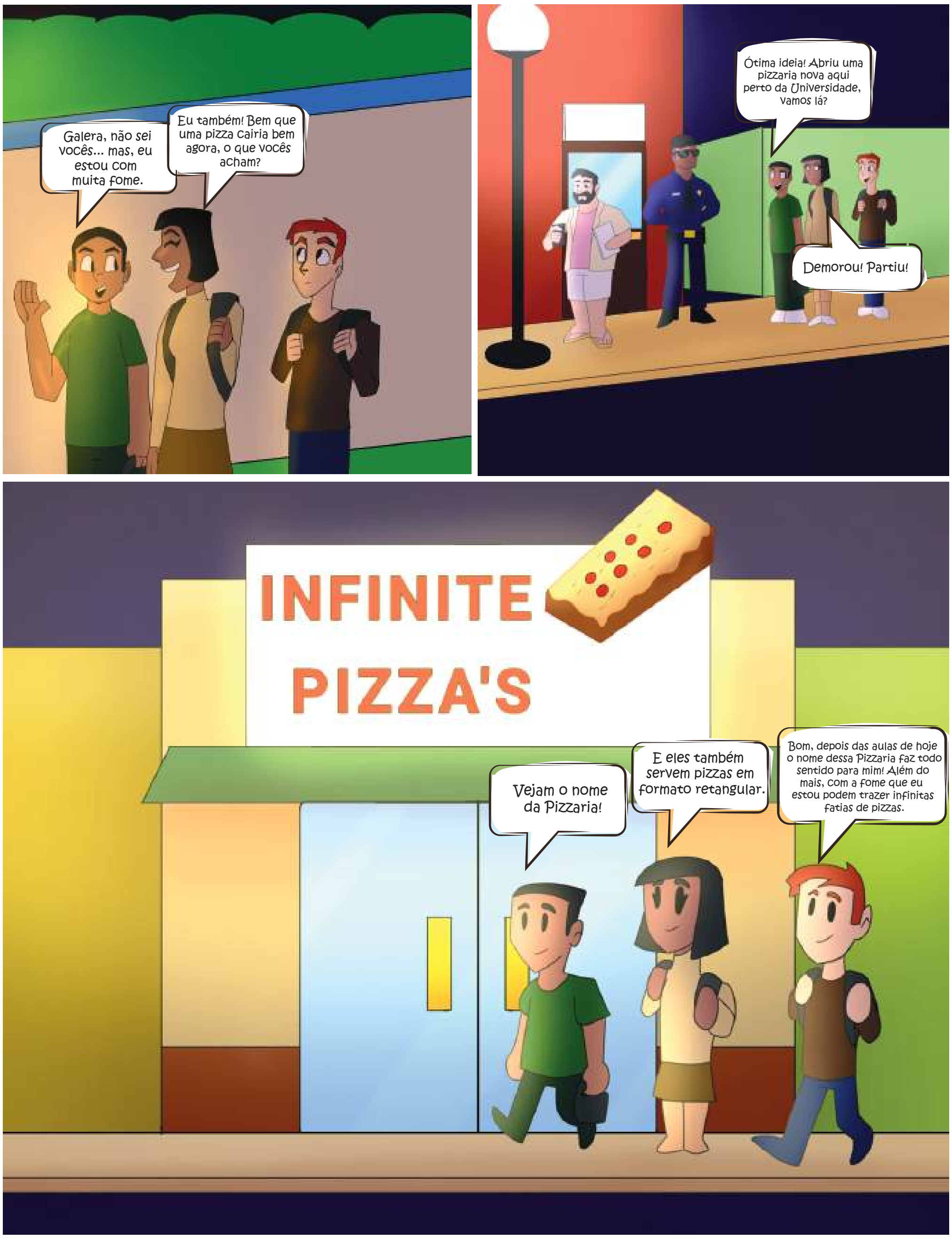
Logo,

$$A = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} \Longrightarrow A = \pi r^2$$



Johann Kepler (1571 - 1630).


Sem dúvidas, essa é uma forma muito interessante de visualizar a fórmula fechada para calcular a área do círculo.
Realmente, professor! E pela primeira vez eu compreendi esse resultado.
Que ótimo! Esse último resultado encerra a nossa aula de hoje turma. Até a próxima!


Galera, não sei vocês... mas, eu estou com muita fome.
Eu também! Bem que uma pizza cairia bem agora, o que vocês acham?
Ótima ideia! Abriu uma pizzaria nova aqui perto da Universidade, vamos lá?
Demorou! Partiu!
INFINITE PIZZA'S
Vejam o nome da Pizzaria!
E eles também servem pizzas em formato retangular.
Bom, depois das aulas de hoje o nome dessa Pizzaria faz todo sentido para mim! Além do mais, com a fome que eu estou podem trazer infinitas fatias de pizzas.

Referências

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática.* [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado na página 8.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática.* [S.l.]: Unicamp, 2004. Citado na página 8.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Mecânica (vol. 1).* [S.l.]: Editora Blucher, 2002. Citado na página 7.