



Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

# **Indução Matemática na prova de fórmulas combinatórias: dos livros didáticos à sala de aula**

Alberto de Sousa e Silva

Natal – RN, agosto de 2024

Alberto de Sousa e Silva

# **Indução Matemática na prova de fórmulas combinatórias: dos livros didáticos à sala de aula**

Dissertação de Mestrado apresentada à  
Comissão Acadêmica Institucional do  
PROFMAT-UFRN como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alan de Araújo Guimarães.

Natal – RN, agosto de 2024

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Silva, Alberto de Sousa e.

Indução matemática na prova de fórmulas combinatórias: dos livros didáticos à sala de aula / Alberto de Sousa e Silva. - 2024.

83 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, RN, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Alan de Araújo Guimarães.

1. Ensino médio - Dissertação. 2. Indução matemática - Dissertação. 3. Combinatória - Dissertação. 4. Sequência didática - Dissertação. I. Guimarães, Alan de Araújo. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 373.5(043.3)

*Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais e a minha esposa que desde o início desse trabalho foi uma grande incentivadora.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, inicialmente, ao meu bom Deus pela sua presença em todos os momentos da minha vida. Agradeço aos meus pais, Francisco Domingos da Silva e Maria Odete de Sousa e Silva que durante toda minha formação me apoiaram e me incentivaram para que eu pudesse chegar aqui. Em especial, minha esposa Solange Cavalcanti de Oliveira Silva que sempre foi a minha maior incentivadora e sempre acreditou em mim. Agradeço também aos meus irmãos pelo companherimos e apoio de sempre, em especial, a Apolônio de Sousa e Silva que me fez despertar o interesse pela Matemática. Agradeço a todos os meus amigos e colegas que me ajudaram e me apoiaram nessa minha trajetória. Aos meus companheiros de Mestrado, pela convivência, pelo aprendizado, pelas palavras de ânimo e pelos bons momentos que compartilhamos nesta caminhada. Ao meu orientador Prof. Dr. Alan de Araújo Guimarães, pela confiança, dedicação, colaboração e encorajamento para conclusão deste trabalho. Agradeço igualmente às doutoras professoras Débora Borges Ferreira e Enai Taveira da Cunha, que, de forma gentil, concordaram em integrar a banca avaliadora e fizeram contribuições relevantes.

*“Feliz é o homem que  
persevera na  
provação, porque  
depois de aprovado  
receberá a coroa da  
vida, que Deus  
prometeu aos que  
amam”*

*Tiago 1:12*

## RESUMO

A indução matemática é uma técnica de demonstração extremamente importante e útil na prova de resultados em várias áreas da matemática, como teoria dos números, combinatória, geometria, entre outras. No entanto, atualmente, essa técnica não é amplamente ensinada ou explorada no contexto do ensino médio. Diante disso, o objetivo central deste trabalho é propor a utilização da indução matemática nesse nível de ensino, especificamente no estudo de análise combinatória (binômio de Newton e triângulo de Pascal). Para alcançar esse objetivo, inicialmente selecionamos quatro coleções de livros didáticos do ensino médio e realizamos uma análise crítica de como esses livros abordam os conceitos mencionados. Escolhemos propositalmente coleções de décadas distintas, evidenciando a mudança de abordagem ao longo de um período de trinta anos. Concluimos o trabalho apresentando uma sequência didática que permite ao docente utilizar a indução matemática em sala de aula para a prova de fórmulas combinatórias (teorema do binômio de Newton e teoremas do triângulo de Pascal), com o objetivo de facilitar a compreensão dos conteúdos de combinatória mencionados para estudantes do segundo ano do ensino médio. A abordagem adotada em nossa sequência didática contrasta com as abordagens tradicionalmente encontradas nos livros analisados do ensino médio. Nosso trabalho destina-se a professores do ensino básico e demais interessados no assunto.

**PALAVRAS-CHAVE:** Ensino Médio; Indução Matemática; Combinatória; Sequência Didática.

## ABSTRACT

Mathematical induction is an extremely important and useful proof technique in establishing results in various areas of mathematics, such as number theory, combinatorics, geometry, and others. However, currently, this technique is not widely taught or explored in the context of high school education. Given this, the central objective of this work is to propose the use of mathematical induction at this level of education, specifically in the study of combinatorial analysis (Newton's binomial theorem and Pascal's triangle). To achieve this objective, we initially selected four collections of high school textbooks and conducted a critical analysis of how these books address the mentioned concepts. We deliberately chose collections from different decades to highlight the change in approach over a thirty-year period. We concluded the work by presenting a didactic sequence that allows teachers to use mathematical induction in the classroom to prove combinatorial formulas (Newton's binomial theorem and Pascal's triangle theorems), aiming to facilitate the understanding of the mentioned combinatorial content for second year high school students. The approach adopted in our didactic sequence contrasts with the approaches traditionally found in high the analyzed school textbooks. Our work is intended for elementary school teachers and other interested individuals.

**KEYWORDS:** High School; Mathematical Induction; Combinatorics; Following teaching.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>1 Técnicas de Demonstração em Matemática .....</b>	<b>11</b>
1.1 TÉCNICA DIRETA .....	11
1.2 TÉCNICA INDIRETA.....	14
1.2.1 Redução a um absurdo.....	14
1.2.2 Contrapositiva .....	15
1.3 TÉCNICA DE INDUÇÃO.....	16
<b>2 Indução Matemática – Primeiros Passos.....</b>	<b>18</b>
2.1 DEDUÇÃO VERSOS INDUÇÃO.....	18
2.2 CUIDADO COM AS GENERALIZAÇÕES.....	21
2.3 OS AXIOMAS DE PEANO .....	23
<b>3 O Método da Indução Matemática .....</b>	<b>26</b>
3.1 PRIMEIRA FORMA DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO .....	26
3.2 PRIMEIRA FORMA DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO VERSUS PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO .....	32
3.3 VERSÃO MAIS GERAL DA PRIMEIRA FORMA DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO.....	33
3.4 SEGUNDA FORMA DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO (INDUÇÃO FORTE OU INDUÇÃO COMPLETA).....	37
<b>4 Abordagem da Indução e Combinatória em Livros do Ensino Médio .....</b>	<b>46</b>
4.1 COLEÇÃO MATEMÁTICA (2º GRAU).....	46
4.1.1 Abordagem da Indução.....	46
4.1.2 Abordagem das Fórmulas Combinatórias.....	47
4.2 COLEÇÃO Matemática ensino médio .....	48
4.2.1 Abordagem da Indução.....	48
4.2.2 Abordagem das Fórmulas Combinatórias.....	48
4.3 COLEÇÃO Contexto & Aplicações.....	50
4.3.1 Abordagem da Indução.....	51
4.3.2 Abordagem das Fórmulas Combinatórias.....	52
4.4 COLEÇÃO Multiversos Matemática ensino médio.....	55

4.4.1 Abordagem da Indução.....	55
4.4.2 Abordagem das Fórmulas Combinatórias.....	55
4.5 CONSIDERAÇÕES E REFLEXÕES .....	56
<b>5 Indução no Ensino de Combinatória: uma Sequência Didática .....</b>	<b>59</b>
5.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	59
5.1.1 Teoria Da Aprendizagem De Ausubel .....	61
5.1.2 Zona De Desenvolvimento Proximal De Vygotsky .....	62
5.1.3 Teoria De Bruner.....	63
5.1.4 Modelo De Ensino De Polya .....	64
5.2 DEMONSTRAÇÃO DOS RESULTADOS USADOS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	66
5.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO BINÔMIO DE NEWTON E TEOREMAS DO TRIÂNGULO DE PASCAL .....	71
<b>6 Conclusão.....</b>	<b>78</b>
<b>Referências .....</b>	<b>80</b>

# INTRODUÇÃO

Diferentemente de outras áreas do conhecimento, a Matemática possui uma linguagem e estrutura próprias. As notações, por exemplo, são símbolos usados para designar objetivos, facilitando significativamente a escrita matemática. Os fatos matemáticos, por sua vez, têm sua validade assegurada por meio de demonstrações, que, em linhas gerais, consistem em um processo de raciocínio lógico e dedutivo para comprovar a veracidade de uma proposição (OLIVEIRA; CORCHO FERNÁNDEZ, 2012). Esse aspecto intrínseco é fundamental para a boa compreensão e domínio da disciplina. Existem diversas técnicas para demonstrar um fato matemático, como a demonstração direta, por absurdo, pelo uso da contrapositiva, por indução matemática, dentre outras. Posteriormente, falaremos mais sobre a indução.

Notadamente, nos últimos anos, houve várias modificações na abordagem de certos tópicos matemáticos no contexto do ensino médio (BRASIL, 2018); alguns ganharam maior relevância em detrimento de outros. Aqui, não estamos julgando se isso é bom ou ruim, mas apenas refletindo sobre o ocorrido, de acordo com a nossa própria prática de ensino. Ao realizar uma pesquisa em várias coleções de livros didáticos, percebemos que algumas técnicas de demonstração deixaram de ser incluídas como conteúdo. Especificamente, a técnica de indução, extremamente útil em vários contextos, não consta em livros mais atuais. Ela é útil e aplicável na prova de resultados sobre Teoria dos Números, Geometria Plana, Análise Combinatória, entre outros contextos, e nos parece crucial para a boa formação de um estudante de ensino médio. Diante desse quadro, procuramos refletir sobre como desenvolver uma abordagem para demonstrar fórmulas combinatórias utilizando a indução matemática. Este foi o ponto de partida para a elaboração da presente dissertação.

Nesse cenário, os objetivos centrais deste presente trabalho foram:

- Realizar uma análise crítica de quatro coleções de livros didáticos do Ensino Médio, no que tange à abordagem dos tópicos **indução matemática, binômio de Newton e teoremas do triângulo de Pascal**. Selecionamos coleções de décadas distintas, permitindo-nos observar a mudança de abordagem dos tópicos em um intervalo de trinta anos.
- Mostrar que esse método pode ser utilizado, nesse nível de ensino, sem requerer conhecimentos prévios avançados. Para isso, apresentamos e resolvemos diversos problemas e teoremas que ilustram o uso desse método em diferentes contextos.

- Apresentar uma sequência didática que, segundo (ZABALA, 1998, p.18), “sequências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”, sobre como demonstrar resultados sobre o binômio de Newton e teoremas do triângulo de Pascal utilizando a indução. A abordagem que propomos difere daquelas usualmente apresentadas em livros do ensino médio.

O referencial teórico deste trabalho baseia-se em obras de autores conceituados na área de Matemática, tais como: Elon Lages, Augusto Morgado, Abramo Hefez, Paulo Cesar, entre outros. Além disso, consideramos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) como documentos oficiais que orientam o currículo de ensino.

