Universidade Federal do ABC

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Paulo Carvalhaes Cury

Uma proposta para ensinar geometria analítica pela ótica Wittgensteiniana dos jogos de linguagem e das semelhanças de família

Santo André, SP

2025

Paulo Carvalhaes Cury

Uma proposta para ensinar geometria analítica pela ótica Wittgensteiniana dos jogos de linguagem e das semelhanças de família

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do ABC para obtenção do título de Mestre em Matemática - Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Boero

Santo André, 2025

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Carvalhaes Cury, Paulo
Uma proposta para ensinar geometria analítica pela ótica Wittgensteiniana dos jogos de linguagem e das semelhanças de família / Paulo Carvalhaes Cury. — 2025.

273 fls. : il.

Orientação de: Boero Ana Carolina

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2025.

1. Geometria Analítica. I. Ana Carolina, Boero. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2025. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência da orientadora.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 - Bairro Santa Terezinha - Santo André - SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

Ata de Defesa de Dissertação de Mestrado e Folha de Assinaturas

No dia 19 de Setembro de 2025 às 16:00, no local: Sala 407 do Bloco B do Campus de Santo André da Universidade Federal do ABC, realizou-se a Defesa da Dissertação de Mestrado, que constou da apresentação do trabalho intitulado "Uma proposta para ensinar geometria analítica pela ótica Wittgensteiniana dos jogos de linguagem e das semelhanças de família" de autoria do candidato, PAULO CARVALHAES CURY, RA nº 22202210345, discente do Programa de Pós-Graduação em MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da UFABC, sob orientação da Profª ANA CAROLINA BOERO. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi considerado APROVADO pela Banca Examinadora.

E, para constar, foi lavrada a presente ata e folha de assinaturas assinada pelos membros da Banca.

Dra. ANA CAROLINA BOERO, UFABC
Presidente - Interno ao Programa

Márcio Fabiano da Silva

Dr. MARCIO FABIANO DA SILVA, UFABC
Membro Titular - Examinador(a) Interno ao Programa

Gleiciane da Silva Aragão

Dra. GLEICIANE DA SILVA ARAGÃO, UNIFESP
Membro Titular - Examinador(a) Externo à Instituição

Dr. EDUARDO GUERON, UFABC
Membro Suplente - Examinador(a) Interno ao Programa

Dr. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS, USP
Membro Suplente - Examinador(a) Externo à Instituição

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001”

Dedico este trabalho,

À Adriane, minha mulher e companheira, das horas fáceis e das difíceis.

Ao meu filho Matheus e nora Willi.

Ao meu filho Lucas.

Às memórias de meus pais, Therezinha e Jorge.

À memória de minha esposa Alexandra.

Às minhas sobrinhas, Lenice e Lorrane.

A todos, meu amor eterno.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Ana Carolina Boero, pela sua competência, pela sua dedicação, pelo seu profissionalismo e, especialmente, pela sua paciência. De outro modo este trabalho não existiria. A você, Ana, meu muito obrigado.

Um monge descabelado me disse no caminho: "Eu queria construir uma ruína. Embora eu saiba que ruína é uma desconstrução. Minha ideia era de fazer alguma coisa ao jeito de tapera. Alguma coisa que servisse para abrigar o abandono, como as taperas abrigam. Porque o abandono pode não ser apenas de um homem debaixo da ponte, mas pode ser também de um gato no beco ou de uma criança presa num cubículo. O abandono pode ser também de uma expressão que tenha entrado para o arcaico ou mesmo de uma palavra. Uma palavra que esteja sem ninguém dentro.(O olho do monge estava perto de ser um canto.) Continuou: digamos a palavra AMOR. A palavra amor está quase vazia. Não tem gente dentro dela. Queria construir uma ruína para a palavra amor. Talvez ela renascesse das ruínas, como o lírio pode nascer de um monturo". E o monge se calou descabelado.

(Manoel de Barros, *Ruína*)

RESUMO

O presente trabalho consiste em uma proposta de ensino de geometria analítica plana para o segundo ano do Ensino Médio tendo como embasamento didático-teórico as ideias de jogos de linguagem e semelhanças de família de Wittgenstein. Este material desenvolve a matemática com o rigor que lhe é próprio, além de apresentar propostas de jogos normativos de linguagem para que o estudante possa construir sua própria cultura e conhecimento matemático. Da localização de pontos em um plano cartesiano ortogonal às cônicas, passando por retas, circunferências e suas equações, tudo é recheado de outros conteúdos já estudados em séries anteriores. Como, de certo modo, tornou-se um memorial de nossos 43 anos do exercício contínuo do magistério na Educação Básica, há apêndices desenvolvidos para apoio ao professor, nos quais apresentamos os axiomas de Hilbert para a geometria plana e uma construção detalhada dos números reais via cortes de Dedekind. Através das semelhanças de famílias, buscamos explicitar uma prática cotidiana de sala de aula, correlacionando vários conteúdos da matemática com o intuito de facilitar a nova aprendizagem, pois acreditamos que o vínculo com o conhecimento passado favorece a assimilação do novo.

Palavras-chave: geometria analítica plana; jogos normativos de linguagem; semelhanças de família; Wittgenstein; reta; circunferência; cônicas; cortes de Dedekind.

ABSTRACT

This work presents a proposal for teaching analytic geometry to second-year high school students, grounded in Wittgenstein's didactic-theoretical concepts of language games and family resemblances. The material develops mathematics with its own rigor, while also introducing proposals for normative language games that enable students to construct their own mathematical culture and knowledge. From locating points on the Cartesian plane to the study of conics, including lines, circles, and their equations, the approach is richly filled with concepts already studied in previous grades. As it has, in a sense, become a memorial to our 43 years of continuous teaching in basic education, the work also includes appendices designed to support teachers, in which we present Hilbert's axioms for plane geometry and a detailed construction of the real numbers through Dedekind cuts. By means of family resemblances, we seek to explain everyday classroom practices, correlating diverse mathematical contents with the aim of facilitating new learning, since we believe that connecting past knowledge with new concepts fosters deeper assimilation.

Keywords: plane analytic geometry; normative language games; family resemblances; Wittgenstein; straight line; circle, conics; Dedekind cuts.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Sistema de contagem do povo Xerente. (Fonte: [18]). 37
Figura 1.2 Exemplo de código de habilidade para o Ensino Médio. (Fonte: [2]) 43
Figura 1.3 Exemplo de código de habilidade para o Ensino Fundamental. (Fonte: [2]) 44
Figura 2.1 $x_P > 0$. (Fonte: elaboração do autor) 56
Figura 2.2 $x_P < 0$. (Fonte: elaboração do autor) 56
Figura 2.3 Ilustração das Jogadas 1 e 2. (Fonte: elaboração do autor) . . . 60
Figura 2.4 Ilustração da Jogada 1. (Fonte: elaboração do autor) 62
Figura 2.5 Localização do ponto médio utilizando régua e compasso. (Fonte: elaboração do autor) 62
Figura 2.6 Triângulo retângulo. (Fonte: elaboração do autor) 65
Figura 2.7 Passos 1 e 2. (Fonte: elaboração do autor) 66
Figura 2.8 Passo 3. (Fonte: elabaoração do autor) 67
Figura 2.9 Passo 4. (Fonte: elaboração do autor) 67
Figura 2.10 Passo 5. (Fonte: elaboração do autor) 67
Figura 2.11 Passo 6. (Fonte: elaboração do autor) 68
Figura 2.12 Ponto X pertencente ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ (Fonte: elaboração do autor). 68
Figura 2.13 Ilustração da Jogada 1. (Fonte: elaboração do autor) 70
Figura 2.14 Baricentro. (Fonte: elaboração do autor) 72
Figura 2.15 Divisão de um segmento em secção áurea. (Fonte: elaboração do autor) 74
Figura 3.1 Eixos ortogonais. (Fonte: elaboração do autor) 86
Figura 3.2 Localização do ponto P. (Fonte: elaboração do autor) 87
Figura 3.3 Localização de pontos no plano. (Fonte: elaboração do autor) . 90
Figura 3.4 Localização dos pontos A a L. (Fonte: elaboração do autor) . . 92
Figura 3.5 Segmento de reta $\overline{AB}$. (Fonte: elaboração do autor) 95
Figura 3.6 Teorema de Tales. (Fonte: elaboração do autor) 96
Figura 3.7 Ponto médio M do segmento $\overline{AB}$. (Fonte: elaboração do autor) 97

Figura 3.8 Ponto médio de segmento horizontal. (Fonte: elaboração do autor) . . . 99
Figura 3.9 Ponto médio de segmento vertical. (Fonte: elaboração do autor) 101
Figura 3.10 Ponto médio do segmento $\overline{AB}$. (Fonte: elaboração do autor) . . 103
Figura 3.11 Distância entre dois pontos de mesma ordenada. (Fonte: elaboração do autor) . . . 106
Figura 3.12 Distância entre dois pontos de mesma abscissa. (Fonte: elaboração do autor) . . . 107
Figura 3.13 Distância entre dois pontos no plano. (Fonte: elaboração do autor) . . . 108
Figura 3.14 Reta inclinada para esquerda. (Fonte: elaboração do autor) . . . 117
Figura 3.15 Reta vertical. (Fonte: elaboração do autor) . . . 118
Figura 3.16 Reta horizontal. (Fonte: elaboração do autor) . . . 118
Figura 3.17 Reta inclinada para a direita. (Fonte: elaboração do autor) . . . 119
Figura 3.18 Circunferência de centro $C = (3,7)$ e raio $r = 3$. (Fonte: elaboração do autor) . . . 125
Figura 4.1 Reta horizontal. (Fonte: elaboração do autor) . . . 134
Figura 4.2 Reta inclinada para a direita. (Fonte: elaboração do autor) . . . 135
Figura 4.3 Reta vertical. (Fonte: elaboração do autor) . . . 136
Figura 4.4 Reta inclinada para esquerda. (Fonte: elaboração do autor) . . . 137
Figura 4.5 Reta que passa pelos pontos $A = (-3,-7)$ e $B = (2,8)$. (Fonte: elaboração do autor) . . . 139
Figura 4.6 $\Delta y = BC$ e $\Delta x = CA$. (Fonte: elaboração do autor) . . . 140
Figura 4.7 Retas paralelas e ângulos correspondentes congruentes. (Fonte: elaboração do autor) . . . 145
Figura 4.8 Retas paralelas inclinadas para a direita. (Fonte: elaboração do autor) . . . 146
Figura 4.9 Tangente e cotangente no círculo trigonométrico. (Fonte: elaboração do autor) . . . 149
Figura 4.10 Retas perpendiculares. (Fonte: elaboração do autor) . . . 151
Figura 4.11 Retas paralela e perpendicular à reta r dada. (Fonte: elaboração do autor) . . . 155
Figura 4.12 Cálculo de $\cos(a+b)$. (Fonte: elaboração do autor) . . . 159
Figura 4.13 Declividade positiva. (Fonte: elaboração do autor) . . . 162
Figura 4.14 Declividade negativa. (Fonte: elaboração do autor) . . . 163

Figura 4.15	Ângulo entre duas retas não verticais. (Fonte: elaboração do autor)	164
Figura 4.16	Translação de eixos coordenados. (Fonte: elaboração do autor)	166
Figura 4.17	Jogo da translação de eixos coordenados. (Fonte: elaboração do autor)	168
Figura 4.18	Distância da origem à reta r. (Fonte: elaboração do autor)	169
Figura 5.1	Retas passando pelo ponto P tangentes à circunferência. (Fonte: elaboração do autor)	179
Figura 5.2	Triângulo formado pelos pontos dados. (Fonte: elaboração do autor)	185
Figura 5.3	Circunferência por três pontos não colineares. (Fonte: elaboração do autor)	188
Figura 6.1	Distância do ponto P ao foco F é igual à distância de P à diretriz d. (Fonte: elaboração do autor)	198
Figura 6.2	Diretriz e foco da parábola. (Fonte: elaboração do autor)	200
Figura 6.3	Parábola de foco $F = (2, 4)$ e diretriz $y = -3$. (Fonte: elaboração do autor)	201
Figura 6.4	Parábola com vértice na origem. (Fonte: elaboração do autor)	202
Figura 6.5	Parábola com vértice em (x_v, y_v). (Fonte: elaboração do autor)	203
Figura 6.6	Elipse dada por diretriz e foco. (Fonte: [13])	205
Figura 6.7	Elipse. (Fonte: elaboração do autor)	209
Figura 6.8	Elipse. (Fonte: elaboração do autor)	211
Figura 6.9	Elipse com centro sobre a origem e eixo maior sobre o eixo x. (Fonte: [13])	212
Figura 6.10	Hipérbole dada por diretriz e foco. (Fonte: [13])	214
Figura 6.11	Hipérbole. (Fonte: elaboração do autor)	218
Figura 6.12	Hipérbole. (Fonte: elaboração do autor)	221
Figura 6.13	Hipérbole com centro na origem. (Fonte: elaboração do autor)	222
Figura 6.14	Assíntotas da hipérbole. (Fonte: elaboração do autor)	224
Figura 6.15	Rotação de eixos. (Fonte: elaboração do autor)	226
Figura B.1	Relação de ordem em $\mathcal{D}$. (Fonte: [19])	248
Figura B.2	Ilustração do corte oposto inspirada em [19]. (Fonte: elaboração do autor)	253
Figura B.3	O translado de α por r. (Fonte: [19])	254
Figura B.4	Ilustração do corte inverso inspirada em [19]. (Fonte: elaboração do autor)	264

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS 19

INTRODUÇÃO 27

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 31

1.1 Breves palavras sobre Ludwig Wittgenstein e seu legado 31

1.2 Os jogos de linguagem de Wittgenstein 32

1.3 A noção de semelhanças de família 35

1.4 O uso dos jogos de linguagem matemáticos no ensino da matemática . . 37

1.5 Apoiando o aluno na construção do seu mundo matemático 38

1.6 Sobre a BNCC 39

2 COORDENADAS NA RETA 53

2.1 Coordenadas na reta 54

2.1.1 Marcando pontos na reta utilizando régua e compasso 64

2.2 Segmentos orientados 68

2.2.1 A Razão Áurea: mais um exemplo de semelhanças de família . . 74

2.3 Competências e habilidades previstas na BNCC 83

3 COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO 85

3.1 Localização de pontos no plano 86

3.2 Ponto médio de um segmento de reta 94

3.3 Distância entre dois pontos no plano 105

3.4 O conceito de lugar geométrico 110

3.4.1 A reta como lugar geométrico 111

3.4.2 A circunferência como lugar geométrico 123

3.5 Competências e habilidades previstas na BNCC 129

4 APROFUNDANDO O ESTUDO DAS RETAS 133

4.1 Declividade de uma reta 133

4.2 Equação fundamental da reta 138

4.3 Vários nomes para vários formatos de equações de uma mesma reta . . . 143

4.4 Condições de paralelismo e perpendicularismo 145

4.4.1 Retas paralelas 145

4.4.2 Retas perpendiculares 148

4.5 Ângulo entre duas retas 159
4.6 Distância entre ponto e reta 165
4.6.1 Translação de eixos coordenados 165
4.6.2 Fórmula da distância de um ponto a uma reta 169
4.6.3 Cálculo da área de um triângulo sendo conhecidos seus vértices . 172
4.7 Competências e habilidades previstas na BNCC 174
5 APROFUNDANDO O ESTUDO DAS CIRCUNFERÊNCIAS 177
5.1 Alguns problemas clássicos 177
5.2 Usando determinantes para obter uma equação de uma circunferência que passa por três pontos não colineares 188
5.3 Competências e habilidades previstas na BNCC 194
6 UMA BREVE VISITA ÀS CÔNICAS 197
6.1 Estudo da parábola 198
6.1.1 Equação canônica da parábola 201
6.2 Estudo da elipse 204
6.2.1 Equação canônica da elipse 212
6.3 Estudo da hipérbole 214
6.3.1 Equação canônica da hipérbole 221
6.4 Rotação de eixos coordenados 225
6.4.1 A equação de segundo grau da forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 229
6.4.2 A equação de segundo grau completa 231
6.5 Competências e habilidades previstas na BNCC 236
A OS AXIOMAS DE HILBERT PARA A GEOMETRIA PLANA 239
A.1 Axiomas de incidência 239
A.2 Axiomas de ordem 240
A.3 Axiomas de congruência 240
A.3.1 Axiomas de congruência para segmentos de reta 241
A.3.2 Axiomas de congruência para ângulos 241
A.4 Axioma das paralelas 242
A.5 Axiomas de continuidade 242
B A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS VIA CORTES DE DEDEKIND 243
B.1 Uma breve revisão dos números racionais 243
B.2 Os cortes de Dedekind 246
B.2.1 A relação de ordem em $\mathcal{D}$ 247
B.2.2 Soma de cortes de Dedekind 250
B.2.3 Produto de cortes de Dedekind 258

INTRODUÇÃO

Nosso trabalho consiste em uma proposta de ensino de geometria analítica plana para o Ensino Médio baseada no conceito wittgensteiniano de *jogos de linguagem*. A ideia básica é tratar cada conteúdo como sendo um jogo normativo de linguagem e interligar esses conteúdos através da noção de *semelhanças de família*, também presente na obra de Wittgenstein.

Acreditamos que a concepção da matemática como um corpo de conhecimento natural, que deve ser descoberto pelos alunos, é equivocada e tem levado a frustrações e desencantos. Há uma lógica perversa nesse naturalismo: "se é natural aprender matemática e eu não consigo, então sou um ser incapaz, inferior".

Os piagetianos, por exemplo, entendem que a construção do conhecimento matemático se dá de forma orgânica, em estágios pré-estabelecidos e, obviamente, através da interação social, pois o aluno seria capaz de confrontar seus conhecimentos (obtidos pela abstração reflexiva) com novas situações, provocando um desequilíbrio entre assimilação e acomodação (a dupla piagetiana que explica a construção do conhecimento cognitivo), seguido de um reequilíbrio que levaria a um nível cognitivo superior. [12]

Nesse diapasão, a linguagem seria posterior ao conceito, e não o seu constitutivo, cabendo, aqui, o grande questionamento wittgensteiniano: como é possível a constituição de um conceito sem linguagem, como pretendem os piagetianos?

Temos um problema real de não aprendizagem que é, a nosso ver, em parte provocado por essa crença em uma matemática "pré-existente", agravado por propostas que entendem que o professor deva ser um mero mediador entre o aluno e *essa* matemática.

Este trabalho propõe que os conceitos matemáticos sejam constituídos através de jogos normativos de linguagem, de maneira dialética, apoiando-se no "jogar o jogo", tendo o professor o papel de interferir ao enunciar e explicar as regras e os procedimentos.

A ideia de se conceber a matemática como "as matemáticas", isto é, como jogos normativos de linguagem, vem tomando corpo, nos últimos anos, nas pesquisas em Educação Matemática, seja no Brasil, seja no exterior. O pioneirismo dessa abordagem é atribuído ao Prof. Dr. Antonio Miguel e ao grupo de pesquisa que lidera, o grupo Phala, "referência acadêmica quando o assunto são as relações entre História, Filosofia e Educação Matemática" [3].

Enfatizamos que não estamos, de modo algum, propondo volver à escola autoritária, tradicional, em que o aluno apenas escuta, decora e devolve a decoreba. Pelo contrário, nossa proposta tem como núcleo principal a ação do aluno, a não passividade, o "jogar o jogo". Atacaremos o problema propondo uma abordagem em que a aula expositiva dialogada retoma seu papel na transmissão inicial das peças do jogo e de suas regras. Os conceitos matemáticos irão se constituir dialeticamente pelo uso normativo da linguagem por parte dos alunos, ou seja, "jogando o jogo".

Acreditamos também que, para que esta proposta seja implementada com êxito, é necessário respaldar o professor com informações teóricas que extrapolem o mínimo necessário para o desenvolvimento das atividades. Nesse sentido, concebemos alguns apêndices recheados de "teoria matemática", cujo objetivo é suprir eventuais lacunas na formação do docente.

A escolha de apresentar conteúdos de geometria analítica sob a forma de jogos normativos de linguagem se deu, em parte, por preferências pessoais inexplicáveis, pertencentes ao mundo da metafísica. De outra parte, pesa a negligência com que tais tópicos têm sido tratado nos manuais e livros escolares e o fato deste assunto ser capaz de funcionar como ponto de convergência de várias semelhanças de família.

Claro que aquilo que nos toca a alma está intimamente ligado às nossas vivências e lembranças. Permitimo-nos então, de certo modo, esmiuçar um pouco essas inexplicáveis razões, buscando na memória a primeira vez em que ouvimos falar de "lugar geométrico". Era então 1972, na antiga 5ª série (hoje, 6º ano). Tínhamos aula de desenho e fomos apresentados à ideia de circunferência como lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes a um ponto dado. Lembramo-nos bem de ficar imaginando "onde" ficava esse lugar em que estavam as circunferências. Durante anos essa dúvida me perseguiu, e só no segundo grau (hoje, Ensino Médio) entendi que era no plano. A geometria sempre exerceu sobre mim um grande fascínio — assim como as equações. Na 6ª série (hoje, 7º ano), época em tivemos nosso primeiro contato com equações através do livro de Orlando A. Zambuzzi, "Matemática com Estudo Dirigido: 6ª série - 1º grau", a professora colocava música clássica para tocar enquanto fazíamos exercícios. De algum modo, as semelhanças de família juntaram uma coisa com outra: geometria e equações.

Esta dissertação está dividida em seis capítulos e dois apêndices.

O Capítulo 1 estabelece a fundamentação teórica de nosso trabalho, explicitando as noções de jogos de linguagem e semelhanças de família de Wittgenstein, além de fornecer as bases para relacioná-las com os conteúdos, competências e habilidades previstos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No Capítulo 2 introduzimos a noção de coordenada na reta e aproveitamos o ensejo para praticar, com os alunos, algumas construções envolvendo régua e compasso no contexto de localização de pontos em um eixo coordenado. Também encontramos espaço para falar sobre a razão áurea, relembrando o algoritmo para calcular a raiz quadrada de um número positivo e criando uma oportunidade para introduzir aos alunos a prova por indução.

No Capítulo 3 damos início ao estudo da geometria analítica plana, mostrando como localizar pontos em um plano munido de um sistema de eixos ortogonais e calcular o ponto médio de um segmento de reta, bem como o seu comprimento. Também nos aventuramos no conceito de lugar geométrico, usando-o para obter equações de retas e de circunferências.

Aprofundamos o estudo das retas no Capítulo 4 com o conceito de declividade, que nos permite estudar, entre outras coisas, as condições de paralelismo e perpendicularismo entre retas. Abordamos também a translação de eixos coordenados e a distância entre ponto e reta, finalizando com o cálculo da área de um triângulo a partir das coordenadas de seus vértices.

O estudo das circunferências, por sua vez, é aprofundado no Capítulo 5 com a resolução de alguns problemas clássicos e a obtenção de uma equação da circunferência que passa por três pontos não colineares dados utilizando determinantes. Como consequência da demonstração, obtivemos uma caracterização geométrica do resultado apresentado, até então desconhecida para nós, e ilustrada em uma animação do GeoGebra.

No Capítulo 6 fazemos uma breve visita às cônicas, estudando a parábola, a elipse e a hipérbole. Por fim, passamos pela rotação de eixos coordenados com a finalidade de estabelecer um critério para identificação da cônica a partir de sua equação geral.

Destacamos que a última seção de cada capítulo elenca as competências e habilidades lá trabalhadas, para benefício do professor que deseje utilizar este material em seus cursos.

Ainda pensando em apoiar o professor, apresentamos no Apêndice A os axiomas de Hilbert que fundamentam a geometria plana. Por fim, fazemos no Apêndice B uma construção detalhada dos números reais via cortes de Dedekind.

1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente capítulo tem por escopo apresentar a fundamentação teórica de nosso trabalho, ou seja, explicitar as noções de jogos de linguagem e semelhanças de família formuladas por Ludwig Wittgenstein, assim como estabelecer as bases para relacioná-lo com os conteúdos, competências e habilidades previstos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).[1]

1.1 BREVES PALAVRAS SOBRE LUDWIG WITTGENSTEIN E SEU LEGADO

Nascido em Viena, Áustria, em 26 de abril de 1889, Ludwig Wittgenstein inicialmente dedicou-se a pesquisas na área da aeronáutica, tendo projetado um motor acionado a jato e um propulsor. Mais tarde, sob a influência e orientação de Bertrand Russell, passou a dedicar-se ao estudo da lógica. [25]

Em 1921 publicou sua primeira principal obra, o *Tractatus Logico-Philosophicus*, que teve grande influência no chamado *Círculo de Viena* e cuja filosofia ficou conhecida como *Positivismo Lógico*. O Círculo de Viena era composto por estudiosos que buscavam resolver problemas ligados aos fundamentos da ciência e teve entre seus frequentadores ocasionais Kurt Gödel e Alfred Tarski.

Após a publicação do *Tractatus*, abandonou a filosofia por quase dez anos e, nesse período, trabalhou como professor de uma escola primária rural na Áustria. Retomou seus escritos por volta de 1929, escrevendo continuamente até a sua morte, em 1951. Nada mais publicou em vida. Contudo, após sua morte, tudo que escrevera foi publicado.

1 Sugerimos que o leitor interessado em aprofundar no assunto deste capítulo consulte [5], [18], [25], [26] e [23].

Os comentadores costumam dividir a filosofia de Wittgenstein em duas: uma referida como a filosofia do *Tractatus* e a outra como a filosofia tardia das *Investigações Filosóficas*, sua segunda principal obra, publicada postumamente em 1953. [5]

Os quatro principais temas discutidos no *Tractatus* são: (a) realidade; (b) pensamento e linguagem; (c) lógica e análise de proposições complexas em proposições elementares; (d) os limites do que pode ser expresso na linguagem. Apesar de tentador, não discutiremos os méritos desses temas, limitando-nos a enumerá-los, especialmente porque nosso trabalho se fundamenta na segunda fase de Wittgenstein: é na sua obra tardia que Wittgenstein apresenta os chamados *jogos de linguagem*.

1.2 OS JOGOS DE LINGUAGEM DE WITTGENSTEIN

A primeira edição das *Investigações Filosóficas* consiste de duas partes: a primeira é composta de aforismos numerados de 1 a 693 e a segunda é dividida em quatorze seções, nas quais Wittgenstein analisa detalhadamente o significado da palavra, ou seja, o resultado de seu uso.

Para entendermos o que são jogos de linguagem, devemos considerar que, em sua obra tardia, Wittgenstein não mais acredita em uma linguagem apenas representativa do mundo, que é posterior ao conhecimento da razão (isto é, "primeiro conheço e depois nomeio"). Para ele, a linguagem não brota da realidade, ou seja, não é a realidade que gera a linguagem, mas o uso da linguagem que determina o modo como vemos e conhecemos a realidade.

Portanto, segundo Wittgenstein, a linguagem não busca seu fundamento fora de si mesma, em algo preexistente, seja real ou ideal. O fundamento da linguagem está posto em suas regras e práticas.

Nas *Investigações Filosóficas*, "linguagem e mundo se unem pragmaticamente, ela não mais representa o mundo, mas faz parte de sua constituição e se adéqua ao contexto de vivência de acordo com o uso que se faz dela". [22]

Em outras palavras, sem uso não há linguagem, pois é o uso que dá vida à linguagem, que a torna significativa. [26] E o uso da linguagem tem caráter normativo, não universal, dependente de *formas de vida*.[2] Assim, há vários usos, e não *o* uso. A linguagem vai

2 Esta locução é tradicional na filosofia germânica, apresentando acepções distintas. Não cabe aqui uma análise mais aprofundada de cada uma delas. Assim, por todas, adotaremos que "forma(s) de vida expressa o consenso implícito dos usuários da linguagem quanto a práticas, comportamentos, valores,

se constituindo, dialeticamente, pelo seu uso, que por sua vez é dependente das formas de vida.

Pensemos, por exemplo, na palavra "raiz". Ela pode significar, se usada em botânica, um órgão vegetal com funções específicas. Se usada em matemática, terá mais que um significado: pode ser a raiz quadrada de um número, pode ser o número que substituído na variável torna o polinômio igual a zero, e, graficamente, o valor da abscissa quando o gráfico intersecta o eixo x. O que dá vida à palavra "raiz" é seu uso, e esse uso é normativamente determinado. Assim, para um aluno constituir o conceito de "raiz", terá que conhecer quais regras deverá seguir e, depois, segui-las.

Fazendo uma analogia aos jogos de tabuleiro, que têm regras que regulam suas jogadas, Wittgenstein concebeu a ideia de que a linguagem e seus vários usos são "jogos de linguagem" — munidos de regras e que são "jogados" obedecendo-as. Em outras palavras, são sistemas constituídos por suas regras e suas práticas, que não possuem uma essência natural ou superior pré-estabelecida, já que aceitar tal premissa levaria a filosofia ou qualquer outra ciência para o campo da metafísica.

No §23 de [25], Wittgenstein afirma *in verbis*:

> "Quantas espécies de frases existem? Afirmação, pergunta e comando, talvez? Há inúmeras espécies diferentes de emprego daquilo que chamamos de 'signo', 'palavras', 'frases'. E essa pluralidade não é nada fixo, um dado para sempre; mas novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem, que poderíamos dizer, nascem e outros envelhecem e são esquecidos (uma imagem aproximada disto pode nos dar as modificações da matemática). O termo "jogo de linguagem" deve aqui salientar que o falar da linguagem é uma parte de uma atividade ou de uma forma de vida. Imagine a multiplicidade de jogos de linguagem por meio destes exemplos e outros:
>
> - Comandar, e agir segundo comandos.
> - Descrever um objeto segundo uma descrição (desenho).
> - Relatar um acontecimento.

tradições, visões de mundo, cultura, instituições, concepções éticas e políticas e todos os demais aspectos comunitários subjacentes na produção de significados. Esse acordo tácito está pressuposto na linguagem." Portanto, "certo e errado é o que os homens dizem; e os homens estão concordes na linguagem. Isto não é uma concordância de opiniões, mas da forma de vida". [25]

- Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas.
- Inventar uma história, ler.
- Representar teatro.
- Cantar uma cantiga de roda.
- Resolver enigmas.
- Fazer uma anedota; contar.
- Resolver um exemplo de cálculo aplicado.
- Traduzir de uma língua para outra.
- Pedir, agradecer, maldizer, saudar, orar.

> É interessante comparar a multiplicidade das ferramentas de linguagem e seus modos de emprego, a multiplicidade das espécies de palavras e frases com aquilo que os lógicos disseram sobre a estrutura da linguagem."

Assim, Wittgenstein concebeu, em particular, a matemática como um conjunto de jogos de linguagem, que chamaremos de *jogos de linguagem matemáticos*. Podemos, então, dizer, ingenuamente, que um jogo de linguagem matemático consiste em um conjunto de regras de procedimento, elaboradas de forma não contraditória, por determinada forma de vida, sobre objetos matemáticos nomeados, regras essas que serão executadas, ou seja, usadas dialeticamente, tudo com o escopo de levar a resultados esperados.

Notemos que, na tentativa de definir jogo de linguagem matemático, acabamos por usar jogos de linguagem mais rudimentares, como enunciar regras não contraditórias e nomear objetos. Isso poderia parecer um erro de lógica, mas, na realidade, apenas enfatiza o caráter de que a linguagem é constitutiva de si mesma.

Como bem exemplifica Antonio Miguel em [3]:

> "O que é um jogo normativo de linguagem? É um jogo cujo propósito já é predefinido — quer dizer, se eu quero atingir um certo objetivo, então eu tento criar um novo ou repetir um algoritmo já existente que me permita atingir aquele objetivo inequivocamente, e isto não quer dizer univocamente. Por exemplo, se você olhar para o CEP, isto é, para o código de endereçamento postal de uma carta, o que ele significa? É um jogo de

> linguagem ao qual tenho que atribuir um significado. O CEP é algo que tem uma significação inequívoca para uma comunidade, certo? Então, o que ele significa? Para que é que serve aquele número que está lá? Será que eu posso ler aquele número como eu leio, por exemplo, um número escrito com base nas regras do sistema de numeração decimal? Não, é claro! Se eu for tentar transpor as regras do sistema de numeração decimal para dar significado ao número do CEP, eu não vou conseguir significá-lo corretamente. Para o que é que serve o CEP? Na verdade, o CEP é uma prática de orientação espacial, não tem nada a ver nem com aritmética e nem com geometria no sentido usual. Mas, ao significar corretamente aquele número, eu consigo fazer uma carta chegar inequivocamente ao lugar onde ela tem que chegar, ou seja, ao seu destinatário."

Usando a mesma analogia de Wittgenstein com jogos de tabuleiro, é importante deixar claro para o aluno, desde o início, quais são as peças do jogo, quais as funções que cada peça tem no jogo, quais as regras para que executem essas funções e, principalmente, que jogo se aprende jogando segundo essas regras — destacando que "jogo", aqui, é "jogo em ação", ou seja, o processo de ensino-aprendizagem depende de uma postura ativa (interativa) do aluno.

1.3 A NOÇÃO DE SEMELHANÇAS DE FAMÍLIA

Segundo Wittgenstein, cada jogo de linguagem tem suas regras e é completo em si mesmo, e dois jogos de linguagem não são equivalentes entre si, nem se reduzem um ao outro, apenas apresentam parentescos:

> "Aqui encontramos a grande questão que está por trás de todas essas considerações. Pois poderiam objetar-me: 'Você simplifica tudo! Você fala de todas as espécies de jogos de linguagem possíveis, mas em nenhum momento disse o que é o essencial do jogo de linguagem, e portanto da própria linguagem. O que é comum a todos esses processos e os torna linguagem ou partes da linguagem. Você se dispensa pois justamente da parte da investigação que outrora lhe proporcionara as maiores dores de cabeça, a saber, aquela concernente à *forma geral da proposição* e da linguagem'.
>
> E isso é verdade. — Em vez de indicar algo que é comum a tudo aquilo que chamamos de linguagem, digo que não há uma coisa comum a esses

> fenômenos, em virtude da qual empregamos para todos a mesma palavra, — mas sim que estão *aparentados* uns com os outros de muitos modos diferentes. E por causa desse parentesco ou desses parentescos, chamamo-los todos de 'linguagens'." (IF65) [25]

Wittgenstein continua:

> "Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que com a expressão 'semelhanças de família'; pois assim se envolvem e se cruzam as diferentes semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, o andar, o temperamento etc., etc. — E digo: os 'jogos' formam uma família." (IF67) [25]

Se pudéssemos, por exemplo, perguntar a Wittgenstein o que é o peão no jogo de xadrez, receberíamos como resposta que seu significado é a totalidade das regras que valem para ele, o que significa que não há uma essência do "ser peão", que não há, por assim dizer, um "peanismo". De maneira similar, poderíamos dizer que não há uma essência do ser número, não há um "numerismo".

Wittgenstein continua:

> "E do mesmo modo, as espécies de número, por exemplo, formam uma família. Por que chamamos algo de 'número'? Ora, talvez porque tenha um parentesco — direto — com muitas coisas que até agora foram chamadas de número; e por isso, pode-se dizer, essa coisa adquire um parentesco indireto com outras que chamamos também *assim*. E estendemos nosso conceito de número do mesmo modo que para tecer um fio torcemos fibra com fibra. E a robustez do fio não está no fato de que uma fibra o percorre em toda sua longitude, mas sim em que muitas fibras estão traçadas umas com as outras." (IF67) [25]

Por exemplo, podemos pensar em cada uma das construções dos números reais (via classes de equivalência de sequências de Cauchy, cortes de Dedekind ou decimais infinitos) como um jogo de linguagem matemático, que se interligam por semelhanças de família. Cada qual tem suas regras, mas todos têm uma finalidade comum: construir um corpo ordenado completo.[3] Essas construções não são iguais, mas têm semelhanças

3 Note que o significado de número real, como elemento de um corpo ordenado completo, é constituído pela totalidade das regras que valem para ele.

de família, isto é, são isomorfas — e isso em um contexto de uma determinada forma de vida, qual seja, dos matemáticos profissionais, da academia.

1.4 O USO DOS JOGOS DE LINGUAGEM MATEMÁTICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Ao apresentar nossa proposta de ensino de geometria analítica plana para o Ensino Médio nos alinharemos ao pensamento de Wittgenstein considerando “a matemática como um conjunto de jogos normativos de linguagem cujo propósito já é predefinido”. [3]

Cada jogo de linguagem matemático é completo em si mesmo e tais jogos se relacionam entre si através das semelhanças de família, que serão usadas como motivador do processo de ensino-aprendizagem.

Em nossa concepção, a matemática não nasce da natureza, nem está posta na mente humana, desde algum momento mágico, esperando para ser descoberta. Pelo contrário: vemos a matemática como obra de criação de humanos, inseridos em um mundo real, em um determinado modo de vida, em um determinado tempo, através do estabelecimento de regras e práticas.

Vista dessa forma, a matemática não se limita à matemática feita pela academia, mas reconhece igualmente, como matemática, a praticada por aqueles que vivem longe da chamada “norma culta”. Assim, os jogos de linguagem matemáticos democratizam a matemática.

Por exemplo, o povo Xerente, que vive no Estado do Tocantins, usa um sistema de contagem que vai de um até quatro. “É interessante notar que a forma de contar desse povo é sempre feita aos pares, unindo os dedos das mãos, conforme figura abaixo” (1.1) e que “essa forma de contagem influencia diretamente na sua organização social, pois eles se organizam socialmente em pares, de dois em dois”. [18]

Figura 1.1: Sistema de contagem do povo Xerente. (Fonte: [18]).

Isso não significa, de forma alguma, que a escola deva deixar de ensinar a matemática produzida por matemáticos: apenas deve deixar de fingir que essa matemática é “a matemática natural”, que deve ser descoberta através de um processo de construção espontâneo.

Sabemos, pela nossa prática de mais de 40 anos de docência na Educação Básica, que os alunos têm preferências por certas disciplinas: alguns são apaixonados pela matemática, outros nem tanto; há também os que têm aversão a ela. Acreditamos que parte dessa aversão tem origem na crença da existência dessa “matemática natural”, posta no mundo, seja por um criador superior, seja pelas leis da natureza. E aqueles que não conseguem construir, descobrir esse conhecimento matemático supostamente oculto em todos os seres humanos e na natureza, acabam por se sentir inferiores, menos inteligentes e, simplesmente, desistem de aprender matemática.

Esperamos que os jogos de linguagem matemáticos facilitem o acesso, a manipulação e o uso criativo, por parte dos alunos, dos diversos objetos do conhecimento matemático e suas propriedades.

1.5 APOIANDO O ALUNO NA CONSTRUÇÃO DO SEU MUNDO MATEMÁTICO

É importante salientar que é “jogando que se aprende a jogar”, ou seja, é por meio das atividades que os alunos irão construir o seu conhecimento matemático. Assim, ao elaborar cada atividade, nós, professores, sempre devemos ter em mente:

(a) a importância de explicitar, da maneira mais clara possível, as regras a serem seguidas;

(b) a lembrança de que algumas dessas regras estão ligadas a outras já trabalhadas e a relevância de resgatá-las (seja diretamente, seja dando oportunidade para que os alunos o façam);

(c) a percepção de que a construção de conhecimento não se dá de forma linear, mas dialética, daí a grande importância das semelhanças de família e do “jogar o jogo”;

(d) que, como cada aluno constituirá conceitos por meio do ato de “jogar o jogo”, devemos acolhê-los em suas tentativas e esforços, naturalizando o erro como parte de qualquer processo dialético de aquisição de conhecimento.

Como nossa proposta visa a alunos e professores inseridos em um mundo real, nada mais justo que tentemos adequá-la à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Assim, tomaremos o cuidado de explicitar, em cada capítulo, quais competências e habilidades serão trabalhadas.

Embora nosso trabalho se destine ao segmento do Ensino Médio, é cediço que a construção do conhecimento não se dá de forma linear, de modo meramente cumulativo, mas dialeticamente, com a construção e reconstrução dos conceitos. Assim, também resgataremos algumas competências e habilidades previstas para o segmento do Ensino Fundamental.

A atual BNCC divide a Educação Básica em três etapas — Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio — e afirma que, em todas as etapas, os estudantes devem ter assegurado "o desenvolvimento de dez competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento", definindo *competência* como "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". [2]

Essas dez competências gerais, a partir de agora referidas por CGn, são listadas a seguir:

$CG1$: Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

$CG2$: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

$CG3$: Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

$CG4$: Utilizar diferentes linguagens — verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital —, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

$CG5$: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

$CG6$: Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

$CG7$: Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

$CG8$: Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

$CG9$: Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

$CG10$: Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

O conhecimento a ser adquirido no Ensino Médio é dividido em quatro grandes áreas:

1. área de linguagens e suas tecnologias;
2. área de matemática e suas tecnologias;

3. área de ciências da natureza e suas tecnologias;
4. área de ciências humanas e sociais aplicadas.

Cada área de conhecimento tem competências específicas que explicitam como as competências gerais da Educação Básica se expressam na área e, "para assegurar o desenvolvimento das competências específicas de área, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas no âmbito da BNCC a todos os estudantes do Ensino Médio". [2]

As cinco competências específicas da área de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, a partir de agora referidas por $CEMn$, são listadas a seguir:

$CEM1$: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

$CEM2$: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

$CEM3$: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

$CEM4$: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

$CEM5$: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Como usaremos, também, as competências e habilidades definidas pela BNCC para o Ensino Fundamental, listamos abaixo as oito competências específicas para a área de matemática e suas tecnologias, a partir de agora referidas por $CEFn$:

$CEF1$: Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

$CEF2$: Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

$CEF3$: Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

$CEF4$: Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

$CEF5$: Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

$CEF6$: Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

$CEF7$: Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

$CEF8$: Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Como dissemos, cada competência específica ($CEMi$ ou $CEFj$) é associada a um conjunto habilidades. Antes de enunciá-las, é interessante explicitar que cada habilidade possui um código elaborado segundo regras claras e rígidas, que leva à identificação do segmento da Educação Básica a que ela se refere, da área de conhecimento e da competência à qual se associa, num claro exemplo de "jogo de linguagem".

Por exemplo:

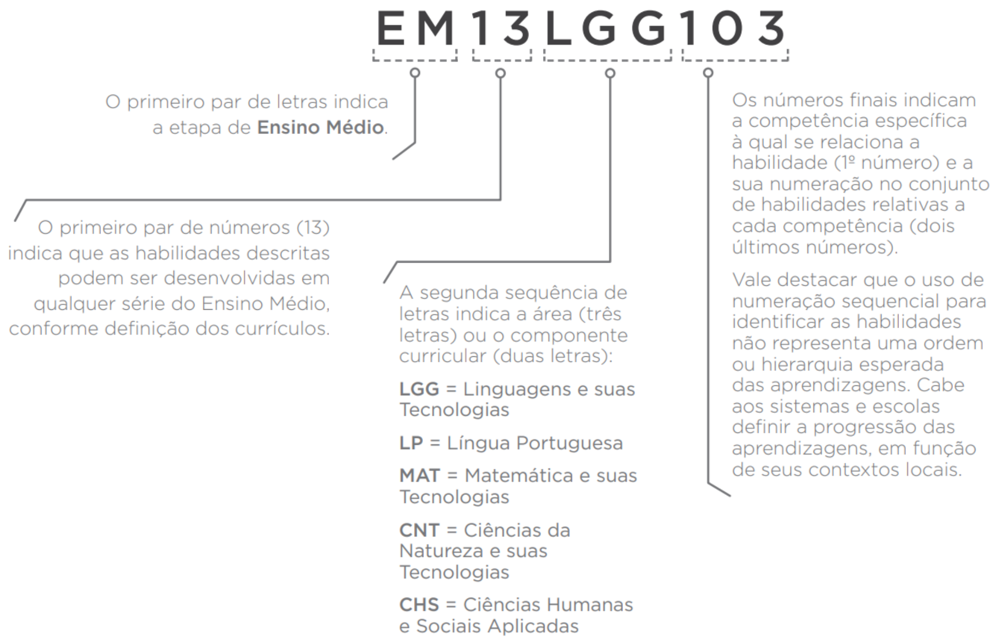

Figura 1.2: Exemplo de código de habilidade para o Ensino Médio. (Fonte: [2])

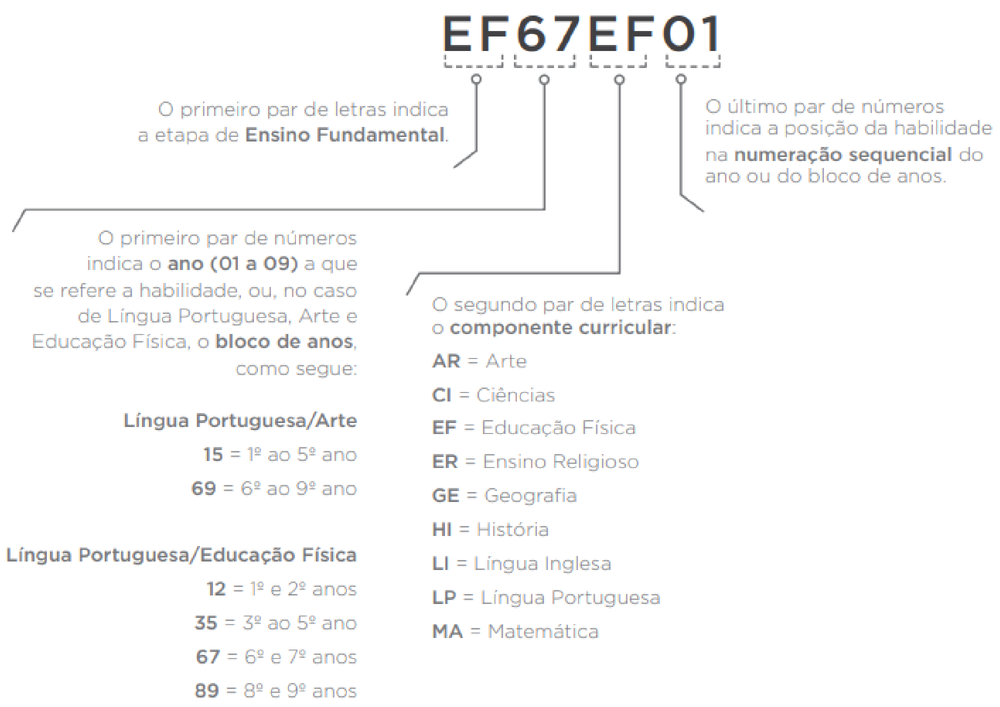

Figura 1.3: Exemplo de código de habilidade para o Ensino Fundamental. (Fonte: [2])

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico composto de duas letras, seguidas de dois dígitos, seguidos de três ou duas letras, seguidas de dois ou três dígitos, de acordo com a seguintes regras:

REGRA 1: O primeiro par de letras indica a etapa da Educação Básica, sendo EI para a Educação Infantil, EF para o Ensino Fundamental e EM para o Ensino Médio.

REGRA 2: O par de dígitos que vem a seguir indica em que série (quando iniciada por 0 e seguido do número da série) ou em que bloco de séries (por exemplo, 13 indica da primeira à terceira série) tal habilidade pode ser desenvolvida.

REGRA 3: O segundo bloco de letras pode ser composto por duas ou três letras: quando composto por duas letras indica o componente curricular; quando composto por três, indica a área de conhecimento.

REGRA 4: O último bloco pode ser composto por dois ou três dígitos: quando composto por dois dígitos indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano ou bloco de anos; quando composto por três, o primeiro dígito indica a competência específica à qual se relaciona a habilidade, e os dois últimos indicam a ordem em que as habilidades foram escritas.

Listaremos a seguir as habilidades relacionadas às competências específicas da área de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio.

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros) para tomar decisões.

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc).

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Finalmente, listaremos algumas habilidades relacionadas às competências específicas da área de matemática para o Ensino Fundamental. A lista completa pode ser consultada em [2].

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.

(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

(EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.

(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Por fim, deixemos claro que uma competência, em particular, norteará todos os capítulos e atividades desse trabalho — a saber, a **CEF1**:

"Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho."

2

COORDENADAS NA RETA

É possível estudar geometria adotando diferentes enfoques — e cada um deles possui vantagens e desvantagens no sentido de que, dependendo do método utilizado, encontraremos mais ou menos dificuldade ao abordar certos tópicos.[1]

Uma abordagem possível é a que Euclides adotou em sua famosa obra *Os Elementos*, na qual as noções de ponto e reta, além de outras, como a de congruência, não eram definidas, mas encontravam-se sujeitas a certas regras (axiomas), a partir das quais novas regras (teoremas) eram obtidas. Essa abordagem foi aperfeiçoada pelo matemático alemão David Hilbert, que, em 1899, propôs uma nova lista de axiomas (que contemplava as afirmações utilizadas, mas não postuladas, por Euclides), a fim de que o desenvolvimento da geometria sob essa perspectiva pudesse ser feito sobre bases rigorosas.[2]

É interessante notar que a geometria desenvolvida em *Os Elementos* não fazia uso de números para medir comprimentos, áreas ou ângulos. Naquele tempo, a aritmética consistia do estudo dos números inteiros positivos e seus quocientes. Grandezas como $\sqrt{2}$ eram tratadas geometricamente, em vez de serem consideradas números. Por exemplo, o fato de $\sqrt{2}$ ser irracional era expresso dizendo que a diagonal de um quadrado não é comensurável com o lado do quadrado (ou seja, nenhum múltiplo inteiro da diagonal é congruente a algum múltiplo inteiro do lado).

Na Renascença, a ideia do que um número seria começou a se flexibilizar, passando a englobar algumas grandezas que costumavam ser tratadas sob um ponto de vista puramente geométrico. Um dos fatores que contribuiu para isso foi a publicação da obra *La Géométrie*, na qual René Descartes utilizou certas noções algébricas ao lidar

1 Sugerimos que o leitor interessado em aprofundar no assunto deste capítulo consulte [10], [13] e [14].
2 A lista dos axiomas de Hilbert para a geometria plana pode ser consultada no Apêndice A desta dissertação.

com segmentos de reta. Esse uso da álgebra na geometria levou à ideia de representar pontos do plano usando pares de números, culminando no que conhecemos hoje por *geometria analítica*.[3]

Na geometria analítica associamos equações aos entes geométricos que queremos estudar e, com o estudo dessas equações, tiramos conclusões a respeito desses entes. Para fazer isso, é necessário introduzir o que chamamos de um *sistema de coordenadas*. Neste capítulo, mostraremos como introduzir coordenadas sobre uma reta, ou seja, como representar seus pontos usando números reais.

No que segue, utilizaremos livremente alguns resultados da geometria euclidiana plana que (supostamente) foram trabalhados em anos anteriores.

2.1 COORDENADAS NA RETA

Nosso objetivo nesta seção é introduzir um sistema de coordenadas sobre uma reta.

Começamos fixando, de uma vez por todas, uma unidade de comprimento.

Usaremos os seguintes fatos:

1. Fixada uma unidade de comprimento, a cada par de pontos A e B do plano corresponde um número real $d(A,B)$, denominado a *distância entre A e B* (ou, ainda, o *comprimento do segmento $\overline{AB}$*, que denotaremos por AB), satisfazendo as seguintes condições:

    a) $d(A,B) \geq 0$;

    b) $d(A,B) = 0 \iff A = B$;

    c) $d(A,B) = d(B,A)$;

    d) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$;

    e) $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B) \iff A - C - B$ (isto é, C está entre A e B);

    f) $d(A,B) = d(C,D) \iff \overline{AB} \cong \overline{CD}$ (isto é, $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{CD}$).

2. Reciprocamente, dado um número real $\alpha \geq 0$, existem pontos A e B do plano tais $d(A,B) = \alpha$.

---

3 A maneira como a geometria analítica é, atualmente, ensinada nas escolas e universidades mistura os métodos geométricos de Euclides com os métodos algébricos de Descartes. Para quem tiver interesse em explorar com profundidade as distinções entre essas duas abordagens, recomendamos [7].

Antes de prosseguirmos, observamos que:

- É comum, nesse momento, os alunos perguntarem quais são os números reais. Entramos numa seara complicada e perigosa. É cediço que raros são os alunos do Ensino Médio que conseguem construir, de alguma forma, o conjunto dos números reais. Também é verdade, e aqui não há arrogância alguma, que muitos de nós, professores da Educação Básica, desconhecemos as construções dos reais. Acreditamos que uma resposta satisfatória para esse momento seja dar exemplos de números que são reais e de números que não o são. Contudo, para benefício do professor, incluímos uma construção dos reais a partir dos racionais via cortes de Dedekind no Apêndice B desta dissertação.

- Embora nos axiomas de Hilbert para a geometria plana a noção de distância entre dois pontos não apareça explicitamente, é possível construir, de modo puramente geométrico, uma espécie de "aritmética de segmentos de reta" que leva a uma definição de distância nos moldes desejados. Ao leitor interessado, recomendamos consultar [7].

Retomando, veremos como utilizar a noção de distância apresentada acima para introduzir coordenadas sobre uma reta.

Dada uma reta r, começamos por *orientá-la*, isto é, por fixar um sentido de percurso para r, o qual é representado por uma semirreta de r. Em seguida, fixamos um ponto O sobre r, que chamaremos de *origem*.

Definição 2.1. Uma reta orientada na qual foi fixada uma origem é chamada de *eixo*.

Teorema 2.2. *Todo eixo pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais.*

Demonstração. De fato, dado um eixo, isto é, uma reta r sobre a qual foram fixadas uma origem O e uma semirreta $\overrightarrow{OA}$ que representa o sentido de percurso atribuído a esse eixo, procedemos da seguinte maneira:

- Associamos a origem, O, ao número real 0.

- Se o ponto P do eixo em questão pertence à semirreta $\overrightarrow{OA}$, fazemos corresponder a ele o número real $x_P = d(P, O)$. (Figura 2.1)

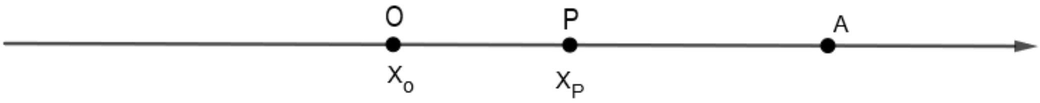

Figura 2.1: $x_P > 0$. (Fonte: elaboração do autor)

- Por fim, se o ponto P do eixo em questão não pertence à semirreta $\overrightarrow{OA}$, fazemos corresponder a ele o número real $x_P = -d(P, O)$. (Figura 2.2)

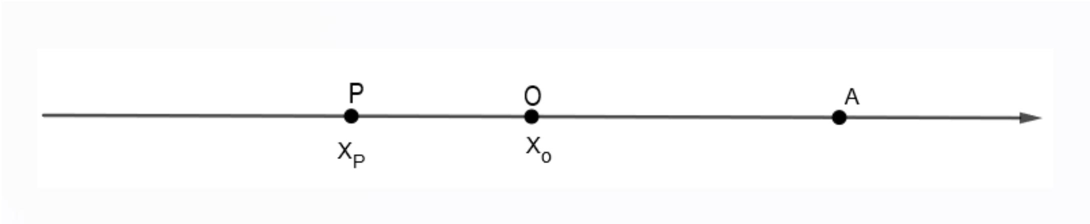

Figura 2.2: $x_P < 0$. (Fonte: elaboração do autor)

Chamaremos o número real x_P de *coordenada* do ponto P.

Afirmamos que a correspondência $P \mapsto x_P$ é biunívoca.

De fato, sejam P e Q pontos do nosso eixo tais que $P \neq Q$.

- Se $P = O$, então $Q \neq O$ e, portanto, $x_P = 0$ e $x_Q \neq 0$. Logo, $x_P \neq x_Q$. O mesmo vale se $Q = O$.
- Se $P - O - Q$, então x_P e x_Q têm sinais opostos e, portanto, $x_P \neq x_Q$.
- Se $O - P - Q$, então x_P e x_Q têm o mesmo sinal e $d(Q, O) = d(Q, P) + d(P, O)$. Como $P \neq Q$, $d(Q, P) > 0$. Logo, $d(Q, O) \neq d(P, O)$, o que implica que $x_P \neq x_Q$. O caso $O - Q - P$ é tratado de forma análoga.

Por fim, seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Se $\alpha = 0$, então $\alpha = x_O$.
- Se $\alpha > 0$, tome P um ponto do eixo que pertença à semi-reta $\overrightarrow{OA}$ e é tal que $d(P, O) = \alpha$. Temos que $x_P = \alpha$.
- Se $\alpha < 0$, tome P um ponto do eixo que não pertença à semi-reta $\overrightarrow{OA}$ e é tal que $d(P, O) = -\alpha$. Temos que $x_P = \alpha$.

□

Definição 2.3. Um eixo que foi colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais é chamado de *eixo coordenado*.

Definição 2.4. Sejam P e Q pontos sobre um eixo coordenado com coordenadas x_P e x_Q, respectivamente. Dizemos que *o ponto P está à esquerda do ponto Q* (ou, ainda, que *o ponto Q está à direita do ponto P*) se $x_P < x_Q$.

A seguir, veremos como calcular a distância entre dois pontos sobre um eixo coordenado em termos de suas coordenadas.

Proposição 2.5. *Se P e Q são pontos sobre um eixo coordenado com coordenadas x_P e x_Q, respectivamente, então $d(P,Q) = |x_P - x_Q|$.*

Demonstração. Sendo O a origem do eixo em questão, temos cinco casos a considerar.

- **Caso 1: $P = Q$.** Neste caso, $d(P,Q) = 0$. Por outro lado, sendo $P = Q$, $x_P = x_Q$. Logo, $x_P - x_Q = 0$ e, portanto, $|x_P - x_Q| = 0$. Assim, $d(P,Q) = |x_P - x_Q|$.

  No que segue, vamos considerar $P \neq Q$.

- **Caso 2: $P = O$ ou $Q = O$.** Sem perda de generalidade, suponhamos $Q = O$. Se P está à direita de Q, então $d(P,Q) = d(P,O) = x_P = x_P - 0 = |x_P - 0| = |x_P - x_Q|$. Se P está à esquerda de Q, então $d(P,Q) = d(P,O) = -x_P = |x_P| = |x_P - 0| = |x_P - x_Q|$.

  Nos três próximos casos, além de considerar $P \neq O$ e $Q \neq O$, vamos supor, sem perda de generalidade, P à esquerda de Q (isto é, $x_P < x_Q$).

- **Caso 3: O está à esquerda de P.** Neste caso, $0 < x_P < x_Q$. Logo, $d(O,Q) = d(O,P) + d(P,Q)$, ou seja, $x_Q = x_P + d(P,Q)$. Portanto, $d(P,Q) = x_Q - x_P = |x_Q - x_P| = |x_P - x_Q|$.

- **Caso 4: O está à direita de Q.** Neste caso, $x_P < x_Q < 0$. Logo, $d(P,O) = d(P,Q) + d(Q,O)$, ou seja, $-x_P = d(P,Q) + (-x_Q)$. Portanto, $d(P,Q) = x_Q - x_P = |x_Q - x_P| = |x_P - x_Q|$.

- **Caso 5:** O **está entre** P **e** Q**.** Neste caso, $x_P < 0 < x_Q$. Logo, $d(P,Q) = d(P,O) + d(O,Q)$, ou seja, $d(P,Q) = -x_P + x_Q = x_Q - x_P = |x_Q - x_P| = |x_P - x_Q|$.

$\square$

Uma vez postas as regras acima, os alunos irão "jogar o jogo" da geometria analítica unidimensional. Faremos isso propondo situações-problemas que deverão ser executadas seguindo as regras estabelecidas e outras tantas que forem definidas no enunciado da situação, adicionalmente fazendo uso das semelhanças de família, ou seja, entrelaçando conceitos, como explicitado na Seção 1.3.

Nunca é demais lembrar que, para Wittgenstein, o significado das regras, das proposições matemáticas, só faz sentido com o uso, com a ação, ou seja, o jogar sempre norteará nosso trabalho.

Atividade 1. O jogo do ponto médio.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; régua; lápis; borracha; caderno; lousa e giz.

Pré-requisitos: operações básicas com números reais; módulo de um número real; coordenadas na reta; eixo coordenado; congruência de segmentos.

Peças do jogo:

1. Régua.
2. Um eixo coordenado.
3. Segmento de reta $\overline{AB}$ tal que as coordenadas dos pontos A e B são dadas, respectivamente, por $x_A = -7$ e $x_B = 10$.

Regras do jogo:

1. A distância entre dois pontos quaisquer P e Q do eixo em questão é dada por $d(P,Q) = |x_Q - x_P|$.
2. O comprimento de um segmento de reta é igual à distância entre seus extremos.
3. O *ponto médio* de um segmento de reta é o ponto entre seus extremos que divide o segmento em outros dois segmentos congruentes (ou seja, de comprimentos iguais).

4. Se a e b são números reais, então $|a| = |b| \implies a = b$ ou $a = -b$.

Jogadas a executar:

1. Usando a régua, desenhar em uma folha um eixo e, sobre ele, o segmento $\overline{AB}$, indicando as coordenadas dos extremos.
2. Desenhar o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ e obter a sua coordenada usando a Regra 3 e a régua.
3. Calcular a coordenada do ponto médio (isto é, o valor de x_M) fazendo uso das regras acima (ou seja, algebricamente).
4. Discutir se será sempre possível encontrar o valor de x_M através da Jogada 2, justificando e escrevendo sua conclusão.
5. Fazer o mesmo para a Jogada 3.

OBSERVAÇÕES AO PROFESSOR.

