



CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

Desmos, Geogebra e GXWeb: uma comparação entre três sistemas de geometria dinâmica

Jorge Luiz Gomes dos Santos

Rio de Janeiro

2024

Jorge Luiz Gomes dos Santos

Desmos, Geogebra e GXWeb:

uma comparação entre três sistemas de geometria dinâmica

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da
UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de
MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Michel Cambrainha de Paula

Rio de Janeiro

2024

Catálogo informatizada pelo(a) autor(a)

G231 Gomes dos Santos, Jorge Luiz
 Desmos, Geogebra e GXWeb: uma comparação entre três
 sistemas de geometria dinâmica / Jorge Luiz Gomes dos
 Santos. -- Rio de Janeiro : UNIRIO, 2024.
 63

 Orientador: Michel Cambrainha de Paula.
 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado
 do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
 2024.

 1. Ensino de geometria. . 2. Geometria dinâmica. . 3.
 Geometria de restrição.. I. Cambrainha de Paula, Michel ,
 orient. II. Título.

JORGE LUIZ GOMES DOS SANTOS

Desmos, Geogebra e GXWeb: uma comparação entre três sistemas de geometria dinâmica

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Documento assinado digitalmente
 MICHEL CAMBRAINHA DE PAULA
Data: 19/11/2024 21:54:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Michel Cambrinha de Paula (UNIRIO), Orientador

Documento assinado digitalmente
 FABIO XAVIER PENNA
Data: 19/11/2024 22:25:15-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fábio Xavier Penna (UNIRIO)

Documento assinado digitalmente
 CARMEN VIEIRA MATHIAS
Data: 21/11/2024 11:28:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Carmen Mathias (UFSM)

Rio de Janeiro 2024

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho representa a realização de um sonho e não seria possível sem o apoio de pessoas muito especiais, às quais gostaria de expressar minha gratidão.

Primeiramente, à minha esposa, Thaysa, minha companheira de todas as horas. Sua paciência, compreensão e incentivo foram fundamentais durante toda essa jornada. Sua presença ao meu lado me deu força e motivação para continuar, mesmo nos momentos mais desafiadores. Ela sabe o quanto essa conquista representa em minha jornada profissional e pessoal. Desculpe pelas minhas faltas! Te amo! Aos meus filhos, Maria Valentina e José Inácio, que são a minha maior inspiração. Vocês me encham de orgulho e alegria todos os dias e me lembram, constantemente, da importância de persistir e lutar pelos nossos sonhos. Desculpem-me por todas as brigas e gritos! Papai ama muito vocês dois! Ao meu orientador, Michel Cambrainha, minha sincera gratidão por sua dedicação, paciência e apoio durante todo o processo de pesquisa. Sua orientação atenciosa, sua imensa contribuição e seus valiosos conselhos, foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço por acreditar no meu potencial, por não desistir desse trabalho e por me guiar com sabedoria e incentivo. Muito obrigado! A todos os professores do PROFMAT - Unirio, em especial ao grande Professor Fábio Xavier Penna, obrigado sempre. Vocês são inesquecíveis! Não poderia ter escolhido pólo melhor! A todos os meus familiares e amigos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, meu muito obrigado. O carinho e o apoio de vocês foram essenciais para a superação dos desafios ao longo desta jornada. Por fim, agradeço a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta dissertação.

A todos, o meu mais sincero agradecimento.

RESUMO

Este trabalho analisa as vantagens e desvantagens de três sistemas de geometria dinâmica, para a utilização no ensino de matemática: Desmos, GeoGebra e GXWeb. Com o crescente uso de tecnologias digitais em salas de aula, é essencial entender como diferentes ferramentas podem influenciar o processo de aprendizagem. A análise comparativa considera critérios como usabilidade, funcionalidades disponíveis, acessibilidade, compatibilidade com diversos dispositivos e potencial pedagógico. O Desmos é destacado por sua interface intuitiva e fácil acesso online, tornando-se uma ferramenta ideal para iniciantes e para o ensino fundamental. O GeoGebra, conhecido por sua versatilidade e pela vasta gama de funcionalidades, é indicado para uma aplicação mais profunda em diversos níveis de ensino, incluindo o superior. Já o GXWeb se distingue por suas capacidades avançadas de programação, rápida conexão com a álgebra e com cálculos algébricos e pela dinâmica de restrições aplicadas aos objetos, sendo adequado tanto para explorações em sala de aula quanto para pesquisas e para momentos em que explorar conceitos matemáticos, de forma mais detalhada, é o objetivo maior. O estudo conclui que a escolha do software mais adequado depende das necessidades específicas do contexto educacional, dos objetivos pedagógicos e do perfil dos estudantes. E mais ainda, conclui-se que há espaço e momentos para a utilização de cada um dos três softwares.

Palavras-chave: Ensino de geometria. Geometria dinâmica. Geometria de restrição.

ABSTRACT

This work analyzes the advantages and disadvantages of three dynamic geometry systems for use in teaching mathematics: Desmos, GeoGebra and GXWeb. With the increasing use of digital technologies in classrooms, it is essential to understand how different tools can influence the learning process. The comparative analysis considers criteria such as usability, available features, accessibility, compatibility with different devices and pedagogical potential. Desmos is highlighted by its intuitive interface and easy online access, making it an ideal tool for beginners and elementary school students. GeoGebra, known for its versatility and wide range of functionalities, is suitable for deeper application at different levels of education, including higher education. GXWeb is distinguished by its advanced programming capabilities, quick connection with algebra and algebraic calculations and the dynamics of restrictions applied to objects, being suitable for both classroom explorations and research and for moments when exploring mathematical concepts, in more detail, is the main objective. The study concludes that choosing the most appropriate software depends on the specific needs of the educational context, pedagogical objectives and the profile of the students. What's more, it can be concluded that there is space and moments to use each of the three softwares.

Keywords: Geometry teaching. Dynamic geometry. Constraint geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Livro: Os Elementos. Autor: Euclides de Alexandria	4
Figura 2 - Arquimedes de Siracusa	5
Figura 3 - René Descartes , matemático, físico e filósofo francês	5
Figura 4 - Ivan Sutherland e o Sketchpad, MIT 1963	17
Figura 5 - Captura de tela do software The Geometer's Sketchpad	18
Figura 6 - Interface do Cabri Géomètre II - Construção de um triângulo circunscrito	19
Figura 7 - Captura de tela de uma animação no Cinderella.	20
Figura 8 - Captura de tela da calculadora de geometria Geogebra	26
Figura 9 - Captura de tela da Ferramenta de geometria Desmos	29
Figura 10 - Captura de tela da Ferramenta de geometria Desmos	30
Figura 11 - Transformações na ferramenta de geometria Desmos	31
Figura 12 - Modelo numérico tradicional (à direita) e modelo simbólico (abaixo)	33
Figura 13 - Possibilidade de investigação com o GXWeb	38
Figura 14 – Antes e depois de selecionar o compartilhamento (acesso em 22/08/2024)	38
Figura 15 - Cálculos do exemplo 2	45
Figura 16 - Resultado final da Tarefa 1	49
Figura 17 - Resultado final da Tarefa 2	51
Figura 18 - Resultado final da Tarefa 3	53

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Aspectos da utilização da GD na BNCC	11
Quadro 2 - Sistemas de GD e inovações	22
Quadro 3 - Comandos relacionados a geometria suportados pela ferramenta Desmos e pelo Geogebra	31
Quadro 4 - Menus do GXWeb	32
Quadro 5 - Passos da construção de um triângulo retângulo isósceles	34
Quadro 6 - Comparação entre as funcionalidades dos três sistemas de GD	39
Quadro 7 - Passos da construção do exemplo 1	43

SUMÁRIO

1.	Introdução.....	1
2.	A evolução e o tratamento da geometria ao longo do tempo.....	3
2.1.	A Geometria, o ensino de Geometria e a Geometria Dinâmica (GD).....	3
2.2.	Documentos oficiais: PCN e BNCC	11
2.3.	Breve histórico dos Sistemas de Geometria Dinâmica	16
3.	Os três sistemas: potencialidades e fraquezas	25
3.1.	Geogebra.....	26
3.2.	Desmos, Ferramenta de Geometria	28
3.3.	GXWeb.....	33
3.4.	Quadro comparativo: construção e restrição em geometria.....	39
4.	Os sistemas de GD e a minha prática profissional.....	40
5.	Propostas de atividades.....	46
5.1.	Tarefa 1	48
5.2.	Tarefa 2.....	50
5.3.	Tarefa 3.....	52
6.	Considerações finais	54
7.	Referências Bibliográficas.....	56

1. Introdução

A evolução da geometria e a incorporação de tecnologias como softwares de geometria dinâmica (GD) transformaram, e ainda estão transformando, o ensino dessa área. Inicialmente, fundamentada em previsões formais e no uso de instrumentos tradicionais, o ensino passou a incluir ferramentas de geometria dinâmica, que oferecem interatividade e visualização em tempo real. Essas ferramentas promovem a exploração, a formulação de conjecturas e uma nova dinâmica entre professor e aluno, conforme orientado pela BNCC, que enfatiza o desenvolvimento do pensamento geométrico e a relação entre álgebra e geometria.

O presente trabalho propõe uma análise comparativa detalhada de três sistemas de GD amplamente utilizados no ensino de matemática: Desmos, GeoGebra e GXWeb. A Geometria Dinâmica se destaca pela capacidade de criar representações visuais interativas de conceitos geométricos, permitindo que estudantes explorem figuras e propriedades em tempo real. Em um cenário onde as tecnologias digitais se tornaram ferramentas essenciais na educação, o uso dessas plataformas para o ensino de geometria pode aprimorar o desenvolvimento do raciocínio espacial, a abstração matemática e a capacidade de resolução de problemas dos alunos. Assim, compreender as potencialidades e limitações de cada sistema de GD é essencial para que educadores possam escolher a ferramenta mais adequada ao seu contexto de ensino, adaptando-se às necessidades dos alunos e aos objetivos pedagógicos. Para alcançar esses objetivos, foi adotada uma metodologia exploratória e comparativa, na qual cada sistema é analisado por critérios de interatividade, complexidade de construções permitidas, recursos de exportação e integração com ambientes educacionais. Tais critérios foram avaliados também em relação ao impacto pedagógico observado na prática docente do autor, fornecendo uma análise detalhada que orienta educadores na escolha da ferramenta de GD mais apropriada para suas necessidades e para as dos estudantes.

Os principais objetivos deste trabalho incluem uma análise das funcionalidades e da usabilidade de cada ferramenta, considerando aspectos como acessibilidade,

compatibilidade com diferentes dispositivos e o impacto pedagógico proporcionado pelas suas características interativas. Desmos, por exemplo, é reconhecido por sua interface intuitiva e acessível, que facilita o acesso de alunos e professores com diferentes níveis de familiaridade com tecnologias digitais. O GeoGebra, por sua vez, apresenta um conjunto robusto de funcionalidades que o tornam adequado para um ensino aprofundado, desde o ensino básico até o superior. Já o GXWeb se diferencia por suas capacidades avançadas de manipulação simbólica e uso de restrições geométricas, promovendo uma análise detalhada das relações entre os elementos das construções geométricas. Este trabalho busca, portanto, entender como essas características se adequam a diferentes contextos educacionais e quais contribuições elas oferecem para a construção de conceitos geométricos.

A justificativa para o desenvolvimento deste estudo é a crescente necessidade de integrar de forma eficaz as tecnologias educacionais nas práticas pedagógicas, com foco em promover uma aprendizagem significativa e acessível. No contexto brasileiro, onde há uma diversidade de recursos tecnológicos disponíveis nas escolas, é essencial que o docente conheça o potencial e as limitações dessas plataformas para aplicá-las de maneira estratégica. Este estudo se propõe a preencher lacunas no conhecimento sobre as aplicações práticas dos sistemas de GD no ensino de geometria, oferecendo uma visão detalhada sobre como cada uma dessas ferramentas pode ser utilizada para favorecer o aprendizado geométrico em diferentes níveis de ensino e contextos de sala de aula.

Para alcançar esses objetivos, foi adotada uma metodologia exploratória e comparativa, onde cada sistema foi analisado a partir de critérios específicos, como interatividade, complexidade das construções permitidas, opções de exportação e compartilhamento de construções, além da integração com outras plataformas educacionais. Cada um desses critérios foi avaliado em termos de suas contribuições pedagógicas, de modo a oferecer uma análise que possa orientar educadores na escolha do sistema de GD mais adequado às suas necessidades.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma contextualização histórica da geometria e a evolução dos sistemas de GD, discutindo seu papel no ensino contemporâneo. No segundo capítulo, são

exploradas as funcionalidades e limitações de cada um dos três sistemas estudados, com exemplos práticos de aplicação. O terceiro capítulo é dedicado à discussão das implicações pedagógicas da utilização desses sistemas na prática docente, enfatizando como eles podem ser aplicados em diferentes etapas de ensino e como podem impactar o aprendizado dos estudantes. O quarto capítulo traz propostas de atividades específicas para cada ferramenta, com base nas potencialidades observadas, e o último capítulo, Considerações Finais, sintetiza os achados do estudo e sugere direções futuras para a pesquisa e o uso prático de tecnologias de GD no ensino da matemática.

2. A evolução e o tratamento da geometria ao longo do tempo

2.1. A Geometria, o ensino de Geometria e a Geometria Dinâmica (GD)

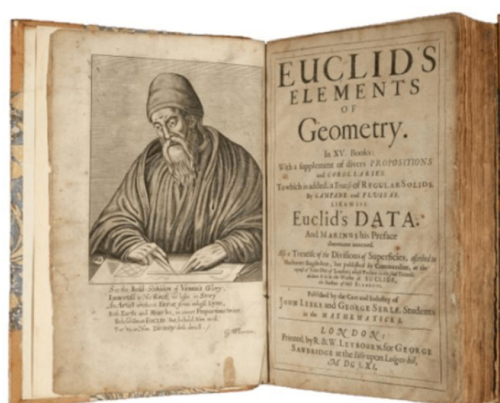
A geometria remonta à antiguidade, sendo uma das mais antigas ciências matemáticas conhecidas. Seu início está profundamente enraizado nas necessidades práticas das primeiras civilizações, como a medição de terras, construção de edificações e navegação. No entanto, com o tempo, a geometria evoluiu para uma disciplina teórica e abstrata, influenciando e sendo influenciada por outras áreas da matemática. O nascimento da geometria, é frequentemente associado aos antigos egípcios, que utilizavam técnicas geométricas para medir terras ao longo do Nilo, especialmente após as inundações anuais que redesenharam as margens do rio. No entanto, a geometria como ciência sistemática e dedutiva começou a se desenvolver na Grécia Antiga.

A escola pitagórica, que muitas vezes é personificada na figura de Pitágoras de Samos (c. 570–495 a.C.), ou simplesmente Pitágoras, fez grandes contribuições para a geometria grega. Além do famoso teorema, hoje formulado sobre triângulos retângulos, essa escola deu início ao desenvolvimento de um trabalho que rende frutos até os dias atuais. Por exemplo, a matemática das harmônicas, ciência dos

sons musicais, base da música contemporânea ocidental, teve início com a escola pitagórica.

Outro marco na história da geometria é Euclides (c. 300 a.C.), muitas vezes chamado de "Pai da Geometria", Euclides trabalhou e viveu em Alexandria. Seu trabalho mais influente, Os Elementos, uma série de 13 livros, é uma compilação de todo o conhecimento geométrico de sua época e permaneceu como o principal livro-texto de geometria por mais de dois milênios. Nele, Euclides apresenta a geometria de maneira axiomática, partindo de postulados simples para deduzir teoremas complexos. Essa coleção foi escrita com tanta clareza, que versões modernizadas de sua obra foram utilizadas nas escolas até o início do século XX.

Figura 1 - Livro: Os Elementos. Autor: Euclides de Alexandria



.Fonte: <https://www.obaricentrodamente.com/2013/11/euclides-e-geometria-dedutiva.html> Acesso em 17/08/2024

Arquimedes de Siracusa (c. 287–212 a.C.), outro gigante da geometria, Ele fez avanços significativos na geometria dos sólidos, estabelecendo fórmulas para o volume e a área de várias figuras geométricas. Seus métodos de exaustão foram precursores do cálculo integral, milênios antes de sua formalização. Não podemos deixar de fora, a descoberta do número pi, além de um princípio que leva seu nome, Princípio de Arquimedes, onde ele afirma que: *“a força de empuxo atua verticalmente e para cima sobre os corpos total ou parcialmente imersos em fluidos, além disso, de acordo com esse princípio, tal força tem o mesmo valor do peso do fluido, deslocado pela inserção do corpo.”*

Figura 2 - Arquimedes de Siracusa



Fonte: <https://historiafilosofada.blogspot.com/2011/09/arquimedes.html> Acesso em 17/08/2024

Já na Idade Moderna, René Descartes (1596–1650), autor da célebre frase: “*Cogito, ergo sum*” (Penso, logo existo), revolucionou a geometria ao introduzir a geometria analítica. Em sua obra “*La Géométrie*”, ele mostrou como problemas geométricos podem ser resolvidos utilizando álgebra, por meio da introdução do sistema de coordenadas cartesianas. Isso permitiu que figuras geométricas fossem representadas por equações algébricas, unindo a geometria e a álgebra de maneira representativa. Foi Descartes quem organizou a Geometria, como uma disciplina que hoje é ensinada nas escolas.

