UNIRIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT

LEIRES ISABEL OLIVEIRA DE ARAUJO

LOGARITMOS – UM ESTUDO COM ÊNFASE NO PROCESSO DE SUA CRIAÇÃO COM PROPOSIÇÃO DE TAREFAS.

RIO DE JANEIRO

2025

LEIRES ISABEL OLIVEIRA DE ARAUJO

LOGARITMOS – UM ESTUDO COM ÊNFASE NO PROCESSO DE SUA CRIAÇÃO COM PROPOSIÇÃO DE TAREFAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientadoras: Prof.ª. Dra. Aline Caetano da Silva Bernardes e Prof.ª. Dra. Bruna Moustapha Corrêa.

RIO DE JANEIRO

2025

Catalogação informatizada pelo(a) autor(a)

A658 Araujo, Leires Isabel Oliveira de
Logaritmos : Um estudo com ênfase no processo de sua criação com proposição de tarefas. / Leires Isabel Oliveira de Araujo. -- Rio de Janeiro : UNIRIO, 2025.
80 f.

Orientador: Aline Bernardes.
Coorientador: Bruna Moustapha Correa.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2025.

1. Logaritmos. 2. História da matemática. 3. Mathtask.. I. Bernardes, Aline, orient. II. Moustapha Correa, Bruna, coorient. III. Título.

LEIRES ISABEL OLIVEIRA DE ARAUJO

LOGARITMOS – UM ESTUDO COM ÊNFASE NO PROCESSO DE SUA CRIAÇÃO COM PROPOSIÇÃO DE TAREFAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Aline Caetano da Silva Bernardes

Orientadora: Prof. Dra. Aline Bernardes

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Bruna Moustapha Correa

Orientadora: Prof. Dra. Bruna Moustapha Correa

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Michel Cambrainha de Paula

Membro Interno: Prof. Dr. Michel Cambrainha de Paula

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Cleber Haubrichs dos Santos.

Membro Externo: Prof. Dr. Cleber Haubrichs dos Santos

Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ - Campus Nilópolis

À memória de meu marido, José Paulo, aos meus filhos, Paulo José e Helena, e ao meu neto, Miguel.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo dom da vida.

Aos meus pais, meu exemplo de força e determinação.

Aos meus filhos, inspiração para eu seguir sempre em frente.

À minha nora Luana, por me apoiar e ajudar sempre que preciso.

Ao meu genro Eric, por torcer pelo meu sucesso.

Ao meu irmão Prof. Bené, que me inspirou a estudar matemática.

Às minhas irmãs Carmen e Magnólia, que me acolheram muitas vezes em suas casas, quando eu estava muito cansada para dirigir de volta para casa.

Aos queridos amigos da turma PROFMAT, que me apoiaram em momentos difíceis.

Aos queridos professores do PROFMAT, por tanto conhecimento compartilhado, indo além dos conteúdos.

A todos os meus amigos, professores do colégio de aplicação, que me incentivaram a não desistir.

Ao professor Silas, por todo o tempo dedicado às aulas de aritmética.

Agradeço especialmente às minhas orientadoras Aline Bernardes e Bruna Moustpha, pois sem a paciência e o apoio de vocês eu não teria conseguido!

Sou muito grata por tudo o que aprendi nesse programa de Mestrado, na UNIRIO.

"A persistência é o menor caminho do êxito".

(Charles Chaplin)

ARAUJO, Leires Isabel Oliveira de. **Logaritmos – Um estudo com ênfase no processo de sua criação com proposição de tarefas.** 2025. 80f. Dissertação apresentada ao curso de Mestrado profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2025.

RESUMO

O ensino de logaritmos no Ensino Médio frequentemente gera dificuldades e resistência por parte dos alunos, que veem o conteúdo como abstrato e desconectado da realidade. Diante desse cenário, esta pesquisa busca investigar como a história da matemática pode contribuir para tornar o ensino de logaritmos mais significativo e acessível. O objetivo geral do estudo é elaborar um produto educacional voltado para professores, incentivando a exploração do contexto histórico da criação dos logaritmos e propondo tarefas inspiradas nesse processo. A metodologia adotada envolveu a análise de materiais didáticos, a revisão bibliográfica sobre o ensino de logaritmos e história da matemática, e a adaptação do modelo MathTASK, que visa estimular a reflexão docente sobre práticas pedagógicas. Como resultado, foi desenvolvido um conjunto de tarefas que aproximam os estudantes das dificuldades e motivações que levaram à criação dos logaritmos, explorando sua aplicação prática e sua evolução ao longo do tempo. Os produtos finais incluem a elaboração de um livro didático contendo essas tarefas e uma proposta de sequência didática que orienta professores no uso desse material. Como próximos passos, pretende-se aplicar essas atividades com estudantes e professores em formação, além de trabalhar para a publicação do livro, tornando-o acessível a educadores que desejam inovar no ensino de logaritmos.

Palavras-chave: logaritmos; material didático; história da matemática; ensino da matemática; mathtask.

ABSTRACT

The teaching of logarithms in high school often presents challenges and resistance from students, who complain that the content is abstract and disconnected from reality. Given this scenario, this research aims to investigate how the history of mathematics can contribute to making the teaching of logarithms more meaningful and accessible. The main goal is to develop an educational resource for teachers, encouraging the exploration of the historical context behind the creation of logarithms and proposing tasks inspired by this process. The adopted methodology involved the analysis of teaching materials, a literature review on logarithm instruction and the history of mathematics, and the adaptation of the MathTASK model, which aims to encourage teachers' reflection on pedagogical practices. As a result, a set of tasks was developed to bring students closer to the challenges and motivations that led to the creation of logarithms, exploring their practical applications and historical evolution. As a result, this study has developed a didactic book containing these tasks and a proposed teaching sequence to guide educators in using this material. Future steps include the implementation of these activities with students and pre-service teachers, as well as to work towards the publication of the book, making it accessible to educators seeking to innovate in the teaching of logarithms.

Keywords: logarithms; teaching materials; history of mathematics; mathematics education; mathtask.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A proposta para desenvolver esta pesquisa surge a partir de uma inquietação advinda da minha prática como professora do Ensino Médio. Tendo lecionado muitas vezes no 1º ano do Ensino Médio em escolas públicas e particulares, sempre notei que o ensino de logaritmos frequentemente provoca estranheza e resistência nos estudantes. Muitos já chegam nesta etapa com a ideia pré-concebida de que logaritmos é um conteúdo excessivamente complexo, o que gera desinteresse e desmotivação. Essas dificuldades, também relatadas por outros professores, persistem diante das tentativas de seguir abordagens tradicionais, baseadas em definições formais e aplicações técnicas e nesse contexto as perguntas dos estudantes ecoam: "Para que serve isso?", "Por que esse nome?", "Como alguém pensou nisso?". Essas questões revelam uma lacuna entre o ensino dos logaritmos e o significado que os alunos atribuem ao conhecimento matemático.

Para contextualizar o ensino de logaritmos, é comum que os currículos de matemática sigam um percurso específico. Inicialmente, os estudantes são introduzidos às equações exponenciais e à função exponencial, explorando suas propriedades e aplicações. Em seguida, ao resolver equações exponenciais, surge a necessidade de encontrar soluções para casos em que não é possível igualar as bases das potências. É nesse momento que o conceito de logaritmo é apresentado, como uma ferramenta matemática que permite determinar o expoente necessário para obter determinado valor a partir de uma base dada. Na escola municipal que eu leciono, recebemos a edição de 2020 do livro *Matemática em Contextos*, de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana (Dante e Viana, 2020), que mantém a mesma sequência de conteúdo, embora introduza os temas a partir de uma abertura que traz uma imagem atrativa, textos e questões que se relacionam aos conteúdos dos capítulos. No entanto, essa abordagem inicial, ainda que apresente situações e questões propostas que oportunizam momentos de investigação para os estudantes, frequentemente se limita à aplicação de regras e procedimentos algébricos, sem estabelecer uma conexão significativa com o raciocínio dos alunos ou com situações que deem sentido ao conceito. Sendo assim, quando os estudantes são expostos às listas de exercícios com vários problemas de vestibulares, as dificuldades surgem como um obstáculo nesse processo de ensino e aprendizagem.

Para além do livro didático citado, o ensino de logaritmos costuma ser marcado por muitas regras e procedimentos. As propriedades logarítmicas (o logaritmo de um produto, o logaritmo de um quociente, o logaritmo de uma potência, entre outras) costumam encher as páginas das listas de exercícios dos livros didáticos. E os estudantes não veem sentido em ter que fazer tantos exercícios sobre essas propriedades. Nesse sentido, concordo com Van de Walle (2009, p. 31):

> O ensino tradicional, o padrão educativo ainda predominante começa tipicamente com uma explicação de qualquer ideia que esteja na página atual do livro didático, seguida por mostrar aos estudantes como fazer os exercícios indicados [...] esses jovens emergem dessa experiência com uma visão de que a Matemática é uma série de regras arbitrárias, transmitidas pelo professor que por sua vez as obteve de uma fonte muito inteligente.

Por outro lado, a proposta da BNCC para o ensino da Matemática é que se faça de modo a ter sentido para os estudantes com foco na construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em conta as vivências cotidianas dos alunos do Ensino Médio, impactados de muitas maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas experiências do mercado de trabalho, pelos projetos de vida com mais qualidade para seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros (Brasil, 2018, p. 528).

A partir dessa inquietação provocada pelas dificuldades no ensino dos logaritmos e pelas reações negativas dos estudantes, surge a ideia de desenvolver uma abordagem alternativa para o ensino desse conteúdo. Em um determinado ano, quis fazer diferente e decidi abordar o tema seguindo uma proposta de atividade adaptada da história sobre a construção dos logaritmos, por John Napier e Jost Bürgi, apresentada por Ishihara e Santos (2010) no material didático de matemática do 1º ano da Rede Salesiana de Escolas. Esse livro, apresenta a ordem dos conteúdos de um jeito diferente, ou seja, logo depois do capítulo sobre funções do segundo grau, está o capítulo das progressões aritméticas e geométricas e a seguir o capítulo com o nome *Expoentes e logaritmos*, antes de abordar as equações exponenciais. Isso chamou a minha atenção e eu pensei... por que não?! Foi então que apresentei a tabela com as progressões aritmética e geométrica de base 2, fiz uma abordagem a partir disso, relacionando mesmo que de forma modesta, a história com o ensino dos logaritmos. A diferença significativa nas reações dos estudantes foi notável. Eles ficaram entusiasmados ao perceber que com aquela simples tabela que relacionava as progressões aritmética e geométrica de base 2, era possível simplificar os cálculos, transformando multiplicações em adições e divisões em subtrações.

A partir dessa experiência em que os estudantes reagiram de forma mais positiva à apresentação dos logaritmos, surgiu a ideia de estudar como os logaritmos surgiram e quais foram as motivações para a criação desse conceito. E, com esse estudo, propor tarefas para o ensino de logaritmos inspirada na história de como esse conceito surgiu e se modificou ao longo do tempo.

Assim, no lugar de optar pelo uso de tecnologias ou de explorar aplicações atuais dos logaritmos, por que não recorrer à história da matemática?

Conhecer um pouco do processo histórico que levou à invenção dos logaritmos pode fornecer um contexto mais significativo, aproximando o conteúdo da experiência dos estudantes e revelando o caráter humano da construção do conhecimento matemático. Concordamos com Roque (2012) que a história da matemática pode fornecer um contexto ao ensino de matemática em geral e, em particular, ao ensino dos logaritmos. Ao adotar uma abordagem que utiliza a história ou se inspira nela, o ensino de logaritmos se torna uma oportunidade para os estudantes perceberem que a matemática não é um corpo de verdades prontas, mas um campo dinâmico, construído ao longo do tempo por pessoas enfrentando desafios concretos.

A história dos logaritmos remonta ao trabalho do matemático escocês John Napier e do relojoeiro suíço Jost Bürgi que, no início do século XVII, desenvolveram a ideia como uma ferramenta para simplificar cálculos astronômicos e científicos complexos. O desenvolvimento subsequente desse conceito, incluindo a contribuição de matemáticos como Henry Briggs e a aplicação em diferentes áreas do conhecimento, ilustra como as ferramentas matemáticas são moldadas por necessidades práticas e avanços teóricos.

Diante da inquietação e das motivações anteriores, emerge a seguinte questão de pesquisa: **como a história da matemática pode contribuir para o ensino de logaritmos de modo que o seu estudo faça mais sentido para os estudantes?**

Essa pergunta norteia a reflexão sobre como a história da matemática, longe de ser um mero recurso motivacional ou de se restringir a curiosidades biográficas, pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem. A proposta é utilizar a história como um recurso didático que promove compreensão conceitual, estimula o pensamento crítico e conecta os estudantes com o desenvolvimento da matemática ao longo do tempo. Essa integração entre história da matemática e ensino da matemática está em pauta de discussões pelos pesquisadores dessa área de conhecimento. O Coletivo de História no Ensino de Matemática (CHEMat) divulgou os resultados parciais de pesquisas feitas por eles, nos livros didáticos que são adotados pelas escolas públicas, através do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Ao analisar a natureza das inserções de história da matemática (HdM), nesses livros, dentre algumas conclusões parciais está que "*Integrar HdM ao ensino poderia demandar uma reformulação na exposição dos conteúdos, na ressignificação dos conceitos matemáticos, na natureza dos exercícios e, em última instância,* *no próprio currículo de matemática*" (Bernardes; Haubrichs; Amadeo; 2022, p. 83). No entanto, acredito que isso pode valer a pena e digo isso, por experiência própria, conforme mencionei anteriormente.

Além do potencial que a história da matemática pode acrescentar ao estudo da matemática, vale ressaltar, também a importância desse tópico para o desenvolvimento profissional de professores, sejam eles professores em formação inicial ou continuada.

Eu, por exemplo, sempre gostei de história, mas infelizmente não constava a disciplina História da matemática, na grade curricular do meu curso de Licenciatura em matemática da Universidade Federal Fluminense, no período entre 1988 e 1993. Eu senti falta disso quando comecei atuar em sala de aula, como professora no ensino fundamental e médio, pois embora tenha recebido uma ótima formação técnica em termos de conteúdo, a formação na parte pedagógica não se deu da mesma forma. Esse despreparo, eu senti na pele quando precisei assumir uma turma pela primeira vez. Acredito que seja essa a razão de sentir o eco do discurso do Nóvoa, bater forte na minha mente, quando ele defende que *"considera necessário reforçar o papel dos docentes na sua capacidade de decisão e de intervenção também nos programas de formação"* (Nóvoa, 2013). Além disso, nesse mesmo artigo ele cita uma estratégia adotada na área da medicina, como um exemplo que deveria ser seguido pela área da educação.

> Nos últimos anos, na área da Medicina, foram desenvolvidos centros acadêmicos de Medicina que juntam, numa mesma instituição, três dimensões fundamentais: a prestação de serviços de saúde, a formação dos médicos e a pesquisa científica. Julgo que é um excelente exemplo para o tipo de organização que precisamos criar na nossa área: centros acadêmicos de Educação que juntem, no mesmo espaço, a escola, a formação de professores e a pesquisa. O segundo aspecto prende- se à ideia da docência como coletivo no plano do conhecimento e da ética. Não há respostas feitas para o conjunto de dilemas que os professores são chamados a resolver numa escola marcada pela diferença cultural e pelo conflito de valores. É importante assumir uma ética profissional que se constrói no diálogo com os colegas. (Nóvoa, 2013)

Com isso em mente, quando numa palestra da professora Bruna Moustapha, sobre sua tese de doutorado, eu ouvi sobre o programa MathTASK. Senti a necessidade de aprender mais sobre o assunto e acredito que a estrutura do programa e ao que se propõe, dialoga com as ideias do Nóvoa, no que se refere à formação de professores.