1. Na última regra, retomamos conteúdos passados (a saber, módulo de números reais) dos quais, possivelmente, os alunos não se lembrarão. Assim, é importante que usemos a noção de semelhanças de família caso levantem dúvidas, dando-lhes exemplos numéricos.
2. A nossa sugestão é que os alunos se reúnam em grupo e tentem jogar o jogo — ou seja, de posse das peças e usando as regras, tentem executar as jogadas.
3. Após resolverem em grupo é importante haver um amplo debate para a correção, com a participação dos alunos e do professor corrigindo e esclarecendo, de forma dialogada, todas as dúvidas que forem surgindo.
4. A ideia é que haja um verdadeiro diálogo, especialmente em relação às Jogadas 4 e 5, pois é importante que os alunos constituam a ideia de que a resolução algébrica é importante.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogadas 1 e 2:

Medindo com a régua, verificamos que $x_M = 1,5$.

Jogada 3:

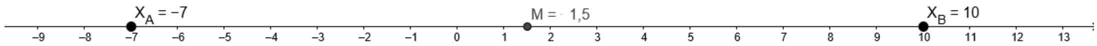

Figura 2.3: Ilustração das Jogadas 1 e 2. (Fonte: elaboração do autor)

Pela definição de ponto médio, temos que a distância do ponto A ao ponto M é igual à distância do ponto M ao ponto B. E como a distância entre dois pontos quaisquer P e Q é dada por $d(P,Q) = |x_Q - x_P|$ temos que

$$d(A,M) = |x_M - x_A| = |x_M - (-7)| = |x_M + 7| \quad \text{e} \quad d(M,B) = |x_B - x_M| = |10 - x_M|.$$

Igualando as duas expressões acima, obtemos

$$|x_M + 7| = |10 - x_M|.$$

Usando a Regra 4, concluímos que

$$x_M + 7 = 10 - x_M \quad \text{ou} \quad x_M + 7 = -10 + x_M.$$

Devemos, pois, considerar as duas possibilidades.

1ª possibilidade:

$$x_M + 7 = 10 - x_M \iff x_M + x_M = 10 - 7 \iff 2x_M = 3 \iff x_M = \frac{3}{2} = 1,5.$$

2ª possibilidade:

$$x_M + 7 = -10 + x_M \iff x_M - x_M = -10 - 7 \iff 0 = -17$$

o que mostra que esta possibilidade não ocorre.

Portanto, a coordenada do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ dado é dada por

$$x_M = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Jogada 4:

Nem sempre conseguiremos calcular o ponto médio usando a régua para medir, particularmente quando as coordenadas forem dadas por números irracionais.

Jogada 5:

Será possível o cálculo.

■

Atividade 2. O jogo da fórmula do ponto médio.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; régua e compasso; caderno; lápis; lousa e giz.

Pré-requisitos: operações básicas com números reais; módulo de um número real; coordenadas na reta; eixo coordenado; congruência de segmentos.

Peças do jogo:

1. Régua e compasso.
2. Um eixo coordenado.
3. Segmento de reta $\overline{AB}$, onde A e B são pontos distintos e as coordenadas de A e B são denotadas, respectivamente, por x_A e x_B.

Regras do jogo:

1. A distância entre dois pontos quaisquer P e Q do eixo em questão é dada por $d(P, Q) = |x_Q - x_P|$.
2. O comprimento de um segmento de reta é igual à distância entre seus extremos.
3. O ponto médio de um segmento de reta é o ponto entre seus extremos que divide o segmento em outros dois segmentos congruentes (ou seja, de comprimentos iguais).
4. Se a e b são números reais, então $|a| = |b| \implies a = b$ ou $a = -b$.

Jogadas a executar:

1. Usando a régua, desenhar em uma folha um eixo e, sobre ele, o segmento $\overline{AB}$.
2. Desenhar o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, fazendo uso de técnicas de desenho geométrico.
3. Calcular a coordenada do ponto médio (isto é, o valor de x_M) algebricamente, fazendo uso das regras acima. Note que chegaremos a uma fórmula, e não a um valor numérico específico.

OBSERVAÇÕES AO PROFESSOR.

1. Nossa sugestão é que este jogo seja jogado individualmente.

2. Será importante destacar que a resposta da Jogada 3 será uma fórmula, e não um valor numérico.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogadas 1 e 2:

Figura 2.4: Ilustração da Jogada 1. (Fonte: elaboração do autor)

Após o desenho do eixo e dos pontos A e B (Figura: 2.4), o ponto M é obtido da seguinte maneira: coloca-se a ponta seca do compasso no ponto A e, abrindo-o até o ponto B, traça-se um arco; em seguida, com a mesma abertura, mas centrando-o no ponto B, traça-se novo arco, que cruzará o primeiro em dois pontos. Traçando a reta que passa por esses dois pontos de interseção, o ponto M ficará determinado pelo cruzamento da mesma com o eixo fixado (Figura: 2.5).

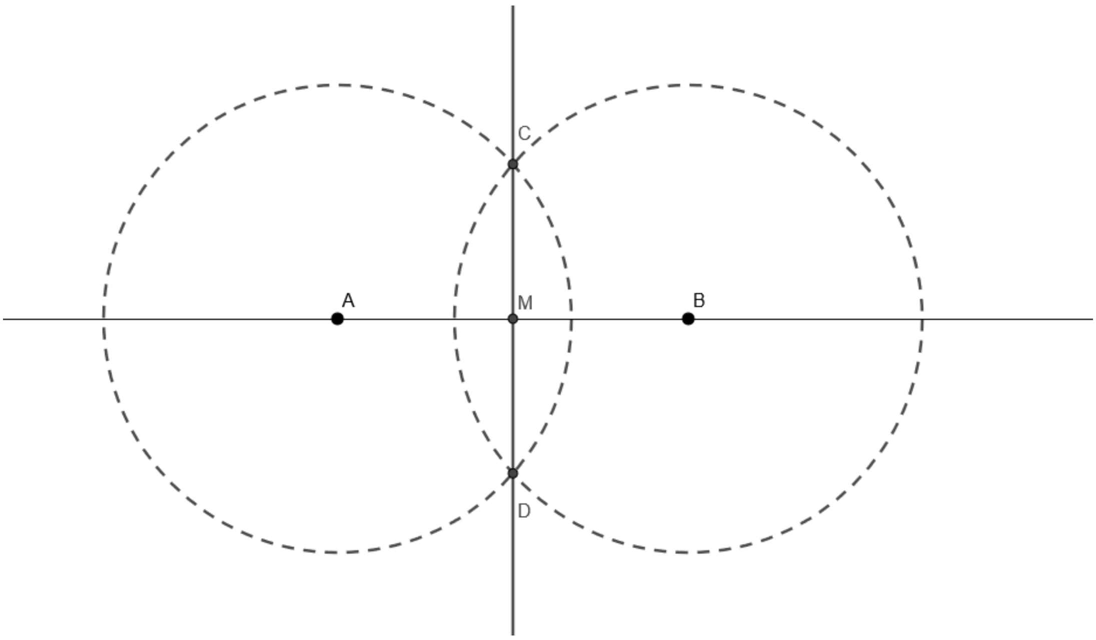

Figura 2.5: Localização do ponto médio utilizando régua e compasso. (Fonte: elaboração do autor)

Jogada 3:

Pela definição de ponto médio, temos que a distância do ponto A ao ponto M é igual à distância do ponto M ao ponto B. E como a distância entre dois pontos quaisquer P e Q é dada por $d(P, Q) = |x_Q - x_P|$ temos que

$$|x_M - x_A| = d(A, M) = d(M, B) = |x_B - x_M|.$$

Logo,

$$|x_M - x_A| = |x_B - x_M|.$$

Usando a Regra 4, concluímos que

$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad \text{ou} \quad x_M - x_A = -x_B + x_M.$$

Devemos, pois, considerar as duas possibilidades.

1ª possibilidade:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \iff x_M + x_M = x_A + x_B \iff x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

2ª possibilidade:

$$x_M - x_A = -x_B + x_M \iff x_M - x_M = x_A - x_B \iff 0 = x_A - x_B$$

o que mostra que esta possibilidade não ocorre, já que A e B são pontos distintos.

Portanto, a coordenada do ponto médio M do segmento de reta $\overline{AB}$ é dada por

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}. \tag{2.1}$$

■

Uma vez realizada a Atividade 2, podemos estabelecer sua conclusão (2.1) como uma fórmula, isto é, como uma nova regra que pode ser usada sempre que queiramos calcular a coordenada do ponto médio de um segmento.

Atividade 3. O jogo do uso da fórmula do ponto médio.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: Texto impresso com a atividade; régua; caderno; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: atividades anteriores e fórmula do ponto médio.

Peças do jogo:

1. Um eixo coordenado.
2. Segmento de reta $\overline{AB}$ tal que as coordenadas dos pontos A e B são dadas, respectivamente, por $x_A = 13$ e $x_B = 17$.

Regras do jogo:

1. Indicaremos o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ pela letra M.
2. A fórmula para calcular a coordenada do ponto M é

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Jogada a executar:

1. Usando as regras acima, calcular a coordenada do ponto médio do segmento definido no item 2 das peças do jogo. Atenção: não fazer desenho.

OBSERVAÇÕES AO PROFESSOR.

1. Nossa sugestão é que este jogo seja jogado individualmente.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

A coordenada do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ com $x_A = 13$ e $x_B = 17$ é 15, pois

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{13 + 17}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

■

2.1.1 *Marcando pontos na reta utilizando régua e compasso*

A fim de incentivar o uso da régua e do compasso, e aproveitado o fato de estarmos falando sobre coordenadas na reta, trabalharemos a localização de alguns pontos sobre um dado eixo coordenado.

Inicialmente, importa observar que esta seção será executada de forma expositiva-dialogada-participativa, ou seja, os alunos irão agir de forma aurículo-motora, pois irão executar os passos conjuntamente com as orientações do professor. Obviamente, isso demandará tempo, paciência e acolhimento.

Os alunos devem ser orientados a portar papel (preferencialmente sem pauta), lápis, borracha, régua, compasso e, se possível, um esquadro.

Recordamos que um triângulo é classificado como *retângulo* quando tem um ângulo reto. Os dois lados que formam o ângulo reto são denominados *catetos* e o lado oposto ao ângulo reto é denominado *hipotenusa*.

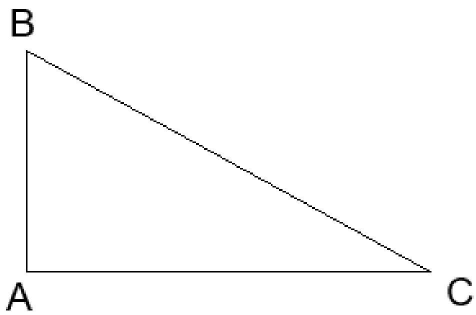

Figura 2.6: Triângulo retângulo. (Fonte: elaboração do autor)

Na Figura 2.6, o ângulo $\angle BAC$ é reto, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os catetos e o lado $\overline{BC}$ é a hipotenusa do triângulo ABC.

Aproveitamos para observar que o significado da palavra "cateto" não "brota" do triângulo: nomear um objeto é, também, um jogo de linguagem e depende do que Wittgenstein chama de forma de vida. A palavra "cateto", segundo o clássico dicionário Caldas Aulete, vem do grego *káthetos*, que, em tradução livre, significa "que cai perpendicular". No entanto, se empregarmos a palavra "cateto" em outra forma de vida, poderemos estar nos referindo, de acordo com [11], a "mamíferos 'pecarídeos' da família Taiaçuídeos, nativos das Américas", popularmente conhecidos como "porcos-do-mato, embora não sejam porcos". Desse modo, os nomes "cateto" e "hipotenusa" devem ser ensinados ao aluno através do jogo de linguagem de nomear objetos, e seus conceitos serão constituídos através do uso, da ação.

Teorema 2.6 (de Pitágoras). *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*[4]

Tomando a Figura 2.6 como referência, podemos escrever

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

4 Uma demonstração desse teorema pode ser consultada em [6].

Assim, se um triângulo retângulo tem:

- ambos os catetos medindo 1, a sua hipotenusa medirá $\sqrt{2}$;
- um cateto medindo 1 e o outro medindo $\sqrt{2}$, a sua hipotenusa medirá $\sqrt{3}$;
- um cateto medindo 1 e o outro medindo $\sqrt{3}$, a sua hipotenusa medirá $\sqrt{4} = 2$; etc.

Vamos usar as conclusões acima para localizar, em nosso eixo coordenado, os pontos O, A, B, C e D cujas coordenadas são, respectivamente: $x_O = 0$, $x_A = 1$, $x_B = \sqrt{2}$, $x_C = \sqrt{3}$ e $x_D = \sqrt{4} = 2$.

Os passos a serem executados simultaneamente com o professor são:

1. Trace uma reta.
2. Marque os pontos O e A e suas respectivas coordenadas, 0 e 1, estabelecendo, assim, uma unidade de comprimento. Usando esta unidade de comprimento e um compasso, numere a reta de -3 até 3. (Figura: 2.7)

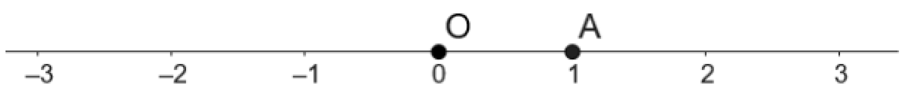

Figura 2.7: Passos 1 e 2. (Fonte: elaboração do autor)

3. Fazendo uso de um esquadro, levante, a partir do ponto A, um segmento perpendicular à reta traçada no Passo 1 de comprimento igual a $d(O, A)$, ou seja, de uma unidade. (Esta etapa também pode ser feita com régua e compasso.) Denote por K o outro extremo do segmento recém traçado. (Figura: 2.8)

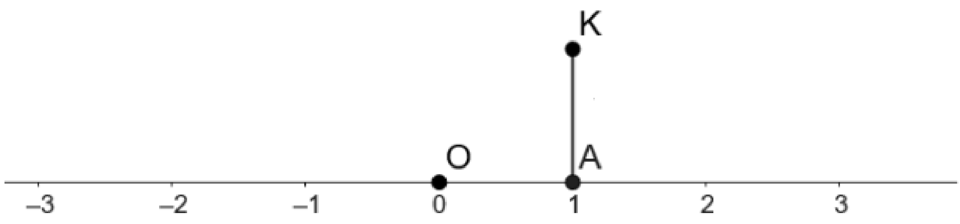

Figura 2.8: Passo 3. (Fonte: elabaoração do autor)

4. Com a ponta seca do compasso no ponto O, abra-o até o ponto K e trace um arco, no sentido horário, até cruzar a reta traçada no Passo 1. O ponto de cruzamento é o ponto B de coordenada $\sqrt{2}$. (Figura: 2.9)

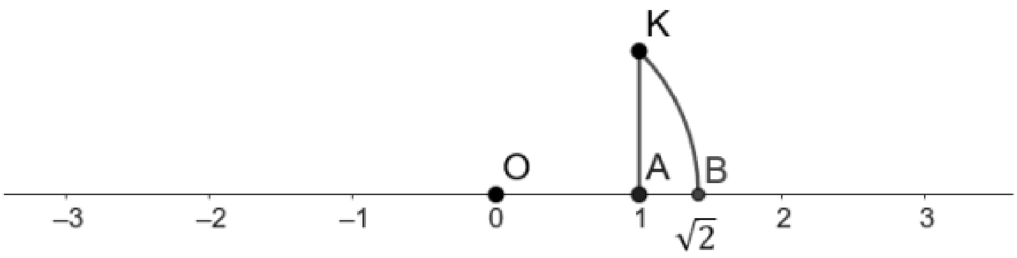

Figura 2.9: Passo 4. (Fonte: elaboração do autor)

5. Partindo do ponto B, ao repetirmos o procedimento do item 3, obteremos o ponto L. Em seguida, ao repetirmos o procedimento do item 4 para o ponto L, chegaremos ao ponto C de coordenada $\sqrt{3}$. (Figura: 2.10)

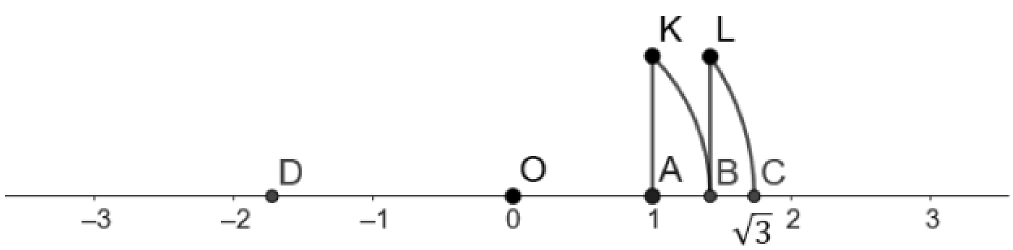

Figura 2.10: Passo 5. (Fonte: elaboração do autor)

6. Repetindo tudo a partir do ponto C obteremos o ponto D de coordenada $\sqrt{4} = 2$. (Figura: 2.11)

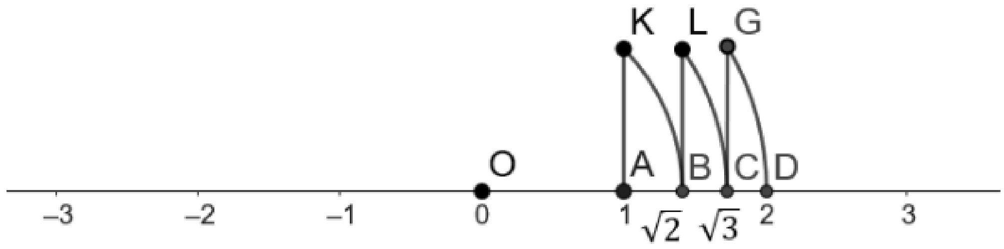

Figura 2.11: Passo 6. (Fonte: elaboração do autor)

2.2 SEGMENTOS ORIENTADOS

Vamos agora estabelecer a noção de *segmento orientado*. Mais uma vez, isso será feito através de aula expositiva dialogada.

Para tanto, tomemos dois pontos A e B. O *segmento orientado com ponto inicial (ou origem) A e ponto final (ou extremidade) B*, denotado por $\overrightarrow{AB}$, nada mais é que o segmento de reta $\overline{AB}$ munido do sentido de percurso de A para B.

Para preparar jogos de linguagem matemáticos que se referem ao estudo de equações de reta no plano, e tendo em mente a ideia de semelhanças de família de Wittgenstein, é interessante trabalhar com os alunos uma maneira de escrever as coordenadas um ponto genérico que pertence a um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ em função de sua posição a partir do ponto inicial do segmento.

Assim, fixemos dois pontos A e B e tomemos um ponto X qualquer pertencente ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. (Figura: 2.12)

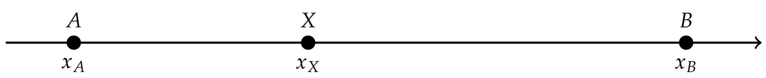

Figura 2.12: Ponto X pertencente ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ (Fonte: elaboração do autor).

Temos que $d(A, X) \leq d(A, B)$ e, portanto, a razão

$$\frac{d(A, X)}{d(A, B)}$$

é um número real pertencente ao intervalo $[0, 1]$.

Chamando essa razão de t, podemos deduzir uma fórmula que permita calcular a coordenada do ponto X em função de t. De fato,

$$\begin{aligned} \tfrac{d(A,X)}{d(A,B)} = t \quad &\Longleftrightarrow \quad d(A,X) = t \cdot d(A,B) \\ &\Longleftrightarrow \quad (x_X - x_A) = t(x_B - x_A) \\ &\Longleftrightarrow \quad x_X = x_A + t(x_B - x_A). \end{aligned}$$

Após a dedução da fórmula

$$x_X = x_A + t(x_B - x_A)$$

é importante destacar aos alunos que ela pode ter vários usos. Teremos, então, várias semelhanças de família. Seguem alguns exemplos:

Atividade 4. Um novo jogo do ponto médio.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; régua; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: cálculo com fração.

Peças do jogo:

1. Um eixo coordenado.
2. Segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ qualquer.

Regras do jogo:

1. Na fórmula $x_X = x_A + t(x_B - x_A)$, t representa a razão $\frac{d(A,X)}{d(A,B)}$.

Jogadas a executar:

1. Fazer um esboço das peças do jogo.
2. Atribuir o valor $\frac{1}{2}$ para a variável t na fórmula dada pela Regra 1 e escrever $d(A,X)$ em função de $d(A,B)$.
3. Explicar, justificadamente, onde está localizado o ponto X quando $t = \frac{1}{2}$.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1 (Figura: 2.13):

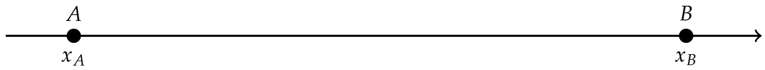

Figura 2.13: Ilustração da Jogada 1. (Fonte: elaboração do autor)

Jogada 2:

Como $\frac{d(A,X)}{d(A,B)} = t$, temos que $\frac{d(A,X)}{d(A,B)} = \frac{1}{2}$. Logo, $d(A, X) = \frac{1}{2} \cdot d(A, B)$.

Jogada 3:

Quando $t = \frac{1}{2}$, o ponto X localiza-se na metade do segmento, já que o comprimento do segmento $\overline{AX}$ é metade do comprimento do segmento $\overline{AB}$. Portanto, X é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

■

Atividade 5. Um novo jogo da fórmula do ponto médio.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: operações básicas com polinômios, incluindo redução de termos semelhantes.

Peças do jogo:

1. Um eixo coordenado.
2. Segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ qualquer.

Regras do jogo:

1. Quando usamos $t = \frac{1}{2}$ na fórmula $x_X = x_A + t(x_B - x_A)$, o ponto X representa o ponto médio do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.

Jogada a executar:

1. Usar a Regra 1 para deduzir a mesma fórmula da Atividade 2.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

Temos que

$$\begin{aligned} x_X = x_A + \tfrac{1}{2}(x_B - x_A) &\iff x_X = x_A + \tfrac{1}{2} \cdot x_B - \tfrac{1}{2} \cdot x_A \\ &\iff x_X = \tfrac{1}{2} \cdot x_A + \tfrac{1}{2} \cdot x_B \\ &\iff x_X = \tfrac{x_A + x_B}{2}. \end{aligned}$$

Como, quando $t = \frac{1}{2}$, o ponto X é o ponto médio do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, chegamos à mesma fórmula da Atividade 2.

■

É importante que usemos essa fórmula para estabelecer relações com outros conteúdos da geometria.

Atividade 6. Jogo do baricentro de um triângulo.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: baricentro de um triângulo; divisão da mediana na proporção de 2 para 1 pelo baricentro; segmento orientado; divisão de um segmento na proporção de m para n.

OBSERVAÇÕES INICIAIS.

1. Uma importante semelhança de família advém do seguinte teorema da geometria plana:

   Teorema 2.7. *O baricentro de um triângulo divide cada mediana em duas partes, de modo que a distância do baricentro ao vértice é o dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto.*

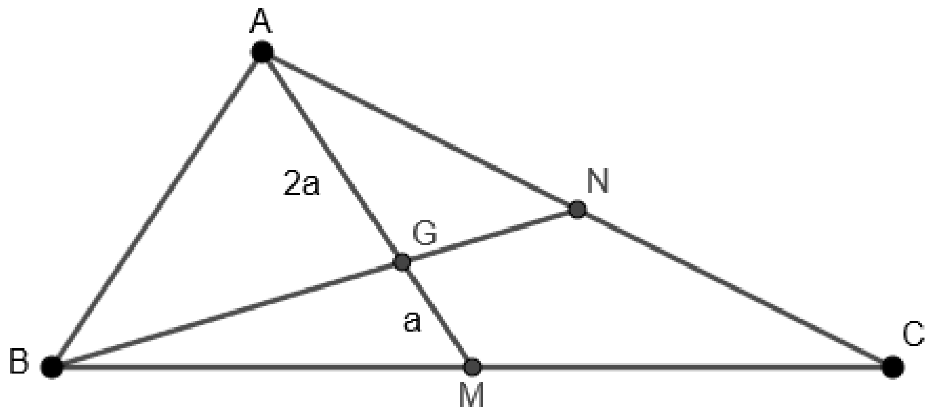

Figura 2.14: Baricentro. (Fonte: elaboração do autor)

2. Poderíamos, nesse momento, retomar brevemente os conceitos de cevianas, mediana e baricentro. Também seria possível demonstrar o teorema acima. Fazê-lo, ou não, é uma escolha, de certo modo, arbitrária. Vamos optar por não o fazer agora.[5]

3. Apesar de ainda não termos entrado na seara da geometria analítica plana, contornaremos esse fato propondo uma atividade com fulcro no raciocínio axiomático, na ideia dos jogos de linguagem matemáticos, assumindo as regras como axiomas.

Peças do jogo:

1. Um eixo coordenado.
2. Segmento orientado $\overrightarrow{AM}$ qualquer.

Regras do jogo:

1. Existe um ponto que divide o segmento orientado $\overrightarrow{AM}$ na proporção de 2 para 1, ou seja, cuja distância à origem do segmento é o dobro da distância à extremidade.
2. Indique esse ponto pela letra G e sua coordenada por x_G.
3. A extremidade do segmento orientado $\overrightarrow{AM}$ é ponto médio de outro segmento orientado $\overrightarrow{BC}$.
4. Indique as coordenadas da origem e da extremidade do segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ por, respectivamente, x_B e x_C.

5 Uma demonstração desse teorema pode ser consultada em [6].

5. Na fórmula $x_G = x_A + t(x_M - x_A)$, t representa a razão $\frac{d(A,G)}{d(A,M)}$.

Jogada a executar:

1. Usar as regras acima para determinar a coordenada do ponto G em função das coordenadas dos pontos A, B e C.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

Para determinar a coodenada do ponto G, vamos usar a fórmula

$$x_G = x_A + t(x_M - x_A)$$

deduzida anteriormente. E, para tanto, precisamos perceber que, para haver a proporção de 2 para 1, devemos ter 3 partes $(2+1=3)$, sendo duas partes relativa à distância à origem e uma à distância à extremidade. Logo,

$$t = \frac{d(A,G)}{d(A,M)} = \frac{2}{3}.$$

Substituindo esse valor de t na fórmula, obtemos

$$x_G = x_A + \frac{2}{3}(x_M - x_A).$$

Agora, devemos substituir o valor de x_M, pois x_G deve ser calculado em função de x_A, x_B e x_C.

Da Regra 3 segue que

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}.$$

Logo,

$$x_G = x_A + \frac{2}{3}(x_M - x_A) = x_A + \frac{2}{3}\left(\frac{x_B + x_C}{2} - x_A\right) = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

■

2.2.1 *A Razão Áurea: mais um exemplo de semelhanças de família*

Em 2011, na então prova de conhecimentos gerais da FUVEST, interdisciplinar com português, apareceu um exercício relacionado à razão áurea, ou seja, à divisão em média e extrema razão.[6]

Antes de propor alguma atividade é interessante revisar com os alunos o que vem a ser a razão áurea.

Definição 2.8. Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em *média e extrema razão*, ou em *secção áurea*, se o mais longo dos segmentos é média geométrica entre o menor e o segmento todo. Neste caso, chama-se *razão áurea* (ou *número de ouro*) a razão entre o segmento maior e o segmento menor, ou entre o segmento todo e o segmento maior.

Assim, sendo A e B os extremos do segmento original e X o ponto que o divide em secção áurea, temos a seguinte ilustração (Figura: 2.15):

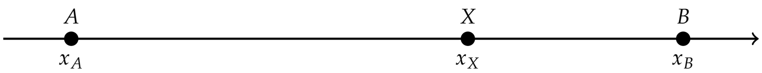

Figura 2.15: Divisão de um segmento em secção áurea. (Fonte: elaboração do autor)

Pela Definição 2.8 temos que

$$d^2(A, X) = d(X, B) \cdot d(A, B)$$

ou, escrito de outra forma,

$$\frac{d(A, X)}{d(X, B)} = \frac{d(A, B)}{d(A, X)}.$$

A razão áurea é dada por

$$\varphi = \frac{d(A, X)}{d(X, B)} = \frac{d(A, B)}{d(A, X)}.$$

Atividade 7. Calculando a razão áurea.

6 Com o escopo de motivar os alunos a ampliar seus conhecimentos através das semelhanças de família e embasar uma discussão sobre todo o misticismo que envolve tal razão, indicamos a leitura do artigo [17], citado nessa questão da FUVEST.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha.

Pré-requisitos: razão áurea; operações com frações algébricas; resolução de equação de 2º grau por meio de fórmula resolutiva.

Peças do jogo:

1. Um eixo coordenado.
2. Segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ qualquer.
3. Um ponto X entre A e B.

Regras do jogo:

1. Adote os seguintes valores, com $a > b > 0$: $d(A, X) = a$, $d(X, B) = b$ e $d(A, B) = a + b$.
2. O ponto X divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ em média e extrema razão (secção áurea), ou seja,
$$\varphi = \frac{d(A, X)}{d(X, B)} = \frac{d(A, B)}{d(A, X)}.$$

Jogada a executar:

1. Usar a Regra 1 para reescrever a Regra 2 usando os números reais positivos a, b e φ.
2. Reescrever a equação obtida na Jogada 1 usando apenas o φ.
3. Calcular o valor de φ, ou seja, do número de ouro.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

A Regra 2 diz que
$$\varphi = \frac{d(A, X)}{d(X, B)} = \frac{d(A, B)}{d(A, X)}.$$
Usando a Regra 1, obtemos
$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Jogada 2:

Da Jogada 1 segue que

$$\varphi = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Portanto,

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

Logo,

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

ou seja

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Jogada 3:

Resolvendo a equação obtida na Jogada 2 obtemos

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$$

e, portanto,

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como apenas uma das soluções é positiva e a razão áurea é, por definição, positiva, devemos descartar a solução negativa. Logo, temos que a razão áurea é

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

■

OBSERVAÇÕES AO PROFESSOR.

1. Muito provavelmente aparecerão dúvidas quanto a aproximar ou não a raiz quadrada de 5. Nesse caso, é importante lembrar aos alunos que aproximar é errar, ou seja, é obter um valor menor que o exato, uma vez que costumeiramente aproximamos por falta.
2. Sempre aproveitamos essas dúvidas para lembrar que, na prática, ou seja, quando vamos construir algum objeto do mundo físico, via de regra, trabalhamos com aproximações e que, quanto melhor for a aproximação, menor será o erro, e vice-versa.

3. Nesse diapasão, costumamos discutir com os alunos o que significa precisão, dando como exemplo um aparelho de ressonância magnética de alta precisão, o que, na realidade, significa de baixo erro. Perguntamos, por exemplo, qual seria o impacto de uma prefeitura anunciar: "Pensando em nossa população, compramos para o nosso pronto-socorro um aparelho de ressonância magnética de baixíssimo erro." Certamente as pessoas teriam medo de usar tal aparelho, pois, no mundo não acadêmico, na vida cotidiana, "erro" e "precisão" são conceitos antagônicos.

Voltemos à atividade. Seria interessante, a essa altura, lembrar aos alunos a aproximação de $\sqrt{5}$ com 5 casas decimais, ou seja, $\sqrt{5} \approx 2,23606$ e, assim, calcular o número de ouro de forma aproximada:

$$\varphi \approx \frac{1+2,23606}{2} = \frac{3,23606}{2} = 1,61803.$$

Como normalmente o cálculo de aproximações de raízes quadradas "na mão" gera muita discussão, seria uma boa hora para recordar um velho algoritmo de cálculo da raiz, ainda da época da existência do exame de admissão, abolido no Estado de São Paulo em 1971.[7]

Atividade 8. Jogo do algoritmo para o cálculo da raiz quadrada de um número positivo, aplicado ao cálculo do número de ouro com 5 casas decimais.

Tempo previsto para a atividade: 30 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: conceito de raiz quadrada de um número real; operações com números reais.

Peças do jogo:

1. $\sqrt{5}$.
2. $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Regras do jogo/jogadas a executar:

1. Para cada casa decimal de aproximação, acrescentar dois zeros ao final do número que desejamos extrair a raiz quadrada.
2. Separar o número em pares de algarismos, começando da direita.

7 Para uma demonstração do algoritmo ver o artigo [15].

3. Encontrar o maior inteiro cujo quadrado seja menor ou igual à primeira classe de algarismos à esquerda. Este será o primeiro algarismo da raiz quadrada.
4. Subtrair o quadrado do primeiro algarismo da raiz quadrada da primeira classe.
5. Baixar a próxima classe de algarismos, obtendo-se um novo número.
6. Caso a classe de algarismos baixada consista do primeiro par de zeros acrescentados na Jogada 1, colocar uma vírgula após o valor da raiz quadrada calculado até então.
7. Tomar o dobro do valor da raiz até agora (ignorando eventuais vírgulas) seguido de um algarismo $*$ a ser descoberto.
8. Descobrir o algarismo $*$, que é o maior inteiro que multiplicado pelo número formado na regra anterior produz um resultado menor ou igual ao novo número obtido na Jogada 5. Este algarismo $*$ será o próximo algarismo da raiz.
9. Subtrair do número obtido na Jogada 5 o produto efetuado na Jogada 8.
10. Repetir as jogadas a partir da 5, até que se obtenha o número de casas decimais desejado.
11. Calcular $\sqrt{5}$ com 5 casas decimais.
12. Calcular φ com 5 casas decimais.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

Acrescentamos 10 zeros ao final do número 5, obtendo 50000000000.

Jogada 2:

Separação em pares, começando da direita: 5 00 00 00 00 00.

Jogada 3:

A primeira classe de algarismos à esquerda é composta somente pelo número 5. Como $2^2 = 4$ e $3^2 = 9 \geq 5$, o primeiro algarismo da raiz quadrada será 2.

Jogada 4:

Subtração: $5 - 4 = 1$.

Jogada 5:

Baixando a próxima classe de algarismos (00, no caso), obtemos o novo número 1 00.

Jogada 6:

Como a classe baixada na jogada anterior consiste do primeiro par de zeros acrescentados na Jogada 1, colocamos uma vírgula após o valor da raiz quadrada calculado até então, obtendo "2,".

Jogada 7:

O dobro do valor da raiz até agora é $2 \cdot 2 = 4$. Escrevemos, então, $4*$ e buscaremos descobrir o dígito que $*$ representa na próxima jogada.

Jogada 8:

Devemos efetuar o produto $(4*) \cdot\ *$. Como $42 \cdot 2 = 84 \leq 100$ e $43 \cdot 3 = 129 > 100$, descobrimos que $* = 2$. Logo, o valor da raiz quadrada calculado até agora se torna 2,2.

Jogada 9:

Subtração: $100 - 84 = 16$.

Jogada 10:

Baixa-se 00, obtendo-se o novo número 16 00. O dobro do valor raiz até agora (ignorando eventuais vírgulas) é $22 \cdot 2 = 44$. Para obtermos o próximo algarismo $*$ da raiz, observamos que $443 \cdot 3 = 1329 \leq 1600$ e $444 \cdot 4 = 1776 > 1600$. Logo, $* = 3$ e, portanto, o valor da raiz quadrada calculado até agora se torna 2,23.

Jogada 11:

Continuando nesse diapasão, chegaremos a $\sqrt{5} \approx 2,23606$.

Jogada 12:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{1+2,23606}{2} = \frac{3,23606}{2} = 1,61803.$$

■

Aproveitando que estamos falando sobre razão áurea, podemos identificar outras semelhanças de família ao lembrar que essa razão está embutida na sequência de Fibonacci. Para tanto, vamos lançar mão de um exercício proposto no ENEM de 2021 que não faz a relação direta, mas que podemos explorar quando o resolvermos.

De início vamos lembrar aos alunos que a sequência de Fibonacci é recursiva (isto é, um termo é determinado em função dos antecessores imediatos) e pode ser dada pela regra

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

com $F_1 = F_2 = 1$. Assim, a sequência de Fibonacci é dada por $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$.

OBSERVAÇÕES AO PROFESSOR.

1. Acreditamos que a maneira como propusemos as atividades leva os alunos a constituir os conceitos, assim como técnicas para a resolução de problemas.
2. Para testar se realmente surtiu efeito, ou seja, se houve aprendizado, é importante propor também algumas atividades no formato "usual", da maneira como serão encontradas nos vestibulares e no ENEM. Assim, abaixo segue uma sugestão.

Atividade 9. Questão 136 da prova azul do segundo dia do Enem 2021.

Tempo previsto para a atividade: 50 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: razão áurea; resolução de equação de 2º grau; operações com potências; operações com monômios; princípio da indução finita.

Um segmento de reta está dividido em duas partes na proporção áurea quando o todo está para uma das partes na mesma razão em que essa parte está para a outra. Essa constante de proporcionalidade é comumente representada pela letra grega φ, e seu valor é dado pela solução positiva da equação $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Assim como a potência φ^2, as potências superiores de φ podem ser expressas da forma $a\varphi + b$, em que a e b são inteiros positivos, como apresentado no quadro.

φ^2	φ^3	φ^4	φ^5	φ^6	φ^7
$\varphi + 1$	$2\varphi + 1$	$3\varphi + 2$	$5\varphi + 3$	$8\varphi + 5$	...

A potência φ^7, escrita na forma $a\varphi + b$ (a e b são inteiros positivos), é:

a) $5\varphi + 3$

b) $7\varphi + 2$

c) $9\varphi + 6$

d) $11\varphi + 7$

e) $13\varphi + 8$

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Podemos resolver apenas substituindo as relações dadas:

$$\varphi^7 = \varphi \cdot \varphi^6 = \varphi \cdot (8\varphi + 5) = 8\varphi^2 + 5\varphi = 8(\varphi + 1) + 5\varphi = 13\varphi + 8.$$

Logo, a alternativa e) é a correta.

■

EXPLORANDO OUTRA RESOLUÇÃO.

Observando a tabela, podemos ver que a constante b tem a seguinte sequência $(1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$, ou seja, parece tratar-se da sequência de Fibonacci. Logo, o próximo valor é o $3 + 5 = 8$.

Observando o a, vemos que da primeira para a segunda coluna aumentou 1, da segunda para a terceira, também aumentou 1, da terceira para a quarta aumentou 2 e da quarta para a quinta, aumentou 3, o que sugere que esse aumento está seguindo a sequência de Fibonacci. Logo, da quinta para a sexta aumentará $2 + 3 = 5$, assim o valor de a será $a = 5 + 8 = 13$.

Na realidade, podemos usar essa resolução para introduzir aos alunos a prova por indução, cobrada em alguns vestibulares como o do ITA e do IME.

Para tanto, lembremos o princípio da indução finita:

Teorema 2.9 (Princípio da indução finita). *Sejam $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n e n_0 um número natural. Suponhamos que:*

(i) $P(n_0)$ seja válida; e

(ii) para todo $k \geq n_0$ natural, a validade de $P(k)$ implica a validade de $P(k+1)$.

Então $P(n)$ é valida para todo $n \geq n_0$ natural.

Começaremos provando que $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ para todo $n \geq 2$.

Neste caso, $P(n)$ é a propriedade $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ e $n_0 = 2$.

(i) Temos que a propriedade vale para $n = 2$, pois $\varphi^2 = \varphi + 1$, conforme Atividade 7.

(ii) Seja $k \geq 2$ um número natural. Suponhamos que a propriedade valha para $n = k$ (ou seja, nossa hipótese de indução é $\varphi^k = \varphi^{k-1} + \varphi^{k-2}$). Provemos que ela vale para $n = k + 1$. De fato,

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k \cdot \varphi = (\varphi^{k-1} + \varphi^{k-2}) \cdot \varphi = \varphi^k + \varphi^{k-1}$$

o que completa a prova.

Do princípio de indução finita segue que $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ para todo $n \geq 2$.

Vamos agora mostrar que, para cada $n \geq 2$ natural, existem $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tais que $\varphi^n = a_n\varphi + b_n$.

(i) Temos que $\varphi^2 = \varphi + 1$, de acordo com a Atividade 7. Logo, tomando $a_2 = 1$ e $b_2 = 1$, temos que a propriedade vale para $n = 2$.

(ii) Seja $k \geq 2$ um número natural. Suponhamos que a propriedade valha para $n = k$, ou seja, que existem $a_k, b_k \in \mathbb{N}$ tais que $\varphi^k = a_k\varphi + b_k$. Provemos que ela vale para $n = k + 1$. De fato,

$$\varphi^{k+1} = \varphi \cdot \varphi^k = \varphi \cdot (a_k\varphi + b_k) = a_k\varphi^2 + b_k\varphi = a_k(\varphi + 1) + b_k\varphi = (a_k + b_k)\varphi + a_k.$$

Tomando $a_{k+1} = a_k + b_k$ e $b_{k+1} = a_k$ temos que a propriedade vale para $n = k + 1$, o que completa a prova.

Note que, como φ é irracional, os números a_n e b_n dados acima são únicos. De fato, se existissem $c_n, d_n \in \mathbb{N}$ tais que $\varphi^n = c_n\varphi + d_n$, então $a_n\varphi + b_n = c_n\varphi + d_n$, ou seja, $(a_n - c_n)\varphi = d_n - c_n$. Se $a_n - c_n \neq 0$, então φ seria racional, o que é absurdo. Logo, $a_n - c_n = 0$, o que acarreta $c_n = a_n$ e $d_n = b_n$.

Com isso, conseguiremos mostrar, finalmente, que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ e $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ para todo $n \geq 2$ natural.

De fato, como $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$, $\varphi^n = a_n\varphi + b_n$, $\varphi^{n-1} = a_{n-1}\varphi + b_{n-1}$ e $\varphi^{n-2} = a_{n-2}\varphi + b_{n-2}$, temos que $a_n\varphi + b_n = (a_{n-1}\varphi + b_{n-1}) + (a_{n-2}\varphi + b_{n-2}) = (a_{n-1} + a_{n-2})\varphi + (b_{n-1} + b_{n-2})$. Da unicidade de a_n e b_n segue que $a_n = a_{n+1} + a_{n-2}$ e $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$.

Temos, também, uma oportunidade para falar com os alunos sobre recorrências lineares de primeira e de segunda ordem, mostrando que a sequência de Fibonacci é uma recorrência de segunda ordem homogênea, do tipo $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, e, então, definirmos a equação característica de uma recorrência desse tipo como sendo uma equação de segundo grau do tipo $r^2 + pr + q = 0$.

Por fim, podemos mostrar que a equação característica da sequência de Fibonacci é dada por $r^2 = r + 1$, pois

$$\begin{aligned} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad & \Longrightarrow \quad \tfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \tfrac{x_{n+1}}{x_{n+1}} + \tfrac{x_n}{x_{n+1}} \\ & \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} \\ & \Longrightarrow \quad r = 1 + \tfrac{1}{r} \\ & \Longrightarrow \quad r^2 = r + 1 \end{aligned}$$

e observar que as soluções da equação

$$r^2 = r + 1$$

são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

sendo r_1 a razão áurea.

■

2.3 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

Elencamos, aqui, as competências e habilidades previstas na BNCC que foram trabalhadas neste capítulo.

Competências:

- (CEF2) Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- (CEF3) Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- (CEM4) Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
- (CEM5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação

de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

- (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
- (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
- (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
- (EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.
- (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
- (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
- (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
- (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
- Habilidade não prevista na BNCC que acrescentamos: Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, com o uso de fórmulas.

3

COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO

No 7º ano do Ensino Fundamental, quando resolvemos sistemas de equações lineares com duas variáveis graficamente, desenhamos, sem muita discussão teórica, dois eixos coordenados ortogonais, atribuímos valores para o x das equações, calculamos o y correspondente, traçamos as retas e verificamos seu cruzamento, ou não cruzamento, ou coincidência.[1]

No 8º ano do Ensino Fundamental trabalhamos com esses sistemas novamente, acrescentando a resolução de inequações de primeiro grau com uma variável e a representação de seu resultado na reta real, através de intervalos, algo que remete à geometria analítica unidimensional.

Por fim, no 9º ano do Ensino Fundamental, passamos a ter um contato mais formal com a geometria analítica bidimensional, mesmo sem o uso desse nome, quando estudamos funções afins e funções polinomiais de segundo grau. Aqui, tomamos consciência, pela primeira vez, de que o referencial dito cartesiano ortogonal permite que estudemos as retas e as parábolas sob um novo ponto de vista.

Neste capítulo, vamos dar início ao estudo da geometria analítica plana. Aprenderemos a localizar pontos em um plano munido de um sistema de eixos ortogonais e a descrever um segmento através da localização de seus extremos, assim como calcular seu ponto médio e seu comprimento (ou seja, a distância entre seus extremos). Também nos aventuraremos no conceito de lugar geométrico, usando-o para obter equações de retas e de circunferências.

1 Sugerimos que o leitor interessado em aprofundar no assunto deste capítulo consulte [10], [13], [14], [6], [16] e [4].

Vamos dar início ao estudo da geometria analítica plana mostrando como localizar pontos no plano com o auxílio de um referencial cartesiano ortogonal.

Inicialmente, vamos desenhar em nosso plano dois eixos coordenados ortogonais, um horizontal e outro vertical, que se cruzam em suas origens. Chamaremos o primeiro de *eixo x* e o segundo, de *eixo y*. Passamos a ter, então, um *plano dotado de um sistema de eixos ortogonais*. (Figura: 3.1)

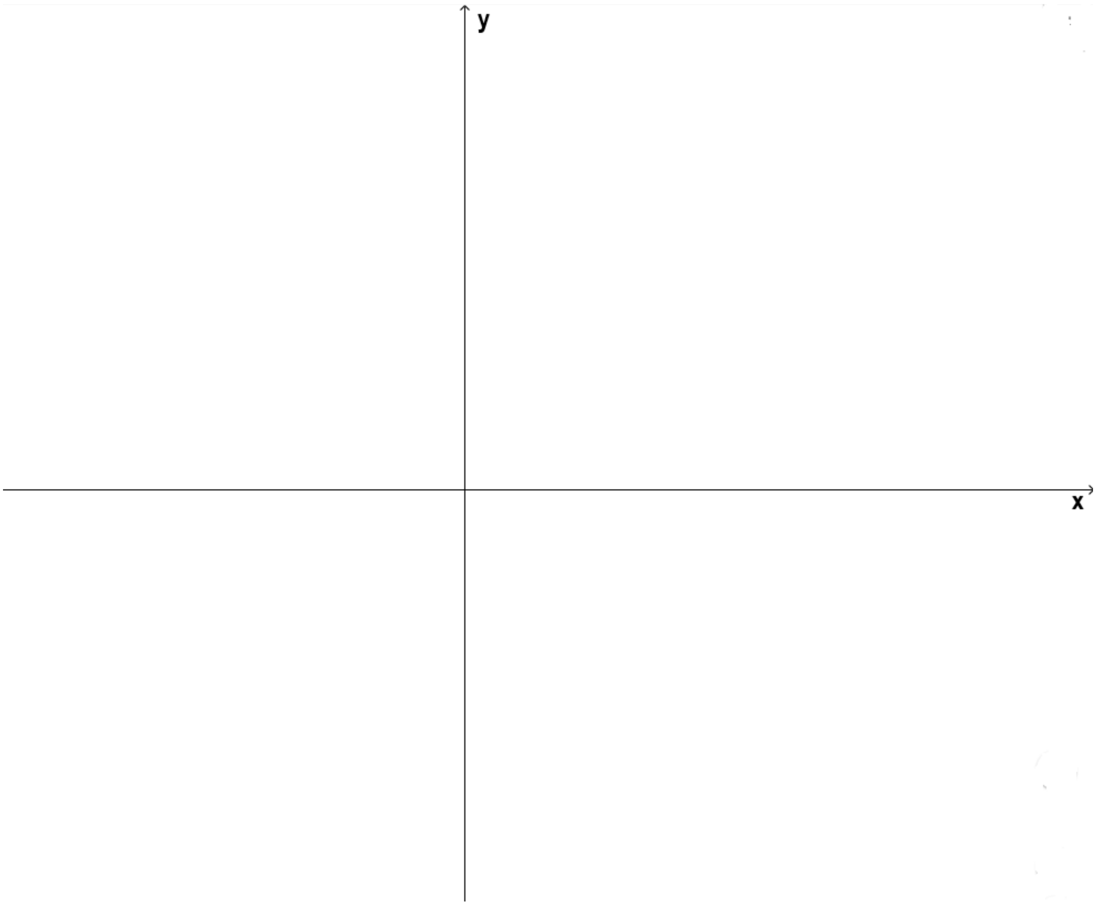

Figura 3.1: Eixos ortogonais. (Fonte: elaboração do autor)

Agora, queremos introduzir a noção de coordenada para pontos de um plano dotado de um sistema de eixos ortogonais.

Dado um ponto P desse plano, traçamos a reta paralela ao eixo y que passa por P. Esta reta intersecta o eixo x num ponto P_1. Em seguida, traçamos a reta paralela ao eixo x que passa por P. Esta reta intersecta o eixo y num ponto P_2. (Figura: 3.2)

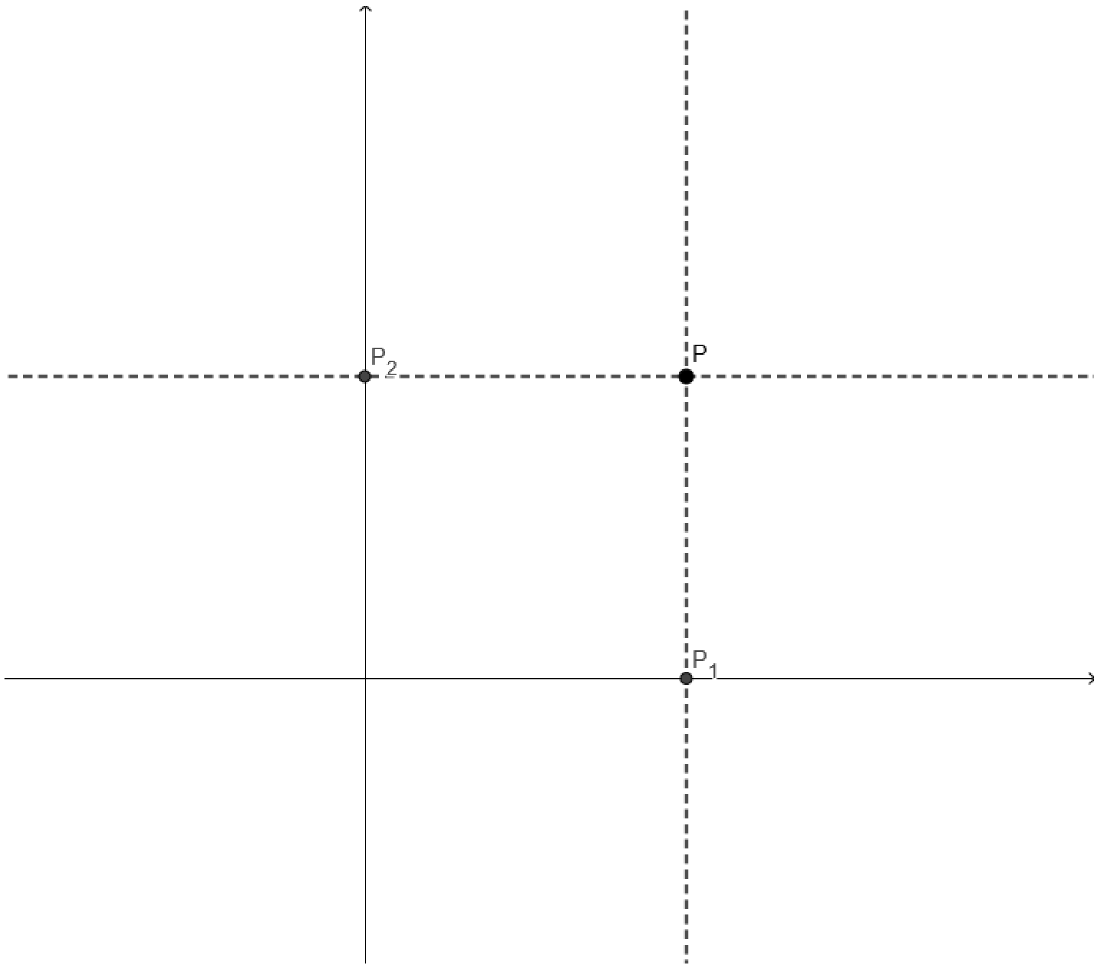

Figura 3.2: Localização do ponto P. (Fonte: elaboração do autor)

Definição 3.1. Chamaremos de *abscissa de* P a coordenada do ponto P_1 (em relação ao eixo x) e a denotaremos por x_P. Chamaremos de *ordenada de* P a coordenada do ponto P_2 (em relação ao eixo y) e a denotaremos por y_P. Chamaremos o par ordenado (x_P, y_P) de *coordenadas de* P em relação ao sistema de eixos ortogonais em questão.

Observamos que há uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano dotado de um sistema de eixos ortogonais e o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}.$$

É comum nós, professores, imaginarmos que todos os alunos do Ensino Médio estejam familiarizados com a construção do plano acima descrito, comumente chamado de *plano cartesiano ortogonal*. No entanto, apesar de vivermos num mundo altamente visual, onde as imagens exercem papel preponderante na comunicação, muitos alunos não desenvolveram a habilidade de localizar pontos em um sistema de eixos ortogonais.

Podemos, aqui, trazer várias semelhanças de família para ilustrar aos alunos a importância de se localizar pontos no plano. Eis alguns exemplos:

- a localização da poltrona no cinema, ou no campo de futebol, ou no teatro;
- a localização de uma cidade na superfície terrestre fazendo uso da latitude e da longitude;
- a imagem produzida na tela de um celular é resultado de um conjunto de muitos "pontos", normalmente no formato quadrado, chamados de *pixels*. Pode ser interessante comentar com os alunos que, diferentemente do ponto da geometria (que não tem dimensão), o pixel tem e se constitui na menor unidade para medir imagens digitais. Logo, quanto menor for possível fazer o pixel, mais perfeita será a imagem.

Desse modo, temos como proposta inicial trabalhar a localização de pontos no plano, fazendo uso de folhas brancas de sulfite e, posteriormente, de papel milimetrado.

Atividade 10. Jogo de localização de pontos num plano dotado de um sistema de eixos ortogonais.

Tempo previsto para a atividade: 15 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; folha de sulfite; lápis; borracha; régua e esquadro.

Pré-requisitos: localização de um ponto em uma reta; sistema de eixos ortogonais.

Peças do jogo:

1. Folha de sulfite.
2. Lápis e borracha.

3. Régua.
4. Esquadro.

Regras do jogo:

1. Os desenhos serão feitos com régua e esquadro.
2. O eixo x é horizontal e o eixo y é vertical.
3. Todo ponto do plano será representado por um par ordenado do tipo (x, y). O número x chama-se a abscissa do ponto e o número y chama-se a ordenada do ponto.
4. Quando a ordenada de um ponto for zero, esse ponto estará sobre o eixo x, no número que representa sua abscissa.
5. Quando a abscissa de um ponto for zero, esse ponto estará sobre o eixo y, no número que representa sua ordenada.
6. Para localizar um ponto de coordenadas (a, b), com $ab \neq 0$, traçamos uma reta vertical pelo número a no eixo x e uma reta horizontal pelo número b no eixo y. O ponto de interseção dessas duas retas é o ponto de coordenadas (a, b).
7. O ponto de coordenadas $(0, 0)$ é chamado de origem do sistema de coordenadas.

Jogada a executar:

1. Desenhar os dois eixos ortogonais x e y.
2. Usando as Regras 1 a 7, localizar o ponto $A = (2, 4)$.
3. Usando as Regras 1 a 7, localizar o ponto $B = (4, 2)$.
4. Usando as Regras 1 a 7, localizar os pontos $O = (0, 0)$, $C = (2, 0)$ e $D = (0, 4)$.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

A resolução está na Figura 3.3:

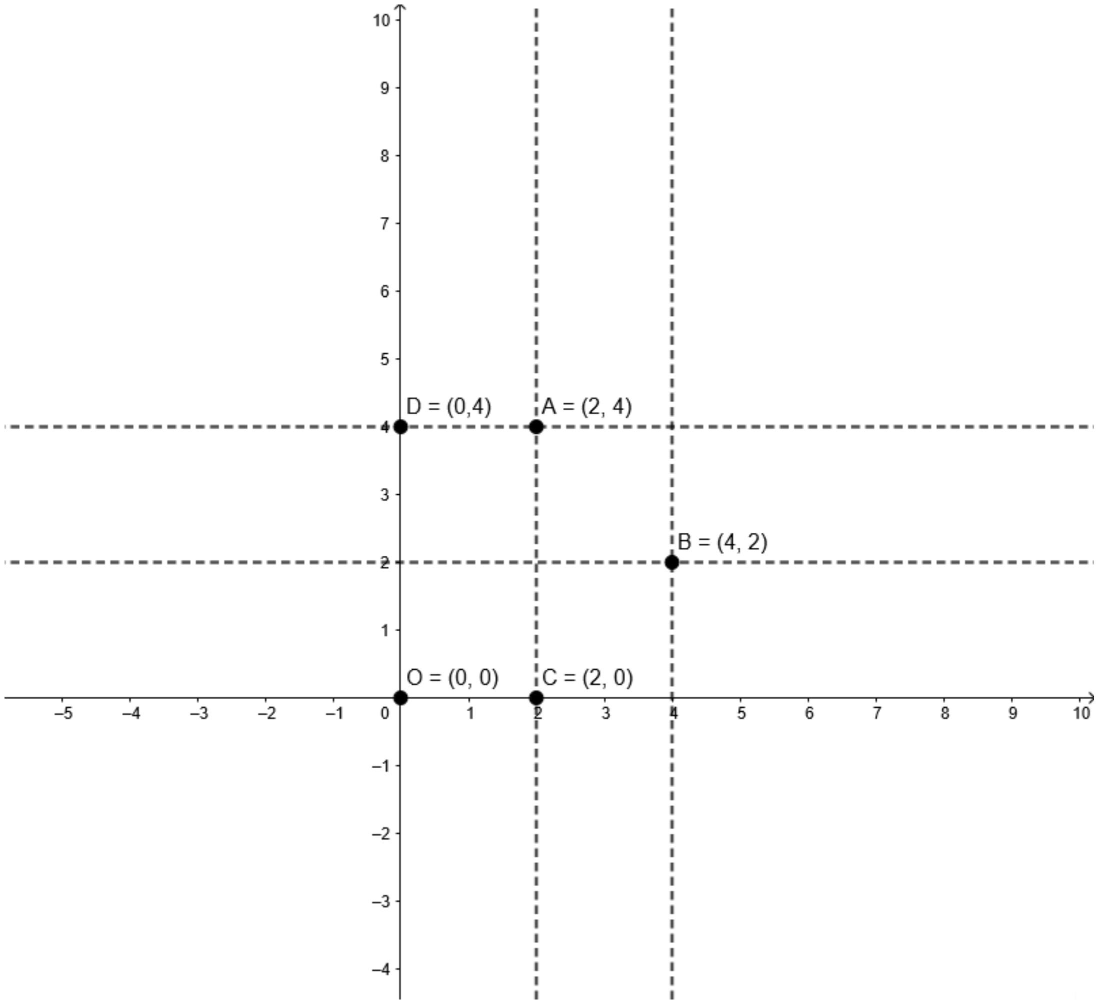

Figura 3.3: Localização de pontos no plano. (Fonte: elaboração do autor)

■

Atividade 11. Outro jogo de localização de pontos num plano dotado de um sistema de eixos ortogonais.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; folha de sulfite; lápis; borracha; régua e esquadro.

Pré-requisitos: Atividade 10.

Peças do jogo:

1. Folha de sulfite.

2. Lápis e borracha.
3. Régua.
4. Esquadro.

Regras do jogo:

1. Os desenhos serão feitos com régua e esquadro.
2. O eixo x é horizontal e o eixo y é vertical.
3. Todo ponto do plano será representado por um par ordenado do tipo (x, y). O número x chama-se a abscissa do ponto e o número y chama-se a ordenada do ponto.
4. Quando a ordenada de um ponto for zero, esse ponto estará sobre o eixo x, no número que representa sua abscissa.
5. Quando a abscissa de um ponto for zero, esse ponto estará sobre o eixo y, no número que representa sua ordenada.
6. Para localizar um ponto de coordenadas (a, b), com $ab \neq 0$, traçamos uma reta vertical pelo número a no eixo x e uma reta horizontal pelo número b no eixo y. O ponto de interseção dessas duas retas é o ponto de coordenadas (a, b).
7. O ponto de coordenadas $(0, 0)$ é chamado de origem do sistema de coordenadas.
8. Ao desenharmos em um plano os dois eixos ortogonais, o plano fica dividido em quatro regiões, mais os dois eixos, e cada uma dessas regiões é chamada *quadrante*, normalmente contados no sentido anti-horário, iniciando com o que possui os pontos com abscissa e ordenada positivas.

Jogadas a executar:

1. Desenhar os dois eixos ortogonais x e y.
2. Identificar cada um dos quadrantes (1º, 2º, 3º e 4º) no desenho da Jogada 1.
3. Usando as Regras 1 a 8, localizar os pontos $A = (3, 0), B = (0, 3), C = (-3, 0), D = (0, -3), E = (3, 3), F = (-3, 3), G = (3, -3), H = (-3, -3), I = (6, 8), J = (-5, 4), K = (-6, -7), L = (5, -4)$.
4. Relacionar os pontos que pertencem a cada um dos quadrantes (1º, 2º, 3º e 4º) e aos eixos x e y.