Figura 3 - René Descartes, matemático, físico e filósofo francês



Fonte: brasilecola.uol.com.br/biografia/rene-descartes.htm - Acesso: 17/08/2024

A geometria tem feito parte do currículo escolar, ao longo da história. Nas escolas, ela é ensinada desde a educação infantil, começando com conceitos básicos como formas, tamanhos e medidas, em que as crianças passam a ter contato com os sólidos geométricos, onde um dos objetivos é ler, parte do mundo real delas, com o idioma matemática. Quando avançam para o ensino fundamental, gradualmente, a geometria espacial “abre espaço” para a geometria plana, evoluindo para tópicos mais complexos como ângulos, congruência, semelhança, com o estudo de figuras bidimensionais. Nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio, os alunos são apresentados à geometria euclidiana formal, onde aprendem a construir provas e a trabalhar com teoremas clássicos, como o de Pitágoras, além de conceitos de geometria analítica e espacial. A habilidade de raciocinar geometricamente é vista como fundamental para o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico, competências essenciais para a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento.

Com o avanço da tecnologia, a utilização de softwares educacionais era inevitável, e no ensino da geometria não seria diferente. O advento dos programas de Geometria Dinâmica (GD), beneficiou uma quantidade enorme de alunos e professores. Essas ferramentas permitiram que os alunos explorassem conceitos geométricos de maneira visual e interativa, facilitando a compreensão e a retenção de ideias mais abstratas. Por exemplo, em um software de GD, tornou-se possível construir e manipular figuras geométricas em tempo real, observar propriedades geométricas e testar conjecturas de forma imediata. Isso torna o aprendizado mais envolvente e intuitivo, permitindo que os estudantes visualizem o impacto de mudanças nas figuras e explorem as relações geométricas de maneira experimental.

Além disso, essas ferramentas têm um papel importante na educação inclusiva, ao possibilitar diferentes formas de interação e aprendizado, atendendo a diversas necessidades dos estudantes.

Segundo Maria Alice Gravina (1996)

Se pensarmos em Geometria como processo de interiorização e apreensão intelectual de experiências espaciais, o aprendizado passa por um domínio das bases de construção deste ramo do conhecimento, e aqui a abstração desempenha papel fundamental. (p.2)

Se considerarmos a Geometria como um processo de interiorização e apreensão intelectual das experiências espaciais, a experiência profissional permite observar que o aprendizado nessa área exige mais do que a simples memorização de fórmulas ou a reprodução mecânica de procedimentos. Esse aprendizado envolve, fundamentalmente, a compreensão profunda das bases conceituais que sustentam a construção desse ramo do conhecimento. Nesse contexto, a abstração desempenha um papel crucial.

Ao internalizar as experiências espaciais, o indivíduo não apenas percebe as formas e relações que o cercam, mas também as organiza e as interpreta por meio de conceitos geométricos. Esse processo de interiorização é, portanto, um movimento que vai do concreto ao abstrato, onde o pensamento geométrico se desenvolve e se refina.

Nesse aspecto, a utilização de softwares de GD assume um papel importantíssimo no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, o dinamismo e a agilidade nas etapas da construção do conhecimento, fazem com que o estudante se distraia com menos facilidade. Outra funcionalidade da utilização desses softwares, dentro do aspecto de interiorização e apropriação do pensamento geométrico se dá pelo fato de que, como as construções são feitas em etapas e, todas as etapas ficam registradas, é muito mais simples refazer o caminho e identificar as deficiências no entendimento.

A abstração por sua vez, permite ao aluno transcender as experiências imediatas e compreender as propriedades gerais das figuras e dos espaços. É por meio da abstração que se torna possível construir e manipular conceitos como pontos, linhas e planos, que, embora não existam de forma palpável no mundo real, são fundamentais para a estruturação do pensamento geométrico.

Dessa maneira, o domínio da Geometria requer que o estudante desenvolva a capacidade de abstrair, isto é, de criar e manipular mentalmente representações de objetos e relações espaciais que vão além do que é diretamente observável. Esse processo de abstração não é imediato e precisa ser cultivado gradualmente, por meio de um ensino que valorize a construção dos conceitos geométricos de forma sólida e progressiva.

Segundo Fischbein (1993),

A dificuldade em manipular objetos geométricos, a saber, a tendência em negligenciar o aspecto conceitual pela pressão de restrições do desenho, é um dos maiores obstáculos para o aprendizado da Geometria [...] Frequentemente, condições figurais (de desenho) escapam do controle conceitual, e impõem, a linha de pensamento, interpretações que do ponto de vista de desenho são consistentes, mas que não são condições conceituais. (pp.151,155)

A citação de Efraim Fischbein destaca um problema comum no ensino e na aprendizagem da geometria: a dificuldade de manipular objetos geométricos de maneira conceitual, muitas vezes por causa da precisão e das limitações impostas pelo desenho geométrico. Essa dificuldade reflete a tendência de se focar excessivamente nos aspectos visuais e figurativos, negligenciando a compreensão dos conceitos subjacentes.

Fischbein (1993) sugere que há um dualismo no aprendizado da Geometria entre a forma visual (o desenho) e o conceito abstrato (o entendimento geométrico). De acordo com Fischbein, as "condições figurais" — ou seja, as propriedades e características percebidas visualmente nos desenhos — frequentemente escapam do controle conceitual. Isso significa que os alunos podem interpretar um problema geométrico com base em uma imagem ou figura sem considerar completamente os conceitos geométricos envolvidos. Por exemplo, um aluno pode ser levado a acreditar que duas linhas são paralelas porque parecem ser assim no desenho, mesmo que, conceitualmente, elas não atendam aos critérios matemáticos rigorosos para paralelismo.

As ideias de Fischbein(1993) podem ser relacionadas à teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, em que compreender conceitos

matemáticos requer a habilidade de alternar entre diferentes representações semióticas, como o registro gráfico, o algébrico, e o linguístico. Na Geometria, isso se traduz na necessidade de entender uma figura tanto como uma representação visual quanto como um conjunto de relações conceituais. A dificuldade mencionada por Fischbein pode ser vista como uma falha em fazer essa transição de um registro de representação (visual) para outro (conceitual).

Nesse aspecto, a Geometria Dinâmica (GD) traz uma abordagem inovadora ao ensino e à exploração de conceitos geométricos, que se distingue pela utilização de softwares interativos que permitem a manipulação direta de figuras geométricas. Dessa forma, as condições figurais mencionadas por Fischbein (1993), passam a não escapar do controle conceitual, possibilitando dessa forma, que o aluno tenha a possibilidade de acompanhar a construção do conceito e não apenas, a ideia teórica.

Segundo Brandão (2002),

A geometria dinâmica é a implementação, no computador, de construções com régua e compasso, na qual o estudante pode, a partir de uma construção inicial, mover com o mouse algum dos objetos iniciais. (p.02)

Historicamente, as construções geométricas com régua e compasso têm sido fundamentais para o ensino da geometria. Essas construções permitem que os alunos compreendam as propriedades e relações entre figuras geométricas de uma forma concreta e visual. A GD leva essa tradição a um novo patamar, permitindo que as construções sejam realizadas, com um nível de precisão e flexibilidade que seria difícil de alcançar com ferramentas físicas. Ao permitir que os estudantes interajam diretamente com as construções geométricas através do computador, a geometria dinâmica oferece um meio intuitivo e interativo de explorar conceitos geométricos. Embora a GD forneça um ambiente visual para o aprendizado, ela também incentiva o desenvolvimento do pensamento abstrato e do raciocínio lógico. Ao manipular objetos geométricos, os alunos são desafiados a prever os resultados das suas ações e a compreender as regras e axiomas que governam as construções. Essa interação constante entre o concreto (a manipulação de objetos) e o abstrato (a compreensão

dos conceitos) é fundamental para o desenvolvimento de uma compreensão sólida e bem fundamentada da geometria.

As principais contribuições da utilização de softwares de GD no ensino incluem a visualização e manipulação de figuras geométricas de forma interativa, facilitando a compreensão de conceitos complexos. A possibilidade de "arrastar" objetos e observar as mudanças em tempo real ajuda a solidificar o entendimento das propriedades geométricas. Diferentemente da abordagem tradicional, que conduz a aprendizagem com tendências a uma geometria, digamos, estática, onde as construções são fixas e limitadas a representações no papel, a GD permite que os alunos manipulem pontos, linhas, círculos e outras formas geométricas, observando como essas manipulações afetam as propriedades e relações entre os elementos da construção.

Por exemplo, ao estudar o Teorema de Pitágoras, um aluno pode utilizar um software de geometria dinâmica para construir um triângulo retângulo e observar como a relação $a^2 = b^2 + c^2$ se mantém invariável, mesmo ao alterar os comprimentos dos catetos b e c . Essa experiência visual e prática facilita a compreensão do teorema, tornando o aprendizado mais significativo e menos abstrato.

Outro aspecto mobilizado pelos ambientes de GD é a aprendizagem ativa, uma vez que a geometria dinâmica incentiva uma postura mais ativa dos estudantes, em que podem fazer conjecturas, testar hipóteses e explorar diferentes cenários. Isso promove um ambiente de aprendizado mais engajador e desafiador, além da integração de tecnologias e do apoio à didática, já que, a utilização de softwares de GD pode promover uma integração de tecnologias no ensino, o que é cada vez mais relevante na educação contemporânea. Isso não apenas moderniza o ensino, mas também contribui no sentido de preparar os alunos para um mundo onde a tecnologia é onipresente. Os softwares, também oferecem recursos que podem ser utilizados para apoiar a didática do professor, permitindo a construção de atividades que favorecem a aprendizagem significativa e a exploração de conceitos geométricos de forma mais dinâmica e criativa.

Esses aspectos demonstram como a GD pode transformar o ensino de matemática, tornando-o mais acessível e interessante para os alunos. Além dos benefícios citados, a GD tem grande potencial para auxiliar na compreensão de transformações geométricas, uma vez que contribui para “trazer à vida” a dimensão dinâmica do conceito de função. É possível visualizar, em tempo real, as translações, rotações e reflexões. Ao manipular figuras, os alunos podem observar como as propriedades das figuras se mantêm ou mudam durante essas transformações, facilitando a compreensão dos conceitos de congruência e semelhança. Por meio da interação com as figuras, os alunos podem identificar quais características permanecem inalteradas (invariantes) durante as transformações. Por exemplo, ao refletir uma figura, os alunos podem visualizar que a distância entre os pontos e os ângulos se mantêm, o que ajuda a solidificar a compreensão das propriedades geométricas.

A GD fornece meios para promover uma abordagem de aprendizagem ativa, à medida que permite aos alunos experimentar com as figuras, observar padrões e validar conjecturas. Essa exploração prática e a possibilidade de testar suas ideias em um ambiente interativo incentiva uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos, desenvolvendo também habilidades importantes de pensamento crítico e resolução de problemas. Por exemplo, ao trabalhar com transformações, os alunos podem simultaneamente aplicar conceitos de ângulos, distâncias e áreas, promovendo uma visão mais holística da geometria.

2.2. Documentos oficiais: PCN e BNCC

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997) foram documentos orientadores que precederam a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) e estabeleceram diretrizes para o currículo da educação básica no Brasil. Embora os PCN sejam documentos anteriores e mais gerais em comparação com a BNCC, eles também abordam a importância do uso de tecnologias educacionais, incluindo softwares de geometria dinâmica, no ensino da matemática.

Os PCN incentivam a integração de tecnologias educacionais no ensino, ressaltando que o uso de ferramentas tecnológicas pode enriquecer o processo de aprendizagem. No contexto do ensino da geometria, os PCN destacam que os softwares de GD, como o Cabri Géomètre e, posteriormente, o GeoGebra, oferecem um ambiente interativo onde os alunos podem explorar propriedades geométricas de maneira dinâmica. Permitindo que os alunos façam conjecturas, testem hipóteses e visualizem transformações geométricas em tempo real, uma vez que a interatividade e a capacidade de manipulação direta das figuras geométricas promovem um entendimento mais profundo dos conceitos.

A introdução de tecnologias educacionais, incluindo softwares de GD, é apontada como uma estratégia para aumentar o interesse e a motivação dos alunos. A interatividade e a possibilidade de experimentação tornam as aulas de geometria menos monótonas, promovendo um aprendizado ativo, onde os alunos participam diretamente da construção e manipulação das figuras. Isso contrasta com métodos tradicionais e contribui para um aprendizado mais significativo.

O uso de tecnologias educacionais, como softwares de GD, contribui para o desenvolvimento de competências digitais essenciais para o século XXI. Os alunos não só aprendem matemática, mas também se familiarizam com ferramentas digitais que serão úteis em suas vidas acadêmicas e profissionais. A familiaridade com tecnologias e a capacidade de usá-las para resolver problemas complexos são habilidades valiosas no mundo moderno. Nesse sentido, o contato com softwares de todo o tipo, incluindo os de GD, durante a educação básica prepara os alunos para um futuro em que a tecnologia desempenha um papel cada vez mais central em diversas áreas do conhecimento e da prática profissional.

Os softwares de GD também são agentes de inclusão, no sentido que podem ser adaptados para atender às necessidades de diversos alunos, incluindo tanto estudantes com dificuldades ou transtornos de aprendizagem, quanto os que têm altas habilidades/superdotação. A capacidade de manipular visualmente figuras geométricas na tela do computador ou aparelhos móveis pode atuar para desenvolver esta habilidade em quem não a possui, mas também para aprofundar conceitualmente nos estudantes que a tem como ponto de interesse..

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento oficial que define as competências essenciais que todos os estudantes brasileiros têm o direito de desenvolver ao longo da educação básica. Tal documento aborda a GD tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, destacando seu papel essencial na formação matemática dos estudantes. A BNCC aborda a importância da geometria, incluindo a GD, no Ensino Fundamental e Médio, enfatizando seu papel no desenvolvimento do raciocínio espacial, compreensão de propriedades geométricas e resolução de problemas.

Especificamente na BNCC, podemos destacar os seguintes aspectos sobre a utilização da GD: desenvolvimento do raciocínio espacial, exploração e descoberta, resolução de problemas, integração com outras áreas do conhecimento e uso de tecnologias digitais.

Desenvolvimento do raciocínio espacial.	A GD é vista como uma ferramenta fundamental para ajudar os alunos a desenvolver habilidades de visualização e manipulação de formas geométricas. Isso é crucial para a compreensão de conceitos geométricos mais complexos.
Exploração e descoberta.	A GD permite que os alunos explorem e descubram propriedades e relações geométricas por meio da interação direta com figuras geométricas. Softwares de geometria dinâmica, como GeoGebra, são frequentemente mencionados como recursos valiosos para essa exploração
Resolução de problemas.	A BNCC enfatiza a importância de utilizar a GD na resolução de problemas, permitindo que os alunos testem conjecturas e verifiquem resultados de forma visual e interativa.

Integração com outras áreas do conhecimento.	A GD é vista como uma ponte para integrar a matemática com outras disciplinas, como física, engenharia e artes. Isso é promovido pela capacidade dos alunos de modelar situações reais e abstratas de maneira dinâmica e visual.
Uso de tecnologias digitais.	A BNCC encoraja o uso de tecnologias digitais no ensino da geometria, destacando que a GD é uma aplicação direta dessa recomendação. A utilização de ferramentas tecnológicas é considerada essencial para preparar os alunos para o mundo digital e tecnológico em que vivemos.

Quadro 1 - Aspectos da utilização da GD na BNCC

Fonte: produzido pelo autor

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o foco da GD está na exploração de formas geométricas e espaços que ocupam, de maneira concreta e intuitiva. Atividades que envolvem a manipulação de figuras e objetos são incentivadas para desenvolver o raciocínio espacial. Algumas atividades propõem o uso de tecnologias digitais, incluindo software de GD, para explorar propriedades e relações entre formas, por exemplo as relações entre quadrados e retângulos quando trabalhamos com áreas e perímetros.

(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.

(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.

(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

Nos anos finais do ensino fundamental, os alunos são encorajados a usar ferramentas de GD para investigar propriedades de figuras geométricas, transformações (como translações, rotações, reflexões e ampliações) e para resolver problemas geométricos.