Encontramos nas mathtasks um potencial para dar conta dessa preparação profissional que muitas vezes carece aos professores. As mathtasks são tarefas especialmente desenvolvidas para levar professores em formação à reflexão. Em geral elas partem de um problema matemático apresentado aos estudantes pelo professor, o que gera uma situação vivenciada pelos estudantes a ser analisada à luz de alguns questionamentos. Tais tarefas buscam mobilizar experiências da prática docente em atividades de formação. Por serem disparadas por um problema matemático ou algo similar - como, por exemplo, a apresentação de uma proposta de abordagem de determinado conteúdo - convidam os participantes a se engajarem na questão matemática. Por outro lado, ao questionarem, por exemplo, como o participante lidaria com a situação descrita, colocam-no na posição de professor. Esse convite estimula o professor em formação a desenvolver estratégias para quando enfrentar algo similar na sua prática docente.

O objetivo geral da pesquisa é **elaborar um produto educacional voltado para professores de matemática do Ensino Médio sobre logaritmos**, que encoraje os professores a conhecer um pouco do processo da criação desse conceito e se aventure em propor tarefas que utilizam a história ou se inspiram nela. Para atingir esse objetivo geral, propõem-se os seguintes objetivos específicos:

- **Problematizar** o modo como os logaritmos costumam ser ensinados, a partir da elaboração de uma *mathtask* que estimule reflexões críticas sobre práticas pedagógicas tradicionais;
- **Elaborar um resumo histórico** sobre a contribuição de John Napier para a invenção dos logaritmos, contextualizando suas motivações e o impacto de suas ideias;
- **Desenvolver tarefas** inspiradas (ou não) em contextos históricos, visando ao estudo de logaritmos com estudantes do Ensino Médio;
- **Apresentar uma sugestão de sequência didática**, integrando as tarefas propostas e oferecendo subsídios para que professores possam adaptar e criar suas próprias estratégias.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: o próximo capítulo discute o papel da história da matemática no ensino, o potencial e os desafios de se fazer essa integração. O capítulo 3 descreve o conceito de *mathtask* e sua aplicação na formação de professores. O capítulo 4 apresenta a organização do produto educacional da pesquisa. O capítulo 5 reflete sobre os resultados obtidos e as contribuições da pesquisa. O livro é apresentado no Apêndice A.

2. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO: POTENCIAIS E DESAFIOS

No início da minha carreira como professora, eu observava que as informações históricas apareciam nas páginas finais dos capítulos dos livros didáticos, destacando alguns nomes de matemáticos, informações biográficas e curiosidades sobre a vida desses "ilustres matemáticos". Como estavam nas páginas finais dos capítulos, dificilmente sobrava tempo para explorar essas informações nas aulas. Nos dias de hoje, os livros didáticos trazem mais informações históricas. No entanto, a forma com que elas são apresentadas não mudou muito desde então.

Amadeo, Bernardes e Teixeira (2023) apresentam resultados parciais de uma pesquisa realizada pelo CHEMat (Coletivo de História no Ensino de Matemática) nos livros didáticos do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2018 e de 2020, incluindo coleções de livros do Ensino Médio e dos anos finais do Ensino Fundamental. Eles apresentam informações sobre o modo como a história da matemática é abordada pelos livros didáticos de matemática. Os resultados indicam que, embora tenha havido um aumento no número de informações históricas inseridas nos livros, em comparação com outras pesquisas, a maioria delas ainda tem caráter superficial, sendo usadas mais para uma formação cultural geral do que para aprofundar a compreensão conceitual dos estudantes.

São inúmeros os obstáculos no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, mas uma queixa recorrente por parte de alunos e também de alguns professores é que certos conteúdos não deveriam ser ensinados na escola à nível fundamental ou médio, por se tratarem de temas muito abstratos e que foge ao nível de compreensão dos alunos em seus respectivos anos de escolaridade. No entanto, os professores concordam que o ensino de logaritmos, precisa acontecer, ainda no ensino básico, devido à aplicabilidade em outras disciplinas, inclusive. Roque e Pitombeira (2012) apontam que, ao pedir uma matemática mais "concreta", os alunos podem estar expressando o desejo de entender os conceitos de forma contextualizada, e não apenas em termos de aplicações práticas imediatas;

> Acreditamos, contudo, que quando os alunos pedem para que a Matemática se torne mais "concreta", eles podem não querer dizer, somente, que desejam ver este conhecimento aplicado às necessidades práticas. Talvez eles demandem compreender seus conceitos em relação com algo que lhes dê sentido. Este pode ser o papel mais importante da história da matemática para o ensino. (Roque & Pitombeira, 2012, p. 7)

Concordando com Roque e com Pitombeira de que a história pode ter um papel de trazer um sentido para aprendizagem dos conceitos, creio que conhecer a história e o contexto histórico no qual os logaritmos foram introduzidos pode contribuir com uma nova maneira de abordar o tema. Acredito também que, ao fazer essa conexão entre o passado e o presente, os alunos estarão situados e poderão reconhecer não só a relevância, mas também a aplicabilidade, dando mais sentido ao estudo dos logaritmos.

No entanto, a perspectiva com que a história é utilizada no ensino pode surtir diferentes resultados com os estudantes. Sobre isso, Saito (2013) enfatiza a importância de integrar a história da matemática no ensino, não apenas como um repositório de informações, mas como um recurso que levanta questões epistemológicas relevantes. O autor aponta que grande parte do material disponível para professores brasileiros está desatualizada, baseada em narrativas lineares e progressivas. Essas narrativas tendem a privilegiar aspectos internos da matemática, encadeando descobertas de forma linear e progressiva, muitas vezes iluminadas pela matemática contemporânea, o que pode levar a uma visão anacrônica do desenvolvimento histórico. O grupo HEEMa (História e Epistemologia na Educação Matemática), do qual o pesquisador Saito faz parte, propõe analisar os objetos matemáticos de forma epistemologicamente contextualizada, focando nos processos que conduzem à construção do conhecimento, como representação, visualização, abstração e demonstração. Essa abordagem busca compreender não apenas a natureza do conhecimento matemático, mas também os meios de sua apropriação e as diferentes formas de sua difusão e transmissão. O objetivo não é reproduzir o processo histórico, mas questões articulares emergentes da construção do conhecimento de forma contextualizada, com propostas didático-pedagógicas na educação matemática.

Vejo nessa abordagem uma grande contribuição para o ensino, pois através dela o aluno pode ter contato com as questões e dificuldades epistemológicas que atravessaram a criação e o desenvolvimento de um determinado conceito ou de um objeto matemático. Isto possibilita que o aluno compare as suas dúvidas com as questões que os matemáticos tinham na época de desenvolvimento do conceito, que podem ser (ou não) os mesmos questionamentos presentes nas aulas dos dias atuais. Assim, temos nas fontes históricas um meio de inserir a história nas aulas de Matemática, que objetiva comprovar os desenvolvimentos matemáticos da sociedade antiga à que pertence. Desta forma, o aluno poderá visualizar como o conhecimento matemático era produzido na época desta fonte e comparar com a forma atual apresentada pelo professor em sala de aula.

Neste sentido, utilizar fontes históricas para o ensino significa propiciar ao aluno um retorno ao passado, de forma que ele possa obter um conhecimento adicional sobre o conteúdo estudado, vislumbrando a motivação do discente para estudar os conceitos apresentados e a oportunidade de comparação entre os métodos antigo e atual. O uso de textos históricos na sala de aula pode gerar a apreensão de conceitos matemáticos, por meio de atividades, que proporcionem aos alunos meios mais valiosos para a aprendizagem. Como por exemplo, para conhecer a relação sociocultural, política, econômica, filosófica de um determinado período, ou mesmo aperfeiçoar o pensamento matemático através das reflexões.

Uma discussão que considerei bastante pertinente para o trabalho desenvolvido nesta pesquisa está nos temas motivacional, curricular e cultural, introduzidos por Fried (2014), que dizem respeito a como a história é utilizada no ensino. O tema motivacional contempla as iniciativas de uso da história no ensino com o objetivo de tornar o ensino mais envolvente, humanizado e menos intimidador, ajudando a reduzir barreiras emocionais dos alunos em relação à disciplina. No entanto, essa abordagem muitas vezes reduz a história a um mero recurso para prender a atenção dos estudantes, sem aprofundar seu valor como conhecimento. Embora contar histórias interessantes possa tornar as aulas mais dinâmicas, há o risco de a história ser tratada apenas como um artifício pedagógico, desconsiderando sua identidade como um campo de conhecimento próprio. Desse modo, o tema motivacional não faz jus nem à matemática – que precisa de um tempero para ficar mais atraente – nem à própria história – que tem o papel de "colorir" as aulas. As informações históricas que aparecem nos livros didáticos e que se limitam a apresentar anedotas, curiosidades, notas biográficas sobre os matemáticos são exemplos do que Fried considera como tema motivacional.

O tema curricular considera que a matemática do passado pode ser utilizada no ensino atual, mesmo que algumas abordagens históricas estejam incompletas. Percebe-se uma tentativa "de ver as ideias matemáticas na luz da história" (Fried, 2014, p. 14). Conceitos desenvolvidos por matemáticos como Euclides, por exemplo, continuam sendo fundamentais para a geometria moderna. Muitas vezes, esse tema é explorado por meio de problemas históricos que ajudam os alunos a desenvolver habilidades matemáticas, como o problema da duplicação do cubo. Em geral, recorre-se à história a partir de temas do currículo atual e a matemática do passado é compreendida a partir das notações e ideias atuais, o que torna as iniciativas neste tema anacrônicas. Ainda assim, Fried reconhece que as iniciativas de uso da história no ensino, neste tema, devem ser levadas a sério.

Por fim, o tema cultural enfatiza que a matemática e a cultura são inseparáveis, pois a matemática é um empreendimento humano, desenvolvido em diferentes contextos históricos e culturais. A etnomatemática pode ser vista como um exemplo neste tema, uma vez que reconhece as contribuições de diversas sociedades para a construção do conhecimento matemático (Fried, 2014). Iniciativas neste tema ajudam os estudantes a perceberem a diversidade de formas de pensar e resolver problemas ao longo do tempo. Nesse sentido, o multiculturalismo na matemática valoriza a contribuição de diferentes povos, promovendo uma visão mais ampla e contextualizada da disciplina. Reconhecer as diferenças entre os modos de se fazer matemática e de se produzir conhecimento pode ajudar os estudantes a ter uma outra visão da matemática.

Todos os estudos realizados nesta parte contribuíram para o desenvolvimento do produto educacional, o qual possui uma abordagem que se diferencia da que é proposta pelos livros didáticos. O tema logaritmos é abordado sob uma perspectiva histórica, tendo em vista o modo como Napier pensou inicialmente, para inventar os logaritmos. A proposta ultrapassa o tema motivacional, ou seja, vai muito além de curiosidades e anedotas. Apesar de termos um tema do currículo atual como ponto de partida, buscamos nos aproximar do tema cultural, explorando as diferenças entre o modo como Napier concebia os logaritmos, bem como as motivações que ele e outros matemáticos tiveram para criar essa ferramenta.

A integração entre a história e o ensino da matemática não é uma tarefa simples, mas é uma proposta que carrega um enorme potencial para transformar a forma como a matemática é ensinada e aprendida. Esse movimento exige não apenas uma revisão das práticas de ensino, mas também uma mudança na forma como concebemos o próprio conhecimento matemático: não como um corpo de verdades prontas, mas como um campo dinâmico, em constante construção e reconstrução. Nesse sentido, a história da matemática não é apenas um recurso didático; é um convite à reflexão sobre o que significa aprender e ensinar matemática.

3. MATHTASKS: PRINCÍPIOS, OBJETIVOS, ESTRUTURA E FORMATO

Inspiradas na vontade de modificar o modo com os logaritmos são ensinados no Ensino Médio, consideramos como este conteúdo pode ser abordado na formação de professores. No lugar de dizer como fazer, julgamos ser mais interessante fazer os professores em formação (inicial ou continuada) refletirem sobre o modo como aprenderam e/ou ensinam os logaritmos. Encontramos, então, o programa MathTASK.

MathTASK é um programa de pesquisa e desenvolvimento profissional que une pesquisadores, formadores de professores de matemática, docentes do Reino Unido, Grécia e também do Brasil, tendo como objetivo auxiliar professores em formação inicial ou continuada a lidar com situações desafiadoras que ocorrem em suas salas de aula.

Como estrutura central do MathTASK, está a afirmação de que, partindo de elementos específicos de matemática presentes em situações de sala de aula, prováveis de ocorrer na prática real, podem emergir abordagens pedagogicamente consistentes e apropriadas sobre o ensino e a aprendizagem dessa disciplina e que são sustentadas por pesquisa. (Biza; Kayali; Corrêa; Nardi; Thoma, 2021, p. 3). Tais abordagens contextualizadas e desafiadoras, são apresentadas no formato de tarefas (mathtasks).

No contexto de formação de professores, as mathtasks são empregadas como ferramentas para identificar e explorar questões matemáticas, didáticas e pedagogicamente específicas sobre o conhecimento do professor. O envolvimento com essas tarefas pode funcionar como uma fase preliminar, preparatória, atenuando a transição de professor estagiário para professor regente de turma, antes de sua exposição a situações reais de sala de aula (Biza, 2007).

Dessa forma, fica claro o potencial de tais tarefas no contexto da formação de professores. A seguir descrevemos um pouco mais sobre as características de uma mathtask. Cumpre salientar também que a nossa proposta ultrapassa a proposta das mathtasks na medida em que, além de pensar uma formação que faça os professores refletirem muito mais do que absorverem métodos para o ensino, considera a incorporação de elementos históricos em tais formações.

3.1 Princípios que sustentam as mathtasks

As ideias que são utilizadas para elaborar uma mathtask, podem surgir de situações de sala de aula, que servem como gatilhos para abordar ou identificar incidentes críticos. (cf. Erens; Eichler, 2013; Dreher; Nowinscka; Kuntze, 2013, apud Biza,, et al. 2013,p.6) ou de diálogos fictícios entre professores e alunos (cf. Zazkis, Sinclair e Liljedahl, 2013, apud Biza, et al. 2013,p.6). Sobre os incidentes críticos, acredita-se que as análises feitas a partir dessas situações podem contribuir de forma importante para a preparação de futuros professores e já foram muito usados em programas de formação (cf. Goodell, 2006; Hole; Mcentee, 1999; Portari; Psycharis, 2018; Skott, 2001; Tripp, 2012 apud Biza, et al. 2013, p.6).

No contexto do MathTASK, um incidente crítico é um evento que ocorre durante a aula, de tal modo que o professor precisa decidir sobre como e qual seria a melhor forma de reação diante da situação apresentada. A escolha desse incidente, pode se basear em questões identificadas como fundamentais pela pesquisa e por experiências obtidas na prática docente, promovendo reflexões e podendo suscitar meta-discussões mais gerais sobre o ensino da matemática.

Um objetivo fundamental das situações de ensino apresentadas numa tarefa bem estruturada é gerar momentos essenciais para a expansão do pensamento matemático pelos professores participantes. Momentos que se assemelham ao que Leatham, Peterson, Stockero e Van Zoest (2015, p. 90 apud Biza, et al. 92013, p. 8) definem como *oportunidades pedagógicas matematicamente significativas para desenvolver pensamento discente (MOSTs – Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to build on Student Thinking).* São aqueles instantes da aula, em que o aluno faz uma pergunta ou uma observação e o professor identifica nesse pensamento do aprendiz, potencial para gerar reflexões e discussões sobre ideias matemáticas importantes e que contribuem significativamente para o processo de ensino e aprendizagem.

Para desenhar as tarefas no formato de mathtasks são considerados os seguintes princípios (cf. Biza, et.al, 2021, p.9):

- O conteúdo matemático da tarefa contém um tema ou questão conhecidos por sua particularidade, isto é, que gera dificuldades para os alunos a partir de informações oriundas da literatura e/ou da experiência docente.
- A resposta do estudante espelha a particularidade da questão, a falta dela, ou ainda, as suas dificuldades e com isso o professor tem a oportunidade refletir sobre como ajudar o estudante a atingir os objetivos e a superar as dificuldades.
- O enfoque pedagógico do professor abrange questões matemáticas, pedagógicas e epistemológicas conhecidas por suas particularidades, e sutilezas, que necessitam de atenção especial dos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, por serem desafiadoras para os professores.