5. Tentar elaborar uma regra que relacione os sinais da abscissa e da ordenada de um ponto com o quadrante ao qual pertence.
6. Tentar elaborar uma regra que explique quais as condições que a abscissa e a ordenada devem satisfazer para que um ponto pertença ao eixo x ou ao eixo y.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogadas 1, 2 e 3 (Figura: 3.4):

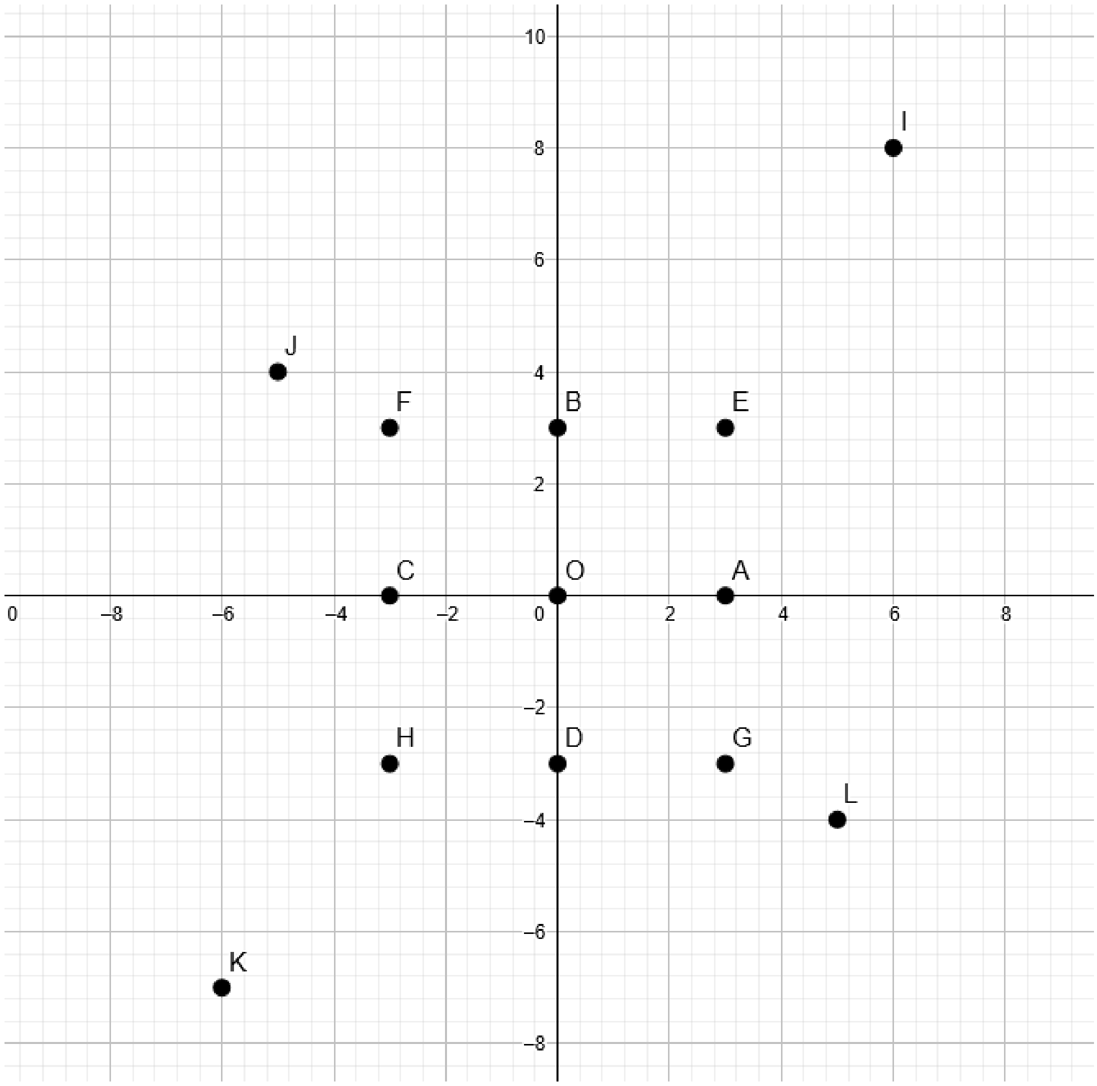

Figura 3.4: Localização dos pontos A a L. (Fonte: elaboração do autor)

Jogada 4:

- Pontos do primeiro quadrante: I e E
- Pontos do segundo quadrante: J e F
- Pontos do terceiro quadrante: H e K
- Pontos do quarto quadrante: G e L
- Pontos do eixo x: O, A e C
- Pontos do eixo y: O, B e D

Jogada 5:

Um ponto pertencerá ao primeiro quadrante quando tiver abscissa e ordenada positivas, ao segundo quando tiver abscissa negativa e ordenada positiva, ao terceiro quando tiver abscissa e ordenada negativas e ao quarto quando tiver abscissa positiva e ordenada negativa.

Jogada 6:

Um ponto pertencerá ao eixo x quando sua ordenada for nula e pertencerá ao eixo y quando sua abscissa for nula. Um ponto será igual à origem, ou seja, pertencerá aos dois eixos simultaneamente, quando ambas, abscissa e ordenada, forem nulas. ■

OBSERVAÇÕES AO PROFESSOR.

1. É importante destacar que esses pontos não foram escolhidos de forma aleatória. De fato, os primeiros oito pontos tiveram por escopo os alunos perceberem suas diferenças, pois é muito comum que façam confusão quando no futuro vierem a estudar a equação segmentária ou dos interceptos da reta (nomes usados no Ensino Médio) dada por $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. A confusão que se nota por parte de alguns alunos é achar que o ponto (p, q) pertence à reta, fruto de uma confusão de entendimento da diferença entre (p, q), $(p, 0)$ e $(0, q)$.
2. A mesma confusão ocorre quando do estudo das funções e os alunos precisam determinar o ponto onde a curva corta cada um dos eixos: confundem o número p com o ponto $(p, 0)$ e o número q com o ponto $(0, q)$.
3. Acreditamos que essas confusões se dão muito por culpa de nós, professores, que cometemos abusos de linguagem para com alunos que estão em fase de formação de conceitos, pois é comum que digamos, por exemplo, que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta ou intercepta o eixo y no ponto c, fazendo com que os alunos

se esqueçam de que, no plano, não existe ponto c, e sim ponto de coordenadas $(0, c)$.

4. Notemos que não se trata de preciosismo linguístico, o que estaria contrariando a ideia wittgensteiniana de jogo de linguagem, mas sim, justamente, de estabelecermos regras claras para o jogo. Assim, é importante abrir uma discussão com os alunos para que percebam que, pelas regras estabelecidas, um número pode até "nomear" um ponto quando esse ponto pertence a um dos eixos, no entanto a representação desse ponto no sistema de eixos ortogonais fixado sempre se dará por um par ordenado do tipo (a, b).

Seguem outras sugestões de jogos de linguagem matemáticos:

1. Repetir a Atividade 10 usando folha de papel milimetrado.
2. Mudar os pontos para $A = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $B = (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $C = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ e $D = (\sqrt{2}, -\sqrt{3})$.

3.2 PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO DE RETA

Como sabemos, dados dois pontos distintos A e B do plano, os pontos da reta AB que estão entre A e B constituem o segmento de reta $\overline{AB}$.

O desenho abaixo (Figura: 3.5) ilustra o segmento de reta $\overline{AB}$ quando $A = (1, 2)$ e $B = (9, 5)$ no sistema de eixos ortogonais fixado.

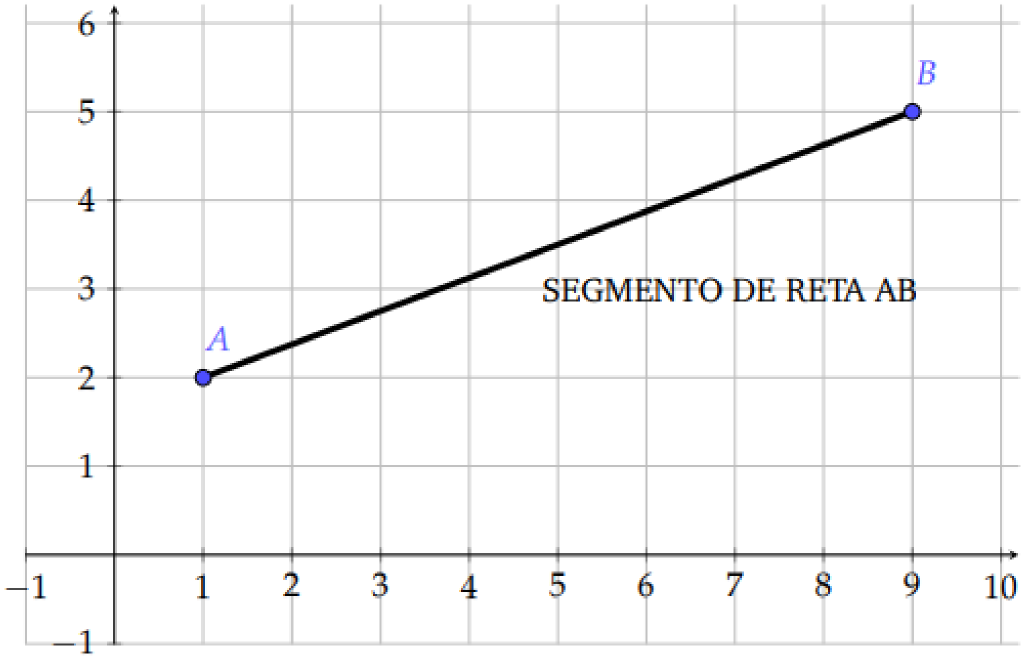

Figura 3.5: Segmento de reta $\overline{AB}$. (Fonte: elaboração do autor)

Usando a definição de ponto médio dada no Capítulo 2 — qual seja, o ponto médio de um segmento de reta é o ponto entre seus extremos que o divide em dois outros segmentos congruentes —, juntamente com o famoso teorema de Tales, vamos estabelecer uma fórmula para o cálculo do ponto médio de um segmento qualquer num plano dotado de um sistema de eixos ortogonais.

Duas observações importantes:

1. Vamos recordar com os alunos o teorema de Tales.[2]
2. Antes de fazermos a dedução de uma fórmula geral, faremos um exemplo numérico, que ajudará os alunos com maiores dificuldades de abstração.

Revisitando o Teorema de Tales

Na geometria plana da Educação Básica, o enunciado mais comum do teorema de Tales é o seguinte:

2 Matemático e filósofo grego, Tales de Mileto viveu no período de 624 a.C. a 547 a.C.

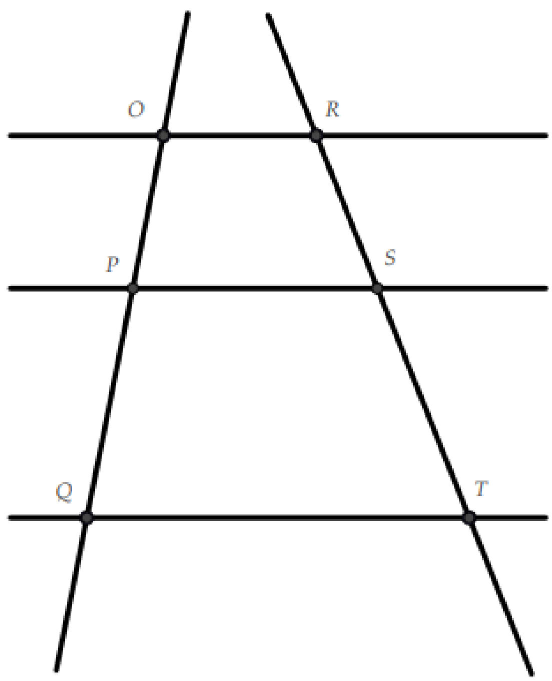

Figura 3.6: Teorema de Tales. (Fonte: elaboração do autor)

Teorema 3.2 (de Tales)**.** *No plano, um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.*[3] *(Figura: 3.6)*

O que o teorema de Tales nos diz, em termos de proporções, é que

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{ST}}.$$

É importante salientar com os alunos que, nas hipóteses do teorema, as retas do feixe devem ser paralelas, ou seja, destacar que os segmentos determinados sobre as transversais só serão proporcionais se as retas do feixe forem paralelas. Isso pode parecer despiciendo, mas, na realidade, os alunos tendem a aplicá-lo mesmo quando não há garantia do paralelismo.

Por enquanto, iremos aceitar este teorema como verdadeiro sem demonstrá-lo.

Estamos prontos para encontrar o ponto médio de um segmento específico.

3 Uma demonstração desse teorema pode ser consultada em [6].

Um exemplo numérico do cálculo do ponto médio.

Observe a figura abaixo (Figura: 3.7), na qual tomamos os pontos $A = (2,3)$ e $B = (6,5)$ em um sistema de eixos ortogonais fixado.

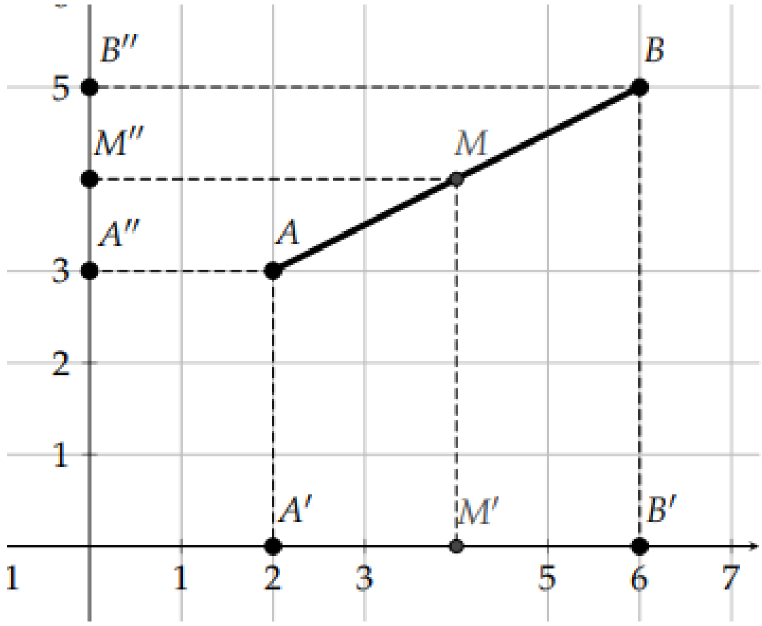

Figura 3.7: Ponto médio M do segmento $\overline{AB}$. (Fonte: elaboração do autor)

Atente-se para as seguintes observações:

1. Como podemos ver na figura acima, indicamos o ponto médio por M.

2. Note, em nosso desenho, que A', M' e B' são, respectivamente, as projeções ortogonais de A, B e C sobre o eixo x, enquanto que A'', M'' e B'' são as as projeções ortogonais de A, B e C sobre o eixo y.

Iremos determinar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, ou seja, as coordenadas do ponto M.

Usando a definição de ponto médio, podemos escrever que o segmento $\overline{AM}$ é congruente ao segmento $\overline{MB}$, e, portanto, ambos têm o mesmo comprimento, ou seja, $AM = MB$.

Note que as retas AA', MM' e BB' constituem um feixe de retas paralelas, pois são perpendiculares ao eixo x. Pelo Teorema de Tales, como $AM = MB$, temos a seguinte proporção:

$$\frac{A'M'}{M'B'} = \frac{AM}{MB} = 1.$$

Portanto,

$$A'M' = M'B'.$$

Esta última expressão nos diz que, no eixo x, a distância entre os pontos A' e M' é igual à distância entre os pontos M' e B'.

Como sabemos calcular distâncias na geometria analítica unidimensional, podemos escrever:

$$d(A', M') = |x_M - x_A| = |x_M - 2| \quad \text{e} \quad d(M', B') = |x_B - x_M| = |6 - x_M|.$$

Igualando as duas expressões acima, obtemos

$$|x_M - 2| = |6 - x_M|$$

ou seja,

$$x_M - 2 = 6 - x_M \quad \text{ou} \quad x_M - 2 = -6 + x_M.$$

Devemos, pois, considerar as duas possibilidades.

1ª possibilidade:

$$x_M - 2 = 6 - x_M \iff 2x_M = 8 \iff x_M = 4.$$

2ª possibilidade:

$$x_M - 2 = -6 + x_M \iff x_M - x_M = -6 + 2 \iff 0 = -4$$

o que mostra que essa possibilidade não ocorre.

Portanto, a abscissa do ponto médio é $x_M = 4$.

De modo análogo, calculamos a ordenada do ponto médio e obtemos $y_M = 4$.

Portanto as coordenadas do ponto médio são $(4, 4)$.

Fórmula para calcular o ponto médio de um segmento de reta

Estamos prontos para deduzir uma fórmula que nos permita calcular o ponto médio de um segmento de reta no plano.

Vamos dividir a dedução em três casos:

Caso 1: Sejam A e B dois pontos distintos do plano com ordenadas iguais, ou seja, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ com $y_A = y_B$, e seja $M = (x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Observe a figura abaixo (Figura: 3.8):

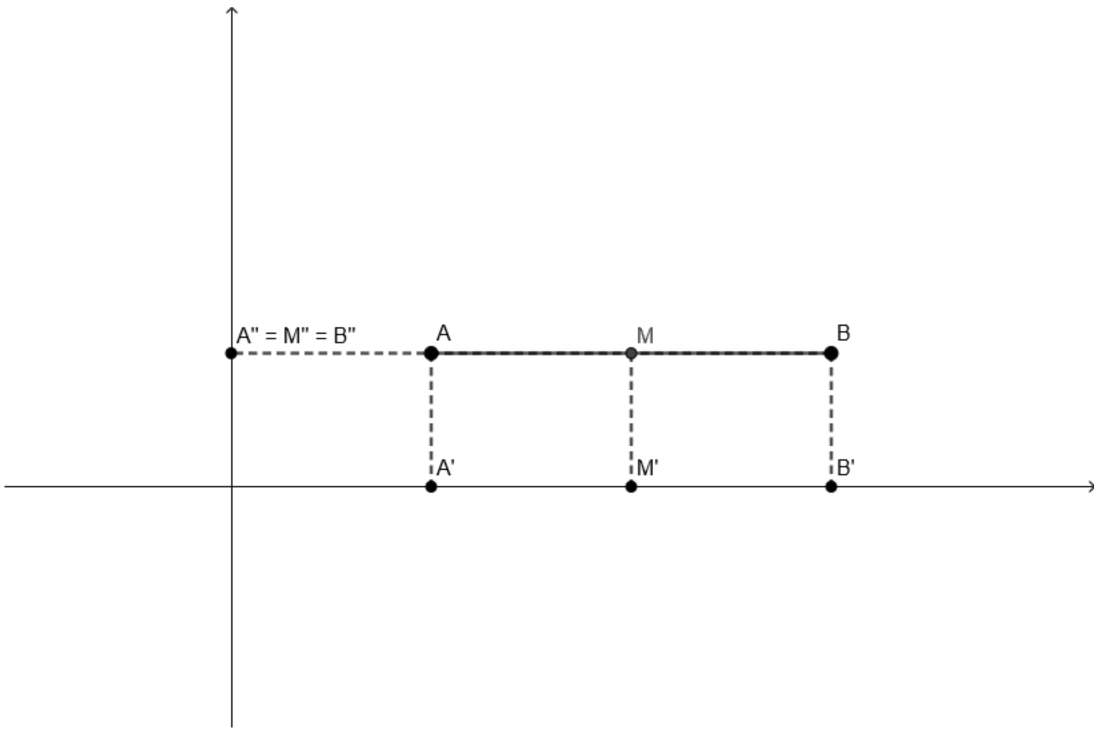

Figura 3.8: Ponto médio de segmento horizontal. (Fonte: elaboração do autor)

Como o segmento $\overline{AB}$ tem extremos com a mesma ordenada em relação ao sistema de eixos ortogonais fixado, seu ponto médio também tem a mesma ordenada dos dois extremos, ou seja, $y_M = y_A = y_B$ e, portanto,

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Em relação às abscissas dos pontos, note que as retas AA', MM' e BB' constituem um feixe de retas paralelas, pois são perpendiculares ao eixo x. Pelo Teorema de Tales, como $AM = MB$, temos a seguinte proporção:

$$\frac{A'M'}{M'B'} = \frac{AM}{MB} = 1.$$

Portanto,

$$A'M' = M'B'.$$

Esta última expressão nos diz que, no eixo x, a distância entre os pontos A' e M' é igual à distância entre os pontos M' e B'.

Como sabemos calcular distâncias na geometria analítica unidimensional, podemos escrever

$$d(A', M') = |x_M - x_A| \quad \text{e} \quad d(M', B') = |x_B - x_M|.$$

Igualando as duas expressões acima, obtemos

$$|x_M - x_A| = |x_B - x_M|$$

ou seja,

$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad \text{ou} \quad x_M - x_A = -x_B + x_M.$$

1ª possibilidade:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \iff x_M + x_M = x_A - x_B \iff 2x_M = x_A + x_B \iff x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

2ª possibilidade:

$$x_M - x_A = -x_B + x_M \iff x_A = x_B$$

o que mostra que essa possibilidade não ocorre, pois os pontos A e B são distintos.

Caso 2: Sejam A e B dois pontos distintos do plano com abscissas iguais, ou seja, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ com $x_A = x_B$ e seja $M = (x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Observe a figura abaixo (Figura: 3.9):

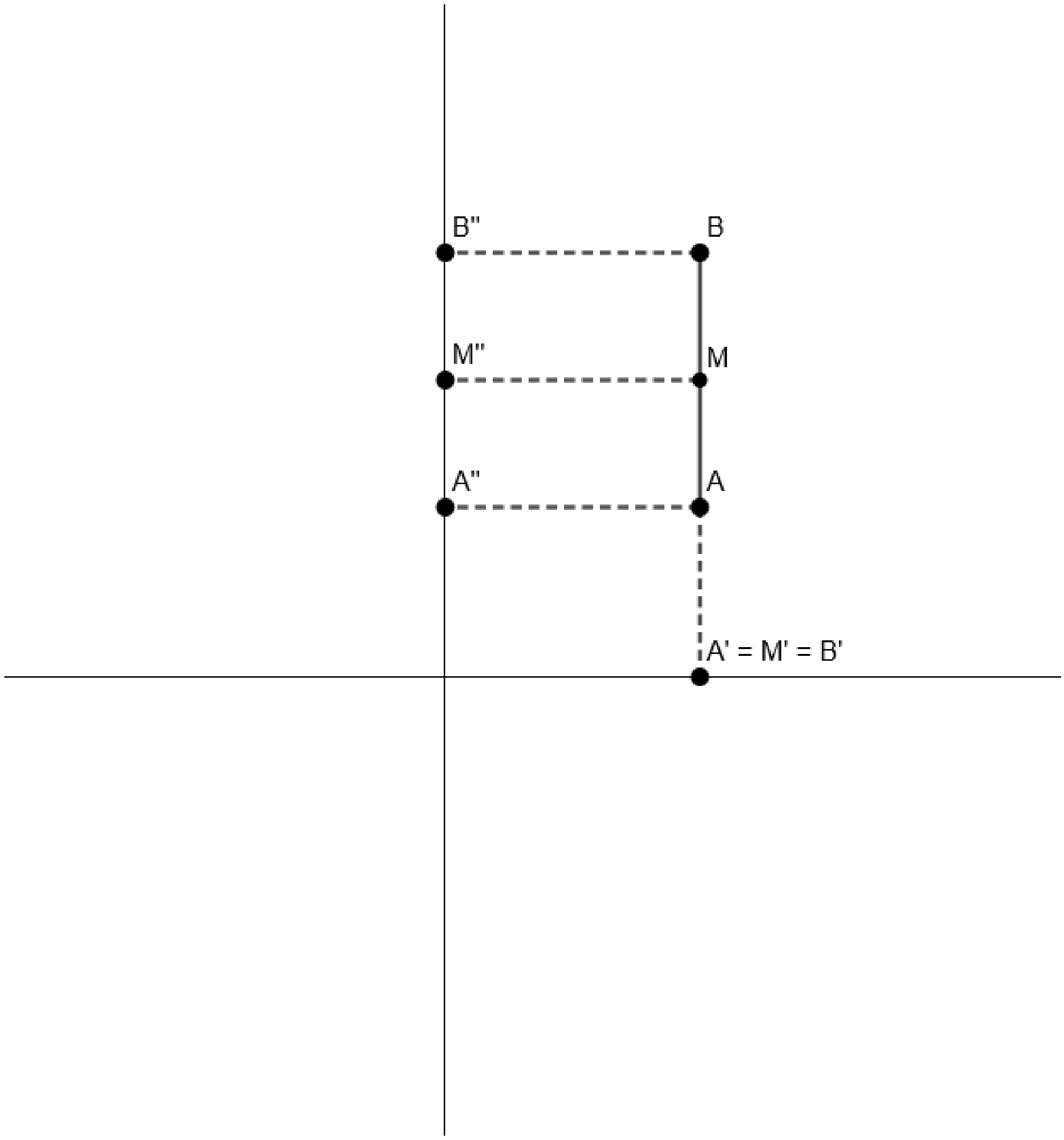

Figura 3.9: Ponto médio de segmento vertical. (Fonte: elaboração do autor)

Como o segmento $\overline{AB}$ tem extremos com a mesma abscissa em relação ao sistema de eixos ortogonais fixado, seu ponto médio também tem a mesma abscissa dos dois extremos, ou seja, $x_M = x_A = x_B$ e, portanto,

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Em relação às ordenadas dos pontos, note que as retas AA'', MM'' e BB'' constituem um feixe de retas paralelas, pois são perpendiculares ao eixo y. Pelo Teorema de Tales, como $AM = MB$, temos a seguinte proporção:

$$\frac{A''M''}{M''B''} = \frac{AM}{MB} = 1.$$

Portanto,

$$A''M'' = M''B''.$$

Esta última expressão nos diz que, no eixo y, a distância entre os pontos A'' e M'' é igual à distância entre os pontos M'' e B''.

Como sabemos calcular distâncias na geometria analítica unidimensional, podemos escrever

$$d(A'', M'') = |y_M - y_A| \quad \text{e} \quad d(M'', B'') = |y_B - y_M|.$$

Igualando as duas expressões acima, obtemos

$$|y_M - y_A| = |y_B - y_M|$$

ou seja,

$$y_M - y_A = y_B - y_M \quad \text{ou} \quad y_M - y_A = -y_B + y_M.$$

1ª possibilidade:

$$y_M - y_A = y_B - y_M \iff y_M + y_M = y_A - y_B \iff 2y_M = y_A + y_B \iff y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

2ª possibilidade:

$$y_M - y_A = -y_B + y_M \iff y_A = y_B$$

o que mostra que essa possibilidade não ocorre, pois os pontos A e B são distintos.

Caso 3: Sejam A e B dois pontos do plano com abscissas distintas e ordenadas distintas, ou seja, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ com $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$ e seja $M = (x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Observe a figura abaixo (Figura: 3.10):

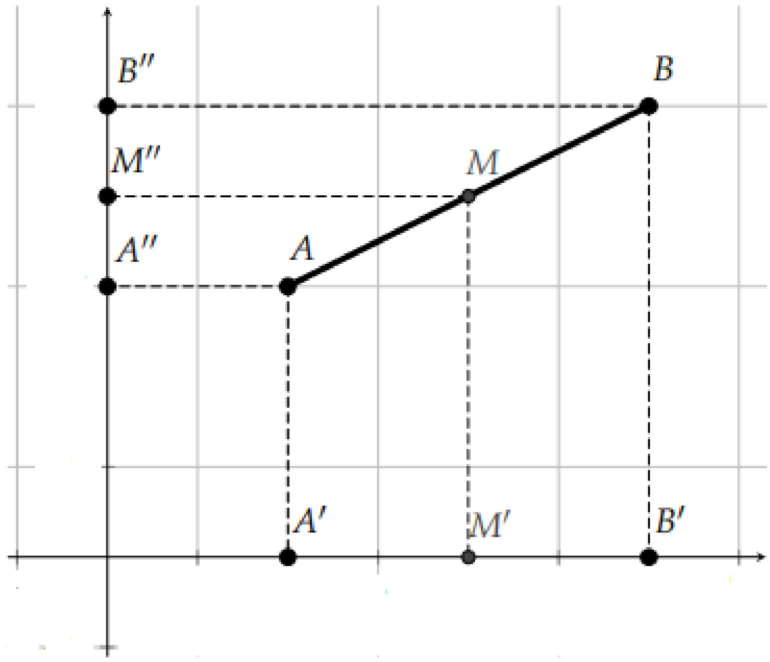

Figura 3.10: Ponto médio do segmento $\overline{AB}$. (Fonte: elaboração do autor)

Usando um raciocínio análogo ao aplicado no exemplo anterior, temos que

$$d(A', M') = |x_M - x_A| \quad \text{e} \quad d(M', B') = |x_B - x_M|.$$

Igualando as duas expressões acima, obtemos

$$|x_M - x_A| = |x_B - x_M|,$$

ou seja,

$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad \text{ou} \quad x_M - x_A = -x_B + x_M.$$

1ª possibilidade:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \iff x_M + x_M = x_A + x_B \iff x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

2ª possibilidade:

$$x_M - x_A = -x_B + x_M \iff x_M - x_M = x_A - x_B \iff 0 = x_A - x_B$$

o que mostra que essa possibilidade não ocorre, pois $x_A \neq x_B$.

Assim, a abscissa do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é dada pela fórmula

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

De modo análogo, a ordenada do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é dada por

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Portanto as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ são dadas por

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Atividade 12. Jogo do uso da fórmula do ponto médio.

Tempo previsto para a atividade: 15 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; régua.

Pré-requisitos: ponto médio de um segmento de reta no plano; teorema de Tales; módulo de um número real; equação modular; segmento de reta no plano; localização de um ponto em um plano cartesiano ortogonal.

Peças do jogo:

1. Segmento de reta dado.

Regras do jogo:

1. As coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ são dadas por

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Jogadas a executar:

1. Usando a Regra 1, calcule as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ tal que $A = (3, 0)$ e $B = (0, 3)$.
2. Usando a Regra 1, calcule as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{CD}$ tal que $C = (-3, 0)$ e $D = (0, -3)$.
3. Usando a Regra 1, calcule as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{EF}$ tal que $E = (3, 3)$ e $F = (-3, 3)$.
4. Usando a Regra 1, calcule as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{GH}$ tal que $G = (3, -3)$ e $H = (-3, -3)$.
5. Usando a Regra 1, calcule as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{IJ}$ tal que $I = (6, 8)$ e $J = (-5, 4)$.

6. Usando a Regra 1, calcule as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{KL}$ tal que $K = (-6, -7)$, $L = (5, -4)$.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

$$M = \left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Jogada 2:

$$M = \left(\frac{-3+0}{2}, \frac{0-3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

Jogada 3:

$$M = \left(\frac{3-3}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (0, 3).$$

Jogada 4:

$$M = \left(\frac{3-3}{2}, \frac{-3-3}{2}\right) = (0, -3).$$

Jogada 5:

$$M = \left(\frac{6-5}{2}, \frac{8+4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 6\right).$$

Jogada 6:

$$M = \left(\frac{-6+5}{2}, \frac{-7-4}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right).$$

■

3.3 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO PLANO

Inicialmente, consideremos A e B dois pontos distintos do plano com ordenadas iguais, ou seja, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ com $y_A = y_B$.

Observe a figura abaixo (Figura: 3.11):

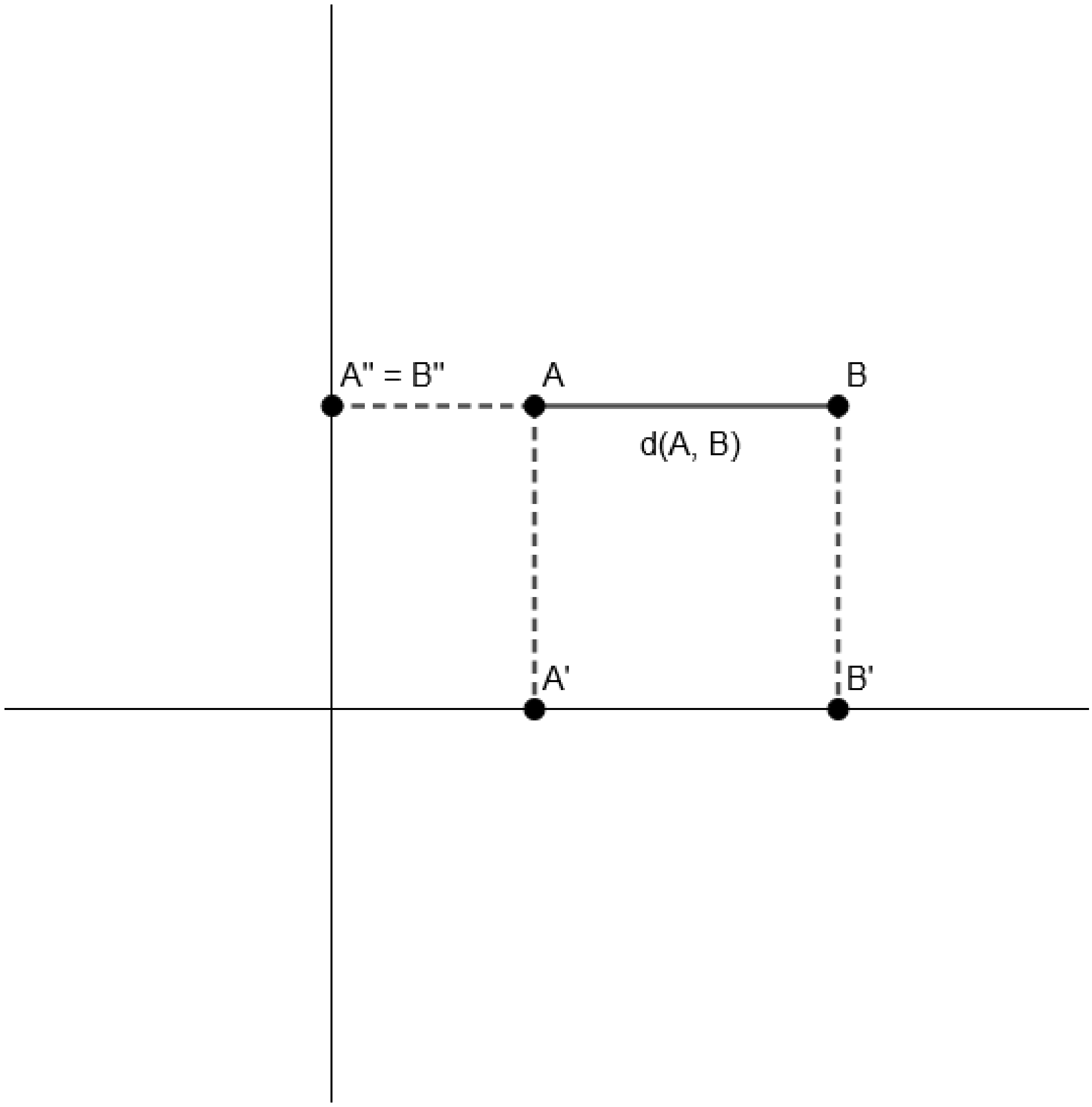

Figura 3.11: Distância entre dois pontos de mesma ordenada. (Fonte: elaboração do autor)

Como os pontos têm a mesma ordenada, o segmento $\overline{AB}$ tem o mesmo tamanho do segmento $\overline{A'B'}$. Logo, $d(A,B) = d(A',B') = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + 0} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_B)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Agora, consideremos A e B dois pontos distintos do plano com abscissas iguais, ou seja, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ com $x_A = x_B$.

Observe a figura abaixo (Figura: 3.12):

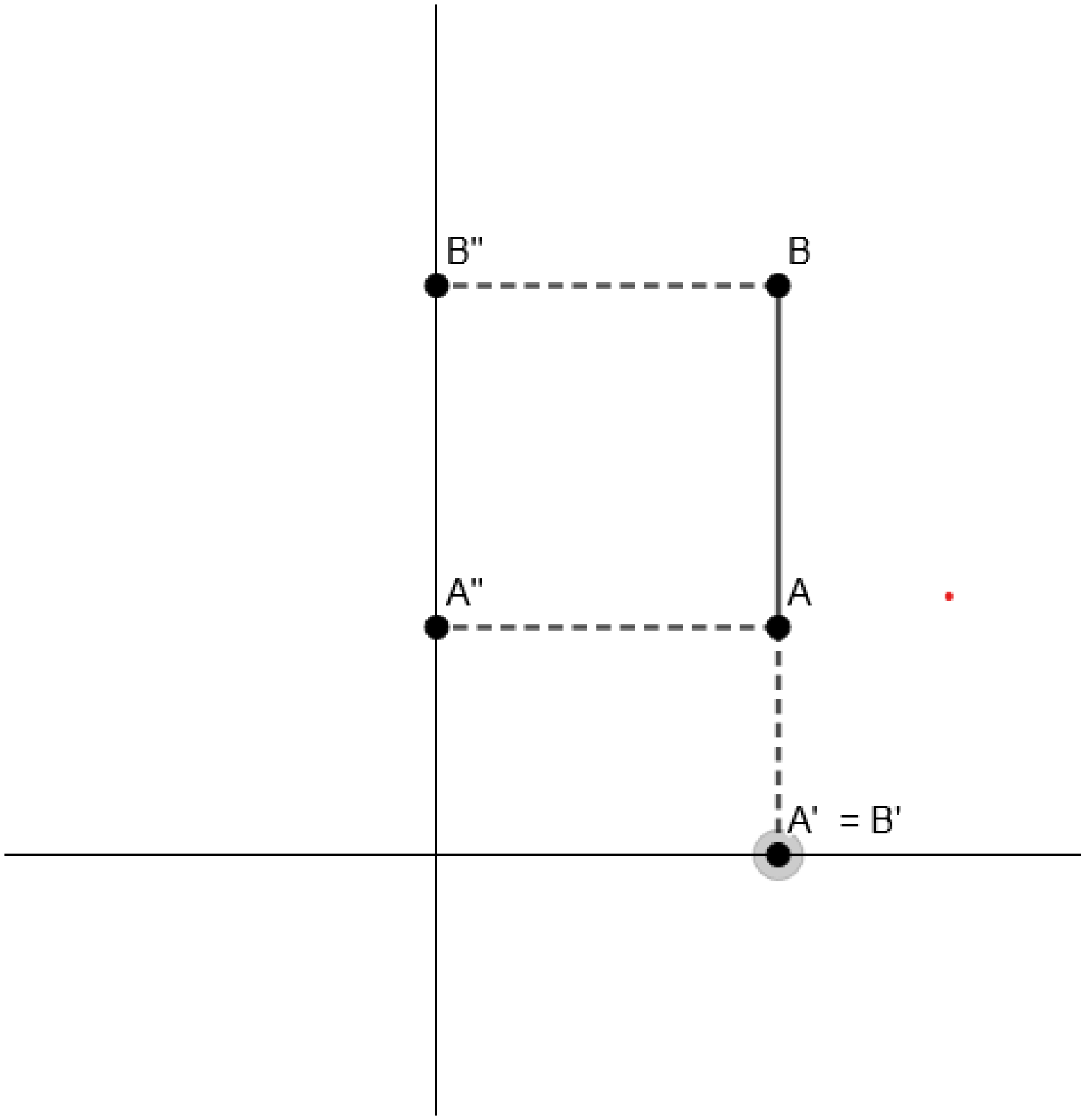

Figura 3.12: Distância entre dois pontos de mesma abscissa. (Fonte: elaboração do autor)

Como os pontos tem a mesma abscissa, o segmento $\overline{AB}$ tem o mesmo tamanho do segmento $\overline{A''B''}$. Logo, $d(A,B) = d(A'',B'') = |y_B - y_A| = \sqrt{(y_B - y_A)^2} = \sqrt{0 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Por fim, tomemos dois pontos A e B do plano com abscissas distintas e ordenadas distintas, ou seja, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ com $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$. (Figura: 3.13)

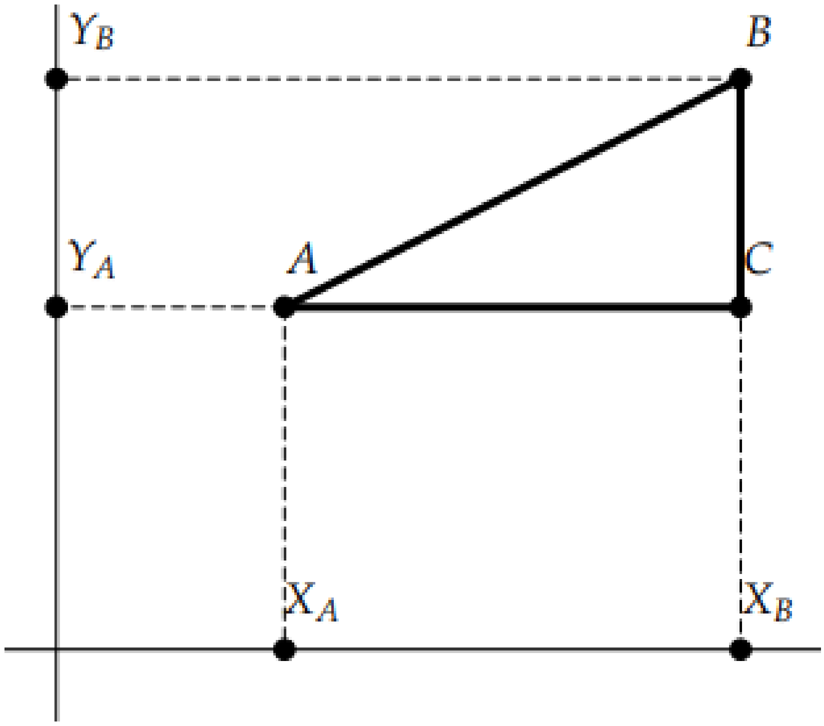

Figura 3.13: Distância entre dois pontos no plano. (Fonte: elaboração do autor)

O triângulo ABC construído é retângulo em C (Figura: 3.13). A distância entre os pontos A e C, ou seja, o comprimento do cateto $\overline{AC}$, é dada por $|x_B - x_A|$. Por sua vez, a distância entre os pontos B e C, isto é, o comprimento do cateto $\overline{CB}$, é dada por $|y_B - y_A|$.

Assim, pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$d^2(A,B) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2,$$

ou seja,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Atividade 13. Jogo do cálculo da distância entre dois pontos do plano.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: operações com radicais.

Peças do jogo:

1. Dois pontos do plano dados pelas suas coordenadas.

Regras do jogo:

1. A distância entre dois pontos A e B quaisquer do plano pode ser calculada através da fórmula
$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Jogadas a executar:

1. Usando a Regra 1, calcular a distância entre os pontos A e B dados por $A = (-5, 2)$ e $B = (3, 6)$.
2. Usando a Regra 1, calcular a distância entre os pontos C e D dados por $C = (-3, 10)$ e $D = (8, -2)$.
3. Usando a Regra 1, calcular a distância entre os pontos E e F dados por $E = (3, 3)$ e $F = (5, 5)$.
4. Usando a Regra 1, calcular a distância entre os pontos G e H dados por $G = (-\sqrt{2}, -4)$ e $H = (4, 6)$.
5. Usando a Regra 1, calcular a distância entre os pontos I e J dados por $I = (\sqrt{5}, \sqrt{50})$ e $J = (-\sqrt{5}, \sqrt{2})$.
6. Usando a Regra 1, calcular a distância entre os pontos K e L dados por $K = (-6, -7)$, $L = (5, -4)$.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

$$d(A,B) = \sqrt{(3+5)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Jogada 2:

$$d(C,D) = \sqrt{(8+3)^2 + (-2-10)^2} = \sqrt{121+144} = \sqrt{265}.$$

Jogada 3:

$$d(E,F) = \sqrt{(5-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Jogada 4:

$$d(G,H) = \sqrt{(4+\sqrt{2})^2 + (6+4)^2} = \sqrt{18+8\sqrt{2}+100} = \sqrt{118+8\sqrt{2}}.$$

Jogada 5:

$$d(I,J) = \sqrt{(-\sqrt{5} - \sqrt{5})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{50})^2} = \sqrt{20 + 32} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Jogada 6:

$$d(K,L) = \sqrt{(5+6)^2 + (-4+7)^2} = \sqrt{121 + 9} = \sqrt{130}.$$

■

3.4 O CONCEITO DE LUGAR GEOMÉTRICO

Definição 3.3. Um *lugar geométrico* é um conjunto de pontos do plano que detêm, com exclusividade, uma propriedade comum.

Por exemplo, a reta AB pode ser caracterizada como o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que a maior distância entre os pontos A, B e P é igual à soma das outras duas. De fato, sabemos que um ponto P do plano está na reta AB se, e somente se, uma das seguintes possibilidades ocorre: $P - A - B$, $A - P - B$ ou $A - B - P$.[4] Sabemos também que:

- $P - A - B \iff d(P,B) = d(P,A) + d(A,B)$;
- $A - P - B \iff d(A,B) = d(A,P) + d(P,B)$;
- $A - B - P \iff d(A,P) = d(A,B) + d(B,P)$.

Como a distância entre dois pontos é um número real não negativo, temos, em cada caso, que a maior distância entre esses três pontos é igual à soma das outras duas.

Um outro exemplo: dados um ponto C do plano e um número real $r > 0$, a *circunferência de centro C e raio r* é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância ao ponto C é igual a r.

Como vimos, todo ponto de um plano dotado de um sistema de eixos ortogonais pode ser representado por um par ordenado (x,y) de números reais, em que x denota

4 Recordamos que a primeira expressão significa que A está entre P e B, a segunda que P está entre A e B e a terceira que B está entre A e P.

sua abscissa e y, sua ordenada. Logo, dado um lugar geométrico, faz sentido tentar descrever a propriedade que o caracteriza através de equações nas variáveis x e y.

Reciprocamente, dada uma equação $L(x,y) = 0$ nas variáveis x e y, faz sentido tentar descrever geometricamente o lugar geométrico $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : L(x,y) = 0\}$.

Nesta seção, abordaremos esses dois problemas no caso da reta e da circunferência. No Capítulo 6 os retomaremos no contexto das cônicas.

3.4.1 *A reta como lugar geométrico*

A fim de encontramos uma equação da reta, buscaremos descrever, por meio de coordenadas, uma condição para o alinhamento de três pontos do plano.

Lema 3.4. *Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ pontos do plano cartesiano. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $(a_1 - b_1)(b_2 - c_2) = (a_2 - b_2)(b_1 - c_1)$;

(2) $(c_1 - b_1)(b_2 - a_2) = (c_2 - b_2)(b_1 - a_1)$;

(3) $(a_1 - c_1)(c_2 - b_2) = (a_2 - c_2)(c_1 - b_1)$;

(4) $(b_1 - c_1)(c_2 - a_2) = (b_2 - c_2)(c_1 - a_1)$;

(5) $(b_1 - a_1)(a_2 - c_2) = (b_2 - a_2)(a_1 - c_1)$;

(6) $(c_1 - a_1)(a_2 - b_2) = (c_2 - a_2)(a_1 - b_1)$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Podemos reescrever (2) como

$$[-(b_1 - c_1)][-(a_2 - b_2)] = [-(b_2 - c_2)][-(a_1 - b_1)]$$

e observar que esta afirmação é equivalente à afirmação

$$(a_2 - b_2)(b_1 - c_1) = (a_1 - b_1)(b_2 - c_2).$$

Logo, se (1) vale, então (2) vale.

(2) $\Rightarrow$ (3): Fazendo $x = c_1 - b_1$, $v = b_2 - a_2$, $y = c_2 - b_2$ e $u = b_1 - a_1$, temos que $xv = yu$. Logo, (3) pode ser reescrita como $[(b_1 - u) - (x + b_1)]y = [(b_2 - v) - (b_2 + y)]x$, ou seja, $-y(u + x) = -x(y + v)$, que é equivalente a $yu = xv$. Portanto, se (2) vale, (3) também vale.

(3) $\Rightarrow$ (4): Podemos reescrever (4) como

$$[-(c_1 - b_1)][-(a_2 - c_2)] = [-(c_2 - b_2)][-(a_1 - c_1)]$$

e observar que esta afirmação é equivalente à afirmação

$$(a_2 - c_2)(c_1 - b_1) = (a_1 - c_1)(c_2 - b_2).$$

Logo, se (3) vale, então (4) vale.

(4) $\Rightarrow$ (5): Fazendo $d = b_1 - c_1$, $e = c_2 - a_2$, $f = b_2 - c_2$ e $g = c_1 - a_1$, temos que $de = fg$. Logo, (5) pode ser reescrita como $(d + c_1 + g - c_1)(c_2 - e - c_2) = (f + c_2 + e - c_2)(c_1 - g - c_1)$, ou seja, $(d + g)(-e) = (f + e)(-g)$, que é equivalente a $-de - ge = -fg - eg$, ou seja, $de = fg$. Portanto, se (4) vale, (5) também vale.

(5) $\Rightarrow$ (6): Podemos reescrever (6) como

$$[-(a_1 - c_1)][-(b_2 - a_2)] = [-(a_2 - c_2)][-(b_1 - a_1)]$$

e observar que esta afirmação é equivalente à afirmação

$$(b_2 - a_2)(a_1 - c_1) = (b_1 - a_1)(a_2 - c_2).$$

Logo, se (5) vale, então (6) vale.

(6) $\Rightarrow$ (1): Fazendo $h = c_1 - a_1$, $i = a_2 - b_2$, $j = c_2 - a_2$ e $k = a_1 - b_1$, temos que $hi = jk$. Logo, (1) pode ser reescrita como $k(a_2 - i - c_2) = i(a_1 - k - c_1)$, que é equivalente a $k(-j - i) = i(-h - k)$, que é equivalente a $-kj - ki = -ji - ki$, que é equivalente a $hi = jk$. Portanto, se (6) vale, (1) também vale. $\square$

Proposição 3.5. *Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ pontos do plano cartesiano. A maior distância entre eles é igual à soma das outras duas se, e somente se,*

$$(a_1 - b_1)(b_2 - c_2) = (a_2 - b_2)(b_1 - c_1).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\max\{AB, AC, BC\} = AC$.

($\Rightarrow$) Nossa hipótese garante que $AC = AB + BC$ e disso segue que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC. \tag{3.1}$$

Como

$$AC^2 = (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2$$

$$AB^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$

$$BC^2 = (b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2$$

temos que (3.1) é equivalente a

$$(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 + 2 \cdot AB \cdot AC.$$

Desenvolvendo os produtos e reagrupando, obtemos

$$AB \cdot AC = a_1b_1 + a_2b_2 + b_1c_1 + b_2c_2 - a_1c_1 - a_2c_2 - b_1^2 - b_2^2. \tag{3.2}$$

Por outro lado,

$$AB \cdot BC = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \cdot \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2}$$

e, portanto,

$$(AB \cdot BC)^2 = [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2] \cdot [(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2].$$

Fazendo $x = a_1 - b_1$, $y = a_2 - b_2$, $u = c_1 - b_1$ e $v = c_2 - b_2$, obtemos

$$(AB \cdot BC)^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2). \tag{3.3}$$

Agora, reescrevendo (3.2) em termos de x, y, u e v, chegamos a

$$AB \cdot BC = (x + b_1)b_1 + (y + b_2)b_2 + b_1(u + b_1) + b_2(v + b_2) - (x + b_1)(u + b_1) - (y + b_2)(v + b_2) - b_1^2 - b_2^2$$

que, desenvolvendo, nos dá

$$AB \cdot BC = -xu - yv.$$

Logo, temos que

$$(AB \cdot BC)^2 = (-xu - yv)^2. \tag{3.4}$$

Comparando (3.3) e (3.4) temos que

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (-xu - yv)^2.$$

Mas

$$\begin{aligned}
(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (-xu - yv)^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2u^2 + x^2v^2 + y^2u^2 + y^2v^2 = x^2u^2 + 2xuyv + y^2v^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2v^2 + y^2u^2 = 2xuyv \\
&\Longleftrightarrow \quad (xv - yu)^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad xv = yu.
\end{aligned}$$

Concluímos, então, que $xv = yu$, ou seja, $(a_1 - b_1)(c_2 - b_2) = (a_2 - b_2)(c_1 - b_1)$, que é equivalente a

$$(a_1 - b_1)(b_2 - c_2) = (a_2 - b_2)(b_1 - c_1).$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que $(a_1 - b_1)(b_2 - c_2) = (a_2 - b_2)(b_1 - c_1)$.

Fazendo $x = a_1 - b_1$, $y = a_2 - b_2$, $u = b_1 - c_1$ e $v = b_2 - c_2$, temos que $xv = yu$, ou seja, $xv - yu = 0$.

Temos também que:

- $AB^2 = x^2 + y^2$;
- $BC^2 = u^2 + v^2$;
- $AC^2 = (x + u)^2 + (y + v)^2$.

Então,

$$AC^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 2(xu + yv) = AB^2 + BC^2 + 2(xu + yv). \tag{3.5}$$

Nossa tese é $AC = AB + BC$, que é equivalente a $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC$. Precisamos, então, mostrar que $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC$ é verdadeira. Para fazer isso, basta, de acordo com (3.5), mostrar que $AB \cdot AC = xu + yv$. Este será nosso objetivo.

Por um lado, temos que $AB \cdot BC = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2}$.

Por outro lado, como $xv - yu = 0$, o Teorema de Cauchy-Schwarz[5] nos dá que

$$|xu + yv| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2}.$$

A fim de atingirmos nosso objetivo, basta mostrar que $xu + yv \geq 0$. De fato, se isso ocorre, então $xu + yv = |xu + yv| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2} = AB \cdot BC$.

Suponhamos, por absurdo, que $xu + yv < 0$. Como estamos assumindo que $AC \geq AB$ e $AC \geq BC$, temos que $AC^2 \geq AB^2$ e $AC^2 \geq BC^2$. Logo, $AC^2 - AB^2 \geq 0$ e $AC^2 - BC^2 \geq 0$.

5 Dados $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$, consideremos $X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2$ e $|X| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. O Teorema de Cauchy-Schwarz afirma que $|X \cdot Y| \leq |X||Y|$, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathbb{R}^2$, e que a igualdade ocorre exatamente quando $(x_1, x_2) = (\lambda y_1, \lambda y_2)$ ou $(y_1, y_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observe que

$$\begin{aligned} AC^2 - AB^2 \geq 0 &\iff (x+u)^2 + (y+v)^2 - (x^2+y^2) \geq 0 \\ &\iff 2xu + u^2 + 2yv + v^2 \geq 0 \\ &\iff u^2 + v^2 \geq -2(xu+yv). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} AC^2 - AB^2 \geq 0 &\iff (x+u)^2 + (y+v)^2 - (u^2+v^2) \geq 0 \\ &\iff x^2 + 2xu + y^2 + 2yv \geq 0 \\ &\iff x^2 + y^2 \geq -2(xu+yv). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{u^2+v^2}{2} \geq -(xu+yv) \quad \text{e} \quad \frac{x^2+y^2}{2} \geq -(xu+yv).$$

Usando nossa hipótese de absurdo, isto é, que $xu + yv < 0$, temos que

$$|xu+yv| = -(xu+yv) \leq \frac{u^2+v^2}{2} \quad \text{e} \quad |xu+yv| = -(xu+yv) \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Mas vimos que

$$|xu+yv| = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{u^2+v^2}.$$

Logo,

$$\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{u^2+v^2} \leq \frac{u^2+v^2}{2}$$

ou seja,

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{2}.$$

Analogamente,

$$\sqrt{u^2+v^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

Juntando essas informações, temos que

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4}$$

o que implica que $x = 0$ e $y = 0$. Mas isso contradiz $xu + yv < 0$. Logo, $xu + yv \geq 0$, e a demonstração está encerrada. □

Agora que sabemos caracterizar a reta que passa por dois pontos fixos e distintos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ como o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano tais que

$$(x_A - x_B)(y_B - y) = (y_A - y_B)(x_B - x)$$

podemos obter a equação geral de qualquer reta.

Atividade 14. Jogo da equação geral da reta por dois pontos distintos do plano.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; régua e compasso; papel milimetrado.

Pré-requisitos: saber manipular uma expressão algébrica.

Peças do jogo:

1. Papel milimetrado, régua e compasso, lápis e borracha.
2. Caderno para cálculo.
3. Dois pontos distintos do plano, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$.
4. Um ponto genérico $P = (x, y)$ do plano.

Regras do jogo:

1. Uma *equação geral da reta r pelos pontos A e B* é dada pela fórmula

$$(x_A - x_B)(y_B - y) = (y_A - y_B)(x_B - x).$$

Jogadas a executar:

1. Usando a Regra 1, obter uma equação geral da reta que passa pelos pontos $A = (5, 2)$ e $B = (3, 6)$.
2. Usando o papel milimetrado, desenhar a reta obtida e responder se está inclinada para à direita, ou para à esquerda, ou se é vertical ou se é horizontal.
3. Usando a Regra 1, obter uma equação geral da reta que passa pelos pontos $A = (5, 2)$ e $B = (5, 6)$.
4. Usando o papel milimetrado, desenhar a reta obtida e responder se está inclinada para à direita, ou para à esquerda, ou se é vertical ou se é horizontal.
5. Usando a Regra 1, obter uma equação geral da reta que passa pelos pontos $A = (8, 2)$ e $B = (3, 2)$.
6. Usando o papel milimetrado, desenhar a reta obtida e responder se está inclinada para à direita, ou para à esquerda, ou se é vertical ou se é horizontal.
7. Usando a Regra 1, obter uma equação geral da reta que passa pelos pontos $A = (2, 3)$ e $B = (5, 6)$.

8. Usando o papel milimetrado, desenhar a reta obtida e responder se está inclinada para à direita, ou para à esquerda, ou se é vertical ou se é horizontal.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

$$
\begin{aligned}
(x_A - x_B)(y_B - y) = (y_A - y_B)(x_B - x) \quad &\Longleftrightarrow \quad (5-3)(6-y) = (2-6)(3-x) \\
&\Longleftrightarrow \quad 30 - 5y - 18 + 3y = 6 - 2x - 18 + 6x \\
&\Longleftrightarrow \quad -2y + 12 = -12 + 4x \\
&\Longleftrightarrow \quad -4x - 2y + 24 = 0.
\end{aligned}
$$

Jogada 2: (Figura: 3.14)

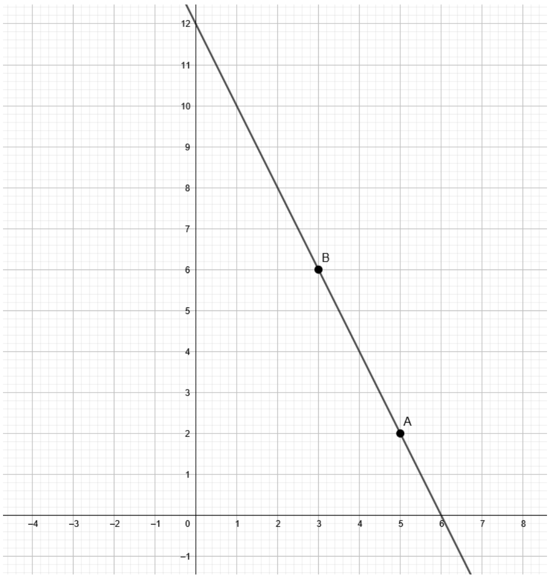

Figura 3.14: Reta inclinada para esquerda. (Fonte: elaboração do autor)

Jogada 3:

$$
\begin{aligned}
(x_A - x_B)(y_B - y) = (y_A - y_B)(x_B - x) \quad &\Longleftrightarrow \quad (5-5)(6-y) = (2-6)(5-x) \\
&\Longleftrightarrow \quad 30 - 5y - 30 + 5y = 10 - 2x - 30 + 6x \\
&\Longleftrightarrow \quad 4x - 20 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = 5.
\end{aligned}
$$

Jogada 4: (Figura: 3.15)

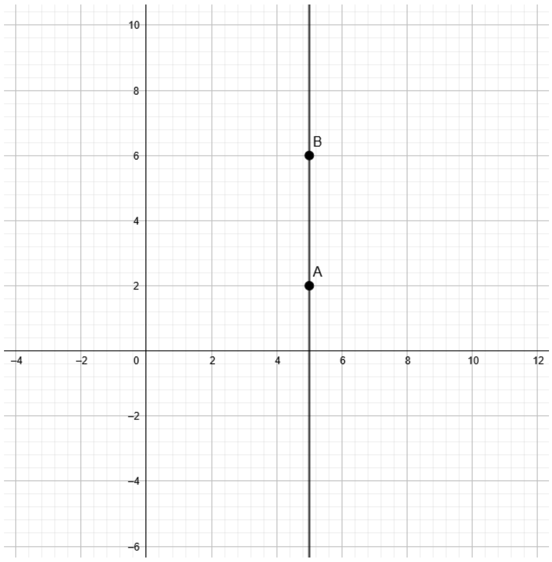

Figura 3.15: Reta vertical. (Fonte: elaboração do autor)

Jogada 5:

$$\begin{aligned}(x_A - x_B)(y_B - y) = (y_A - y_B)(x_B - x) \quad &\Longleftrightarrow \quad (8-3)(2-y) = (2-2)(3-x)\\ &\Longleftrightarrow \quad 10 - 5y = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad y - 2 = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad y = 2.\end{aligned}$$

Jogada 6: (Figura: 3.16)

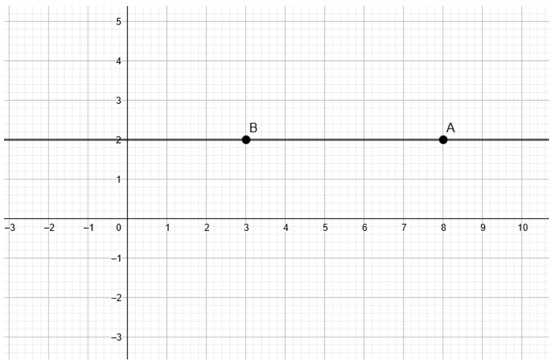

Figura 3.16: Reta horizontal. (Fonte: elaboração do autor)

Jogada 7:

$$\begin{aligned}(x_A - x_B)(y_B - y) = (y_A - y_B)(x_B - x) \quad &\Longleftrightarrow \quad (2-5)(6-y) = (3-6)(5-x)\\ &\Longleftrightarrow \quad -18 + 3y = -15 + 3x\\ &\Longleftrightarrow \quad -3x + 3y - 3 = 0.\end{aligned}$$

Jogada 8: (Figura: 3.17)

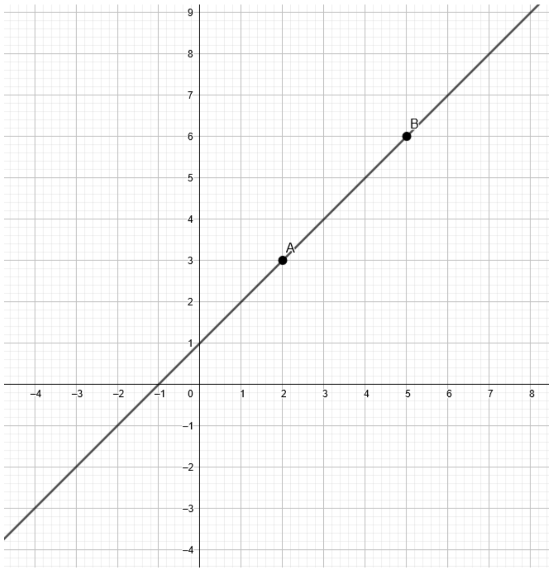

Figura 3.17: Reta inclinada para a direita. (Fonte: elaboração do autor)

■

Usando determinantes para obter uma equação geral da reta

Neste momento, podemos estabelecer uma interessante semelhança de família — a saber, com determinantes.