O trabalho está estruturado em cinco capítulos, conforme detalhamento a seguir. No Capítulo 1, apresentamos uma visão geral sobre as principais técnicas de demonstração usadas na Matemática e trazemos situações específicas para cada técnica. No Capítulo 2, introduzimos os importantes Axiomas de Peano, que fundamentam a técnica de demonstração por indução. O Capítulo 3 é dedicado à apresentação do método de indução matemática propriamente dito. Nele, apresentamos a indução matemática, suas variantes e a equivalência entre elas e o Princípio da Boa Ordenação. Para reforçar a importância dessa técnica, trouxemos várias aplicações em variados contextos (Teoria dos Números, Progressões, Geometria Plana e aplicações lúdicas). No Capítulo 4, fizemos uma análise crítica de quatro coleções de livros didáticos do ensino médio, no que se refere à indução matemática e à análise combinatória. Este capítulo é encerrado com uma reflexão nossa sobre a mudança de paradigma nos livros didáticos analisados ao longo dos anos. No Capítulo 5, discorreremos sobre as teorias da aprendizagem de Ausubel, da zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky, dentre outras, a fim de fundamentar a sequência didática proposta no mesmo capítulo. Também apresentamos as demonstrações dos conteúdos a serem ensinados na sequência didática. Nossa proposta de sequência didática difere das abordagens usualmente apresentadas nos livros do ensino médio, os quais selecionamos.

Segundo o célebre matemático George Polya, “A matemática consiste em provar a coisa mais óbvia da maneira menos óbvia”. Inspirados nisso, esperamos que nosso trabalho possa lançar luz e gerar reflexões sobre a importância das demonstrações matemáticas no contexto do ensino médio.

# 1 Técnicas de Demonstração em Matemática

Ao longo deste capítulo, fizemos um apanhado geral sobre as principais técnicas de demonstração em matemática. Ressaltamos, contudo, que, a posteriori, nossa ênfase recairá sobre uma técnica específica de demonstração: indução matemática. Cada uma delas foi definida e acompanhada de duas proposições que foram demonstradas utilizando-se da técnica definida, compreensíveis para qualquer estudante de ensino médio.

Mas, afinal, o que é mesmo uma demonstração matemática? Segundo Oliveira e Corcho Fernández:

Uma demonstração em Matemática é o processo de raciocínio lógico e dedutivo para chegar à veracidade de uma proposição condicional. Nesse processo são usados argumentos válidos, ou seja, aqueles que concluem afirmações verdadeiras a partir de fatos que também são verdadeiros (Oliveira; Corcho Fernández, 2012, p. 9).

Assim, uma demonstração em Matemática consiste em um conjunto de raciocínios feitos a partir de axiomas (afirmações matemáticas aceitas sem demonstração), definições, propriedades e resultados já conhecidos através dos quais se estabelece, de maneira indiscutível, a veracidade de uma dada proposição.

## 1.1 TÉCNICA DIRETA

Essa técnica consiste em admitir que a hipótese é verdadeira e considerando esse fato, bem como definições e resultados já conhecidos, mostrar diretamente que a tese é válida.

Acreditamos que o leitor esteja familiarizado com os conceitos de função injetiva e função composta. Contudo, para efeito de completeza, apresentamos as definições abaixo.

**Definição 1 (Função Injetiva):** Uma função  $f: X \rightarrow Y$  chama-se **injetiva** quando elementos diferentes em  $X$  são transformados por  $f$  em elementos diferentes em  $Y$ , ou seja,  $f$  é **injetiva**, quando:

$$x \neq x' \text{ em } X \Rightarrow f(x) \neq f(x') \text{ em } Y.$$

Ou em sua forma contrapositiva (será vista em breve):

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

**Definição 2 (Função Composta):** Dadas as funções  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$ , a **função composta** de  $f$  e  $g$  (nessa ordem) é a função  $g \circ f: X \rightarrow Z$  definida para cada  $x$  em  $X$ , por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

A seguir apresentamos alguns exemplos onde nas demonstrações das proposições foi utilizada a técnica de demonstração direta.

**Proposição 1:** Sejam  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  funções. Se  $f$  e  $g$  são injetivas, então  $g \circ f$  é injetiva.

**Demonstração:**

Sejam  $x$  e  $x'$  em  $X$ , com  $x \neq x'$ . Pela injetividade de  $f$  temos  $f(x) \neq f(x')$ , e pela injetividade de  $g$  temos  $g(f(x)) \neq g(f(x'))$ , isto é,  $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x')$ . Portanto, por definição,  $g \circ f$  é injetiva. ■

Note que, na Proposição 1, a hipótese é  $f$  e  $g$  são funções injetiva e a tese é  $g \circ f$  é injetiva.

**Proposição 2 (Teorema de Pitágoras):** Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

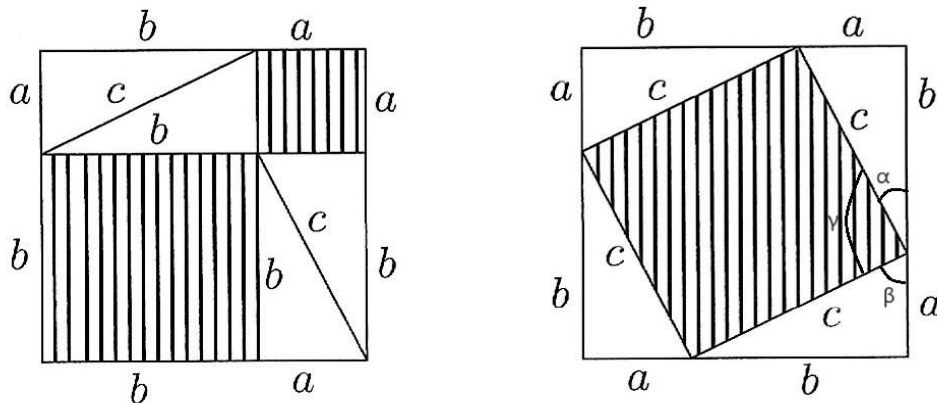
**Demonstração:**

**Hipótese:** O triângulo possui um ângulo de  $90^\circ$ .

**Tese:** o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, isto é,  $c^2 = a^2 + b^2$ , onde  $c$  denota a medida da hipotenusa e  $a$  e  $b$  denotam as medidas dos catetos.

Considere um triângulo retângulo, com hipotenusa medindo  $c$  e os catetos medindo  $a$  e  $b$ . Usando esse triângulo, construa os quadrados de lado  $a + b$  como na Figura 1.1.4, a seguir. Note que a figura hachurada, no interior da segunda figura, é um quadrado, visto que cada um dos seus lados coincide com a hipotenusa  $c$  dos triângulos retângulos de catetos  $a$  e  $b$  e, além disso, cada um dos seus ângulos internos mede  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

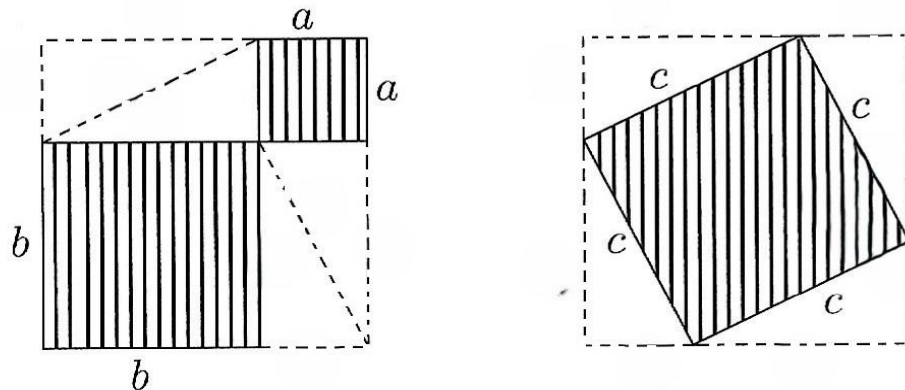
Figura 1 - Quadrados auxiliares usados para a demonstração do teorema de Pitágoras.



Fonte: Morais Filho (2012, p. 330).

O primeiro desses quadrados é formado por quatro triângulos retângulos congruentes pelo critério lado-ângulo-lado (de catetos  $a$  e  $b$ ) e dois quadrados construídos sobre os catetos, ao passo que o segundo é constituído de quatro triângulos retângulos congruentes (mesmo critério da primeira figura) e um quadrado construído sobre a hipotenusa.

Figura 2 - Retiradas dos quatro triângulos de cada quadrado.



Fonte: Adaptado de Morais Filho (2012, p. 330).

Agora na figura da esquerda como na da direita “retire” dos quadrados maiores os quatro triângulos retângulos congruentes. Assim, se de duas grandezas iguais (as áreas dos quadrados grandes) subtrai-se grandezas iguais (as áreas dos quatro triângulos retângulos) restará duas grandezas iguais, ou seja, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos dois quadrados construídos sobre os catetos. Ou equivalentemente

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad \blacksquare$$

## 1.2 TÉCNICA INDIRETA

Nessa técnica de demonstração, ao contrário da demonstração direta, para inferir a tese, são usados argumentos que conduzem a alguma contradição.

No estudo da Matemática, a negação de conceitos, como definições e proposições, é uma ferramenta importante, pois ela possibilita a construção de demonstrações e argumentos sólidos, como será visto nas subseções 1.2.1 e 1.2.2.

**Definição 3 (Negação de uma Proposição):** A negação de uma proposição  $P$  é a proposição não  $P$ , denotada por  $\sim P$ .

### 1.2.1 Redução a um absurdo

Nesta subseção, iremos expor como se dá a técnica de redução ao absurdo, a qual, por vezes, também, é chamada de técnica de demonstração por contradição. De acordo com Oliveira e Corcho Fernández, uma demonstração por contradição funciona assim:

Assumimos a validade da hipótese. Supomos que nossa tese é falsa. Usando as duas informações anteriores concluímos, através de argumentos verdadeiros, uma afirmação falsa; como tal fato não poderá ocorrer, então nossa tese deverá ser verdadeira (Oliveira; Corcho Fernández, 2012, p. 14).

Assim, nesse método, não partimos diretamente da hipótese para chegarmos à tese, mas assumimos como verdadeiras a hipótese e a negação da tese e a partir daí procuramos deduzir alguma contradição.

**Proposição 3:** Prove que  $\log 2$  é irracional.

**Demonstração:**

Suponhamos, por contradição, que  $\log 2 = \frac{a}{b}$ , com  $a$  e  $b$  naturais ( $\log 2$  é positivo).

Essa igualdade significa que:

$$2 = 10^{\frac{a}{b}}.$$

Elevando ambos os membros à potência  $b$ , encontramos:

$$2^b = 10^a \Rightarrow 2^b = 2^a 5^a.$$

Agora note que na última igualdade temos no primeiro membro um número par que não pode ser dividido por 5, enquanto no segundo membro um número par divisível por 5. Absurdo, portanto,  $\log 2$  é irracional. ■

**Proposição 4:** Mostre que o polinômio  $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$  não admite raízes negativas.