- O conteúdo matemático e as respostas de estudantes/professores geram diálogos e através do discurso do professor, tornam-se evidentes, aspectos importantes sobre seu conhecimento, suas crenças e suas práticas matemáticas, pedagógicas e epistemológicas.
- O conteúdo matemático, as ações e entrosamento dos estudantes/professores são contextualizadas no currículo e no âmbito educacional familiar. Por exemplo, informações contextuais sobre o nível da turma e do estudante, permite ao docente situar-se como professor desses alunos especificamente. Isso pode interferir em suas ações ou tomadas de decisões inerentes a sua prática durante a aula com essa turma.

3.2 Objetivos com o uso de mathtasks

A utilização de mathtasks no contexto da formação docente tem alguns objetivos que merecem ser destacados pelo seu potencial no desenvolvimento profissional do professor em formação. São eles:

- localizar e reconhecer as contribuições dos estudantes durante a aula;
- elaborar e analisar as reações dos estudantes sobre uma situação de ensino;
- avaliar abordagens pedagógicas adotadas por outros professores, sobre determinado tema;
- justapor e avaliar soluções propostas por estudantes, caso haja mais de uma solução;
- apreciar o valor e os desafios que surgem de diferentes soluções;
- apreciar o valor das ferramentas tecnológicas e os desafios gerados com o seu uso;
- identificar erros matemáticos dos estudantes;
- contribuir com o ensino e a aprendizagem de tópicos matemáticos específicos;
- apreciar as diferentes características de uma atividade matemática, como visualização, tipo de raciocínio envolvido e demonstração;
- analisar as potencialidades das tecnologias e os desafios gerados por seu uso no ensino de algumas atividades ou tópicos matemáticos específicos.

3.3 Estrutura e formato de mathtasks

Atualmente, o formato de uma mathtask se apresenta com a escrita de uma introdução, em que o contexto e o problema matemático são apresentados e termina com uma sequência de perguntas, sobre o que foi desenvolvido. A estrutura de uma mathtask, (cf. Biza et al, 2021) se apresenta da seguinte forma:

- Descrição do contexto da sala de aula (nível da turma, ambiente da aula, etc.);
- Apresentação de um problema matemático;
- Segue-se uma situação de sala de aula na forma de:
    - uma resposta de estudante;
    - mais de uma resposta de estudante;
    - resposta(s) de estudante(s) e reação de (ou diálogo com) um professor;
    - resposta(s) de estudante(s) e reação de (ou diálogo com) um professor, seguida por diálogo entre professores.
- Uma lista de perguntas ou comandos que promovam engajamento e reflexão sobre a situação proposta. Por exemplo:
    - resolva o problema;
    - qual é objetivo de usar este problema matemático em aula?
    - quais são as questões matemáticas ou pedagógicas, relacionadas nessa situação, que suscitam maior cuidado e atenção?
    - como você reagiria, em situação semelhante, se fosse o professor dessa turma?

De modo geral, as mathtasks têm o potencial de mobilizar experiências da prática em atividades de formação. Como descrevemos, a estrutura e os objetivos de utilizar tais tarefas são fundamentados em princípios teóricos oriundos de pesquisas em Educação Matemática, o que enaltece o seu potencial.

4. APRESENTAÇÃO DO LIVRO

Como produto educacional atrelado a esta pesquisa optamos por organizar um livro inspirado pelas mathtasks e que utiliza da história da matemática.

O livro começa com uma provocação no formato de uma mathtask, apresenta um resumo histórico de logaritmos, descreve tarefas a serem utilizadas com estudantes inspiradas na história e também na prática docente e finaliza com uma sugestão de sequência didática para inspirar os professores a criarem as suas próprias.

Para início de conversa propomos uma tarefa que foi criada para fomentar discussões sobre como e por que ensinar logaritmos no Ensino Médio. Em geral, as propostas de aula para esse conteúdo costumam mostrar a utilidade dos logaritmos, mas elas não explicam o contexto e as razões que motivaram a sua criação. Isso acaba frustrando alunos que buscam entender o propósito do tema, além de reforçar a ideia de que é necessário ser "genial" para aprender matemática. A tarefa visa, portanto, levar os professores a problematizarem o modo como os logaritmos costumam ser ensinados levando o professor/leitor a refletir sobre.

A alternativa que defendemos no livro é através da exploração do contexto histórico da criação dos logaritmos, esclarecendo questões como "Por que se chama logaritmo?", "Quem os criou?" , "Como surgiram?" e "Por que alguém pensaria nisso?", pois acreditamos que isso ajuda a "humanizar" a matemática, mostrando que, mais do que genialidade, é preciso perseverança para criar e aprender conceitos matemáticos. Apesar de um pouco difícil, acreditamos que o estudo da história dos logaritmos oferece uma abordagem mais acessível e motivadora, destacando as necessidades concretas que impulsionaram sua criação e as dificuldades enfrentadas pelos estudiosos da época.

A fim de convidar professoras e professores a conhecer um pouco do desenvolvimento histórico dos logaritmos, elaboramos um resumo histórico com foco nas contribuições do escocês John Napier. Encontramos algumas fontes secundárias sobre a história dos logaritmos e achamos os textos difíceis de compreender, com uma linguagem um pouco técnica. Então, procuramos elaborar um resumo acessível aos professores. Para isso, estudamos inicialmente o artigo de Gomes e Pavanelo (2022) e nos apoiamos bastante no texto das pesquisadoras Kathleen Clark e Clemency Montelle (2012), publicado na revista *Revue d'Histoire des Mathématiques*, para descrever a prática de John Napier com os logaritmos e como ele os concebia.

Foi importante consultar as publicações originais de Napier. Napier trabalhou durante vinte anos, tendo desenvolvido um método de simplificar os cálculos enfadonhos e difíceis. Ele organizou um conjunto de tabelas e publicou seu tratado em 1614 com o título *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Uma descrição da maravilhosa tabela de logaritmos), que ficou conhecido no meio acadêmico como *Descriptio*. Um segundo tratado, contendo desdobramento da teoria e explicando como as tabelas foram construídas, foi postumamente publicado com a colaboração do seu filho Robert Napier em 1620, com o título *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (A construção da maravilhosa tabela de logaritmos), por sua vez, conhecido como *Constructio* (Clark e Montelle, 2012).

Como as publicações originais foram escritas em latim, consultamos traduções dessas obras para o inglês. As informações sobre a biografia de John Napier constam nos textos de Edward Wright (2010) e de William Rae MacDonald (2019). Wright foi um matemático formado em Cambridge, nomeado como hidrógrafo para a empresa Companhia das Índias Orientais, em 1614 (mesmo ano da primeira publicação, em Latim, do livro *Descriptio* de Napier). Ele fez a primeira tradução do latim para o inglês do *Descriptio*, publicada em Londres, em 1616. A edição que utilizamos é de 2010, da editora Renascent Books. Já Macdonald, matemático e bibliógrafo escocês, fez a tradução do latim para o inglês do *Constructio*, publicada em 1888. A edição que utilizamos é de 2019, da editora Alpha Editions.

Optamos por explorar as ideias de Napier, mesmo sabendo que Jost Bürgi (1552- 1632) tenha simultaneamente criado os logaritmos. Os registros do trabalho de Napier, desde o início, estiveram acessíveis com a possibilidade de pesquisa em seus textos originais, traduzidos para o Inglês pouco tempo depois de suas publicações. Possivelmente por isso, tiveram um alcance maior e se tornaram rapidamente conhecidos pelos matemáticos e astrônomos da época. Jost Bürgi, teve seu trabalho publicado em Praga no ano de 1620, com o título *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen,* em Alemão antigo, sendo seu único trabalho sobrevivente, disponível para estudiosos da atualidade. Acredita-se que seus escritos não foram amplamente estudados, pois a publicação dos trabalhos de Bürgi ocorreu seis anos depois da publicação do *Descriptio*. Clark e Montelle (2012) observam que essa obra tem sido negligenciada pela historiografia da matemática.

Da nossa parte, as informações históricas apresentadas no livro didático (por exemplo, veja Ishiara e Santos, 2009, p.229 e 230) nos motivou a buscar mais informações sobre o personagem John Napier e a sua prática com os logaritmos.

Assim, com base nas fontes históricas acima, apresentamos no livrinho algumas informações biográficas de Napier, como ele concebeu os logaritmos e como ele construiu suas tabelas de logaritmos, utilizando senos, tangentes e secantes.

Inspiradas na história dos logaritmos descrita, desenvolvemos 5 tarefas a serem trabalhadas com estudantes do 1o ano do Ensino Médio. Para cada uma delas listamos vantagens e desvantagens de seu uso. Nosso objetivo com isso é que os professores tomem consciência do que está sendo trabalhado em cada tarefa que é aplicada com seus estudantes. Além disso, isso também fundamenta a nossa proposta de sequência didática apresentada a seguir.

A primeira tarefa *"Relacionando Progressões Aritméticas e Geométricas"* oferece a oportunidade de utilizar o conhecimento sobre potências e suas propriedades como recurso para agilizar cálculos, além de preparar o terreno para a introdução do conceito de logaritmo de forma mais natural. No entanto, uma possível desvantagem é a resistência inicial dos alunos. Como a atividade propõe uma abordagem investigativa, alguns estudantes podem se sentir inseguros ao lidar com padrões numéricos sem uma explicação formal prévia. Isso pode levar a dificuldades na interpretação da tabela e na conexão entre progressões e as propriedades das potências.

A segunda tarefa *"Equações Exponenciais"* oferece aos estudantes a oportunidade de analisar uma tabela de potências de base 2 e utilizá-la para resolver equações exponenciais. Em seguida, será feita uma exploração mais aprofundada por meio do uso de planilhas eletrônicas para obter aproximações numéricas de expoentes que não sejam inteiros. A atividade permitirá que os alunos desenvolvam uma compreensão mais intuitiva sobre a ideia de logaritmo como ferramenta matemática. Ainda que surjam dificuldades, acreditamos que a estratégia de explorar equações exponenciais por meio da tabela e da planilha eletrônica é excelente para incentivar a intuição e o senso numérico dos estudantes. No entanto, nessa tarefa os estudantes podem ter dificuldades com expoentes não inteiros e caso necessário, o professor pode ampliar a tabela e explorar mais valores intermediários.

A terceira tarefa *"Conhecendo um pouco como Napier utilizou as tabelas de P.A e de P.G, para criar os logaritmos"* foi desenvolvida para proporcionar aos estudantes uma experiência histórica. Além de refletir sobre a necessidade de formar sequências de progressões geométricas de modo a reduzir as lacunas entre os seus termos, eles têm a oportunidade de vislumbrar as dificuldades que Napier teve ao criar as tabelas.

A quarta tarefa*" Encontrando os logaritmos nas tabelas de Napier"*, assim como a terceira, foi desenvolvida para aproximar o estudante do contexto histórico em que os logaritmos foram criados por Napier, a partir do contato com uma fonte histórica. Desse modo, eles têm a oportunidade de analisar uma página do livro *Descriptio* de Napier, ou seja, de ter contato com uma fonte histórica primária (ainda que seja uma tradução). Porém, dificuldades podem surgir por conta da trigonometria e da representação em minutos de um ângulo. Mas, é uma possibilidade de mostrar que os conceitos surgem de forma conectada, tanto a outros conceitos, como também às demandas de uma sociedade (facilitar a vida dos astrônomos com as contas tediosas, por exemplo).

A quinta tarefa *"Explorando como os logaritmos eram utilizados por Napier"* proporciona aos estudantes a possibilidade de explorar como Napier utilizava os logaritmos para resolver problemas, simplificando os cálculos, além de criar a chance para se colocar no contexto em que os logaritmos foram criados. Todavia, limitações podem surgir com a proposta de se fazer um cálculo envolvendo números grandes. No entanto, a tarefa é uma provocação para que possam experimentar as dificuldades que os estudiosos dos séculos XVI e XVII vivenciavam.

Por fim, apresentamos ***uma*** sugestão de sequência didática à luz das tarefas apresentadas. A ideia, entretanto, é que essa seja apenas uma sugestão e que o professor/leitor fique à vontade para criar a sua própria sequência didática, criando, se necessário, outras tarefas adaptadas para o seu contexto escolar.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa nasceu de uma inquietação comum entre professores de matemática: como tornar o ensino de logaritmos mais acessível e significativo para os estudantes? A resistência ao tema, muitas vezes vista em sala de aula, não é apenas um reflexo da complexidade do conteúdo, mas também da forma como ele é apresentado – distante de um contexto que faça sentido para os alunos. Assim, buscamos construir uma abordagem que conectasse os logaritmos à sua origem histórica, revelando não apenas sua aplicabilidade, mas também as razões que motivaram sua criação.

Ao longo do trabalho, desenvolvemos um conjunto de tarefas que levam os estudantes a explorar os logaritmos de uma maneira diferente, aproximando-se das dificuldades e descobertas dos matemáticos dos séculos XVI e XVII, em particular, de John Napier. Esperamos que as tarefas possam levar os estudantes a enxergar a matemática como um campo vivo, construído ao longo do tempo para resolver problemas reais. E, com isso, desejamos que o aprendizado se torne mais leve, envolvente e instigante.

No entanto, também reconhecemos desafios nessa proposta. Incorporar a história da matemática no ensino exige um olhar atento dos professores e um planejamento cuidadoso para que os aspectos históricos não se tornem apenas curiosidades soltas, mas sim uma ferramenta que aprofunde a compreensão dos conceitos. Além disso, algumas tarefas podem exigir adaptações para diferentes níveis de aprendizado, para garantir que todos os alunos consigam acompanhar e se beneficiar da abordagem.

Como próximos passos desta pesquisa, planejamos a aplicação dessas tarefas com licenciandos e estudantes da educação básica, permitindo-nos avaliar sua efetividade e identificar melhorias. Além disso, um dos objetivos futuros é a publicação do livro elaborado nesta pesquisa, tornando-o acessível a professores que queiram explorar novas formas de ensinar logaritmos e incentivar seus alunos a enxergar a matemática sob uma nova perspectiva.

Por fim, esperamos que este trabalho possa contribuir para o ensino da matemática, trazendo reflexões sobre como a história pode ser uma ponte entre o passado e o presente do conhecimento matemático. Mais do que apresentar conceitos, desejamos que os estudantes possam sentir a matemática como um campo dinâmico, construído por pessoas que, assim como eles, buscaram maneiras de compreender o mundo e facilitar cálculos que antes pareciam impossíveis.

Afinal, aprender matemática também é aprender sobre a criatividade humana e sobre como ideias transformam nossa forma de pensar e resolver problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMADEO, Marcello; BERNARDES, Aline; TEIXEIRA, Wilza Maria. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS: uma análise de coleções do PNLD 2018 e 2020**. Anais-Seminário Nacional de História da Matemática, v. 15, 2023.

BERNARDES, Aline; HAUBRICHS, Cleber; AMADEO, Marcello. **NARRATIVAS E USO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO PNLD 2018**. 18º Seminário Nacional de História da Matemática e da Tecnologia, São Paulo, 2022.

BIZA, I.; NARDI, E. **SCRIPTING THE EXPERIENCE OF MATHEMATICS TEACHING: The value of student teacher participation in identifying and reflecting on critical classroom incidents.** International Journal for Lesson and Learning Studies, 2019.

BIZA, I; NARDI, E.; ZACHARIADES, T. **USING TASKS TO EXPLORE TEACHER KNOWLEDGE IN SITUATION-SPECIFIC CONTEXTS.** Journal of Mathematics Teacher Education, 10, n. 4-6, p. 301-309, 2007.

BIZA, I.; NARDI, E.; ZACHARIADES, T. **COMPETENCES OF MATHEMATICS TEACHERS IN DIAGNOSING TEACHING SITUATIONS AND OFFERING FEEDBACK TO STUDENTS: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses**. In: Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Springer, 2018. p. 55-78.