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos distintos do plano. Vimos que se $P = (x, y)$ é um ponto do plano, então P pertence à reta AB se, e somente se,

$$(x_A - x_B)(y_B - y) = (y_A - y_B)(x_B - x)$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A). \tag{3.6}$$

Esta expressão, de certa forma, nos lembra de determinantes. Através de manipulações algébricas podemos transformá-la em um determinante 3×3. De fato,

$$
\begin{aligned}
(3.6) \quad &\iff (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0\\
&\iff xy_B - xy_A - x_Ay_B + x_Ay_A + x_Ay_A - x_By + x_By_A + x_Ay - x_Ay_A = 0\\
&\iff x_Ay_A - xy_A + x_By - xy_B - x_Ay - x_By_A = 0\\
&\iff xy_A + yx_B + x_Ay_B - x_By_A - xy_B - yx_A = 0\\
&\iff xy_A \cdot 1 + yx_B \cdot 1 + x_Ay_B \cdot 1 - x_By_A \cdot 1 - xy_B \cdot 1 - yx_A \cdot 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Aplicando a recíproca da regra prática de Sarrus temos, então, que

$$
(3.6) \iff \begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.
$$

Atividade 15. Jogo da equação geral da reta usando determinante.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha.

Pré-requisitos: cálculo de um determinante 3×3.

Peças do jogo:

1. Dois pontos $A = (-7, 8)$ e $B = (3, -4)$.

Regras do jogo:

1. Uma equação geral da reta por dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pode ser calculada da seguinte maneira:

$$
\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.
$$

Jogadas a executar:

1. Calcular a equação geral da reta que passa pelos pontos $A = (-7, 8)$ e $B = (3, -4)$ usando a Regra 1.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

Aplicando a regra de Sarrus ao lado esquerdo da equação

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -7 & 8 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

obtemos

$$8x + 3y + 28 - 24 + 4x + 7y = 0.$$

Esta nova equação pode ser reescrita como

$$12x + 10y + 4 = 0$$

ou, ainda, como

$$6x + 5y + 2 = 0$$

sendo, ambas, equações gerais da reta que passa pelos pontos A e B.

■

Reconhecimento de uma reta.

Vimos que, fixado um sistema de eixos ortogonais, toda reta do plano pode ser representada por uma equação de primeiro grau com duas variáveis, isto é, por uma equação da forma $ax + by + c = 0$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a e b não são ambos nulos.

Agora, demonstraremos que qualquer equação de primeiro grau com duas variáveis representa uma reta do plano — isto é, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que a e b não são ambos nulos, provaremos que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$ corresponde a uma reta do plano.

Para isto, fixando $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ dois pontos distintos desse conjunto, mostraremos que:

1. se $C = (c_1, c_2)$ é um terceiro ponto desse conjunto, diferente de A e B, então $(a_1 - b_1)(b_2 - c_2) = (a_2 - b_2)(b_1 - c_1)$; e
2. todo ponto $C = (c_1, c_2)$ do plano diferente de A e B e tal que $(a_1 - b_1)(b_2 - c_2) = (a_2 - b_2)(b_1 - c_1)$ satisfaz a equação $ax + by + c = 0$.

Se $a = 0$ ou $b = 0$, é imediato. No que segue, suporemos $a, b \neq 0$.

Para verificar a primeira afirmação, partimos das seguintes igualdades:

$$aa_1 + ba_2 + c = 0 \tag{3.7}$$

$$ab_1 + bb_2 + c = 0 \tag{3.8}$$

$$ac_1 + bc_2 + c = 0 \tag{3.9}$$

De (3.7) e (3.8) segue que $aa_1 + ba_2 = ab_1 + bb_2$. Note que

$$\begin{aligned} aa_1 + ba_2 = ab_1 + bb_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad aa_1 - ab_1 = bb_2 - ba_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad a(a_1 - b_1) = b(b_2 - a_2). \end{aligned}$$

Se $a_1 = b_1$, então $a_2 = b_2$, o que implicaria que $A = B$. Logo, $a_1 \neq b_1$, o que nos leva a

$$\frac{a}{b} = \frac{b_2 - a_2}{a_1 - b_1}.$$

De (3.8) e (3.9) segue que $ab_1 + bb_2 = ac_1 + bc_2$. Como

$$\begin{aligned} ab_1 + bb_2 = ac_1 + bc_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad ab_1 - ac_1 = bc_2 - bb_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad a(b_1 - c_1) = b(c_2 - b_2) \end{aligned}$$

e $C \neq B$, chegamos a

$$\frac{a}{b} = \frac{c_2 - b_2}{b_1 - c_1}.$$

Logo,

$$\frac{b_2 - a_2}{a_1 - b_1} = \frac{c_2 - b_2}{b_1 - c_1}$$

ou seja

$$(b_2 - a_2)(b_1 - c_1) = (a_1 - b_1)(c_2 - b_2).$$

Portanto,

$$(a_1 - b_1)(b_2 - c_2) = (a_2 - b_2)(b_1 - c_1).$$

Para verificar a segunda afirmação, partimos de um ponto $C = (c_1, c_2)$ do plano, diferente de A e B, tal que

$$(a_1 - b_1)(b_2 - c_2) = (a_2 - b_2)(b_1 - c_1).$$

Disto segue que

$$\frac{b_2 - a_2}{a_1 - b_1} = \frac{c_2 - b_2}{b_1 - c_1}.$$

Como $aa_1 + ba_2 + c = 0$ e $ab_1 + bb_2 + c = 0$, temos que

$$a(b_1 - a_1) + b(b_2 - a_2) = 0$$

ou seja

$$\frac{b_2 - a_2}{a_1 - b_1} = \frac{a}{b}.$$

Logo,

$$\frac{c_2 - b_2}{b_1 - c_1} = \frac{a}{b}$$

e, portanto,

$$a(b_1 - c_1) = b(c_2 - b_2).$$

Disto segue que $ac_1 + bc_2 - (ab_1 + bb_2) = 0$, isto é,

$$ac_1 + bc_2 + c = 0.$$

Logo, C satisfaz a equação $ax + by + c = 0$.

3.4.2 *A circunferência como lugar geométrico*

Recordemos a definição de circunferência:

Definição 3.6. Dados um ponto C do plano e um número real $r > 0$, a *circunferência de centro C e raio r* é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância ao ponto C é igual a r.

Sejam $C = (a, b)$ um ponto do plano e $r > 0$ um número real. Dado $P = (x, y)$ um ponto do plano, temos que P pertence à circunferência de centro C e raio r se, e somente se, $d(P, C) = r$. Como

$$\begin{aligned} d(P, C) = r \quad &\iff \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \\ &\iff \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{aligned}$$

temos que

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

é uma equação da circunferência de centro (a, b) e raio r, denominada a sua *equação reduzida*.

Atividade 16. O jogo da equação reduzida da circunferência.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; régua e compasso.

Pré-requisitos: lugar geométrico; definição de circunferência como lugar geométrico.

Peças do jogo:

1. Uma circunferência de centro C e raio r.

Regras do jogo:

1. O centro da circunferência é o ponto $C = (3, 7)$.
2. O raio da circunferência é $r = 3$.
3. Um ponto genérico da circunferência é $P = (x, y)$.
4. A distância entre dois pontos A e B quaisquer do plano pode ser calculada pela fórmula $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
5. Circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância ao centro é igual ao raio.

Jogadas a executar:

1. Usando as Regras 1 a 5, obter a equação reduzida da circunferência de centro C e raio r.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Indiquemos por λ a circunferência de centro C e raio r. Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico do plano. Então, $P \in \lambda \iff d(P, C) = r$. Como $d(P, C) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2}$, temos que $P \in \lambda \iff \sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2} = 3$. Uma vez que $\sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2} = 3 \iff (x-3)^2 + (y-7)^2 = 9$, temos que $P \in \lambda \iff (x-3)^2 + (y-7)^2 = 9$. Portanto, $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 9$ é a equação reduzida da circunferência de centro $C = (3, 7)$ e raio $r = 3$. (Figura: 3.18)

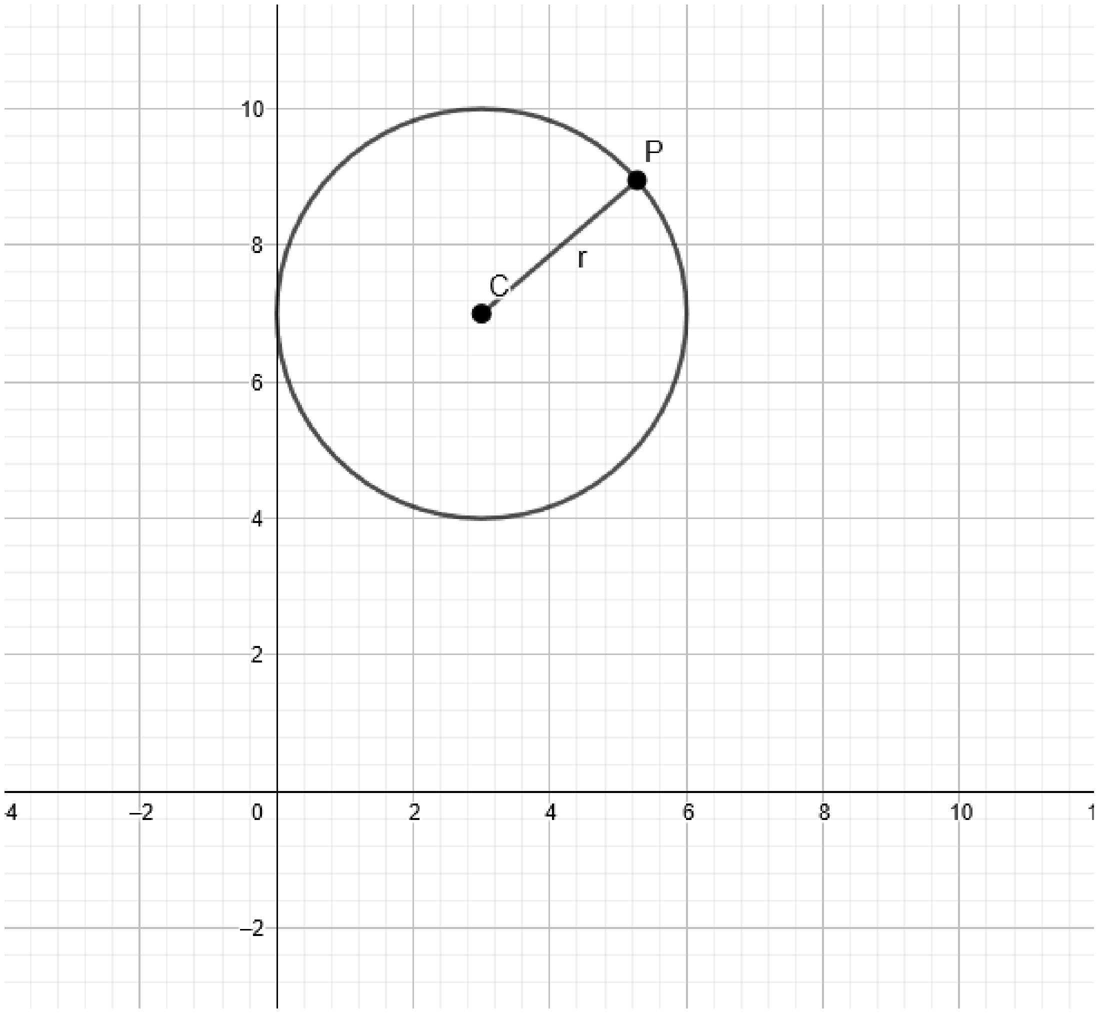

Figura 3.18: Circunferência de centro $C = (3, 7)$ e raio $r = 3$. (Fonte: elaboração do autor)

■

Atividade 17. Jogo da equação normal da circunferência.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha.

Pré-requisitos: cálculo do quadrado da soma e da diferença de dois termos.

Peças do jogo:

1. Uma circunferência de centro C e raio r.

2. A equação reduzida da circunferência de centro C e raio r.

Regras do jogo:

1. A equação reduzida da circunferência de centro $C = (3,7)$ e raio $r = 3$ é dada por $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 9$.
2. Um produto notável do tipo $(a-b)^2$, chamado *quadrado perfeito*, pode ser desenvolvido através da aplicação da propriedade distributiva, ou seja, $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2$.
3. A *equação normal da circunferência* de centro C e raio r pode ser obtida a partir de sua equação reduzida quando desenvolvemos seus quadrados perfeitos e colocamos todos os termos para o lado esquerdo da igualdade restando o zero à direita.

Jogadas a executar:

1. Usando as Regras 1 a 3, obter a equação normal da circunferência de centro $C = (3,7)$ e raio $r = 3$.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Partindo de $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 9$, obtemos $(x-3)(x-3) + (y-7)(y-7) = 9$, ou seja, $x^2 - 3x - 3x + 9 + y^2 - 7y - 7y + 49 = 9$. Disto segue que

$$x^2 + y^2 - 6x - 14y + 49 = 0$$

é a equação pedida.

■

Reconhecimento de uma circunferência

Neste ponto, podemos discutir com os alunos quando uma equação de segundo grau com duas variáveis representa uma circunferência. Uma maneira de fazer isso é através de uma aula expositiva dialogada.

Vimos que a equação reduzida de uma circunferência é dada por

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

e que, desenvolvendo os quadrados perfeitos, obtemos a equação normal da circunferência

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Notemos que esta última equação é uma equação de segundo grau com duas variáveis incompleta. Uma equação de tal tipo, completa, tem a seguinte forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Assim, vamos comparar essas duas equações e tirar algumas conclusões:

1. Os coeficientes A e C de x^2 e de y^2, respectivamente, devem ser iguais entre si e não nulos.
2. O coeficiente B de xy deve ser igual a zero.

Portanto, uma equação do segundo grau com duas variáveis deve ser do seguinte tipo para, talvez, ser a equação de uma circunferência:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Feita essa análise inicial, vamos examinar as condições sobre A, D, E e F, para que ela, de fato, represente uma circunferência.

Para tanto, vamos completar quadrados na equação acima, ou seja, observar que:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + \tfrac{D}{A}x + \tfrac{E}{A}y + \tfrac{F}{A} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \tfrac{E}{2A}\right)^2 = \tfrac{D^2}{4A^2} + \tfrac{E^2}{4A^2} - \tfrac{F}{A} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \tfrac{E}{2A}\right)^2 = \tfrac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}. \end{aligned}$$

Temos três possibilidades para $D^2 + E^2 - 4AF$.

1ª possibilidade: $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

Neste caso, a equação $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma circunferência com centro em $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ e raio $r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}$.

2ª possibilidade: $D^2 + E^2 - 4AF = 0$

Neste caso, a equação $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa um ponto — a saber, o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$.

3ª possibilidade: $D^2 + E^2 - 4AF < 0$

Neste caso, a equação $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa o conjunto vazio.

Assim, fica provado o seguinte teorema:

Teorema 3.7. *Uma equação de segundo grau com duas variáveis*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa uma circunferência se, e somente se, $A = C \neq 0$*,* $B = 0$ *e* $D^2 + E^2 - 4AF > 0$*.*

Em particular, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.8. *A equação*

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa uma circunferência se, e somente se, $D^2 + E^2 - 4F > 0$*.*

Atividade 18. Jogo do completamento de quadrados.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha.

Pré-requisitos: completar quadrado para obter um trinômio do quadrado perfeito.

Peças do jogo:

1. A equação de segundo grau com duas variáveis $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 7 = 0$.

Regras do jogo:

1. Para completar o quadrado de uma expressão do tipo $x^2 + Dx$, devemos somar $\frac{D^2}{4}$ para obtermos $x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} = \left(x + \frac{D}{2}\right)^2$.
2. Em uma igualdade verdadeira, se adicionarmos o mesmo valor nos dois membros, obteremos uma nova igualdade verdadeira.

Jogadas a executar:

1. Completar os quadrados dos termos em x e em y, da equação dada como Peça 1.
2. Escrever a equação na forma reduzida.
3. Caso o valor a direita do igual seja maior que zero, responda que a equação representa uma circunferência; caso contrário, que não.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

Jogada 1:

De $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 7 = 0$, obtemos

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 7 + 4 + 16.$$

Jogada 2:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 27.$$

Jogada 3:

Trata-se de uma circunferência de centro $(2, 4)$ e raio $r = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

■

3.5 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

Elencamos, aqui, as competências e habilidades previstas na BNCC que foram trabalhadas neste capítulo.

Competências:

- (CEF2) Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- (CEF3) Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- (CEF6) Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
- (CEM3) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos,

analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- (CEM4) Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
- (CEM5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

- (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
- (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
- (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
- Habilidade específica, não prevista explicitamente: localizar um ponto no plano cartesianos ortogonal, seja através de régua e compasso, seja através de meio tecnológico.
- (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representa-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
- Habilidade específica, não prevista explicitamente: aplicar uma fórmula deduzida para resolver problema matemático.
- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

4

APROFUNDANDO O ESTUDO DAS RETAS

Neste capítulo iremos trabalhar com o ângulo de inclinação de uma reta em um sistema de eixos ortogonais fixado, estabelecendo o conceito de declividade, através do qual estudaremos as posições relativas entre duas retas. Usaremos a declividade, ou sua não existência, para estabelecer os diversos formatos das equações da reta. Também iremos obter algumas outras ferramentas como a fórmula para calcular a distância de um ponto a uma reta, assim como discutir a translação de eixos coordenados e o cálculo de áreas de triângulos.[1]

4.1 DECLIVIDADE DE UMA RETA

Lembrando que os alunos já trabalharam no 1º ano do Ensino Médio com funções afins, uma maneira interessante de introduzir o tema é fazer um esquema com as possibilidades que temos para representar uma reta no plano cartesiano.

Para isto, usaremos a noção de *ângulo de inclinação* de uma reta, que nada mais é do que o ângulo formado pela reta com a direção horizontal (ou seja, com o eixo x do sistema de eixos ortogonais fixado), medido no sentido anti-horário. Denotaremos o ângulo de inclinação de uma reta r por α_r.

Reta horizontal

É aquela cujo ângulo de inclinação é nulo.

1 Sugerimos que o leitor interessado em aprofundar no assunto deste capítulo consulte [10], [13], [14], [6] e [16].

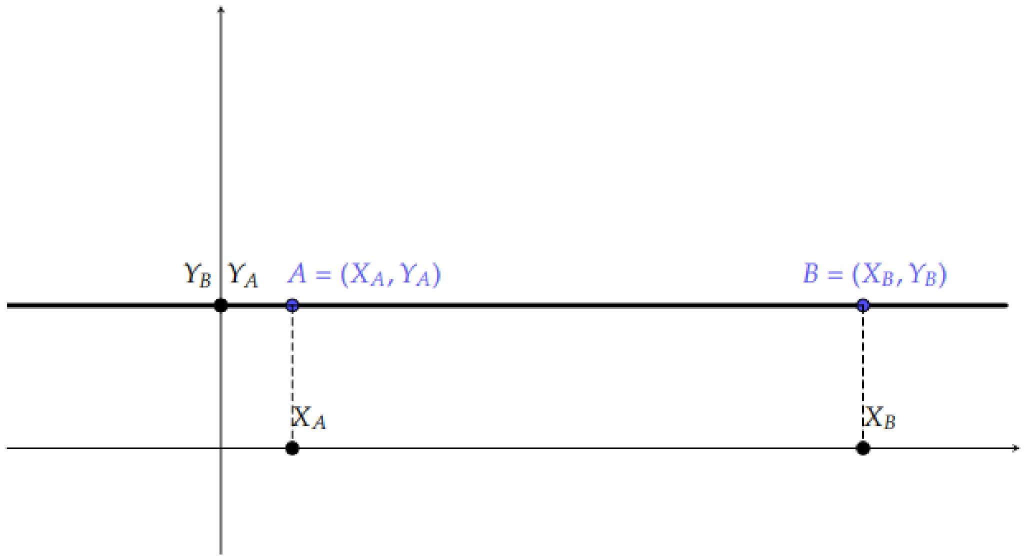

Figura 4.1: Reta horizontal. (Fonte: elaboração do autor)

Se caminharmos sobre a reta dada na Figura 4.1 no sentido do ponto A para o ponto B, o valor da abscissa irá aumentar, enquanto o da ordenada permanecerá constante. Referimos-nos a este fato dizendo que a taxa de variação de y em relação a x, comumente indicada pela letra minúscula m, é zero. Em símbolos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0}{x_B - x_A} = 0.$$

Reta inclinada para a direita

É aquela cujo ângulo de inclinação é agudo.

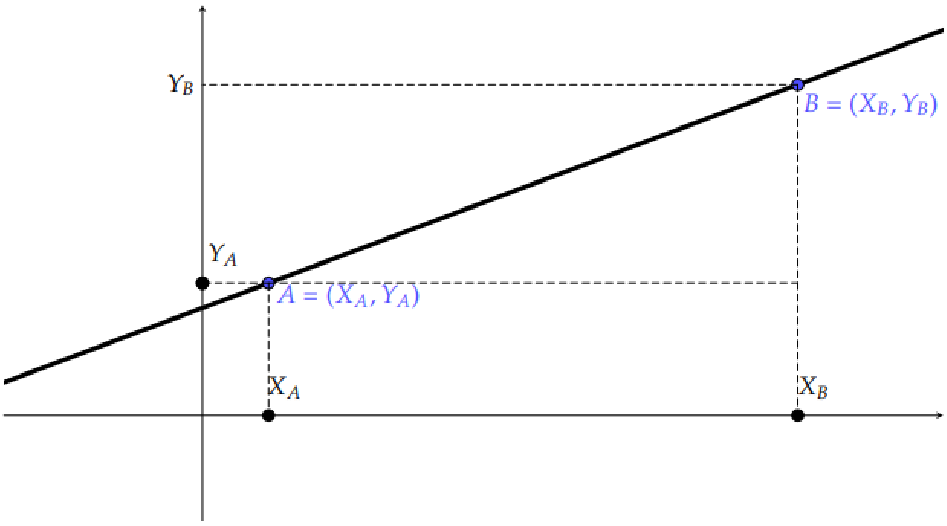

Figura 4.2: Reta inclinada para a direita. (Fonte: elaboração do autor)

Diferentemente do caso anterior, se caminharmos sobre a reta dada na Figura 4.2 no sentido do ponto A para o ponto B, à medida que a abscissa aumenta, a ordenada também aumenta. Neste caso, a taxa de variação de y em relação a x é um número positivo. Em símbolos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} > 0.$$

Reta vertical

É aquela cujo ângulo de inclinação é reto.

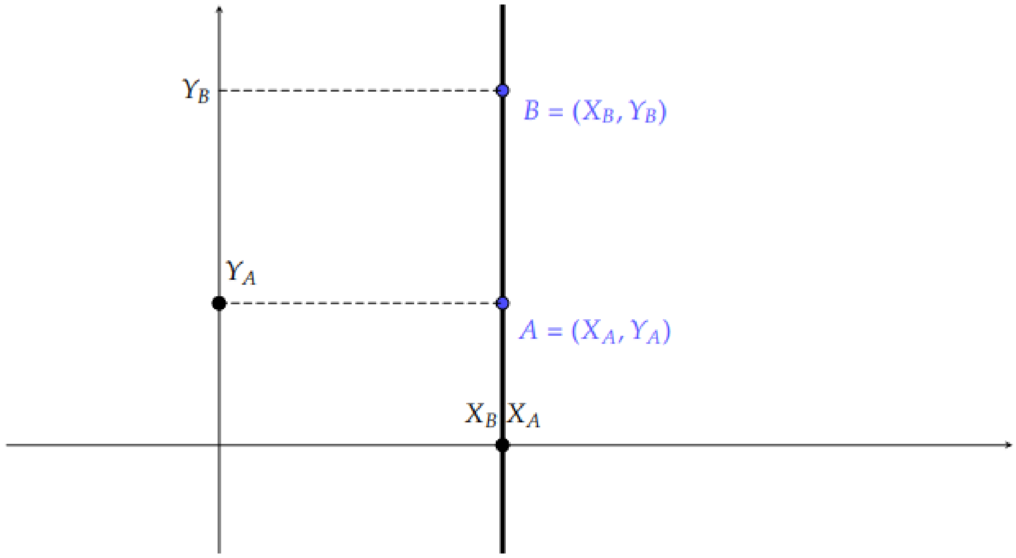

Figura 4.3: Reta vertical. (Fonte: elaboração do autor)

Neste caso, se caminharmos sobre a reta dada na Figura 4.3 no sentido do ponto A para o ponto B, a abscissa permanecerá constante e a ordenada aumentará. Assim, a taxa de variação de y em relação a x não existirá, pois $\Delta x = 0$. Em outras palavras, uma reta vertical não tem declividade ou coeficiente angular.

Reta inclinada para a esquerda

É aquela cujo ângulo de inclinação é obtuso.

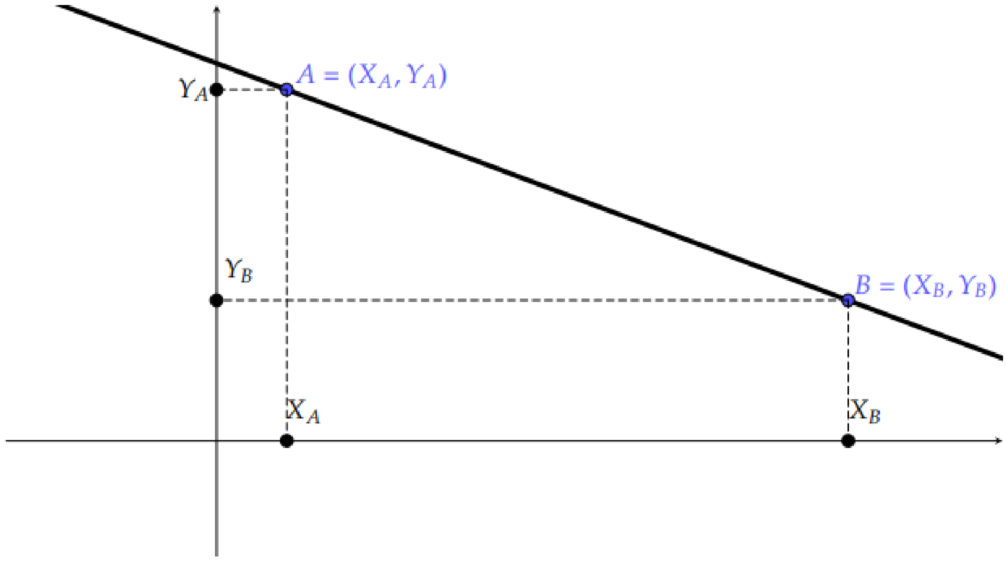

Figura 4.4: Reta inclinada para esquerda. (Fonte: elaboração do autor)

Se caminharmos sobre a reta dada na Figura 4.4 no sentido do ponto A para o ponto B, à medida que a abscissa aumenta, a ordenada diminui. Neste caso, a taxa de variação de y em relação a x é um número negativo. Em símbolos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} < 0.$$

Definição 4.1. A *declividade* ou *coeficiente angular* da reta não vertical determinada pelos pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ é a taxa de variação

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

OBSERVAÇÕES:

- Suponha que a reta determinada pelos pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ não seja vertical e sejam $C = (x_C, y_C)$ e $D = (x_D, y_D)$ pontos quaisquer desta reta. Do que fizemos no Capítulo 3 segue que

$$(y_B - y_A)(x_D - x_C) = (x_B - x_A)(y_D - y_C).$$

Como a reta é não vertical,

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$

e, portanto, a declividade de uma reta pode ser calculada a partir de quaisquer dois pontos distintos que pertençam a essa reta.

- Notemos que a razão entre a variação do y e a correspondente variação do x representa a tangente do ângulo que a reta forma com a direção horizontal, medido no sentido anti-horário. Assim, podemos escrever que $m = \operatorname{tg} \alpha$, onde α é o ângulo de inclinação da reta.

4.2 EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

Vamos obter uma equação para uma reta não vertical levando em consideração a declividade dessa reta. Começaremos apresentando as ideias num caso particular e depois apresentaremos uma atividade que tratará do caso geral.

A fim de determinar uma equação para a reta que passa pelos pontos $A = (-3, -7)$ e $B = (2, 8)$, por exemplo, deveremos seguir algumas regras. É interessante discutir com os alunos que regras serão essas e pedir que eles ajudem a compô-las e, também, que as registrem.

Podemos sugerir desenhar esses pontos em um plano dotado de um sistema de eixos ortogonais, traçar a reta por eles e chamá-la reta s. Assim:

- Regra 1: O nome da reta é s.
- Regra 2: Os pontos que a determinam de maneira única são $A = (-3, -7)$ e $B = (2, 8)$.
- Regra 3: Desenhar esses pontos em um plano dotado de um sistema de eixos ortogonais e traçar a reta.

Estabelecidas essas primeiras regras, vamos executá-las. É interessante dar um tempo para que os alunos o façam em suas anotações, logo após o professor fazer na lousa. (Figura: 4.5)

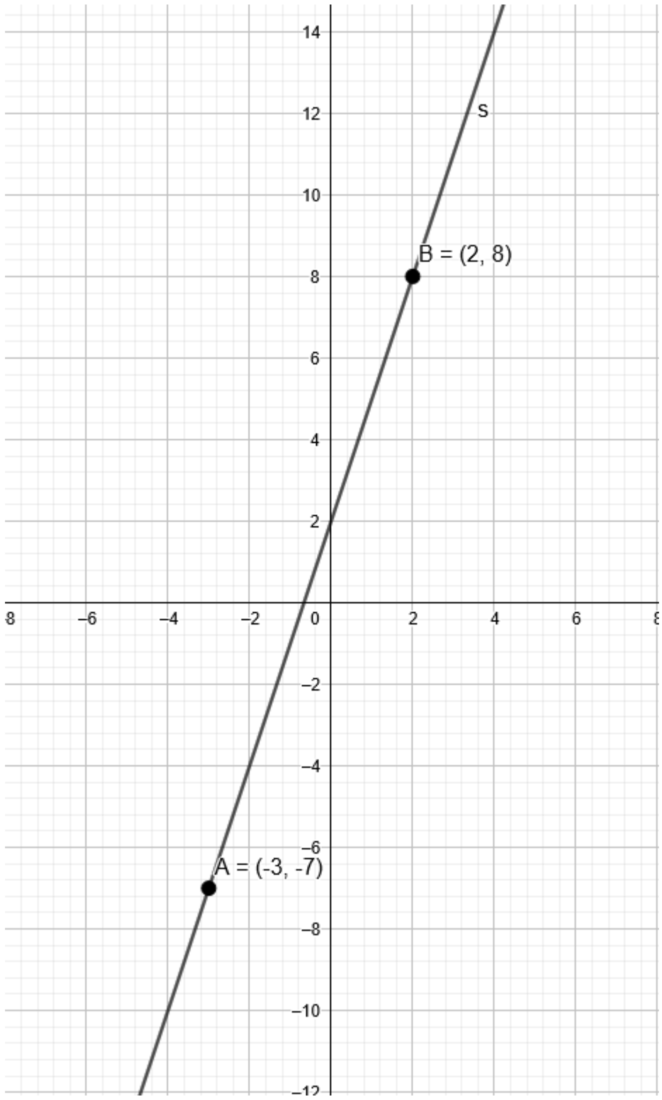

Figura 4.5: Reta que passa pelos pontos $A = (-3, -7)$ e $B = (2, 8)$. (Fonte: elaboração do autor)

Lembrando que a declividade de uma reta pode ser calculada tomando-se quaisquer dois pontos distintos sobre essa reta, vamos calculá-la usando os pontos de que dispomos:

- Regra 4: Podemos calcular a taxa de variação, também chamada de declividade ou coeficiente angular, da reta que passa pelos pontos $A = (-3, -7)$ e $B = (2, 8)$ usando a fórmula

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

É importante darmos um tempo para que os alunos executem o cálculo proposto na Regra 4:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-(-7)}{2-(-3)} = \frac{8+7}{2+3} = \frac{15}{5} = 3.$$

Também é interessante mostrar na figura o Δy e o Δx. Assim: (Figura: 4.6)

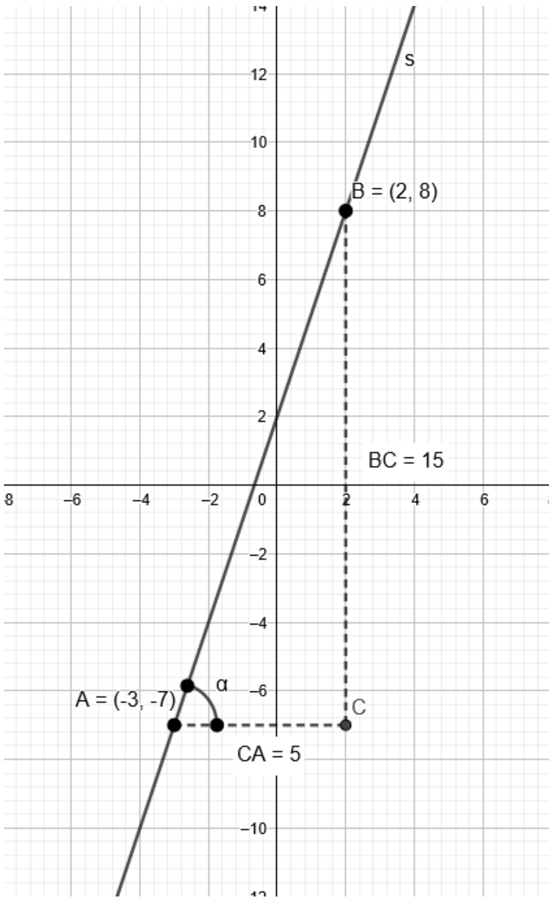

Figura 4.6: $\Delta y = BC$ e $\Delta x = CA$. (Fonte: elaboração do autor)

Após obter $m = 3$, iremos tomar um ponto genérico $P = (x, y)$ sobre essa reta s e escolher um dos dois pontos dados a priori, por exemplo, o ponto $B = (2, 8)$, para "forçar" que a declividade seja igual a 3. Assim, temos:

$$3 = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{y-8}{x-2}$$

ou seja

$$y - 8 = 3(x - 2)$$

que é uma equação da reta, comumente chamada no Ensino Médio de *equação fundamental* ou *equação ponto-declividade* da reta s.

Como sempre, será alvissareiro que, após chegar ao cálculo da equação, retomemos com os alunos o passo a passo que percorremos.

O caso geral será tratado em um jogo de linguagem matemático. A depender do tempo disponível, seria interessante propor que os alunos, individualmente ou em grupo, elaborassem tal jogo e suas regras.

Atividade 19. Jogo da dedução da equação fundamental da reta.

Tempo previsto para a atividade: 15 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; régua; lousa e giz.

Pré-requisitos: declividade de uma reta; fórmula para o cálculo da declividade.

Peças do jogo:

1. Plano dotado de um sistema de eixos ortogonais.
2. Dois pontos quaisquer, A e B, que não tenham a mesma abscissa.
3. O ponto A é dado por $A = (x_A, y_A)$.
4. O ponto B é dado por $B = (x_B, y_B)$.
5. Um ponto genérico P, dado por $P = (x, y)$, diferente de A e de B.

Regras do jogo:

1. Para calcular a declividade de uma reta não vertical, usar a fórmula
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$
onde P e Q são pontos distintos dessa reta.

Jogadas a executar:

1. Calcular a declividade da reta AB usando os pontos A e B através da fórmula dada na Regra 1.
2. Escolher um dos dois pontos A ou B.
3. Usar o ponto escolhido e o ponto genérico P para calcular a declividade usando a fórmula da Regra 1.
4. Igualar o resultado da Jogada 1 com o resultado da Jogada 3.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

Jogada 1:

Basta copiar a fórmula dada na Regra 1:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Jogada 2:

Escolho o ponto $A = (x_A, y_A)$, por exemplo.

Jogada 3:

Como $P = (x, y)$, temos que

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_A}{x - x_A}.$$

Jogada 4:

Igualando os valores das Jogadas 1 e 3, obtemos

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

ou seja

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A).$$

■

OBSERVAÇÕES:

1. Como já dito anteriormente, a equação

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$$

é referida como *equação fundamental* ou *equação ponto-declividade* da reta.

2. Denotando a declividade por m e as coordenadas do ponto A por (x_0, y_0), a equação obtida passa a ser

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Essa última modificação é feita porque é comum usarmos regras mnemônicas, especialmente em cursos pré-vestibulares. A regra mnemônica para esta fórmula é "Yoyô, Mixoxô". Isso tudo pode parecer estranho mas é de grande ajuda aos alunos que irão prestar vestibular.

4.3 VÁRIOS NOMES PARA VÁRIOS FORMATOS DE EQUAÇÕES DE UMA MESMA RETA

No Ensino Médio, é comum classificarmos as equações das retas tendo em vista a forma de escrevê-las. Assim, temos:

1. Equação geral: $ax + by + c = 0$
2. Equação reduzida (para retas não verticais): $y = mx + n$
3. Equação fundamental (para retas não verticais): $y - y_0 = m(x - x_0)$
4. Equação segmentária ou dos interceptos: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
5. Equação paramétrica: $\begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \gamma t + \delta \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Esses nomes e essas definições podem ser informados aos alunos diretamente em aula expositiva, dando exemplos de como passar de uma forma para outra.

Atividade 20. Jogo dos nomes das equações da reta.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; régua; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: formatos da equação da reta: geral, reduzida, fundamental, segmentária e paramétrica.

Peças do jogo:

1. Equação fundamental de reta: $y - 3 = \frac{2}{3}(x - 4)$

Regras do jogo:

1. Equação geral: $ax + by + c = 0$
2. Equação reduzida: $y = mx + n$
3. Equação segmentária ou dos interceptos: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
4. Equação paramétrica: $\begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \gamma t + \delta \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Jogadas a executar:

1. Escrever a equação da reta dada na Peça 1 na forma geral.
2. Escrever a equação reduzida da reta dada na Peça 1.
3. Escrever a equação segmentária ou dos interceptos da reta dada na Peça 1.
4. Escrever a equação da reta dada na Peça 1 na forma paramétrica.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

$$\begin{aligned} y-3=\tfrac{2}{3}(x-4) &\iff 3y-9=2x-8 \\ &\iff -2x+3y-1=0 \end{aligned}$$

Portanto, $-2x+3y-1=0$ é uma equação geral da reta dada.

Jogada 2:

$$\begin{aligned} y-3=\tfrac{2}{3}(x-4) &\iff 3y-9=2x-8 \\ &\iff 3y=2x+1 \\ &\iff y=\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Portanto, $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ é a equação reduzida da reta dada.

Jogada 3:

$$\begin{aligned} y-3=\tfrac{2}{3}(x-4) &\iff 3y-9=2x-8 \\ &\iff -2x+3y=1 \\ &\iff \frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{3}}=1 \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{3}}=1$ é a equação segmentária ou dos interceptos da reta dada.

Jogada 4:

Fazendo $x=t$, temos que $3y=2t+1$. Logo, $y=\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}$. Portanto,

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3}t+\frac{1}{3} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

é uma equação paramétrica da reta dada.

■

Após os alunos jogarem o jogo da Atividade 20, podemos elaborar atividades, para serem feitas individualmente ou em grupo, com a finalidade de levar os alunos a concluírem que significado tem cada uma das formas, nomeadas anteriormente, de apresentar a equação de uma reta não vertical.

4.4 CONDIÇÕES DE PARALELISMO E PERPENDICULARISMO

4.4.1 *Retas paralelas*

Começamos relembrando um importante resultado da geometria euclidiana plana.[2]

Teorema 4.2. *Se duas paralelas são cortadas por uma terceira reta, então os ângulos correspondentes são congruentes, e reciprocamente: a congruência dos ângulos correspondentes tem como consequência que as retas são paralelas. (Figura: 4.7)*

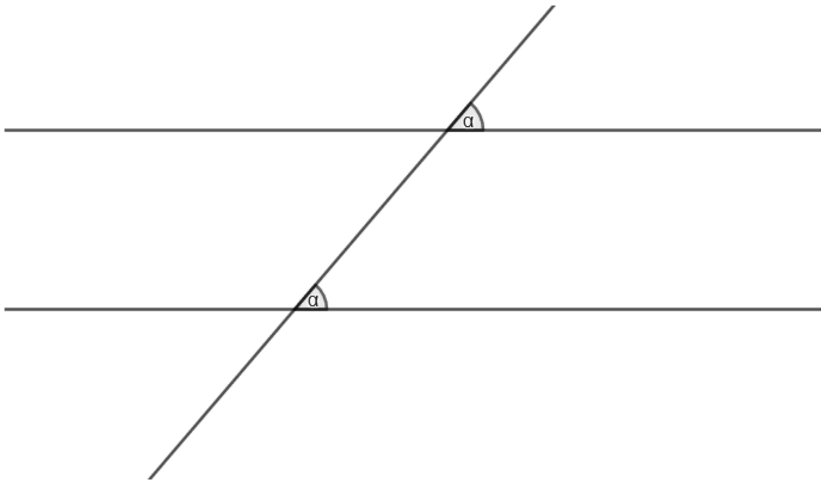

Figura 4.7: Retas paralelas e ângulos correspondentes congruentes. (Fonte: elaboração do autor)

Do Teorema 4.2 segue que duas retas verticais (isto é, cujo ângulo de inclinação é reto) são paralelas. Dele também segue que se duas retas são paralelas, então elas têm ângulos de inclinação congruentes e, portanto, ou ambas são verticais, ou ambas são horizontais, ou ambas são inclinadas para a direita, ou ambas são inclinadas para a esquerda.

2 Ao leitor interessado, o enunciado do Teorema 4.2 foi extraído do Teorema 30 de [9].

A próxima proposição fornece um critério para determinar quando duas retas não verticais são paralelas em função de suas declividades.

Proposição 4.3. *Duas retas não verticais r e s são paralelas se, e somente se, $m_r = m_s$. (Figura: 4.8)*

Demonstração. É imediato que r e s são horizontais se, e somente se, $m_r = 0 = m_s$.

Supondo que r e s sejam inclinadas para a direita, considere a figura a seguir:

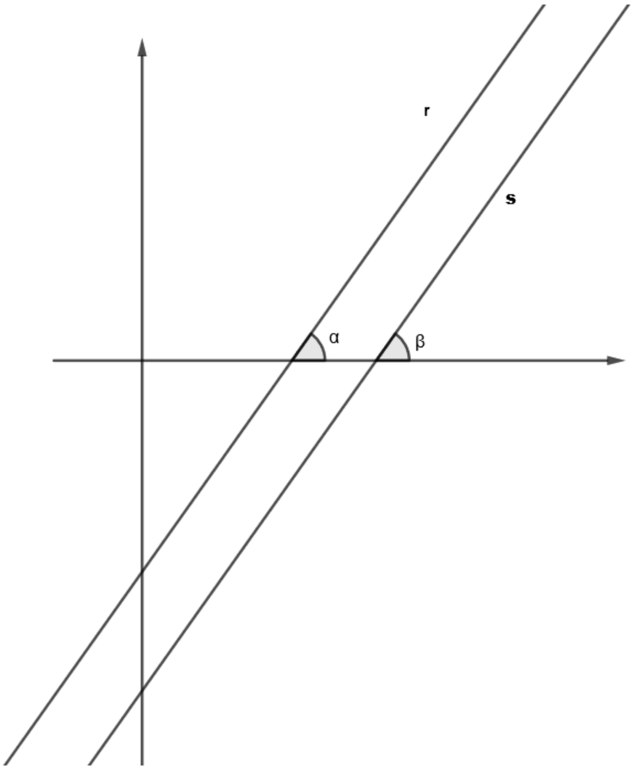

Figura 4.8: Retas paralelas inclinadas para a direita. (Fonte: elaboração do autor)

De um lado, se r e s são paralelas, seus ângulos de inclinação α e β são congruentes. Logo, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Como $m_r = \operatorname{tg}\alpha$ e $m_s = \operatorname{tg}\beta$, temos que $m_r = m_s$.

De outro lado, se $m_r = m_s$, então $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Como os ângulos α e β são ambos agudos, temos que α e β são congruentes. Logo, r e s são paralelas.

O caso em que r e s são inclinadas para a esquerda é tratado de maneira análoga. □

Atividade 21. Jogo das retas paralelas.

Tempo previsto para a atividade: 15 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; régua; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: identificação de retas paralelas pela igualdade dos coeficientes angulares.

Peças do jogo:

1. Reta r_1 de equação $3x + 5y + 7 = 0$
2. Reta r_2 de equação $y = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$
3. Reta r_3 de equação $\frac{x}{-\frac{7}{5}} + \frac{y}{-\frac{7}{3}} = 1$
4. Reta r_4 de equação $6x + 10y - 6 = 0$
5. Reta r_5 de equação $y - 5 = -\frac{3}{5}(x + 8)$

Regras do jogo:

1. Duas retas não verticais r e s são paralelas se, e somente se, $m_r = m_s$ (ou seja, suas declividades são iguais).
2. Para obter a equação reduzida de uma reta não vertical basta isolar a variável y.
3. O coeficiente da variável x na equação reduzida é o valor da declividade da reta, ou seja, de seu m.

Jogadas a executar:

1. Para cada uma das retas descritas nas peças do jogo, anotar sua declividade.
2. Com base nos valores obtidos na Jogada 1, decidir quais retas são paralelas e quais não são.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

Vamos isolar o y em cada equação e destacar o valor do m.

- Reta 1:

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 7 + 0 \quad &\iff \quad 5y = -3x - 7 \\ &\iff \quad y = -\frac{3}{5}x - \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Logo, $m_1 = -\frac{3}{5}$.

- Reta 2:

  Como a equação de r_2 já está na forma reduzida, é imediato que $m_2 = -\frac{3}{5}$.

- Reta 3:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{-\frac{7}{5}} + \frac{y}{-\frac{7}{3}} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\frac{5x}{7} - \frac{3y}{7} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad -5x - 3y = 7 \\
&\Longleftrightarrow \quad 3y = -5x - 7 \\
&\Longleftrightarrow \quad y = -\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

  Logo, $m_3 = -\frac{5}{3}$.

- Reta 4:

$$\begin{aligned}
6x + 10y - 6 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 10y = -6x + 6 \\
&\Longleftrightarrow \quad y = -\frac{6}{10}x + \frac{6}{10}
\end{aligned}$$

  Logo, $m_4 = -\frac{3}{5}$.

- Reta 5:

  É imediato que $m_5 = -\frac{3}{5}$.

Jogada 2:

As retas r_1, r_2, r_4 e r_5 são duas a duas paralelas, pois todas têm declividade igual a $-\frac{3}{5}$. No entanto, a reta r_3 não é paralela a outra reta dada.

■

4.4.2 *Retas perpendiculares*

Antes de apresentarmos um critério para determinar quando duas retas não verticais são perpendiculares em função de suas declividades, vamos recordar dois resultados de trigonometria.

Proposição 4.4. *Sendo α um arco no primeiro quadrante, temos que*

$$\operatorname{cotg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Demonstração. Considere o seguinte desenho: (Figura: 4.9)

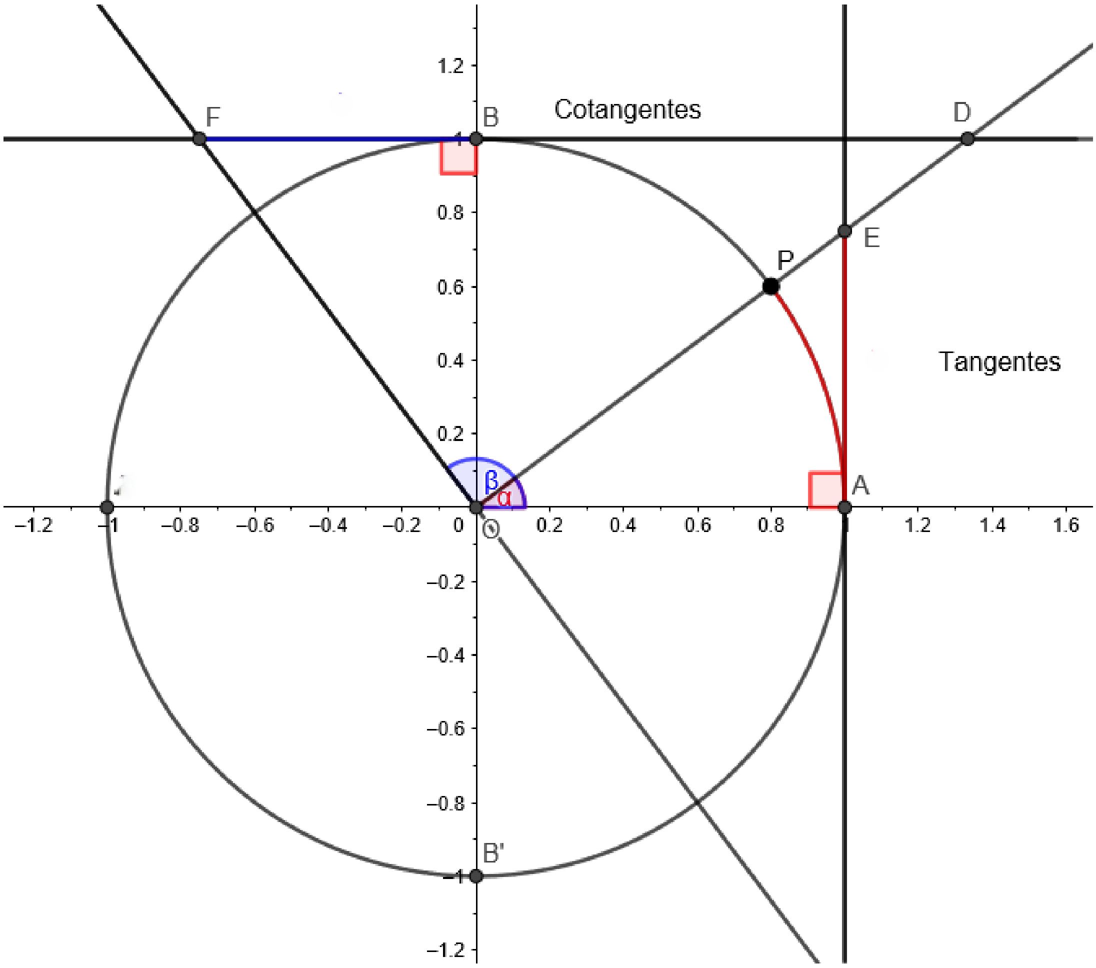

Figura 4.9: Tangente e cotangente no círculo trigonométrico. (Fonte: elaboração do autor)

Nessa figura, temos a reta vertical passando pelo ponto A sobre a qual será tomada a tangente do ângulo α e a reta horizontal passando pelo ponto B sobre a qual será tomada a cotangente do ângulo β.

Como é cediço, o raio do círculo trigonométrico é 1.

Tomemos dois ângulos de medidas α e β, respectivamente $\angle AOE$ e $\angle AOF$, tais que $\beta = \alpha + 90°$. Assim, temos que $\operatorname{tg} \alpha = AE$ e $\operatorname{cotg} \beta = -BF$.

Consideremos os triângulos OAE e OBF. Esses triângulos são congruentes, pois:

1. $\angle OAE \cong \angle OBF$, ambos são retos;
2. $OA = OB = 1$;
3. $\angle AOE \cong \angle BOF$, vez que a medida de $\angle BOF$ é igual a $\beta - 90^o = \alpha$.

Assim, pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo) de congruência de triângulos, concluímos que $\triangle OAE \cong \triangle OBF$.

Em vista dessa congruência de triângulos, os segmentos $\overline{BF}$ e $\overline{AE}$ são congruentes. Como $\operatorname{tg}\alpha = AE$ e $\operatorname{cotg}\beta = -BF$, concluímos que

$$\operatorname{cotg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha$$

ou, escrito de outra forma,

$$\operatorname{cotg}(\alpha + 90^\circ) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

□

Proposição 4.5. *Para um ângulo de medida α, dentro do domínio de validade da função, temos que*

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Demonstração. De fato, no desenho anterior temos que o $\triangle AOE$ é semelhante ao $\triangle BDO$ pelo caso AA (pares de ângulos retos e pares de ângulos de medida α).[3] Assim,

$$\frac{BD}{AO} = \frac{BO}{AE}$$

o que garante que

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{1} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

□

Estamos, enfim, prontos para enunciar e demonstrar nosso critério. Antes, observemos que se uma reta é vertical, então uma segunda reta será perpendicular a ela se, e somente se, for horizontal.

Proposição 4.6. *Duas retas não verticais r e s são perpendiculares se, e somente se, $m_r \cdot m_s = -1$.*

Demonstração. Considere o desenho a seguir: (Figura: 4.10)

3 Ao leitor interessado em revisitar a noção de semelhança de triângulos, sugerimos a Seção 20 de [7].

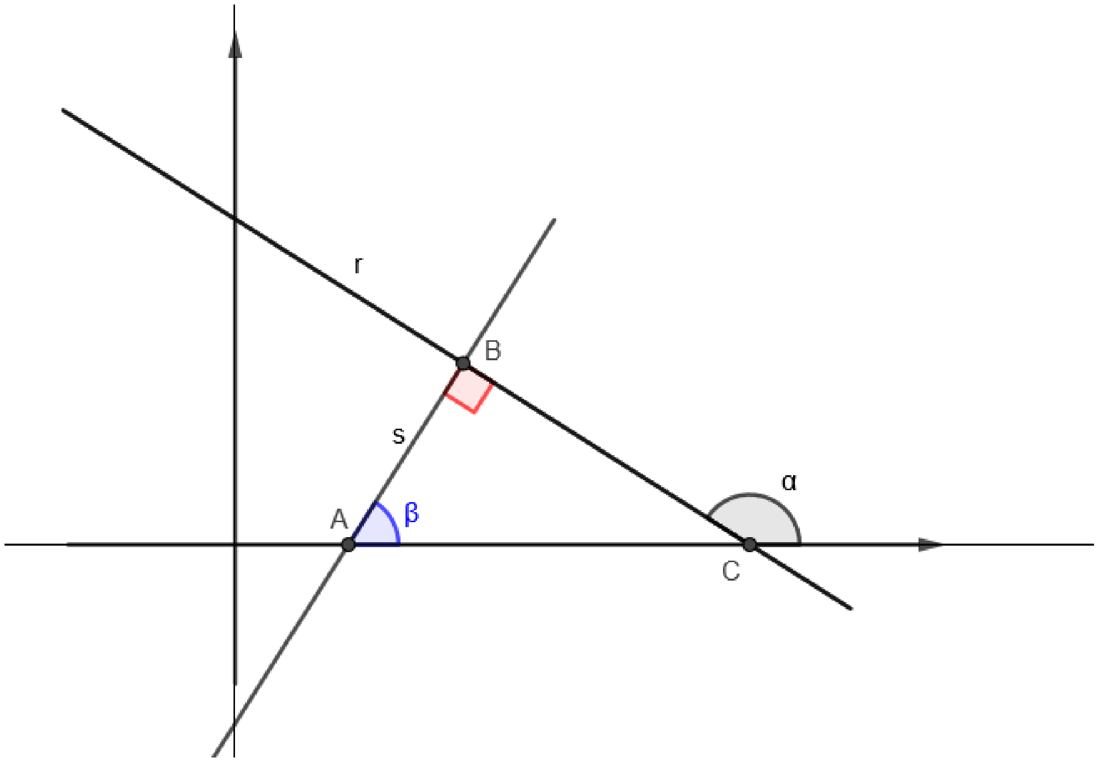

Figura 4.10: Retas perpendiculares. (Fonte: elaboração do autor)

Se r e s são perpendiculares, então o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo. Disto segue que $\alpha = \beta + 90^\circ$. Note que

$$\alpha = \beta + 90^\circ \implies \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}(\beta + 90^\circ) \implies \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{tg}\beta \implies \frac{1}{m_r} = -m_s.$$

Logo, $m_r \cdot m_s = -1$.

De outra parte, se $m_r \cdot m_s = -1$, então $m_r = -\frac{1}{m_s}$, o que significa que $m_r \neq m_s$. Assim, as retas r e s são concorrentes e formam um ângulo δ, de modo que $\alpha = \delta + \beta$ ou $\beta = \delta + \alpha$, sendo α e β as inclinações das retas r e s, respectivamente. Sem perda de generalidade, admitamos que

$$\alpha = \delta + \beta. \tag{4.1}$$

Além disso, de $m_r = -\frac{1}{m_s}$ segue que $\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\beta)} = -\operatorname{cotg}(\beta) = \operatorname{tg}(90^\circ + \beta)$. Logo,

$$\alpha = 90^\circ + \beta. \tag{4.2}$$

Comparando (4.1) e (4.2), temos que $\delta = 90^\circ$. Portanto, r e s são perpendiculares. □

Atividade 22. Jogo das retas perpendiculares.

Tempo previsto para a atividade: 15 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; régua; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: identificação de retas perpendiculares usando os coeficientes angulares.

Peças do jogo:

1. Reta r_1 de equação $3x + 5y + 7 = 0$
2. Reta r_2 de equação $y = \frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$
3. Reta r_3 de equação $\frac{x}{\frac{5}{7}} + \frac{y}{\frac{3}{7}} = 1$
4. Reta r_4 de equação $10x - 6y - 6 = 0$
5. Reta r_5 de equação $y - 5 = \frac{5}{3}(x + 8)$

Regras do jogo:

1. Duas retas não verticais r e s são perpendiculares se, e somente se, $m_r \cdot m_s = -1$.
2. Para obter a equação reduzida de uma reta não vertical basta isolar a variável y.
3. O coeficiente da variável x na equação reduzida é o valor da declividade da reta, ou seja, de seu m.

Jogadas a executar:

1. Para cada uma das retas descritas nas peças do jogo, anotar sua declividade.
2. Com base nos valores obtidos na Jogada 1, decidir quais retas são perpendiculares e quais não são.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

Vamos isolar o y em cada equação e destacar o valor do m.

- Reta 1:

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 7 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 5y = -3x - 7 \\ &\Longleftrightarrow \quad y = -\tfrac{3}{5}x - \tfrac{7}{5} \end{aligned}$$

Logo, $m_1 = -\frac{3}{5}$.

- Reta 2:

  É imediato que $m_2 = \frac{5}{3}$.

- Reta 3:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\frac{5}{7}} + \frac{y}{\frac{3}{7}} = 1 &\iff \frac{7x}{5} + \frac{7y}{3} = 1 \\ &\iff 21x + 35y = 15 \\ &\iff 35y = -21x + 15 \\ &\iff y = -\frac{21}{35}x + \frac{15}{35} \\ &\iff y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{7} \end{aligned}$$

  Logo, $m_3 = -\frac{3}{5}$.

- Reta 4:

$$\begin{aligned} 10x - 6y - 6 = 0 &\iff 16y = 10x - 6 \\ &\iff y = \frac{10}{6}x - \frac{6}{6} \end{aligned}$$

  Logo, $m_4 = \frac{5}{3}$.

- Regra 5:

  É imediato que $m_5 = \frac{5}{3}$.

Jogada 2:

São perpendiculares os seguintes pares de retas: r_1 e r_2, r_1 e r_4, r_1 e r_5, r_2 e r_3, r_3 e r_4, r_3 e r_5.