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.

(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Além disso, a GD auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico e da argumentação matemática, permitindo que os alunos visualizem e comprovem conjecturas geométricas. O uso de softwares de GD é promovido para a representação e modelagem de situações reais e problemas matemáticos, ajudando os alunos a entenderem conceitos abstratos de maneira mais concreta e visual.

Já no ensino médio, a BNCC destaca a importância do desenvolvimento do raciocínio espacial e geométrico através de atividades que envolvem a visualização e a manipulação de figuras geométricas, com o uso de ferramentas tecnológicas. Nesse momento, a GD é vista como uma ferramenta para resolver e elaborar problemas mais

complexos, onde os alunos podem explorar, conjecturar e verificar propriedades geométricas de maneira dinâmica e interativa.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2018, p. 538)

Se destacarmos a utilização e manipulação dessas ferramentas, a partir de componentes curriculares, como por exemplo a Geometria Analítica e Trigonometria, estaremos incentivando a exploração de conceitos e ajudando os alunos a visualizar e compreender mais profundamente relações entre álgebra e geometria. Também em modelagem matemática, a BNCC incentiva o uso da GD, integrando conhecimentos de diferentes áreas da matemática e outras áreas.

2.3. Breve histórico dos Sistemas de Geometria Dinâmica

Entre os programas mais utilizados para essa finalidade estão o GeoGebra, o Cabri Geometry, o The Geometer 's Sketchpad e o Desmos. Esses programas oferecem um ambiente virtual onde os usuários podem criar, modificar e observar figuras geométricas em tempo real, proporcionando uma compreensão mais profunda e intuitiva dos conceitos matemáticos, que estão sendo utilizados. Nesta seção traremos, em ordem cronológica, algumas características dos principais sistemas de GD, com destaque para as inovações que trouxeram.

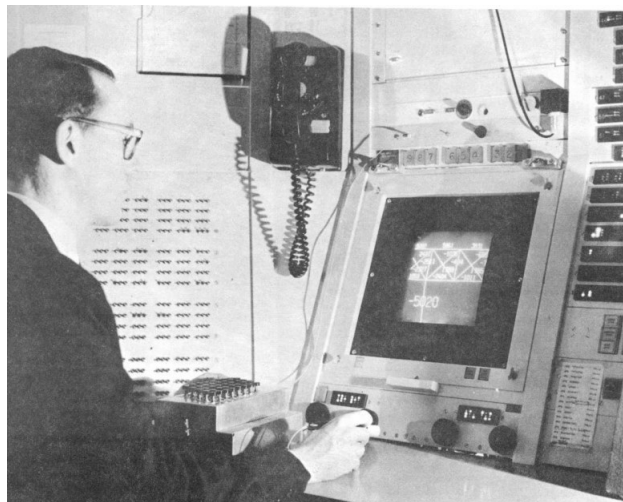
Sketchpad (1963)

O Sketchpad é um editor gráfico, desenvolvido por Ivan Sutherland no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) em 1963, durante seu curso de doutorado. Este sistema representa um marco significativo na informática, sendo pioneiro como editor gráfico orientado a objetos na acepção moderna do termo. O Sketchpad não apenas permitia a inserção de pixels coloridos em uma área de desenho, mas também

possibilitava a criação e manipulação de objetos de forma independente. Um dos aspectos mais inovadores do Sketchpad foi a introdução do conceito de "desenho mestre" (master drawing), a partir do qual podiam ser gerados "desenhos instanciados" (instance drawings). Cada desenho instanciado era uma réplica do desenho mestre, e qualquer alteração no desenho mestre resultava na modificação automática de todas as suas réplicas. As ideias implementadas no Sketchpad foram fundamentais para o desenvolvimento do conceito de "herança" na programação orientada a objetos, permitindo a transmissão de estrutura e comportamento entre objetos.

Na sua terceira versão, o Sketchpad evoluiu para suportar modelagem em três dimensões, sendo o primeiro editor gráfico a implementar tanto vistas ortogonais quanto perspectivas em diferentes escalas.

Figura 4 - Ivan Sutherland e o Sketchpad, MIT 1963



Fonte: (SUTHERLAND, 2019)

The Geometer's Sketchpad (1986)

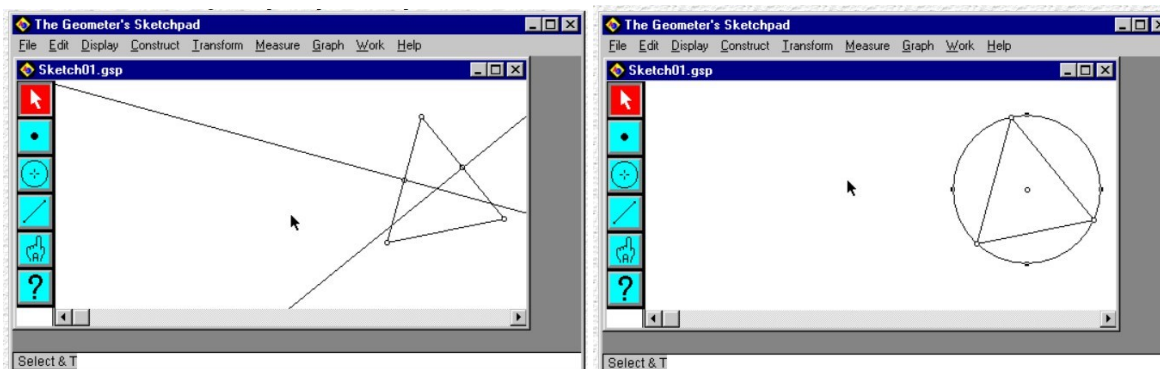
Este, é um software interativo comercializado que facilita a exploração de conceitos em geometria euclidiana, álgebra, cálculo e outras áreas da matemática. Desenvolvido como parte do Visual Geometry Project, um projeto financiado pela NSF e coordenado por Eugene Klotz e Doris Schattschneider entre 1986 e 1991 no Swarthmore College, o Geometer's Sketchpad foi inicialmente projetado e

programado por Nicholas Jackiw. Jackiw também foi o inventor da abordagem inovadora conhecida como "Geometria Dinâmica".

O Geometer's Sketchpad oferece ferramentas tradicionais para a construção de figuras geométricas de acordo com os princípios da geometria euclidiana. Ele permite realizar transformações como translações, rotações, reflexões e dilatações em figuras geométricas desenhadas ou construídas na tela. Contudo, o software vai além de uma simples ferramenta de construção ou transformação, oferecendo a capacidade de manipular objetos construídos de forma "dinâmica" através de estiramento ou arraste. Isso mantém todas as restrições da construção, permitindo a visualização de uma gama extensa de casos para qualquer figura construída, tornando-o ideal para a formulação e teste de conjecturas geométricas.

Além de sua precisão em representar figuras geométricas, o Geometer's Sketchpad é valioso para ilustrar conceitos matemáticos em publicações acadêmicas. Ele permite a construção de figuras possíveis de se realizar com compasso e régua, bem como figuras que desafiam essas restrições, como o eneágono regular. O programa também suporta a animação de objetos, possibilitando a criação de diversas formas que podem ser medidas e utilizadas na resolução de problemas matemáticos complexos. Entre suas funcionalidades estão a determinação de pontos médios e segmentos médios, bem como a medição de comprimentos, ângulos, áreas e perímetros. As ferramentas de construção e transformação permitem a criação de objetos baseados em objetos selecionados e a geração de pontos em relação a medidas como distância, ângulo e razão.

Figura 5 - Captura de tela do software The Geometer's Sketchpad

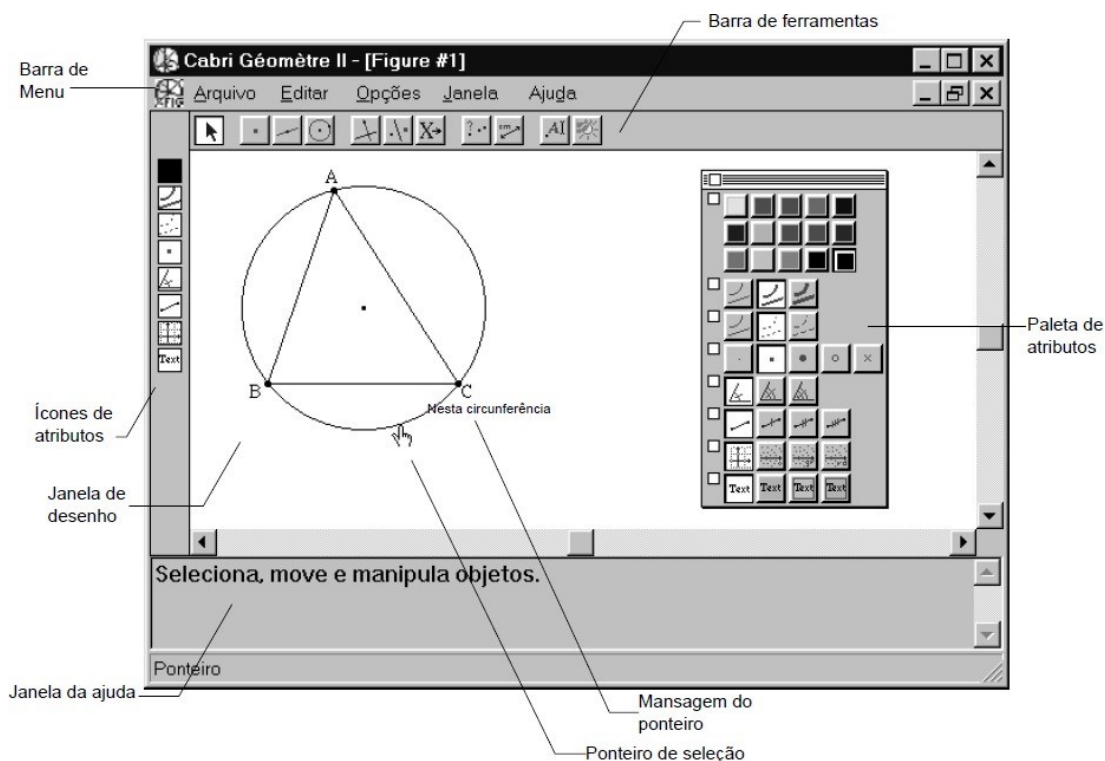


Fonte: <https://people.uncw.edu/brownj/gsp/tutorial.html#step2>

Cabri Géomètre (1988)

O Cabri-Géomètre é um programa computacional educativo específico para o aprendizado da geometria. Foi desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain, no Institut D'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble, França. Foi traduzido e comercializado para várias línguas. No Brasil foi testado na PUC-SP e difundido para vários Centros de Ensino, em vários estados. O Cabri possui muitos recursos na construção das figuras geométricas possibilitando movê-las ou deformá-las. Permite criar e explorar figuras geométricas de forma interativa através da construção de pontos, retas, triângulos, polígonos, círculos e outros objetos. Foi o primeiro a trazer o que hoje conhecemos como caixas de ferramentas. O programa pode ser utilizado para diferentes níveis de aprendizado, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. O software permite desenvolver trabalhos com diferentes conteúdos de matemática. Frequentemente ele é usado no ensino da Geometria, onde é possível trabalhar com Geometria Euclidiana Plana, Geometria Não Euclidiana e Geometria Analítica.

Figura 6 - Interface do Cabri Géomètre II - Construção de um triângulo circunscrito.



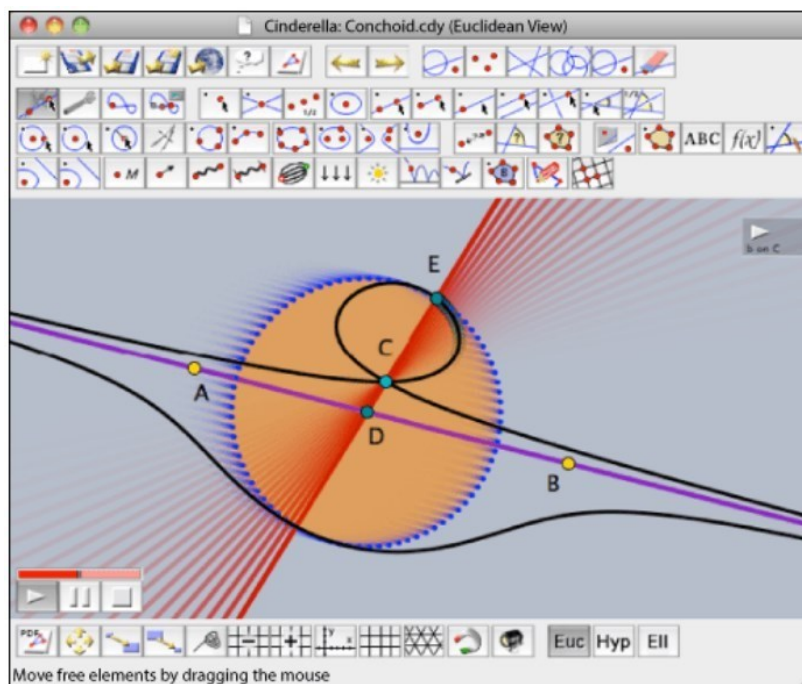
Fonte: (Introdução ao Cabri Geometry II para Windows, 1999)

Cinderella (1996)

Este software de construção geométrica, desenvolvido por Jürgen Richter-Gebert e Ulrich Kortenkamp, comercializado pela Sun Microsystems, Inc., é uma ferramenta poderosa que simula o uso de "régua e compasso eletrônicos". Este software, semelhante ao Cabri e ao Sketchpad, oferece funcionalidades avançadas para a construção geométrica, sendo especialmente útil para a educação matemática e o ensino da geometria.

Uma das características mais notáveis deste software é a capacidade de trabalhar não apenas com geometria euclidiana, mas também com geometria hiperbólica e esférica, ampliando significativamente o leque de aplicações e permitindo explorar conceitos mais complexos de forma interativa. Além disso, o software se destaca por sua funcionalidade de exportação, que permite ao utilizador salvar os seus projetos diretamente como páginas web, facilitando a partilha e a publicação dos trabalhos em formato digital.

Figura 7 - Captura de tela de uma animação no Cinderella.



Fonte: Revista Ciência Elementar (2014)

Esta combinação de funcionalidades faz do software uma ferramenta versátil e essencial para educadores, estudantes e profissionais que desejam explorar as diversas dimensões da geometria de forma prática e intuitiva.

Este programa de GD apresenta um fórum de discussão <http://cinderella.ptmat.fc.ul.pt/>, liderado pelas Universidades de Lisboa e de Coimbra, em Portugal, cujo responsável e grande entusiasta é o professor Jorge Nuno Silva.

Geogebra (2001)

O GeoGebra (aglutinação de Geometria e Álgebra) é um aplicativo computacional livre de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface gráfica e é desenvolvido em linguagem Java, que lhe permite o uso em várias plataformas. Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University. A distribuição deste programa é livre, de acordo com os termos da licença GNU General Public License.

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual interativo, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. A partir da versão 5.0 também é possível trabalhar com geometria em três dimensões.

O GeoGebra é um ambiente propício para que os estudantes explorem e manipulem objetos e construções, pois valoriza a ação do discente, tanto no processo de construção, quanto no processo de exploração. Neste sentido, sua utilização nas aulas de Matemática pode levar os estudantes ao processo de tomada de consciência

de conceitos matemáticos ao internalizar as ações e consequências observadas nesse ambiente de GD.

Por conta da existência da janela algébrica e da janela de visualização presentes no software, os discentes têm a possibilidade de estabelecer relações entre as diferentes representações de um objeto matemático, como por exemplo a representação de uma equação e a reta gerada por ela. Além disso, os alunos podem explorar as representações 2D e 3D de objetos, observando a transição entre as diferentes dimensões. Logo, o Geogebra é visto como uma ferramenta para a compreensão de conceitos matemáticos.

Geometry Expressions(2007)/ GXWeb (2017)

O Geometry Expressions é um software de geometria baseado em restrições, o que significa que os usuários podem criar figuras geométricas definindo restrições matemáticas entre os objetos. O software então, faz uso dessas restrições para calcular e ajustar, automaticamente, a figura geométrica, garantindo que ela atenda às restrições definidas. O que pode ser útil para entender as relações entre eles.

Além disso, combina a manipulação geométrica interativa com a capacidade de gerar expressões algébricas simbólicas para as propriedades geométricas das construções. Desenvolvido pela Saltire Software, este programa tem licença fechada e é utilizado tanto em ambientes educacionais quanto profissionais para explorar e visualizar conceitos geométricos e suas relações algébricas. Em 2017 a empresa lançou uma versão gratuita e *online* do seu software disponível em <https://www.geometryexpressions.com/gxweb/> .