BIZA, BIZA, I., KAYALI, L., MOUSTAPHA-CORRÊA, B., NARDI, E; & THOMA, A. **AFINANDO O FOCO EM MATEMÁTICA: Desenho, Implementação e Avaliação de Atividades MathTASK para a Formação de Professores de Matemática.** Revista do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Mato Gross do Sul, v. 14, n 35, 2021.

CLARK, Kathleen M.; MONTELLE, Clemency. **PRIORITY, PARALLEL DISCOVERY, AND PRE-EMINENCE NAPIER, BÜRGI AND THE EARLY HISTORY OF THE LOGARITHM RELATION.** Revue d'histoire des mathématiques, v. 18, n. 2, p. 223-270, 2012.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **MATEMÁTICA EM CONTEXTOS: Função exponencial, função logarítmica e sequências.** 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

FRIED, Michael N. **HISTORY OF MATHEMATICS IN MATHEMATICS EDUCATION**. International handbook of research in history, philosophy and science teaching, p. 669-703, 2013.

GOMES, Heron Miguez Gonzalez; PAVANELO, Elisangela. **UMA HISTÓRIA A RESPEITO DOS LOGARITMOS.** Revista Brasileira de História da Matemática, v. 22, n. 43, p. 102-123, 2022.

ISHIARA, C. Akemi; SANTOS, Neide Pessoa dos. **MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO, 1º ANO**. Brasília: Cisbrasil, 2010. (Coleção RSE).

MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna. **RUMO A UMA POSTURA PROBLEMATIZADORA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: Articulando Práticas Históricas e Práticas de sala de aula.** Orientador: Victor Giraldo. Coorientadora: Aline Caetano da Silva Bernardes. 2020. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

NAPIER, J. **THE DESCRIPTION OF THE WONDERFUL CANON OF LOGARITHMS.** Edimburgo, 1614 - Tradução do Latim para o Inglês de Edward Writh, 2010, Londres: Nicolas Oaks, 1616.

NAPIER, J. **THE CONSTRUCTION OF THE WONDERFUL CANON OF LOGARITHMS**. Edimburgo, 1619 - Tradução do Latim para o Inglês de William Rae Macdonald, ALPHA Editions, 2019, NÓVOA, António. **TRÊS BASES PARA UM NOVO MODELO DE FORMAÇÃO**. Setembro, 2013, Nova Escola. Disponível em: <https://gestaoescolar.org.br/conteudo/182/tres-bases-para-um-novo-modelo-de-formacao>. Acesso em 12/02/2025.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **TÓPICOS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA [EM LINHA].** 2012.

ROQUE, Tatiana. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAITO, Fumikazu. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores.** In: CONGRESO IBEROAMERICADO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. 2013. p. 3990-3998.

APÊNDICE A

LIVRO - *Logaritmos: repensando o seu ensino e aprendendo com a história*

Logaritmos:
repensando o seu ensino e aprendendo com a história

Leires Isabel Oliveira de Araujo
Aline Bernardes
Bruna Moustapha-Corrêa

Este livro é resultado do trabalho final do mestrado profissional desenvolvido pela primeira autora sob orientação das outras duas.

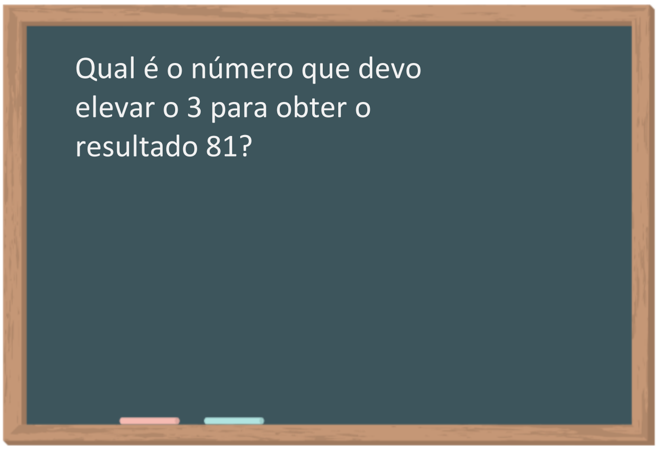
Ele é um convite à reflexão sobre o modo como os logaritmos costumam ser ensinados. Inspirado na experiência de mais de 25 anos de sala de aula, das autoras e de colegas, e especialmente nos questionamentos que ouvimos diariamente como professoras: nos debruçamos no desafio de estudar as fontes originais dos logaritmos. Como resultado surgiram tarefas que podem ser aplicadas com estudantes do Ensino Médio visando a responder tais questionamentos.

Convidamos a leitora e o leitor a conhecer um pouco do que estudamos, a refletir sobre as nossas sugestões e finalmente a propor novas aulas de logaritmos.

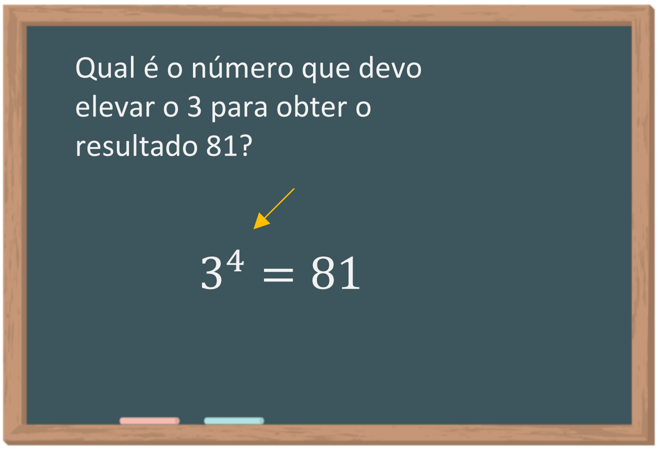
Sumário

Para início de conversa: refletindo sobre como e por que ensinar logaritmos

Tarefa: Refletindo sobre como e por que ensinar logaritmos.
Em uma sala de 1° ano do Ensino médio, a professora Isabel introduz os estudos de logaritmos. Ela escreve no quadro uma pergunta.



Continua a aula revendo o que os alunos estudaram sobre equações exponenciais e juntos chegam à resposta correta.



A seguir, propõe para a turma, alguns exercícios com perguntas similares, porém com bases diferentes.

Qual é o número que devo elevar o 3 para obter o resultado 81?

$$3^4 = 81$$

EXERCÍCIO:

1) Responda às perguntas a seguir, tendo como base o que você aprendeu sobre as resoluções de equações exponenciais.

a. Qual é o número que devo elevar o 2, para obter o resultado 512?

b. Qual é o número que devo elevar o 5, para obter o resultado 125?

c. Qual é o número que devo elevar o 10, para obter o resultado 100 000?

d. Qual é o número que devo elevar o 10, para obter o resultado 0,0001?

Os alunos Miguel e Paulo, estão juntos resolvendo as questões.

Miguel: Até agora está fácil, responder essas perguntas!

Paulo: Não se anima muito não, a turma do segundo ano disse que logaritmos é difícil!

A professora Isabel, anda pela sala ouvindo os comentários dos alunos e percebe que até então, eles conseguem resolver os problemas sem maiores dificuldades.

Comenta com a turma que esses expoentes que estão calculando, podem ser chamados de logaritmos e são representados por.

Logaritmos

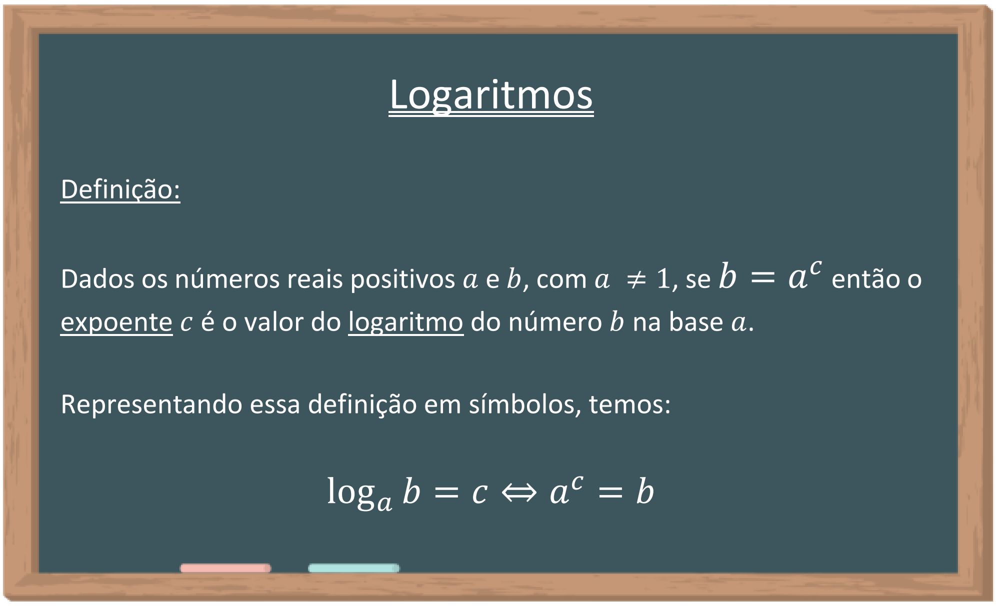
A. $2^9 = 512 \longrightarrow log_2 512 = 9$

B. $5^3 = 125 \longrightarrow \log_5 125 = 3$

C. $10^5 = 100000 \longrightarrow \log_{10} 100\,000 = 5$

D. $10^{-4} = 0{,}0001 \longrightarrow \log_{10} 0{,}0001 = -4$

Explica a nomenclatura e apresenta a definição formal, escrevendo no quadro:



Antes de terminar de escrever a definição, a professora escuta os seguintes comentários:

Paulo: Começou a complicar... eu te disse!

Miguel: Para que serve isso?

Helena: Tenho que estudar isso, por quê?

Miguel: Por que chamam de logaritmo?

José: Como alguém pensou nisso? Eu jamais, pensaria em algo assim ... isso é coisa de gênio!

Certamente, como professor, você já ouviu este tipo de questionamentos.

Pense e responda:

1. Você já parou para pensar por que eles estão sempre presentes nas nossas aulas?
2. Como você costuma responder?
3. Quais são suas estratégias para preparar suas aulas?
4. Já encontrou algum desafio no ensino de logaritmos?
5. Pense nas vantagens em se começar o estudo dos logaritmos dessa forma.
6. E agora considere as desvantagens.

A tarefa “Refletindo sobre como e por que ensinar logaritmos” foi criada para disparar a nossa discussão sobre o ensino de logaritmos. Ela foi pensada para ser utilizada com professores em formação com vistas a gerar neles a necessidade de encontrar argumentos consistentes, que possam responder aos questionamentos que geralmente emergem com a introdução do tema logaritmos em turmas do 1° ano do Ensino Médio.

O modo como alguns professores, abordam o conteúdo é bem interessante e deixa claro o quanto os logaritmos são úteis, mas ainda assim, não justifica como surgiu a ideia, ou em qual contexto isso foi pensado. Essa estratégia costuma ser eficiente para aqueles alunos que têm facilidade com os cálculos e que ao repetir mecanicamente os procedimentos seguem acertando e assim evoluem nas resoluções de problemas mais complexos, tendo como modelos, questões similares resolvidas pelo professor.

No entanto, os alunos que precisam entender a quais perguntas esse conteúdo responde, seguem frustrados e alguns desistem de aprender, antes mesmo de tentar. Ademais dessa forma seguimos reforçando, em muitos estudantes, a noção de que é necessário ser dotado de grande genialidade para produzir matemática ou mesmo aprender determinados conteúdos que são mais abstratos.

Diante disso, pesquisar na história da matemática, quando e como foi pensado e por qual motivo foi inventado o logaritmo, surge como uma alternativa para uma abordagem diferente das que são propostas pelos livros didáticos. Desse modo, responder às questões dos alunos, apresentando o contexto histórico e sobretudo o modo como alguns estudiosos introduziram a ideia dos logaritmos, além de esclarecer questionamentos “Por que se chama logaritmo?”; “Quem criou os logaritmos?”; “Por que alguém pensaria nisso?”; “Em qual contexto os logaritmos foram criados?”, ajuda a “humanizar” a matemática.

A ideia de humanizar a matemática contribui para que os estudantes percebam que, mais do que genialidade, é preciso perseverança para ultrapassar as fronteiras do conhecimento matemático. Além disso, como muitos outros conceitos e procedimentos que compõem o que chamamos hoje de matemática, os logaritmos surgiram de uma necessidade bastante concreta: facilitar a vida dos astrônomos e outros praticantes da matemática, ao simplificar cálculos (de multiplicação, divisão, extração de raízes quadradas etc.) com números grandes. A necessidade de facilitar os cálculos estava na ordem do dia e não foi obra de uma única pessoa (sem maçãs caindo na cabeça do gênio!). Vários estudiosos se debruçaram na busca/criação de recursos para esse fim. Nesse sentido, entendemos que ter contato com os elementos, as necessidades que impulsionaram a criação de um conceito (e também as dificuldades do processo!) "humanizam" a matemática.

Os logaritmos foram simultaneamente criados por John Napier (1550-1617) e pelo relojoeiro suíço Just Bürgi (1552-1632). Optamos por explorar as ideias de Napier, mesmo sabendo que Just Bürgi tenha simultaneamente, criado os logaritmos. Os registros do trabalho de Napier, desde o início, estiveram acessíveis com a possibilidade de pesquisa em seus textos originais, traduzidos para o Inglês pouco tempo depois de suas publicações no século XVII. Possivelmente por isso, tiveram um alcance maior e se tornaram rapidamente conhecidos pelos matemáticos e astrônomos da época.

Jost Bürgi, teve seu trabalho publicado em Praga no ano de 1620, com o título *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen (Tabelas de progressões aritméticas e Geométricas)*, em Alemão antigo, sendo seu único trabalho sobrevivente, disponível para estudiosos da atualidade. Seus escritos não foram amplamente estudados, pois a publicação de seus trabalhos ocorreu seis anos depois da publicação do *Descriptio*. Clark e Montelle (2012) observam que essa obra tem sido negligenciada pela historiografia da matemática. Da nossa parte, as informações históricas apresentadas nos livros didáticos (por exemplo, veja Ishiara, Santos, 2009, p.229 e 230) nos motivou a buscar mais informações sobre o personagem John Napier e a sua prática com os logaritmos.

A seguir apresentamos um resumo histórico em que buscamos desvendar algumas particularidades da história dos logaritmos inventados por John Napier.

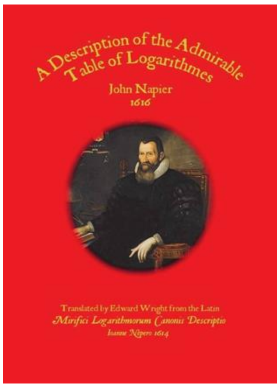
Um pouco da História do Logaritmos.

A história dos Logaritmos inventados por John Napier

John Napier, Barão de Merchiston (1550-1617)

John Napier nasceu na Escócia, em 1550, em uma família rica e influente, que pertencia à pequena nobreza escocesa. Foi educado na Universidade de St Andrews, na Escócia, e posteriormente na França, possivelmente na Universidade de Paris. Ele era protestante e participava ativamente das polêmicas religiosas da época (Napier, 2010).

Para Napier o estudo da matemática ficava em segundo plano em relação aos seus estudos teológicos. No entanto, foi refletindo sobre como eram tediosos e imprecisos alguns cálculos associados às multiplicações, divisões, raízes quadradas ou cúbicas de números grandes e consequentemente numa forma de reduzir essas contas, que os logaritmos foram por ele inventados (Napier, 2010). Napier trabalhou durante vinte anos, tendo desenvolvido um método de simplificar os cálculos



enfadonhos e difíceis. Ele organizou um conjunto de tabelas e publicou seu tratado em 1614 com o título *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Uma descrição da maravilhosa tabela de logaritmos), que ficou conhecido no meio acadêmico como *Descriptio*. Neste livro estão as tabelas de Napier, com a descrição de suas características e alguns exemplos

para ilustrar o uso das tabelas. Um segundo tratado, contendo desdobramento da teoria e explicando como as tabelas foram construídas, foi postumamente publicado com a colaboração do seu filho Robert Napier em 1620, com o título *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (A construção da maravilhosa tabela de logaritmos), por sua vez, conhecido como *Constructio* (Clark e Montelle, 2012).