■

Uma importante semelhança de família é usar a relação entre declividade e retas paralelas e entre declividade e retas perpendiculares para obter a equação de uma nova reta que seja perpendicular ou paralela à antiga por um ponto. Além de ser um assunto muito cobrado em vestibulares, servirá na construção de muitas figuras geométricas.

Atividade 23. Jogo da determinação de retas paralelas e retas perpendiculares.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; régua; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: condição para retas não verticais serem paralelalas ($m_r = m_s$); condição para retas não verticais serem perpendiculares ($m_r \cdot m_s = -1$); equação fundamental da reta.

Peças do jogo:

1. Um sistema de eixos ortogonais.
2. A reta r de equação $3x + 2y - 7 = 0$.
3. O ponto $P = (4, 7)$.

Regras do jogo:

1. Uma equação geral de uma reta é dada por $ax + by + c = 0$.
2. A declividade de uma reta não vertical dada por sua equação geral é $m = -\frac{a}{b}$.
3. A equação fundamental de uma reta que possui declividade m e passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ é $y - y_0 = m(x - x_0)$.
4. Dada uma reta r, não vertical, de declividade m, todas as retas paralelas a r têm declividade m.
5. Dada uma reta r, não vertical e não é horizontal, de declividade m, todas as retas perpendiculares a r têm declividade $-\frac{1}{m}$.

Jogadas a executar:

1. Determinar a equação fundamental e uma equação geral da reta s, paralela à reta r, passando pelo ponto P.
2. Determinar a equação fundamental e uma equação geral da reta t, perpendicular à reta r, passando pelo ponto P.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Inicialmente, vamos apresentar um desenho da situação descrita no jogo: (Figura: 4.11)

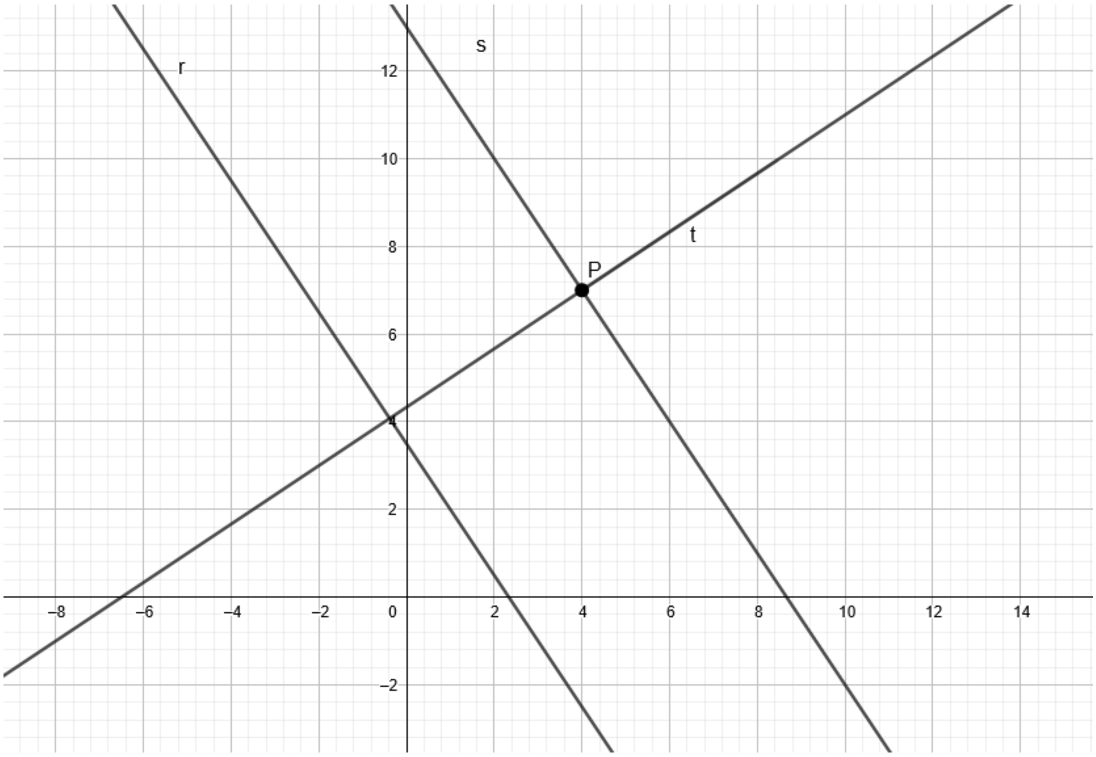

Figura 4.11: Retas paralela e perpendicular à reta r dada. (Fonte: elaboração do autor)

Jogada 1:

Como a reta s é paralela à reta r, pela Regra 4, ambas têm a mesma declividade. Pela Regra 2, a declividade da reta r é dada por

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{2}.$$

Logo, a declividade da reta s é

$$m_s = m_r = -\frac{3}{2}.$$

Pela Regra 3, temos que a equação fundamental da reta s é

$$y - 7 = -\frac{3}{2}(x - 4).$$

Para obtermos uma equação geral, podemos multiplicar ambos os lados da última igualdade por 2 e passar todos os valores para o lado esquerdo, obtendo

$$3x + 2y - 26 = 0.$$

Jogada 2:

Como a reta t é perpendicular à reta r, pela Regra 5, o produto de suas declividades é igual a -1. Pela Regra 2, a declividade da reta r é dada por

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{2}.$$

Logo, a declividade da reta t é

$$m_t = \frac{2}{3}.$$

Pela Regra 3, temos que a equação fundamental da reta t é

$$y - 7 = \frac{2}{3}(x - 4).$$

Para obtermos uma equação geral, podemos multiplicar ambos os lados da última igualdade por 3 e passar todos os valores para o lado esquerdo, obtendo

$$-2x + 3y - 13 = 0.$$

■

Tendo em vista esse último jogo e a necessidade, em vestibulares, de resolvermos exercícios rapidamente, pois o tempo é limitado, podemos enunciar um resultado que nos permita, dada uma reta e um ponto, obter de forma direta as equações da paralela e da perpendicular a essa reta por esse ponto.

Teorema 4.7. *Se $ax + by + c = 0$, com $ab \neq 0$, é equação geral de uma reta r e $P = (x_0, y_0)$ é um ponto do plano, então:*

(a) $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$ é equação geral da reta s paralela à r passando por P.

(b) $bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$ é equação geral da reta perpendicular à r passando por P.

Demonstração. Tomando por base o raciocínio desenvolvido na atividade anterior, temos:

(a) Como a reta s é paralela à reta r, ambas têm a mesma declividade. Como a declividade da reta r é dada por

$$m_r = -\frac{a}{b}$$

temos que a declividade da reta s é

$$m_s = m_r = -\frac{a}{b}.$$

Logo, a equação fundamental da reta s é

$$y - y_0 = -\frac{a}{b}(x - x_0)$$

e uma equação geral pode ser obtida multiplicando-se ambos os lados dessa última igualdade por b e passando-se todos os valores para o lado esquerdo, resultando em

$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

(b) Como a reta t é perpendicular à reta r, o produto de suas declividades é igual a -1. Como a declividade da reta r é dada por

$$m_r = -\frac{a}{b}$$

temos que a declividade da reta t é

$$m_t = \frac{b}{a}.$$

Logo, a equação fundamental da reta t é

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

e uma equação geral pode ser obtida multiplicando-se ambos os lados dessa última igualdade por a e passando-se todos os valores para o lado esquerdo, resultando em

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0.$$

$\square$

Atividade 24. Mais um jogo da determinação de retas paralelas e retas perpendiculares.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; régua; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: Atividade 23.

Peças do jogo:

1. Um sistema de eixos ortogonais.
2. A reta r de equação $3x + 2y - 7 = 0$.
3. O ponto $P = (4, 7)$.

Regras do jogo:

1. Uma equação geral de uma reta r é dada por $ax + by + c = 0$.
2. Uma equação geral da reta s, paralela à r, passando por $P = (x_0, y_0)$ é

$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

3. Uma equação geral da reta t, perpendicular à reta r, passando por $P = (x_0, y_0)$ é

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0.$$

Jogadas a executar:

1. Determinar a equação geral da reta s, paralela à reta r, passando pelo ponto P.
2. Determinar a equação geral da reta t, perpendicular à reta r, passando pelo ponto P.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

Como a reta s é paralela à reta r, usamos a Regra 2 e escrevemos

$$3x + 2y - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = 0$$

ou seja

$$3x + 2y - 26 = 0.$$

Jogada 2:

Como a reta t é perpendicular à reta r, usamos a Regra 3 e escrevemos

$$2x - 3y - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 0$$

ou seja

$$2x - 3y + 13 = 0.$$

■

Vamos estabelecer uma regra para calcular o ângulo entre duas retas. Para tanto, novamente usando as semelhanças de família, devemos recordar com os alunos alguns resultados da trigonometria do círculo trigonométrico.

Proposição 4.8. *Para $a, b \in \mathbb{R}$ temos que*

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

Demonstração. Considere o seguinte desenho: (Figura: 4.12)

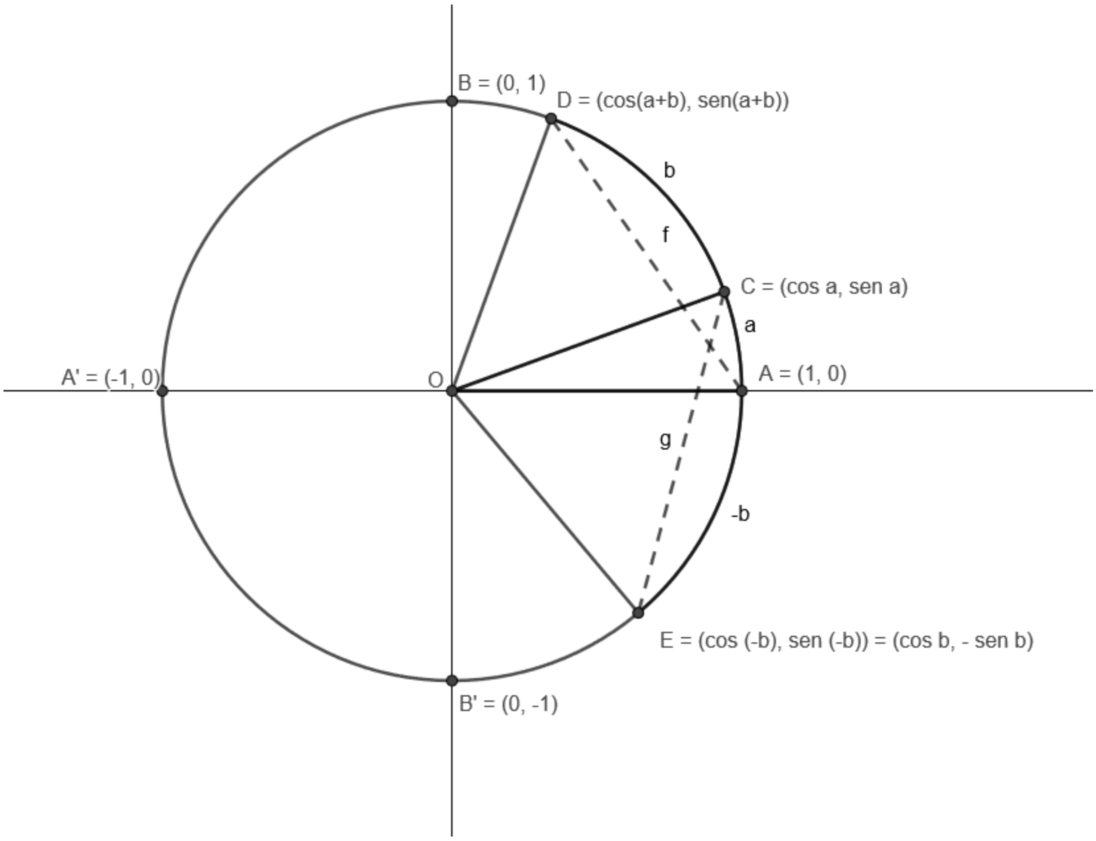

Figura 4.12: Cálculo de $\cos(a+b)$. (Fonte: elaboração do autor)

Nas condições dessa figura temos que são congruentes os triângulos $\triangle AOD$ e $\triangle COE$, pelo caso LAL de congruência de triângulos. Desso modo $\overline{AD} \cong \overline{CE}$ e, portanto, $d(A, D) = d(C, E)$. Logo,

$$\sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 &= (\cos(a+b) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(a+b) - 0)^2 \\ &= \cos^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 + \operatorname{sen}^2(a+b)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2 &= (\cos(a) - \cos(b))^2 + (\operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b))^2 \\ &= \cos^2(a) - 2\cos(a)\cos(b) + \cos^2(b) + \operatorname{sen}^2(a) + 2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}^2(b).\end{aligned}$$

Pela relação fundamental da trigonometria, $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$1 - 2\cos(a+b) + 1 = 1 - 2\cos(a)\cos(b) + 1 + 2\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

e, finalmente,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

□

Observações:

- Na sala de aula, antes de seguirmos com a demonstração, detalhamos com os alunos a figura e o caminho que iremos seguir.
- Destacamos que, no círculo trigonométrico, a abscissa e a ordenada de um ponto são, respectivamente, o cosseno e o seno do arco que esse ponto representa.
- Lembramos que a função cosseno é par, ou seja, $\cos(-x) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e a função seno é ímpar, ou seja, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Toda essa discussão preliminar é importante para o aluno sentir-se motivado a acompanhar a demonstração.
- Finalmente, é importante que todas as dúvidas sejam sanadas e que seja salientado que os vários jogos de linguagem matemáticos se conversam através das semelhanças de família.

Proposição 4.9. *Para $a, b \in \mathbb{R}$ temos:*

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$;
2. $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$;
3. $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$.

Demonstração. 1. $\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(-b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$.

2. Lembrando que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - (a+b)\right) \\
&= \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) + b\right) \\
&= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) - \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right)\operatorname{sen}(b) \\
&= \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)\operatorname{sen}(b).
\end{aligned}$$

3. $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen}(a)\cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos(a) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$.

□

Proposição 4.10. *Para $a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, vale a seguinte relação:*

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg}(a) \pm \operatorname{tg}(b)}{1 \mp \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}.$$

Demonstração. Lembrando que

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \text{ para todo } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

temos que

$$\begin{aligned}
tg(a \pm b) &= \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \operatorname{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) \mp \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} \pm \dfrac{\operatorname{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} \mp \dfrac{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} \pm \dfrac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)}}{1 \mp \dfrac{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \\
&= \frac{\operatorname{tg}(a) \pm \operatorname{tg}(b)}{1 \mp \operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}
\end{aligned}$$

□

Para determinarmos o ângulo entre duas retas dadas pelas suas equações em um sistema de eixos ortogonais fixado devemos considerar dois casos: uma das retas é vertical e a outra não, ou nenhuma é vertical.

Proposição 4.11. *Sejam r e s duas retas tais que r tenha declividade, positiva ou negativa, indicada por m_r, e s não tenha declividade. Então o ângulo agudo formado por elas, indicado por θ, é dado por*

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{1}{m_r}\right|\right).$$

Demonstração. Vamos considerar duas possibilidades: $m_r > 0$ ou $m_r < 0$.

Para $m_r > 0$, considere o desenho: (Figura: 4.13)

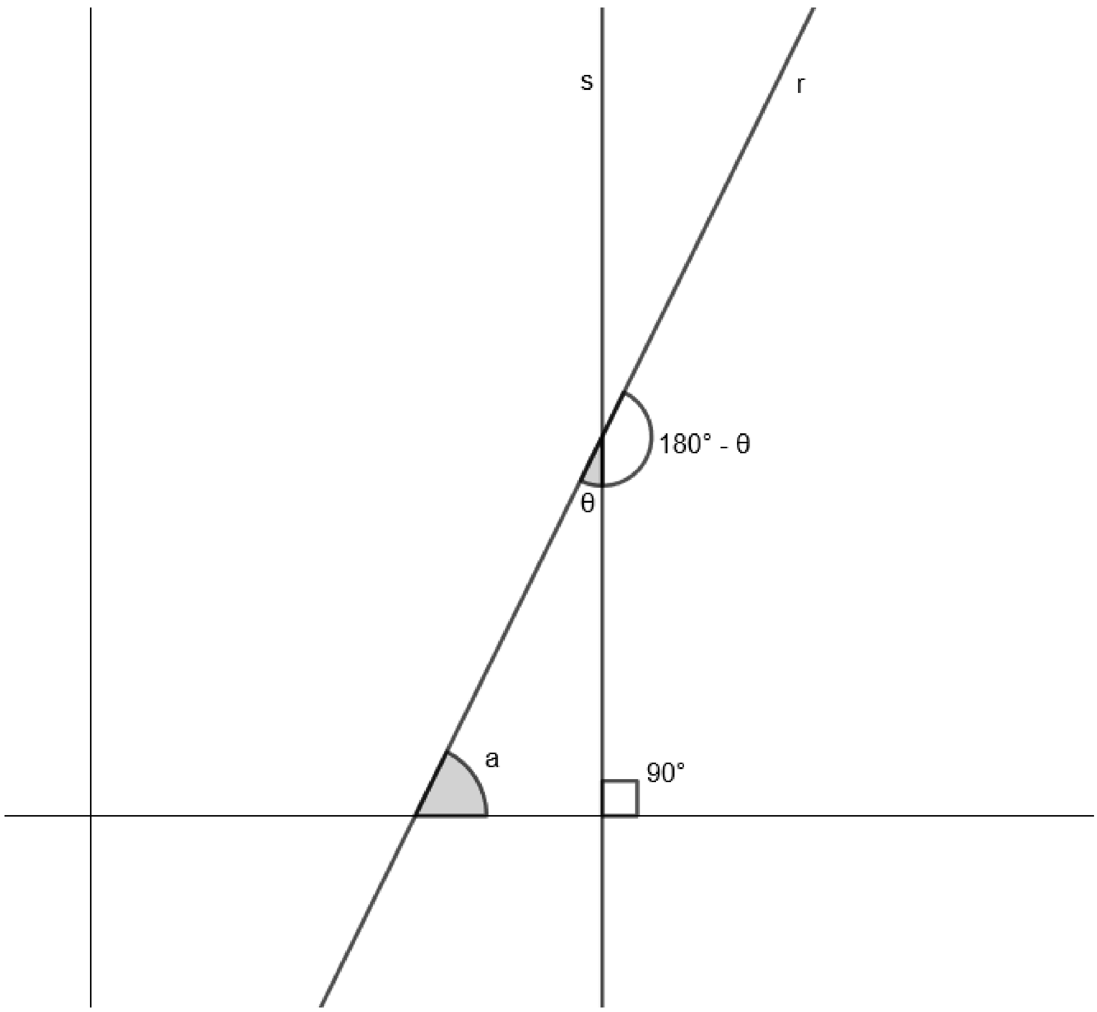

Figura 4.13: Declividade positiva. (Fonte: elaboração do autor)

Vemos na figura acima que $a + \theta = 90^\circ$, ou seja, $\theta = 90^\circ - a$ e, portanto,

$$\operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(90^\circ - a) = \operatorname{cotg}(a) = \frac{1}{\operatorname{tg}(a)}.$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{1}{m_r}.$$

Para $m_r < 0$, considere o desenho: (Figura: 4.14)

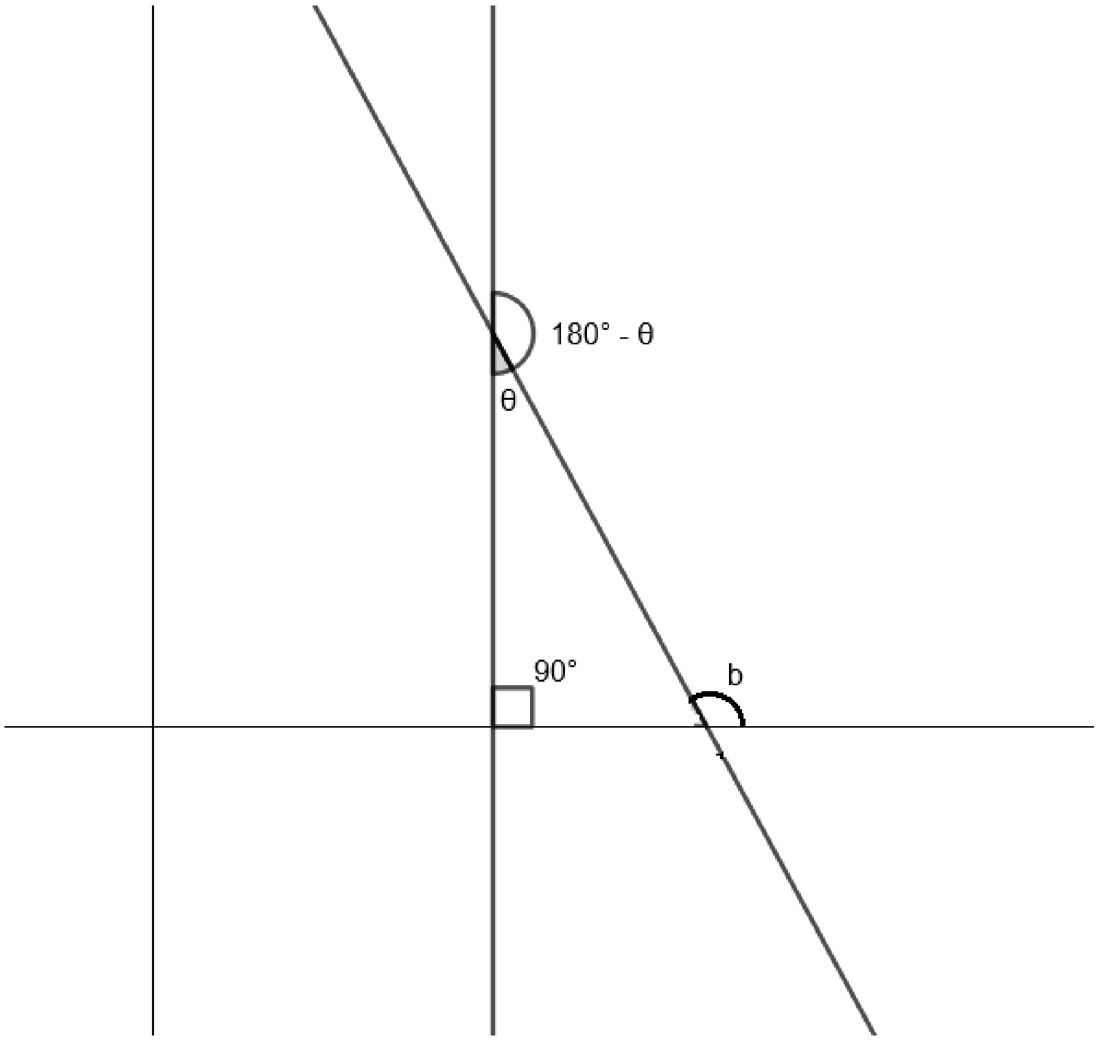

Figura 4.14: Declividade negativa. (Fonte: elaboração do autor)

Vemos na figura acima que $b = \theta + 90^\circ$, ou seja, $\theta = b - 90^\circ$ e, portanto,

$$\operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(b - 90^\circ) = -\operatorname{tg}(90^\circ - b) = -\operatorname{cotg}(b) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(b)} = -\frac{1}{m_r}.$$

Juntando os dois casos temos que

$$\operatorname{tg}(\theta) = \left|\frac{1}{m_r}\right| \Leftrightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{1}{m_r}\right|\right).$$

□

Proposição 4.12. *Sejam r e s duas retas não verticais tais que $m_r m_s \neq -1$. Então o ângulo agudo formado por elas, indicado por θ, é dado por*

$$\theta = \operatorname{arctg}\left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right|.$$

.

Demonstração. Considere a figura a seguir: (Figura: 4.15)

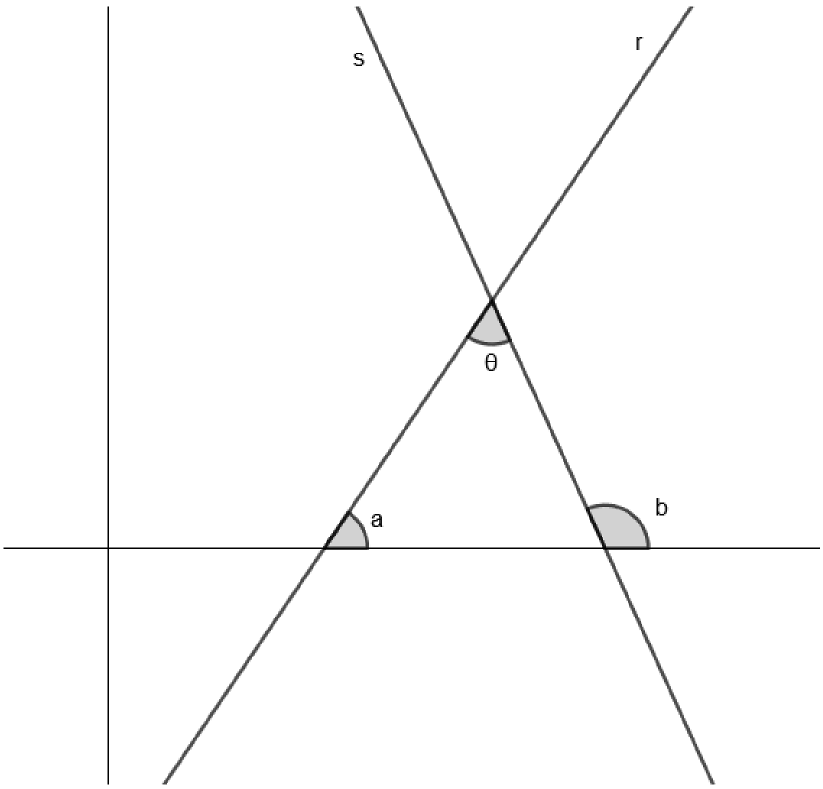

Figura 4.15: Ângulo entre duas retas não verticais. (Fonte: elaboração do autor)

□

Pelo teorema do ângulo externo, temos que $b = a + \theta$, ou seja, $\theta = b - a$. Logo,

$$\operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(b - a) = \frac{\operatorname{tg}(b) - \operatorname{tg}(a)}{1 + \operatorname{tg}(b)\operatorname{tg}(a)} = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}.$$

Caso θ seja obtuso, o ângulo externo adjacente será agudo e essa tangente será negativa. Caso contrário, o externo adjacente será obtuso e a tangente positiva. Em outras palavras, um dos dois ângulos será agudo e terá a tangente positiva. Assim,

$$\mathrm{tg}(\theta) = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r} \right|,$$

isto é,

$$\theta = \mathrm{arctg} \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r} \right|.$$

4.6 DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Para simplificarmos a obtenção da fórmula da distância de um ponto a uma reta, vamos estudar um importante jogo linguagem matemático, qual seja, as regras de como fazer uma translação dos eixos coordenados. Deixaremos a rotação para o Capítulo 6, onde serão desenvolvidos jogos normativos de linguagem mais elaborados e desafiadores.

4.6.1 *Translação de eixos coordenados*

Teorema 4.13. *Seja $O = (0, 0)$ a origem de um sistema de eixos ortogonais. Se os eixos coordenados são transladados para uma nova origem $O' = (x_0, y_0)$ e se as coordenadas de um ponto qualquer P antes e depois da translação são, respectivamente, (x, y) e (x', y'), então as equações de transformação das antigas para as novas coordenadas são dadas por*

$$\begin{cases} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0. \end{cases}$$

Demonstração. Considere a figura a seguir: (Figura: 4.16)

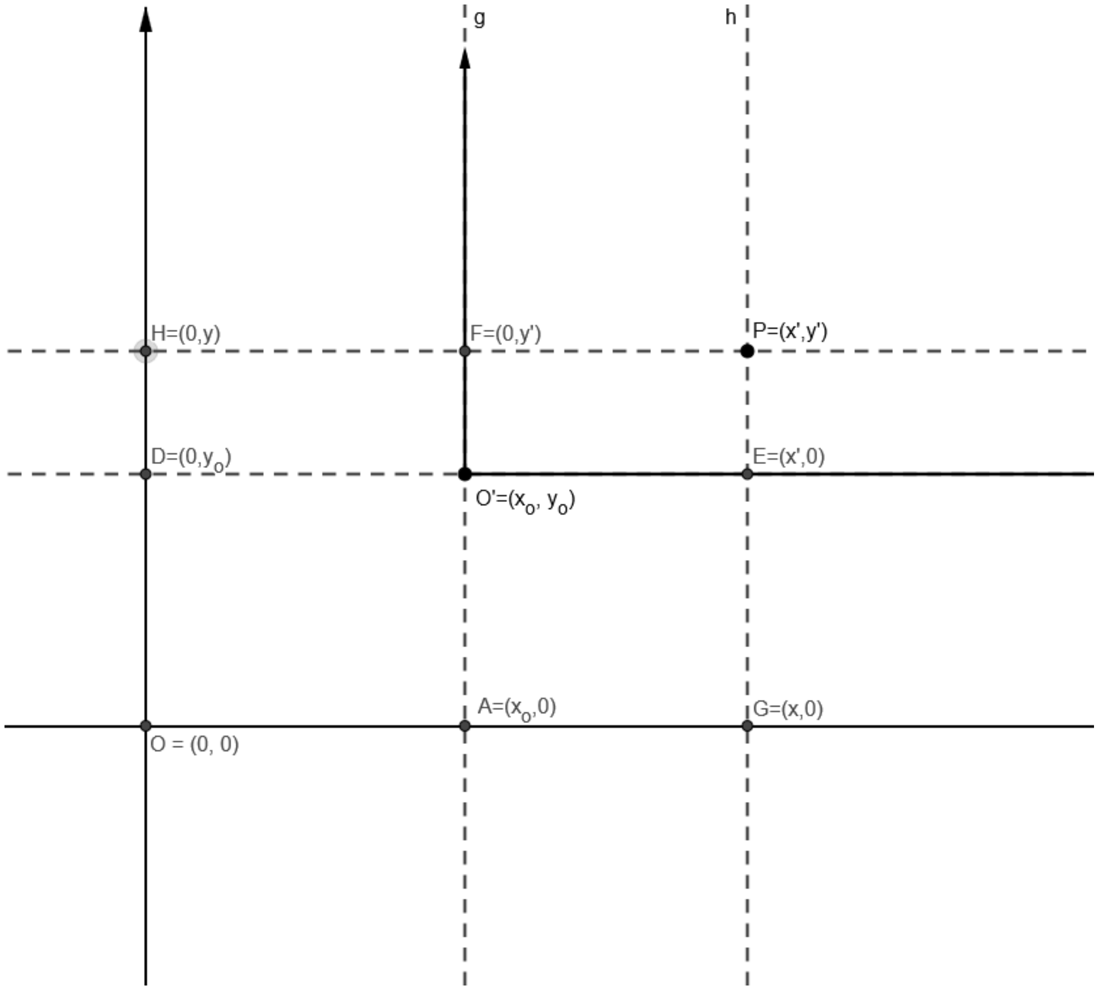

Figura 4.16: Translação de eixos coordenados. (Fonte: elaboração do autor)

Notemos que a figura é a representação geométrica do enunciado do teorema. Assim, $P = (x, y)$ são as coordenadas de P em relação aos eixos coordenados de origem $O = (0, 0)$ e $P = (x', y')$ são as coordenadas de P em relação aos eixos coordenados de origem $O' = (x_0, y_0)$.

O segmento vertical $\overline{PG}$ é congruente ao segmento vertical $\overline{HO}$ e mede y. Logo,

$$y = HO = PG = PE + EG = PE + DO = y' + y_0.$$

Portanto, $y' = y - y_0$.

De modo análogo, o segmento horizontal $\overline{PH}$ é congruente ao segmento horizontal $\overline{GO}$ e mede x. Logo,

$$x = GO = PH = PF + FH = PF + AO = x' + x_0.$$

Portanto, $x' = x - x_0$. $\square$

Atividade 25. Jogo da translação de eixos coordenados.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com atividade; caderno; régua; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: sistema de translação de eixos coordenados.

Peças do jogo:

1. Um sistema de eixos ortogonais com origem $(0, 0)$.
2. Um novo sistema de eixos ortogonais com origem no ponto O', cujas coordenadas em relação ao sistema de eixos ortogonais da Peça 1 são dadas por $O' = (2, 3)$.
3. Um ponto P, cujas coordenadas no sistema de eixos ortogonais da Peça 1 são dadas por $P = (8, 7)$.

Regras do jogo:

1. Seja $O = (0, 0)$ a origem de um sistema de eixos ortogonais. Se os eixos coordenados são transladados para uma nova origem $O' = (x_0, y_0)$ e se as coordenadas de um ponto qualquer P antes e depois da translação são, respectivamente, (x, y) e (x', y'), então as equações de transformação das antigas para as novas coordenadas são dadas por
$$\begin{cases} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0. \end{cases}$$

Jogadas a executar:

1. Aplicar a Regra 1 para calcular as coordenadas do ponto P em relação ao sistema de eixos ortogonais da Peça 2.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1: Considere a Figura 4.17, que descreve a resolução do jogo:

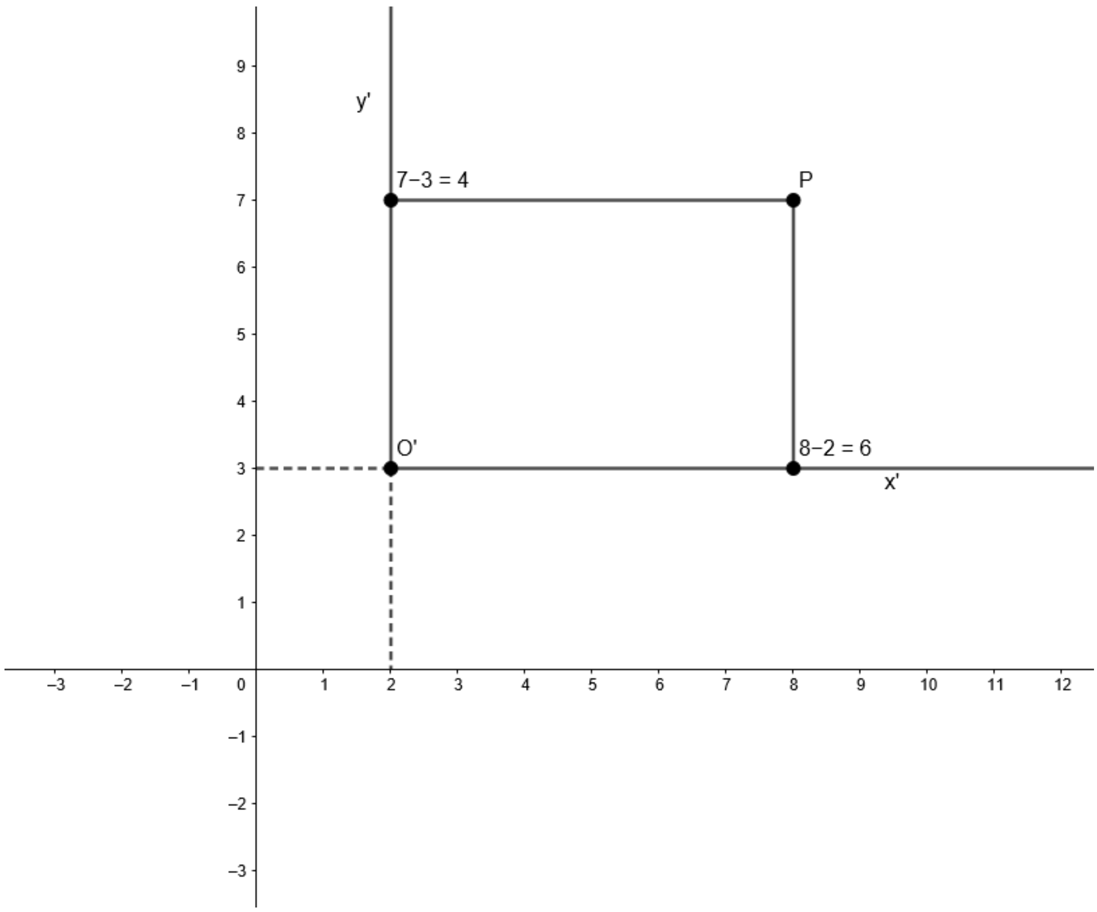

Figura 4.17: Jogo da translação de eixos coordenados. (Fonte: elaboração do autor)

De acordo com a Regra 1, temos:

$$\begin{cases} x' &= 8 - 2 \\ y' &= 7 - 3. \end{cases}$$

Logo, as coordenadas do ponto P em relação ao sistema de eixos ortogonais da Peça 2 são $(6, 4)$.

■

4.6.2 *Fórmula da distância de um ponto a uma reta*

Teorema 4.14. *Dada uma reta r através de sua equação geral $ax + by + c = 0$ e um ponto $P = (x_0, y_0)$, a distância de P a r pode ser calculada através da fórmula*

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstração. Vamos, inicialmente, calcular a distância da reta dada à origem $O = (0, 0)$ do sistema de eixos ortogonais.

Veja a Figura 4.18:

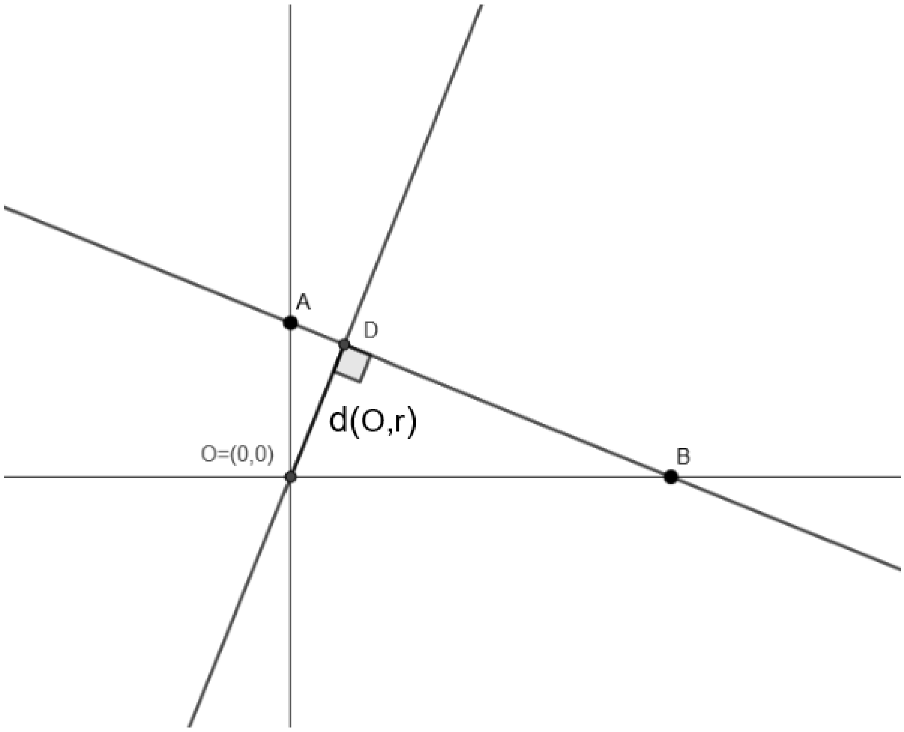

Figura 4.18: Distância da origem à reta r. (Fonte: elaboração do autor)

Essa distância nada mais é do que a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo $\triangle AOB$.

Vamos calcular as coordenadas dos pontos A e B. Fazendo $x = 0$ na equação $ax + by + c = 0$, obtemos $y = -\frac{c}{b}$. Fazendo $y = 0$, obtemos $x = -\frac{c}{a}$. Logo, $A = \left(0, -\frac{c}{b}\right)$ e $B = \left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

A hipotenusa desse triângulo mede

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{c^2(b^2+a^2)}{a^2b^2}} = \frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Como a área desse triângulo é dada por

$$\left(-\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{c}{b}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{c^2}{2ab}$$

temos que a altura desse triângulo, ou seja, a distância da origem até a reta r é dada por

$$d(O,r) = \left|2\cdot\frac{c^2}{2ab}\cdot\frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$

Vamos usar essa distância para calcular a distância de um ponto qualquer $P = (x_0, y_0)$ até a reta $ax + by + c = 0$. Para tanto, vamos colocar $P = (x_0, y_0)$ como origem do novo sistema de coordenadas e reescrever a equação da reta r nesse novo sistema:

$$ax + by + c = 0 \iff a(x' + x_0) + b(y' + y_0) + c = 0 \iff ax' + by' + (ax_0 + by_0 + c) = 0.$$

Note que essa última expressão entre parenteses é o "c" da fórmula

$$d(O,r) = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$

Logo, a distância de P a r é dada por

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

o que completa a demonstração. □

Atividade 26. Jogo da distância de ponto à reta.

Tempo previsto para a atividade: 30 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; régua; lápis; borracha; lousa e giz; calculadora (opcional).

Pré-requisitos: fórmula da distância de ponto à reta; conceito de menor distância de ponto à reta como sendo a medida do segmento de reta perpendicular que liga o ponto à reta.

Uma cidade está localizada, em relação a um sistema de eixos ortogonais, no ponto $C = (-6, -8)$. Uma estrada principal e retilínea passa pelas cidades A e B, cujas localizações são dadas por $A = (0, 7)$ e $B = (5, 0)$, tendo como unidade de medida o quilômetro. Deseja-se construir uma estrada vicinal e retilínea ligando a cidade C à estrada AB, de modo que tenha o menor tamanho possível. A partir desse texto e do teorema anterior, você deverá descrever as peças do jogo e suas regras, assim como as jogadas a executar e, no final, resolver as jogadas.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Peças do jogo:

1. Pontos $A = (0,7)$, $B = (5,0)$ e $C = (-6,-8)$.

Regras do jogo:

1. A equação segmentária da reta que passa pelos pontos $Q = (p,0)$ e $R = (0,q)$ é dada por
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$
2. A distância de um ponto $P = (x_0, y_0)$ a uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$ pode ser calculada usando-se a fórmula
$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Jogadas a executar:

1. Usando a Regra 1, obter uma equação segmentária da reta AB.
2. Transformar a equação obtida na Jogada 1 em uma equação geral da reta AB.
3. Calcular a distância do ponto C à reta obtida na Jogada 2.
4. Como trata-se de um problema prático, aproximar, com uma casa decimal, o valor obtido na jogada anterior e dar a resposta em quilômetros.

Resoluções das jogadas:

Jogada 1:
$$\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1.$$

Jogada 2:
$$7x + 5y - 35 = 0.$$

Jogada 3:
$$d(C, AB) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|7 \cdot (-6) + 5 \cdot (-8) - 35|}{\sqrt{7^2 + 5^2}} = \frac{|-42 - 40 - 35|}{\sqrt{49 + 25}} = \frac{117}{\sqrt{74}}.$$

Jogada 4:

$$\frac{117}{\sqrt{74}} \approx \frac{117}{8,6} \approx 13,6 \text{ km}.$$

■

4.6.3 *Cálculo da área de um triângulo sendo conhecidos seus vértices*

Teorema 4.15. *A área de um triângulo cujos vértices são $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ é dada por*

$$A = \frac{|D|}{2}$$

em que

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração. Vamos escolher o lado $\overline{AB}$ do triângulo $\triangle ABC$ para ser a base. Assim, a altura será a distância entre o vértice C e a reta suporte do lado $\overline{AB}$, que chamaremos de r, e a área será dada por

$$\frac{1}{2} \cdot d(C, r) \cdot AB.$$

Vamos calcular AB, isto é, o comprimento a base do triângulo:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Agora, vamos obter uma equação geral da reta r usando a fórmula já vista do determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por fim, vamos calcular a altura do triângulo utilizando a fórmula da distância de um ponto a uma reta cuja equação geral conhecemos:

$$d(C, r) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

Assim, temos que a área do triângulo $\triangle ABC$ é igual a

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\left|\begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \cdot \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{\left|\begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}\right|}{2} = \frac{|D|}{2}.$$

□

Atividade 27. Jogo do cálculo da área de um triângulo.

Tempo previsto para a atividade: 10 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; régua; lápis; borracha; lousa e giz; calculadora (opcional).

Pré-requisitos: área do triângulo através do determinante; cálculo de um determinante 3×3.

Peças do jogo:

1. Um sistema de eixos ortogonais.
2. Um triângulo cujos vértices têm coordenadas $A = (5, 9)$, $B = (-3, 6)$ e $C = (-8, -7)$.

Regras do jogo:

1. A área de um triângulo de vértices $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ pode ser calculada usando-se a fórmula
$$A = \frac{|D|}{2}$$
em que
$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Jogadas a executar:

1. Calcular a área do triângulo definido como Peça 2.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1.

Usando a Regra 1, temos:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 9 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ -8 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 89.$$

$$A = \frac{|89|}{2} = 44,5$$

■

4.7 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

Elencamos, aqui, as competências e habilidades previstas na BNCC que foram trabalhadas neste capítulo.

Competências:

- (CEF2) Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- (CEF3) Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- (CEF6) Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
- (CEM3) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- (CEM4) Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
- (CEM5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- (EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
- (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
- (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
- (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
- (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
- (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

- (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
- (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
- Habilidade específica, não prevista explicitamente: localizar um ponto no plano cartesianos ortogonal, seja através de régua e compasso, seja através de meio tecnológico.
- (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representa-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
- Habilidade específica, não prevista explicitamente: aplicar uma fórmula deduzida para resolver problema matemático.
- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

5

APROFUNDANDO O ESTUDO DAS CIRCUNFERÊNCIAS

Neste capítulo, iremos estabelecer importantes semelhanças de famílias e descobrir coisas novas. Iniciaremos com alguns problemas clássicos, como o cálculo das equações das retas tangentes a uma circunferência passando por um ponto dado e o cálculo do tamanho de uma corda determinada pela intersecção de uma reta com uma circunferência. Continuando nossa jornada pelos clássicos, vamos obter uma equação da circunferência que passa por três pontos não colineares do plano. Para encerrar, vamos usar determinantes para calcular essa última equação. Na demonstração do uso do determinante, visualizamos um subproduto geométrico que está enunciado, demonstrado e ilustrado com o uso do GeoGebra no Corolário 5.2.[1]

5.1 ALGUNS PROBLEMAS CLÁSSICOS

Alguns problemas envolvendo circunferências são recorrentes em provas de vestibulares, sendo referidos na literatura sobre o assunto como "problemas clássicos". Partindo de suas essências, os vestibulares criam novos problema, sejam exercícios puros (sem aplicação no mundo real), sejam de aplicação. Por isso, resolvemos destacá-los em um item próprio.

Atividade 28. Jogo das retas tangentes a uma circunferência passando por um ponto dado.

Tempo previsto para a atividade: 30 minutos.

1 Sugerimos que o leitor interessado em aprofundar no assunto deste capítulo consulte [10] e [13].

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; régua; compasso; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: equação reduzida da circunferência; fórmula da distância de ponto à reta; equação fundamental da reta.

Peças do jogo:

1. A circunferência $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 9$.
2. O ponto $P = (8, 9)$.

Regras do jogo:

1. A equação da família das retas não verticais que passam pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ é
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
para $m \in \mathbb{R}$.
2. Uma reta tangente a uma circunferência em um ponto é perpendicular ao raio nesse ponto.
3. A distância de um ponto $C = (x_C, y_C)$ a uma reta t de equação geral $ax + by + c = 0$ é dada por
$$d(C, t) = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Jogadas a executar:

1. Determinar uma equação geral da família das retas não verticais que passam pelo ponto $P = (8, 9)$ em função da declividade m.
2. Determinar o centro e o raio da circunferência dada na Peça 1.
3. Calcular m para que a reta seja tangente à circunferência (ou seja, para que a distância do centro C da circunferência até a reta t seja igual ao raio).
4. Escrever as equações das duas retas t.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Vamos inicialmente fazer um esboço da situação: (Figura: 5.1)

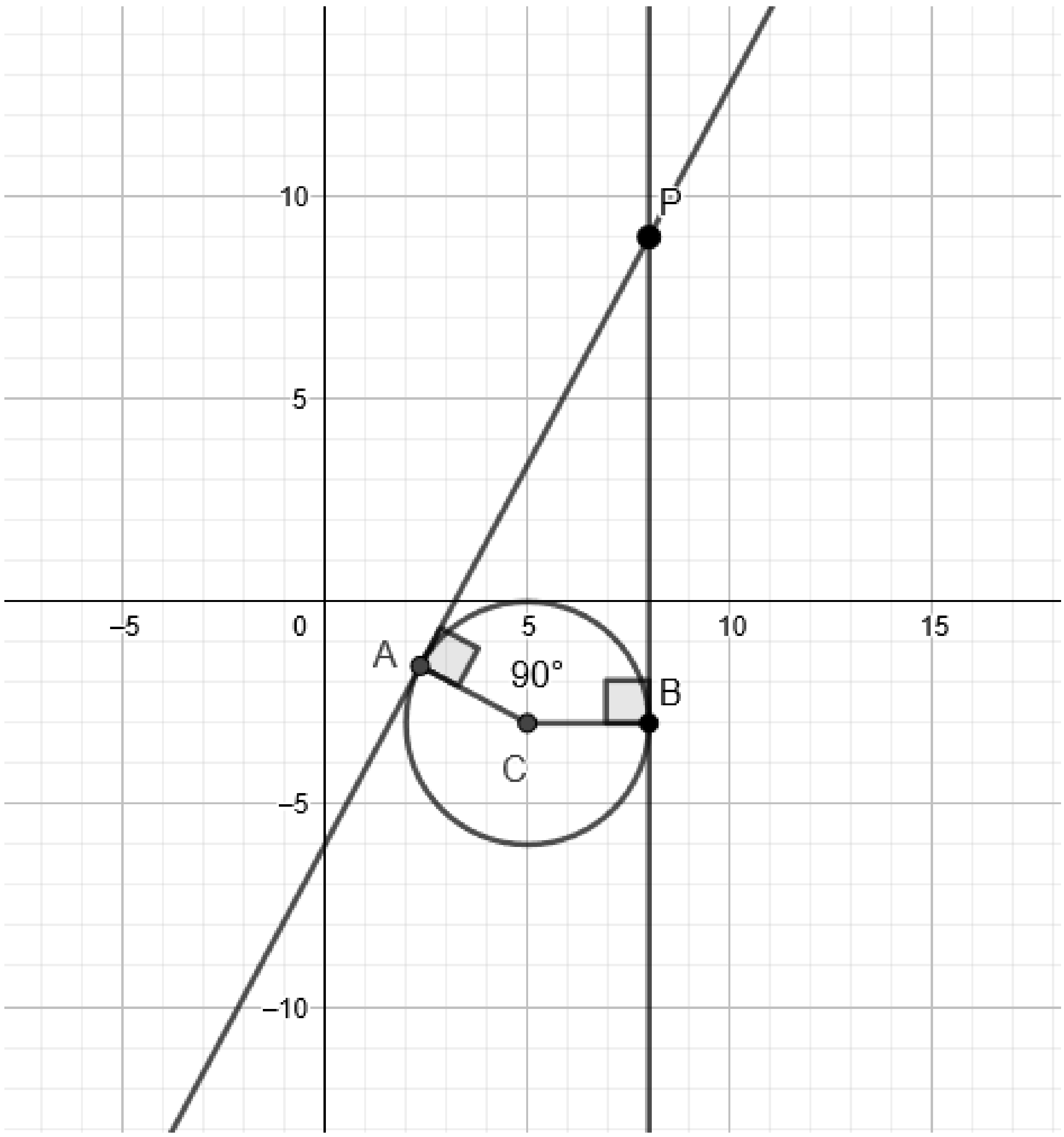

Figura 5.1: Retas passando pelo ponto P tangentes à circunferência. (Fonte: elaboração do autor)

Jogada 1:

Pela Regra 1, temos que a equação fundamental da família das retas que passam pelo ponto $P = (8, 9)$ é $y - 9 = m(x - 8)$. Como

$$y - 9 = m(x - 8) \iff y - 9 = mx - 8m \iff -mx + y + 8m - 9 = 0$$

segue que

$$-mx + y + 8m - 9 = 0$$

é uma equação geral da família das retas que passam pelo ponto $P = (8, 9)$.

Jogada 2:

A equação reduzida da circunferência é

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 9.$$

Logo, seu centro é $C = (5, -3)$ e seu raio é $r = \sqrt{9} = 3$.

Jogada 3:

Usando a Regra 3 aplicada à equação obtida na Jogada 1, temos que

$$d(C, t) = \frac{|-5m - 3 + 8m - 9|}{\sqrt{(-m)^2 + 1^2}} = 3.$$

Como

$$\begin{aligned}
\tfrac{|-5m-3+8m-9|}{\sqrt{(-m)^2+1^2}} = 3 \quad &\iff \quad |3m - 12| = 3\sqrt{m^2+1} \\
&\iff \quad (3m-12)^2 = (3\sqrt{m^2+1})^2 \\
&\iff \quad 9m^2 - 72m + 144 = 9(m^2+1) \\
&\iff \quad -72m = -136 \\
&\iff \quad m = \tfrac{17}{9}
\end{aligned}$$

temos que

$$-\frac{17}{9}x + y + \frac{136}{9} - 9 = 0$$

ou seja

$$-17x + 9y + 55 = 0$$

é uma das equações.

Para obter a outra reta, considere que, como o centro da circunferência tem abscissa 5 e seu raio é 3, o ponto mais distante do centro sobre a reta horizontal que passa por ele tem abscissa $5 + 3 = 8$, ou seja, a mesma abscissa do ponto P. Logo, essa outra reta é vertical, não tem declividade e possui equação geral $x = 8$.

■

Vamos, agora, propor um jogo diferente. Partindo de um enunciado que vai indicar onde queremos chegar, vamos elaborar junto com os alunos as peças, as regras e as jogadas. Lembremos que os alunos apresentam uma séria dificuldade em entender enunciados e, não raramente, se expressam dizendo "não sei o que fazer".

Atividade 29. Jogo da corda de uma circunferência.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; régua; compasso; caderno; lápis; lousa e giz.

Pré-requisitos: equação fundamental da reta; equação do eixo y; corda de uma circunferência; resolução de sistema de 2º grau; resolução de equação de 2º grau; distância entre dois pontos.

Considere o seguinte enunciado: Obtenha a equação de uma reta que passe pela origem e determine na circunferência $\lambda : (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ uma corda de comprimento $l = \frac{12\sqrt{85}}{17}$.[2]

Quais seriam as peças de nosso jogo?

1. Um sistema de eixos ortogonais.
2. A circunferência λ de equação $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.
3. A corda de comprimento $l = \frac{12\sqrt{85}}{17}$.
4. A reta que passa pela origem e corta a circunferência em dois pontos.

Quais seriam as regras do jogo?

1. A equação fundamental de uma reta não vertical que passa pela origem é dada por $y = mx$, em que m é a sua declividade.
2. A reta vertical que passa pela origem é o eixo y. Como um ponto está sobre o eixo y se, e somente se, tem abscissa igual a 0, a equação do eixo y é $x = 0$.
3. A definição de corda — a saber, o segmento de reta determinado pelos dois pontos de intersecção da reta com a circunferência.
4. Para determinar, algebricamente, a intersecção de uma reta com uma circunferência, resolvemos o sistema composto pelas suas equações.

Quais seriam as jogadas (isto é, quais passos iremos seguir para chegar à solução)?

1. Escrever a equação fundamental da família de retas que passam pela origem.
2. Resolver o sistema formado pelas equações da reta e da circunferência, determinando os dois pontos de intersecção.
3. Fazer com que a distância entre esses dois pontos seja a dada na Peça 3.

2 Exercício 322 de [10].

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

A equação fundamental da família de retas não verticais que passam pela origem é $y = mx$, para $m \in \mathbb{R}$. Já a reta vertical que passa pela origem tem equação $x = 0$.

Jogada 2:

Notemos, inicialmente, que a reta de equação $x = 0$ intersecta a circunferência λ em um único ponto — a saber, $(0, 5)$ — e, portanto, não determina uma corda em λ.

O sistema a se considerar é

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-5)^2 & = & 25 \\ y & = & mx. \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos

$$(x-5)^2 + (mx-5)^2 = 25$$

que pode ser reescrita como

$$x^2 - 10x + 25 + m^2x^2 - 10mx + 25 = 25$$

e, ainda, como

$$(m^2+1)x^2 - 10(m+1)x + 25 = 0.$$

Calculando o discriminante, chegamos a

$$\Delta = 100(m+1)^2 - 4 \cdot 25(m^2+1) = 100m^2 + 200m + 100 - 100m^2 - 100 = 200m.$$

Logo,

$$x = \frac{10(m+1) \pm \sqrt{200m}}{2(m^2+1)} = \frac{5(m+1) \pm 5\sqrt{2m}}{m^2+1}.$$

Assim, os pontos A e B dados abaixo pertencem à intersecção da reta $y = mx$ com a circunferência λ:

$$A = \left(\frac{5(m+1) + 5\sqrt{2m}}{m^2+1}, \frac{5m(m+1) + 5m\sqrt{2m}}{m^2+1} \right)$$

$$B = \left(\frac{5(m+1) - 5\sqrt{2m}}{m^2+1}, \frac{5m(m+1) - 5m\sqrt{2m}}{m^2+1} \right)$$

Jogada 3:

Queremos que $d(A, B) = \frac{12\sqrt{85}}{17}$.

Temos que

$$
\begin{aligned}
d(A,B)=\tfrac{12\sqrt{85}}{17} \quad &\Longleftrightarrow \quad d^2(A,B)=\tfrac{144\cdot 85}{17\cdot 17}\\
&\Longleftrightarrow \quad (x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=\tfrac{144\cdot 85}{17\cdot 17}\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\tfrac{10\sqrt{2m}}{m^2+1}\right)^2+\left(\tfrac{10m\sqrt{2m}}{m^2+1}\right)^2=\tfrac{144\cdot 5}{17}\\
&\Longleftrightarrow \quad \tfrac{200m}{(m^2+1)^2}+\tfrac{200m^3}{(m^2+1)^2}=\tfrac{144\cdot 5}{17}\\
&\Longleftrightarrow \quad \tfrac{200m(m^2+1)}{(m^2+1)^2}=\tfrac{144\cdot 5}{17}\\
&\Longleftrightarrow \quad \tfrac{200m}{m^2+1}=\tfrac{720}{17}\\
&\Longleftrightarrow \quad 3400m=720(m^2+1)\\
&\Longleftrightarrow \quad 85m=18m^2+18\\
&\Longleftrightarrow \quad 18m^2-85m+18=0.
\end{aligned}
$$

Calculando o discriminante, chegamos a

$$\Delta = 7225 - 1296 = 5929.$$

Logo,

$$m=\frac{85\pm 77}{36}$$

ou seja

$$m=\frac{162}{36}=\frac{9}{2} \quad \text{ou} \quad m=\frac{85-77}{36}=\frac{2}{9}.$$

Assim, as equações das retas procuradas são $y=\frac{9}{2}x$ e $y=\frac{2}{9}x$.

■

A próxima atividade tem por finalidade desenvolver um raciocínio que, através das semelhanças de família, será transferido para a demonstração de que três pontos não colineares determinam uma única circunferência.

Atividade 30. Jogo da circunferência por três pontos não colineares.

Tempo previsto para a atividade: 30 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; régua e compasso; caderno; lápis; lousa e giz.

Pré-requisitos: distância entre dois pontos; circuncentro de um triângulo; mediatrizes de um triângulo; regra de Cramer para resolução de sistema linear; equação reduzida da circunferência.

Peças do jogo:

1. Um sistema de eixos ortogonais.
2. Três pontos não colineares $A = (2, 3)$, $B = (-3, 4)$ e $C = (4, -2)$.

Regras do jogo:

1. Três pontos não colineares determinam um triângulo.
2. A mediatriz de um segmento de reta é o lugar geométrico do plano que são equidistantes dos extremos do segmento.
3. A distância entre dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pode ser calculada pela fórmula
$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$
4. As três mediatrizes de um triângulo se cruzam no mesmo ponto, que se chama *circuncentro*.
5. O circuncentro é o centro da circunferência que passa pelos vértices do triângulo.
6. Um ponto fica determinado pelo cruzamento de duas retas concorrentes.
7. A equação reduzida de uma circunferência é dada por
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
em que (a, b) são as coordenadas do centro e r é o raio.