**Demonstração:**

Suponhamos, por contradição, que o polinômio dado admita uma raiz negativa. Seja  $k$  essa raiz, assim temos:

$$P(k) = k^3 - k^2 + 2k - 1 = 0.$$

Ou equivalentemente,

$$k^3 = k^2 + 2k - 1 \Rightarrow k^3 = (k - 1)^2 \geq 0.$$

Agora note que na última igualdade temos no primeiro membro um número negativo, pois supusemos, por contradição, que  $k < 0$ , e no segundo membro um número não negativo. Absurdo, portanto, o polinômio em questão não admite raízes negativas. ■

### 1.2.2 Contrapositiva

Para entendermos melhor esta técnica vamos demonstrar, usando o método de redução a um absurdo, a proposição seguinte:

**Proposição 5:** Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $n^2$  é par, então  $n$  é par.

Na proposição supracitada, ressaltamos que a hipótese(H) é  $n^2$  é par e a negação da hipótese( $\neg H$ ) é  $n^2$  é ímpar, a tese(T) é  $n$  é par e a negação da tese( $\neg T$ ) é  $n$  é ímpar.

**Demonstração:**

Seja  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n^2$  seja par. Suponhamos, por contradição, que  $n$  não seja par, ou seja, digamos que  $n$  seja ímpar. Logo  $n$  é da forma  $n = 2p + 1$  para algum  $p \in \mathbb{Z}$ . Assim,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2p + 1)^2 \\ &= (2p + 1)(2p + 1) \\ &= 4p^2 + 2p + 2p + 1 \\ &= 4p^2 + 4p + 1 \\ &= 2(2p^2 + 2p) + 1 \\ &= 2q + 1, \end{aligned}$$

onde  $q = 2p^2 + 2p \in \mathbb{Z}$ . Portanto,  $n^2$  é ímpar, o que contradiz a hipótese de  $n^2$  ser par. Absurdo, logo  $n$  é par. ■

Olhando com atenção, fizemos na verdade a demonstração direta da seguinte proposição: se  $n$  é ímpar, então  $n^2$  é ímpar. E usando esse fato mostramos o que queríamos: se  $n \in \mathbb{N}$  e  $n^2$  é par, então  $n$  é par.

Ilustramos, desse modo, a seguinte implicação:  $(n \text{ é ímpar} \Rightarrow n^2 \text{ é ímpar}) \Rightarrow (n^2 \text{ é par} \Rightarrow n \text{ é par})$  ou  $(\sim T \Rightarrow \sim H) \Rightarrow (H \Rightarrow T)$ . Em verdade, para quaisquer duas sentenças  $H$  e  $T$  vale  $(\sim T \Rightarrow \sim H) \Leftrightarrow (H \Rightarrow T)$ , o que é chamado de princípio da contrapositividade.

**Proposição 6:** Se  $2x^2 + x - 1 = 0$ , então  $x < 1$ .

**Demonstração:**

Vamos demonstrar que, se  $x \geq 1$ , então  $2x^2 + x - 1 \neq 0$ . Com efeito, se  $x \geq 1$ , temos:

$$x - 1 \geq 0 \text{ e } 2x^2 > 0.$$

Somando as duas desigualdades anteriormente citadas, obtemos:

$$2x^2 + x - 1 > 0.$$

Ou equivalentemente,

$$2x^2 + x - 1 \neq 0. \quad \blacksquare$$

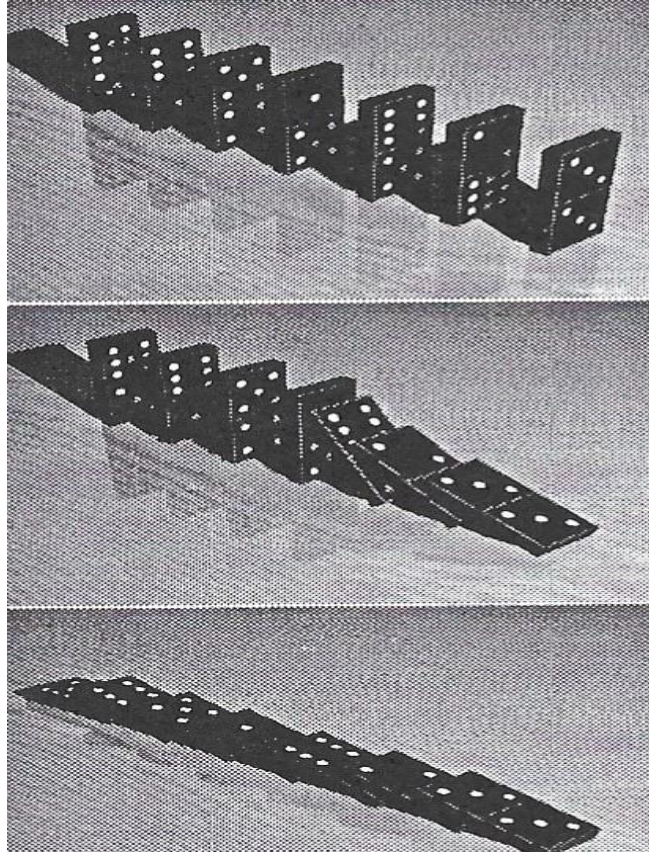
**Observação 1:** Analisemos em mais detalhes os métodos acima: na contrapositiva, supõe-se a negação da tese como verdadeira e procura-se provar a negação da hipótese, enquanto, na técnica de redução ao absurdo, supõem-se verdadeiras tanto a hipótese como a negação da tese e busca-se uma contradição qualquer.

### 1.3 TÉCNICA DE INDUÇÃO

A indução matemática é um método de demonstração que permite provar a validade de uma afirmação que envolve números naturais, a partir de dois passos: primeiro verifica-se a validade da afirmação para um caso, chamado base de indução, e assumindo que ela seja verdadeira para algum número natural  $n$ , chega-se que ela também será verdadeira para o seu sucessor  $n+1$ . De modo a concluirmos que tal afirmação é verdadeira para todo número natural.

Dessa forma, como podemos observar na Figura 3, o princípio da indução tem o efeito “dominó”. Se a primeira peça cai e sabemos que a queda de uma peça implica na queda da peça seguinte, podemos inferir que todas as peças irão cair.

Figura 3 - Analogia entre o método de indução matemática e o efeito dominó.



Fonte: Vidigal. et al. (2005, p. 32)

Como essa técnica foi explorada em detalhes no capítulo 3, não apresentamos exemplos do uso dela agora. Além disso, neste trabalho, os verbos **mostrar**, **demonstrar** e **provar** terão o mesmo significado.

## 2 Indução Matemática – Primeiros Passos

Neste capítulo, exploramos os conceitos de dedução e indução e como eles são empregados em Matemática. Tratamos também dos axiomas de Peano, destacando o quarto deles, pois oferece um poderoso método de demonstração em Matemática.

### 2.1 DEDUÇÃO VERSOS INDUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta cinco competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o ensino médio. Considerando o foco deste capítulo, listamos apenas uma que é voltada para a habilidade de identificar padrões e criar conjecturas:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. [...] Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências (Brasil, 2018, p. 540).

Ainda segundo a BNCC

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais “formais”, incluindo a demonstração de algumas proposições (Brasil, 2018, p. 540).

De acordo com Fetissov (1995), no **raciocínio dedutivo**, partimos de fatos gerais para chegarmos a conclusões específicas.

**Exemplo 1:** Considere o argumento seguinte:

Todos os homens são mortais. (a)

João é homem. (b)

Logo, João é mortal. (c)

**Exemplo 2:** Agora, vejamos um argumento usando proposições matemáticas.

Todo número natural que é divisível por 10 termina em zero. (d)

O número natural  $n$  é divisível por 10. (e)

Logo,  $n$  termina em zero. (f)

Note que, no Exemplo 2, a afirmação particular (f) é obtida (foi deduzida) da afirmação geral (d) por intermédio da afirmação (e). Observe que esta afirmação serve de ponte necessária para chegar a uma verdade proposta. O mesmo ocorre no Exemplo 1, com as afirmações (c), (a) e (b), respectivamente.

Já no **raciocínio indutivo**, percorremos o caminho inverso daquele usado na dedução. Na percepção de Fetissov (1995), partimos de observações particulares para, a partir delas, alcançarmos afirmações gerais.

Para reforçar a compreensão desses dois raciocínios, apresentamos a seguir três exemplos, destacando-se o Exemplo 5 por usar ambos os raciocínios.

**Exemplo 3:** Muitas vezes, em nosso dia a dia, raciocinamos indutivamente. Suponha que vamos a uma feira livre e experimentamos, cada um, uma uva: elas estão azedas. Experimentamos outras duas, de outro cacho, e estão azedas, e o mesmo ocorre com o terceiro, quarto e quinto cachos de uvas. Logo, de imediato, somos tentados a generalizar e concluir que todas as uvas estão azedas e é melhor não as comprar!

Perceba que de fatos particulares, chegamos a uma conclusão geral.

**Exemplo 4:** Considere as seguintes afirmações particulares:

O número 68 é um número par.

O número 28 é um número par.

Podemos criar, com base nestas afirmações particulares, várias afirmações gerais. Por exemplo:

Todo número que possui o algarismo das unidades igual a 8 é um número par (a').

Todo número que possui dois algarismos é um número par (b').

É evidente que a afirmação (a') é verdadeira, enquanto (b') é falsa.

Pelo exposto acima, no raciocínio indutivo, o papel das afirmações particulares é dar apoio à afirmação geral, porém a veracidade da mesma não é garantida mesmo que tais afirmações sejam verdadeiras. Ocorrendo o contrário, no raciocínio dedutivo, onde a verdade da conclusão é garantida pela verdade das afirmações analisadas anteriormente.

**Exemplo 5:** Tomemos alguns números ímpares arbitrários, elevemos cada um deles ao quadrado e, de cada uma das potências assim obtidas, subtraímos uma unidade conforme a Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 - Resultados do Exemplo 4 para alguns números ímpares.

NÚMERO ÍMPAR	QUADRADO DO NÚMERO MENOS UM	RESULTADO
5	25 – 1	24
7	49 – 1	48
9	81 – 1	80
11	121 – 1	120
15	225 – 1	224

Fonte: Autoria própria.

Note que, na Tabela 1, os resultados têm uma propriedade comum: todos são divisíveis por 8, ou equivalentemente múltiplos de 8. Continuando assim com tantos outros números ímpares e observando o mesmo fato, formulamos a seguinte conjectura: “O quadrado de todo número ímpar, subtraído de uma unidade, produz um múltiplo de 8”.

Como essa afirmação diz respeito **a todo** número ímpar, para demonstrá-la temos de usar argumentos válidos **para todo** número ímpar.