No início do século XVII, a matemática era amplamente utilizada por astrônomos e grandes navegadores, que necessitavam fazer cálculos com números muito grandes, os quais eram demorados e difíceis, além de muitas vezes, ocorrerem erros por aproximações, gerando prejuízos ou outros problemas para os envolvidos dessa época. No *Descriptio*, Napier escreveu em seu prefácio o principal motivo para dedicar tanto tempo à construção das tabelas de logaritmos.

> Vendo que não há nada (muito amados estudantes de Matemática) que seja tão problemático para a prática matemática ou que atrapalhe mais os cálculos, do que as multiplicações, divisões, extrações quadráticas e cúbicas de grandes números, que além do tedioso gasto de tempo são em grande parte evitadas por muitos erros superficiais. Começo, portanto, a considerar em minha mente, por qual arte certa e pronta eu poderia remover esses obstáculos. E tendo pensado em muitas coisas para esse propósito, encontrei finalmente algumas excelentes regras breves para serem tratadas (talvez) daqui em diante [...] (Napier, 2010, p. 9-10, tradução nossa)

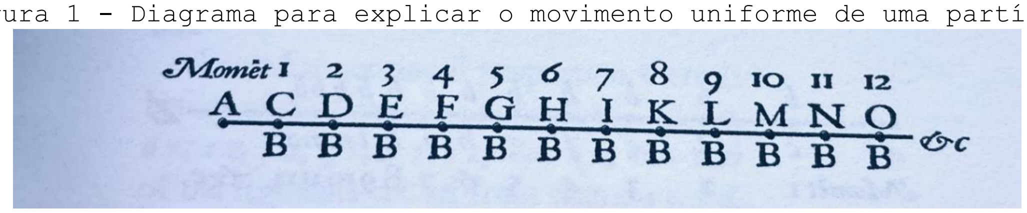
No *Constructio*, seu filho Robert Napier, escreveu uma apresentação explicando o motivo que levou seu pai a separar em dois livros a sua obra.

> Vários anos atrás (leitor amante da matemática) meu pai, de memória sempre reverenciada, tornou público o uso do Maravilhoso Cânone dos Logaritmos; mas, como ele mesmo mencionou na sétima e última página dos Logaritmos, ele era decididamente contra comprometer com tipos a teoria e o método de sua criação, até que tivesse averiguado a opinião e a crítica sobre o Cânone daqueles que são versados neste tipo de aprendizado (Napier, 2019, p. 3-A2, tradução nossa).

O excerto acima indica que Napier queria aguardar a opinião dos "versados neste tipo de aprendizado" sobre o primeiro livro (*Descriptio*), que continha as tabelas, antes de publicar a teoria do seu método, presente no *Constructio*. Robert, lamentou a morte de seu pai antes da publicação do *Constructio*, que segundo ele, faltou seu toque final. No entanto, para honrar o pedido do pai, ele decidiu fazer o que estava ao seu alcance para que o *Constructio* fosse publicado.

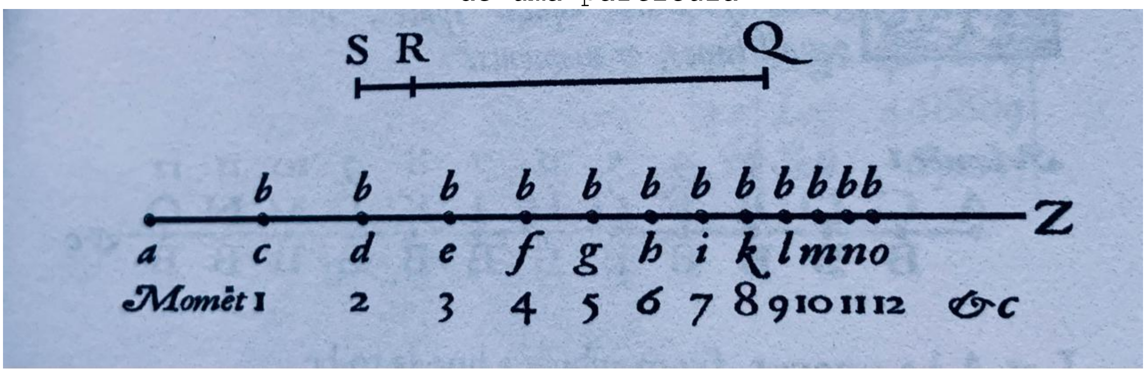
No *Descriptio*, Napier, inicialmente não menciona explicitamente, as relações entre as progressões aritméticas e geométricas. Para ilustrar suas ideias ele faz uma análise do movimento simultâneo de duas partículas, onde as relações entre as sequências aritméticas e geométricas aparecem, inseridas em um problema físico que envolve pontos, linhas paralelas, distâncias percorridas e velocidades. As Figuras 1 e 2, retiradas do *Descriptio*, ilustram essa ideia.

Figura 1 - Diagrama para explicar o movimento uniforme de uma partícula



Fonte: Napier (2010, p. 23)

Figura 2 - Diagrama para explicar o movimento uniformemente variado de uma partícula



Fonte: Napier (2010, p. 24)

Na Figura 1, Napier explica que dado o ponto inicial A, uma linha deve ser traçada, partindo de A, pelo movimento de outro ponto B, o qual se movimenta a uma velocidade constante de A para C (no primeiro momento), de C para D (no segundo momento) e assim infinitamente. A linha AO é uma semirreta e as distâncias entre os pontos A e C, C e D, …, N e O são iguais.

Simultaneamente ao movimento anterior, na Figura 2, o ponto "b" se move, ao longo de um segmento de reta, com velocidade inicial igual a do ponto B (Figura 1), partindo de "a". No entanto, sua velocidade é variável (e decrescente), sendo proporcional à distância do ponto em que b está até a extremidade final do segmento. Assim, por exemplo, quando o ponto "b" passa por "c", sua velocidade é proporcional à distância de c até a extremidade final do segmento.

A velocidade inicial dos pontos B e "b" é igual ao comprimento do segmento de reta apresentado na Figura 2, o qual é igual à medida do raio da circunferência que era utilizada na trigonometria dos cálculos astronômicos da época, qual seja, 10000000 ou 10^7. Napier criou os logaritmos, relacionando-os com a trigonometria, para atender às demandas da astronomia.

Veremos que ele determinou numericamente os logaritmos dos senos de ângulos. Napier explica a escolha do raio 10^7, referindo-se às progressões aritméticas (1, 2, 3, 4, ...) e (2, 4, 6, 8, …) e às progressões geométricas (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) e (243, 81, 27, 9, 3, 1) como exemplo:

> 3. Nessas progressões, exigimos precisão e facilidade no trabalho. A precisão é obtida tomando grandes números como base; mas, grandes números são mais facilmente feitos a partir de pequenos, adicionando cifras.
> Assim, em vez de 100000, que os menos experientes fazem o maior seno, os mais eruditos colocam 10000000, por meio do qual a diferença de todos os senos é melhor expressa. Por isso também usamos o mesmo para raio e para o maior de nossos proporcionais geométricos.
> 4. Em tabelas de computação, esses números grandes podem novamente ser tornados ainda maiores colocando um ponto após o número e adicionando cifras.
> Assim, ao começar a calcular, em vez de 10000000 colocamos 10000000.0000000, para que o erro mais minúsculo não se torne muito grande pela multiplicação frequente. (Napier, 2019, p.8).

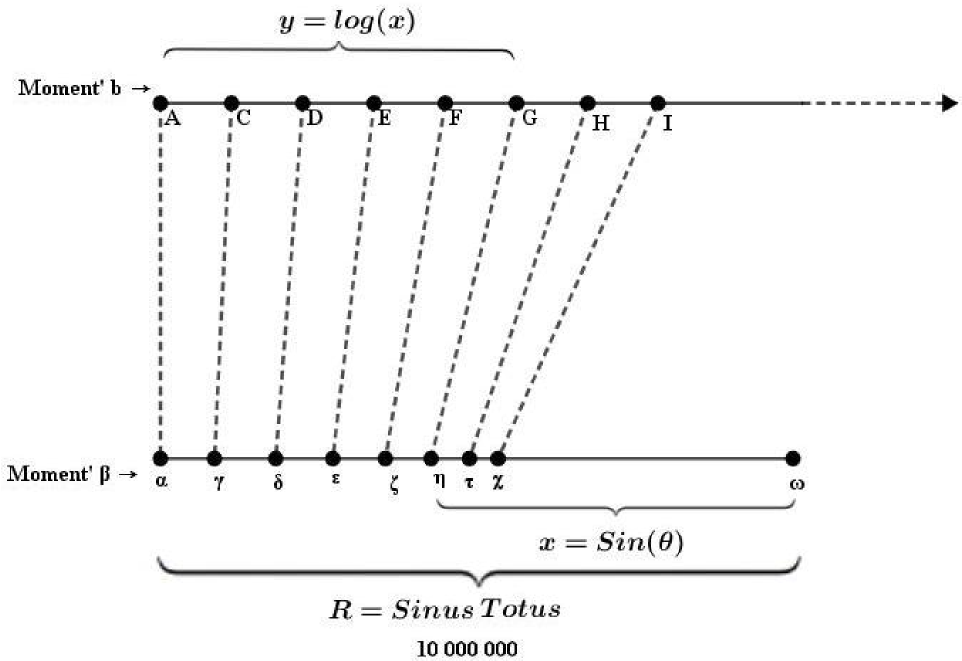
Note que Napier usa o ponto para separar a parte decimal da parte inteira. Além disso, a notação de potências não era utilizada por ele. Por cifra, entende-se, na linguagem atual, a fração decimal. Por exemplo, o número 9999998.0005021 é o mesmo que $9999998\frac{5021}{10000000}$. Assim, a medida do raio 10^7 (em notação atual) deve-se tanto à medida do raio que era adotada pelos astrônomos nos cálculos trigonométricos (pelo menos, pelos mais eruditos), quanto para minimizar os erros por aproximações – tanto que ele acrescenta mais sete casas decimais (cifras).

Na décima nona página do *Constructio*, encontramos o modo como ele definiu a sua ideia de logaritmo.

> 26. O logaritmo de um dado seno é aquele número que aumenta aritmeticamente com a mesma velocidade em toda a extensão com que o raio começou a diminuir geometricamente, e no mesmo tempo em que o raio diminui para o seno dado. (Napier, 2019, p. 19)

Para explicar de forma mais didática essa ideia, ou seja, o que Napier estabelecia como sendo o logaritmo e como os diagramas acima se relacionam com progressões aritméticas e geométricas, vamos nos apoiar no diagrama da Figura 3, apresentado por Clark e Montelle (2012) e seguir seu raciocínio.

Figura 3 - Diagrama que ilustra a relação entre as duas linhas e os logaritmos de Napier



Fonte: Clark e Montelle (2012, p. 234)

Para facilitar, imagine tanto a semirreta quanto o segmento de reta divididos em duas partes: a parte que foi já foi percorrida pelos pontos B e "b" (respectivamente) – conforme as Figuras 1 e 2 – e a que ainda será percorrida pelos pontos em cada uma das linhas. O segmento de reta representa a sequência dos senos de ângulos, sendo 10^7 o comprimento do seno de $90°$. Assim, de acordo com a Figura 3,

$$dist(\alpha\omega) = sen(90°) = 10^7$$

A distância que ainda não foi percorrida no segmento de reta corresponde ao seno de um ângulo (Figura 3). Por exemplo,

$$dist(\eta\omega) = x = \text{sen}(\theta), \text{ para algum } 0° \leq \theta \leq 90°$$

Já a distância que já foi percorrida na semirreta é o logaritmo daquele seno (Figura 3). Repare que, enquanto os senos decrescem, os logaritmos crescem. Assim,

$$dist(AG) = y = \log_{Napier}(x)$$

Ao observarmos o modelo de Clark e Montelle (Figura 3), fica estabelecido que

$$AC = \log_{Napier}(\gamma\omega), \text{ para } \gamma\omega = \text{sen}(\theta_1)$$
$$AD = \log_{Napier}(\delta\omega), \text{ para } \delta\omega = \text{sen}(\theta_2)$$
$$AE = \log_{Napier}(\varepsilon\omega), \text{ para } \varepsilon\omega = \text{sen}(\theta_3)$$

De um modo geral: $x = \text{sen}(\theta)$ e $y = \log_{Napier}(x)$. E o logaritmo do "seno inteiro", ou seja, $\text{sen}(90°)$ é zero. Napier diz ainda que o logaritmo de zero é infinito (Clark e Montelle, 2012, p. 235).

A concepção cinemática de Napier abrange uma sequência aritmética e outra geométrica. A sequência aritmética é gerada pelo movimento uniforme do ponto na semirreta

$$0;\ AC;\ AD;\ AE;\ AF;\ \ldots\ =\ 0;\ b;\ 2b;\ 3b;\ 4b;\ \ldots$$

Já a sequência geométrica é gerada pelo movimento variado do ponto no segmento de reta

$$\alpha\omega,\quad \gamma\omega,\quad \delta\omega,\quad \epsilon\omega,\cdots = R,\quad aR,\quad a^2R,\quad a^3R,\cdots$$

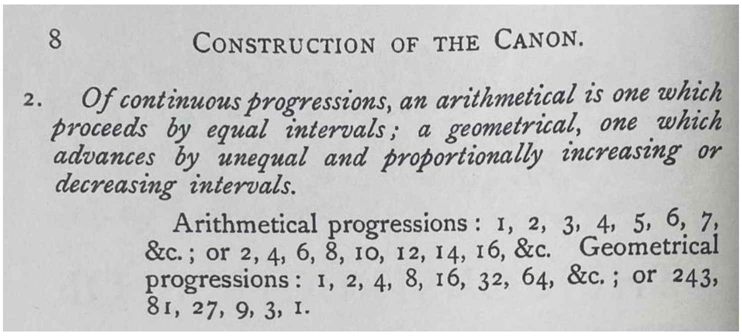
em que R é o comprimento do segmento, igual à medida do raio da circunferência, corresponde a 10000000 (seno total). E "a" é um número escolhido por Napier, sendo menor que (mas, muito próximo de) 1. Nesse caso o número definido por ele foi $1-\frac{1}{10^7}$ ou $1-10^{-7}$ (em notação atual). Sendo assim, a progressão geométrica de Napier tem como primeiro termo $x = R = 10\,000\,000$ e razão $1-10^{-7}$, sendo, portanto, uma sequência decrescente.

Para explicar a escolha desse número, vamos considerar as progressões aritmética (de razão $r = 1$) e geométrica (de razão $q = 2$). Napier não pensou o logaritmo como um expoente, mas ao compararmos a ideia inicial dele com o modo como entendemos essas sequências atualmente, nos aproximamos do cerne da construção das primeiras tábuas de logaritmos construídas por Napier.

A relação entre uma progressão aritmética e geométrica já havia sido explorada por outros estudiosos, como Michael Stifel, que publicou sua ideia em um livro intitulado *Arithmetica Integra*, em 1544. Vemos, assim, que essa relação e a busca por métodos para facilitar os cálculos estavam na ordem do dia dos praticantes da matemática e dos estudiosos nos séculos XVI e XVII.

Voltando às sequências aritmética de razão 1 e geométrica de razão 2, podemos encontrá-las na oitava página do *Constructio*, reproduzidas a seguir.

Figura 4 - página 8 - *Constructio*



8 CONSTRUCTION OF THE CANON.

2. *Of continuous progressions, an arithmetical is one which proceeds by equal intervals; a geometrical, one which advances by unequal and proportionally increasing or decreasing intervals.*

Arithmetical progressions: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.; or 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, &c. Geometrical progressions: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c.; or 243, 81, 27, 9, 3, 1.