Jogadas a executar:

1. Localizar, no sistema de eixos ortogonais, os três pontos dados e ligá-los por meio de segmentos de reta, formando um triângulo.
2. Escolher dois lados desse triângulo e determinar a mediatriz de cada um.
3. Determinar o ponto de intersecção dessas duas mediatrizes.
4. Justificar por que esse ponto é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
5. Calcular o raio dessa circunferência, ou seja, a distância do centro a qualquer um dos três vértices do triângulo.
6. Determinar a equação reduzida dessa circunferência.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1: (Figura: 5.2)

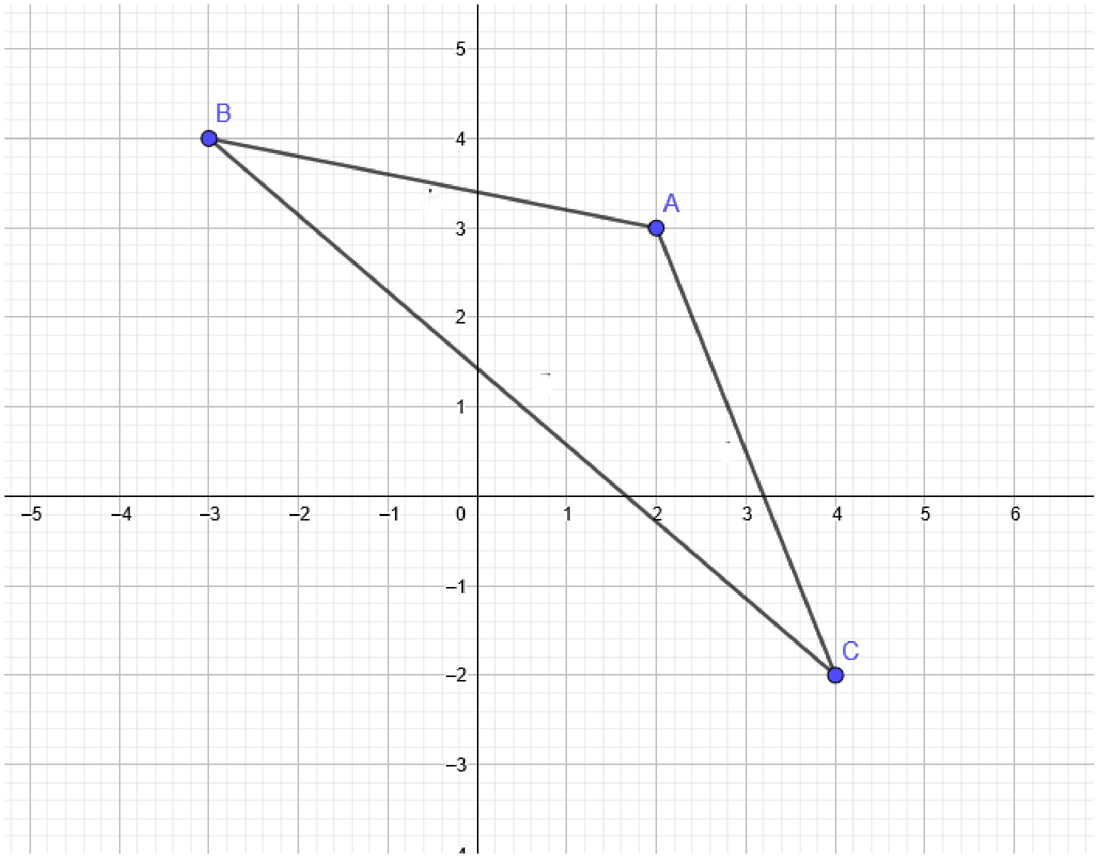

Figura 5.2: Triângulo formado pelos pontos dados. (Fonte: elaboração do autor)

Jogada 2:

Vamos escolher os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e determinar suas mediatrizes.

Iniciemos pelo lado $\overline{AB}$.

Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico desse lugar geométrico. Pelas Regras 2 e 3, temos que $d(P, A) = d(P, B)$, isto é,

$$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
d(P, A) = d(P, B) &\iff \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} \\
&\iff (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+3)^2 + (y-4)^2 \\
&\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \\
&\iff -4x - 6y + 13 = 6x - 8y + 25 \\
&\iff -10x + 2y - 12 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, uma equação geral da mediatriz do lado $\overline{AB}$ é $-5x + y - 6 = 0$.

De modo análogo determinamos que a mediatriz do lado $\overline{AC}$ é a reta que possui equação geral $4x - 10y - 7 = 0$.

Jogada 3:

Para calcular o ponto de intersecção das duas mediatrizes devemos resolver o sistema formado por suas equações. É uma boa hora para, usando semelhanças de família, revisar a resolução através de determinantes, conhecida no Ensino Médio pelo nome de *teorema de Cramer*.

Assim, temos:

$$\begin{cases} -5x + y - 6 & = & 0 \\ 4x - 10y - 7 & = & 0. \end{cases}$$

Para usar o teorema de Cramer, vamos inicialmente escrever o sistema acima na sua forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Chama-se *matriz principal* do sistema à primeira matriz desta última equação, de *matriz das variáveis* à segunda e de *matriz dos termos independentes* à terceira.

Vamos nomear a matriz principal de A, a das variáveis de X e a dos termos independentes de B, obtendo

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Assim, nosso sistema pode ser escrito como

$$A \cdot X = B.$$

Pelo teorema de Cramer, o valor de x na solução do sistema será dado pela fração cujo numerador é o determinante da matriz obtida pela substituição da primeira coluna da matriz principal pela coluna da matriz dos termos independentes. Assim,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}} = \frac{(-60 - 7)}{50 - 4} = -\frac{67}{46}.$$

De modo análogo, o valor de y na solução do sistema será dado pela fração cujo numerador é o determinante da matriz obtida pela substituição da segunda coluna da matriz principal pela coluna da matriz dos termos independentes. Assim,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}} = \frac{(-35-24)}{50-4} = -\frac{59}{46}.$$

Logo, o ponto de intersecção dessas duas mediatrizes é

$$J = \left(-\frac{67}{46}, -\frac{59}{46}\right).$$

Jogada 4:

Esse ponto é, de fato, o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B e C, pois, de um lado, por pertencer à mediatriz do segmento $\overline{AB}$, é equidistante aos pontos A e B e, de outro lado, por pertencer a mediatriz do segmento $\overline{AC}$, é equidistante aos pontos A e C. Logo, ele é equidistante desses três pontos.

Jogada 5:

O raio r pode ser calculado, por exemplo, como

$$r = \sqrt{(x_A - x_J)^2 + (y_A - y_J)^2}.$$

Logo,

$$r = \sqrt{\left(2+\frac{67}{46}\right)^2 + \left(3+\frac{59}{46}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{159}{46}\right)^2 + \left(\frac{197}{46}\right)^2} = \frac{1}{46}\cdot\sqrt{64090} = \frac{\sqrt{64090}}{46}.$$

Jogada 6:

A equação reduzida dessa circunferência é dada por

$$\left(x+\frac{67}{46}\right)^2 + \left(y+\frac{59}{46}\right)^2 = \frac{64090}{2116}.$$

Ao final teremos o seguinte desenho, que ilustra as jogadas feitas: (Figura: 5.3)

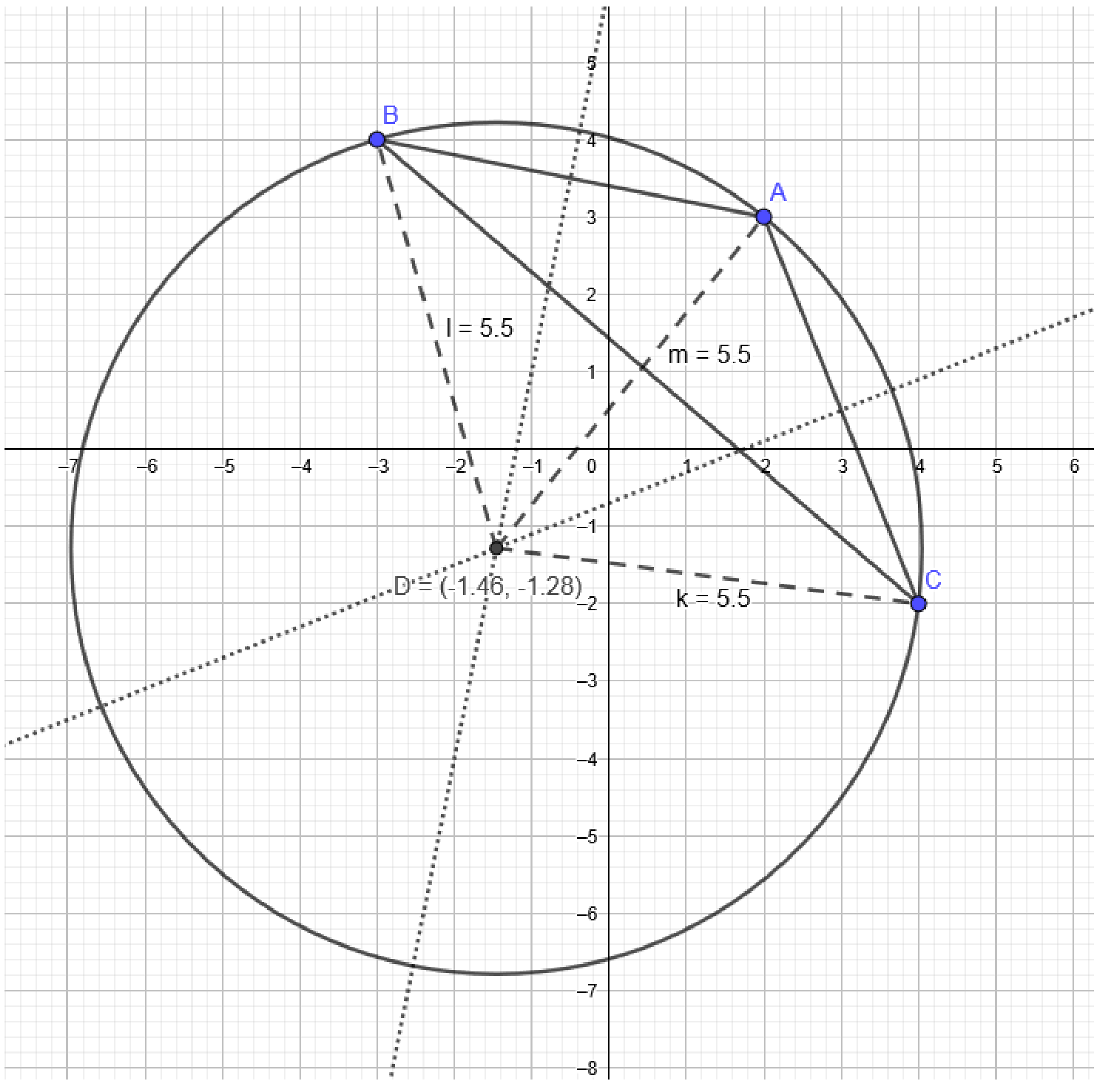

Figura 5.3: Circunferência por três pontos não colineares. (Fonte: elaboração do autor)

■

5.2 USANDO DETERMINANTES PARA OBTER UMA EQUAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA QUE PASSA POR TRÊS PONTOS NÃO COLINEARES

Podemos estabelecer uma interessante semelhança de família com a Álgebra Linear, mais especificamente com sistemas lineares e determinantes:

Proposição 5.1. *Se $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ são pontos não colineares do plano, então uma equação para a circunferência que passa por esses três pontos é dada por*

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Temos que encontrar D, E e F de modo que

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

seja a equação da circunferência que passa especificamente por P_1, P_2 e P_3. Note que D, E e F estão univocamente determinados, pois o centro é $\left(\frac{D}{2}, \frac{E}{2}\right)$ e o raio é $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F$.

Temos que

$$\begin{cases} (x_1^2+y_1^2) & + & Dx_1 & + & Ey_1 & + & F & = & 0 \\ (x_2^2+y_2^2) & + & Dx_2 & + & Ey_2 & + & F & = & 0 \\ (x_2^2+y_2^2) & + & Dx_3 & + & Ey_3 & + & F & = & 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_1^2+y_1^2) \\ -(x_2^2+y_2^2) \\ -(x_3^2+y_3^2) \end{pmatrix}.$$

Note que o determinante da matriz principal do sistema acima é diferente de zero, pois P_1, P_2 e P_3 não são colineares. Vamos calculá-lo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2). \end{aligned}$$

Pelo teorema de Cramer,

$$D = \frac{\begin{vmatrix} -(x_1^2+y_1^2) & y_1 & 1 \\ -(x_2^2+y_2^2) & y_2 & 1 \\ -(x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{(x_1^2+y_1^2)(y_2-y_3)+(x_2^2+y_2^2)(y_2-y_1)+(x_3^2+y_3^2)(y_1-y_2)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}.$$

Analogamente,

$$E = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -(x_1^2+y_1^2) & 1 \\ x_2 & -(x_2^2+y_2^2) & 1 \\ x_3 & -(x_3^2+y_3^2) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(x_1^2+y_1^2)(x_2-x_3)+(x_2^2+y_2^2)(x_3-x_1)+(x_3^2+y_3^2)(x_1-x_2)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}.$$

Por fim,

$$F = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -(x_1^2+y_1^2) \\ x_2 & y_2 & -(x_2^2+y_2^2) \\ x_3 & y_3 & -(x_3^2+y_3^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-(x_1^2+y_1^2)(x_2y_3-x_3y_2)+(x_2^2+y_2^2)(x_1y_3-x_3y_1)-(x_3^2+y_3^2)(x_1y_2-x_2y_1)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}$$

Substituindo D, E e F na equação, obtemos

$$\begin{aligned} x^2+y^2 \quad & - \quad \frac{(x_1^2+y_1^2)(y_2-y_3)+(x_2^2+y_2^2)(y_2-y_1)+(x_3^2+y_3^2)(y_1-y_2)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)} \cdot x \\ & + \quad \frac{(x_1^2+y_1^2)(x_2-x_3)+(x_2^2+y_2^2)(x_3-x_1)+(x_3^2+y_3^2)(x_1-x_2)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)} \cdot y \\ & + \quad \frac{-(x_1^2+y_1^2)(x_2y_3-x_3y_2)+(x_2^2+y_2^2)(x_1y_3-x_3y_1)-(x_3^2+y_3^2)(x_1y_2-x_2y_1)}{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)} \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$
\begin{array}{lcl}
(x^2+y^2)\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right] & - & \\
\left[(x_2^2+y_1^2)(y_2-y_3)+(x_2^2+y_2^2)(y_3-y_1)+(x_3^2+y_3^2)(y_1-y_2)\right]\cdot x & + & \\
\left[(x_1^2+y_1^2)(x_2-x_3)+(x_2^2+x_2^2)(x_3-x_1)+(x_3^2+y_3^2)(x_1-x_2)\right]\cdot y & + & \\
-(x_1^2+y_1^2)(x_2y_3-x_3y_2)+(x_2^2+y_2^2)(x_1y_3-x_3y_1)-(x_3^2+y_3^2)(x_1y_2-x_2y_1) & = & 0.
\end{array}
$$

Reordenando os termos:

$$
\begin{array}{lcl}
(x^2+y^2)[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] & - & \\
(x_1^2+y_1^2)[x(y_2-y_3)-(x_2-x_3)y+(x_2y_3-x_3y_2)] & + & \\
(x_2^2+y_2^2)[-(y_3-y_1)x+(x_3-x_1)y+(x_1y_3-x_3y_1)] & - & \\
(x_3^2+y_3^2)[(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-x_2y_1)] & = & 0.
\end{array}
$$

Melhorando a escrita mais uma vez:

$$
\begin{array}{lcl}
(x^2+y^2)[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] & - & \\
(x_1^2+y_1^2)[x_2(y_3-y)+x_3(y-y_2)+x(y_2-y_3)] & + & \\
(x_2^2+y_2^2)[x_3(y-y_1)+x(y_1-y_3)+x_1(y_3-y)] & - & \\
(x_3^2+y_3^2)[x(y_1-y_2)+x_1(y_2-y)+x_2(y-y_1) & = & 0.
\end{array}
$$

Contudo, essa última equação pode ser reescrita como

$$
\begin{vmatrix}
x^2+y^2 & x & y & 1 \\
x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\
x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\
x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1
\end{vmatrix} = 0.
$$

De fato, basta pensar no desenvolvimento de Laplace pela 1ª coluna. □

A Proposição 5.1 nos dá um interessante corolário:

Corolário 5.2. *Sejam A, B, C e D pontos sobre uma circunferência posicionados de modo que ao percorrermos essa circunferência no sentido anti-horário partindo do ponto A, passamos primeiro por B, depois por C e, por último, por D. Se O é um quinto ponto do plano, então*

$$OA^2 \cdot \textit{Área}(\Delta BCD) + OC^2 \cdot \textit{Área}(\Delta ABD) = OB^2 \cdot \textit{Área}(\Delta ACD) + OD^2 \cdot \textit{Área}(\Delta ABC).$$

Demonstração. Basta tomar um sistema de eixos ortogonais com origem O e considerar $A = (x, y)$, $B = (x_1, y_1)$, $C = (x_2, y_2)$ e $D = (x_3, y_3)$.

Já provamos que

$$\begin{aligned}
&(x^2 + y^2)[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\
&-(x_1^2 + y_1^2)[x_2(y_3 - y) + x_3(y - y_2) + x(y_2 - y_3)] \\
&+(x_2^2 + y_2^2)[x_3(y - y_1) + x(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y)] \\
&-(x_3^2 + y_3^2)[x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1) = 0.
\end{aligned}$$

Note que $x^2 + y^2 = OA^2$ e que

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \text{Área}(\Delta BCD) \cdot 2.$$

Analogamente para as outras três equações. Disso, segue a tese. □

Para uma bela ilustração do Corolário 5.2, siga o link para a página da professora Ana Carolina Boero no GeoGebra: `https://www.geogebra.org/m/xant6b55`.

Vamos, então, jogar o jogo do determinante.

Atividade 31. Jogo do determinante para obter uma equação da circunferência por três pontos não colineares.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; régua; compasso; caderno; lápis; borracha; lousa e giz.

Pré-requisitos: cálculo de um determinante 4×4 pelo desenvolvimento de Laplace.

Peças do jogo:

1. Um sistema de eixos ortogonais.
2. Três pontos não colineares $A = (8, 5)$, $B = (6, 7)$ e $C = (4, 5)$.

Regras do jogo:

1. A equação de uma circunferência por três pontos não colineares pode ser dada pelo determinante
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
2. Esse determinante pode ser calculado usando-se o teorema de Laplace sobre a coluna 4.
3. De acordo com o teorema de Laplace, o valor de um determinante é igual à soma dos elementos de uma fila (linha ou coluna) da matriz correspondente previamente multiplicados pelos seus respectivos cofatores.
4. O cofator de um elemento qualquer, da i-ésima linha e j-ésima coluna, de uma matriz quadrada é igual ao produto do valor do determinante da matriz que se obtém ao eliminar-se a i-ésima linha e j-ésima coluna dessa matriz por $(-1)^{i+j}$.

Jogadas a executar:

1. Substituir as abscissas dos pontos A, B e C nas respectivas variáveis, x_1, x_2 e x_3, assim como as ordenadas nas respectivas variáveis, y_1, y_2 e y_3, do determinante da Regra 1.
2. Calcular o determinante obtido na jogada anterior usando o teorema de Laplace como descrito nas Regras 2, 3 e 4.
3. Apresentar a equação obtida como sendo a equação da circunferência pelos três pontos dados.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 8^2+5^2 & 8 & 5 & 1 \\ 6^2+7^2 & 6 & 7 & 1 \\ 4^2+5^2 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jogada 2:

Aplicando o teorema de Laplace sobre a coluna 4, temos que

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 89 & 8 & 5 & 1 \\ 85 & 6 & 7 & 1 \\ 41 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

é igual a

$$-\begin{vmatrix} 89 & 8 & 5 \\ 85 & 6 & 7 \\ 41 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ 85 & 6 & 7 \\ 41 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ 89 & 8 & 5 \\ 41 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ 89 & 8 & 5 \\ 85 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Resolvendo cada determinante, obtemos

$$8x^2 + 8y^2 - 96x - 80y + 456 = 0$$

ou seja

$$x^2 + y^2 - 12x - 10y + 57 = 0.$$

Por fim, completando quadrados, chegamos a

$$(x-6)^2 + (y-5)^2 = 4.$$

■

5.3 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

Elencamos, aqui, as competências e habilidades previstas na BNCC que foram trabalhadas neste capítulo.

Competências:

- (CEF2) Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
- (CEF3) Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- (CEF6) Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
- (CEM3) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
- (CEM4) Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
- (CEM5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

- (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
- Habilidade específica, não prevista explicitamente: aplicar uma fórmula deduzida para resolver problema matemático.
- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.[3]
- (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
- Habilidade específica, não prevista explicitamente: aplicar a álgebra linear, mais particularmente, determinantes, na resolução de problemas de geometria analítica, de modo a fazer a álgebra dialogar com a geometria.

3 Nesta habilidade, acrescento: e com o uso de fórmula, e utilizar esse conhecimento para calcular a equação de uma circunferência.

6

UMA BREVE VISITA ÀS CÔNICAS

Vamos encerrar nossa caminhada fazendo uma breve visita às cônicas, cujas origens remontam à Grécia Antiga, onde eram estudadas como secções de um cone circular reto por um plano. Como, neste trabalho, elas serão apresentadas diretamente como curvas planas definidas por propriedades que as caracterizam como lugares geométricos, indicamos ao leitor interessado que consulte [13] para compreender como as definições que adotaremos advêm da concepção original de secção cônica.[1]

Definição 6.1. Sejam d uma reta, F um ponto não situado sobre a reta d e $e > 0$ um número real. O lugar geométrico dos pontos P do plano tais que a razão entre a distância de P a F e a distância de P a d é igual à constante e, isto é, tais que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = e,$$

é chamado de *cônica*. A reta d é chamada de *diretriz*, o ponto F é chamado de *foco* e a constante positiva e é chamada de *excentricidade* dessa cônica.

E mais especificamente:

- se $e = 1$, a cônica é denominada *parábola*;
- se $e < 1$, a cônica é denominada *elipse*;
- se $e > 1$, a cônica é denominada *hipérbole*.

1 Sugerimos que o leitor interessado em aprofundar no assunto deste capítulo consulte [10] e [13], além da seguinte animação do GeoGebra, produzida pela professora Ana Carolina Boero: `https://www.geogebra.org/m/vxa22j7g`.

Nas próximas seções, faremos um breve estudo da parábola, elipse e hipérbole.

6.1 ESTUDO DA PARÁBOLA

De acordo com a Definição 6.1, uma parábola é definida da seguinte maneira:

Definição 6.2. Dados, em um plano, uma reta (denomimada *diretriz*) e um ponto fora dela (denominado *foco*), chamamos de *parábola* ao lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes da reta e do ponto dados.

A seguinte nomenclatura é utilizada com frequência: (Figura:6.1)

- A reta perpendicular à diretriz passando pelo foco é o *eixo* da parábola.
- A intersecção entre o eixo e a parábola é seu *vértice*.
- A distância do foco da parábola à reta diretriz é o *parâmetro* da parábola.

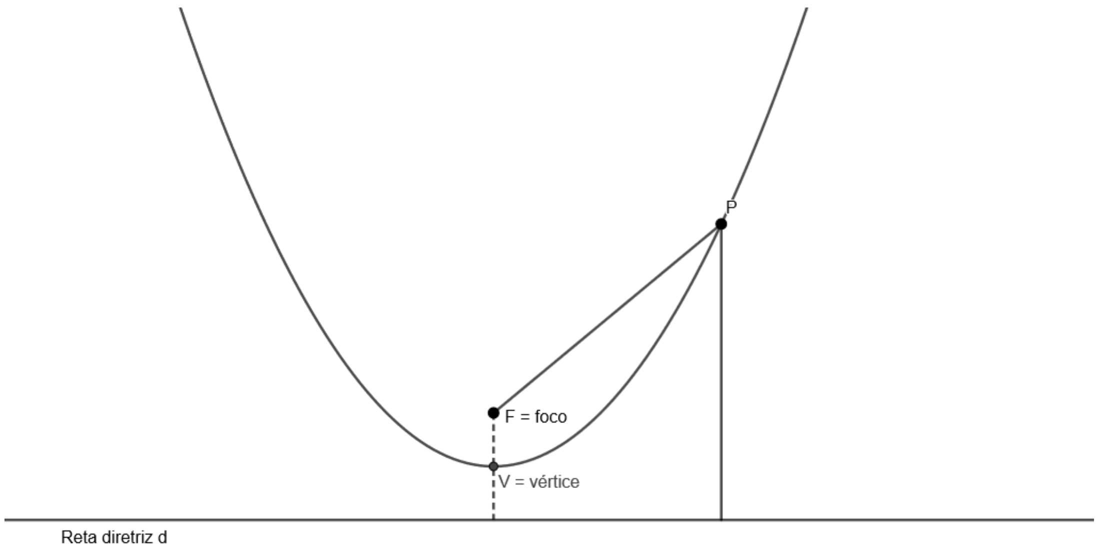

Figura 6.1: Distância do ponto P ao foco F é igual à distância de P à diretriz d. (Fonte: elaboração do autor)

Propomos, a seguir, um jogo cuja finalidade é desenvolver a habilidade de obter uma equação da parábola partindo de sua definição como lugar geométrico. Assim, os alunos terão uma maior facilidade para acompanhar a dedução da equação canônica da parábola que será feita em seguida.

Atividade 32. Jogo de encontrar uma equação da parábola usando a definição.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; régua; lousa e giz.

Pré-requisitos: fórmula da distância entre dois pontos; fórmula da distância entre ponto e reta.

Peças do jogo:

1. Um sistema de eixos ortogonais.
2. Uma reta horizontal d cuja equação é $y = -3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. O ponto $F = (2, 4)$.
4. Um ponto genérico $P = (x, y)$ pertencente ao lugar geométrico.

Regras do jogo:

1. Dados, em um plano, uma reta d e um ponto F fora dela, o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de d e de F é chamado de parábola.
2. A distância entre dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ do plano pode ser calculada através da seguinte fórmula:
$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$
3. A distância de um ponto $C = (x_C, y_C)$ a uma reta t de equação geral $ax + by + c = 0$ é dada por
$$d(C, t) = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
4. A reta d é chamada de reta diretriz e o ponto F é chamado de foco da parábola.

Jogadas a executar:

1. Fazer o desenho da reta diretriz e do foco da parábola no plano cartesiano.

2. Tomar o ponto genérico dado como Peça 4 e, usando as regras do jogo, encontrar uma equação da parábola.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1: (Figura: 6.2)

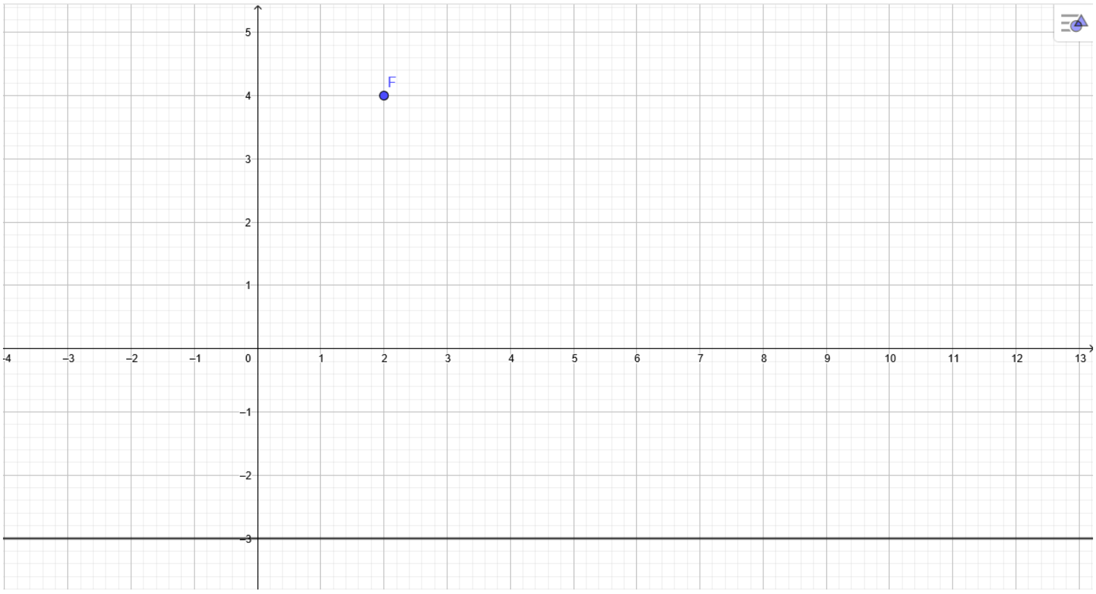

Figura 6.2: Diretriz e foco da parábola. (Fonte: elaboração do autor)

Jogada 2:

Tomemos o ponto genérico $P = (x, y)$ dado como Peça 5. De acordo com as regras do jogo,

$$d(P, F) = d(P, r)$$

ou seja

$$\sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = \frac{|y+3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = |y+3| \quad &\iff \quad (x-2)^2 + (y-4)^2 = (y+3)^2 \\
&\iff \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = y^2 + 6y + 9 \\
&\iff \quad x^2 - 4x + 11 = 14y \\
&\iff \quad y = \tfrac{1}{14}x^2 - \tfrac{4}{14}x + \tfrac{11}{14}
\end{aligned}$$

Logo,

$$y = \frac{1}{14}x^2 - \frac{4}{14}x + \frac{11}{14}$$

é uma equação da parábola de foco $F = (2, 4)$ e diretriz $y = -3$. (Figura: 6.3)

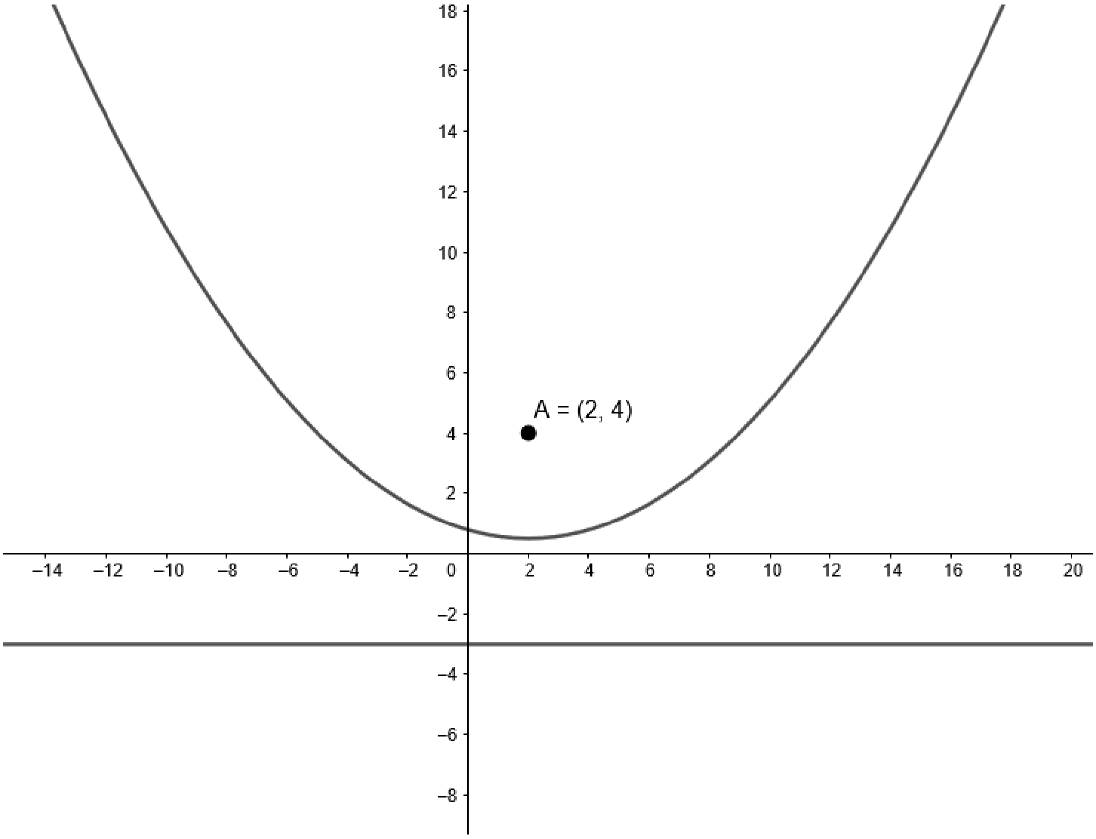

Figura 6.3: Parábola de foco $F = (2, 4)$ e diretriz $y = -3$. (Fonte: elaboração do autor)

■

6.1.1 *Equação canônica da parábola*

Em uma aula expositiva dialogada, vamos construir a equação canônica de uma parábola com diretriz horizontal e foco no semiplano acima da diretriz.

Iniciaremos com uma parábola que tenha vértice na origem do sistema de eixos ortogonais fixado — e, portanto, foco $F = (0, p)$ e reta diretriz $y = -p$, para algum número real $p > 0$.

A fim de motivar os alunos, faremos um desenho dessa parábola: (Figura: 6.4)

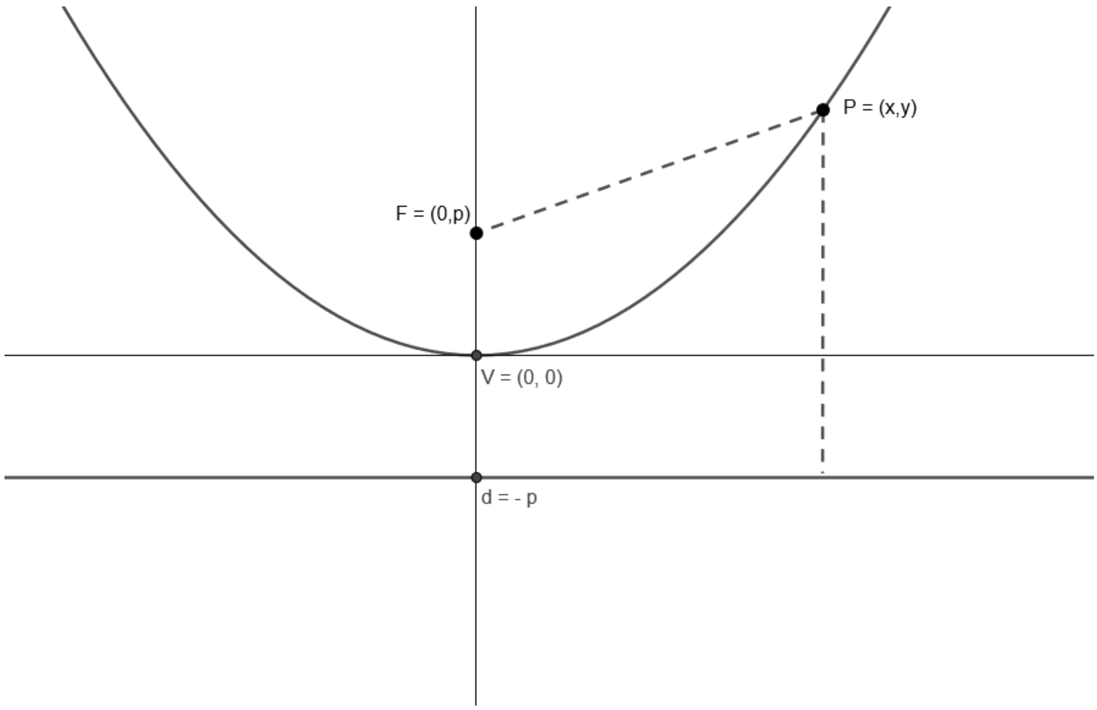

Figura 6.4: Parábola com vértice na origem. (Fonte: elaboração do autor)

Tendo por base a definição de parábola e a figura acima, temos:

$$\begin{aligned} d(P,F) = d(P,d) &\iff \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y - (-p) \\ &\iff x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \\ &\iff x^2 = 4py \end{aligned}$$

Construída essa equação, vamos propor aos alunos que desloquemos o vértice da parábola para o ponto $V = (x_v, y_v)$ por translação. Desse modo, com base no que vimos anteriormente de translação de eixos, podemos escrever

$$(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v).$$

Essa última equação é conhecida na Educação Básica como *equação canônica da parábola*. Graficamente: (Figura: 6.5)

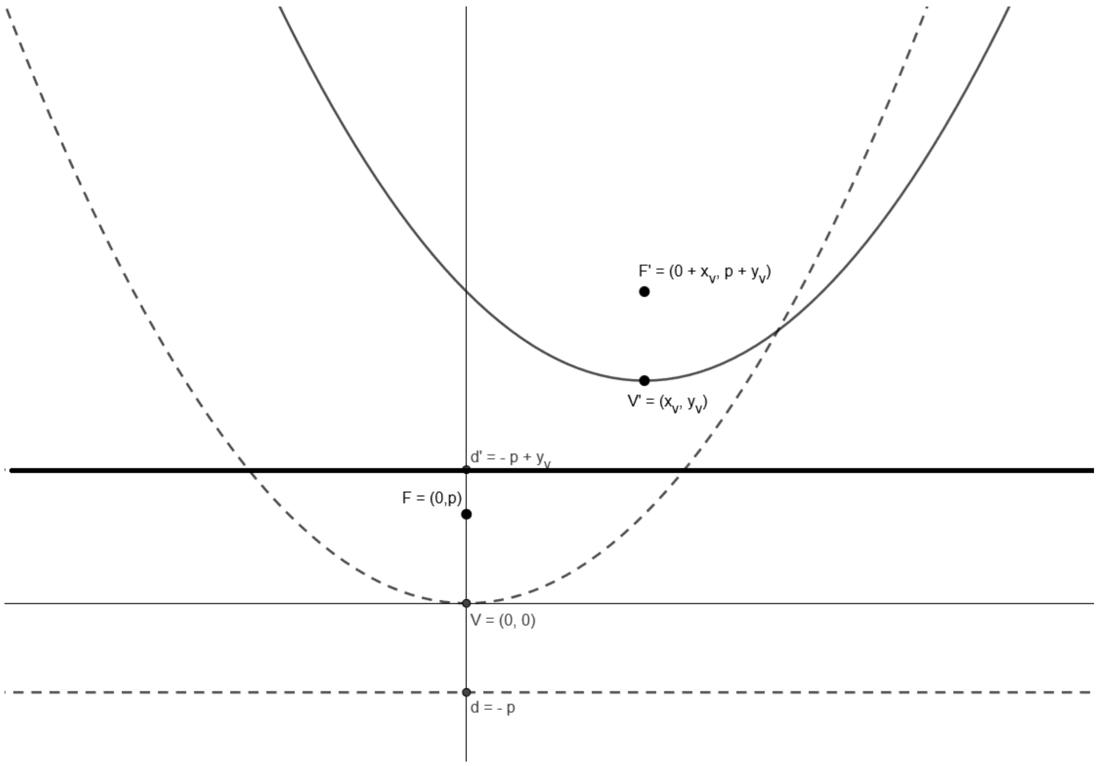

Figura 6.5: Parábola com vértice em (x_v, y_v). (Fonte: elaboração do autor)

Vamos deixar claro aos alunos que para obter a equação da parábola com vértice na origem, diretriz horizontal acima do eixo x e foco no semiplano abaixo da diretriz basta multiplicarmos o $4p$ por -1, pois, graficamente, esta parábola é simétrica à primeira em relação ao eixo x, ou seja, o vértice continuará na origem do sistema de eixos ortogonais, o foco em $F = (0, -p)$ e reta diretriz $y = p$, para algum número real $p > 0$.

O gráfico de uma função polinomial de segundo grau

É interessante, neste ponto, traçar uma semelhança de família com o estudo das funções polinomiais de segundo grau.

Desenvolvendo a equação

$$(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$$

obtemos

$$\begin{aligned}(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2xx_v + x_v^2 = 4p(y - y_v)\\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{4p}x^2 - 2\tfrac{1}{4p}x_v x + \tfrac{1}{4p}x_v^2 = y - y_v\\ &\Longleftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{4p}x^2 - 2\tfrac{1}{4p}x_v x + \tfrac{1}{4p}x_v^2 + y_v.\end{aligned}$$

Fazendo $a = \frac{1}{4p}$, $b = -2\frac{1}{4p}x_v$ e $c = \frac{1}{4p}x_v^2 + y_v$ temos que a parábola

$$(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$$

corresponde ao gráfico da função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax^2 + bx + c. \end{array}$$

Reciprocamente, o gráfico de uma função polinomial do segundo grau é uma parábola (com diretriz horizontal). De fato,

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c \quad & \Longleftrightarrow \quad y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ & \Longleftrightarrow \quad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\ & \Longleftrightarrow \quad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \\ & \Longleftrightarrow \quad \left(y + \frac{b^2-4ac}{4a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \end{aligned}$$

Logo, o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com diretriz horizontal, parâmetro $p = \frac{1}{4a}$ e vértice de coordenadas $(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

6.2 ESTUDO DA ELIPSE

De acordo com a Definição 6.1, uma elipse é definida da seguinte maneira:

Definição 6.3. Sejam d uma reta, F um ponto não situado sobre a reta d e $e \in\ ]0,1[$ um número real. O lugar geométrico dos pontos P do plano determinado por d e F tais que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = e$$

é chamado de *elipse*.

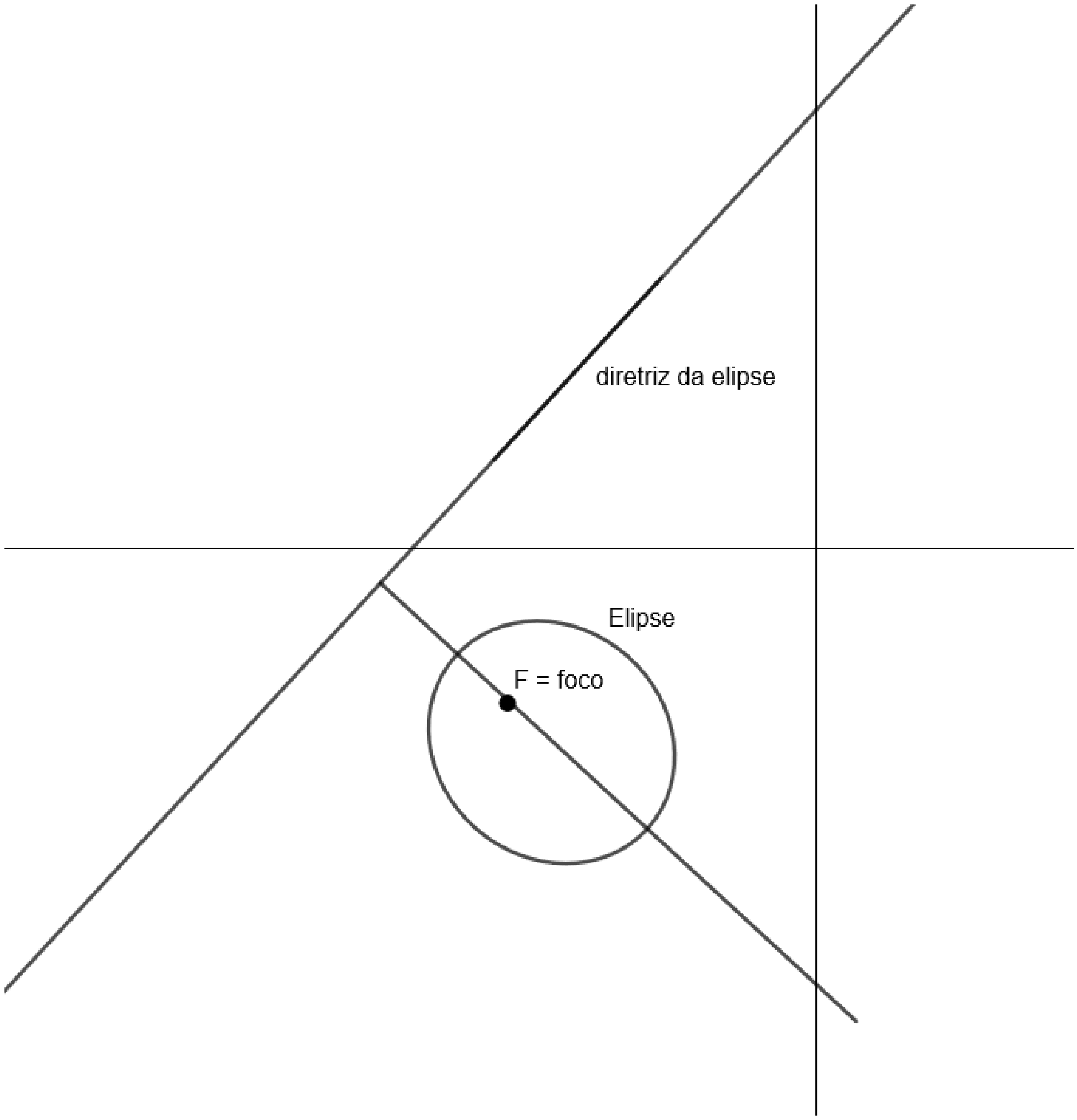

Figura 6.6: Elipse dada por diretriz e foco. (Fonte: [13])

As Proposições 6.4 e 6.5 a seguir fornecem uma outra caracterização da elipse como lugar geométrico — a saber, como o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distância a dois pontos dados é constante.

Proposição 6.4. *Sejam F_1 e F_2 pontos do plano e a um número real tais que $2a > d(F_1, F_2)$. Se $\mathcal{E}$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, então $\mathcal{E}$ é uma elipse.*

Demonstração. Fixemos um sistema de eixos ortogonais tal que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ para algum $c > 0$.

Seja $P = (x, y)$ um ponto do plano. Temos que:

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{E} \quad &\iff \quad d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\
&\iff \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
&\iff \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\iff \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
&\iff \quad x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
&\iff \quad a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\iff \quad (a^2 - cx)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2] \\
&\iff \quad a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
&\iff \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y = a^2(a^2 - c^2).
\end{aligned}$$

Sejam $e = \frac{c}{a}$, d a reta de equação $x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$ e $F = (c, 0)$.

Consideremos $\tilde{\mathcal{E}}$ a elipse de foco F, diretriz d e excentricidade e. Temos que:

$$\begin{aligned}
P \in \tilde{\mathcal{E}} \quad &\iff \quad d(P, F) = e \cdot d(P, d) \\
&\iff \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\left|x - \frac{a^2}{c}\right| \\
&\iff \quad (x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 \\
&\iff \quad x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{c^2} \\
&\iff \quad a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4 \\
&\iff \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).
\end{aligned}$$

Como $P \in \mathcal{E} \iff P \in \tilde{\mathcal{E}}$, temos que $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}$. Logo, $\mathcal{E}$ é uma elipse. $\square$

Proposição 6.5. *Se $\mathcal{E}$ é uma elipse, então existem dois pontos F_1 e F_2 do plano e a um número real tais que $2a > d(F_1, F_2)$ com a seguinte propriedade: para todo ponto P do plano,*

$$P \in \mathcal{E} \iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Demonstração. Sejam e, F e d a excentricidade, o foco e a diretriz da elipse $\mathcal{E}$. Temos que $0 < e < 1$. Fixemos um sistema de eixos ortogonais tal que $F = (p, 0)$ para algum $p > 0$ e d tenha equação $x = 0$. Temos que:

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{E} \quad &\iff \quad d(P, F) = e \cdot d(P, d) \\
&\iff \quad \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e \cdot |x| \\
&\iff \quad (x-p)^2 + y^2 = e^2x^2 \\
&\iff \quad x^2 - 2px + p^2 + y^2 = e^2x^2 \\
&\iff \quad (1-e^2)x^2 - 2px + y^2 = -p^2 \\
&\iff \quad (1-e^2)\left[x^2 - \tfrac{2p}{1-e^2}x + \tfrac{y^2}{1-e^2}\right] = -p^2 \\
&\iff \quad (1-e^2)\left[\left(x - \tfrac{p}{1-e^2}\right)^2 + \tfrac{y^2}{1-e^2}\right] = -p^2 + \tfrac{p^2}{1-e^2} \\
&\iff \quad \left(x - \tfrac{p}{1-e^2}\right)^2 + \tfrac{y^2}{1-e^2} = \tfrac{-p^2}{1-e^2} + \tfrac{p^2}{(1-e^2)^2} \\
&\iff \quad \left(x - \tfrac{p}{1-e^2}\right)^2 + \tfrac{y^2}{1-e^2} = \tfrac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} \\
&\iff \quad \frac{\left(x - \dfrac{p}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{\dfrac{y^2}{1-e^2}}{\dfrac{p^2e^2}{1-e^2}} = 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$P \in \mathcal{E} \iff \frac{\left(x - \dfrac{p}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{\dfrac{y^2}{1-e^2}}{\dfrac{p^2e^2}{1-e^2}} = 1. \tag{6.1}$$

Fazendo

$$a^2 = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{p^2e^2}{1-e^2}$$

chamemos $a^2 - b^2$ de c^2. Temos que

$$c^2 = \frac{p^2e^2 - (1-e^2)p^2e^2}{(1-e^2)^2} = \frac{p^2e^4}{(1-e^2)^2}.$$

Note que $\frac{c^2}{a^2} = e^2$ e, portanto, $e = \frac{c}{a}$, onde $c = \frac{pe^2}{1-e^2}$ e $a = \frac{pe}{1-e^2}$.

Afirmamos que (6.1) é a equação do lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a $F_1 = (p, 0)$ e $F_2 = \left(\frac{p(1+e^2)}{1-e^2}, 0\right)$ é igual a $2a$.

De fato, considerando uma translação do sistema de eixos ortogonais (Teorema 4.13) com nova origem $C = \left(\frac{p}{1-e^2}, 0\right)$, temos que

$$\begin{cases} x' &= x - \frac{p}{1-e^2} \\ y' &= y - 0. \end{cases}$$

Portanto, (6.1) é representada por

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

no novo sistema de eixos ortogonais, ou seja, por

$$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2$$

que é equivalente a

$$(a^2 - c^2)x'^2 + a^2 y'^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{6.2}$$

Como as coordenadas de F_1 e F_2 no novo sistema de eixos ortogonais são, respectivamente, $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, segue da demonstração da Proposição 6.4 que (6.2) representa o lugar geométrico dos pontos $P = (x', y')$ do plano tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$. $\square$

Obtemos, então, a seguinte definição alternativa de elipse:

Definição 6.6. Dados F_1 e F_2 pontos do plano e a um número real tal que $2a > d(F_1, F_2)$, a *elipse* de focos F_1 e F_2 e constante $2a$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

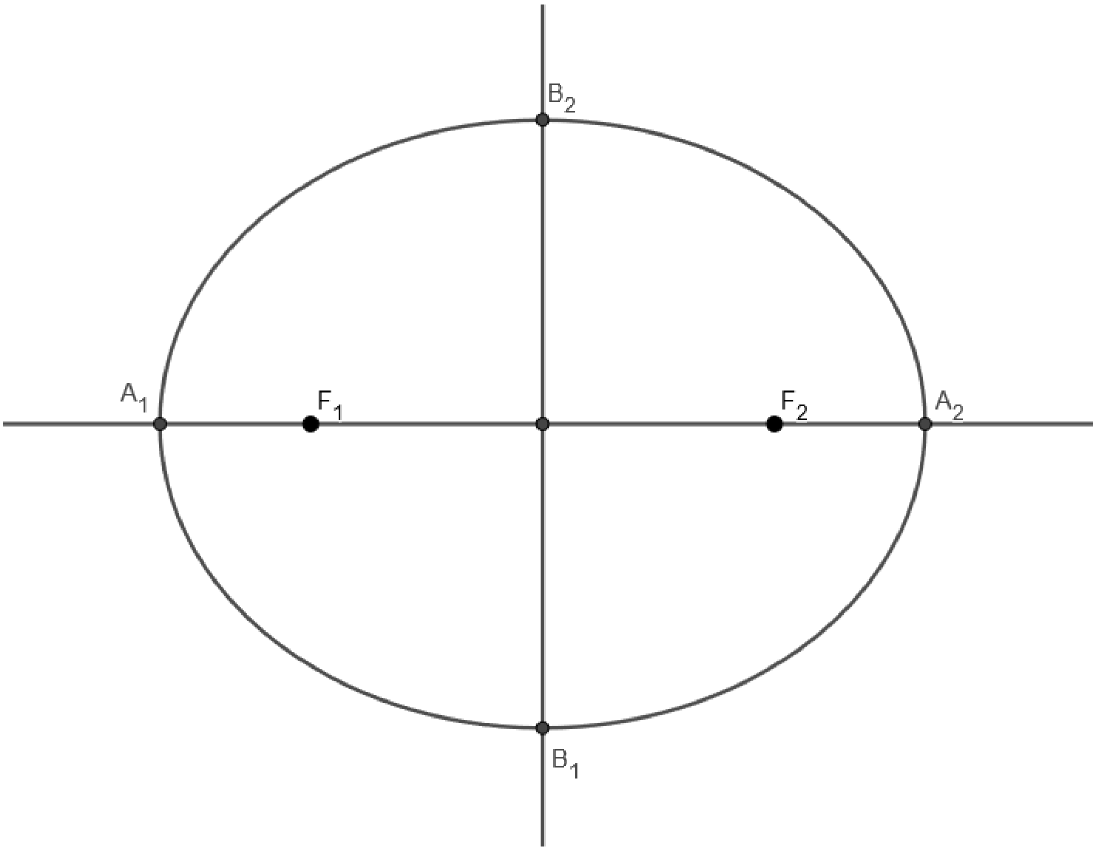

Figura 6.7: Elipse. (Fonte: elaboração do autor)

A seguinte nomenclatura é utilizada com frequência:

- A reta que passa simultaneamente pelos focos F_1 e F_2 é chamado de *reta focal*.
- A distância entre os focos é chamada de *distância focal*.
- O ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ é o *centro* da elipse.
- A reta focal intercepta a elipse em dois pontos, A_1 e A_2, que são denominados *vértices* da elipse, sendo o segmento $\overline{A_1A_2}$ chamado de *eixo maior*.
- A reta perpendicular à reta focal que passa pelo centro intercepta a elipse em dois pontos, B_1 e B_2, sendo o segmento $\overline{B_1B_2}$ chamado de *eixo menor*.

Do mesmo modo que fizemos com a parábola, podemos obter a equação de uma elipse a partir de sua definição alternativa através de um jogo.

Atividade 33. Jogo de encontrar uma equação da elipse usando a definição.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; régua; lousa e giz.

Pré-requisitos: distância entre dois pontos; distância entre ponto e reta.

Peças do jogo:

1. Um sistema de eixos ortogonais.
2. Os pontos $F_1 = (2, 3)$ e $F_2 = (5, 3)$.
3. A constante $2a$ igual a 6.
4. Um ponto genérico $P = (x, y)$ pertencente ao lugar geométrico.

Regras do jogo:

1. Dados, em um plano, dois pontos fixos e uma constante real maior que a distância entre esses dois pontos, a elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos pontos fixos é igual à constante dada.
2. A distância entre dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ do plano pode ser calculada através da seguinte fórmula:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

3. Os pontos F_1 e F_2 são chamados focos da elipse.

Jogadas a executar:

1. Tomar o ponto genérico dado como Peça 4 e, usando as regras do jogo, encontrar uma equação da elipse de focos F_1 e F_2 e constante $2a$.
2. Esboçar essa elipse, fazendo uso do GeoGebra.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

Tomemos o ponto genérico $P = (x, y)$ dado como Peça 4. De acordo com as regras do jogo,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 6$$

ou seja

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = 6. \qquad (*)$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
(*) \quad &\iff \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 6 - \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}\\
&\iff (x-2)^2+(y-3)^2 = 36 - 12\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} + (x-5)^2+(y-3)^2\\
&\iff x^2-4x+4-x^2+10x-25-36 = -12\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}\\
&\iff 6x-57 = -12\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}\\
&\iff 2x-19 = -4\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}\\
&\iff (2x-19)^2 = \left(-4\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}\right)^2\\
&\iff 4x^2-76x+361 = 16(x^2-10x+25+y^2-6y+90)\\
&\iff 4x^2-76x+361 = 16(x^2-10x+25+y^2-6y+90)\\
&\iff 4x^2-76x+361 = 16x^2-160x+400+16y^2-96y+144\\
&\iff -12x^2+84x-16y^2+96y = 183.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$-12x^2-16y^2+84x+96y = 183$$

é uma equação da elipse de focos $F_1 = (2,3)$ e $F_2 = (5,3)$ e constante $2a = 6$.

Jogada 2:

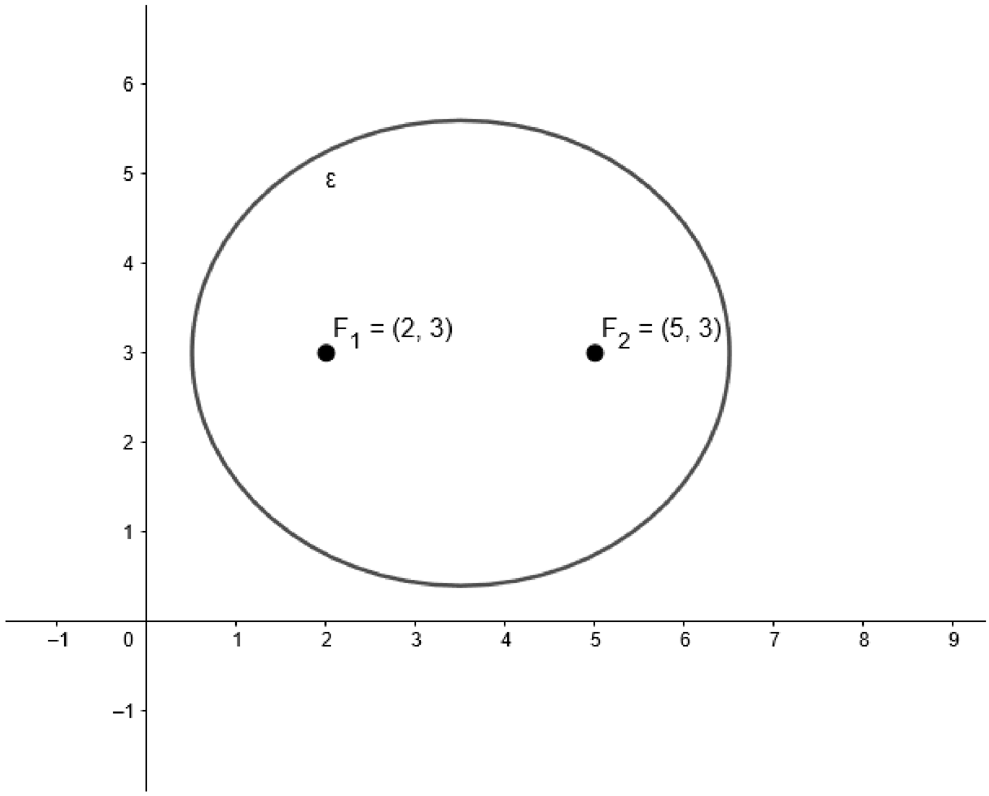

Figura 6.8: Elipse. (Fonte: elaboração do autor)

■

6.2.1 *Equação canônica da elipse*

Mais uma vez, lançaremos mão de uma aula expositiva com a participação dos alunos, que deve ser estimulada.

Sabemos que elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é sempre igual a uma constante maior do que a distância desses dois pontos.

Sem perda, como nos permite a geometria analítica, vamos escolher um sistema de eixos ortogonais conveniente, de modo que o centro de nossa elipse esteja sobre a origem, seu eixo maior sobre o eixo x e seu eixo menor sobre o eixo y.

Observe o desenho que ilustra nossa escolha:[2]

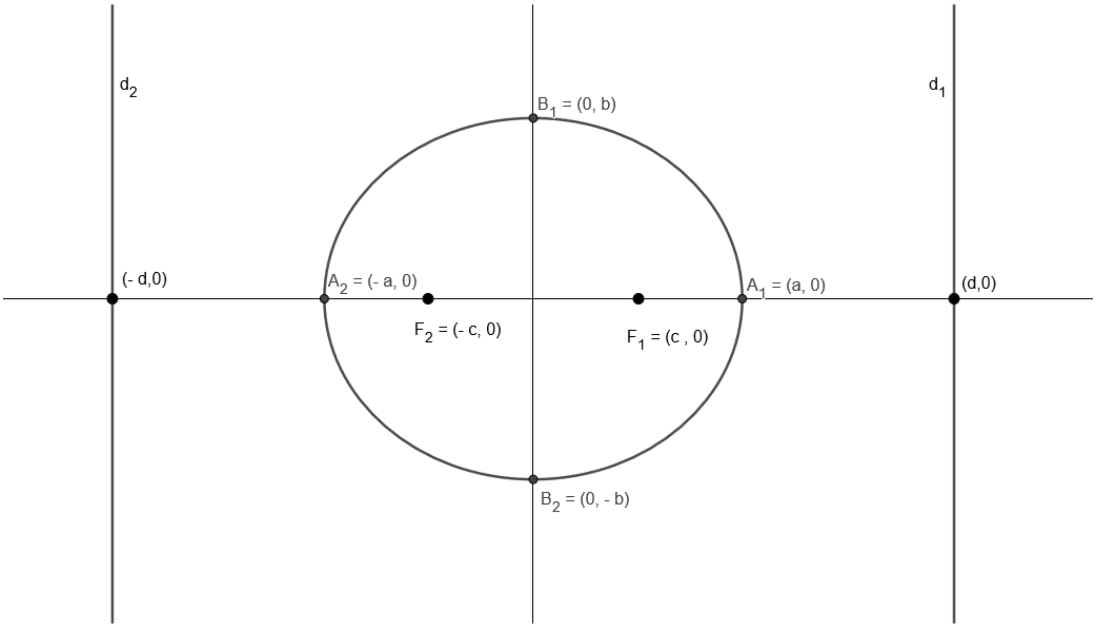

Figura 6.9: Elipse com centro sobre a origem e eixo maior sobre o eixo x. (Fonte: [13])

Note que a distância focal mede $2c$, o eixo maior mede $2a$ e o eixo menor mede $2b$. Note também que $2a > 2c$ e que $a^2 = b^2 + c^2$.

2 Como a elipse tem dois focos, nos termos de nossa definição geral de cônicas, ela deve ter duas diretrizes (no caso, verticais, representadas na figura acima por d_1 e d_2).

Vamos, então, calcular a equação da elipse.