**Demonstração:**

Seja  $n$  um número ímpar. Logo  $n$  é da forma  $n = 2p + 1$  para algum  $p \in \mathbb{Z}$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 n^2 - 1 &= (2p + 1)^2 - 1 \\
 &= (2p + 1)(2p + 1) - 1 \\
 &= 4p^2 + 2p + 2p + 1 - 1 \\
 &= 4p^2 + 4p = 4p(p + 1).
 \end{aligned}$$

A expressão assim obtida é um múltiplo de 8, para todo inteiro  $p$ . De fato, o fator 4 na expressão  $4p(p + 1)$  indica que ela é um múltiplo de 4, e como  $p$  e  $(p + 1)$  são inteiros consecutivos, um deles é par; donde a expressão  $p(p + 1)$  contém necessariamente o fator 2. Daí a expressão  $4p(p + 1)$  contém o fator 8, ou seja, o número  $4p(p + 1)$  é sempre um múltiplo de 8. ■

Apesar dessa diferença, na Matemática, tanto a dedução como a indução são indispensáveis, como destaca Fetissov

Não é difícil perceber que em qualquer demonstração se empregam esses dois métodos. Quando procuramos argumentos para demonstrar uma proposição qualquer recorremos à experiência, às observações, aos fatos e outras proposições já demonstradas. Com base nos dados obtidos inferimos a veracidade ou a falsidade da proposição a demonstrar (Fetissov, 1994, p.20).

## 2.2 CUIDADO COM AS GENERALIZAÇÕES

De acordo com a seção anterior, o raciocínio indutivo é comumente utilizado em Matemática. Porém, é preciso tomar muito cuidado com as generalizações. A comprovação da validade de uma afirmação para muitos casos observados não garante que ela seja sempre válida.

Vejamos o que discorre sobre o tema Morais Filho.

Nas Ciências Naturais, a observação da frequente repetição de um fenômeno é um indício suficiente para comprovar que ele sempre ocorre. Essa comprovação é produzida por um raciocínio que induz aceitar-se o fenômeno como uma lei. Mas na Matemática [...] a comprovação da validade de um fato para centenas, milhares ou mesmo bilhões de casos observados não é suficiente para assegurar a validade desse fato, é preciso demonstrá-lo formalmente (Morais Filho, 2012, p. 331-332).

A seguir, abordaremos alguns exemplos de generalizações apressadas que levaram a alguma afirmação equivocada.

**Exemplo 6:** Dado o trinômio  $n^2 + n + 41$  (estudado por Leonhard Euler<sup>1</sup>), consideremos a seguinte afirmação: para todo inteiro positivo  $n$  o valor do trinômio acima é um número primo.

À primeira vista parece que sim, pois:

$$1^2 + 1 + 41 = 43, \text{ que é primo,}$$

$$2^2 + 2 + 41 = 47, \text{ que é primo,}$$

$$3^2 + 3 + 41 = 53, \text{ que é primo,}$$

$$4^2 + 4 + 41 = 61, \text{ que é primo,}$$

$$5^2 + 5 + 41 = 71, \text{ que é primo,}$$

$$6^2 + 6 + 41 = 83, \text{ que é primo,}$$

$$7^2 + 7 + 41 = 97, \text{ que é primo.}$$

Agora, com um pouco de paciência, notamos que a afirmação é verdadeira para  $n = 1, 2, 3, \dots, 39$ , mas para  $n = 40$  seu valor é:

$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41(40 + 1) = 41 \cdot 41 = 41^2$ , que não é um número primo, pois o número 41 que é diferente do 1 e do  $41^2$  é um divisor de  $41^2$ .

**Exemplo 7:** Leibniz, eminente matemático alemão do século XVII e um dos fundadores do Cálculo Diferencial, demonstrou que, para todo inteiro positivo  $n$ , o número  $n^3 - n$  é divisível por 3, o número  $n^5 - n$  é divisível por 5 e o número  $n^7 - n$  é divisível por 7. A partir destas observações, pode-se propor a seguinte conjectura: “para todo inteiro ímpar  $k$  e qualquer  $n$  inteiro positivo, o número  $n^k - n$  é divisível por  $k$ ”. Contudo, observa-se que  $2^9 - 2 = 510$ , assim a conjectura não é verdadeira.

**Exemplo 8:** Se  $n$  é um inteiro positivo, então  $991n^2 + 1$  não é um quadrado perfeito.

Para  $n = 1$  temos  $991 \cdot 1^2 + 1 = 992$  que não é um quadrado perfeito.

Para  $n = 2$  temos  $991 \cdot 2^2 + 1 = 3965$  que não é um quadrado perfeito.

Para  $n = 3$  temos  $991 \cdot 3^2 + 1 = 8920$  que não é um quadrado perfeito.

Porém, com a ajuda de um computador, observa-se que o padrão anterior falha para  $n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$ .

---

<sup>1</sup>Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na Basileia, Suíça. É considerado um dos importantes matemáticos da história e seus trabalhos abrangem inúmeras colaborações imprescindíveis a diversas áreas da Matemática, da Física, da Astronomia, da Lógica e até da Música.

Então, como generalizar uma afirmação em Matemática, se é impossível verificar sua validade para todos os casos particulares?

Isso é feito, quando conveniente, usando-se uma técnica especial de demonstração, chamada método da Indução Matemática, a ser estudada no próximo capítulo.

### 2.3 OS AXIOMAS DE PEANO

Figura 4 - Giuseppe Peano.



Giuseppe Peano nasceu no dia 27 de agosto de 1858 em Cuneo, Itália, e morreu em 20 de abril de 1932 em Turim, Itália. Ele foi um dos fundadores da lógica matemática e da teoria dos conjuntos, fazendo contribuições importantes na notação dessas teorias.

Fonte: Vieira; Carvalho (2020, p. 12)

A consolidação de um sistema axiomático para a construção dos números naturais somente ocorreu após decorridos muitos milênios. Tal formulação axiomática foi dada pelo matemático Giuseppe Peano, em sua obra **Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita**, publicada em 1889. Ele propôs uma lista de axiomas, baseada na noção de sucessor de um número natural (intuitivamente, o que vem logo depois dele na lista dos números naturais). Na construção de Peano,  $\mathbb{N}$  é definido como o conjunto cujos elementos, denominados números naturais, satisfazem as seguintes propriedades:

1. Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.
2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.
4. Seja  $X$  um conjunto de números naturais (isto é,  $X \subset \mathbb{N}$ ). Se  $1 \in X$  e se, além disso, o sucessor de todo elemento de  $X$  ainda pertence a  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

Denotamos por  $n + 1$  o sucessor do número natural  $n$ . Com tal notação, os axiomas de Peano podem ser reescritos da seguinte forma:

- 1'. Todo número natural  $n$  tem um único sucessor, representado por  $n + 1$ .
- 2'. Se  $m + 1 = n + 1$ , então  $m = n$ .
- 3'. Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo  $1$ , tal que  $n + 1 \neq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

4'. Seja  $X$  um conjunto de números naturais (isto é,  $X \subset \mathbb{N}$ ). Se  $1 \in X$  e se, além disso,  $n + 1 \in X$ , para cada  $n \in X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

**Observação 2:** O terceiro axioma estabelece  $1$  como sendo o primeiro número natural, assim o conjunto dos números naturais será representado por:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . É comum, também, adotar-se  $0$  como ponto de partida, levando a  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . A escolha por uma ou outra opção é uma questão de conveniência. Para todos os efeitos, nesse trabalho, o conjunto dos números naturais começa no número  $1$ . Caso tenhamos que provar resultados começando em  $n = 0$ , usaremos a notação  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Observação 3:** Dentre todos os axiomas de Peano, o que mais se destaca é o último. Conhecido como axioma da indução, ele serve de base para uma importante ferramenta, denominada método de indução, bastante usada para fazer demonstrações de resultados relativos a números naturais, o qual funciona assim: “se uma propriedade  $P$  é verdadeira para o número  $1$  (base de indução) e se, supondo  $P$  válida para algum  $n$  natural (hipótese de indução), implica na validade de  $P$  para  $n + 1$ , então  $P$  é válida para todos os números naturais” (neste formato, o axioma 4 é comumente chamado de **Princípio da Indução Finita** ou **da Indução Matemática**).

A partir das definições da adição e da multiplicação, bem como o uso do Princípio da Indução Finita, podem ser demonstradas as propriedades usuais dessas operações. Vamos ilustrar esse fato com uma demonstração, evidenciando a importância desse princípio.

**Definição 4 (Adição):** Sendo  $m$  e  $n$  números naturais, a soma  $m + n$  é definida da seguinte maneira:

- i)  $m + 1$  é definido como o sucessor de  $m$ .

$$\text{ii) } m + (n + 1) = (m + n) + 1.$$

Isto é, fixado  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\text{i')} \text{ se } k = 1, \text{ então } m + k = m + 1.$$

ii') se  $k \neq 1$ , então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $k = n + 1$ . Assim,

$$m + k = m + (n + 1) = (m + n) + 1.$$

**Definição 5 (Multiplicação):** Sendo  $m$  e  $n$  números naturais, a multiplicação  $m \cdot n$  é definida da seguinte forma:

$$\text{i) } m \cdot 1 = m.$$

$$\text{ii) } m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m.$$

Ou seja, fixado  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\text{i')} \text{ se } k = 1, \text{ então } m \cdot k = m.$$

ii') se  $k \neq 1$ , então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $k = n + 1$ . Assim,

$$m \cdot k = m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m.$$

**Proposição 7 (Associatividade da adição):** Para quaisquer números naturais  $m$ ,  $n$  e  $p$ , tem-se  $m + (n + p) = (m + n) + p$ .

**Demonstração.** Fixamos arbitrariamente  $m$  e  $n$ . Vamos provar que para todo  $p$ , vale a propriedade acima. Para isso, usaremos indução em  $p$ .

A propriedade é válida para  $p = 1$ , pois  $m + (n + 1) = (m + n) + 1$  é parte da definição da adição.

Suponhamos que a propriedade seja válida para um certo  $p$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} m + (n + (p + 1)) &= m + ((n + p) + 1) \\ &= (m + (n + p)) + 1 \\ &= ((m + n) + p) + 1 \\ &= (m + n) + (p + 1). \end{aligned}$$

Logo, a propriedade também é válida para  $p + 1$  e, portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a propriedade é válida para quaisquer  $m$ ,  $n$  e  $p$  naturais. (Note que no terceiro sinal de igualdade usamos a hipótese de indução e nos demais a definição de adição). ■

Outras propriedades relativas à adição e multiplicação de números naturais são demonstradas de forma similar, tais com as distributivas e comutatividade.

## 3 O Método da Indução Matemática

Para a produção deste capítulo e do próximo, foram consultados principalmente, além de trabalhos e livros que versam sobre o tema, os livros da coleção PROFMAT: **Aritmética** do autor Abramo Hefez e **Matemática Discreta** dos autores Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho. Os autores citados acima, além de formularem definições de maneira clara e concisa, trazem também uma variedade de aplicações do tema em questão, especialmente os ligados ao ensino médio. Veremos que o método de Indução Matemática não se limita a demonstrações de teoremas matemáticos, bem como resolver problemas que envolvem padrões e propriedades numéricas; ele também pode ser usado para resolver diversos tipos de problemas, inclusive aqueles de natureza lúdica.