Fonte: Napier (2019, p.8)

Tabela 1 - Relação entre as progressões aritmética e geométrica.

P.A ($r = 1$)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
P.G ($q = 2$)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

Fonte: elaborada pelas autoras

A partir dessas sequências, notamos que para calcular 8×512, podemos somar os números da primeira linha da tabela, que correspondem respectivamente a 8 e a 512 (3 + 9 = 12). O resultado dessa multiplicação é o número correspondente a 12 na segunda linha da tabela, isto é, $8 \times 512 = 4096$.

Podemos calcular também divisões, apenas subtraindo os números correspondentes da primeira linha e, verificando, na segunda linha da tabela qual é o número relacionado ao resultado dessa subtração, por exemplo: $256 \div 32 \div 4 = 2$, pois ao subtrairmos seus correspondentes da primeira linha, ou seja, $8 - 5 - 2 = 1$, que corresponde ao 2 na segunda sequência.

É possível, inclusive, extrair a raiz quadrada de modo muito simples. Por exemplo: $\sqrt{256} = 16$. Notamos que ao dividirmos 8 (que corresponde ao 256) por 2 (índice da raiz), encontramos 4, que corresponde a 16, na segunda linha da tabela.

Estendendo essas sequências podemos calcular rapidamente, multiplicações, divisões e mesmo extrair raízes quadradas de números grandes, usando a adição, a multiplicação e a divisão por 2, como recurso. No entanto, Napier percebeu que poderia fazer as operações (multiplicações, divisões, etc.), apenas se os números estivessem na segunda linha (progressão geométrica), o que requer diminuir as lacunas entre os termos da progressão geométrica.

Para resolver essa limitação, ele trocou as potências de base dois, por potências de um número muito próximo de um ($1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$). Sendo assim, podemos observar na Tabela 2, uma sequência com termos em ordem decrescente (começando pelo raio 10000000.0000000) e seus respectivos logaritmos.

Note que na progressão geométrica de Napier tem-se:

$$\mathrm{x}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{x}_{\mathrm{n}}(1 - 10^{-7})$$

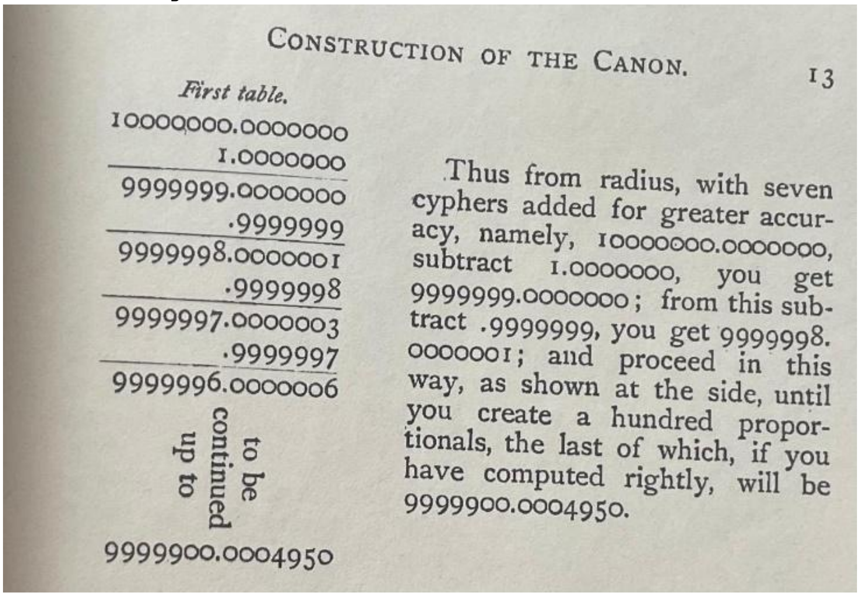
Tabela 2 - Logaritmos de Napier

x_{n+1}	$n = log_{Napier}\, x_{n+1}$
1 0000000.0000000	0
9999999.0000000	1
9999998.0000001	2
9999997.0000003	3
9999996.0000006	4
9999995.0000010	5
9999994.0000015	6
9999993.0000021	7
9999992.0000028	8
9999991.0000036	9
9999990.0000045	10
9999989.0000055	11

Fonte: Clark e Montelle (2012, p. 236)

Os números da primeira coluna da Tabela 2 foram obtidos através de subtrações. Em *Constructio*, páginas 12 e 13, encontramos essa explicação. Napier subtrai o que ele chama de parte fácil do número, isto é, a parte inteira do número. Por exemplo, a parte fácil de 9999999.0000000 é 9999999.

Figura 5 – Item 16 do *Constructio*



CONSTRUCTION OF THE CANON. 13

First table.

10000000.0000000
1.0000000
9999999.0000000
.9999999
9999998.0000001
.9999998
9999997.0000003
.9999997
9999996.0000006
to be continued up to
9999900.0004950

Thus from radius, with seven cyphers added for greater accuracy, namely, 10000000.0000000, subtract 1.0000000, you get 9999999.0000000; from this subtract .9999999, you get 9999998.0000001; and proceed in this way, as shown at the side, until you create a hundred proportionals, the last of which, if you have computed rightly, will be 9999900.0004950.

Fonte: Retirado de Napier (2019, p. 13).

Na Figura 5, Napier explica que vai subtraindo a parte inteira dos números, sucessivamente, até obter cem proporcionais e segundo ele, se não houver erros, o último desses números será 9999900.0004950.

Embora o modo como estão organizados os números na Tabela 2 não corresponda à forma final das tabelas de Napier, essa tabela ilustra a relação entre a progressão aritmética (coluna dos logaritmos) e a progressão geométrica de razão $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$.

No entanto, Napier queria mostrar a relação logarítmica tabulada em ângulos dados em graus e minutos, selecionando para o seno de cada ângulo, o logaritmo apropriado, como nos mostram Clark e Montelle, (2012, p.236).

Ângulo (θ)	$\mathrm{x} = \mathrm{sen}\,\theta$	$\log_{nap}(x)$
90°00'	10 000 000	0
89°59'	10 000 000	1
89°58'	9 999 998	2
89°57'	9 999 996	4
89°56'	9 999 993	7
89°55'	9 999 989	11

Na imagem acima, vemos uma tabela que esclarece a intenção de Napier em associar os logaritmos ao seno dos ângulos. Na prática o que ele fez foi utilizar como atalho, segundo Baron (1974, citado por Clark e Montelle, 2012, p. 238), "os senos que estavam disponíveis nas tabelas de seno de Erasmus Reinhold".

Basicamente, as tabelas apresentadas no *Descriptio* são resultados de técnicas muito criativas, inventadas por Napier que estão descritas no seu *Constructio*. De modo muito engenhoso, para economizar nos cálculos, ele organizou os valores em tabelas, que foram cuidadosamente pensadas, contendo simetrias inteligentes, que estão descritas na parte I do *Descriptio*, capítulo 3.

A Figura 6 mostra uma imagem das duas primeiras páginas das tabelas de Napier, de acordo com a tradução de Wright (Napier, 2010, p. 112, 113). Cada página das tabelas é formada por sete colunas. A primeira coluna contém os ângulos, em graus e minutos, aumentando minuto a minuto de $0°$ a $45°$. Cada página cobre 30 minutos, então cada grau leva duas páginas para tabular. Sendo assim, as tabelas têm noventa páginas de comprimento. A primeira coluna está relacionada à sétima coluna, que fornece os ângulos decrescentes minuto a minuto de $90°$ em diante. Com isto, todo o quadrante é tabulado recorrendo à simetria da função seno. A segunda e a sexta colunas recebem o nome de seno e são resultado dos ângulos dados na primeira e sétima colunas, respectivamente. A terceira e quinta colunas são intituladas logaritmos e contém os logaritmos dos senos das segunda e sexta colunas. A quarta coluna é chamada de diferença e contém as diferenças entre os logaritmos que estão na terceira e quintas colunas.

Figura 6: As duas primeiras páginas das tabelas de Napier.

112

Deg. 0 + | −

mi	Sines.	Logarith.	Differen.	Logarith.	Sines.	
0	0	Infinite.	Infinite.	.0	1000000.0	60
1	291	3142567	8142568	.1	1000000.0	59
2	582	7449419	7449421	.2	999999.8	58
3	873	7043952	7043956	.4	999999.6	57
4	1164	6756275	6756274	.7	999999.3	56
5	1454	6533131	6533130	1.1	999998.9	55
6	1745	6350810	6350808	1.6	999998.6	54
7	2036	6196659	6196657	2.2	999998.0	53
8	2327	6063128	6063126	2.8	999997.4	52
9	2618	5945345	5945342	3.5	999996.7	51
10	2909	5839986	5839814	4.3	999995.9	50
11	3280	5744676	5744671	5.2	999995.0	49
12	3491	5657665	5657658	6.2	999994.0	48
13	3781	5577622	5577615	7.3	999992.8	47
14	4072	5503514	5503506	8.4	999991.7	46
15	4363	5434522	5434513	9.6	999990.5	45
16	4654	5369984	5369973	10.9	999989.2	44
17	4945	5309360	5309348	12.3	999987.8	43
18	5236	5252202	5252188	13.8	999986.3	42
19	5527	5198136	5198120	15.4	999984.7	41
20	5818	5146843	5146336	17.0	999983.1	40
21	6109	5098054	5098045	18.7	999981.3	39
22	6399	5051534	5051514	20.5	999979.5	38
23	6690	5007083	5007060	22.4	999977.6	37
24	6981	4964524	4964499	24.4	999975.6	36
25	7272	4923703	4923676	26.5	999973.6	35
26	7563	4884483	4884454	28.7	999971.4	34
27	7854	4846743	4846712	30.9	999969.1	33
28	8145	4810376	4810343	33.2	999966.8	32
29	8436	4775286	4775250	35.4	999964.4	31
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30

Min.

Deg. 89

113

Deg. 0 + | −

mi	Sines.	Logarith.	Differen.	Logarith.	Sines.	
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
31	9017	4708596	4708555	40.7	999959.3	29
32	9308	4676848	4676805	43.4	999956.6	28
33	9599	4646077	4646031	46.1	999953.9	27
34	9890	4616225	4616176	48.9	999951.1	26
35	10181	4587239	4587187	51.8	999948.2	25
36	10472	4559069	4359014	54.8	999945.2	24
37	10763	4531671	4531613	57.9	999942.1	23
38	11054	4505004	4504943	61.1	999938.9	22
39	11344	4479030	4478965	64.4	999935.7	21
40	11635	4453713	4453645	67.7	999932.3	20
41	11926	4429022	4428950	71.1	999928.9	19
42	12217	4404925	4404850	74.6	999925.4	18
43	12508	4381396	4381318	78.2	999921.8	17
44	12799	4358408	4358326	81.9	999918.1	16
45	13090	4335936	4335850	85.7	999914.3	15
46	13380	4313958	4313868	89.6	999910.5	14
47	13671	4292453	4292360	93.5	999906.5	13
48	13962	4271401	4271304	97.5	999902.5	12
49	14253	4250783	4250682	101.6	999898.4	11
50	14544	4230583	4230477	105.8	999894.2	10
51	14835	4210781	4210671	110.1	999890.0	9
52	15126	4191364	4191250	114.5	999885.6	8
53	15416	4172317	4172198	118.9	999881.1	7
54	15707	4153627	4153504	123.4	999876.6	6
55	15998	4135279	4135151	128.0	999872.0	5
56	16289	4117263	4117130	132.7	999867.3	4
57	16580	4100664	4100527	137.5	999862.5	3
58	16871	4082175	4082032	142.4	999857.7	2
59	17162	4065082	4064935	147.3	999852.7	1
60	17452	4048276	4048124	152.3	999847.7	0

Min.

Deg. 89

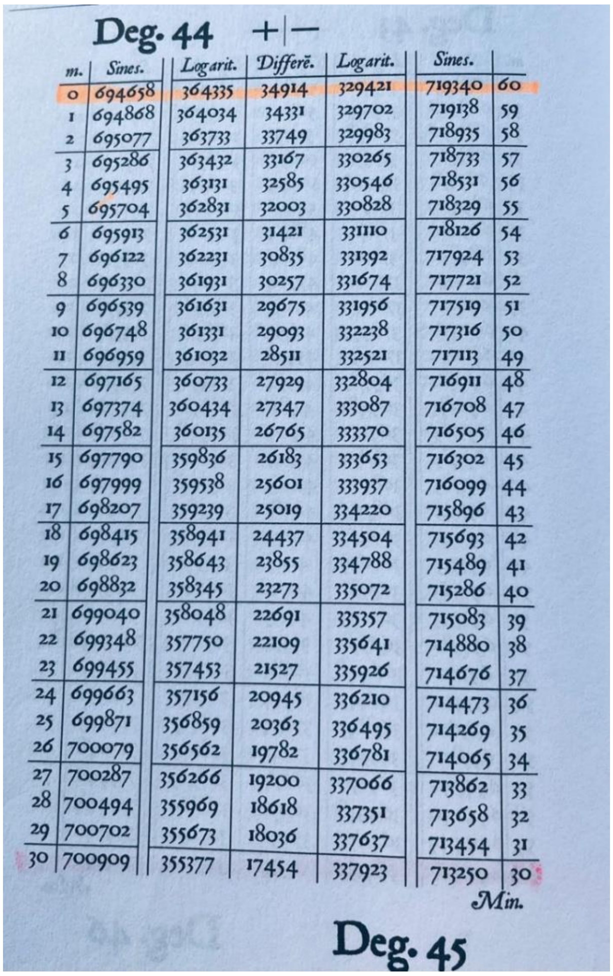
Fonte: *Napier* (2010, p.112 e 113).

Podemos perguntar

Como localizar um determinado logaritmo nas tabelas de Napier?

Vejamos um exemplo: se quisermos localizar o logaritmo do seno cujo valor é 694658, percorremos as tabelas e encontramos na página que cobre os primeiros 30 minutos do ângulo $44°$ (Figura 7), mas precisamente: $44°$ e $0'$. O logaritmo procurado é 364335.

Figura 7 - Penúltima página das tabelas de Napier



Deg. 44 +|−

m.	Sines.	Logarit.	Differẽ.	Logarit.	Sines.	
0	694658	364335	34914	329421	719340	60
1	694868	364034	34331	329702	719138	59
2	695077	363733	33749	329983	718935	58
3	695286	363432	33167	330265	718733	57
4	695495	363131	32585	330546	718531	56
5	695704	362831	32003	330828	718329	55
6	695913	362531	31421	331110	718126	54
7	696122	362231	30835	331392	717924	53
8	696330	361931	30257	331674	717721	52
9	696539	361631	29675	331956	717519	51
10	696748	361331	29093	332238	717316	50
11	696959	361032	28511	332521	717113	49
12	697165	360733	27929	332804	716911	48
13	697374	360434	27347	333087	716708	47
14	697582	360135	26765	333370	716505	46
15	697790	359836	26183	333653	716302	45
16	697999	359538	25601	333937	716099	44
17	698207	359239	25019	334220	715896	43
18	698415	358941	24437	334504	715693	42
19	698623	358643	23855	334788	715489	41
20	698832	358345	23273	335072	715286	40
21	699040	358048	22691	335357	715083	39
22	699348	357750	22109	335641	714880	38
23	699455	357453	21527	335926	714676	37
24	699663	357156	20945	336210	714473	36
25	699871	356859	20363	336495	714269	35
26	700079	356562	19782	336781	714065	34
27	700287	356266	19200	337066	713862	33
28	700494	355969	18618	337351	713658	32
29	700702	355673	18036	337637	713454	31
30	700909	355377	17454	337923	713250	30
						Min.

Deg. 45

Fonte: *Napier* (2010, p.200).

Em um outro exemplo, Napier explica como calcular a média proporcional (média geométrica), que segundo ele seria mais rápida, se utilizassem suas tabelas.