Sabemos que um ponto $P = (x, y)$ do plano pertence à elipse se, e somente se, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, ou seja, se, e somente se,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Esta equação é equivalente a

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

que pode ser reescrita como

$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + 2cx$$

e, ainda, como

$$4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = 4cx + 4a^2.$$

Note que

$$\begin{aligned} 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = 4cx + 4a^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}\right)^2 = \left(cx + a^2\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 \\ &\Longleftrightarrow \quad a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4. \end{aligned}$$

Como $c^2 = a^2 - b^2$ temos que

$$\begin{aligned} a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4 \quad &\Longleftrightarrow \quad a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2 = (a^2 - b^2)x^2 + a^4 \\ &\Longleftrightarrow \quad a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2 = a^2x^2 - b^2x^2 + a^4 \\ &\Longleftrightarrow \quad -a^2b^2 + a^2y^2 = -b^2x^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é a equação da elipse com centro sobre a origem e eixo maior sobre o eixo x.

Para obtermos a equação da elipse com centro em um ponto de coordenadas (x_0, y_0), eixo maior paralelo ao eixo x e eixo menor paralelo ao eixo y fazemos a translação desse centro e obtemos a equação

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

que é conhecida na Educação Básica como *equação canônica da elipse*.

Definição 6.7. Sejam d uma reta, F um ponto não situado sobre a reta d e $e > 1$ um número real. O lugar geométrico dos pontos P do plano determinado por d e F tais que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = e$$

é chamado de *hipérbole*.

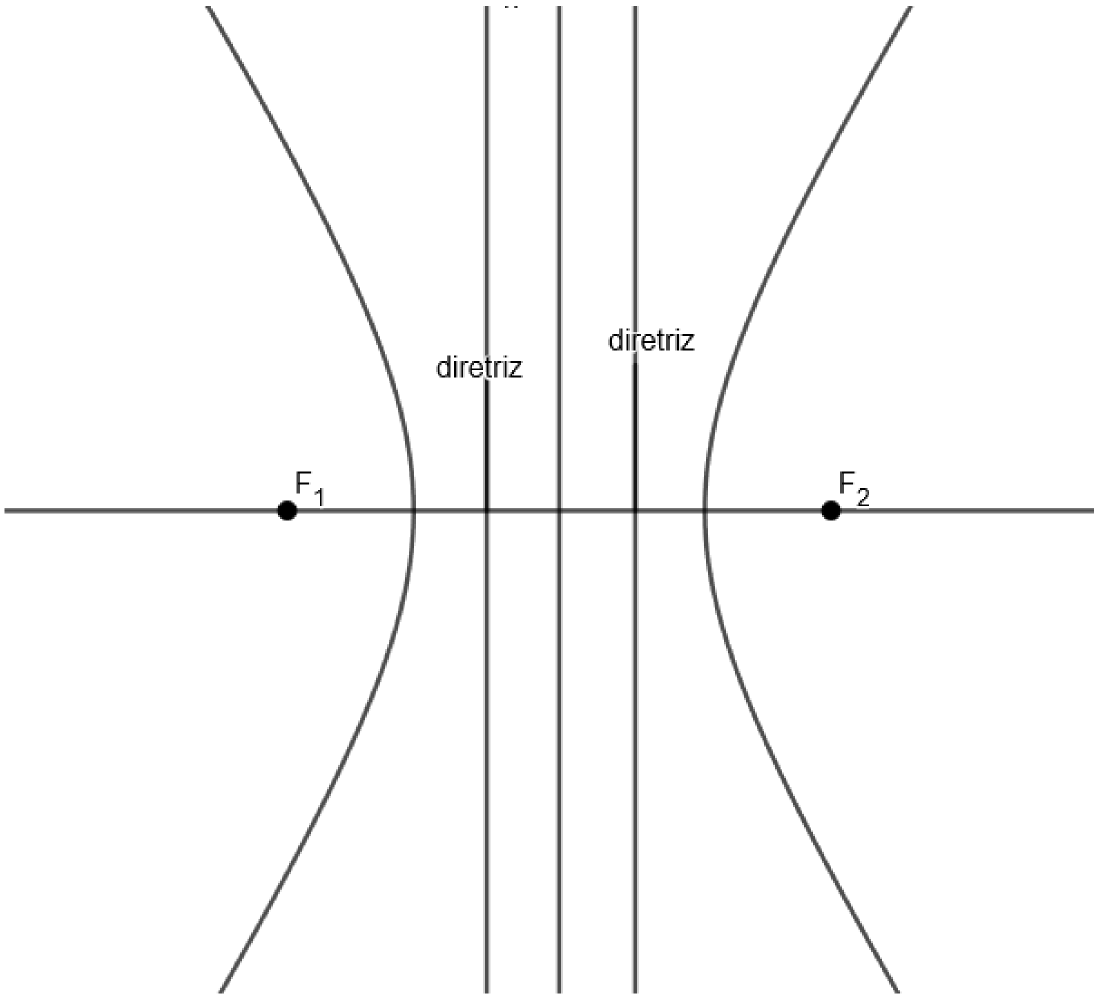

Figura 6.10: Hipérbole dada por diretriz e foco. (Fonte: [13])

As Proposições 6.8 e 6.9 a seguir fornecem uma outra caracterização da hipérbole como lugar geométrico — a saber, como o conjunto dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distância a dois pontos dados é constante.

Proposição 6.8. *Sejam F_1 e F_2 pontos do plano e a um número real tais que $0 < 2a < d(F_1, F_2)$. Se $\mathcal{H}$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, então $\mathcal{H}$ é uma hipérbole.*

Demonstração. Fixemos um sistema de eixos ortogonais tal que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ para algum $c > 0$.

Seja $P = (x, y)$ um ponto do plano. Temos que:

$$
\begin{aligned}
P \in \mathcal{H} &\iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \\
&\iff d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a \\
&\iff d(P, F_1) = d(P, F_2) \pm 2a \\
&\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \\
&\iff (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\
&\iff x^2 + 2cx + c^2 = x^2 - 2cx + c^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\
&\iff 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\iff cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\iff (cx - a)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\
&\iff c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
&\iff c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\
&\iff (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \\
&\iff (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).
\end{aligned}
$$

Sejam $e = \frac{c}{a}$, d a reta de equação $x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$ e $F = (c, 0)$.

Consideremos $\tilde{\mathcal{H}}$ a hipérbole de foco F, diretriz d e excentricidade e. Temos que:

$$
\begin{aligned}
P \in \tilde{\mathcal{H}} &\iff d(P, F) = e \cdot d(P, d) \\
&\iff \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\left|x - \frac{a^2}{c}\right| \\
&\iff (x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 \\
&\iff x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{c^2} \\
&\iff a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4 \\
&\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
&\iff (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).
\end{aligned}
$$

Como $P \in \mathcal{H} \iff P \in \tilde{\mathcal{H}}$, temos que $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}$. Logo, $\mathcal{H}$ é uma hipérbole. □

Proposição 6.9. *Se $\mathcal{H}$ é uma hipérbole, então existem dois pontos F_1 e F_2 do plano e a um número real tais que $0 < 2a < d(F_1, F_2)$ com a seguinte propriedade: para todo ponto P do plano,*

$$P \in \mathcal{E} \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Demonstração. Sejam e, F e d a excentricidade, o foco e a diretriz da hipérbole $\mathcal{H}$. Temos que $e > 1$. Fixemos um sistema de eixos ortogonais tal que $F = (p, 0)$ para algum $p > 0$ e d tenha equação $x = 0$. Temos que:

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{H} &\iff d(P,F) = e \cdot d(P,d) \\
&\iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x| \\
&\iff (x-p)^2 + y^2 = e^2x^2 \\
&\iff x^2 - 2px + p^2 + y^2 = e^2x^2 \\
&\iff (1-e^2)x^2 - 2px + y^2 = -p^2 \\
&\iff (1-e^2)\left[x^2 - \tfrac{2}{1-e^2}x + \tfrac{y^2}{1-e^2}\right] = -p^2 \\
&\iff (1-e^2)\left[\left(x - \tfrac{p}{1-e^2}\right)^2 + \tfrac{y^2}{1-e^2}\right] = -p^2 + \tfrac{p^2}{1-e^2} \\
&\iff \left(x - \tfrac{p}{1-e^2}\right)^2 + \tfrac{y^2}{1-e^2} = \tfrac{-p^2}{1-e^2} + \tfrac{p^2}{(1-e^2)^2} \\
&\iff \left(x - \tfrac{p}{1-e^2}\right)^2 + \tfrac{y^2}{1-e^2} = \tfrac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} \\
&\iff \frac{\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2e^2}{(e^2-1)^2}} - \frac{\frac{y^2}{1-e^2}}{\frac{p^2e^2}{e^2-1}} = 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$P \in \mathcal{H} \iff \frac{\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2e^2}{(e^2-1)^2}} - \frac{\frac{y^2}{1-e^2}}{\frac{p^2e^2}{e^2-1}} = 1. \tag{6.3}$$

Fazendo

$$a^2 = \frac{p^2e^2}{(e^2-1)^2} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{p^2e^2}{e^2-1}$$

chamemos $a^2 + b^2$ de c^2. Temos que

$$c^2 = \frac{p^2c^2 + (e^2-1)p^2e^2}{(e^2-1)^2} = \frac{p^2e^4}{(e^2-1)^2}.$$

Note que $\frac{c^2}{a^2} = e^2$ e, portanto, $e = \frac{c}{a}$, onde $c = \frac{pe^2}{e^2-1}$ e $a = \frac{pe}{e^2-1}$.

Afirmamos que (6.3) é a equação do lugar geométrico dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a $F_1 = (p, 0)$ e $F_2 = \left(\frac{p(1+e^2)}{1-e^2}, 0\right)$ é igual a $2a$.

De fato, considerando uma translação do sistema de eixos ortogonais (Teorema 4.13) com nova origem $C = \left(\frac{p}{e^2-1}, 0\right)$, temos que

$$\begin{cases} x' &= x - \frac{p}{e^2-1} \\ y' &= y - 0. \end{cases}$$

Portanto, (6.3) é representada por

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

no novo sistema de eixos ortogonais, ou seja, por

$$b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2$$

que é equivalente a

$$(c^2 - a^2)x'^2 + a^2y'^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{6.4}$$

Como as coordenadas de F_1 e F_2 no novo sistema de eixos ortogonais são, respectivamente, $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, segue da demonstração da Proposição 6.8 que (6.4) representa o lugar geométrico dos pontos $P = (x', y')$ do plano tais que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$. □

Obtemos, então, a seguinte definição alternativa de hipérbole:

Definição 6.10. Dados F_1 e F_2 pontos do plano e $a > 0$ um número real tal que $2a < d(F_1, F_2)$, a *hipérbole* de focos F_1 e F_2 e constante $2a$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

A seguinte nomenclatura é utilizada com frequência:

- A reta que passa simultaneamente pelos focos F_1 e F_2 é chamado de *reta focal*.
- O ponto médio C do segmento $\overline{F_1F_2}$ é o *centro* da hipérbole.
- A reta focal intercepta a hipérbole em dois pontos, A_1 e A_2, denominados *vértices* da hipérbole, sendo o segmento $\overline{A_1A_2}$ chamado de *eixo real*.
- O segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$ com $2a = A_1A_2$ e $2c = F_1F_2$, que tem como ponto médio o centro da hipérbole e é perpendicular à reta focal é chamado de *eixo imaginário* (ou *adjunto*).

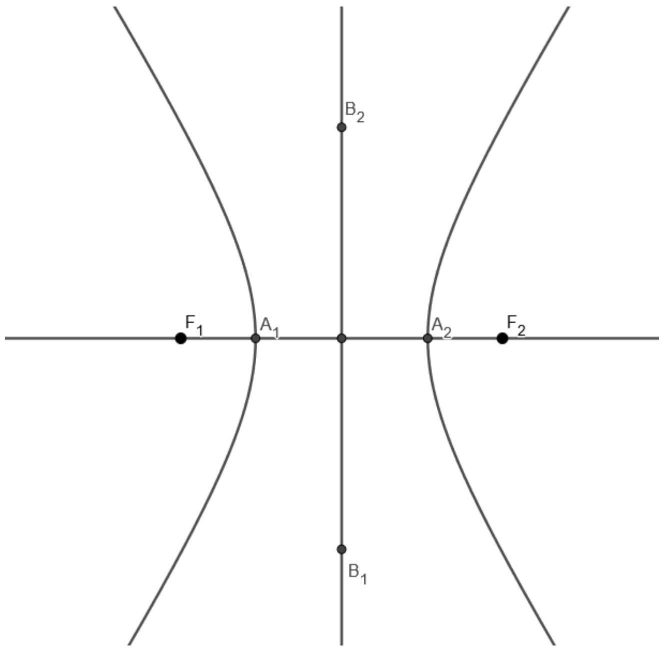

Figura 6.11: Hipérbole. (Fonte: elaboração do autor)

Do mesmo modo que fizemos com a parábola e com a elipse, podemos obter a equação de uma hipérbole a partir de sua definição através de um jogo.

Atividade 34. Jogo de encontrar uma equação da hipérbole usando a definição.

Tempo previsto para a atividade: 20 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; régua; lousa e giz.

Pré-requisitos: distância entre dois pontos; distância entre ponto e reta.

Peças do jogo:

1. Um sistema de eixos ortogonais.
2. Os pontos $F_1 = (2, 3)$ e $F_2 = (5, 3)$.
3. A constante $2a$ igual a 2.
4. Um ponto genérico $P = (x, y)$ pertencente ao lugar geométrico.

Regras do jogo:

1. Dados, em um plano, dois pontos fixos distintos e uma constante real positiva menor que a distância entre esses dois pontos, a hipérbole é o lugar geométrico

dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias aos pontos fixos é igual à constante dada.

2. A distância entre dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ do plano pode ser calculada através da seguinte fórmula:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

3. Os pontos F_1 e F_2 são chamados focos da hipérbole.

Jogadas a executar:

1. Tomar o ponto genérico dado como Peça 4 e, usando as regras do jogo, encontrar uma equação da hipérbole de focos F_1 e F_2 e constante $2a$.
2. Esboçar essa hipérbole fazendo uso do GeoGebra.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

Tomemos o ponto genérico $P = (x, y)$ dado como Peça 4. De acordo com as regras do jogo,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2$$

ou seja

$$\left|\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2}\right| = 2. \qquad (**)$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
(**) \quad &\iff \quad \left|\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} - \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}\right| = 2 \\
&\iff \quad \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} - \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} = \pm 2 \\
&\iff \quad \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \pm 2 + \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \\
&\iff \quad \left(\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\right)^2 = \left(\pm 2 + \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}\right)^2 \\
&\iff \quad (x-2)^2+(y-3)^2 = (x-5)^2+(y-3)^2+4 \pm 4\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \\
&\iff \quad (x-2)^2+(y-3)^2-(x-5)^2-(y-3)^2-4 = \pm 4\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \\
&\iff \quad (x-2)^2-(x-5)^2-4 = \pm 4\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \\
&\iff \quad x^2-4x+4-x^2+10x-25-4 = \pm 4\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \\
&\iff \quad 6x-25 = \pm 4\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \\
&\iff \quad (6x-25)^2 = \left(\pm 4\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}\right)^2 \\
&\iff \quad 36x^2-300x+625 = 16\left((x-5)^2+(y-3)^2\right) \\
&\iff \quad 36x^2-300x+625 = 16\left(x^2-10x+25+y^2-6y+9\right) \\
&\iff \quad 36x^2-300x+625 = 16x^2-160x+400+16y^2-96y+144 \\
&\iff \quad 20x^2-16y^2-140x+96y = -81.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$20x^2-16y^2-140x+96y = -81$$

é uma equação da hipérbole de focos $F_1 = (2,3)$ e $F_2 = (5,3)$ e constante $2a = 2$.

Jogada 2:

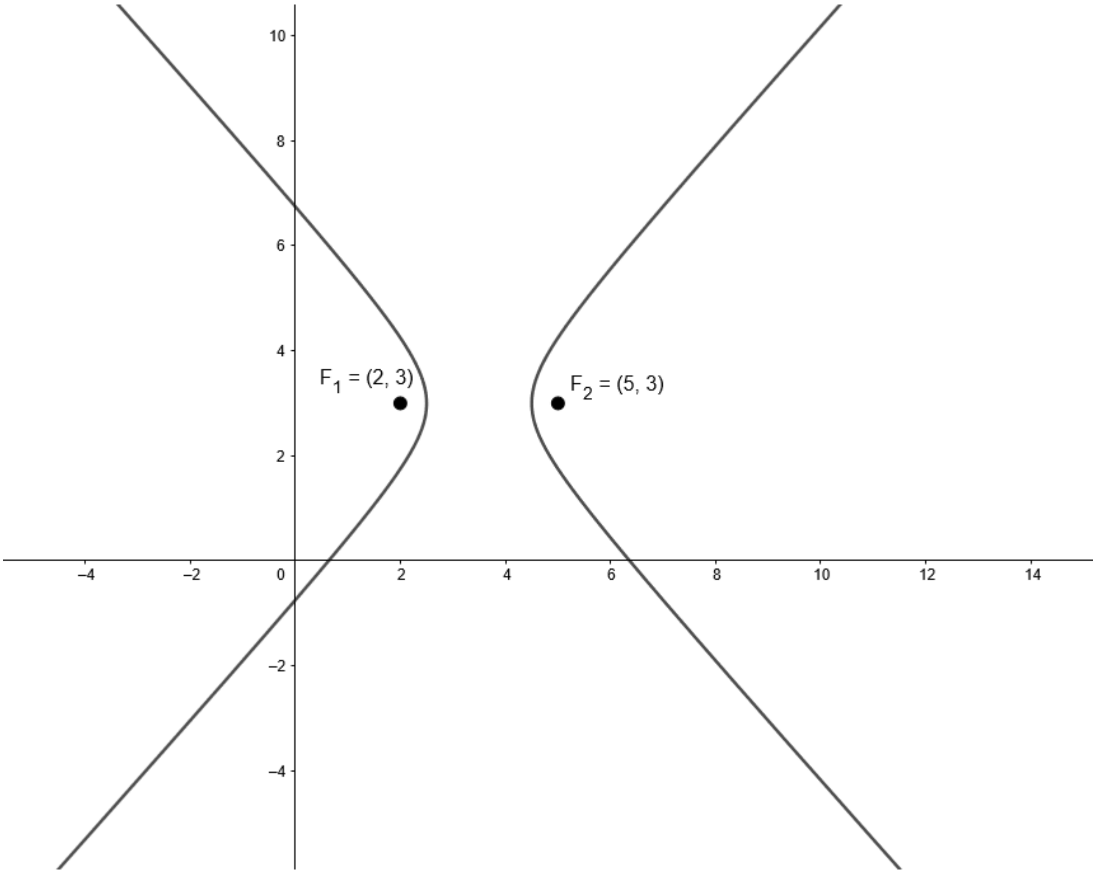

Figura 6.12: Hipérbole. (Fonte: elaboração do autor)

■

6.3.1 *Equação canônica da hipérbole*

Sabemos que hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos distintos e fixos é sempre igual a uma constante menor que a distância desses dois pontos.

Vamos apresentar aos alunos um desenho de uma hipérbole convenientemente escolhida, afirmando que é uma figura composta por dois ramos: (Figura: 6.13)

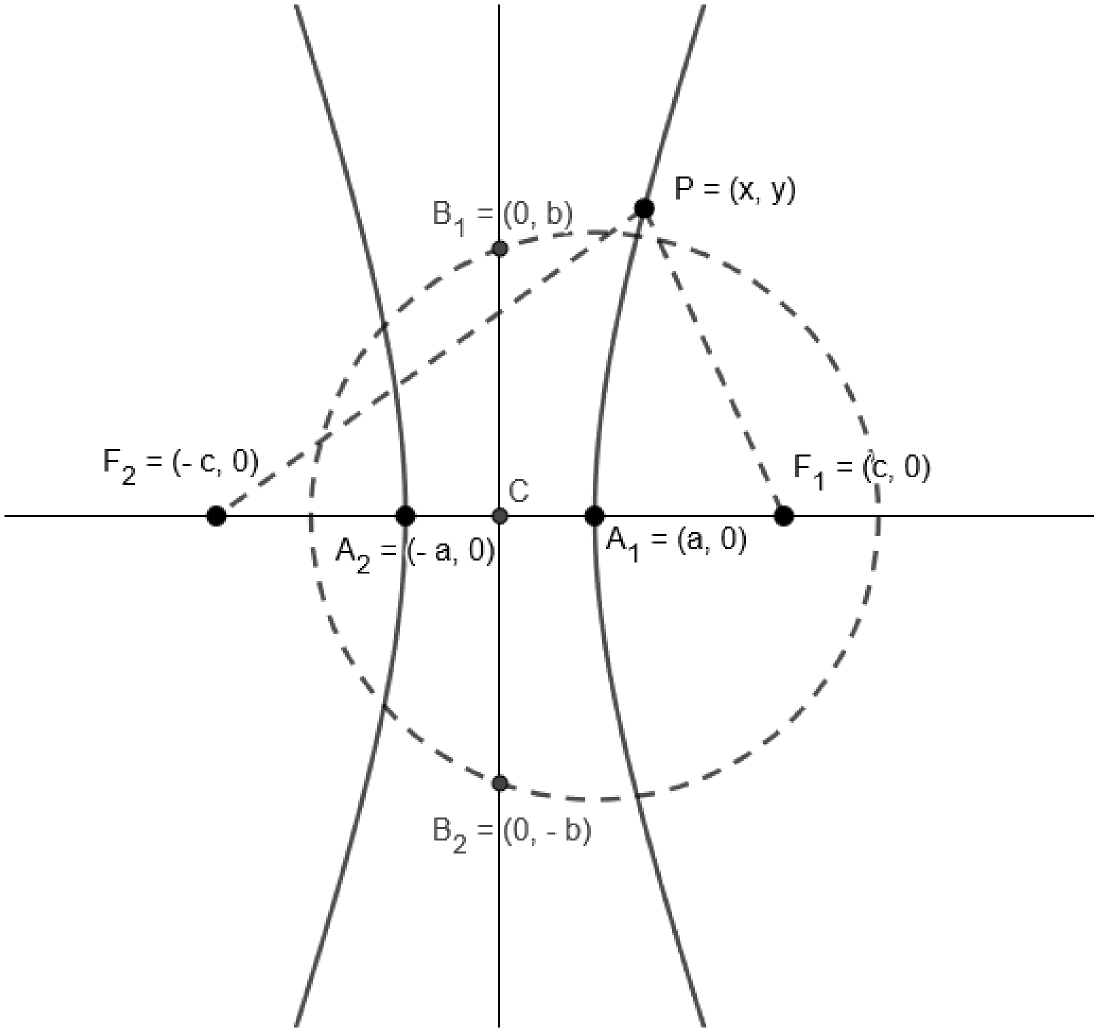

Figura 6.13: Hipérbole com centro na origem. (Fonte: elaboração do autor)

Os focos foram tomados sobre o eixo x e suas coordenadas são $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ para algum número real $c > 0$. Com isso, o centro da hipérbole coincide com a origem do sistema de eixos ortogonais, isto é, $C = (0, 0)$, e a reta focal intercepta a hipérbole nos pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$. Note que $2a < 2c$.

O eixo imaginário $\overline{B_1B_2}$ pode ser obtido da seguinte maneira: com um compasso, tomamos a distância de C a F_1 e, com centro em A_1, traçamos a circunferência (pontilhada na figura) que intercepta o eixo y nos pontos B_1 e B_2.

Assim, o eixo real $\overline{A_1A_2}$ tem comprimento $2a$ e o eixo imaginário tem comprimento $2b$, valendo a relação $c^2 = a^2 + b^2$, dada pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $\triangle A_1CB_1$.

Sabemos que um ponto $P = (x, y)$ do plano pertence à hipérbole se, e somente se, $|d(P, F_2) - d(P, F_1)| = 2a$, ou seja, se, e somente se,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Esta equação é equivalente a

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

que pode ser reescrita como

$$x^2 + 2cx + c^2 = x^2 - 2cx + c^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

e, ainda, como

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad (cx - a)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
&\Longleftrightarrow \quad c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2acx + a^2c^2 + a^2y^2.
\end{aligned}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos que

$$\begin{aligned}
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2acx + a^2c^2 + a^2y^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad (a^2 + b^2)x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2(a^2 + b^2) + a^2y^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2x^2 + b^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^4 + a^2b^2 + a^2y^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \tfrac{b^2x^2}{a^2b^2} - \tfrac{a^2y^2}{a^2b^2} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é a equação da hipérbole com centro na origem e eixo real sobre o eixo x.

Para obtermos a equação da hipérbole com centro em (x_0, y_0) e eixo real paralelo ao eixo x fazemos a translação dos eixos coordenados, como visto anteriormente, e obtemos

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

que é conhecida na Educação Básica como *equação canônica hipérbole*.

Para obtermos a equação da hipérbole cujo eixo imaginário seja paralelo ao eixo x, podemos usar a matriz de rotação (assunto de nosso próximo tópico), obtendo a equação

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Por fim, há duas retas importantes associadas à hipérbole, que são as suas *assíntotas*. Numa acepção informal, podemos entender uma assíntota como uma reta da qual a curva se aproxima indefinidamente.

Observe o desenho: (Figura: 6.14)

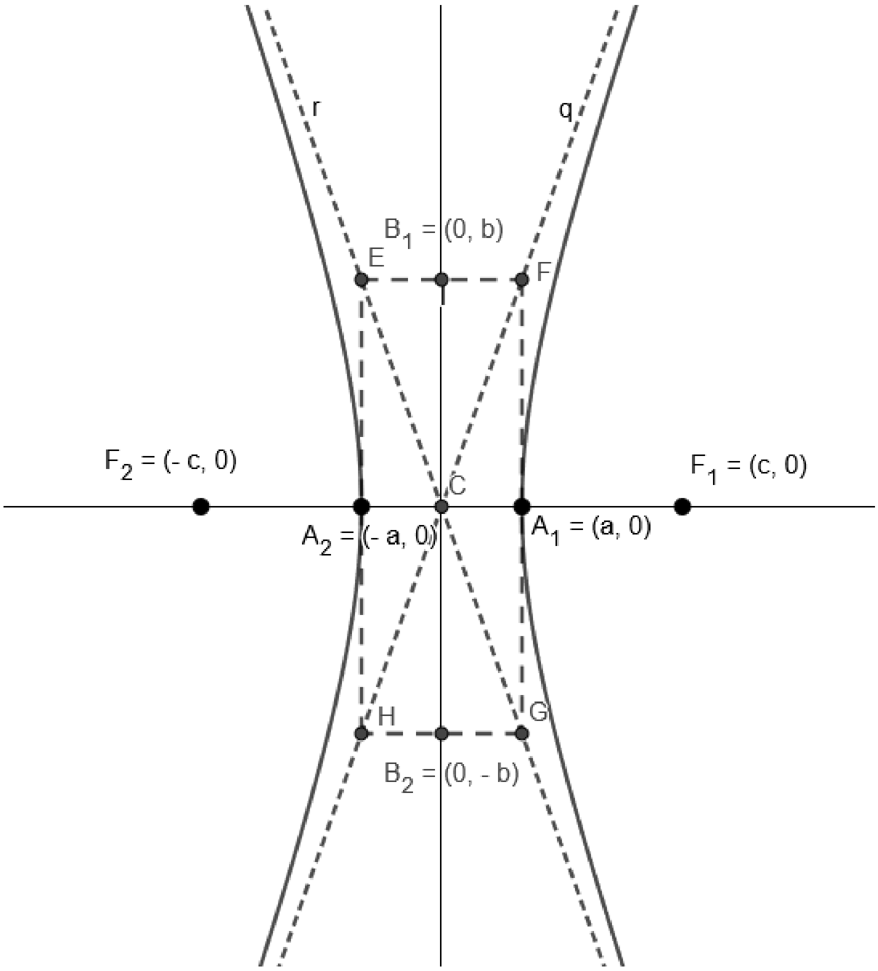

Figura 6.14: Assíntotas da hipérbole. (Fonte: elaboração do autor)

As retas pontilhadas r e q são as assíntotas, que passam pela origem, tendo uma declividade $m_q = \frac{b}{a}$ e a outra, $m_r = -\frac{b}{a}$. Logo, suas equações, para uma hipérbole que tem centro na origem, são dadas por

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

6.4 ROTAÇÃO DE EIXOS COORDENADOS

Com o Teorema 4.13 discutimos a translação de um sistema de eixos ortogonais. Nesta seção, estudaremos a rotação de um tal sistema, aproveitando para, através das semelhanças de família, conversar com sistemas lineares e matrizes e, como aplicação, desenvolver um método com uso de trigonometria para eliminar a variável xy na equação geral de segundo grau dada por $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ e, assim, facilitar a análise de qual figura representa.

Teorema 6.11. *Considere dois sistemas de eixos ortogonais xOy e $x'Oy'$ de tal modo que o ângulo entre os eixos Ox' e Ox seja α. Se as coordenadas de um ponto P são (x, y) em relação a xOy e (x', y') em relação a $x'Oy'$, então a relação entre essas coordenadas é dadas pelo sistema*

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ y = x' \cdot \operatorname{sen}\alpha + y' \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

que também pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ou, ainda, como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Demonstração. Considere um ponto P qualquer, conforme figura a seguir:

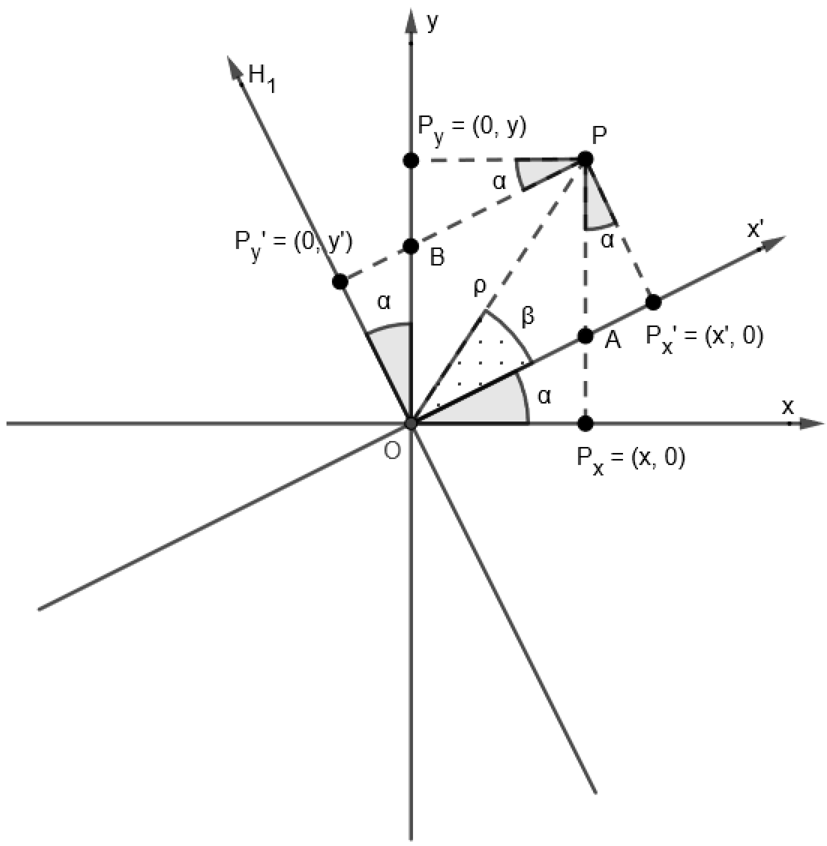

Figura 6.15: Rotação de eixos. (Fonte: elaboração do autor)

Na Figura 6.15, que faz parte de nossa demonstração, temos:

- um par de eixos ortogonais xOy;
- um par de eixos ortogonais $x'Oy'$, obtido do anterior por rotação de um ângulo α no sentido positivo;
- um ponto genérico P de coordenadas (x, y) em relação ao sistema xOy e (x', y') em relação ao $x'Oy'$;
- o segmento $\overline{OP}$ de comprimento ρ, que forma um ângulo de medida β em relação ao eixo Ox' e de medida $\alpha + \beta$ em relação ao eixo Ox.

Notemos que o ângulo $\angle P'_y P P_y$ também mede α, pois seus lados são perpendiculares aos lados do ângulo $\angle P'_y O P_y$, e, de modo análogo o ângulo $\angle P'_x P P_x$ também mede α.

No triângulo ΔOP_xP temos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OP_x}}{\overline{OP}} = \frac{x}{\rho} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{P_xP}}{\overline{OP}} = \frac{y}{\rho}$$

ou seja

$$x = \rho\cos(\alpha+\beta) \quad \text{e} \quad y = \rho\operatorname{sen}(\alpha+\beta).$$

Assim,

$$\begin{aligned} x &= \rho(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) \\ &= \rho\cos\alpha\cos\beta - \rho\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y &= \rho(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha) \\ &= \rho\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \rho\operatorname{sen}\beta\cos\alpha \end{aligned}$$

Mas, do $\Delta OP'_xP$, temos:

$$\cos\beta = \frac{x'}{\rho} \implies x' = \rho\cos\beta$$

e

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{y'}{\rho} \implies y' = \rho\operatorname{sen}\beta.$$

Logo,

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$$

e

$$y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha.$$

Esse sistema linear de duas equações e duas incógnitas pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

□

Para ilustrar o uso da matriz de rotação obtida acima, vamos propor aos alunos um jogo para obter a equação da parábola de parâmetro $2p$, com $p > 0$, diretriz vertical e vértice $V = (x_v, y_v)$ no semiplano à direita da diretriz.

Atividade 35. Usando a matriz de rotação para girar a parábola de um ângulo reto no sentido horário.

Tempo previsto para a atividade: 15 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; régua; lousa e giz.

Pré-requisitos: multiplicação de matrizes; seno e cosseno de $\frac{\pi}{2}$.

Peças do jogo:

1. Um sistema de eixos ortogonais.
2. A equação da parábola com concavidade positiva, parâmetro $2p$, com $p > 0$, vértice $V = (x_v, y_v)$ e diretriz d de equação $y = y_v - p$ é dada por

$$(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v).$$

Regras do jogo:

1. Sendo (x, y) as coordenadas originais (antigas) de uma equação, podemos obter as novas coordenadas (x', y') por rotação de um ângulo α usando a fórmula

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Jogadas a executar:

1. Usar a Regra 1 com $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ para obter (x, y) em função de (x', y').
2. Reescrever a equação da Peça 2, substituindo x e y pelos valores obtidos na Jogada 1.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

Jogada 1:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -y' \\ x' \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo,

$$x = -y' \quad \text{e} \quad y = x'.$$

Jogada 2:

Substituindo $x = -y'$ e $y = x'$ em

$$(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$$

obtemos

$$(-y' + y'_v)^2 = 4p(x' - x'_v)$$

ou seja

$$(y' - y'_v)^2 = 4p(x' - x'_v).$$

■

6.4.1 *A equação de segundo grau da forma* $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vimos nas seções anteriores que as equações canônicas da parábola, elipse e hipérbole podem ser escritas na forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Nesta seção faremos o caminho contrário: partiremos de uma equação da forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ e reconheceremos o tipo de cônica (degenerada ou não) que ela representa.

Como a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é de segundo grau, A e C não podem ser ambos nulos.

Caso 1: $A = 0$ e $C \neq 0$.

$$\begin{aligned}
Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 &\iff Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\
&\iff y^2 + \tfrac{D}{C}x + \tfrac{E}{C}y + F = 0 \\
&\iff \left(y - \tfrac{E}{2C}\right)^2 + \tfrac{D}{C}x + \left(F - \tfrac{E^2}{4C^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Se $D \neq 0$, a equação

$$\left(y - \frac{E}{2C}\right)^2 + \frac{D}{C}x + \left(F - \frac{E^2}{4C^2}\right) = 0 \tag{6.5}$$

representa uma parábola.

Suponhamos $D = 0$. Neste caso, (6.5) é equivalente a

$$\left(y - \frac{E}{2C}\right)^2 = \left(\frac{E^2}{4C^2} - F\right). \tag{6.6}$$

Se $\frac{E^2}{4C^2} - F > 0$, então (6.6) representa um par de retas paralelas.

Se $\frac{E^2}{4C^2} - F = 0$, então (6.6) representa uma reta.

Se $\frac{E^2}{4C^2} - F < 0$, então (6.6) representa o conjunto vazio.

Caso 2: $A \neq 0$ e $C = 0$.

É análogo ao anterior.

Caso 3: $A \neq 0$ e $C \neq 0$.

$$\begin{aligned}
Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad A\left(x^2 + \tfrac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \tfrac{E}{C}\right) + F = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad A\left[\left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 - \tfrac{D^2}{4A^2}\right] + C\left[\left(y + \tfrac{E}{2C}\right)^2 - \tfrac{E^2}{4C^2}\right] + F = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad A\left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 - \tfrac{D^2}{4A} + C\left(y + \tfrac{E}{2C}\right)^2 - \tfrac{E^2}{4C} + F = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad A\left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \tfrac{E}{2C}\right)^2 = \tfrac{D^2}{4A} + \tfrac{E^2}{4C} - F \\
&\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{C}\left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 + \tfrac{1}{A}\left(y + \tfrac{E}{2C}\right)^2 = \tfrac{1}{AC}\left(\tfrac{D^2}{4A} + \tfrac{E^2}{4C} - F\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{C}\left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 + \tfrac{1}{A}\left(y + \tfrac{E}{2C}\right)^2 = \tfrac{CD^2 + AE^2 - F}{4A^2C^2}.
\end{aligned}$$

Suponhamos, inicialmente, que A e C tenham o mesmo sinal. Sem perda de generalidade, podemos supor ambos positivos.

Sendo

$$M = \frac{CD^2 + AE^2 - F}{4A^2C^2}$$

consideremos a equação

$$\frac{1}{C}\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \frac{1}{A}\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = M. \tag{6.7}$$

Se $M > 0$ (isto é, se $CD^2 + AE^2 - F > 0$), então (6.7) representa uma elipse.

Se $M = 0$ (isto é, se $CD^2 + AE^2 - F = 0$), então (6.7) representa um ponto.

Se $M < 0$ (isto é, se $CD^2 + AE^2 - F < 0$), então (6.7) representa o conjunto vazio.

Suponhamos, agora, que A e C tenham sinais diferentes.

Se $M \neq 0$ (isto é, se $CD^2 + AE^2 - F \neq 0$), então (6.7) representa uma hipérbole.

Se $M = 0$ (isto é, se $CD^2 + AE^2 - F = 0$), então (6.7) representa um par de retas concorrentes.

6.4.2 *A equação de segundo grau completa*

Considere a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $B \neq 0$. Veremos como uma rotação apropriada do sistema de eixos ortogonais pode eliminar o termo misto da equação.

Vamos aplicar as equações de transformação para uma rotação (Teorema 6.11), substituindo

$$\begin{cases} x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ e obtendo

$$A(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)^2 + B(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) +$$

$$+C(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)^2 + D(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta) +$$

$$+E(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) + F = 0.$$

Desenvolvendo, temos:

$$A(x'^2 \cos^2\theta - 2x'y' \cos\theta \operatorname{sen}\theta + y'^2 \operatorname{sen}^2\theta) +$$

$$+B(x'^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta + x'y' \cos^2\theta - x'y' \operatorname{sen}^2\theta - y'^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta) +$$

$$+C(x' \operatorname{sen}^2\theta + 2x'y' \operatorname{sen}\theta \cos\theta + y' \cos^2\theta) +$$

$$+Dx' \cos\theta - Dy' \operatorname{sen}\theta + Ex' \operatorname{sen}\theta + Ey' \cos\theta + F = 0.$$

Logo,

$$Ax'^2 \cos^2\theta - 2Ax'y' \cos\theta \operatorname{sen}\theta + Ay'^2 \operatorname{sen}^2\theta + Bx'^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta +$$

$$+Bx'y' \cos^2\theta - Bx'y' \operatorname{sen}^2\theta - By^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + Cx'^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2cx'y' \operatorname{sen}\theta \cos\theta +$$

$$+Cy'^2 \cos^2\theta + Dx' \cos\theta - Dy' \operatorname{sen}\theta + Ex' \operatorname{sen}\theta + Ey' \cos\theta + F = 0.$$

Juntando os termos semelhantes e aplicando as regras de arco duplo obtemos

$$x'^2(A \cos^2\theta + B \cos\theta \operatorname{sen}\theta + C \operatorname{sen}^2\theta) +$$

$$+x'y'((C - A)\,\text{sen}(2\theta) + B\cos(2\theta))+$$
$$+y'^2(A\,\text{sen}^2\theta - B\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta)+$$
$$+x'(D\cos\theta + E\,\text{sen}\,\theta)+$$
$$+y'(-D\,\text{sen}\,\theta + E\cos\theta)+$$
$$+F = 0.$$

Como queremos que não haja termo $x'y'$, devemos fazer

$$(C - A)\,\text{sen}(2\theta) + B\cos(2\theta) = 0$$

ou seja

$$B\cos(2\theta) = (A - C)\,\text{sen}(2\theta). \tag{6.8}$$

Caso $A \neq C$, temos

$$\text{tg}(2\theta) = \frac{\text{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{B}{A - C}.$$

Caso $A = C$, a equação (6.8) se reduz à forma $B\cos(2\theta) = 0$, que é equivalente a $\cos(2\theta) = 0$, o que nos leva a

$$\theta = 45^\circ$$

pois $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$.

Atividade 36. Jogo da natureza do lugar geométrico.

Tempo previsto para a atividade: 30 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; régua; lousa e giz.

Pré-requisitos: razões trigonométricas; relações trigonométricas; resolução de sistema linear.

Peças e regras do jogo:

1. A equação de segundo grau $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$
2. A equação geral de segundo grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
3. $\text{tg}(2\theta) = \frac{B}{A-C}$
4. $\cos(2\theta) = \frac{1}{\sec(2\theta)} = \frac{1}{\sqrt{\text{tg}^2(2\theta)+1}}$
5. $\text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$

6. $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$

7. $\begin{cases} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{cases}$

Jogadas a executar:

1. Comparando as fórmulas das Regras 1 e 2, identificar e anotar os coeficientes A, B e C.
2. Usando a Regra 3, calcular $\operatorname{tg}(2\theta)$.
3. Usando o valor do item anterior e a Regra 4, calcular $\cos(2\theta)$.
4. Usando o item anterior e as Regras 5 e 6, calcular $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$.
5. Usando os itens anteriores e as Regras 7 e 8, calcular as equações de transformações.
6. Substituir as equações de transformação dadas na Regra 7 na equação dada na Regra 1.
7. Com o resultado do item anterior, identificar a natureza do lugar geométrico.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

$A = 4$, $B = -24$ e $C = 11$.

Jogada 2:

$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A-C} = \frac{-24}{4-11} = \frac{24}{7}$.

Jogada 3:

$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(2\theta)+1}} = \frac{7}{25}$.

Jogada 4:

$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ e $\cos\theta = \frac{4}{5}$.

Jogada 5:

$x = \frac{4x'-3y'}{5}$ e $y = \frac{3x'+4y'}{5}$.

Jogada 6:

Após substituição e cálculos obtemos $x'^2 - 4y'^2 = 4$, ou seja, $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

Jogada 7: Hipérbole.

■

O indicador

Vimos que ao aplicar as equações de transformação para uma rotação (Teorema 6.11)

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ obtemos a equação

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0 \tag{6.9}$$

em que

$$A' = A\cos^2\theta + B\cos\theta\operatorname{sen}\theta + C\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$B' = (C - A)\operatorname{sen}(2\theta) + B\cos(2\theta))$$

$$C' = (A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$

$$D' = D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta$$

$$E' = -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta$$

$$F' = F.$$

É possível verificar que $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$, e isso independe da rotação feita. Em particular, para a rotação tal que $B' = 0$ temos que $B^2 - 4AC = -4A'C'$.

Se $A' = 0$ ou $C' = 0$, então (6.9) representa uma parábola ou uma parábola degenerada, de acordo com o que vimos na Subseção 6.4.1. Mas $A' = 0$ ou $C' = 0$ se, e somente se, $B^2 - 4AC = 0$.

Se A' e B' são não nulos e têm o mesmo sinal, então (6.9) representa uma elipse ou uma elipse degenerada, de acordo com o que vimos na Subseção 6.4.1. Mas A' e B' têm o mesmo sinal se, e somente se, $B^2 - 4AC < 0$.

Por fim, se A' e B' são não nulos e têm sinais opostos, então (6.9) representa uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada, de acordo com o que vimos na Subseção 6.4.1. Mas A' e B' têm sinais opostos se, e somente se, $B^2 - 4AC > 0$.

Denotemos por I o número $B^2 - 4AC$, que chamaremos de *indicador*. Acabamos de mostrar o seguinte resultado:

Teorema 6.12. *A equação de segundo grau*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa:

- *uma parábola (ou parábola degenerada) se* $I = 0$*;*
- *uma elipse (ou elipse degenerada) se* $I < 0$*;*
- *uma hipérbole (ou hipérbole degenerada) se* $I > 0$*.*

Para encerrar, iremos jogar uma nova versão do jogo anterior.

Atividade 37. Jogo do indicador $I = B^2 - 4AC$.

Tempo previsto para a atividade: 15 minutos.

Recursos educacionais/tecnológicos: texto impresso com a atividade; caderno; lápis; borracha; régua; lousa e giz.

Pré-requisitos: operações com números reais.

Peças e regras do jogo:

1. A equação de segundo grau $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$.
2. A equação geral de segundo grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
3. O indicador $I = B^2 - 4AC$.
4. A equação representa uma parábola se $I = 0$.
5. A equação representa uma elipse se $I < 0$.
6. A equação representa uma hipérbole se $I > 0$.

Jogadas a executar:

1. Comparando as fórmulas das Regras 1 e 2, identificar e anotar os coeficientes A, B e C.
2. Usando a Regra 3, calcular o indicador.
3. Usando o item anterior e as Regras 4, 5 e 6, identificar a natureza do lugar geométrico.

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO.

Jogada 1:

$A = 4$, $B = -24$ e $C = 11$.

Jogada 2:

$I = B^2 - 4AC = 576 - 176 = 400$.

Jogada 3:

Como $I = 400 > 0$ a curva é uma hipérbole, por aplicação da Regra 6.

■

6.5 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PREVISTAS NA BNCC

Elencamos, aqui, as competências e habilidades previstas na BNCC que foram trabalhadas neste capítulo.

Competências:

- (CEF3) Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
- (CEF6) Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
- (CEM3) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
- (CEM5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade,

ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

- (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representa-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização.
- Habilidade específica, não prevista explicitamente: Aplicar uma fórmula deduzida para resolver problema matemático.
- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- Habilidade específica, não prevista explicitamente: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau de duas variáveis em representações geométricas no plano cartesiano, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
- Habilidade específica, não prevista explicitamente: Aplicar a álgebra linear, mais particularmente determinantes, na resolução de problemas de geometria analítica, de modo a fazer a álgebra dialogar com a geometria.
- Habilidade específica, não prevista explicitamente: Aplicar trigonometria na resolução de problemas de geometria analítica, de modo a dialogar álgebra e geometria.

A

OS AXIOMAS DE HILBERT PARA A GEOMETRIA PLANA

Neste apêndice, enunciaremos os axiomas de Hilbert para a geometria plana. As principais referências utilizadas aqui são [4] e [7].

Termos primitivos:

- Ponto.
- Reta.

Relações primitivas:

- Estar sobre (relação binária entre ponto e reta).
- Estar entre (relação ternária entre pontos).
- Congruência de segmentos de reta (relação binária entre segmentos de reta).
- Congruência de ângulos (relação binária entre ângulos).

As definições de segmento de reta e ângulo, entre outras necessárias para enunciar os axiomas, serão dadas na Seção A.3.

A.1 AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

1. Dados dois pontos distintos A e B, existe uma única reta r sobre a qual A e B estão (a qual será denotada por AB).
2. Sobre toda reta estão pelo menos dois pontos.

3. Existem pelo menos três pontos não colineares (isto é, que não estão sobre uma mesma reta).

A.2 AXIOMAS DE ORDEM

1. Se um ponto B está entre os pontos A e C (e isto será denotado por $A - B - C$), então A, B e C são três pontos distintos sobre uma mesma reta, e também vale que $C - B - A$ (ou seja, que B está entre C e A).
2. Dados quaisquer dois pontos distintos A e B, existe um ponto C sobre a reta AB tal que $A - B - C$.
3. Se A, B e C são três pontos distintos sobre uma mesma reta, então um, e somente um, está entre os outros dois.
4. (Axioma de Pasch) Sejam A, B e C três pontos não colineares e seja r uma reta sobre a qual nenhum dos pontos A, B e C está. Se r passa por um ponto D que está entre A e B, então r também deve passar por um outro ponto que ou está entre A e C, ou está entre B e C.

A.3 AXIOMAS DE CONGRUÊNCIA

Definição A.1. Dados dois pontos distintos A e B, o *segmento de reta* $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os pontos que estão entre A e B. Os pontos A e B são chamados de *extremos* do segmento $\overline{AB}$.

Definição A.2. Dados dois pontos distintos A e B, a *semirreta* $\overrightarrow{AB}$ consiste de todos os pontos da reta AB que estão entre A e B, do ponto B e de todos os pontos C tais que B está entre A e C. Dizemos que o ponto A é a *origem* da semirreta $\overrightarrow{AB}$.

Definição A.3. Um *ângulo* é a união de duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ que se originam num mesmo ponto (A, no caso), chamado de *vértice* do ângulo. As semirretas que o compõem chamam-se os *lados* do ângulo. Escreveremos $\angle BAC$ (ou $\angle CAB$) para denotá-lo.

Definição A.4. Um *triângulo* é a união de três segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ no caso em que os pontos A, B e C não são colineares. Os pontos A, B e C são chamados de *vértices* e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são chamados de *lados* do triângulo ABC.

A.3.1 *Axiomas de congruência para segmentos de reta*

No que segue, escreveremos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ para indicar que o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{CD}$.

1. Dados um segmento de reta $\overline{AB}$ e uma semirreta r com origem num ponto C, existe um único ponto D na semirreta r tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
2. Dados segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$, se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, então $\overline{CD} \cong \overline{EF}$. Todo segmento de reta é congruente a si mesmo.
3. Para quaisquer três pontos A, B e C tais que $A - B - C$ e quaiquer outros três outros pontos D, E e F tais que $D - E - F$, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

A.3.2 *Axiomas de congruência para ângulos*

No que segue, escreveremos $\angle BAC \cong \angle EDF$ para indicar que o ângulo $\angle BAC$ é congruente ao ângulo $\angle EDF$.

1. Dado um ângulo $\angle BAC$ cujos lados não estão sobre uma mesma reta e dada uma semirreta $\overrightarrow{DF}$, existe, num dado lado da reta DF, uma única semirreta $\overrightarrow{DE}$ tal que $\angle BAC \cong \angle EDF$.[1]
2. Dados três ângulos α, β e γ, se $\alpha \cong \beta$ e $\alpha \cong \gamma$, então $\beta \cong \gamma$.
3. (LAL) Dados dois triângulos ABC e DEF, suponha que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$. Então os dois triângulos são congruentes (ou seja, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle ACB \cong \angle DFE$).

1 Utilizando os axiomas de incidência e ordem, é possível mostrar que o conjunto dos pontos do plano que não estão sobre uma dada reta r pode ser dividido em dois subconjuntos não vazios tais que: (1) dois pontos A e B que não estão sobre a reta r pertencem a um mesmo subconjunto se, e somente se, o segmento $\overline{AB}$ não intersecta r; (2) dois pontos A e B que não estão sobre a reta r pertencem a subconjuntos distintos se, e somente se, o segmento $\overline{AB}$ intersecta r em um ponto. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7]. Cada um desses subconjuntos é denominado um *lado* de r.

A.4 AXIOMA DAS PARALELAS

1. Para cada reta r e cada ponto P que não está sobre r, existe no máximo uma reta que passa por P e não intersecta r.

A.5 AXIOMAS DE CONTINUIDADE

1. (Axioma de Arquimedes) Dados segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, existe um número natural n tal que, se dispusermos n cópias justapostas do segmento $\overline{CD}$ sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$ partindo do ponto A, obteremos um novo segmento $\overline{AE}$ de modo que $A - B - E$.
2. (Axioma da completude) O sistema de pontos de uma reta, com suas relações de ordem e congruência, não pode ser estendido de modo que as relações existentes entre seus elementos, bem como as propriedades de ordem e congruência na reta resultantes dos axiomas dos grupos A.1, A.2, A.3.1 e do axioma de Arquimedes, permaneçam válidas.

Conforme [4], os axiomas de continuidade listados acima podem ser substituídos pelo axioma de Dedekind, enunciado a seguir:

Axioma (de Dedekind). *Se o conjunto de todos pontos de uma reta r são divididos em dois subconjuntos não vazios S e T de modo que nenhum ponto de S está entre dois pontos de T e nenhum ponto de T está entre dois pontos de S, então existe um (único) ponto P em algum desses subconjuntos que está entre qualquer outro ponto desse conjunto e qualquer ponto do outro conjunto.*

B

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS VIA CORTES DE DEDEKIND

Com a finalidade de democratizar os cortes de Dedekind, apresentamos abaixo uma construção rigorosa dos números reais, feita pelo professor Chico Miraglia em 1978. A principal referência utilizada aqui é [19].

B.1 UMA BREVE REVISÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Supondo conhecido o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$$

com as operações usuais de adição e multiplicação, e sendo $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, definimos o conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

de modo que

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \iff mq = np.$$

No conjunto $\mathbb{Q}$, definimos as seguintes operações binárias, chamadas, respectivamente, de adição e multiplicação:

$$\begin{array}{rccl} + & : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ & & \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) & \mapsto & \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{np} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \cdot & : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ & & \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) & \mapsto & \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{np}. \end{array}$$

Além dessas duas operações, está definida em $\mathbb{Q}$ a seguinte relação de ordem:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \iff mq \leq np$$

onde, sem perda de generalidade, consideramos $n, q > 0$.

Com algum esforço, podemos provar que as operações de adição e multiplicação e que a relação de ordem acima descritas gozam das seguintes propriedades:

(A1) (Associatividade da adição) $x + (y + z) = (x + y) + z$ quaisquer que sejam os racionais x, y e z.

(A2) (Comutatividade da adição) $x + y = y + x$ quaisquer que sejam os racionais x e y.

(A3) (Existência de elemento neutro para a adição) Existe um (único) racional, 0, tal que $x + 0 = x$ qualquer que seja x racional.

(A4) (Existência de elemento oposto para a adição) Para cada racional x, existe um (único) racional, que será denotado por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.

(M1) (Associatividade da multiplicação) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ quaisquer que sejam os racionais x, y e z.

(M2) (Comutatividade da multiplicação) $x \cdot y = y \cdot x$ quaisquer que sejam os racionais x e y.

(M3) (Existência de elemento neutro para a multiplicação) Existe um (único) racional, 1, tal que $x \cdot 1 = x$ qualquer que seja x racional.

(M4) (Existência de elemento inverso para a multiplicação) Para cada racional $x \neq 0$ existe um (único) racional, que será denotado por $\frac{1}{x}$, tal que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

(D) (Distributividade) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ quaisquer que sejam os racionais x, y e z.

(O1) (Compatibilidade da ordem com a adição) $y \leq z \implies x + y \leq x + z$ quaisquer que sejam os racionais x, y e z.

(O2) (Compatibilidade da ordem com a multiplicação) $y \leq z$ e $x \geq 0 \implies x \cdot y \leq x \cdot z$ quaisquer que sejam os racionais x, y e z.

Essas 11 propriedades fazem com que a estrutura algébrica $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ seja um *corpo ordenado*.

Definição B.1. Seja α um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Dizemos que:

1. *α não tem primeiro elemento* se, para todo $r \in \alpha$, existe $s \in \alpha$ tal que $s < r$.
2. *α não tem último elemento* se, para todo $r \in \alpha$, existe $t \in \alpha$ tal que $r < t$.

Por exemplo, fixado $q \in \mathbb{Q}$, temos que o conjunto

$$\alpha_q = \{r \in \mathbb{Q} : r > q\}$$

não tem primeiro elemento. De fato, se $r \in \alpha_q$, então

$$q = \frac{q}{2} + \frac{q}{2} < \frac{q}{2} + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Tomando

$$s = \frac{q+r}{2}$$

temos que $s \in \alpha_q$ e $s < r$, o que completa nossa prova. Analogamente, o conjunto $\{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$ não tem último elemento.

Também podemos mostrar que o conjunto

$$\alpha_{\sqrt{2}} = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r^2 > 2\}$$

não tem primeiro elemento e que o conjunto $\mathbb{Q} \setminus \alpha_{\sqrt{2}}$ não tem último elemento. Com isso, encontramos um "buraco" em $\mathbb{Q}$.

Para mostrar que $\alpha_{\sqrt{2}} = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r^2 > 2\}$ não tem primeiro elemento, tomemos $r \in \alpha_{\sqrt{2}}$ e definamos $s = \frac{r}{2} + \frac{1}{r}$. Temos que $s = \frac{r}{2} + \frac{1}{r} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Vamos, agora, provar que $s \in \alpha_{\sqrt{2}}$. Para isto, notemos que

$$s = \frac{r}{2} + \frac{1}{r} = \frac{r^2+2}{2r} = \frac{2r^2 - r^2 + 2}{2r} = \frac{2r^2}{2r} - \frac{r^2-2}{2r} = r - \frac{r^2-2}{2r}$$

e, portanto,

$$s^2 = \left(r - \frac{r^2-2}{2r}\right)^2 = r^2 - (r^2-2) + \left(\frac{r^2-2}{2r}\right)^2 > r^2 - (r^2-2) = r^2 - r^2 + 2 = 2.$$

Logo, $s^2 > 2$ e, portanto, $s \in \alpha_{\sqrt{2}}$.[1]

Vamos mostrar que $\mathbb{Q} \setminus \alpha_{\sqrt{2}}$ não tem último elemento. Para tanto, vamos primeiro provar que o quadrado de um número racional é sempre diferente de 2. Depois, bastará provar que o conjunto $\{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r^2 < 2\}$ não tem último elemento.

1 Esta demonstração apoiou-se em [24].

De fato, suponhamos por absurdo que exista um racional r tal que $r^2 = 2$. Vamos escolher para representar r um elemento de sua classe de equivalência que seja dado por uma fração irredutível $\frac{m}{n}$, ou seja, tal que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$. Como $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, temos que $m^2 = 2n^2$. Desse modo, m^2 é par e, portanto, m também é par. Assim $m = 2t$ para algum $t \in \mathbb{Z}$. Como podemos escrever

$$(2t)^2 = 2n^2 \implies 4t^2 = 2n^2 \implies 2t^2 = n^2$$

chegamos à conclusão que n^2 é par e, portanto, n também é par, um absurdo! Portanto, o quadrado de um número racional é sempre diferente de 2.

Mostremos, agora, que o conjunto $\{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r^2 < 2\}$ não tem último elemento. De fato, seja r um elemento desse conjunto. Tomemos $q = r + h$ com $0 < h < 1$ e $h < \frac{2-r^2}{2r+1}$. Claramente, $q > r > 0$. Assim, basta verificarmos que $q^2 < 2$ para concluirmos que $q \in \{r > 0 : r^2 < 2\}$. Temos que

$$q^2 = (r+h)^2 = r^2 + 2rh + h^2 = r^2 + (2r+h)h < r^2 + (2r+1)h < r^2 + 2 - r^2 = 2.$$

Logo, $q^2 < 2$ e, portanto, $q \in \{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r^2 < 2\}$.

B.2 OS CORTES DE DEDEKIND

Richard Dedekind (1831-1916) foi um matemático alemão que apresentou uma construção do conjunto dos números reais a partir do conjunto dos números racionais. Como vimos, os racionais tem "buracos" — por exemplo, aquele que deveria corresponder a um número cujo quadrado é 2. A ideia de Dedekind para "tapar" esses buracos foi conceber cada número real como sendo univocamente determinado pelo conjunto formado por todos os números racionais estritamente maiores que ele. Assim, cada número real será definido como uma semirreta de racionais, sem fim para a direita, sem primeiro elemento e diferente de todo $\mathbb{Q}$.

Vejamos a definição formal de *corte de Dedekind*.

Definição B.2. Um conjunto não vazio α de números racionais é denominado um *corte de Dedekind* se as seguintes condições estão satisfeitas:

1. $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

2. se $r \in \alpha$ e $s \in \mathbb{Q}$ é tal que $s > r$, então $s \in \alpha$;

3. α não tem primeiro elemento.

Denotaremos por $\mathcal{D}$ o conjunto dos cortes de Dedekind.

Note que, dado $q \in \mathbb{Q}$, o conjunto

$$\alpha_q = \{r \in \mathbb{Q} : r > q\}$$

é um corte de Dedekind. De fato, como $q \notin \alpha_q$, $\alpha_q \neq \mathbb{Q}$. Além disso, tomemos $r \in \alpha_q$ e $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s > r$. Assim, $s > r > q \implies s > q$ e, portanto $s \in \alpha_q$. Já provamos anteriormente que α_r não tem primeiro elemento.

Um outro exemplo de corte de Dedekind é o conjunto

$$\alpha_{\sqrt{2}} = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r^2 > 2\}.$$

De fato, esse conjunto é claramente diferente de $\mathbb{Q}$. Ademais, se $r \in \alpha_{\sqrt{2}}$ e $s \in \mathbb{Q}$ com $s > r$, então $s^2 > r^2 > 2$ e, portanto, $s \in \alpha_{\sqrt{2}}$. Por fim, já provamos anteriormente que $\alpha_{\sqrt{2}}$ não tem primeiro elemento.

B.2.1 *A relação de ordem em $\mathcal{D}$*

Definição B.3. Sejam α e β cortes de Dedekind. Dizemos que $\alpha \leq \beta$ se $\alpha \supseteq \beta$.