Desmos (2011)

O Desmos é uma avançada calculadora gráfica implementada como uma aplicação web e um aplicativo móvel. Desmos foi fundado por Eli Luberoff, um matemático e físico com dupla graduação pela Universidade Yale, e foi lançado como uma startup na conferência TechCrunch Disrupt em 2011. Até setembro de 2012, recebeu cerca de 1 milhão de dólares americanos de financiamento da Kapor Capital,

Learn Capital e Kindler Capital. O nome Desmos veio da palavra grega **δεσμός**, que significa ligação ou laço.

Em maio de 2022, a Amplify adquiriu o currículo de matemática do Desmos e a [teacher.desmos.com](https://www.teacher.desmos.com). Desmos Studio, foi separada como uma corporação pública focada no desenvolvimento de calculadoras e outras ferramentas matemáticas.

Em maio de 2023, Desmos lançou uma versão beta para uma repensada ferramenta de geometria. Nela, formas geométricas podem ser feitas, assim como expressões da calculadora gráfica normal, com outros recursos. Em setembro de 2023, Desmos lançou uma versão beta para uma calculadora 3D, que acrescentou recursos além dos da calculadora 2D, incluindo produto vetorial, derivadas parciais e equações paramétricas de duas variáveis.

Além de representar graficamente equações e desigualdades, também compreende listas, gráficos, regressões, variáveis interativas, restrição de gráficos, gráficos simultâneos, gráficos de função por partes, gráficos de funções polares, dois tipos de malhas de gráfico, entre outros. As operações de cálculo como derivadas e integrais também estão disponíveis, apesar de limites diretos não estarem. Pode ser utilizado em diversos idiomas.

Sistema	Ano	Última atualização	Principal inovação
Sketchpad	1963	-	Primeiro editor gráfico orientado a objetos. Precursor dos sistemas de Desenhos com Auxílio de Computadores (CAD). Construções geométricas via restrições.
Geometer's Sketchpad	1989	2015	Introdução da manipulação dinâmica de figuras geométricas.

Cabri Geometry	1990	2015	Interface amigável e suporte para múltiplas construções.
Cinderella	1996	2013	Implementação robusta de geometria projetiva.
Geometry Expressions	2006	2017	Geometria algébrica simbólica, permitindo expressões exatas.
GeoGebra	2001	2024	Integração de álgebra e geometria, com ferramentas interativas.
Desmos Geometry	2015	2024	Ferramenta online acessível com forte ênfase em usabilidade.
GXWeb	2017	2020	Versão web do Geometry Expressions, com acesso online.
Desmos 3D Calculator	2016	2024	Visualização de gráficos tridimensionais de forma dinâmica.
GeoGebra AR	2018	2022	Uso de realidade aumentada para visualização geométrica.

Quadro 2 - Sistemas de GD e inovações

Fonte: produzido pelo autor

3. Os três sistemas: potencialidades e fraquezas

Diversas pesquisas têm surgido, tanto em âmbito nacional quanto internacional, com o intuito de investigar diferentes maneiras de utilizar inovações tecnológicas no ensino da Matemática, a fim de aprimorar a compreensão desta disciplina por estudantes de diversos níveis de escolaridade. A introdução de novas tecnologias no ambiente escolar pode contribuir significativamente para a criação de oportunidades que permitam a implementação simultânea de inovações pedagógicas no ensino da Matemática, visando a minimização dos desafios encontrados no processo de ensino-aprendizagem.

A utilização das Tecnologias da Comunicação e Informação (TIC) tem sido apontada como uma abordagem cada vez mais adotada em todas as disciplinas escolares, com destaque para a Matemática, dada a sua capacidade de auxiliar na compreensão dos conceitos matemáticos e facilitar a formulação de conjecturas e generalizações. O emprego de sistemas de GD, por exemplo, pode ser especialmente benéfico para a realização de experimentações, testes de hipóteses, confrontação de ideias, elaboração de generalizações, troca de experiências e desenvolvimento de outras habilidades cognitivas essenciais.

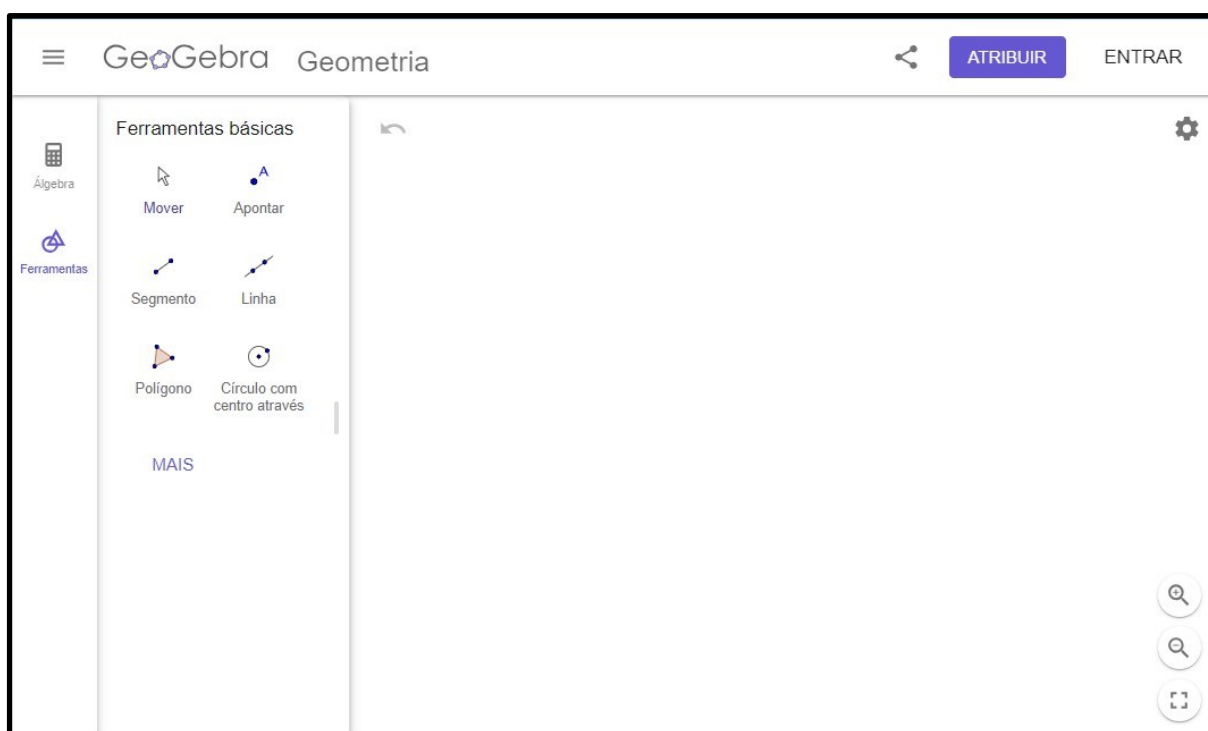
Com as tecnologias atuais, a escola pode transformar-se em um conjunto de espaços ricos de aprendizagens significativas, presenciais e digitais, que motivem os alunos a aprender ativamente, a pesquisar o tempo todo, a serem proativos, a saber tomar iniciativas e interagir. (MORAN, 2013, p. 31)

O objetivo desta seção é fazer uma comparação entre três softwares de GD, destacando aspectos relevantes e potenciais, bem como eventuais fragilidades de cada um deles. Os softwares analisados são: o Geogebra, o Desmos (Ferramenta da Geometria), e o Geometry Expressions (GXWeb).

3.1. Geogebra

O Geogebra é uma ferramenta versátil e poderosa, disponível em <https://www.geogebra.org/>, amplamente conhecida e utilizada no ensino e aprendizagem da Matemática. Suas principais potencialidades incluem a integração de recursos gráficos, algébricos e numéricos em um único ambiente interativo, o que facilita a visualização e compreensão de conceitos matemáticos complexos.

Figura 8 - Captura de tela da calculadora de geometria Geogebra



Fonte: produzida pelo autor

O Geogebra tem uma interface amigável e, para as construções básicas, intuitiva que torna o aprendizado da ferramenta acessível a estudantes de diferentes idades e níveis de habilidade matemática. É uma ferramenta gratuita e de código aberto, o que torna o acesso a ela mais democrático e inclusivo, possibilitando que estudantes e educadores de qualquer parte do mundo possam utilizar suas funcionalidades sem custos. Isso é especialmente importante para escolas e instituições com recursos financeiros limitados, que buscam oferecer uma educação de qualidade em Matemática e Geometria.

Outra vantagem do Geogebra é a comunidade ativa de usuários e desenvolvedores que contribuem para a melhoria contínua da ferramenta, disponibilizando tutoriais, materiais didáticos, modelos prontos, e promovendo discussões e compartilhamento de práticas pedagógicas. A possibilidade de compartilhar e colaborar em projetos matemáticos com colegas e professores também é uma característica importante do Geogebra, que estimula a troca de conhecimentos e experiências entre os usuários. As produções de todos os usuários ficam disponíveis em um grande repositório dentro do portal, chamado de GeoGebra Materiais¹, agora também chamado de *Community Resources* (recursos da comunidade). Por se tratar de um repositório bastante diverso e cujo conteúdo é de inteira responsabilidade dos autores, membros da comunidade, não há garantias de qualidade no conteúdo, e a busca por uma atividade que vise trabalhar um conteúdo específico e adequado ao nível de escolaridade desejado às vezes pode ser bastante difícil.

Uma novidade lançada em 2024 é o Geogebra *Math Resources*² (Recursos de Matemática, em português). Trata-se de uma página que tem um conjunto de atividades desenvolvidas pela equipe do Geogebra e categorizadas por assunto, por série escolar e por tipo de atividade. As atividades podem ser utilizadas dentro dos outros serviços do portal como Atividades, Livros, Sala de aula (*Classroom*) e ainda compartilhados dentro da comunidade, tudo sob a licença Creative Commons CC BY-NC. A criação do *Resources*, assim como as últimas atualizações do software, segue uma tendência observada em diversas plataformas de matemática online nos últimos anos para facilitar o trabalho do professor com destaque para os usos assíncronos que se pode fazer dessas ferramentas.

Uma das principais críticas em relação ao Geogebra é a sua curva de aprendizado inicial, que pode ser um pouco íngreme para aqueles que não estão familiarizados com a utilização de softwares matemáticos interativos. A interface do Geogebra, apesar de intuitiva, pode demandar um certo tempo de adaptação por parte

¹ <https://www.geogebra.org/materials>

² <https://www.geogebra.org/math>

dos usuários, o que pode limitar a sua utilização eficaz em ambiente escolar ou acadêmico.

Há muitos trabalhos científicos desenvolvidos sobre e com as ferramentas do Geogebra. Há, inclusive, periódicos específicos para publicações sobre este software em várias partes do mundo, como por exemplo, a Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo³, e o North American Geogebra Journal⁴.

3.2. Desmos, Ferramenta de Geometria

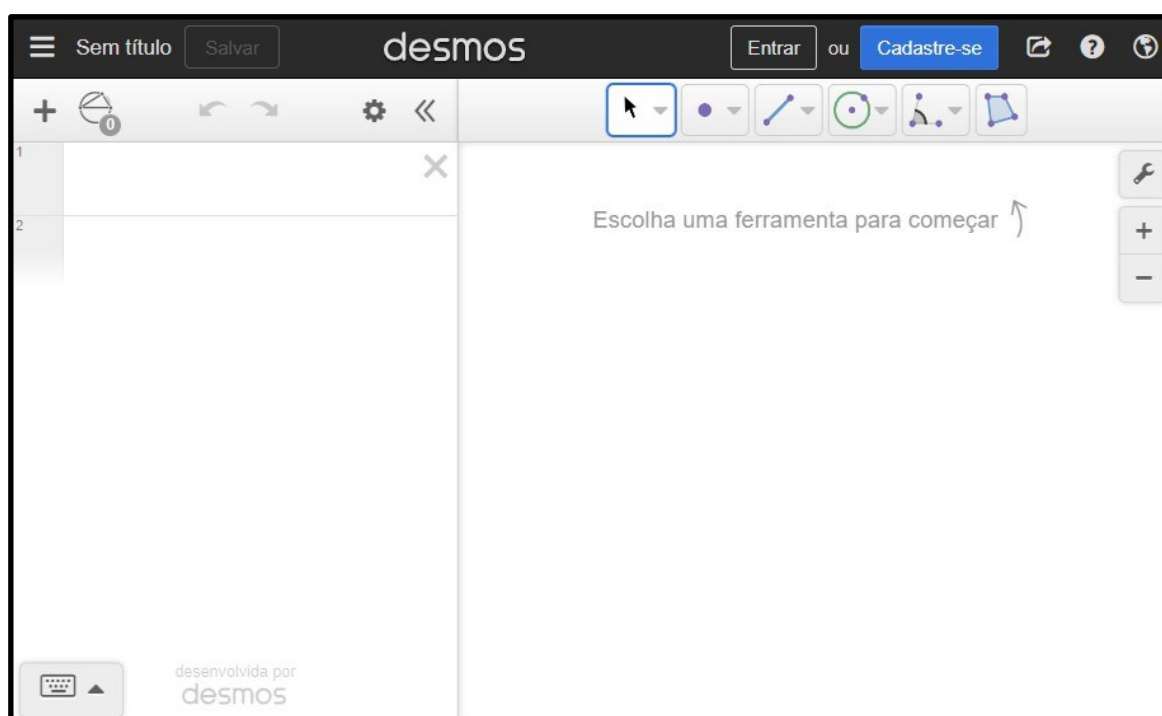
A ferramenta de geometria é uma das ferramentas interativas disponíveis na plataforma Desmos, disponível em <https://www.desmos.com/geometry>, que oferece de forma gratuita diversas funcionalidades para a visualização e exploração de conceitos matemáticos relacionados à geometria. Além da ferramenta de geometria, estão disponíveis calculadoras numéricas (4 operações e científica), calculadoras gráficas (bi e tridimensionais) e uma calculadora de matrizes.

A ferramenta de geometria do Desmos apresenta bastante similaridades com a calculadora de geometria do Geogebra, especialmente no que diz respeito à sua interface. Essencialmente os mesmos elementos estão presentes na sua tela inicial (Figura 9). As ferramentas básicas, uma janela para se digitar as expressões analiticamente (equações, coordenadas, cálculos simples, etc.), botões para configuração da área de trabalho, área de login e opção para salvar a construção.

³ <https://revistas.pucsp.br/IGISP>

⁴ <https://mathed.miamioh.edu/index.php/ggbi>

Figura 9 - Captura de tela da Ferramenta de geometria Desmos



Fonte: produzida pelo autor

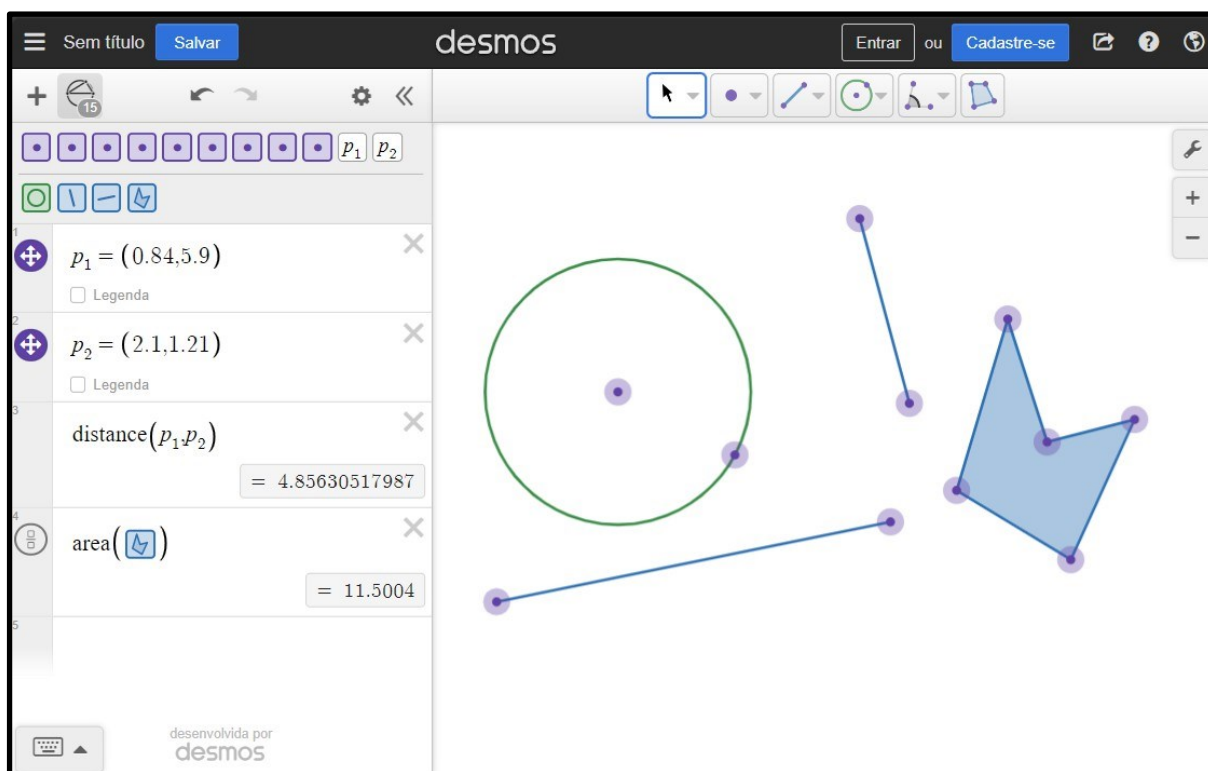
As principais diferenças aparecem na questão da usabilidade, no que é conhecido na área de desenvolvimento para internet como experiência do usuário (*user experience*, UX). A ferramenta Desmos tem funcionalidades que deixam a experiência de quem a utiliza mais agradável que a maioria das outras plataformas similares, diminuindo a inclinação inicial da curva de aprendizagem. O primeiro destaque neste sentido é um botão de ajuda no canto superior direito onde se tem acesso imediato a um guia do usuário (em inglês), também, no canto superior esquerdo, ao lado do título da construção pode-se acessar um menu com uma lista de exemplos de construções simples com as quais é possível interagir para compreender como foram feitas.