> Sejam os extremos 1000000 e 500000 dados, e seja buscada a proporção média: que comumente é encontrada multiplicando os extremos dados, um pelo outro, e extraindo a raiz quadrada do produto. Mas nós a encontramos antes assim; adicionamos o logaritmo dos extremos, 0 e 693147, cuja soma é 693147 que dividimos por 2 e o quociente 346573 será o logaritmo do proporcional médio desejado. Pelo qual o proporcional médio 707107, e seu arco de 45 graus, são encontrados antes... encontrados por adição apenas, e divisão por dois. (Napier, 2010, p.25)

A proporção média ou média proporcional é o valor dos meios em uma proporção contínua. Uma proporção contínua, por sua vez, é aquela em que a razão entre o primeiro e o segundo termo é igual à razão entre o segundo e o terceiro termo.

Se a, b e c estão em proporção contínua, então

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

a e c são conhecidos como os **extremos** da proporção e os **meios** são iguais a b.

Os problemas que envolvem proporções contínuas consistem em determinar um dos três números, conhecendo-se os outros dois, o que é feito igualando-se o produto dos extremos pelo produto dos meios:

Produto dos extremos = Produto dos meios

$$a \cdot c = b \cdot b$$

$$a \cdot c = b^2 \text{ ou } b^2 = a \cdot c$$

Logo, $b = \sqrt{a \cdot c}$ é a proporção média entre a e c. A proporção média também é conhecida como média geométrica. Em geral, esse problema era colocado no contexto geométrico, em que os números representavam as medidas de grandezas, então a solução é um número positivo.

Voltando ao problema de Napier, os extremos dados são 10 000 000 e 500 000 e a proporção média é pedida. Resolvendo pelo procedimento acima, teríamos:

$$\sqrt{10000000 \cdot 500000} = \sqrt{5000000000000} \approx 707106{,}78$$

Já a solução de Napier por meio dos seus logaritmos, se dava da seguinte forma:

- Primeiro, ele identificava o logaritmo de cada um dos números em suas tabelas.
- O logaritmo de 10000000 é zero e o logaritmo de 500000 é 693147.
- Napier, soma esses dois logaritmos, encontrando 693147.

$$\log_{Napier}(1000000) + \log_{Napier}(500000) = 0 + 693147 = 693147$$

- Em seguida, ele divide por 2, obtendo: 346573.

$$693147 \div 2 = 346573$$

- Para finalizar, ele volta nas tabelas para buscar o número que tem esse logaritmo, encontrando: 707 106.

Repare que o resultado de Napier confere com a parte inteira do resultado do problema, quando resolvido pela raiz quadrada do produto dos extremos.

Cara leitora, caro leitor, apresentamos neste resumo, como Napier concebeu sua ideia para os logaritmos, utilizando um modelo cinemático em que pontos percorrem semirretas e segmentos de reta. Um modelo que buscou associar progressões aritméticas com progressões geométricas, de modo a diminuir a lacuna entre os termos da progressão geométrica. Por isso, a primeira razão que Napier utilizou foi $1 - 10^{-7}$, um número bastante próximo de 1. Além disso, vimos também que Napier usou o número 10^7 como primeiro termo da primeira progressão geométrica formada (Tabela 2). Ele fez essa escolha porque não pretendia calcular logaritmos de números quaisquer, mas, sim, logaritmos dos senos de ângulos. 10^7 era o raio da circunferência utilizada e era o valor do seno de $90°$.

A trigonometria era amplamente utilizada na astronomia e na navegação da época. Muitas vezes, astrônomos e navegadores precisavam efetuar multiplicações, divisões, raízes quadradas, dentre outras operações, utilizando números grandes. Foi neste contexto, visando a atender essa demanda, para facilitar a vida desses praticantes da matemática, que Napier criou os logaritmos.

Mostramos também como Napier iniciou a montagem de suas tabelas, como ele buscava os logaritmos nas tabelas e como ele se utilizava das vantagens dessa ferramenta para resolver problemas.

Há muitas diferenças entre os "nossos" logaritmos e o modo como Napier os concebia. Para começar, calculamos logaritmos de números quaisquer (positivos e maiores que zero). Além disso, nosso conceito de logaritmo se apoia em uma base – por exemplo, logaritmo na base 10 (nesse caso, $\log 10 = 1$) – e o logaritmo do número 1 em qualquer base é zero.

Há diferenças na trigonometria também: nosso seno de $90°$ é 1 e não 10^7.

Enxergar essas diferenças é muito interessante, pois mostra como a matemática está em movimento, os conceitos podem se modificar ao longo do tempo.

Apesar de termos focado no modo como Napier concebeu os logaritmos, é importante notar que a busca por um recurso que facilitasse os cálculos estava na ordem do dia dos estudiosos do século XVI. Houve outro personagem que elaborou uma ferramenta bastante parecida com a de Napier: Jost Bürgi. E depois de Napier, outros estudiosos aprimoraram os logaritmos. Assim, a pergunta: "quem criou os logaritmos?" nem faz muito sentido do ponto de vista histórico! Faz mais sentido pensar que o conhecimento é produzido por pessoas participando de um mesmo contexto e período histórico.

Exemplos de tarefas para estudantes do Ensino Médio.

Tarefa 1: Relacionando Progressões Aritméticas e Geométricas

Observe a tabela a seguir.

P.A ($r = 1$)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
P.G ($q = 2$)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

1. Considerando a tabela acima, de que maneira ela pode ser útil para a efetuar as seguintes operações:
   a. 16×256
   b. $512 \div 16$
   c. $\sqrt{64}$

a. Note que os números da primeira linha da tabela que correspondem ao 16 e ao 256 são respectivamente, 4 e 8.
Ao somar $4 + 8 = 12$, identificamos o resultado da multiplicação de 16×256 na segunda linha, que é 4096.
Escrevendo na forma de potências, temos:

$$\mathbf{16 \times 256 = 2^4 \times 2^8 = 2^{4+8} = 2^{12} = 4096}$$

b. Veja na primeira linha da tabela que os números correspondentes a 512 e 16, são respectivamente, 9 e 4 e note que ao subtrair $9 - 4 = 5$, que corresponde a 32 na segunda linha da tabela. Este é, portanto, o resultado da divisão $512 \div 16$.
Escrevendo esses números na forma de potência, temos:

$$\mathbf{512 \div 16 = 2^9 \div 2^4 = 2^{9-4} = 2^5 = 32}$$

c. Escrevendo na forma de potência, temos:

$$\mathbf{\sqrt{64} = 64^{\frac{1}{2}} = (2^6)^{\frac{1}{2}} = 2^{6.\left(\frac{1}{2}\right)} = 2^3 = 8}$$

Através dos exemplos, podemos perceber que, com a tabela em mãos, encontramos os resultados das multiplicações e divisões, calculando adições e subtrações e para extrair a raiz quadrada, fazemos uma divisão por 2. Além disso, percebemos que

> Quando você estudou essas propriedades das potências, você reparou que elas eram úteis para

isso se justifica através das propriedades das potências estudadas anteriormente.

2. Agora, tente efetuar as operações a seguir. (Se houver necessidade, estenda a tabela)
   a. 32×64
   b. $128 \div 8$
   c. $2 \times 16 \times 32$
   d. $256 \div 64 \div 16$
   e. $\sqrt{256}$

Para pensar...

3. A tabela nos ajuda a calcular 81×27?

4. A tabela nos ajuda a calcular 16×27?

5. A tabela nos ajuda a calcular $\sqrt{32}$?

Tarefa 2: Equações Exponenciais

Ainda considerando a tabela da Tarefa 1, resolva as questões a seguir.

P.A ($r = 1$)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
P.G ($q = 2$)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

1. É possível calcular o valor de x nas equações a seguir, apenas olhando a tabela?
   Se a sua resposta for sim, dê o resultado.
   Se for não, tente explicar o porquê?
   Sugestão: estenda a tabela, se houver necessidade.

   a. $2^x = 16$
   b. $2^x = 512$
   c. $2^x = 16$
   d. $2^x = \frac{1}{4}$
   e. $2^x = 5$

2. Vamos usar uma planilha eletrônica para resolver a equação $2^x = 5$.
   Mas antes, pense sobre isso e tente estimar o valor de x.
   a. Você acha que o valor de x é um número inteiro? Explique seu raciocínio.
   b. Se x não for um número inteiro, tente aproximá-lo. Entre quais dois números inteiros ele deve estar?
   c. Resolva a equação $2^x = 5$, utilizando uma planilha eletrônica.

Numa planilha eletrônica, crie duas colunas, uma para o expoente x e outra para o resultado de 2^{x}.
Na 1ª coluna dê valores para os expoentes. Já na segunda coluna, peça que se obtenha o resultado de 2^{x} – escreva a fórmula e utilize a célula correspondente ao expoente.
Vá variando o valor dos expoentes na 1ª coluna e observe quando o valor se aproxima de 5.

Tarefa 3: Conhecendo um pouco sobre como Napier utilizou tabelas de PA e PG para criar os logaritmos

Na tarefa "Relacionando Progressões Aritméticas e Geométricas", você percebeu como é possível simplificar algumas operações. Isto é, percebeu que para multiplicar 128 por 512, basta identificar que 128 está associado a 7 e 512 a 9. Então, somando 7 a 9, que dá 16, vamos na tabela e vemos a qual númer16 está identificado, obtendo, assim, o resultado. Repare que neste caso, a tabela precisa ser estendida – o que não parece ser um problema para gente hoje em dia.

6	7	8	9	10	11	12	...	15	16	...
64	128	256	512	1024	2048	4096	...	32768	65536	...

Mas será que foi sempre assim?

Vamos mergulhar na história e ver como John Napier pensou no século XVII.

Repare que hoje em dia com calculadoras e computadores potentes esse problema não parece um problema... Mas é preciso lembrar que estamos no século XVII e que todos os cálculos eram feitos a

Para entender como Napier pensou precisamos observar a tabela. Repare que a distância entre os números da linha debaixo – correspondente às potências de 2 –, aumenta cada vez mais. De 32 para 64 a distância é 32, mas de 2048 para 4096 é de 2048.

Além do problema de só podermos multiplicar números potências de 2, também tem essa questão da distância.

E se fosse preciso multiplicar 521 por 703? Como uma tal tabela poderia ajudar?

Para que essa tabela seja eficiente, é necessário reduzir as lacunas o máximo possível. Napier, pensou muito sobre isso e para transpor o obstáculo, ele resolveu construir uma tabela com uma P.G de razão muito próxima de 1. (0,999999 = $1-\frac{1}{10^7}$) e como primeiro elemento 10^7.

1. A seguir temos uma tabela com esses valores. Você deve completa-la. Comece pensando em como ela "funciona", depois que entender, pode ser interessante utilizar uma planilha eletrônica.

P. A	P.G (Napier)
0	10 000 000
1	9 999 999
2	9 999 998
3	9 999 997
4	
5	
	9 999 994
8	9 999 992
10	9 999 990
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	

Esta foi a primeira tabela gerada por Napier, com 101 logaritmos, até o número 9999900.0004950.

Napier usava 7 casas decimais após a

Comece identificando,

a. o primeiro termo da PG
b. a razão da PG

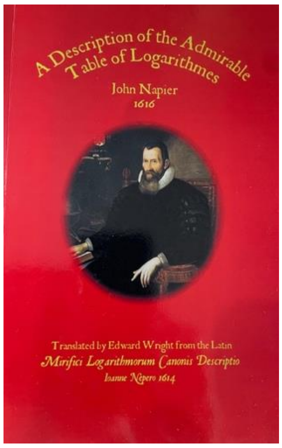
Com isso,

c. qual é o termo da PG associado ao termo 4 da PA?
d. qual é o termo da PG associado ao termo 5 da PA?
e. complete a tabela.

Tarefa 4: Encontrando logaritmos nas tabelas de Napier

Na Tarefa 3 "Conhecendo um pouco sobre como Napier utilizou tabelas de PA e PG para criar os logaritmos", inspirado no trabalho de Napier, você montou uma tabela com número muito grandes.

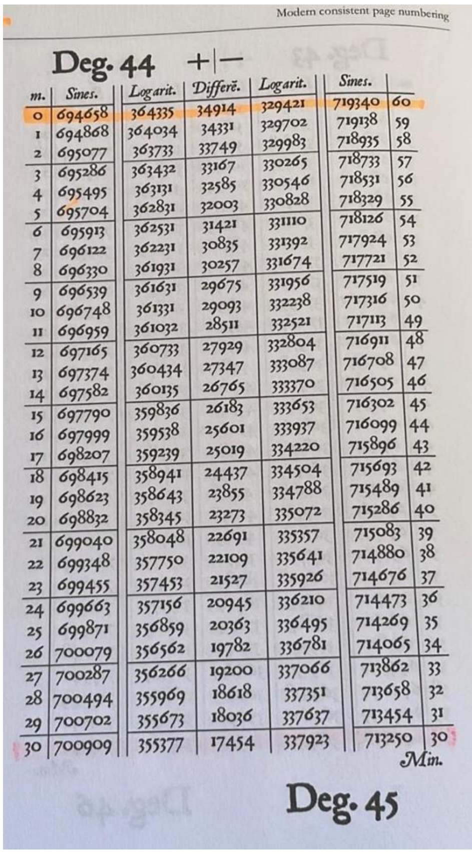
Napier, montou várias tabelas com progressões geométricas, utilizando outras razões. Após essa etapa, ele associou os números presentes nessas tabelas aos valores de senos dos ângulos de 0 grau a 90 graus, considerando os 60 minutos para cada grau. Assim, ele não formou tabelas de logaritmos para números quaisquer, mas para os senos desses ângulos. Isso porque, ele voltou a ferramenta que estava criando para as necessidades da astronomia e da navegação, que envolvia muitos cálculos trigonométricos.



Napier demorou 20 anos para escrever 90 páginas com os logaritmos que foram publicados em 1614, em seu livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Descritpion* (Uma Descrição da Maravilhosa tábua de logaritmos), escrito em latim, que era a língua utilizada pelos intelectuais da época.

Neste livro, Napier explica no seu primeiro exemplo, como calcular o logaritmo de um seno dado.

> Procuro o logaritmo do seno 694658. Encontro esse seno, precisamente na segunda coluna, correspondendo ao arco de 44 graus e 0 min, na mesma linha da terceira coluna, diante dele, está o logaritmo 364335, que busquei. (Napier, 2010, p.14)



Modern consistent page numbering

Deg. 44 + | —

m.	Sines.	Logarit.	Differẽ.	Logarit.	Sines.	
0	694658	364335	34914	329421	719340	60
1	694868	364034	34331	329702	719138	59
2	695077	363733	33749	329983	718935	58
3	695286	363432	33167	330265	718733	57
4	695495	363131	32585	330546	718531	56
5	695704	362831	32003	330828	718329	55
6	695913	362531	31421	331110	718126	54
7	696122	362231	30835	331392	717924	53
8	696330	361931	30257	331674	717721	52
9	696539	361631	29675	331956	717519	51
10	696748	361331	29093	332238	717316	50
11	696959	361032	28511	332521	717113	49
12	697165	360733	27929	332804	716911	48
13	697374	360434	27347	333087	716708	47
14	697582	360135	26765	333370	716505	46
15	697790	359836	26183	333653	716302	45
16	697999	359538	25601	333937	716099	44
17	698207	359239	25019	334220	715896	43
18	698415	358941	24437	334504	715693	42
19	698623	358643	23855	334788	715489	41
20	698832	358345	23273	335072	715286	40
21	699040	358048	22691	335357	715083	39
22	699348	357750	22109	335641	714880	38
23	699455	357453	21527	335926	714676	37
24	699663	357156	20945	336210	714473	36
25	699871	356859	20363	336495	714269	35
26	700079	356562	19782	336781	714065	34
27	700287	356266	19200	337066	713862	33
28	700494	355969	18618	337351	713658	32
29	700702	355673	18036	337637	713454	31
30	700909	355377	17454	337923	713250	30
						Min.

Deg. 45

1. Observe a tabela de Napier que contém os ângulos de $44°$. Siga o exemplo descrito e constate que $\log_{nap} 694658 = 364335$

2. Considerando a mesma tabela, determine:
   a. Qual é o valor do logaritmo do seno de 698415?
   b. Qual é o ângulo correspondente a esse seno?