### 3.1 PRIMEIRA FORMA DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

Este método que permite demonstrar a validade de proposições que envolvem números naturais usa apenas dois passos: primeiro verifica-se a validade da proposição para um caso, chamado base de indução, e assumindo que ela seja verdadeira para algum número natural  $n$  (hipótese de indução), chega-se que ela também será verdadeira para o número natural  $n+1$  (passo indutivo). Nestas condições, podemos concluir que a proposição é verdadeira para todo número natural. Note também que esta primeira forma nada mais é do que uma reformulação do axioma da Indução de Peano, usando a linguagem de propriedades, como podemos constatar abaixo.

**Seja  $P(n)$  uma proposição relativa a números naturais. Suponha que:**

- i)  $P(1)$  é verdadeira, e**
- ii) para algum  $n$  natural, a veracidade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n+1)$ .**

**Então  $P(n)$  é verdadeira para todos os números naturais.**

Esse processo assegura a validade de  $P(n)$  para todo número natural. De fato, como  $P(1)$  é verdadeira, implica  $P(2) = P(1 + 1)$  ser verdadeira. Como  $P(2)$  é verdadeira, implica  $P(3) = P(2 + 1)$  ser verdadeira. Do mesmo modo, teremos a validade de  $P(4)$ ,  $P(5)$ ,  $P(6)$ , ... .

No final da Seção 2.2 foi feita a seguinte pergunta: como generalizar uma afirmação em Matemática, se for impossível verificar sua validade para todos os casos particulares? Na ocasião, ela foi respondida e agora vamos reforçar como se faz isso por meio de um exemplo.

**Exemplo 9:** Obter uma fórmula exata em função de  $n \geq 1$  para a soma dos  $n$  primeiros números ímpares.

De acordo com Hefez (2014, p.17), “este exemplo ilustra o primeiro registro da utilização do Princípio de Indução Matemática feita por Francesco Maurolycus em 1575”, mesmo antes de Peano formular seus axiomas sobre os números naturais em 1889.

**Solução:**

Vamos determinar a soma para os primeiros valores naturais de  $n$ :

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2. \\ 1 + 3 &= 4 = 2^2. \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2. \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2. \\ &\vdots \end{aligned}$$

A análise das igualdades acima nos leva a conjecturar que a soma seja sempre igual ao quadrado do número de parcelas, isto é,  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para termos a garantia de que o resultado é sempre válido, precisamos fazer uma demonstração. O Princípio da Indução possibilita provar esse fato.

A partir da resposta hipotética do Exemplo 9, podemos elaborar uma proposição que enunciaremos a seguir.

**Proposição 8:** Demonstre que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:**

**i) Base de Indução.**

Para  $n = 1$ , a igualdade é verdadeira, visto que  $1 = 1^2$ .

**ii) Passo Indutivo.**

Devemos verificar que a validade da igualdade, para algum  $n$  natural, implica sua validade para  $n + 1$ . Ou seja, supondo que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$  seja verdadeira para algum  $n \in \mathbb{N}$ , devemos mostrar que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$  também é verdadeira. Com efeito,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) &= n^2 + (2(n + 1) - 1) \\ &= n^2 + (2n + 2 - 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Portanto, a validade da proposição para um valor arbitrário de  $n$  acarreta sua validade para  $n + 1$ . Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, a Proposição 8 é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ . (Note que no primeiro sinal de igualdade acima, usamos a hipótese de indução). ■

**Proposição 9:** Mostre que  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ , para todo  $n$  natural.

**Demonstração:**

**i) Base de Indução.**

Devemos verificar a validade da igualdade para  $n = 1$ . De fato, tem-se que

$$\frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

**ii) Passo Indutivo.**

Devemos verificar que a validade da igualdade, para algum valor de  $n$ , implica na validade dela para  $n + 1$ . Ou seja, supondo que  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$  seja verdadeira para algum  $n \in \mathbb{N}$ , devemos mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} &= \frac{n+1}{n+2} \text{ também é verdadeira. Com efeito,} \\ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+1)}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Assim, a validade da igualdade para um valor arbitrário de  $n$  acarreta sua validade para  $n + 1$ . Logo, pelo Princípio da Indução Matemática,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Note que, no segundo membro da primeira igualdade do passo indutivo, usamos a hipótese de indução. Além disso, foi possível cancelar os dois fatores  $(n+1)$ , pois  $n$  é um número natural. ■

**Exemplo 10:** Têm-se  $2^n$  moedas, sendo uma delas falsa, com peso menor do que as demais. Dispõe-se de uma balança de dois pratos, mas sem nenhum peso. Mostre, por indução sobre  $n$ , que é possível achar a moeda falsa com  $n$  pesagens.

**Solução:**

**i) Base de indução.**

Para  $n = 1$  é claro, pois, dadas as duas moedas ( $2^1 = 2$ ) basta colocar uma moeda em cada prato da balança e descobre-se imediatamente qual é a moeda falsa.

**ii) Passo Indutivo.**

Suponha que o resultado seja válido para um certo  $n \geq 1$ , ou seja, que dentre  $2^n$  moedas dadas é possível achar a moeda falsa com  $n$  pesagens. Devemos mostrar a validade do resultado para  $n + 1$ , isto é, que dentre  $2^{n+1}$  moedas dadas é possível achar a moeda falsa com  $n + 1$  pesagens.

De fato, dividiremos as  $2^{n+1}$  moedas em dois grupos com  $2^n$  moedas cada ( $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ ). Coloca-se um grupo de  $2^n$  moedas em cada prato da balança. Assim, poderemos descobrir em que grupo de  $2^n$  moedas encontra-se a moeda falsa. Agora, pela hipótese de indução, descobre-se, num grupo de  $2^n$  moedas, a moeda falsa com  $n$  pesagens, que, junto com a pesagem já efetuada, perfazem o total de  $n + 1$  pesagens. Portanto o resultado também é válido para  $2^{n+1}$  moedas e, dessa forma, pelo Princípio da Indução Matemática, o resultado é verdadeiro para  $2^n$  moedas, qualquer que seja  $n$  natural. ■

**Proposição 10:** Prove, por indução, que um conjunto com  $n$  elementos possui  $2^n$  subconjuntos.

**Demonstração:**

**i) Base de Indução.**

Para  $n = 0$ , o resultado é válido, pois se  $X = \emptyset$ , então  $\emptyset$  é o único subconjunto de  $X$ . Portanto ele possui  $2^0 = 1$  subconjunto.

**ii) Passo Indutivo.**

Suponha que o resultado seja verdadeiro para um conjunto  $A$  com  $n$  elementos, isto é, que  $A$  possua  $2^n$  subconjuntos e a partir disso, demonstremos que o resultado vale para um

conjunto  $A'$  com  $n + 1$  elementos. Com efeito, sejam  $A' = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\} = A \cup \{a_{n+1}\}$  e  $A_1, A_2, \dots, A_{2^n}$  todos os subconjuntos de  $A$ . Note que:

(1)  $A_1, A_2, \dots, A_{2^n}$  também são subconjuntos de  $A'$

(2) Os outros subconjuntos de  $A'$  são:

$$A'_1 = A_1 \cup \{a_{n+1}\}$$

$$A'_2 = A_2 \cup \{a_{n+1}\}$$

$\vdots$

$$A'_{2^n} = A_{2^n} \cup \{a_{n+1}\}.$$

Assim, os subconjuntos de  $A'$  são formados pelos subconjuntos de  $A$ , bem como da reunião de  $\{a_{n+1}\}$  com cada um desses subconjuntos e, portanto, a quantidade total de subconjuntos de  $A'$  é  $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ .

Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, um conjunto com  $n$  elementos possui  $2^n$  subconjuntos. ■

**Proposição 11:** Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais  $(a_n)$  tal que  $a_1$  é dado e, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

onde  $r$  é um número real fixo chamado razão.

a) Mostre que  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ .

b) Se  $S_n = a_1 + \dots + a_n$ , mostre que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

**Demonstração(a):**

**i) Base de Indução.**

Para  $n = 1$ , a igualdade se verifica, pois  $a_1 = a_1 + (1 - 1)r = a_1$ .

**ii) Passo Indutivo.**

Suponhamos que o resultado seja válido para algum  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, que  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ , e provemos o resultado para  $n + 1$ . Com efeito,

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n - 1)r + r = a_1 + nr - r + r = a_1 + nr.$$

Mostrando, dessa maneira, que o resultado é válido para  $n + 1$  e, portanto, pelo Princípio da Indução Finita, o resultado é válido para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Note que na segunda igualdade acima foi usada a hipótese de indução. ■

### Demonstração (b):

#### i) Base de Indução.

Para  $n = 1$ , o resultado é válido, pois  $S_1 = a_1 = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1$ .

#### ii) Passo Indutivo.

Suponhamos que o resultado seja válido para algum  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, que  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$  e provemos o resultado para  $n + 1$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
 a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1} \\
 &= \frac{a_1 \cdot n + a_n \cdot n + a_{n+1} + a_{n+1}}{2} \\
 &= \frac{a_1 \cdot n + [a_1 + (n-1)r] \cdot n + a_{n+1} + a_{n+1}}{2} \\
 &= \frac{a_1 \cdot n + a_1 \cdot n + n^2 \cdot r - n \cdot r + a_{n+1} + a_{n+1}}{2} \\
 &= \frac{a_1 \cdot n + n(a_1 + n \cdot r) - nr + a_1 + nr + a_{n+1}}{2} \\
 &= \frac{a_1 \cdot n + n(a_1 + n \cdot r) + a_1 + a_{n+1}}{2} \\
 &= \frac{a_1 \cdot n + a_1 + n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}}{2} \\
 &= \frac{a_1 \cdot (n+1) + a_{n+1} \cdot (n+1)}{2} \\
 &= \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

Mostrando, dessa maneira, que o resultado é válido para  $n + 1$  e, portanto, pelo Princípio da Indução Finita, ele é válido para todo  $n \in \mathbb{N}$  (Note que, no primeiro sinal de igualdade acima, foi usada a hipótese de indução e no terceiro o item(a) da Proposição). ■

### 3.2 PRIMEIRA FORMA DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO VERSUS PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

Nesta seção, iremos discorrer sobre o Princípio da Boa Ordenação (ou Boa Ordem) do conjunto  $\mathbb{N}$ .

**Definição 6:** “Seja  $X$  um conjunto de números naturais. Diz-se que um número  $p \in X$  é o menor elemento de  $X$  (ou elemento mínimo de  $X$ ) quando se tem  $p \leq n$  para todo  $n \in X$ ” (LIMA, 2017, p.39).

Além do Princípio da Indução Matemática, há uma outra propriedade relevante dos números naturais denominada Princípio da Boa Ordenação. Essa propriedade é muito útil na demonstração de resultados acerca dos números naturais, inclusive pode ser usada para provar o próprio método de Indução Matemática que é o que veremos no Teorema 2. Tal propriedade denomina-se Princípio da Boa Ordenação, que descreveremos a seguir.