Outros detalhes acrescentam positivamente à experiência do usuário. Os objetos geométricos construídos com as ferramentas de construção diretamente na área de desenho vão sendo armazenados em uma área específica do menu esquerdo (Figura 10), na parte superior, que fica oculto por padrão, chamado de menu de *tokens*. Para acessá-lo, basta clicar no ícone correspondente, e todos os *tokens* serão listados em forma de ícones dinâmicos em miniatura do objeto que ele representa.

Caso precise calcular com qualquer um destes objetos, é possível utilizá-los na forma de *tokens* dentro das expressões ou também é possível arrastá-lo para a parte inferior. Nesta parte ele ganha um “nome” (que é automaticamente atualizado no menu de *tokens*) e pode ser acessado agora também analiticamente. Por exemplo, ao usar o comando *area()* é possível, com o cursor posicionado dentro dos parênteses, clicar diretamente no objeto que deseja saber a área. Experimente mover os pontos na construção disponível no link <https://www.desmos.com/geometry/r3iws82rbm> e observe os tokens se movendo juntamente com o triângulo.

Isso deixa a tela “mais limpa” e permite ao usuário focar somente nos objetos que estão envolvidos na construção.

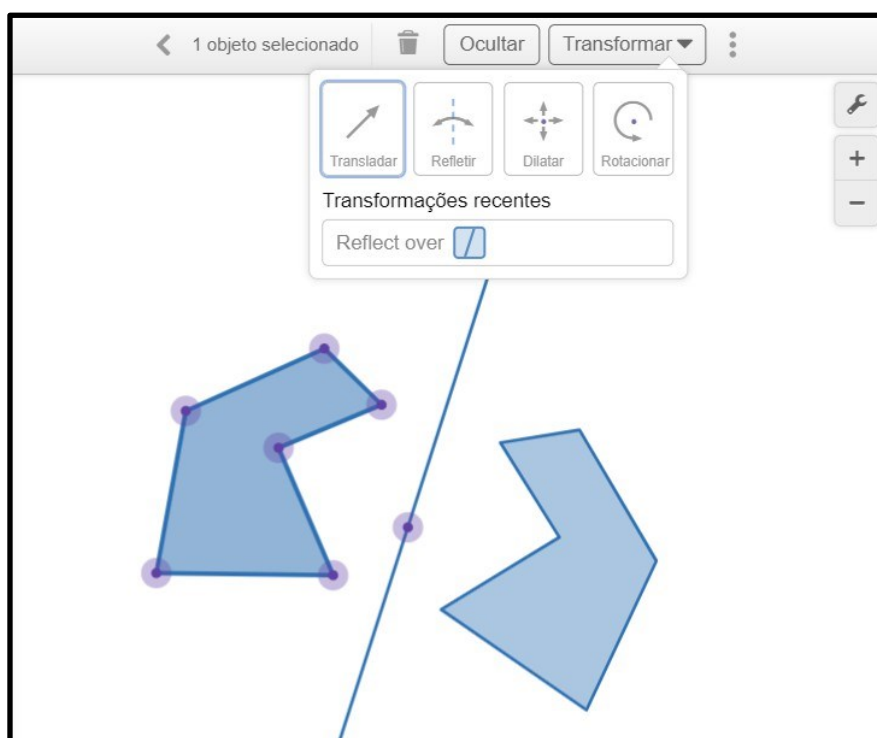
Figura 10 - Captura de tela da Ferramenta de geometria Desmos



Fonte: produzida pelo autor

Outra diferença está na forma de se fazer as transformações geométricas. Os ícones das ferramentas não ficam visíveis *a priori*. Ao clicar em um objeto na área de construção, a barra de ferramentas superior muda e aparecem opções de ocultar e transformar: transladar, refletir, dilatar e rotacionar. Ao selecionar a transformação desejada aparecem as instruções para o próximo passo, por exemplo, para a ferramenta refletir a instrução é: “escolha a reta de reflexão”. As transformações realizadas ficam armazenadas como botões para usos em outros objetos.

Figura 11 - Transformações na ferramenta de geometria Desmos



Fonte: produzida pelo autor

Para salvar suas construções o usuário precisa estar logado em sua conta. Neste caso aparece a opção de salvar no canto superior esquerdo. As listas com todas as suas construções salvas fica disponível no ícone “hambúrguer” (☰) no canto superior esquerdo, junto com os exemplos prontos disponibilizados pelo software. Cada construção salva pode ser compartilhada com outros usuários utilizando-se a *url* na barra de navegação do navegador. Com esta *url* também é possível “*embedar*” essa tela em outras páginas como o Google sites ou o construtor de atividades Desmos, mantendo todas as funcionalidades interativas.

A integração com o construtor de atividades vai além do copia e cola de *url*, as construções passam a fazer parte do pacote completo do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) próprio, o *Desmos Classroom* (<https://teacher.desmos.com/>). Neste ambiente é possível criar, copiar, traduzir, remixar atividades disponibilizadas gratuitamente pela plataforma (ANTUNES e CAMBRAINHA, 2020). Todas as funcionalidades do Desmos Classroom, incluindo a conexão com a camada de computação, estão disponíveis para as construções da ferramenta de geometria.

Uma das principais críticas em relação ao Desmos é a sua dependência de uma conexão com a internet, o que pode limitar o acesso e a utilização da ferramenta em locais com conexão instável ou inexistente. Além disso, podemos pontuar que, em comparação com outros softwares, a quantidade de funções predefinidas para se usar nas construções é limitada, dificultando construções mais complexas. Entretanto, ela se adequa aos conteúdos de geometria dos currículos da educação básica.

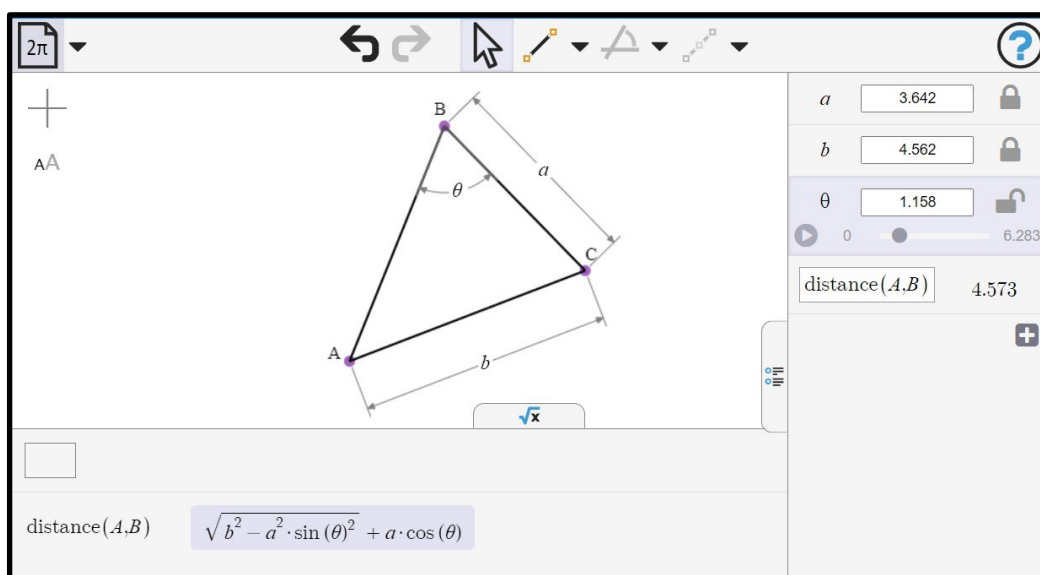
	Desmos (28)	Geogebra (47)
GEOMETRIA	<i>midpoint, intersection, segment, line, ray, vector, parallel, perpendicular, circle, arc, angle, directed angle, polygon, glider, vector, anglebisector</i>	<i>Arco Circular, Arco Circuncircular, Arco, Baricentro, Bissetriz, Caminho Poligonal, Interseção De Regiões, Interseção, Lugar Geométrico, Mediatriz, Perpendicular, Polígono Rígido, Polígono, Ponto Médio, Ponto, Raio, Reta, Segmento, Semirreta, Setor Circular, Setor Circuncírculo, Setor, Tangente, Vértice.</i>
PROPRIEDADES E MEDIDAS	<i>distance, length, area, perimeter, vertices, angles, directed angles, segments, radius, center, coterminal, supplement, vector.start, vector.end</i>	<i>Comprimento, Direção, Distância, Inclinação, Perímetro, Ponto Em, Ponto Mais Próximo, Razão Afim, Razão Dupla, Área, Ângulo</i>
TRANSFORMAÇÕES	<i>dilate, rotate, reflect, translate</i>	<i>Cisalhamento, Esticar, Girar, Homotetia, Reflexão, Transladar</i>

Fonte: produzida pelo autor

3.3. GXWeb

GXWeb é uma versão gratuita, acessível pelo navegador⁵, do software pago de geometria simbólica chamado *Geometry Expressions* desenvolvido pela Saltire Software. Ele trabalha com dois tipos de modelos ao mesmo tempo: um modelo numérico da geometria, parecido com o que é usado na maioria dos programas de geometria dinâmica, e um modelo simbólico. A interface (Figura 12) permite que o usuário acesse e interaja com esses dois modelos, que são plenamente integrados.

Figura 12 - Modelo numérico tradicional (à direita) e modelo simbólico (abaixo)

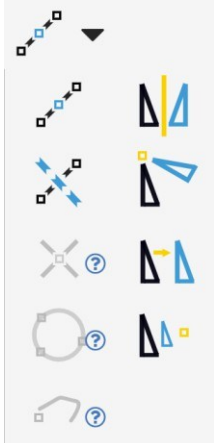


Fonte: produzida pelo autor

A lógica de construção neste sistema de GD é um pouco diferente das demais, o que lhe confere uma posição de destaque. A construção é baseada em restrições. O usuário primeiro constroi o “esboço” da figura que deseja e então pode ir adicionando restrições à sua figura, tanto de medidas quanto de relações entre os

⁵ <https://geometryexpressions.com/gxweb/>

objetos. Os seus usuários podem aplicar restrições geométricas (como paralelismo, perpendicularidade, tangencia, etc.) e dimensionais (distâncias fixas, ângulos específicos, etc.). O software resolve essas restrições, ajustando a geometria conforme necessário.

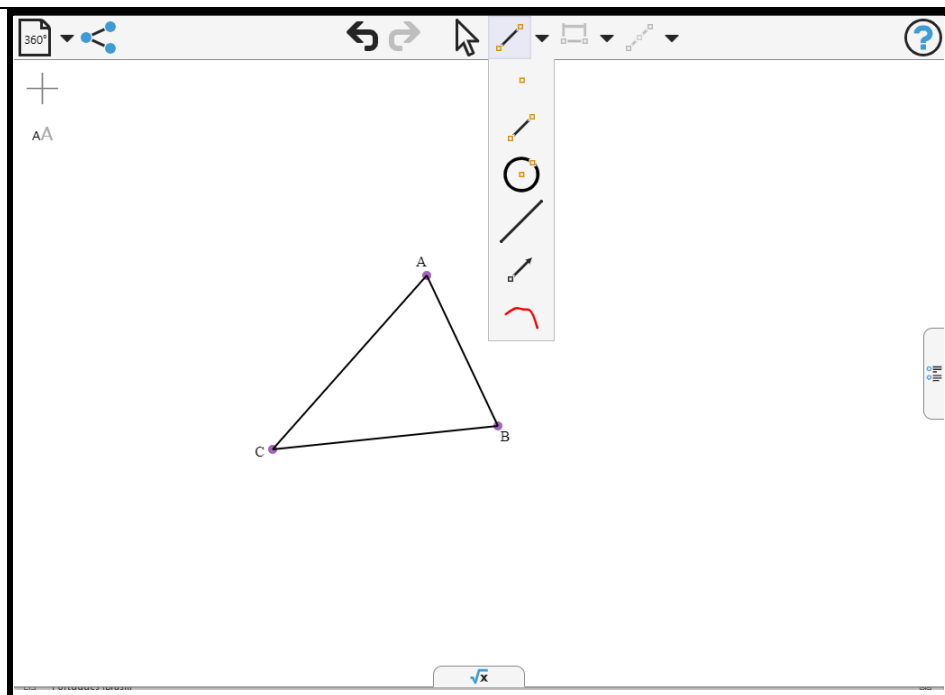
Geometria	Medidas e propriedades (restrições)	Construções e transformações
		
Ponto, Segmento, Círculo, Reta, Vetor, Curva.	Distância, Ângulo, Raio, Parâmetro, Equação, Inclinação, Perpendicular, Paralelos, Congruentes, Pertencente, Tangente.	Ponto Médio, Mediatriz, Interseção, Circuncírculo, Lugar Geométrico, Refletir, Girar, Transladar e Dilatar.

Quadro 4 - Menus do GXWeb

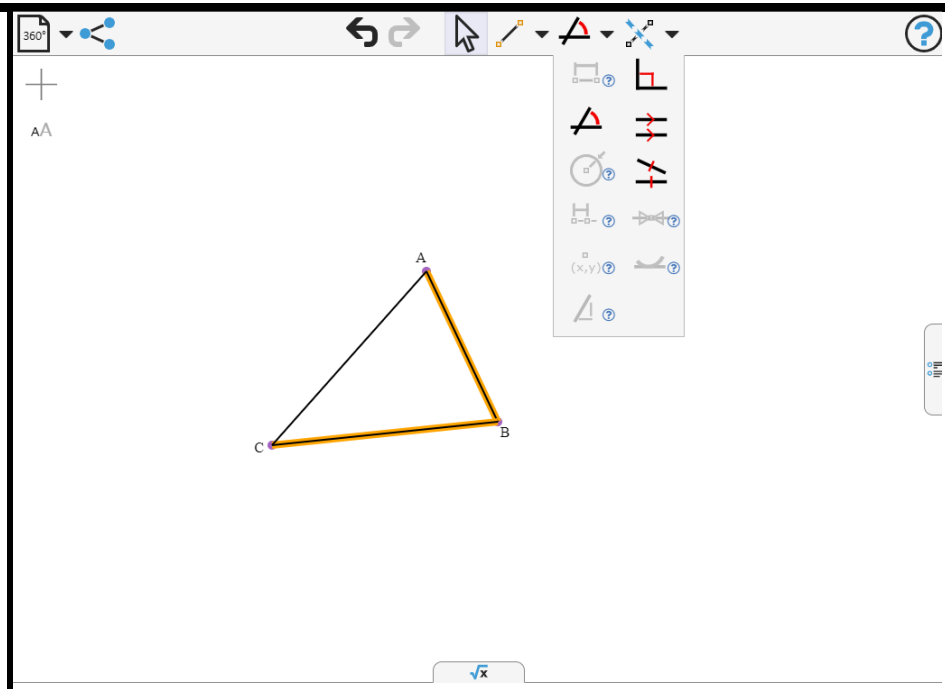
Fonte: produzida pelo autor

Vamos ver o exemplo de uma construção básica, porém de muita relevância, a construção de um triângulo retângulo isósceles.