Tarefa 5 Explorando como os logaritmos eram utilizados por Napier.

Em um outro exemplo, Napier explica como calcular a proporção média, que segundo ele será mais rápido, se utilizassem suas tabelas.

> Sejam os extremos 1000000 e 500000 dados, e seja buscada a proporção média: que comumente é encontrada multiplicando os extremos dados, um pelo outro, e extraindo a raiz quadrada do produto. Mas nós a encontramos antes assim; adicionamos o logaritmo dos extremos, 0 e 693147, cuja soma é 693147 que dividimos por 2 e o quociente 346573 será o logaritmo do proporcional médio desejado. Pelo qual o proporcional médio 707107, e seu arco de 45 graus, são encontrados antes... encontrados por adição apenas, e divisão por dois. (Napier, 2010, p.25)

O que Napier chama de proporção média no trecho acima tem relação com o seguinte problema:

Considere três números a, b e c, que satisfazem a seguinte proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

a e c são conhecidos como os extremos da proporção e os **meios** são iguais a b, que também é chamado de **proporção média**.

Para determinar a proporção média, fazemos o seguinte:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow a \cdot c = b \cdot b \Rightarrow a \cdot c = b^2$$

$$b^2 = a \cdot c$$

Para finalizar, extraímos a raiz quadrada: $b = \sqrt{a \cdot c}$.

A proporção média é hoje conhecida como **média geométrica**.

Vamos a um exemplo: calcular a média geométrica entre os números 4 e 16.

Multiplicamos esses números e, em seguida, calculamos a raiz quadrada:

$$\text{Mg}(4;\ 16) = \sqrt{4 \times 16} = 8$$

Assim, 8 é a média geométrica entre 4 e 16.

Agora vamos a como Napier utilizou os logaritmos para resolver este problema. Ele adicionou o logaritmo dos extremos, ou seja, dos números 10000000 e 500000. Para isso, ele consultou suas tabelas para identificar esses logaritmos:

$$log_{nap}1000000 = 0 \text{ e } \quad log_{nap}500000 = 693147$$

Assim, ele encontrou: $log_{nap}1000000 + log_{nap}500000 = 0 + 693147 = 693147$

Em seguida, ele dividiu esse resultado por 2:

$$693147 \div 2 = 346573$$

Esse resultado é o logaritmo da proporção média que ele está buscando.

Assim, ele consultou novamente as suas tabelas para identificar o número que tem como logaritmo 346573 e encontrou 707106.

Portanto a proporção média é 707106, conforme o necessário.

Agora é a sua vez de fazer contas!

1. Calcule a proporção média dos números 10000000 e 500000, multiplicando esses números e, em seguida, extraindo a raiz quadrada. Tente resolver sem usar calculadora!
2. Utilize uma calculadora para confirmar o seu resultado calculado à mão e compare seu resultado com o encontrado por Napier.

Construindo uma sequência didática

Apresentamos aqui uma sugestão de sequência didática à luz das tarefas que apresentamos anteriormente. Antes de descrevê-la, indicamos vantagens e desvantagens de cada uma das tarefas, de modo que fique claro o que cada uma trabalha e o que deixa de trabalhar.

Tarefa 1: Relacionando Progressões Aritméticas e Geométricas

De modo geral, esta tarefa é uma oportunidade de utilizar o conhecimento sobre potências e propriedades de potências como um recurso que pode agilizar alguns cálculos, preparando para a introdução do conceito formal de logaritmos.

Entretanto é preciso ter atenção, pois alguns estudantes podem demonstrar desinteresse ao assumirem uma postura passiva. Isso porque estão habituados a receber informações prontas do professor, sem a necessidade de refletir ativamente sobre a atividade.

Objetivos da tarefa:

1. Compreender a relação entre progressões aritméticas e geométricas por meio da análise da tabela fornecida.
2. Resolver equações matemáticas utilizando a tabela como ferramenta auxiliar e associando a soma, a subtração e a divisão por 2 à multiplicação, à divisão e à extração de raízes quadradas, respectivamente.
3. Resolver operações utilizando a estrutura da tabela e verificar sua aplicabilidade em diferentes casos, avaliando sua eficiência e limitações.
4. Investigar a aplicabilidade da tabela em cálculos envolvendo números que não seguem a base 2, como no caso de 81×27e 16×27.
5. Observar as limitações da tabela quando nos deparamos com expoentes que não estão registrados.

Tarefa 2: Equações Exponenciais.

Essa tarefa visa a auxiliar o estudante a conectar seu conhecimento sobre equações exponenciais ao conceito de logaritmo, criando uma base sólida para sua introdução.

Contudo, algumas dificuldades podem surgir quando o expoente a ser encontrado não é um número inteiro. Caso seja necessário, sugerimos explorar outros expoentes racionais e aumentar a tabela. Ainda que surjam dificuldades, acreditamos que a estratégia de explorar equações exponenciais por meio da tabela e da planilha eletrônica é excelente para incentivar a intuição e o senso numérico dos estudantes.

Objetivos da tarefa:

1. Análise da tabela para resolver equações exponenciais
   - Reconhecer padrões na Tarefa 1 e utilizá-los para determinar o valor de x em equações exponenciais simples.
   - Identificar quando uma equação exponencial pode ser resolvida apenas observando a tabela e quando isso não é possível.
   - Compreender a relação entre expoentes inteiros, fracionários e negativos, observando como os valores correspondentes são organizados na progressão geométrica.

2. Uso da planilha eletrônica para resolver a equação exponencial.
   - Refletir sobre a natureza dos expoentes na equação $2^x = 5$ e antecipar se a solução será um número inteiro ou não.
   - Explorar o uso de ferramentas tecnológicas, como planilhas eletrônicas, para aproximar soluções de equações exponenciais que não podem ser resolvidas apenas reescrevendo as bases.

- Interpretar os resultados da planilha e compreender como a aproximação numérica permite encontrar soluções para equações exponenciais complexas.
- Relacionar a resolução numérica com o conceito de logaritmos, preparando o caminho para a introdução formal dessa ferramenta matemática.

Encaminhamento para a discussão.

Sugerimos que o/a professor/a, primeiro analise as ideias que os estudantes apresentem e esteja atento/a aos seus raciocínios e argumentos.

Deixamos como sugestão o uso de uma planilha eletrônica para calcular algumas potências de base 2, compartilhando a planilha com a turma e construindo com eles, com expoentes racionais, cujo resultado se aproxime de 5. A ideia é obter uma aproximação racional do expoente x tal que $2^x = 5$.

A seguir apresentamos uma tabela com os resultados das investigações sobre o valor de x.

Expoente	Resultado
0	1
1	2
2	4
3	8
2,2	4,59479342
2,3	4,924577653
2,31	4,9588308
2,32	4,993322196
2,321	4,996784503
2,3219	4,999902631
2,322	5,00024921

Observando os resultados na planilha, verificamos que x não é um número inteiro, pois:

$$2^{2,3219} = 4,999902631 \text{ e } 2^{2,322} = 5,00024921$$

Nesse caso $2,3219 < x < 2,322$, concluímos que x é aproximadamente 2, 32.

Tarefa 3: Conhecendo um pouco sobre como Napier utilizou tabelas de PA e PG para criar os logaritmos.

Esta tarefa proporciona uma experiência histórica para os estudantes.

É de se esperar que os estudantes tenham dificuldades em lidar com números grandes. Sugerimos o uso de calculadora ou até mesmo de uma planilha eletrônica.

Objetivos da tarefa:

1. Proporcionar uma experiência histórica.
2. Observar a necessidade de formar sequências de progressões geométricas de modo a reduzi a lacuna entre os seus termos.
3. Sentir as dificuldades que Napier teve ao criar as tabelas.

Tarefa 4: Encontrando logaritmos nas tabelas de Napier.

Esta tarefa proporciona a oportunidade de analisar uma página do livro *Descritpio* de Napier, ou seja, de ter contato com uma fonte histórica primária (ainda que seja uma tradução).

Dificuldades podem surgir por conta da trigonometria e da representação em minutos de um ângulo. Mas, é uma oportunidade de mostrar que os conceitos surgem de forma conectada, tanto a outros conceitos, como também às demandas de uma sociedade, neste caso, facilitar a vida dos astrônomos com as contas tediosas, por exemplo.

Objetivo da tarefa:

1. Aproximar o estudante do contexto histórico em que os logaritmos foram criados por Napier, a partir do contato com uma fonte histórica.

Tarefa 5 Explorando como os logaritmos eram utilizados por Napier.

Esta é mais uma tarefa que proporciona uma experiência histórica, se colocando no contexto em que os logaritmos foram criados.

Dificuldades podem surgir com a proposta de se fazer um cálculo envolvendo números grandes, mas a tarefa é uma provocação para os estudantes experimentarem as dificuldades que os estudiosos dos séculos XVI e XVII vivenciavam.

Objetivo da tarefa:

1. Explorar como Napier utilizava os logaritmos para resolver problemas, simplificando os cálculos.

Uma sequência didática

Sugerimos que as tarefas 1, 2 e 3 sejam desenvolvidas ao longo de duas aulas (100 minutos) e que as tarefas 4 e 5 sejam realizadas em uma aula (50 minutos). Na tabela a seguir sintetizamos a nossa sugestão de sequência didática baseada nas tarefas expostas anteriormente. Nela você encontra objetivos, as vantagens e as limitações de cada tarefa, tornando claro o que cada uma aborda e quais aspectos não são trabalhados.

Aula 1	**objetivo**	**tarefas**	**tempo**
Introdução e revisão de conceitos	▪ Revisão PA e PG para preparar o terreno para a introdução dos logaritmos. ▪ Revisão das propriedades das potências e equações exponenciais simples.	**1**	50 min

Tarefa 1	**objetivos**	**justificativa**	**limitações**
Os alunos resolvem operações utilizando uma tabela que conecta PA e PG, identificando padrões. Discussão sobre como as propriedades das potências podem ser úteis em cálculos matemáticos.	▪ Compreender a relação entre progressões aritméticas e geométricas a partir da análise da tabela fornecida, utilizando-a como ferramenta para resolver equações matemáticas e operações diversas. ▪ Explorar sua aplicabilidade e limitações, especialmente em cálculos que não seguem a base 2, e refletir sobre a argumentação matemática, incluindo a possibilidade de aproximação quando os expoentes não são inteiros.	Ativa conhecimentos prévios sobre as propriedades das potências, progressões aritméticas e geométricas, introduzindo a ideia central da relação entre progressões e logaritmos de maneira intuitiva.	Alguns estudantes podem demonstrar desinteresse ao assumirem uma postura passiva, habituados a receber informações prontas do professor, sem a necessidade de refletir ativamente sobre a atividade.

Aula 2	objetivo	tarefas	tempo
Descobrindo os Logaritmos a partir das Equações Exponenciais.	▪ Evidenciar a necessidade dos logaritmos ao explorar equações exponenciais de difícil resolução, destacando casos em que os expoentes não são inteiros. Utilizar planilhas eletrônicas para obter aproximações e contextualizar historicamente o surgimento dos logaritmos, analisando como John Napier os desenvolveu e organizou para facilitar cálculos.	**2 e 3**	50 min

Tarefa 2	objetivos	justificativa	limitações
	▪ Mostrar que algumas equações exponenciais não podem ser resolvidas facilmente e introduzir a necessidade dos logaritmos. ▪ Explorar equações da forma $2^x = 5$, mostrando que alguns expoentes não são inteiros. ▪ Usar planilhas eletrônicas para buscar aproximações.	Ter a oportunidade de perceber que algumas equações exponenciais exigem um novo conceito, já que não é possível igualar as bases das potências, criando a necessidade de introduzir os logaritmos.	Dificuldades podem surgir quando o expoente a ser encontrado não é um número inteiro. Pode ser necessário explorar outros expoentes racionais e aumentar a tabela. Ainda que surjam dificuldades, a estratégia de explorar equações exponenciais por meio da tabela e da planilha eletrônica é excelente para incentivar a intuição e o senso numérico dos estudantes.

Tarefa 3	objetivos	justificativa	limitações
	▪ Proporcionar experiência histórica ao explorar a necessidade de formar PGs para reduzir a lacuna entre seus termos, vivenciando os desafios enfrentados por Napier na criação de suas tabelas.	Perceber que os logaritmos surgiram da necessidade prática de simplificar cálculos, conectando a matemática ao seu desenvolvimento histórico.	Possíveis dificuldades em lidar com números grandes. O uso de calculadora ou de planilha eletrônica pode ser útil.

Aula 3	objetivo	tarefas	tempo
Explorando as Tabelas de Napier, aplicação dos Logaritmos e Conexão com a Média Geométrica.	▪ Aproximar o estudante do contexto histórico da criação dos logaritmos por Napier, por meio do contato com uma fonte histórica, e explorar como ele os utilizava para simplificar cálculos e resolver problemas matemáticos.	**4 e 5**	50 min

Tarefa 4	objetivos	justificativa	limitações
	▪ Aproximar o estudante do contexto histórico em que os logaritmos foram criados por Napier, a partir do contato com uma fonte histórica. ▪ Interpretar trechos do *Descriptio*, explorando tabelas históricas. ▪ Discutir sobre como essas tabelas foram utilizadas na navegação e astronomia.	Aproxima os alunos da história e incentiva a leitura de fontes históricas para compreender como os logaritmos foram estruturados.	Dificuldades podem surgir por conta da trigonometria e da representação em minutos de um ângulo. Aproveite a oportunidade de mostrar que os conceitos surgem de forma conectada, tanto a outros conceitos, como também às demandas de uma sociedade.

Tarefa 5	objetivos	justificativa	limitações
	▪ Explorar como Napier utilizava os logaritmos para resolver problemas, simplificando os cálculos. ▪ Comparação entre o método de Napier e o cálculo moderno da média geométrica. ▪ Reflexão sobre como a matemática evolui e simplifica cálculos com o tempo.	Conectar logaritmos a um conceito já familiar aos alunos ajuda a solidificar a compreensão do seu uso prático.	Dificuldades podem surgir com a proposta de se fazer um cálculo envolvendo números grandes. A tarefa é uma provocação para os estudantes experimentarem as dificuldades que os estudiosos dos séculos XVI e XVII vivenciavam.

Acreditamos que, ao final dessas atividades, os estudantes serão capazes de responder às seguintes questões:

- Quem criou os logaritmos?
- Por que alguém pensaria nisso?

- Em que contexto os logaritmos foram desenvolvidos?

Além disso, terão adquirido as bases necessárias para avançar para as próximas etapas, que incluem a formalização dos conceitos por meio das definições, propriedades e, por fim, a introdução da função logarítmica.

Encorajamos você leitora e você leitor a avaliar as tarefas sugeridas e pensar como pode utilizá-las em suas aulas considerando, para tanto, as particularidades das suas turmas e os recursos que t6em a sua disposição. Esperamos que a leitura deste livro tenha contribuído para o seu conhecimento sobre os logaritmos e o/a leve a refletir sobre a melhor maneira de ensiná-los.

Algumas referências

NAPIER, J. The Description of the Wonderful Canon of Logarithms, Edimburgo, 1614- Tradução do Latim para o Inglês de Edward Writh, 2010, Londres: Nicolas Oaks, 1616.

NAPIER, J. The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms, Edimburgo, 1619- Tradução do Latim para o Inglês de William Rae Macdonald, ALPHA Editions, 2019,

ISHIARA, C. Akemi; SANTOS, Neide Pessoa dos – Matemática ensino médio, 1° ano – Brasília: Cisbrasil, 2010. (Coleção RSE).

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em Contextos: Função exponencial, função logarítmica e sequências.1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

CLARK, Kathleen M.; MONTELLE, Clemency. Priority, parallel discovery, and pre-eminence Napier, Bürgi and the early history of the logarithm relation. **Revue d'histoire des mathématiques**, v. 18, n. 2, p. 223-270, 2012.