**Teorema 1 (Princípio da Boa Ordenação):** Todo subconjunto não-vazio de números naturais possui um elemento mínimo.

Para ilustrar a utilidade do Princípio da Boa Ordenação, apresentamos o seguinte resultado.

**Proposição 12:** Mostre, usando o Princípio da Boa Ordenação, que  $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (Que foi mostrada anteriormente (p. 27) usando a primeira forma do Princípio da Indução).

**Demonstração:**

Definamos  $s_n = 1 + 3 + \dots + (2n - 1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e o conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N}; s_n \neq n^2\}$ . Observe que se mostrarmos que  $A$  é vazio teremos então demonstrado a igualdade acima. Suponhamos, por absurdo, que  $A$  não é vazio. Então, pelo Princípio da Boa Ordenação,  $A$  possui um elemento mínimo  $b$ . Logo  $s_b \neq b^2$  e como  $s_1 = 1$ , temos que 1 não pertence a  $A$ , de modo que  $b > 1$  (note que 1 é o menor elemento dos números naturais). Assim  $b - 1$  não pertence a  $A$ , o que nos permite escrever:

$$s_{b-1} = (b-1)^2.$$

Somando  $2b - 1$  em ambos os membros (lados) da igualdade acima obtemos:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2(b-1) - 1) + (2b-1) = (b-1)^2 + (2b-1).$$

Mas o lado esquerdo é  $s_b$  e  $(b-1)^2 + (2b-1) = b^2 - 2b + 1 + 2b - 1 = b^2$ .

Portanto,  $s_b = b^2$ . Absurdo, pois contradiz  $s_b \neq b^2$ .

Concluimos então que  $A = \emptyset$  e, portanto,  $s_n = n^2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Teorema 2:** O Princípio da Boa Ordenação implica a primeira forma do Princípio da Indução.

**Demonstração:**

Seja  $P(n)$  uma proposição relativa a números naturais, tal que:

- i)  $P(1)$  é verdadeira, e
- ii) para algum  $n$  natural, a veracidade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n+1)$ .

Queremos mostrar que  $P(n)$  é verdadeira para todos os números naturais.

Para isso, definimos o seguinte conjunto:

$$X = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é falsa}\}.$$

Vamos mostrar, usando o Princípio da Boa Ordenação, que o conjunto definido acima é vazio. De fato, suponhamos que  $X$  não seja vazio. Então, pelo Princípio da Boa Ordenação, podemos afirmar que  $X$  possui um menor elemento. Seja  $n_0$  tal elemento ( $n_0 \in X$ ). Temos que  $n_0 \neq 1$ , pois por hipótese,  $P(1)$  é verdadeira. Logo,  $n_0 > 1$ , mas isso significa que  $(n_0 - 1) \notin X$ , ou equivalentemente  $P(n_0 - 1)$  é uma afirmação verdadeira (note que  $n_0$  é o primeiro elemento tal que a proposição é falsa).

Assim, pela condição (ii), segue que  $P(n_0 - 1 + 1) = P(n_0)$  é verdadeira, ou seja,  $n_0 \notin X$ . Absurdo, pois não pode ocorrer  $n_0 \in X$  e ao mesmo tempo  $n_0 \notin X$ . Portanto,  $X = \emptyset$  e  $P(n)$  é verdadeira para todos os números naturais. ■

### 3.3 VERSÃO MAIS GERAL DA PRIMEIRA FORMA DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

O passo base é essencial numa demonstração por Indução Matemática, porém, é irrelevante que ele seja 1, visto que dada uma propriedade a respeito de números naturais, várias vezes a mesma só começa a ser verdadeira a partir de um certo número natural maior do que 1. Por exemplo, se  $P(n): n^2 > 2n + 1$ , essa desigualdade somente será válida a partir de  $n_0 = 3$ .

Desse modo, podemos fazer uma reformulação da primeira forma do Princípio da Indução da seguinte maneira:

**Teorema 3:** Seja  $P(n)$  uma proposição relativa ao número natural  $n$  e seja  $n_0$  um número natural. Suponhamos que:

i)  $P(n_0)$  é válida.

ii) para todo  $n \geq n_0$  a validade de  $P(n)$  implica na validade de  $P(n+1)$ .

Então  $P(n)$  é válida para todo  $n \geq n_0$ .

**Demonstração:**

Para demonstrar essa versão, recorreremos ao Axioma da Indução. Para isso, definimos o seguinte conjunto:

$$B = \{n \in \mathbb{N}; P(n_0 + n - 1) \text{ é verdadeira}\}.$$

Pela condição (i),  $P(1) = P(n_0 + 1 - 1) = P(n_0)$  é verdadeira, ou seja,  $1 \in B$ . Além disso, como  $n_0 + n - 1 \geq n_0$ , por (ii), se  $P(n_0 + n - 1)$  é verdadeira, então:

$$P((n_0 + n - 1) + 1) = P(n_0 + (n + 1) - 1)$$

também é verdadeira. Isto é, se  $n \in B$ , então  $(n + 1) \in B$ . Logo, pelo Axioma da Indução,  $B = \mathbb{N}$ . Nestas condições, a proposição  $P(n_0 + n - 1)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$  ou equivalentemente, a proposição  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq n_0$ . ■

**Observação 4:** Na demonstração acima tomamos  $B$  como sendo o conjunto de todos os naturais  $n$ , tais que a proposição  $P(n_0 + n - 1)$  é verdadeira. Qual a lógica de usarmos o número natural  $(n_0 + n - 1)$ ? Ora  $n \geq n_0$  significa que  $n$  pode ser  $n_0$ ,  $n_0 + 1$ ,  $n_0 + 2$  e assim por diante. A proposição  $P(n)$  para ser válida em  $n \geq n_0$ , tem que ser válida para todos esses números, então basta pegarmos uma outra proposição, que seja válida para todos os números naturais, e que contemple todos eles. Tal proposição é:  $P(n_0 + n - 1)$ , com  $n \geq 1$ . Note que:

se para  $n=1$ ,  $P(n_0 + n - 1)$  for válida, então  $P(n_0 + 1 - 1) = P(n_0)$  também será válida;

se para  $n=2$ ,  $P(n_0 + n - 1)$  for válida, então  $P(n_0 + 2 - 1) = P(n_0 + 1)$  também será válida;

se para  $n=3$ ,  $P(n_0 + n - 1)$  for válida, então  $P(n_0 + 3 - 1) = P(n_0 + 2)$  também será válida. E assim sucessivamente.

**Proposição 13:** Mostre que  $n^2 > 2n + 1$  para todo  $n$  natural com  $n \geq 3$ .

**Demonstração:**

**i) Base de indução.**

Devemos verificar a validade da desigualdade para  $n = 3$ . De fato, para  $n = 3$  a

desigualdade é verdadeira, visto que  $3^2 = 9 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$ .

**ii) Passo Indutivo.**

Devemos verificar que a validade da proposição, para algum valor de  $n \geq 3$ , implica na validade dela para  $n + 1$ . Ou seja, supondo que  $n^2 > 2n + 1$  é verdadeira para algum  $n \geq 3$ , devemos mostrar que  $(n + 1)^2 > 2(n + 1) + 1$  também é verdadeira. Com efeito,

$$\begin{aligned} (n + 1)^2 &= n^2 + 2n + 1 > (2n + 1) + (2n + 1) = 2(2n + 1) = 4n + 2 = \\ &= 2n + 2n + 2 = 2(n + 1) + 2n \geq 2(n + 1) + 6 > 2(n + 1) + 1. \end{aligned}$$

Mostrando, dessa maneira, que a desigualdade é válida para  $n + 1$  e, portanto, pela generalização do Princípio da Indução Matemática, a desigualdade vale para todo  $n \geq 3$ .

Perceba que, na primeira desigualdade do desenvolvimento do passo indutivo, foi usada a hipótese de indução; na penúltima, como  $n \geq 3$ ,  $2n$  é no mínimo 6, e na última, temos obviamente que  $6 > 1$ . ■

**Exemplo 11:** Mostre que é possível pagar, sem receber troco, qualquer quantia inteira de reais, maior do que 7, com notas de 3 reais e 5 reais.

Note que, o problema acima equivale a mostrar que: a equação  $3x + 5y = n$ , tem solução  $(x, y)$  no conjunto  $\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$ , para todo  $n \geq 8$ .

**Solução:**

**i) Base de indução.**

Devemos verificar a validade da igualdade para  $n = 8$ . De fato, para  $n = 8$  a igualdade é verdadeira, visto que  $3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8$ .

**ii) Passo Indutivo.**

Devemos verificar que a validade da igualdade, para algum valor de  $n \geq 8$ , implica na validade dela para  $n + 1$ . Ou seja, supondo que a equação  $3x + 5y = n$ , tem solução em  $\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$  para algum  $n \geq 8$ , devemos mostrar que  $3x + 5y = n + 1$ , também tenha solução em  $\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Com efeito, seja  $(a, b)$  uma solução da equação  $3x + 5y = n$  em  $\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$ , isto é,  $3a + 5b = n$ . Dois casos são possíveis:

1º)  $b \geq 1$ . Neste caso,  $b - 1 \geq 0$  e, usando a hipótese de indução, podemos escrever:

$$\begin{aligned} 3a + 5b = n &\Leftrightarrow 3a + 5b + 1 = n + 1 \\ &\Leftrightarrow 3a + 5b + (6 - 5) = n + 1 \\ &\Leftrightarrow 3a + 6 + 5b - 5 = n + 1 \\ &\Leftrightarrow 3(a + 2) + 5(b - 1) = n + 1. \end{aligned}$$

2º)  $b = 0$ , então  $a \geq 3$ , ou seja,  $a - 3 \geq 0$  já que necessariamente  $n \geq 9$ . Usando novamente a hipótese de indução podemos escrever:

$$\begin{aligned} 3a + 5b = n &\Leftrightarrow 3a + 5b + 1 = n + 1 \\ &\Leftrightarrow 3a + 5b + (10 - 9) = n + 1 \\ &\Leftrightarrow 3a - 9 + 5b + 10 = n + 1 \\ &\Leftrightarrow 3(a - 3) + 5(b + 2) = n + 1. \end{aligned}$$

Assim, em qualquer caso, a equação  $3x + 5y = n + 1$  admite solução em  $\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$  e, portanto, pela generalização do Princípio da Indução, a equação  $3x + 5y = n$  tem solução em  $\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$  para todo  $n \geq 8$ . ■

**Proposição 14:** Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de  $n$  lados é igual a  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ .

**Demonstração:**

**i) Base de Indução.**

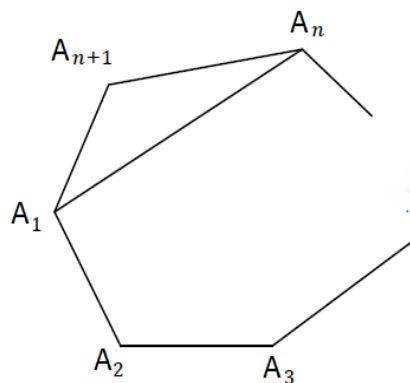
Para  $n = 3$ , temos  $d_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$ , o que é verdadeiro, já que um triângulo não possui diagonais.