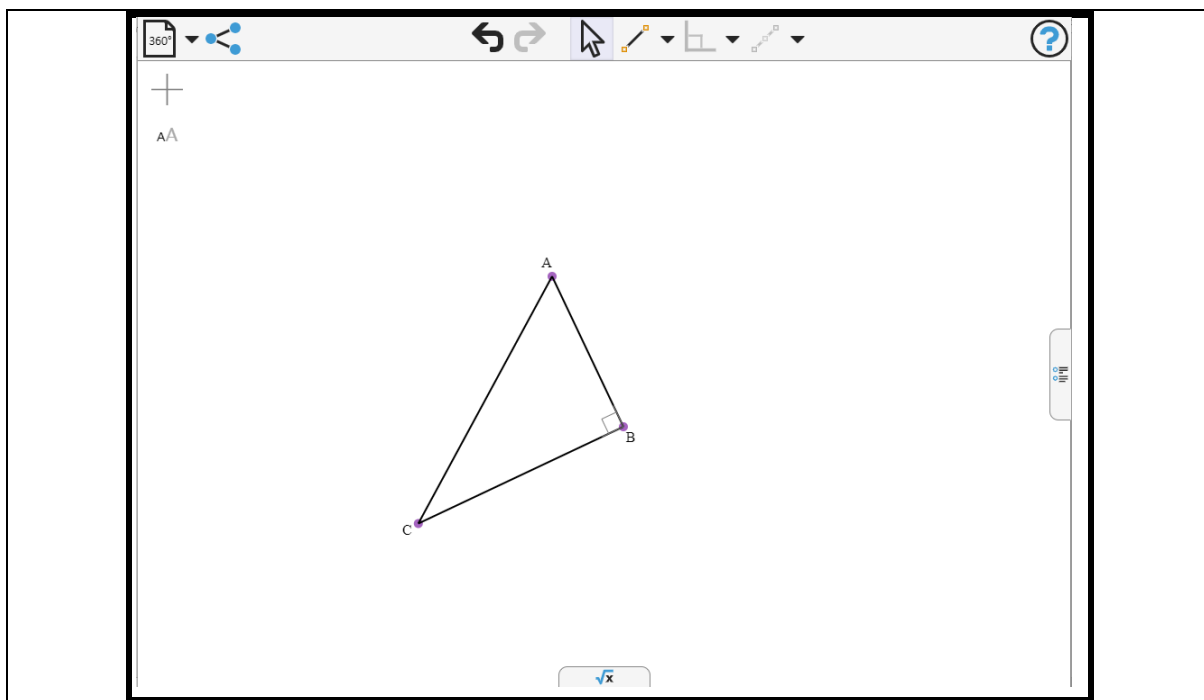
1º passo - Unir três segmentos de reta, de tamanho qualquer, para formar um triângulo.



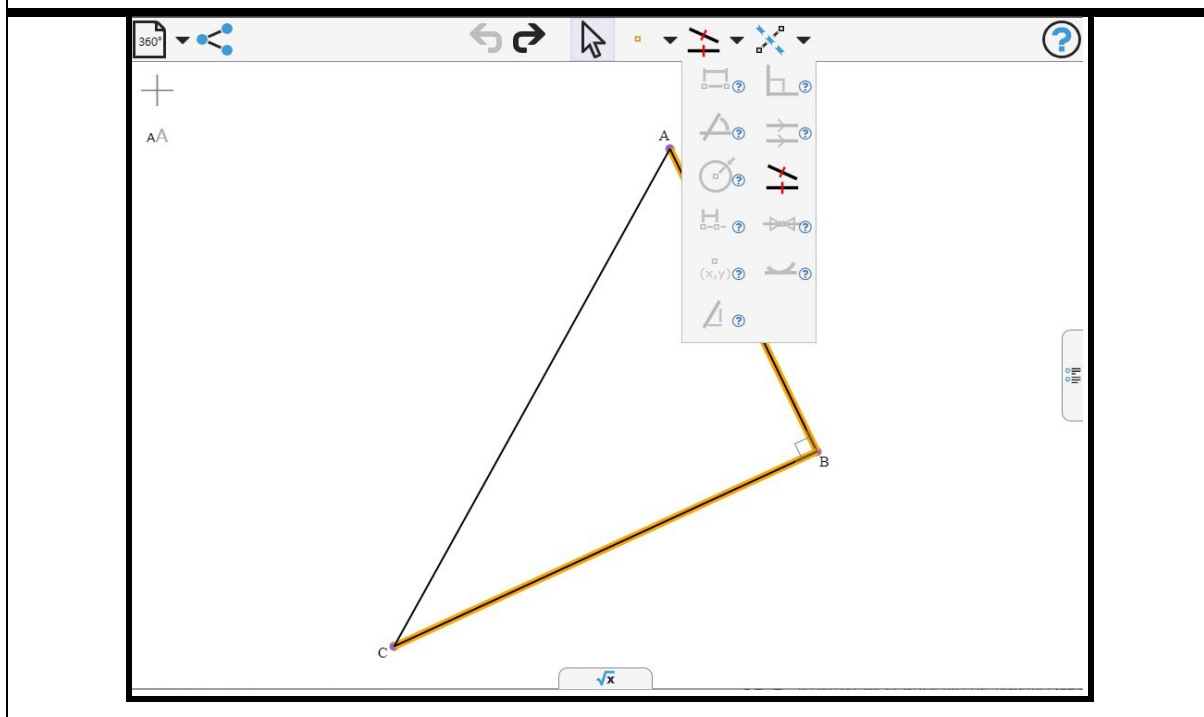
2º passo - Selecionar dois segmentos quaisquer e marcar a opção de perpendicularidade. Dessa forma restringimos o ângulo reto, como o ângulo formado por esses dois segmentos.



3º passo - Com isso garantimos que o triângulo seja retângulo e esses dois segmentos selecionados, passam a ser os catetos do triângulo construído.



4º passo - Como o triângulo retângulo deve ser isósceles, selecionamos os dois catetos e escolhemos a opção que fornece a congruência entre segmentos.



Quadro 5 - Passos da construção de um triângulo retângulo isósceles

Fonte: produzido pelo autor

Usando o comando **distance(,)**, verificamos que os dois segmentos têm as mesmas dimensões.

Outra forma de tornar dois segmentos congruentes é selecionar cada um dos segmentos, utilizando a ferramenta que mede segmentos.

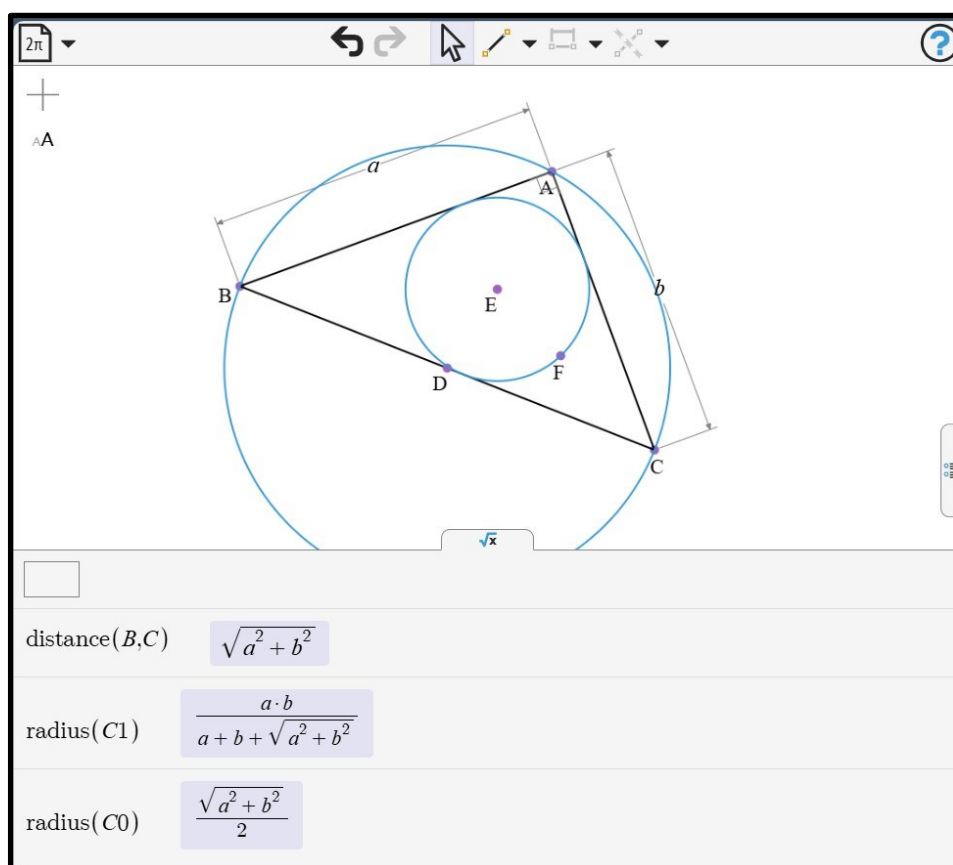
A esse segmento será atribuído um valor genérico, por exemplo **a**, em seguida repita o mesmo procedimento para o outro segmento, que receberá outra medida, por exemplo **b**. Clique na caixinha em que está escrito **b**, e troque por **a**. Dessa forma, os catetos passam a ter as mesmas medidas e aí teremos um triângulo retângulo isósceles.

A capacidade de gerar expressões algébricas simbólicas, automaticamente, a partir de construções geométricas com atribuições de variáveis, diretamente na construção, constitui um diferencial desta ferramenta. A dinâmica implementada é intuitiva e muito próxima da prática geométrica e algébrica escolares. O acesso rápido às fórmulas, permite aos estudantes atuarem em um cenário de investigação matemática. Tal cenário tende a tornar mais agradável o aprendizado de conceitos que de uma maneira geral, são construídos de por um processo menos dinâmico.

No exemplo da Figura 10, tem-se um triângulo retângulo de catetos medindo a e b com seus círculos inscrito (seleciona-se os três lados do triângulo e a ferramenta circuncirculo) e circunscrito (seleciona-se os três vértices do triângulo e em seguida a ferramenta circuncirculo).

Ao digitar os comandos na aba de cálculo algébrico, o software é capaz de calcular os raios de ambos os círculos e o comprimento da hipotenusa. São fórmulas de dedução mais complicada, mas a partir da observação delas os estudantes podem fazer conjecturas sobre as relações que essas medidas têm em relação às medidas dos lados do triângulo.

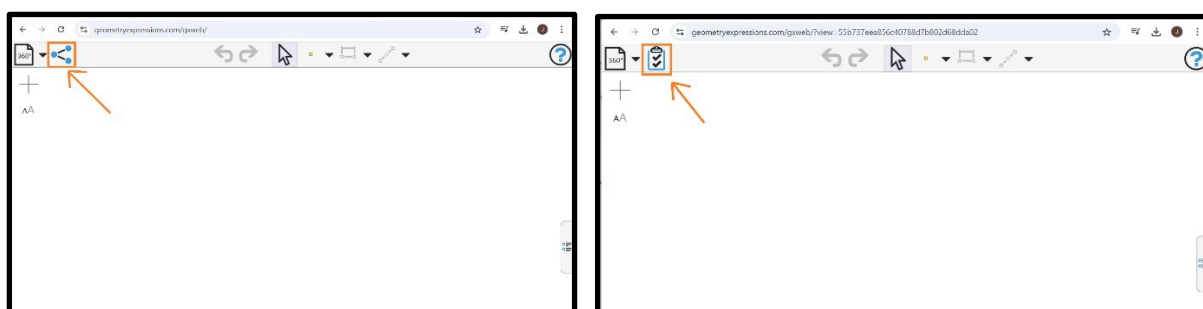
Figura 13 - Possibilidade de investigação com o GXWeb.



Fonte: produzida pelo autor

O Geometry Expressions permite a exportação de construções e expressões para vários formatos, somente, na sua versão paga. A versão GXWeb não tem as opções de exportar, o que constitui uma desvantagem em relação a outros softwares. Atualmente, o GXWeb contou com uma atualização, que passou a permitir o compartilhamento via url, das construções e projetos desenvolvidos.

Figura 14 – Antes e depois de selecionar o compartilhamento (acesso em 22/08/2024)



Fonte : produzida pelo autor

Uma das principais críticas em relação à ferramenta é que, à primeira vista, sua interface parece complexa e pouco intuitiva, o que pode dificultar a utilização eficaz do software, especialmente para aqueles sem experiência prévia em tecnologias semelhantes.

Além disso, o GXWeb pode ser uma ferramenta mais especializada e menos acessível do que outras opções mais populares, o que pode limitar a sua utilização em contextos educacionais onde a tecnologia é menos difundida ou em ambientes com recursos tecnológicos limitados. Uma outra fragilidade, em relação ao software, é a sua falta de atualizações regulares e suporte técnico, o que pode resultar em problemas de compatibilidade com sistemas operacionais mais recentes e dificultar a resolução de eventuais falhas ou *bugs*.

A sua falta de recursos colaborativos limita a interação entre estudantes e professores e dificulta a colaboração em atividades de grupo. Além disso, a ausência de uma comunidade ativa de usuários e desenvolvedores, pode reduzir o suporte e o compartilhamento de conhecimentos entre os usuários do software.

3.4. Quadro comparativo: construção e restrição em geometria

A seguir, apresentamos um quadro comparativo entre os três sistemas, no que diz respeito às funcionalidades das construções via restrições e o uso educacional.

	GeoGebra	Desmos Geometry	GXWeb
Manipulação Simbólica	Sim (Integração com Geogebra CAS)	Não	Sim (Aba de cálculo algébrico)
Uso de Restrições	Não	Não	Sim

Interface Intuitiva	Sim	Sim	Moderado
Exportação e Integração	Sim	Sim, com recursos de acessibilidade	Não
Recurso de salvamento	Sim	Sim	Não
Compartilhamento via url	Sim	Sim	Sim
Integração com Calculadoras Gráficas	Sim	Sim	Não
Integração com ambientes virtuais de aprendizagem	Sim (Geogebra Classroom)	Sim (Desmos Classroom)	Não
Recursos Educacionais e Comunidade	Extenso	Extenso	Limitado
Versão Web	Sim	Sim	Sim

Quadro 6 - Comparação entre as funcionalidades dos três sistemas de GD

Fonte: produzida pelo autor

4. Os sistemas de GD e a minha prática profissional

Ao longo dos meus dezenove anos de experiência em sala de aula, atuando na educação básica, pude me deparar com diversas situações, muitas delas, voltadas para o ensino de geometria, que me fizeram lançar mão da utilização de algum software de GD.

No início de minha jornada utilizei, de forma tímida, o Geometer's Sketchpad. Exclusivamente para a confecção de figuras que iriam compor uma lista de exercícios ou alguma avaliação mais formal. Ao longo do tempo, já no final da graduação, na Universidade Federal Fluminense, ouvi falar do Geogebra, hoje muito difundido. Mas não tive contato com ele diretamente. Nem nas aulas da especialização, na mesma instituição, o software foi utilizado. Com o passar do tempo e com a leitura de alguns artigos e depois de algumas edições do PAPMEM - IMPA (Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio), tive contato maior com a potencialidade desse programa de GD. Os anos se passaram e o Geogebra me acompanhou em diversos momentos de sala de aula, agora não mais restrito, a confecção de figuras para materiais pedagógicos formais e sim, no auxílio do entendimento e da visualização de certas etapas do ensino de matemática.

Mais alguns anos se passaram e enfim, cheguei a Unirio! Instituição onde de fato tive contato com outras estratégias, para o ensino de matemática. Já no primeiro período do curso, na disciplina Números e Funções Reais (MA 11) , a Ferramenta de Geometria Desmos, nos foi apresentada, pelo professor Michel Cambrinha, meu orientador. Tais estratégias (diários reflexivos, sequências didáticas para aplicação em avaliações menos tradicionais, até mesmo listas de exercícios que serviam como parte de uma avaliação mais formal, pequenos seminários, entre outras), me fizeram ampliar horizontes. Tais estratégias, não eram restritas ao ambiente universitário. Eram perfeitamente aplicáveis ao ambiente da educação básica.

Mais próximo de “rabiscar as primeiras linhas” desse texto, já nas últimas disciplinas presenciais do curso, mais especificamente na disciplina Recursos Computacionais (MA 36), fomos apresentados ao Geometry Expressions. Nunca tinha ouvido falar sobre esse software, muito menos em uma de suas principais particularidades e funcionalidades, a chamada geometria de restrição.

Já durante as tratativas da escrita da monografia, Michel me apresentou uma proposta de trabalho, que acabou se redesenhando ao longo do processo de elaboração da monografia. Bem menos conhecido que o famoso Geogebra e com uma interface que destoava esteticamente do Desmos (que é muito similar ao Geogebra), mas com uma característica ímpar, o Geometry Expression, cuja sua

versão gratuita para a internet, é chamada GXWeb. apresenta uma potencialidade, diferente dos demais. A utilização da restrição de objetos, na construção das figuras. E dessa forma, leva o aluno a um entendimento mais dinâmico e efetivo de conceitos da matemática. Além de facilitar a relação de conceitos geométricos às fórmulas algébricas.