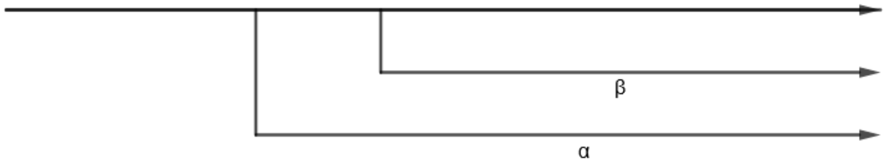

Figura B.1: Relação de ordem em $\mathcal{D}$. (Fonte: [19])

Como é usual, escreveremos $\alpha < \beta$ para indicar que $\alpha \leq \beta$ e $\alpha \neq \beta$.

A relação $\leq$ em $\mathcal{D}$ é claramente reflexiva, antissimétrica e transitiva — sendo, portanto, uma relação de ordem. Mostraremos a seguir que ela é uma relação de ordem *total*, ou seja, que quaisquer dois cortes de Dedekind são comparáveis por meio dela. Para isto, o lema abaixo será utilizado.

Lema B.4. *Sejam α e β cortes de Dedekind. Então:*

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \exists r \in \alpha \ \forall s \in \beta \ (r < s).$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$: Suponha $\alpha < \beta$. Então $\beta \subsetneq \alpha$. Logo $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$. Tome $r \in \alpha \setminus \beta$ e considere $s \in \beta$ arbitrário. Como, em $\mathbb{Q}$, vale a tricotomia, temos que $r < s$, uma vez que $r \neq s$ (pois $s \in \beta$ e $r \notin \beta$) e não vale $s < r$ (pois β é corte, $s \in \beta$ e $r \notin \beta$). Como $s \in \beta$ é arbitrário, $r < s$ para todo $s \in \beta$.

$(\Leftarrow)$: Vamos mostrar que $\alpha < \beta$, ou seja, que $\beta \subsetneq \alpha$. Por hipótese, existe $r \in \alpha$ tal que $r < s$, qualquer que seja $s \in \beta$. Em particular, $r \notin \beta$ (pois não vale $r < r$). Assim, $\alpha \neq \beta$. Seja $s \in \beta$ arbitrário. Como α é corte, $r \in \alpha$ e $r < s$, temos que $s \in \alpha$. Logo $\beta \subseteq \alpha$. Portanto, $\beta \subsetneq \alpha$, ou seja, $\alpha < \beta$. □

Proposição B.5. *Se $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, então ou $\alpha < \beta$, ou $\alpha = \beta$, ou $\alpha > \beta$.*

Demonstração. Suponhamos que não valha $\alpha < \beta$ e nem valha $\alpha = \beta$. Mostraremos que vale $\alpha > \beta$, ou seja, que $\alpha \subsetneq \beta$.

Como não vale $\alpha < \beta$, do Lema B.4 segue que $\forall r \in \alpha\ \exists s \in \beta$ tal que $s \leq r$. Do fato de β ser um corte e $s \in \beta$ concluímos que $r \in \beta$. Logo, $\alpha \subseteq \beta$. Como $\alpha \neq \beta$, por hipótese, segue que $\alpha \subsetneq \beta$. Logo, $\beta < \alpha$. $\square$

Vamos, a seguir, definir ínfimo e supremo de um conjunto de cortes de Dedekind.

Definição B.6. Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

1. Dizemos que $\mathcal{A}$ é *limitado inferiormente* se existe $\alpha \in \mathcal{D}$ tal que $\alpha \leq \beta$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$.
2. Dizemos que $\mathcal{A}$ é *limitado superiormente* se existe $\alpha \in \mathcal{D}$ tal que $\beta \leq \alpha$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$.
3. Dizemos que $\alpha \in \mathcal{D}$ é *ínfimo* de $\mathcal{A}$ (e escrevemos $\alpha = \inf \mathcal{A}$) se as seguintes condições estão satisfeitas:
   a) $\alpha \leq \beta$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$;
   b) se $\gamma \in \mathcal{D}$ é tal que $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$, então $\gamma \leq \alpha$.
4. Dizemos que $\alpha \in \mathcal{D}$ é *supremo* de $\mathcal{A}$ (e escrevemos $\alpha = \sup \mathcal{A}$) se as seguintes condições estão satisfeitas:
   a) $\alpha \geq \beta$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$;
   b) se $\gamma \in \mathcal{D}$ é tal que $\gamma \geq \beta$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$, então $\gamma \geq \alpha$.

Antes de continuarmos, vamos demonstrar um lema que usaremos em seguida.

Lema B.7. *Seja $\mathcal{A}$ um conjunto não vazio de cortes de Dedekind. Considere*

$$\alpha_{\mathcal{A}} = \{r \in \mathbb{Q} : \text{ existe } \alpha \in \mathcal{A} \text{ tal que } r \in \alpha\}.$$

Então $\alpha_{\mathcal{A}} \in \mathcal{D}$ se, e somente se $\alpha_{\mathcal{A}} \neq \mathbb{Q}$ (ou seja, a união de cortes é um corte se, e somente se, for diferente do conjunto dos números racionais).

Demonstração. De um lado, suponhamos que $\alpha_{\mathcal{A}}$ seja um corte. Da definição de corte segue que $\alpha_{\mathcal{A}} \neq \mathbb{Q}$.

De outro lado, suponhamos que $\alpha_{\mathcal{A}} \neq \mathbb{Q}$. Devemos verificar as outras duas condições da definição de corte de Dedekind.

Para verificar a terceira condição, devemos mostrar que $\alpha_{\mathcal{A}}$ não tem primeiro elemento. Dado $r \in \alpha_{\mathcal{A}}$, deve existir $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $r \in \alpha$. Como α é um corte, podemos escolher $r' \in \alpha$, tal que $r' < r$ (pois α não tem primeiro elemento). Então, $r' \in \alpha_{\mathcal{A}}$ (pois $r' \in \alpha$ e $\alpha \in \mathcal{A}$) e $r' < r$, o que demonstra que $\alpha_{\mathcal{A}}$ não tem primeiro elemento.

Para verificar a segunda condição, tomemos $r \in \alpha_{\mathcal{A}}$ e $r' \geq r$. Podemos achar $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $r \in \alpha$. Como α é um corte e $r' \geq r$, temos que $r' \in \alpha$. Logo, $r' \in \alpha_{\mathcal{A}}$. $\square$

Teorema B.8. *Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ é não vazio e limitado inferiormente, então existe* $\inf \mathcal{A}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ não vazio e limitado inferiormente. Consideremos

$$\alpha_{\mathcal{A}} = \{r \in \mathbb{Q} : \text{ existe } \alpha \in \mathcal{A} \text{ tal que } r \in \alpha\}.$$

Vamos mostrar que $\alpha_{\mathcal{A}} = \inf \mathcal{A}$.

Antes de mais nada, precisamos mostrar que $\alpha_{\mathcal{A}} \in \mathcal{D}$. Pelo Lema B.7, basta mostrar que $\alpha_{\mathcal{A}} \neq \mathbb{Q}$. Com efeito, como $\mathcal{A}$ é limitado inferiormente, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que r não pertence a nenhum $\beta \in \mathcal{A}$. Logo, pela definição de $\alpha_{\mathcal{A}}$, temos que $r \notin \alpha_{\mathcal{A}}$ e, portanto, $\alpha_{\mathcal{A}} \neq \mathbb{Q}$ (e, consequentemente, $\alpha_{\mathcal{A}} \in \mathcal{D}$).

Além disso, como $\alpha_{\mathcal{A}} \supseteq \beta$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$, temos que $\alpha_{\mathcal{A}} \leq \beta$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$.

Finalmente, tomemos $\gamma \in \mathcal{D}$ tal que $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$. Assim, $\gamma \supseteq \beta$ para todo $\beta \in \mathcal{A}$ e, portanto, $\gamma \supseteq \alpha_{\mathcal{A}}$.

Logo, $\alpha_{\mathcal{A}} = \inf \mathcal{A}$. $\square$

Observamos que os racionais não possuem a propriedade expressa pelo Teorema B.8, pois o corte $\alpha_{\sqrt{2}} = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r^2 > 2\}$ é limitado inferiormente e, como provado anteriormente, não tem ínfimo pertencente a $\mathbb{Q}$.

B.2.2 *Soma de cortes de Dedekind*

Nesta subseção, definiremos uma operação de adição sobre o conjunto $\mathcal{D}$ e mostraremos que ela satisfaz as propriedades desejadas.

Definição B.9. Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$. Definimos

$$\alpha + \beta = \{r + s : r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\}.$$

A primeira coisa que faremos é mostrar que se $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, então $\alpha + \beta \in \mathcal{D}$. Deste modo, teremos, de fato, definido uma operação de adição sobre o conjunto $\mathcal{D}$.

Proposição B.10. *Se $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, então $\alpha + \beta \in \mathcal{D}$.*

Demonstração. Devemos mostrar que a soma cumpre as condições de definição de corte de Dedekind.

Inicialmente está claro que $\alpha + \beta \neq \emptyset$, pois, como α e β são cortes, ambos são não vazios e, portanto, existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Logo, $r + s \in \alpha + \beta$ e, portanto, $\alpha + \beta \neq \emptyset$.

(i) Provemos que $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$.

Para tanto, vamos mostrar que existe um elemento de $\mathbb{Q}$ que não está em $\alpha + \beta$.

Tomemos p_1 e p_2 em $\mathbb{Q}$ tais que $p_1 < r$ para todo $r \in \alpha$ e $p_2 < s$ para todo $s \in \beta$. Então, $p_1 + p_2 \notin \alpha + \beta$, apesar de pertencer a $\mathbb{Q}$, pois caso $p_1 + p_2$ pertencesse a $\alpha + \beta$, teríamos $p_1 + p_2 = r + s$, para algum $r \in \alpha$ e algum $s \in \beta$, ou seja, $p_1 = r + (s - p_2) > r$, o que é um absurdo, já que p_1 foi escolhido menor que todo r em α.

(ii) Provemos que se $t \in \alpha + \beta$ e $t' \geq t$, então $t' \in \alpha + \beta$.

Como $t \in \alpha + \beta$, podemos escrever $t = r + s$, com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como $t' \geq t$, temos $t' \geq r + s$, ou seja, $t' - r \geq s$. E, como $s \in \beta$, temos $t' - r \in \beta$ (pois β é corte). Assim, podemos reescrever o número t' como sendo $t' = r + (t' - r)$, com $r \in \alpha$ e $t' - r \in \beta$. Portanto, $t' \in \alpha + \beta$.

(iii) Provemos, por fim, que $\alpha + \beta$ não tem primeiro elemento.

Seja $r + s \in \alpha + \beta$, com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como α é corte, α não tem primeiro elemento. Logo, existe $r' \in \alpha$ tal que $r' < r$. De modo análogo, existe $s' \in \beta$ tal que $s' < s$. Então, podemos escrever $r' + s' < r' + s < r + s$, o que demonstra que $\alpha + \beta$ não tem primeiro elemento. □

Vamos, agora, verificar que esta operação de adição em $\mathcal{D}$ satisfaz as propriedades comutativa e associativa.

Proposição B.11. *Se $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, então $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.*

Demonstração. Da definição de soma de cortes e da comutatividade da adição de racionais temos que

$$\alpha + \beta = \{r + s : r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\} = \{s + r : s \in \beta \text{ e } r \in \alpha\} = \beta + \alpha.$$

$\square$

Proposição B.12. *Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{D}$, então $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.*

Demonstração. Novamente, da definição de soma de cortes e da associatividade da adição de racionais temos que

$$\begin{aligned}
\alpha + (\beta + \gamma) &= \{r + u : r \in \alpha \text{ e } u \in \beta + \gamma\} \\
&= \{r + (s + t) : r \in \alpha, s \in \beta, t \in \gamma\} \\
&= \{(r + s) + t) : r \in \alpha, s \in \beta, t \in \gamma\} \\
&= \{v + t : v \in \alpha + \beta \text{ e } t \in \gamma\} \\
&= (\alpha + \beta) + \gamma.
\end{aligned}$$

$\square$

Vimos que se q é um número racional, então o conjunto $\alpha_q = \{r \in \mathbb{Q} : r > q\}$ é um corte de Dedekind. Em particular, o conjunto

$$\alpha_0 = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$$

é um corte de Dedekind. No que segue, denotaremos α_0 por $\mathbf{0}$.

Proposição B.13. *Se $\alpha \in \mathcal{D}$, então $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\alpha + \mathbf{0} \subseteq \alpha$ e $\alpha \subseteq \alpha + \mathbf{0}$.

Tomemos $t \in \alpha + \mathbf{0} = \{r + s : r \in \alpha \text{ e } s \in \mathbf{0}\}$. Assim, $t = r + s$ para algum $r \in \alpha$ e algum $s \in \mathbf{0}$. Como $s > 0$, temos que $t > r$. E como α é um corte e $r \in \alpha$, concluímos que $t \in \alpha$. Logo $\alpha + \mathbf{0} \subseteq \alpha$.

Seja, agora, $r \in \alpha$. Precisamos mostrar que $r = r' + s$ para algum $r' \in \alpha$ e algum $s > 0$. Como α não tem primeiro elemento, existe $r' \in \alpha$ tal que $r' < r$. Então, $r = r' + (r - r')$. Logo, $r \in \alpha + \mathbf{0}$. Isto prova que $\alpha \subseteq \alpha + \mathbf{0}$.

Portanto, $\alpha = \alpha + \mathbf{0}$. $\square$

Nosso próximo passo é determinar um elemento oposto a um corte de Dedekind α dado, ou seja, encontrar um corte de Dedekind $-\alpha$ tal que $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$.

Definição B.14. Dado $\alpha \in \mathcal{D}$, definimos

$$-\alpha = \{r \in \mathbb{Q} : -r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha \text{ e } -r \text{ não é o último elemento de } \mathbb{Q} \setminus \alpha\}.$$

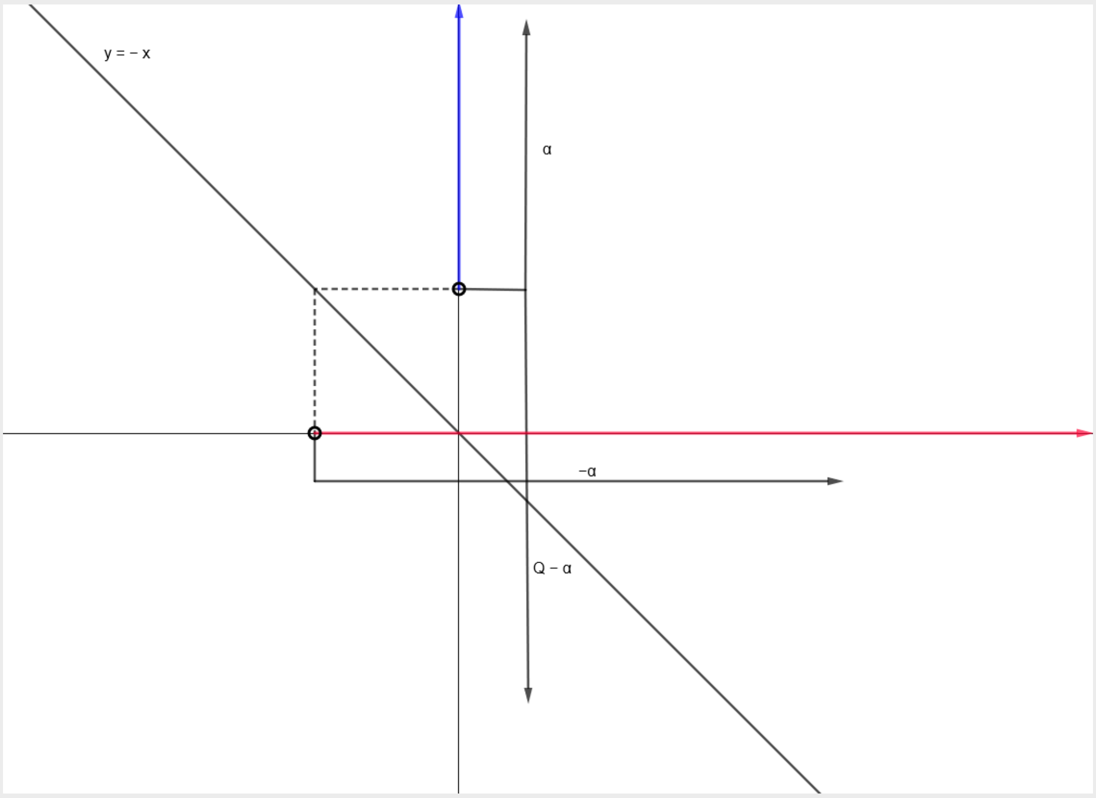

Figura B.2: Ilustração do corte oposto inspirada em [19]. (Fonte: elaboração do autor)

Antes de mais nada, mostraremos que se α é um corte de Dedekind, então $-\alpha$ também o é.

Proposição B.15. *Se $\alpha \in \mathcal{D}$, então $-\alpha \in \mathcal{D}$.*

Demonstração. Vamos verificar as condições da definição de corte de Dedekind.

Inicialmente, notemos que, como α é um corte, $-\alpha \neq \emptyset$.

(i) Provemos que $-\alpha \neq \mathbb{Q}$.

Seja $s \in \alpha$. Então $s > r$, para todo $r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$. Logo, se $t \in -\alpha$, então $-t \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e, portanto, $s > -t$. Logo, $-s < t$ para todo $t \in -\alpha$. Assim, $-s \notin -\alpha$. Disto segue que $-\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Provemos que se $r \in -\alpha$ e $r' \geq r$, então $r' \in -\alpha$.

Se $r \in -\alpha$, então $-r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e $-r$ não é o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$. Como $r' \geq r$, temos que $-r' \leq -r$ e, portanto, $-r' \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e não pode ser o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$, já que é menor ou igual a $-r$. Logo $r' \in -\alpha$.

(iii) Provemos que $-\alpha$ não tem primeiro elemento.

Dado $r \in -\alpha$, como $-r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e não é seu último elemento, podemos escolher $s \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ tal que $s > -r$ e s não é o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ (pois tomando $s' \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ tal que $s' > -r$, temos que $s = \frac{s'-r}{2}$ é tal que $s' > s > -r$). Então $-s < r$ e $-s \in -\alpha$, já que $-(-s) = s \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e não é seu último elemento. $\square$

Na construção dos reais, espera-se que cada corte somado ao seu oposto resulte no corte nulo. Para demonstrarmos que isso realmente acontece, necessitaremos da próxima definição, assim como do próximo lema.

Definição B.16. Sejam $\alpha \in \mathcal{D}$ e $r > 0$ um número racional. O *translado de α por r* é o conjunto $\{q - r : q \in \alpha\}$, que indicaremos por $\alpha - r$.

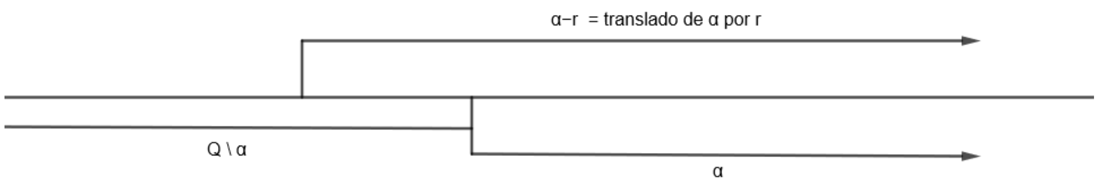

Figura B.3: O translado de α por r. (Fonte: [19])

Lema B.17. *Se $\alpha \in \mathcal{D}$ e $r > 0$ é um racional, então existe $s \in (\mathbb{Q} \setminus \alpha) \cap (\alpha - r)$ tal que s não é o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$.*

Demonstração. Para provarmos este lema é suficiente mostrarmos a seguinte afirmação, com α e r como no enunciado:

$$\text{existe } t \in \alpha \text{ tal que } t - r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha. \tag{B.1}$$

De fato, se admitirmos que (B.1) seja verdadeira, como α é um corte, podemos escolher $t' \in \alpha$ tal que $t' < t$. Logo, $s = t' - r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, pois $t' - r < t - r$, e s não é o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$.

Assim, acabamos de verificar que se (B.1) for verdadeira, então o lema estará demonstrado. Provemos, pois, que (B.1) é verdadeira.

Suponhamos, por absurdo, que (B.1) seja falsa. Logo, para todo $t \in \alpha$, $t - r \in \alpha$. Fixando $t_0 \in \alpha$, teremos que $t_0 - r \in \alpha$. Note também que $t_0 - 2r = (t_0 - r) - r \in \alpha$. Procedendo dessa maneira, concluímos que $t_0 - nr \in \alpha$, para todo natural n.

Contudo, dado q um número racional, a propriedade arquimediana garante a existência de um número natural n tal que $t_0 - q \leq nr$. Assim, $q \geq t_0 - nr$. Como $t_0 - nr \in \alpha$ e α é um corte, concluímos que $q \in \alpha$. Disto segue que $\alpha = \mathbb{Q}$, o que é um absurdo, pois α é um corte. Assim, (B.1) é verdadeira e o lema está provado. □

Proposição B.18. *Se $\alpha \in \mathcal{D}$, então $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$.*

Demonstração. (i) Provemos que $\alpha + (-\alpha) \subseteq \mathbf{0}$.

Seja $u \in \alpha + (-\alpha)$. Então $u = r + s$ para algum $r \in \alpha$ e algum $s \in -\alpha$. Como $s \in -\alpha$, temos que $-s \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e, portanto, $-s < r$. Logo, $r + s > 0$, ou seja, $u = r + s \in \mathbf{0}$. Assim, $\alpha + (-\alpha) \subseteq \mathbf{0}$.

(ii) Provemos que $\mathbf{0} \subseteq \alpha + (-\alpha)$.

Tomemos $t \in \mathbf{0}$. Logo, $t > 0$. Pelo Lema B.17, existe $s \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ tal que $s = r - t$ para algum $r \in \alpha$, de modo que s não seja o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$. Logo, $-s \in -\alpha$. Assim, $t = r - s = r + (-s) \in \alpha + (-\alpha)$. Portanto, $\mathbf{0} \subseteq \alpha + (-\alpha)$. □

Observe que se $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ são tais que $\alpha + \beta = \mathbf{0}$, então $(-\alpha) + (\alpha + \beta) = (-\alpha) + \mathbf{0}$. Logo, $[(-\alpha) + \alpha] + \beta = -\alpha$, ou seja, $[\alpha + (-\alpha)] + \beta = -\alpha$. Disto segue que $\mathbf{0} + \beta = -\alpha$. Portanto, $\beta + \mathbf{0} = -\alpha$, ou seja, $\beta = -\alpha$. Em outras palavras, acabamos de mostrar a unicidade do elemento oposto.

Verificaremos, agora, a compatibilidade da adição com a ordem.

Proposição B.19. *Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{D}$ são tais que $\alpha \leq \beta$, então $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.*

Demonstração. Por hipótese, $\alpha \leq \beta$, ou seja, $\alpha \supseteq \beta$. Queremos mostrar que $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, ou seja, que $\alpha + \gamma \supseteq \beta + \gamma$. Assim, tomemos $w \in \beta + \gamma$. Temos que $w = u + t$ com $u \in \beta$ e $t \in \gamma$. Como $\beta \subseteq \alpha$, concluímos que $u \in \alpha$. Logo, $w = u + t \in \alpha + \gamma$. □

A noção de corte oposto pode ser utilizada para introduzir uma noção de módulo sobre o conjunto dos cortes de Dedekind.

Definição B.20. Se $\alpha \in \mathcal{D}$, definimos o *módulo* de α como

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{se} \quad \alpha \geq \mathbf{0} \\ -\alpha & \text{se} \quad \alpha < \mathbf{0}. \end{cases}$$

Note que se α é um corte de Dedekind, então $|\alpha|$ também o é.

Proposição B.21. *Se $\alpha \in \mathcal{D}$, então $|\alpha| \geq \mathbf{0}$.*

Demonstração. Se $\alpha \geq \mathbf{0}$, temos que $|\alpha| = \alpha \geq \mathbf{0}$.

Se $\alpha < \mathbf{0}$, então $|\alpha| = -\alpha$. Como $\alpha < \mathbf{0}$, deve existir $s < 0$ tal que $s \in \alpha$, pois α é corte e $\alpha \supsetneq \mathbf{0}$. Note que, para cada $r \in -\alpha$, temos que $-r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e, portanto, $-r < s$. Disto segue que $0 < -s < r$ para todo $r \in -\alpha$. Logo, $-\alpha > \mathbf{0}$ e, portanto, $|\alpha| = -\alpha > \mathbf{0}$. □

Seja $\alpha \in \mathcal{D}$. Na demonstração da Proposição B.21, provamos que se $\alpha < \mathbf{0}$, então $-\alpha > \mathbf{0}$. À luz desse resultado, não é difícil notar que:

- $|\alpha| = \mathbf{0}$ se, e somente se, $\alpha = \mathbf{0}$; e
- $\alpha \leq |\alpha|$.

Encerraremos esta seção provando que todo conjunto não vazio de cortes de Dedekind que é limitado superiormente tem supremo. Para isto, verificaremos algumas propriedades do corte oposto que serão utilizadas na demonstração do resultado principal.

Lema B.22. *Se $\alpha \in \mathcal{D}$, então $-(-\alpha) = \alpha$.*

Demonstração. Basta observar que $(-\alpha) + \alpha = \alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$. Da unicidade do elemento oposto segue que $-(-\alpha) = \alpha$. □

Lema B.23. *Se $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, então $-(\alpha + \beta) = (-\alpha) + (-\beta)$.*

Demonstração. Basta observar que $(\alpha+\beta)+[(-\alpha)+(-\beta)]=\mathbf{0}$. De fato,

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)+[(-\alpha)+(-\beta)] &= [(\alpha+\beta)+(-\alpha)]+(-\beta)\\
&= [\alpha+(\beta+(-\alpha))]+(-\beta)\\
&= [\alpha+((-\alpha)+\beta)]+(-\beta)\\
&= [(\alpha+(-\alpha))+\beta]+(-\beta)\\
&= (\mathbf{0}+\beta)+(-\beta)\\
&= \mathbf{0}+(\beta+(-\beta))\\
&= \mathbf{0}+\mathbf{0}\\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

□

Lema B.24. *Sejam $\alpha,\beta\in\mathcal{D}$. Então*

$$\alpha\le\beta \iff -\alpha\ge-\beta.$$

Demonstração. Inicialmente, notemos que se $\alpha=\beta$, então $-\alpha=-\beta$.

Suponhamos, agora, que $\alpha<\beta$. Então, pela Proposição B.19, $\alpha+(-\beta)<\beta+(-\beta)$. Logo, $\alpha+(-\beta)<\mathbf{0}$. Da demonstração da Proposição B.21 segue que $-(\alpha+(-\beta))>\mathbf{0}$. Do Lema B.23 segue que $(-\alpha)+[-(-\beta)]>\mathbf{0}$. Por fim, do Lema B.22 segue que $-\alpha+\beta>\mathbf{0}$. Somando $-\beta$ a ambos os membros obtemos $(-\alpha+\beta)+(-\beta)>\mathbf{0}+(-\beta)$. Logo, $-\alpha=-\alpha+\mathbf{0}=-\alpha+[\beta+(-\beta)]=(-\alpha+\beta)+(-\beta)>\mathbf{0}+(-\beta)>-\beta$, ou seja, $-\alpha>-\beta$.

Reciprocamente, se $-\alpha\ge-\beta$, então $-(-\alpha)\le-(-\beta)$. Assim, $\alpha\le\beta$. □

Teorema B.25. *Se $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{D}$ é não vazio e limitado superiormente, então existe* $\sup\mathcal{A}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{D}$ não vazio e limitado superiormente e considere

$$-\mathcal{A}=\{-\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}.$$

Como $\mathcal{A}$ é limitado superiormente, existe $\beta\in\mathcal{D}$ tal que $\alpha\le\beta$, qualquer que seja $\alpha\in A$. Logo, $-\alpha\ge-\beta$, qualquer que seja $\alpha\in A$. Como $-\beta\in\mathcal{D}$, temos que $-\mathcal{A}$ é limitado inferiormente. Como $-\mathcal{A}\neq\emptyset$ (pois $\mathcal{A}\neq\emptyset$), o Teorema B.8 garante que $-\mathcal{A}$ possui ínfimo. Seja $\gamma\in\mathcal{D}$ o ínfimo de $-\mathcal{A}$.

Temos que $\gamma\le-\alpha$, qualquer que seja $\alpha\in A$. Portanto, $-\gamma\ge\alpha$, qualquer que seja $\alpha\in A$. Logo, $-\gamma$ é cota superior de A.

Como γ é ínfimo de $-\mathcal{A}$, se $\delta \in \mathcal{D}$ é alguma cota inferior de $-\mathcal{A}$, então $\delta \leq \gamma$. Logo $-\delta > -\gamma$, ou seja, $-\gamma$ é a menor cota superior de $\mathcal{A}$. Portanto $-\gamma = \sup A$. □

B.2.3 *Produto de cortes de Dedekind*

Começaremos definido o produto de dois cortes de Dedekind não negativos. Depois, utilizando a noção de módulo introduzida na subseção anterior, definiremos os produto de dois cortes de Dedekind quaisquer.

Definição B.26. Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ tais que $\alpha \geq \mathbf{0}$ e $\beta \geq \mathbf{0}$. Definimos

$$\alpha\beta = \{rs : r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\}.$$

É imediato que $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Proposição B.27. *Se $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ são tais que $\alpha \geq \mathbf{0}$ e $\beta \geq \mathbf{0}$, então $\alpha\beta \in \mathcal{D}$.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração verificando a definição de corte de Dedekind.

Como α e β são cortes, existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Logo, $t = rs \in \alpha\beta$, ou seja, $\alpha\beta \neq \emptyset$.

(i) Como $\alpha \geq \mathbf{0}$ e $\beta \geq \mathbf{0}$, todos os racionais de α e de β são positivos ou nulos e possuem produto positivo ou nulo. Logo, em $\alpha\beta$ não há racional negativo e, portanto, $\alpha\beta \neq \mathbb{Q}$.

(ii) Sejam $r \in \alpha\beta$ e $s \in \mathbb{Q}$ tais que $s \geq r$. Como $r = r_1 r_2$, com $r_1 \in \alpha$ e $r_2 \in \beta$, e $s \geq r$, então $\frac{s}{r_1} \geq r_2$. Logo, $\frac{s}{r_1} \in \beta$. Portanto, $s = r_1 \cdot \frac{s}{r_1} \in \alpha\beta$.

(iii) Provemos, por fim, que $\alpha\beta$ não tem primeiro elemento.

Seja $t \in \alpha\beta$. Então $t = rs$, para certos $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como α e β não têm primeiro elemento, existem $r' \in \alpha$ e $s' \in \beta$ tais que $r' < r$ e $s' < s$. Logo, $r's' \in \alpha\beta$ e $r's' < rs$, o que mostra que $\alpha\beta$ não tem primeiro elemento. □

Definição B.28. Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$. Definimos

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha\beta & \text{se} \quad \alpha \geq \mathbf{0} \text{ e } \beta \geq \mathbf{0} \\ -(|\alpha|\beta) & \text{se} \quad \alpha < \mathbf{0} \text{ e } \beta \geq \mathbf{0} \\ -(\alpha|\beta|) & \text{se} \quad \alpha \geq \mathbf{0} \text{ e } \beta < \mathbf{0} \\ |\alpha||\beta| & \text{se} \quad \alpha < \mathbf{0} \text{ e } \beta < \mathbf{0}. \end{cases}$$

Note que se $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, então $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{D}$.

Proposição B.29. *Se $\beta \in \mathcal{D}$, então $\mathbf{0} \cdot \beta = \mathbf{0}$.*

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que $\beta \geq \mathbf{0}$.

Se $t \in \mathbf{0} \cdot \beta$, então existem $r \in \mathbf{0}$ e $s \in \beta$ tais que $t = rs$. Como $r, s > 0$, temos que $t > 0$. Logo, $t \in \mathbf{0}$. Portanto, $\mathbf{0} \cdot \beta \subseteq \mathbf{0}$.

Se $r \in \mathbf{0}$, então $r > 0$. Tome $s \in \beta$ tal que $s > 0$. Temos que $r = \frac{r}{s} \cdot s \in \mathbf{0} \cdot \beta$. Portanto, $\mathbf{0} \subseteq \mathbf{0} \cdot \beta$.

Suponhamos, agora, que $\beta < \mathbf{0}$. Neste caso, $\mathbf{0} \cdot \beta = -(\mathbf{0} \cdot |\beta|) = -\mathbf{0} = \mathbf{0}$, pelo caso anterior. $\square$

Veremos a seguir que esta operação de multiplicação satisfaz as propriedades comutativa, associativa e distributiva.

Proposição B.30. *Se $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, então $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.*

Demonstração. Observemos que se $\alpha \geq \mathbf{0}$ e $\beta \geq \mathbf{0}$, então $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$. De fato, se $x \in \alpha \cdot \beta$, então $x = rs$ para algum $r \in \alpha$ e algum $s \in \beta$. Como a multiplicação de racionais é comutativa, temos que $x = sr$ e, portanto, $x \in \beta \cdot \alpha$. Logo, $\alpha \cdot \beta \subseteq \beta \cdot \alpha$. Analogamente, verifica-se que $\beta \cdot \alpha \subseteq \alpha \cdot \beta$.

Os outros casos seguem da Definição B.28, da Proposição B.21 e do que acabamos de fazer:

(i) Se $\alpha < \mathbf{0}$ e $\beta \geq \mathbf{0}$, então $\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot \beta) = -(\beta \cdot |\alpha|) = \beta \cdot \alpha$.

(ii) Se $\alpha \geq \mathbf{0}$ e $\beta < \mathbf{0}$, então $\alpha \cdot \beta = -(\alpha \cdot |\beta|) = -(|\beta| \cdot \alpha) = \beta \cdot \alpha$.

(iii) Se $\alpha < \mathbf{0}$ e $\beta < \mathbf{0}$, então $\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta| = |\beta| \cdot |\alpha| = \beta \cdot \alpha$.

$\square$

Proposição B.31. *Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{D}$, então $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em casos.

Caso 1: $\alpha \geq \mathbf{0}$, $\beta \geq \mathbf{0}$ e $\gamma \geq \mathbf{0}$.

Dado $t \in (\alpha + \beta) \cdot \gamma$, existem $r \in \alpha$, $s \in \beta$ e $q \in \gamma$ tais que $t = (r + s)q$. Como vale a distributiva nos racionais, temos que $t = (r + s)q = rq + sq$ e, portanto, $t \in (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$. Logo, $(\alpha + \beta) \cdot \gamma \subseteq (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$.

Reciprocamente, seja $t \in (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$. Então t pode ser escrito como $t = r_1 s_1 + r_2 s_2$ com $r_1 \in \alpha$, $r_2 \in \beta$ e $s_1, s_2 \in \gamma$. Observe que $s_1 \leq s_2$ ou $s_1 \geq s_2$.

Suponhamos inicialmente que $s_1 \leq s_2$. Então $t = r_1 s_1 + r_2 s_2 \geq r_1 s_1 + r_2 s_1 = (r_1 + r_2)s_1$, pois r_1, r_2, s_1, r_2 são racionais positivos. Mas $(r_1 + r_2)s_1 \in (\alpha + \beta) \cdot \gamma$, donde concluímos que $t \in (\alpha + \beta) \cdot \gamma$.

Suponhamos agora que $s_2 \leq s_1$. Então $t = r_1 s_1 + r_2 s_2 \geq r_1 s_2 + r_2 s_2 = (r_1 + r_2)s_2$. Mas $(r_1 + r_2)s_2 \in (\alpha + \beta) \cdot \gamma$, donde concluímos que $t \in (\alpha + \beta) \cdot \gamma$.

Assim, $(\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma) \subseteq (\alpha + \beta) \cdot \gamma$. Portanto, o Caso 1 está concluído.

Caso 2: $\alpha < \mathbf{0}$, $\beta \geq \mathbf{0}$ e $\gamma \geq \mathbf{0}$.

Vamos dividir este caso em dois subcasos — a saber, $\alpha + \beta \geq \mathbf{0}$ e $\alpha + \beta < \mathbf{0}$.

Subcaso 2a: $\alpha + \beta \geq \mathbf{0}$.

Temos, pelo Caso 1, que

$$\beta \cdot \gamma = (\beta + \mathbf{0}) \cdot \gamma = [\beta + (\alpha + (-\alpha))] \cdot \gamma = [(\alpha + \beta) + |\alpha|] \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma + |\alpha| \cdot \gamma.$$

Somando $\alpha \cdot \gamma = -|\alpha| \cdot \gamma$ dos dois lados, obtemos

$$(\beta \cdot \gamma) + (\alpha \cdot \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot \gamma + |\alpha| \cdot \gamma - |\alpha| \cdot \gamma$$

ou seja

$$(\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot \gamma.$$

Subcaso 2b: $\alpha + \beta < \mathbf{0}$.

Note que $|\alpha + \beta| = -(\alpha + \beta) = (-\alpha) + (-\beta)$. Assim, $|\alpha| = -\alpha = -\alpha - \beta + \beta = |\alpha + \beta| + \beta$. Logo,

$$|\alpha| \cdot \gamma = (|\alpha + \beta| + \beta) \cdot \gamma = |\alpha + \beta| \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma,$$

donde segue que

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma = -|\alpha+\beta|\cdot\gamma = -|\alpha|\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma.$$

Caso 3: $\alpha \geq \mathbf{0}$, $\beta < \mathbf{0}$ e $\gamma \geq \mathbf{0}$.

Decorre imediatamente do Caso 2, substituindo em todo lugar α por β e β por α.

Caso 4: $\alpha < \mathbf{0}$, $\beta < \mathbf{0}$ e $\gamma \geq \mathbf{0}$.

Observe que $\alpha+\beta < \mathbf{0}$, pois $\alpha+\beta \leq \beta < \mathbf{0}$. Assim,

$$|\alpha+\beta|\cdot\gamma = [-(\alpha+\beta)]\cdot\gamma = [-\alpha+(-\beta)]\cdot\gamma = (-\alpha)\cdot\gamma + (-\beta)\cdot\gamma = |\alpha|\cdot\gamma+|\beta|\cdot\gamma.$$

Logo,

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma = -(|\alpha+\beta|\cdot\gamma) = -(|\alpha|\cdot\gamma+|\beta|\cdot\gamma) = -(|\alpha|\cdot\gamma)+[-(|\beta|\cdot\gamma)] = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma.$$

Caso 5: $\gamma < \mathbf{0}$, α e β quaisquer.

Inicialmente, notemos que, como $\gamma < \mathbf{0}$, temos $\alpha\cdot\gamma = -(\alpha\cdot|\gamma|)$, qualquer que seja $\alpha \in \mathcal{D}$. De fato, se $\alpha \geq \mathbf{0}$, isto decorre da Definição B.28. Se $\alpha < \mathbf{0}$, então $\alpha\cdot|\gamma| = -(|\alpha|\cdot|\gamma|) = -(\alpha\cdot\gamma)$, donde $\alpha\cdot\gamma = -(\alpha\cdot|\gamma|)$.

Com isso, para quaisquer $\alpha,\beta \in \mathcal{D}$, temos que

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma = -[(\alpha+\beta)\cdot|\gamma|] = -(\alpha\cdot|\gamma|+\beta\cdot|\gamma|) = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma.$$

□

Corolário B.32. *Se $\alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{D}$, então $\gamma\cdot(\alpha+\beta) = (\gamma\cdot\alpha)+(\gamma\cdot\beta)$.*

Demonstração. Temos que $\gamma\cdot(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)\cdot\gamma = (\alpha\cdot\gamma)+(\beta\cdot\gamma) = (\gamma\cdot\alpha)+(\gamma\cdot\beta)$. □

Corolário B.33. *Se $\alpha,\beta \in \mathcal{D}$, então $(-\alpha)\cdot\beta = -(\alpha\cdot\beta) = \alpha\cdot(-\beta)$.*

Demonstração. Notemos que $(\alpha\cdot\beta)+[(-\alpha)\cdot\beta] = [\alpha+(-\alpha)]\cdot\beta = \mathbf{0}\cdot\beta = \mathbf{0}$. Da unicidade do elemento oposto segue que $-(\alpha\cdot\beta) = (-\alpha)\cdot\beta$.

Analogamente, $(\alpha\cdot\beta)+[\alpha\cdot(-\beta)] = \alpha\cdot[\beta+(-\beta)] = \alpha\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}\cdot\alpha = \mathbf{0}$. Da unicidade do elemento oposto segue que $-(\alpha\cdot\beta) = \alpha\cdot(-\beta)$.

□

Proposição B.34. *Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{D}$, então $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em casos.

Caso 1: $\alpha \geq \mathbf{0}$, $\beta \geq \mathbf{0}$ e $\gamma \geq \mathbf{0}$.

Seja $t \in (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Então, $t = rs$, com $r \in \alpha \cdot \beta$ e $s \in \gamma$. Mas $r = uw$, com $u \in \alpha$ e $w \in \beta$. Como a multiplicação de racionais é associativa, temos que $t = (uw)s = u(ws)$, ou seja, $t \in \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. Logo, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \subseteq \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. Um argumento análogo mostra que $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \subseteq (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Portanto, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Nos próximos casos usaremos o Caso 1 e a Definição B.28.

Caso 2: $\alpha \geq \mathbf{0}$, $\beta \geq \mathbf{0}$ e $\gamma < \mathbf{0}$.

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = -[(\alpha \cdot \beta) \cdot |\gamma|)] = -[\alpha \cdot (\beta \cdot |\gamma|)] = \alpha \cdot [-(\beta \cdot |\gamma|)] = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Caso 3: $\alpha \geq \mathbf{0}$, $\beta < \mathbf{0}$ e $\gamma \geq \mathbf{0}$.

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = [-(\alpha \cdot |\beta|)] \cdot \gamma = -[(\alpha \cdot |\beta|) \cdot \gamma] = -[\alpha \cdot (|\beta| \cdot \gamma)] = \alpha \cdot [-(|\beta| \cdot \gamma)] = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Caso 4: $\alpha \geq \mathbf{0}$, $\beta < \mathbf{0}$ e $\gamma < \mathbf{0}$.

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = [-(\alpha \cdot |\beta|)] \cdot \gamma = -[(\alpha \cdot |\beta|) \cdot \gamma] = (\alpha \cdot |\beta|) \cdot |\gamma| = \alpha \cdot (|\beta| \cdot |\gamma|) = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Caso 5: $\alpha < \mathbf{0}$, $\beta \geq \mathbf{0}$ e $\gamma \geq \mathbf{0}$.

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = [-(|\alpha| \cdot \beta)] \cdot \gamma = -[(|\alpha| \cdot \beta) \cdot \gamma] = -[|\alpha| \cdot (\beta \cdot \gamma)] = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Caso 6: $\alpha < \mathbf{0}$, $\beta \geq \mathbf{0}$ e $\gamma < \mathbf{0}$.

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = [-(|\alpha| \cdot \beta)] \cdot \gamma = -[(|\alpha| \cdot \beta) \cdot \gamma] = -[-(|\alpha| \cdot \beta) \cdot |\gamma|] = (|\alpha| \cdot \beta) \cdot |\gamma| = |\alpha| \cdot (\beta \cdot |\gamma|) = -[-(|\alpha| \cdot (\beta \cdot |\gamma|))] = -[\alpha \cdot ((\beta \cdot |\gamma|))] = \alpha \cdot [-(\beta \cdot |\gamma|)] = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Caso 7: $\alpha < \mathbf{0}$, $\beta < \mathbf{0}$ e $\gamma \geq \mathbf{0}$.

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = (|\alpha| \cdot |\beta|) \cdot \gamma = |\alpha| \cdot (|\beta| \cdot \gamma) = -[-[|\alpha| \cdot (|\beta| \cdot \gamma)]] = -[\alpha \cdot (|\beta| \cdot \gamma)] = \alpha \cdot [-(|\beta| \cdot \gamma)] = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Caso 8: $\alpha < \mathbf{0}$, $\beta < \mathbf{0}$ e $\gamma < \mathbf{0}$.

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = (|\alpha| \cdot |\beta|) \cdot \gamma = -[(|\alpha| \cdot |\beta|) \cdot |\gamma|] = -[|\alpha| \cdot (|\beta| \cdot |\gamma|)] = \alpha \cdot (|\beta| \cdot |\gamma|) = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. □

Mostraremos a seguir a compatibilidade da multiplicação com a ordem.

Proposição B.35. *Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{D}$ são tais que $\alpha \leq \beta$ e $\gamma \geq \mathbf{0}$, então $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.*

Demonstração. Da definição de multiplicação de cortes segue que se $\delta, \lambda \in \mathcal{D}$ são tais que $\delta \geq \mathbf{0}$ e $\lambda \geq \mathbf{0}$, então $\delta \cdot \lambda \geq \mathbf{0}$. Assim, se $\alpha \leq \beta$, então $\beta + (-\alpha) \geq \alpha + (-\alpha)$, ou seja, $\beta + (-\alpha) \geq \mathbf{0}$. Como $\gamma \geq \mathbf{0}$, temos $[\beta + (-\alpha)] \cdot \gamma \geq \mathbf{0}$. Logo,

$$[\beta + (-\alpha)] \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma + (-\alpha) \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma - (\alpha \cdot \gamma) \geq \mathbf{0}.$$

Portanto, $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$. □

No que segue, dados $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, indicaremos $\alpha + (-\beta)$ por $\alpha - \beta$.

Definição B.36. Indicaremos por $\mathbf{1}$ o corte

$$\alpha_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r > 1\}.$$

Proposição B.37. *Se $\alpha \in \mathcal{D}$, então $\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$.*

Demonstração. Seja $t \in \alpha \cdot \mathbf{1}$. Temos que $t = rs$, para algum $r \in \alpha$ e algum $s \in \mathbf{1}$. Como $s > 1$, temos que $rs > r$. Logo, $t = rs \in \alpha$. Portanto $\alpha \cdot \mathbf{1} \subseteq \alpha$.

Por outro lado, seja $r \in \alpha$. Se $r = 0$, está claro que $r \in \alpha \cdot \mathbf{1}$, pois $0 = 0s$ para qualquer racional $s > 1$. Se $r \neq 0$, então, como α não tem primeiro elemento, podemos escolher $r' \in \alpha$ tal que $r' \neq 0$ e $\frac{r}{r'} > 1$. Assim, $r = r' \cdot \frac{r}{r'} \in \alpha \cdot \mathbf{1}$, o que prova que $\alpha \subseteq \alpha \cdot \mathbf{1}$.

Portanto $\alpha = \alpha \cdot \mathbf{1}$. □

Resta, agora, definir o inverso multiplicativo de um corte de Dedekind não nulo.

Definição B.38. Seja $\alpha \in \mathcal{D}$ tal que $\alpha \neq \mathbf{0}$.

- Se $\alpha > \mathbf{0}$, definimos

$$\frac{1}{\alpha} = \left\{ r \in \mathbb{Q} : r > 0,\ \frac{1}{r} \in \mathbb{Q} \setminus \alpha \ \text{ e } \tfrac{1}{r} \text{ não é o último elemento de } \mathbb{Q} \setminus \alpha \right\}.$$

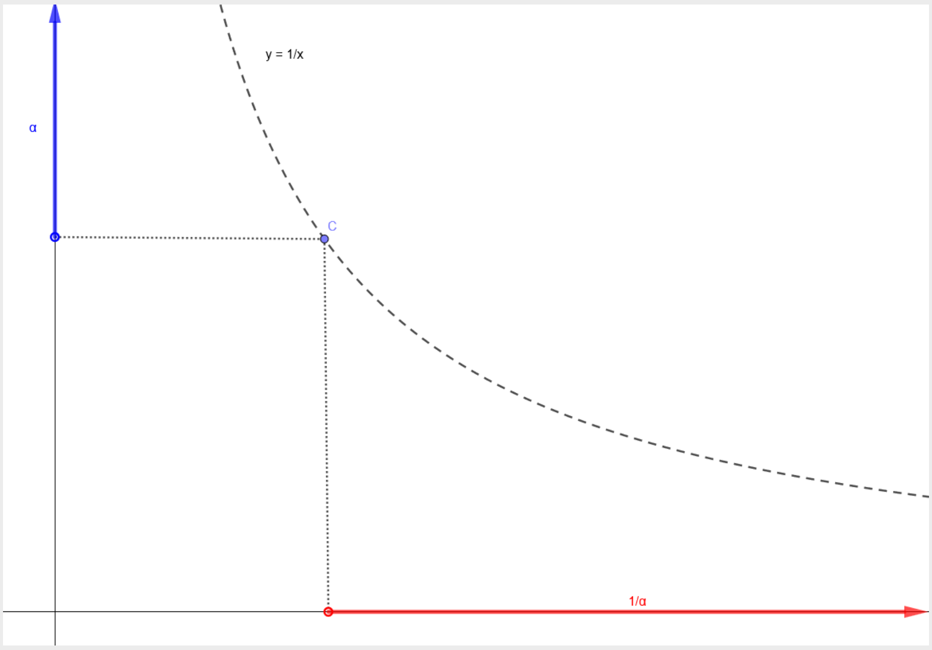

Figura B.4: Ilustração do corte inverso inspirada em [19]. (Fonte: elaboração do autor)

- Se $\alpha < \mathbf{0}$, definimos
$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}.$$

Mostraremos agora que se α é um corte de Dedekind não nulo, então $\frac{1}{\alpha}$ também o é.

Proposição B.39. *Se $\alpha \in \mathcal{D}$ e $\alpha \neq \mathbf{0}$, então $\frac{1}{\alpha} \in \mathcal{D}$.*

Demonstração. Da maneira como a definição foi construída, basta mostrar que $\frac{1}{\alpha} \in \mathcal{D}$ quando $\alpha > \mathbf{0}$, pois para $\alpha < \mathbf{0}$ temos que $\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}$ e $|\alpha|$ é positivo.

Suponhamos, então, $\alpha > \mathbf{0}$.

Inicialmente verifiquemos que $\frac{1}{\alpha} \neq \emptyset$. De fato, como $\alpha > 0$, existe $r > 0$ tal que $r \notin \alpha$. Então $\frac{r}{2} > 0$ e $\frac{r}{2} \notin \alpha$. Logo, $s = \frac{2}{r}$ é tal que $s > 0$, $\frac{1}{s} = \frac{r}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e $\frac{1}{s}$ não é o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$. Portanto, $s \in \frac{1}{\alpha}$.

(i) Provemos que $\frac{1}{\alpha} \neq \mathbb{Q}$.

Isso é evidente, pois $\frac{1}{\alpha}$ compõe-se somente de números racionais positivos.

(ii) Provemos que se $s \in \frac{1}{\alpha}$ e $r \geq s$, então $r \in \frac{1}{\alpha}$.

Por definição, se $s \in \frac{1}{\alpha}$, então $s > 0$, $\frac{1}{s} \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e não é o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$. Tomemos $r \geq s$. Logo, $r > 0$ e $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{s}$. Portanto, $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e não é o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$. Conclui-se, pois, que $r \in \frac{1}{\alpha}$.

(iii) Provemos, por fim, que $\frac{1}{\alpha}$ não tem primeiro elemento.

Seja $r \in \frac{1}{\alpha}$. Precisamos encontrar um elemento de $\frac{1}{\alpha}$ que é menor que r. Sabemos que $r > 0$ e que $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, sem ser o último elemento deste conjunto. Assim, podemos escolher $t \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ tal que $t > \frac{1}{r}$ e t não é o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$. Então, $\frac{1}{t} < r$, $\frac{1}{t} > 0$ e $\frac{1}{\frac{1}{t}} = t \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, sem ser o último elemento deste conjunto. Logo, $\frac{1}{t} \in \frac{1}{\alpha}$ e a demonstração está terminada. $\square$

Antes de, finalmente, mostrarmos a última propriedade desejada, vamos demonstrar dois lemas que serão usados nessa demonstração.

Lema B.40. *Seja $r > 0$ um racional. Então:*

1. *Se $r > 1$, então para todo $q \in \mathbb{Q}$ existe um natural $n \geq 1$ tal que $q \leq r^n$.*
2. *Se $r < 1$, então para todo $q > 0$, $q \in \mathbb{Q}$ existe um natural $n \geq 1$ tal que $r^n \leq q$.*

Demonstração.

1. Observe que $r = 1 + (r - 1)$, com $r > 1$, ou seja, $r - 1 > 0$. Assim, dado $q \in \mathbb{Q}$, pela propriedade arquimediana, existe $n \geq 1$ tal que $q - 1 \leq n(r - 1)$. Logo, $q \leq 1 + n(r - 1) \leq (1 + (r - 1))^n = r^n$.

   Antes de continuarmos para a demonstração do próximo item, vamos demonstrar o que acabamos de usar na segunda desigualdade, ou seja, vamos provar que $1 + nx \leq (1 + x)^n$, para n natural e x racional. Faremos essa demonstração por indução:

   - Verifiquemos ser verdadeiro para $n = 1$, assim, $(1 + x)^1 \geq 1 + 1x$, que nos dá $1 + x = 1 + x$, que é verdadeiro.
   - Suponhamos verdadeiro para n, ou seja, nossa hipótese de indução é $(1 + x)^k \geq 1 + kx$.
   - Usando a hipótese de indução, devemos mostrar que vale para $n = k + 1$. De fato, de $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, temos $(1 + x)^k \cdot (1 + x) \geq (1 + kx) \cdot (1 + x)$, pois $1 + x > 0$. Logo, $(1 + x)^{k+1} \geq x + 1 + kx + kx^2 = 1 + x(1 + k) + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$, pois $kx^2 > 0$. Portanto $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$, o que completa a prova.

2. Observe que $\frac{1}{r} > 1$, pois $r < 1$. Logo, pelo item anterior, existe $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{q} \leq \left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{r^n}$, com $q > 0$. Portanto, $r^n \leq q$, o que completa a prova.

$\square$

Definição B.41. Sejam $\beta \in \mathcal{D}$ e $r > 0$ um número racional. O conjunto $\{qr : q \in \beta\}$ será indicado por $\beta \cdot r$.

Lema B.42. *Se $\beta > \mathbf{0}$ é um corte e $0 < r < 1$ é um racional, então existe $s \in (\mathbb{Q} \setminus \beta) \cap (\beta \cdot r)$ tal que s não é o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \beta$*

Demonstração. Para provarmos esse lema, é suficiente mostrar a afirmação, com β e r como no enunciado:

$$\text{existe } s \in \mathbb{Q} \setminus \beta \text{ tal que } s = qr, \text{ com } q \in \beta. \tag{B.2}$$

De fato, se admitirmos que (B.2) seja verdadeira, como β é um corte, podemos escolher $q' \in \beta$ tal que $q' < q$. Logo, $q'r < qr = s$ e, portanto, $q'r \in (\mathbb{Q} \setminus \beta) \cap (\beta \cdot r)$. Como $q'r < s$, $q'r$ não é o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus$.

Resta-nos, pois, verificar que (B.2) é verdadeira.

Suponhamos, por absurdo, que (B.2) seja falsa. Logo, para todo $q \in \beta$, $qr \in \beta$. Fixemos $q_0 > 0$ um elemento de β. Então, para todo natural $n \geq 1$, temos que $q_0 r^n \in \beta$. Pelo Lema B.40, existe $n \geq 1$ natural tal que $\frac{q}{q_0} \geq r^n$. Logo, $q \geq q_0 r^n$ e, como $q_0 r^n \in \beta$, temos que $q \in \beta$. Provamos que todo $q > 0$ está em β e, portanto, $\beta \leq 0$, o que é um absurdo.

Assim, (B.2) é verdadeira e o lema está provado. $\square$

Proposição B.43. *Se $\alpha \in \mathcal{D}$ e $\alpha \neq \mathbf{0}$, então $\alpha \cdot \dfrac{1}{\alpha} = \mathbf{1}$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $\alpha > \mathbf{0}$.

Provemos que $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \subseteq \mathbf{1}$. De fato, se $u \in \alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$, então $u = ts$ para algum $t \in \alpha$ e algum $s \in \frac{1}{\alpha}$. Temos, então, que $s > 0$ e $\frac{1}{s} \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, donde $\frac{1}{s} < t$ e, portanto, $ts > 1$. Logo, $ts \in \mathbf{1}$.

Seja $t \in \mathbf{1}$. Então $t \in \mathbb{Q}$ e $t > 1$. Pelo Lema B.42, podemos encontrar $s \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ tal que s não seja o último elemento de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ e tal que $s = q\frac{1}{t}$ para algum $q \in \alpha$. Como

$q > 0$ e $\frac{1}{t} > 0$, temos que $s > 0$. Assim, sendo $\frac{1}{s} \in \frac{1}{\alpha}$, temos que $t = q\frac{1}{s} \in \alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$. Portanto, mostramos que $\mathbf{1} \subseteq \alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$ e isto encerra a prova do caso $\alpha > \mathbf{0}$.

Suponhamos, agora, $\alpha < \mathbf{0}$. Temos $\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}$ e, portanto, $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = |\alpha| \cdot \frac{1}{|\alpha|} = 1$. $\square$

O que fizemos acima mostra que $\mathcal{D}$, munido das operações $+$ e $\cdot$ e da relação de ordem $\leq$ acima definidas, é um corpo ordenado completo, que será denotado pelo símbolo $\mathbb{R}$.

Note que, a rigor, $\mathbb{Q}$ não é um subconjunto de $\mathbb{R}$, mas podemos identificar cada $q \in \mathbb{Q}$ com o corte α_q, obtendo assim uma "cópia" de $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] AULETE, Caldas. **Aulete Digital – Dicionário contemporâneo da língua portuguesa**. Disponível em: http://www.aulete.com.br. Acesso em: 29 maio 2025.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 20 jan. 2025.

[3] BRITO, Arlete de Jesus; BOTELLO, Islenis Carolina. **Entrevista com Antonio Miguel**. História da Ciência e Ensino: construindo interfaces **18** (2018), 36-72. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/hcensino/article/view/39214. Acesso em: 16 jul. 2024.

[4] CEDERBERG, Judith N. **A course in modern geometries**. 2. ed. New York, USA: Springer, 2001.

[5] CHILD, William. **Wittgenstein**: introdução. Tradução de Roberto Hofmeister Pich. Porto Alegre: Grupo A, 2013. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788565848374. Acesso em: 07 set. 2024.

[6] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 9**: geometria plana. 9. ed. São Paulo, SP: Atual, 2013.

[7] HARTSHORNE, Robin. **Geometry**: Euclid and beyond. New York, USA: Springer, 2000.

[8] van HIELE, Pierre M. **Structure and Insight**: A Theory of Mathematics Education. New York, USA: Academic Press, 1986.

[9] HILBERT, David. **Fundamentos da geometria**. Revisão de Augusto J. Franco de Oliveira. Lisboa, PRT: Gradiva, 2003.

[10] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 7**: geometria analítica. 6. ed. São Paulo, SP: Atual, 2013.

[11] JANUZZI, N. Cateto, queixada e javali: conheça as diferenças entre as espécies. **G1**, Campinas e Região, 02 nov. 2021. Disponível em: https://g1.globo.com/sp/campinas-regiao/terra-da-gente/noticia/2021/11/02/cateto-queixada-e-javali-conheca-as-diferencas-entre-as-especies.ghtml Acesso em: 20 jan. 2025.

[12] KAMII, Constance; DECLARK, Georgia. **Reinventando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1988.

[13] LEHMANN, Charles H. **Geometria analítica**. Tradução de Ruy Pinto da SIlva Sieczkowski. 8. ed. São Paulo, SP: Globo, 1998.

[14] LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio**: volume 3. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[15] BARONE JUNIOR, Mário. **O algoritmo da raiz quadrada**. Revista do Professor de Matemática **2** (198). Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/2/7.htm Acesso em: 29 maio 2025.

[16] EVES, Howard. **A Survey of Geometry**: Revised Edition. Boston, USA: Allyn and Bacon, 1972.

[17] MARKOWSKY, George. **Misconceptions about the Golden Ratio**. The College Mathematics Journal **23(1)** (1992), 2–19.

[18] MIGUEL, Antonio; VIANNA, Carlos Roberto, TAMAYO, Carolina. **Wittgenstein na educação**. Uberlândia: Navegando Publicações, 2019.

[19] MIRAGLIA, Francisco. **Números reais**: os cortes de Dedekind. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, maio de 1978. Notas de aula.

[20] MOISE, Edwin E. **Elementary geometry from an advanced standpoint**. 3. ed. Reading, USA: Addison-Wesley Publishing, 1990.

[21] MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[22] NASCIMENTO, Elisângela Andrade, LEIDENS, Francisco Rafel. **A relação entre linguagem e mundo nas duas fases do pensamento de Wittgenstein**. Ambiente: Gestão e Desenvolvimento **14(1)** (2021), 27–37. Disponível em: https://periodicos.uerr.edu.br/index.php/ambiente/article/

view/854. Acesso em: 10 jan. 2025.

[23] RIBAS, Marcelo Ferreira. **Forma(s) de vida, um controverso conceito wittgensteiniano**. Kínesis **12(31)** (2020), 14-36. Disponível em: https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/kinesis/article/view/10614. Acesso em: 24 jan. 2025.

[24] RUDIN, Walter. **Principles of mathematical analysis**. 3. ed. New York, USA: McGraw-Hill Book, 1976.

[25] WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações filosóficas**. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

[26] ZILLES, Urbano. **O racional e o místico em Wittgenstein.** 3. ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.