**ii) Passo Indutivo.**

Suponha que o resultado seja válido para algum número natural  $n \geq 3$ , ou seja, que  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$  e a partir disso vamos mostrar que ele também é verdadeiro para  $n + 1$ .

De fato, tome um polígono de  $n + 1$  lados e seja  $A_1$  um dos seus vértices.

Figura 5 - Polígono convexo de  $n + 1$  lados.



Fonte: Freitas (2013, p. 71)

Observando a Figura 5 notamos que, para obtermos o número de diagonais do polígono de  $n + 1$  lados devemos acrescentar àquelas traçadas no polígono de  $n$  lados e a diagonal  $A_n A_1$ , as diagonais que partem do vértice  $A_{n+1}$ . Ora, como são  $n + 1$  vértices e como dele não são traçadas diagonais para ele próprio e para seus dois vértices vizinhos, temos que o número de diagonais que partem do vértice  $A_{n+1}$  é:  $(n + 1) - 3 = n - 2$ . Logo, o número total de diagonais do  $(n + 1)$ -ágono é:

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} &= d_n + (n - 2) + 1 \\
 &= \frac{n(n-3)}{2} + (n - 2) + 1 \\
 &= \frac{n(n-3) + 2n - 2}{2} \\
 &= \frac{n[(n-2)-1] + 2n - 2}{2} \\
 &= \frac{n(n-2) - n + 2n - 2}{2} \\
 &= \frac{n(n-2) + (n-2)}{2} \\
 &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} \\
 &= \frac{(n+1)[(n+1)-3]}{2}.
 \end{aligned}$$

Mostrando, dessa maneira, que o resultado é válido para  $n + 1$  e, portanto, pela generalização do Princípio da Indução Matemática, o número de diagonais de um polígono convexo de  $n$ -lados é igual a  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$  para todo natural  $n \geq 3$ . ■

### 3.4 SEGUNDA FORMA DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO (INDUÇÃO FORTE OU INDUÇÃO COMPLETA)

Iniciaremos essa seção tentando demonstrar, usando a primeira forma do Princípio de Indução Matemática, um resultado que faz parte dos objetos de conhecimento elencados para alunos do ensino fundamental conhecido como decomposição (fatoração) de um número natural maior do que 1 em fatores primos que, por razões óbvias, não pode ser provado nesse estágio de ensino. Ele também é encontrado em livros de teoria dos números com a denominação Teorema Fundamental da Aritmética, que enunciaremos a seguir.

**Teorema 4 (Teorema Fundamental da Aritmética):** Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Por exemplo 5 é primo, mas 120 não é primo. Porém 120 pode ser escrito da seguinte maneira:

$$120 = 10 \cdot 12 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

ou

$$120 = 6 \cdot 20 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

Note que, a menos da ordem dos fatores primos, a representação do número 120 é a mesma independentemente de sua fatoração inicial. Ele é composto de: três fatores 2, um fator 3 e um fator 5. Além disso, agrupando os fatores primos repetidos, se necessário, e ordenando eles em ordem crescente, temos a seguinte escrita:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

A afirmação é claramente verdadeira para  $n = 2$  (2 é primo). Suponhamos que o resultado vale para um certo  $n \geq 2$  e, a partir disso, vamos provar que ele é verdadeiro para  $n + 1$ . Agora perceba como fica impróprio, nesse problema, o passo indutivo, ou seja, na passagem de  $n$  para  $n + 1$ . Por exemplo, sabemos que o número 24 é escrito como um produto de números primos ( $24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ ), mas esse fato não é decorrente do número 23, seu antecessor direto, e sim dos números 4 e 6 (dois antecessores) poderem ser escritos com produto de números primos, isto é, a validade de  $n + 1$  não decorre diretamente de  $n$ .

Em outras palavras: o primeiro modelo de prova por Indução Matemática não é bastante “forte” ou “completo” para esse problema e muitos outros envolvendo números naturais.

Assim, matemáticos fizeram uma elaboração alternativa do Princípio de Indução Matemática para ser usada nos casos em que é conveniente, para provar a validade para  $n + 1$ , não somente a partir da validade para  $n$ , mas de dois ou mais antecessores de  $n + 1$ . Essa nova versão é denominada segunda forma do Princípio de Indução Matemática, ou Princípio de Indução Completa (Forte), que apresentaremos a seguir.

**Teorema 5:** Seja  $P(n)$  uma proposição relativa ao número natural  $n$  e seja “a” um número natural tal que:

i)  $P(a)$  é verdadeira, e que

ii) a veracidade de  $P(a)$ ,  $P(a + 1)$ , ... e  $P(n)$  implica na veracidade de  $P(n+1)$ .

Então,  $P(n)$  é válida para todo  $n \geq a$ .

O item (ii) pode ser reescrito da seguinte maneira:

ii') a veracidade de  $P(k)$  para todo número natural  $k$ , tal que  $a \leq k \leq n$  implica na veracidade de  $P(n+1)$ . Ou equivalentemente.

ii'') a veracidade de  $P(k)$  para todo número natural  $k$ , tal que  $a \leq k < n$  implica na veracidade de  $P(n)$ .

### Demonstração:

Sejam  $V = \{n \in \mathbb{N}; n \geq a \text{ e } P(n) \text{ é verdadeira}\}$  e  $W = \{x \in \mathbb{N}; x \geq a \text{ e } x \notin V\} = \{x \in \mathbb{N}; x \geq a \text{ e } P(x) \text{ é falsa}\}$ .

Queremos provar que  $W$  é vazio. Isto será feito por redução ao absurdo (como sempre se dá nas demonstrações por boa ordenação). Com efeito, suponhamos que  $W$  não é vazio, então pelo Princípio da Boa Ordenação, existe um menor elemento  $k$  em  $W$ . Pela condição (i),  $a \in V$  e daí  $a \notin W$ . Ora,  $a$  não está em  $W$  e  $k$  é o menor elemento de  $W$ , logo  $k > a$ . Assim  $a, a + 1, \dots, k - 2, k - 1$  não estão em  $W$  e, portanto, eles devem obrigatoriamente pertencer a  $V$ . Por (ii), conclui-se que  $P(k - 1 + 1) = P(k)$  é verdadeira, isto é,  $k \in V$ , que contradiz o fato de  $k \in W$ . Logo, a suposição de que  $W$  não era vazio é falsa e, portanto,  $W$  é vazio de modo que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \geq a$ . ■

**Observação 5:** Note que a diferença entre a segunda forma de Indução Finita da primeira é a maneira de como é redigida a hipótese de indução. Nesta,  $P(n+1)$  é uma consequência lógica da veracidade de  $P(n)$ , enquanto naquela  $P(n+1)$  é uma consequência lógica da veracidade de todos os casos anteriores:  $P(a)$ ,  $P(a + 1)$ , ... ,  $P(n)$ . Não obstante o que foi dito, pode-se demonstrar que as duas formas de Indução Matemática, bem como o Princípio da Boa Ordenação, são equivalentes. A demonstração desse fato pode ser encontrada em **Tópicos de Matemática -IME-ITA- Olimpíadas**, volume 2 dos autores Carlos A. Gomes e José Maria Gomes.

Antes da demonstração, propriamente dita, do Teorema 4, usamos como pré-requisito preparatório, a Proposição 15 e o Corolário 1 dessa proposição, cujas demonstrações podem ser vistas em distintas fontes, como, por exemplo, nos livros: **Teoria Elementar dos Números** do autor Edgard de Alencar Filho e **Aritmética** do autor Abramo Hefez.

**Definição 7:** Sejam  $p$  e  $q$  dois números inteiros. Dizemos que  $p$  divide  $q$ , cuja notação é  $p \mid q$ , quando existir um inteiro  $m$  tal que  $q = pm$ .

Assim, por exemplo,  $2 \mid 6$  porque  $6 = 2 \cdot 3$ .

**Proposição 15:** Sejam  $a, b, p \in \mathbb{Z}$ , com  $p$  primo. Se  $p \mid ab$ , então  $p \mid a$  ou  $p \mid b$ .

Note que, apesar da proposição acima se referir ao conjunto dos números inteiros, ela também é válida para os números naturais, com os quais estamos trabalhando, pois o conjunto dos números naturais é um subconjunto dos números inteiros.

**Corolário 1:** Sejam  $p, a_1, a_2, \dots, a_n$  números naturais com  $p$  primo. Se  $p \mid a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ , então  $p \mid a_i$ , para algum  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Agora escrevemos formalmente, usando a segunda forma do Princípio de Indução Matemática, a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética (Teorema 4). O teorema abaixo é composto de duas partes: a primeira diz que a escrita é sempre possível (existência) e a segunda que ela é única (unicidade).

**Teorema 4:** Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Inicialmente, demonstremos a existência da escrita.

**Demonstração:**

**i) Base de Indução.**

Se  $n = 2$ , o resultado é obviamente verificado uma vez que 2 é um número primo.

**ii) Passo Indutivo.**

Suponhamos que o resultado seja válido para todo número natural  $k$  com  $2 \leq k \leq n$ , ou seja, para 2, 3, 4, ... e  $n$  e vamos provar que ele será válido para  $n + 1$ . Para tal propósito, dividimos a demonstração em dois casos.

**Caso 1:** Se  $n + 1$  for um número primo, não há nada a demonstrar.

**Caso 2:** Se  $n + 1$  não for um número primo, então pela própria definição de número composto existe um número natural  $a$  diferente de 1 e  $n + 1$  que divide  $n + 1$ . Logo  $\frac{n+1}{a} = b$  é um número natural. Note que  $b$  também é diferente de 1 e  $n + 1$ , pois caso contrário  $a = n + 1$  e  $a = 1$ , respectivamente. Assim,  $n + 1 = a \cdot b$ , com  $2 \leq a \leq n$  e  $2 \leq b \leq n$ . Logo, por hipótese

de indução, existem números primos  $p_1, p_2, \dots, p_r$  (não necessariamente distintos) e  $q_1, q_2, \dots, q_s$  (não necessariamente distintos) tais que  $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$  e  $b = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$  de modo que,  $n + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ , ou seja,  $n + 1$  escrito como produto de números primos.

Agora, provemos a unicidade da escrita.

### **i) Base de Indução.**

Para  $n = 2$  a validade da afirmação é óbvia.

### **ii) Passo Indutivo.**

Suponhamos, então, que ela seja válida para todos os números naturais maiores do que 1 e menores do que  $n + 1$ . Vamos mostrar que ela vale para  $n + 1$ , ou seja, que  $n + 1$  se escreve de modo único como produto de primos. De fato,

Se  $n + 1$  é primo, não há nada a provar.

Se  $n + 1$  é composto, então suponha que tenhamos duas fatorações ordenadas em ordem não-decrescente, isto é,

$$n + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s,$$

onde os  $p_i$  e os  $q_j$  são números primos, com  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$  e  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_s$ .