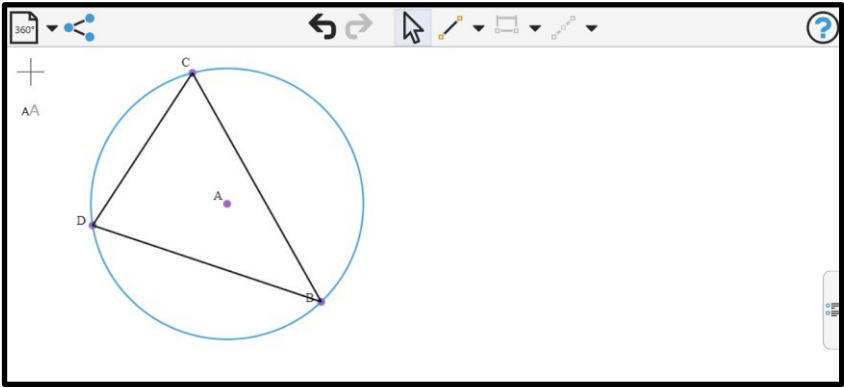
Embora as atividades que apresentamos aqui não tenham sido testadas em sala de aula como parte da pesquisa, durante os últimos três meses, fiz uso do GXWeb com meus estudantes. Tanto para o entendimento de conceitos e de suas relações com fórmulas algébricas, quanto para a resolução de questões em sala de aula. Os resultados conseguidos, no entendimento de alguns assuntos, sobretudo em geometria, foram superiores aos que já haviam sido realizados em outros anos, onde esse software não foi utilizado.

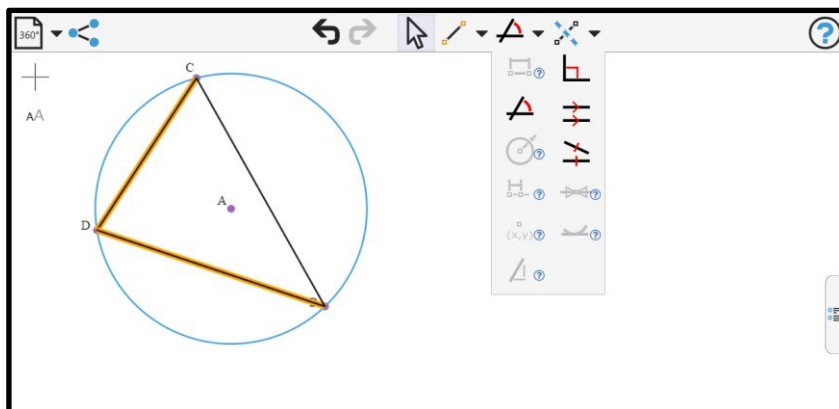
A seguir, apresento dois exemplos feitos em sala de aula, com a utilização do GXWeb.

Exemplo 1

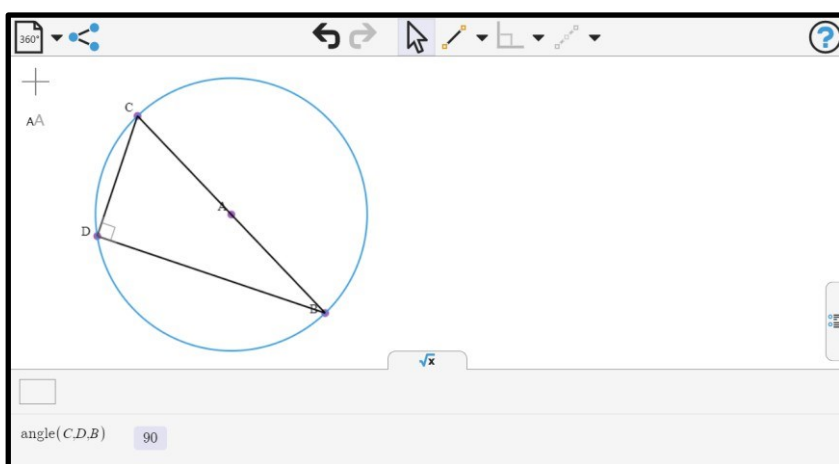
Todo triângulo, inscrito em uma circunferência é retângulo, se e somente se, a hipotenusa desse triângulo é o diâmetro da circunferência.

Acompanhando as figuras a seguir, é possível concluir o resultado do **Exemplo 1**.

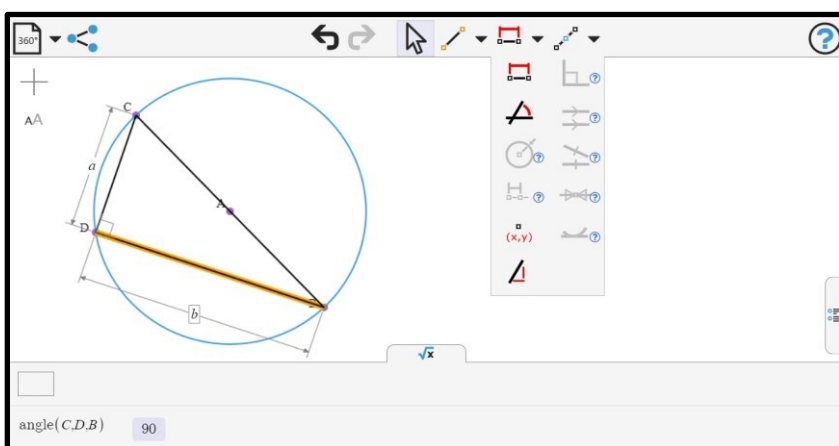
	Usando as ferramentas de círculo e segmento, desenhemos um círculo e um triângulo com vértices sobre ele.
--	--



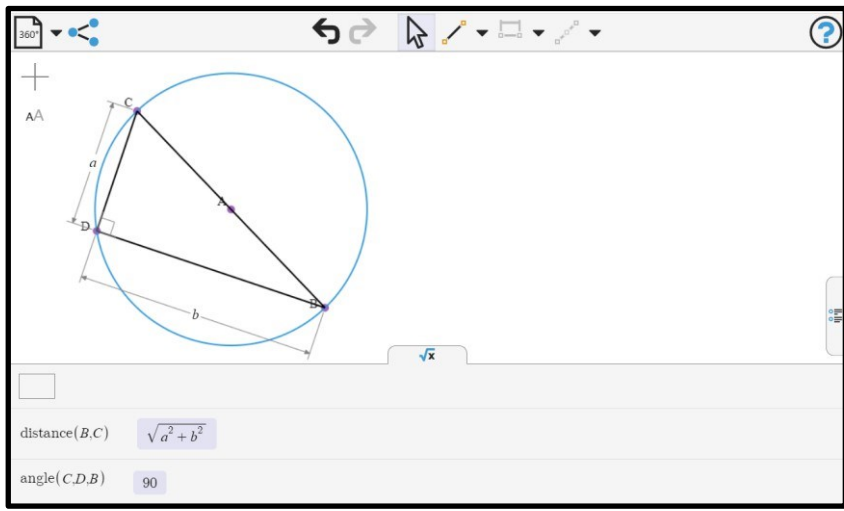
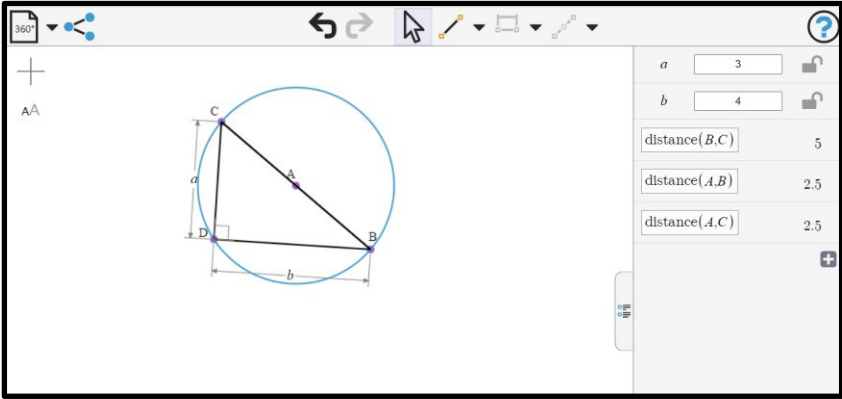
Selecionamos dois lados do triângulo e adicionamos a restrição de ângulo reto



Percebemos que, automaticamente, o centro do círculo passa a fazer parte da hipotenusa. Movemos os pontos e percebemos que a propriedade permanece.



Atribuímos as variáveis a e b para os catetos

	Calculamos a medida da hipotenusa em função das medidas dos catetos.
	Verificamos que o raio do círculo coincide com metade da hipotenusa.
	Um exemplo numérico para um triângulo retângulo bastante conhecido.

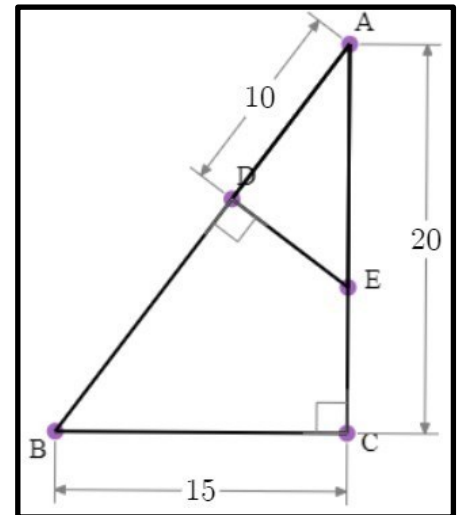
Quadro 7 - Passos da construção do exemplo 1

Fonte: produzida pelo autor

Clicando nesse link, é possível visualizar e acompanhar o resultado final da figura do Exemplo 1.

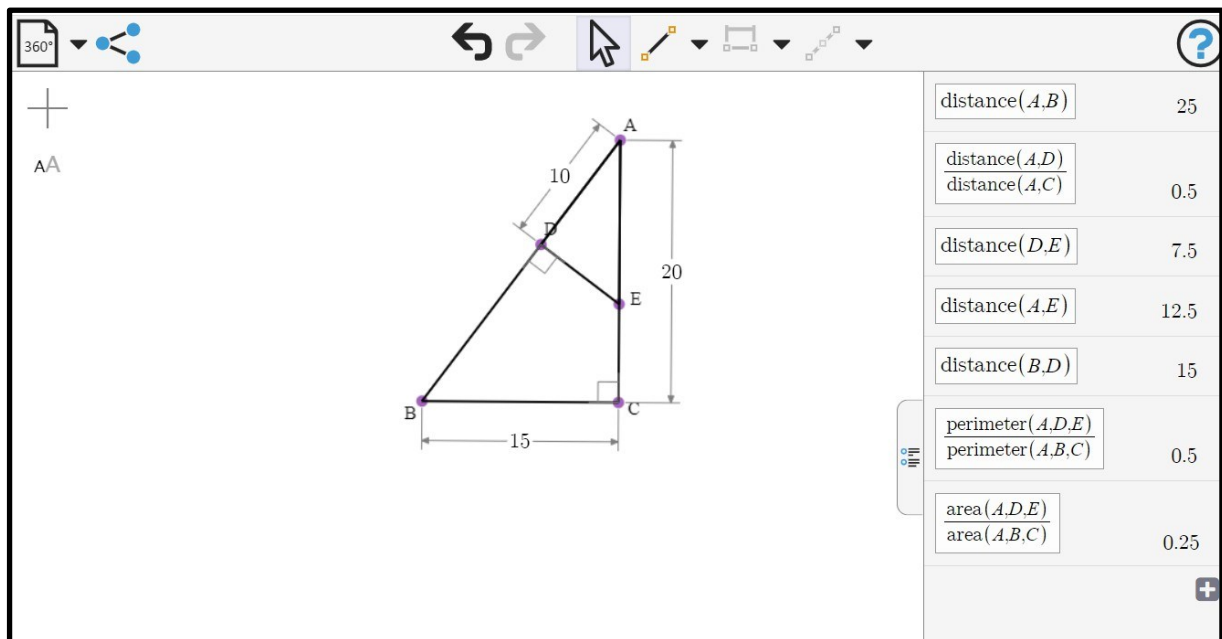
Exemplo 2

Os triângulos ABC e AED, representados na figura a seguir, são semelhantes, sendo o ângulo ADE congruente ao ângulo ACB. Se $BC = 15$ cm, $AC = 20$ cm e $AD = 10$ cm, determine o que se pede em cada item.



- A medida do segmento AB.
- A razão de semelhança entre os triângulos ADE e ABC.
- A razão entre os perímetros dos triângulos ADE e ABC.
- A razão entre as áreas dos triângulos ADE e ABC.
- Qual a relação entre o valor encontrado no item **d** e o valor encontrado no item **b**?

Figura 15 - Cálculos do exemplo 2



Fonte: produzido pelo autor

<https://geometryexpressions.com/gxweb/?view=4b674f1bc6f4b486e5bb297d3548694f>

Com essa abordagem, pude perceber nos alunos o concreto entendimento desses conceitos, de forma mais dinâmica e eficaz. Acredito fortemente, que a utilização de recursos desse gênero, se fazem necessários para que, de alguma forma, possamos dar mais leveza e ao mesmo tempo, seriedade para a matemática.

Ora, se dizemos a todo tempo e o tempo todo, que os alunos de hoje não são mais como os alunos de antigamente, não podemos nós professores, sermos cópias dos professores que um dia foram nossos professores!

Minimamente, temos o dever de buscar outras alternativas para “atrair a atenção” de nossos alunos. Tais estratégias, vão além dos ganhos acadêmicos de sala de aula, de rendimento quantitativo, e outros índices que as coordenações pedagógicas gostam de ouvir e falar. Com a utilização de alternativas, temos maiores chances de ganhar o afeto de nossos alunos, uma vez que há a percepção por parte deles, da nossa preocupação com o entendimento deles. E ensinar pelo afeto é uma prática mais humana.

Em minha prática atual na educação básica, o GXWeb, para a abordagem e/ou finalização de alguns assuntos, tem se mostrado, por vezes, mais eficaz que outros programas de GD, como por exemplo o Geogebra e a Ferramenta Desmos, que foram nesse texto analisado.

5. Propostas de atividades

Nesta seção faremos a proposta de atividades que podem ser realizadas com estudantes em sala de aula, com o apoio do software GXWeb. Optamos por este software por entendermos que para os outros dois há um grande volume de pesquisas e de propostas já existentes na internet, e que este contingente contempla boa parte dos aspectos que levantamos como discussão neste trabalho. Claramente

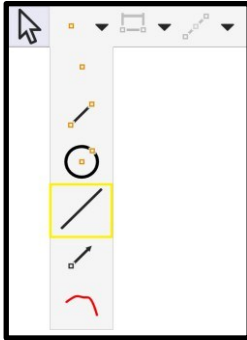
há uma grande vantagem do Geogebra em relação a Desmos neste aspecto. A plataforma GXWeb, por ser menos conhecida e explorada pelos professores e estudantes, ainda têm pouco material disponível na internet, especialmente em língua portuguesa. Nesse sentido acreditamos que este trabalho contribuirá para começar a preencher essa lacuna.

- As atividades abaixo devem ser feitas diretamente no navegador de internet, acessando o endereço <https://geometryexpressions.com/gxweb/>
- Na opção de unidades de medidas de ângulos (canto superior esquerdo) selecione a opção **graus** (360°).
- Ao final de cada tarefa, compartilhe o link para a sua construção.

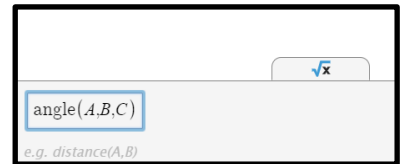


5.1. Tarefa 1

Objetivo Geral	Executar construções simples no software para conhecer suas ferramentas e recursos básicos
Objetivos Específicos	• Compreender as propriedades de retas paralelas e perpendiculares. • Aplicar restrições geométricas para construir figuras específicas. • Analisar e calcular os ângulos internos de um triângulo retângulo utilizando ferramentas digitais.
Conteúdos Abordados	• Geometria plana: retas paralelas, perpendiculares e triângulos. • Medição de ângulos. • Utilização de software de geometria dinâmica (GXWeb).
Público-alvo	Estudantes do Ensino Médio, preferencialmente do 1º ou 2º ano.
Tempo estimado	1 aula de 50 minutos.
Recursos necessários	Computadores ou tablets com acesso a internet.
Critérios de avaliação	• Capacidade de aplicar corretamente as restrições geométricas no software. • Precisão na construção geométrica e na medição dos ângulos. • Participação ativa na tarefa e clareza na interpretação dos resultados.

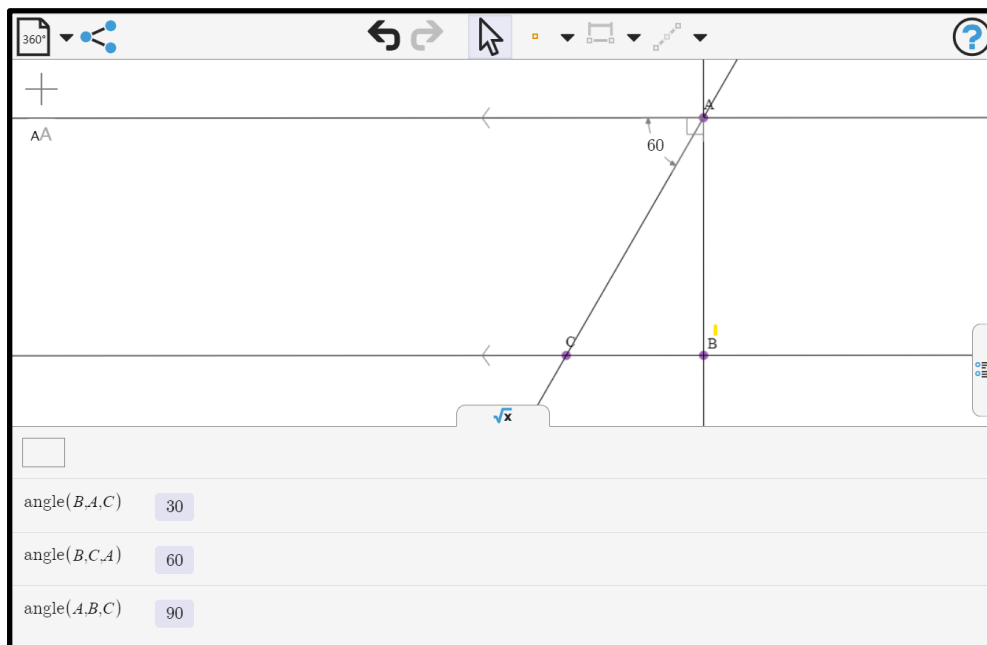


- Abra o menu de ferramentas de construção e selecione a ferramenta *Reta*
- Construa duas retas quaisquer na área de desenho.
- Faça o que se pede abaixo:
 - a) Torne as retas construídas paralelas;
 - b) Desenhe uma terceira reta no plano e restrinja-a para ser perpendicular às outras duas;
 - c) Marque os pontos de interseção entre as retas;
 - d) Desenhe uma quarta reta, passando pelo ponto A, e adicione a restrição do ângulo entre esta nova reta e alguma das outras duas para que seja de 60°;
 - e) Marque o ponto C que é o vértice do triângulo retângulo formado entre as retas;
 - f) Abra a aba de cálculo algébrico, calcule as medidas dos ângulos internos do triângulo.



SOLUÇÃO:

Figura 16 - Resultado final da Tarefa 1



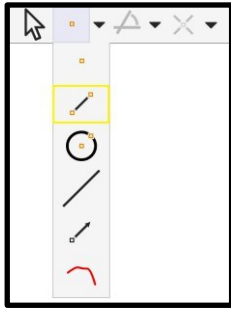
Fonte: produzida pelo autor

Clicando nesse link, é possível visualizar e acompanhar o processo de realização da Tarefa 1.

<https://geometryexpressions.com/gxweb/?view=4adf67dedead6424a9b09d57fb6e195c>

5.2. Tarefa 2

Objetivo Geral	Executar construções simples no software para conhecer suas ferramentas e recursos básicos
Objetivos Específicos	• Explorar as propriedades dos triângulos retângulo, isósceles e equilátero. • Aplicar restrições geométricas para construir triângulos com propriedades específicas. • Calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo e a área de um triângulo equilátero usando comandos algébricos no software.
Conteúdos Abordados	• Geometria plana: tipos de triângulos (retângulo, isósceles, equilátero). • Medição de segmentos e cálculo de áreas. • Utilização de software de geometria dinâmica (GXWeb).
Público-alvo:	Estudantes do Ensino Médio, preferencialmente do 1º ou 2º ano.
Tempo estimado:	1 aula de 50 minutos.
Recursos necessários:	Computadores ou tablets com acesso a internet.
Critérios de avaliação:	• Capacidade de aplicar corretamente as restrições geométricas no software. • Precisão na construção geométrica e na medição dos ângulos. • Participação ativa na tarefa e clareza na interpretação dos resultados.



- Abra o menu de ferramentas de construção e selecione a ferramenta *Segmento*

- Construa dois triângulos quaisquer ABC e DEF na área de desenho.

- Faça o que se pede abaixo.

a) Adicione uma restrição para que o ângulo $\hat{A}$ seja reto.

b) Faça uma restrição para tornar o triângulo ABC isósceles.

c) Torne o triângulo DEF um triângulo equilátero.

d) Adicione a restrição para que a medida do lado AB seja 8.

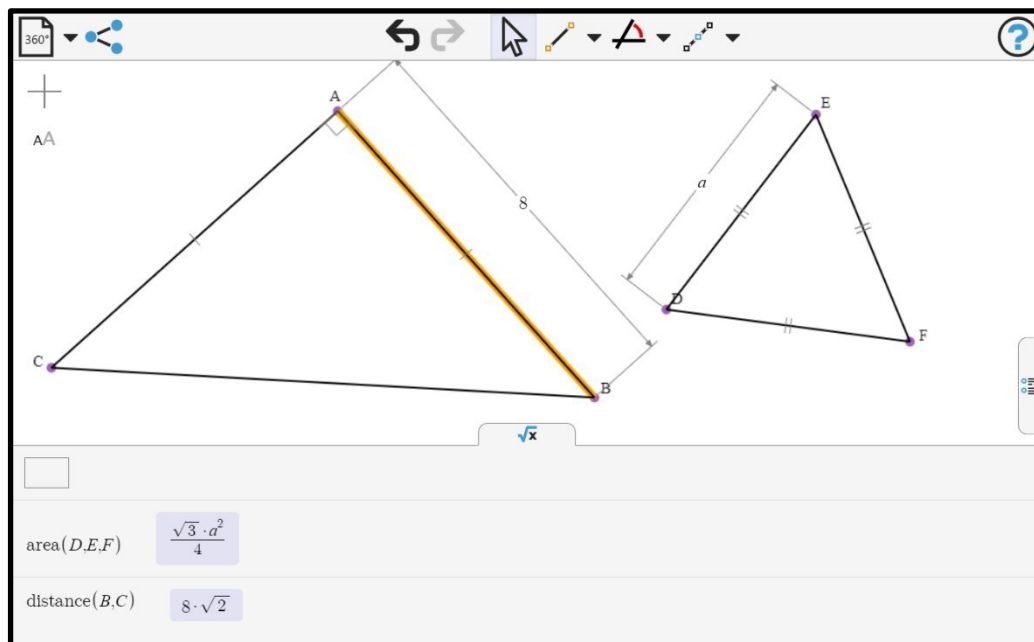
e) Use a aba de cálculo algébrico para calcular a medida da hipotenusa do triângulo ABC. (use o comando **distance(,)** ou o comando **length()**)

f) Adicione a restrição de medida ao lado DE para que ele meça “a”

g) Use a aba de cálculo algébrico para calcular a área de DEF em função de “a”.
 Digite **area(D,E,F)**.

SOLUÇÃO:

Figura 17 - Resultado final da Tarefa 2



Fonte: produzida pelo autor

Clicando nesse link, é possível visualizar e acompanhar o processo de realização da Tarefa 2.

<https://geometryexpressions.com/gxweb/?view=54682658a573329bc254940d97ca913e>

5.3. Tarefa 3

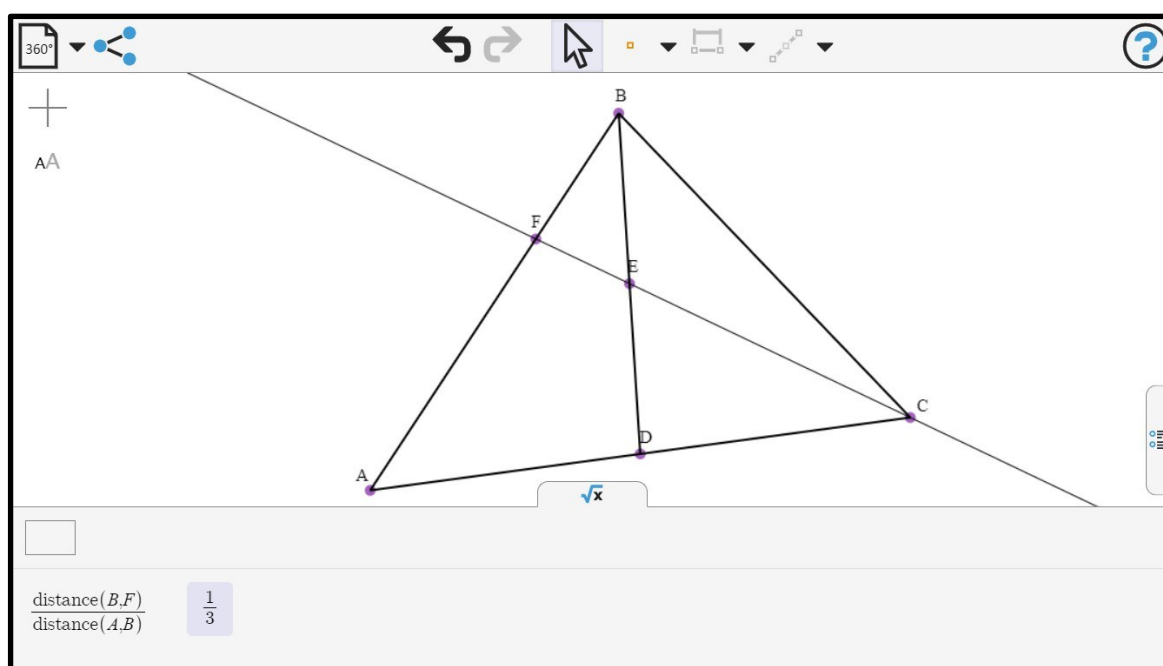
Objetivo Geral	Utilizar as ferramentas do software para investigar propriedades de medidas de segmentos em triângulos.
Objetivos Específicos	• Construir um triângulo e identificar pontos médios em seus lados. • Aplicar conceitos de segmentos proporcionais em triângulos. • Usar ferramentas geométricas para encontrar interseções e explorar a divisão de segmentos. • Determinar e calcular a razão entre segmentos utilizando a aba de cálculo algébrico no software GXWeb.
Conteúdos Abordados	• Geometria plana: segmentos proporcionais, pontos médios e divisão de segmentos em triângulos. • Utilização de software de geometria dinâmica (GXWeb).
Público-alvo	Estudantes do Ensino Médio, preferencialmente do 1º ou 2º ano.
Tempo estimado	1 aula de 50 minutos.
Recursos necessários	Computadores ou tablets com acesso a internet.
Critérios de avaliação	• Capacidade de aplicar corretamente os conceitos geométricos na construção da figura e na determinação da razão entre os segmentos. • Precisão na construção e nos cálculos algébricos realizados. • Participação ativa na tarefa e clareza na interpretação dos resultados.

Construa um triângulo ABC. Marque D como ponto médio de AC e E como ponto médio de BD. Seja F o ponto do lado AB em que a reta CE intersecta o lado AB. Qual a razão entre os segmentos BF e AB?

Construa a figura e use a aba de cálculo algébrico para determinar a razão pedida.

SOLUÇÃO:

Figura 18 - Resultado final da Tarefa 3



Fonte: produzida pelo autor

Clicando nesse link, é possível visualizar e acompanhar o processo de realização da Tarefa 3.

<https://geometryexpressions.com/gxweb/?view=944833cacad5a504b6e224e9c6eb9163>

6. Considerações finais

O presente trabalho de monografia teve como objetivo analisar e comparar três ferramentas de geometria dinâmica: Geogebra, Desmos e GX Web. A análise focou nas principais funcionalidades e fraquezas de cada sistema, buscando determinar qual deles oferece melhores condições para a aplicação prática em exemplos específicos.

Após a análise dos três sistemas de GD abordados neste trabalho, podemos concluir que existem espaços e momentos para a utilização de todos eles, desde que sejam consideradas suas principais funcionalidades e fraquezas. Dentre eles, o GX Web se mostra mais adequado aos assuntos abordados pelos exemplos aqui apresentados.

O Geogebra é amplamente reconhecido por sua versatilidade e riqueza de recursos. Ele combina geometria, álgebra e cálculo em uma única plataforma, permitindo uma abordagem integrada e interativa para a exploração matemática. Entre suas principais funcionalidades, estão a capacidade de criar construções geométricas complexas e a possibilidade de integração com outras áreas da matemática. No entanto, o Geogebra também apresenta algumas fraquezas, como a curva de aprendizado relativamente acentuada e a interface que pode ser sobrecarregada com muitos elementos, o que pode dificultar a utilização para iniciantes.

A ferramenta Desmos se destaca pela sua interface intuitiva e facilidade de uso, o que a torna uma opção acessível para usuários de diferentes níveis de conhecimento. Suas funcionalidades incluem a criação de gráficos dinâmicos e a possibilidade de explorar conceitos matemáticos de maneira visual e interativa. Apesar de suas qualidades, o Desmos tem limitações em termos de capacidade para realizar construções geométricas mais sofisticadas e pode não oferecer a mesma profundidade de ferramentas matemáticas que o Geogebra ou o GX Web.

O GX Web se destacou ao longo do trabalho por sua adequação às necessidades práticas dos exemplos apresentados. Suas principais funcionalidades incluem uma interface amigável e recursos robustos para a construção de figuras geométricas dinâmicas, que se mostraram particularmente úteis para a aplicação dos conceitos discutidos. O GX Web oferece um equilíbrio entre simplicidade e profundidade, permitindo que os usuários realizem construções geométricas de forma eficiente e com precisão. Além disso, o GX Web mostrou-se mais adequado para os exemplos práticos devido à sua capacidade de adaptação a contextos específicos e ao suporte eficaz para a visualização e manipulação de elementos geométricos.

Com base na análise realizada, pude concluir que o GX Web se apresenta como a ferramenta mais adequada para os exemplos práticos abordados neste trabalho. Sua combinação de funcionalidades específicas, interface amigável e suporte cada vez mais eficaz para construções geométricas, permitiram uma aplicação mais fluida e eficiente dos conceitos discutidos.

Embora o Geogebra e o Desmos ofereçam funcionalidades valiosas e distintas, o GX Web se destacou por sua capacidade de atender às necessidades práticas de forma mais direta e funcional. A resolução de alguns exercícios mais tradicionais, que são valiosos e importantes na fixação dos conteúdos tratados, bem como a resolução e alguns exercícios de vestibular, onde o objetivo é o aprofundamento e a discussão de relações mais relevantes, tiveram como grande aliado o GX Web. Esse programa, não apenas apresentou sua versatilidade, em situações que envolviam os anos finais do Ensino Médio, ele oferece um suporte fantástico para o estudo das relações e propriedades dos triângulos e quadriláteros. Assuntos que, tradicionalmente, são estudados, por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Com isso, chegamos a conclusão que reflete a importância de escolher a ferramenta adequada para as necessidades específicas de cada aplicação, evidenciando que a adequação de um sistema de geometria dinâmica pode variar conforme o contexto e os objetivos do usuário.

7. Referências Bibliográficas

ANTUNES, G.; CAMBRAINHA, M. Ensino remoto de Matemática: possibilidades com a plataforma Desmos. *Professor de Matemática Online*, v. 8, n. 4, 2020. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, RJ. Disponível em: https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2021/10/art37_vol8_PMO_SBM_2020.pdf. Acesso em: 2 set. 2024. ISSN 2319-023X.

ANTUNES, G.; CAMBRAINHA, M. Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos: ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem. IV SIMPÓSIO NACIONAL DA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 2020. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020b.

BONGIOVANNI, V. A inserção da geometria dinâmica no ensino de geometria: um olhar didático. *HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática*. Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2016. ISSN 2447-6447.

BRANDÃO, L. O. Algoritmos e fractais com programas de geometria dinâmica. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, v. 49, p. 27-34, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base nacional comum curricular*. Brasília, 2018.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Belo Horizonte. Anais [...]. Belo Horizonte: s.n., 1996. p. 1-13.

MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. 21. ed. Campinas, SP: Papirus, 2013.

SUTHERLAND, I. Sketchpad: a man-machine graphical communication system. Cambridge: University of Cambridge, Computer Laboratory, 2003. Technical Report

UCAM-CL-TR-574. Disponível em: <https://www.cl.cam.ac.uk/techreports/UCAM-CL-TR-574.pdf>. Acesso em: 5 ago. 2024.

SKETCHPAD. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Sketchpad>. Acesso em: 22 jul. 2024.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>. Acesso em: 22 jul. 2024.