Vamos mostrar que obrigatoriamente  $r = s$  e  $p_i = q_j$ . Com efeito, como  $p_1$  divide  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ , então  $p_1$  divide  $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ . Pelo Corolário 1 temos que  $p_1$  divide um dos fatores  $q_j$  com  $j = 1, 2, \dots, s$ . Logo, como  $q_j$  é primo,  $p_1 = q_j \geq q_1$ . Analogamente,  $q_1$  divide  $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$  e, portanto, divide algum  $p_i$  com  $i = 1, 2, \dots, r$ , de modo que  $q_1 = p_i \geq p_1$ . Mas isto implica  $p_1 = q_1$ . Assim  $(n + 1)/p_1 = p_2 \cdot \dots \cdot p_r = q_2 \cdot \dots \cdot q_s$  e como

$$1 < (n + 1)/p_1 < n + 1,$$

a hipótese de Indução nos garante que os números primos do produto  $p_2 \cdot \dots \cdot p_r$  são exatamente os mesmos que aparecem no produto  $q_2 \cdot \dots \cdot q_s$ , isto é,  $r = s$  e como  $p_1 = q_1$ , temos que os fatores de  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$  e  $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$  são iguais. ■

Uma versão diferente do Princípio de Indução Completa (Forte) ocorre quando conveniente, na base de Indução, analisar a validade não apenas para um número natural, mas de dois ou mais números naturais. A representação dessa variante é descrita pelo problema a seguir.

**Exemplo 12:** A sequência  $(a_n)$  é definida pelos dados:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$  se  $n > 2$ . Prove que  $a_n = a_{n+6}$  para todos os números naturais  $n$ . Descreva todos os termos dessa sequência.

A partir do enunciado do Exemplo 11, montamos a seguinte tabela para os primeiros valores de  $n$ , onde  $n$  é um número natural.

Tabela 2 - Elementos da sequência.

$n$	$a_n - a_{n-1}$	$a_n$
1		1
2		2
3	$2 - 1$	1
4	$1 - 2$	-1
5	$-1 - 1$	-2
6	$-2 + 1$	-1
7	$-1 + 2$	1
8	$1 + 1$	2

Fonte: Autoria própria.

Agora com um pouco de paciência notaremos que a sequência é dada por:

$(1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, \dots)$ .

**Solução:**

**i) Base de Indução.**

Para  $n = 1$  e  $2$  a afirmação é verdadeira, pois  $a_{1+6} = a_1$ , ou seja,  $a_1 = a_7 = 1$  e  $a_{2+6} = a_2$ , isto é,  $a_2 = a_8 = 2$  de acordo com a Tabela 3.4.6.

**ii) Passo Indutivo.**

Como  $a_{n+1}$  depende de  $a_n$  e  $a_{n-1}$  torna-se razoável o uso da segunda forma do Princípio de Indução Matemática, de modo que devemos utilizar a veracidade da afirmação para  $n$  e  $n - 1$ . Assim, suponhamos  $a_n = a_{n+6}$  válida para todos os números naturais maiores do que 2 e menores do que  $n + 1$  e a partir disso mostraremos que ela vale para  $n + 1$ , isto é,  $a_{n+1} = a_{(n+1)+6}$ . Com efeito, pela hipótese de indução, temos

$$a_n = a_{n+6} \text{ e } a_{n-1} = a_{(n-1)+6}.$$

Substituindo na expressão para  $a_{n+1}$  dada na definição, temos

$$a_{n+1} = a_n - a_{n-1} = a_{n+6} - a_{(n-1)+6} = a_{n+6} - a_{(n+6)-1} = a_{(n+6)+1} = a_{(n+1)+6}.$$

(Note que no quarto sinal de igualdade usamos a definição da sequência).

Como a afirmação é verdadeira para  $n = 1$  e  $2$ , e supondo válida para todos os números naturais maiores do que  $2$  até  $n$  implica válida para  $n + 1$ , então ela é verdadeira para todos os números naturais  $n$ . ■

A sequência de Fibonacci (ou Leonardo de Pisa, famoso matemático italiano do século XIII) é:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots),$$

em que cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois imediatamente anteriores. definida recursivamente por:

$$f_1 = f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ com } n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

**Proposição 16:** Mostre que o termo geral da sequência de Fibonacci satisfaz a desigualdade:

$$f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

**Demonstração:**

**i) Base de Indução.**

Para  $n = 1$  e  $2$  a desigualdade é verdadeira, pois  $f_1 = 1 < \frac{7}{4}$  e  $f_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ .

**ii) Passo Indutivo.**

Suponhamos que ela seja válida para todo número natural  $k$  com  $1 < k \leq n$ . Queremos provar que  $f_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$ . De fato, da hipótese de indução, a desigualdade é verdadeira, notadamente, para  $n$  e  $n - 1$ . Assim, temos

$$f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \text{ e } f_{n-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1},$$

e então

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{11}{4}\right)$$

e como

$$\frac{11}{4} < 3 < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2.$$

então

$$f_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}.$$

Como a afirmação é verdadeira para  $n = 1$  e  $2$ , e supondo válida para todos os números naturais maiores do que  $2$  até  $n$  implica válida para  $n + 1$ , então ela é verdadeira para todos os números naturais  $n$ . ■

**Observação 6:** No Exemplo 12 e na Proposição 16, encontramos não apenas demonstrações por Indução, como também definições por indução: cada elemento das sequências citadas, com exceção de alguns primeiros, são definidos por meio de uma regra que possibilita gerá-los através dos antecessores imediatos. As sequências definidas desta forma são denominadas recorrentes ou recursivas.

**Exemplo 13:** Mostre que é possível pagar, sem receber troco, qualquer quantia inteira de reais, maior do que  $7$ , com notas de  $3$  reais e  $5$  reais.

Este é o mesmo Exemplo 10 da seção 3.3, só que agora usamos a segunda forma de Indução Matemática para resolvê-lo.

A partir do enunciado do problema vamos montar a seguinte tabela para os primeiros valores de  $n$ , onde  $n$  é a quantia inteira de reais.

Tabela 3 - Partições em  $3$  reais e  $5$  reais.

$n$	$3$ 's + $5$ 's
8	$3 + 5$
9	$3 + 3 + 3$
10	$5 + 5$
11	$(3 + 5) + 3$
12	$(3 + 3 + 3) + 3$
13	$(5 + 5) + 3$
14	$((3 + 5) + 3) + 3$

Fonte: Autoria própria.

Observe na Tabela 3 que há um certo padrão nas partições em 3 reais e 5 reais de 8 reais e 11 reais, de 9 reais e 12 reais, de 10 reais e 13 reais e etc. A partir de cada três casos consecutivos, os outros três consecutivos imediatos são obtidos destes, adicionando 3 reais em cada caso respectivamente, desse modo, este “ciclo” de tamanho 3 nos leva a concluir que devemos provar três casos iniciais em nossa base de indução completa.

Assim, para conseguir  $n + 1$  reais como soma de cédulas de 3 reais e 5 reais, adicionamos 3 reais à soma em  $n - 2$ , por exemplo,  $14 = ((3 + 5) + 3) + 3 = 11 + 3$ .

### **Solução:**

#### **i) Base de Indução.**

Para  $n = 8, 9$  e  $10$  a afirmação é verdadeira, basta ver a Tabela 3.4.8.

#### **ii) Passo Indutivo.**

Suponhamos, então, que ela seja válida para todos os números naturais maiores do que 7 e menores do que  $n + 1$ . Vamos mostrar que ela vale para  $n + 1$ , ou seja, que  $n + 1$  reais seja particionado em notas de 3 reais e 5 reais. De fato, temos que  $n + 1 = (n - 2) + 3$  e como  $7 < n - 2 < n + 1$ , a hipótese de Indução nos garante que  $n - 2$  é particionado em notas de 3 reais e 5 reais, ou seja,  $n - 2 = 3m + 5k$  com  $m$  e  $k$  números naturais. Logo  $n + 1 = (n - 2) + 3 = 3m + 5k + 3 = 3(m + 1) + 5k$ , estabelecendo, assim, o resultado para todo  $n$  natural maior do que 7. ■

Pelo que foi exposto nessa seção, podemos fazer uma síntese do Princípio de Indução Completa (forte): suponha que se deseje demonstrar que uma certa propriedade envolvendo números naturais, denominada  $P(n)$ , seja verdadeira para todo número natural maior ou igual do que o número natural  $a$ . Duas condições devem ser validadas:

- i) Verifica-se que a propriedade é verdadeira para  $a, a+1, \dots$ ; ou quantos casos forem necessários para sua argumentação no passo indutivo.
- ii) Supõe-se  $P(a), P(a + 1), \dots, P(n)$  verdadeiras e, partindo disso, confirma-se a validade de  $P(n + 1)$  (passo indutivo).

Se  $a = 1$ , então a propriedade em questão é válida para todo número natural e caso  $a = 0$ , ela é verdadeira para todo número pertencente ao conjunto  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ .

## 4 Abordagem da Indução e Combinatória em Livros do Ensino Médio

O livro didático ainda é uma importante ferramenta que auxilia tanto professores como estudantes na condução do processo de ensino e aprendizagem. Para o professor, apesar do mesmo não ser o único recurso disponível, ele serve de guia para sua prática no dia a dia. Em virtude disso, acreditamos que a escolha de um bom livro-texto é de extrema importância para a boa prática docente. No compêndio Exame de textos-Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio, do Elon *et al.*, os autores analisam criticamente várias coleções de livros didáticos. Eles evidenciam o quão fundamental é o cuidado ao se abordar certos tópicos de matemática em livros do ensino médio. Diante disso, consideramos conveniente analisar como os livros do ensino médio vêm abordando os conteúdos como binômio de Newton, indução matemática e triângulo de Pascal, bem como os teoremas associados a esses temas (binômio de Newton, teorema das linhas, colunas e diagonais do triângulo de Pascal). Visando observar a mudança de enfoque ao longo dos anos, resolvemos escolher para a análise quatro coleções intituladas **Matemática (2º grau)** de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno; **Matemática ensino médio** de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz; **Contexto & Aplicações** de Luiz Roberto Dante e **Multiversos Matemática ensino médio** de Joamir de Souza, conforme vemos abaixo.

### 4.1 COLEÇÃO MATEMÁTICA (2º GRAU)

A primeira coleção analisada foi publicada no período 1990-1999. Ela é formada por três volumes, sendo cada volume designado a uma série do ensino de segundo grau (atualmente ensino médio).

#### 4.1.1 Abordagem da Indução

Em nenhum dos três volumes o tema indução matemática é citado.

#### 4.1.2 Abordagem das Fórmulas Combinatórias

Os conteúdos em questão estão inseridos no Volume 2. A apresentação começa com a definição de número binomial e em seguida é demonstrada, usando a definição acima, a relação de Stifel conforme a Figura 6.

Figura 6 - Demonstração da relação de Stifel.

**Relação de Stifel**

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

**Demonstração:**  
Partindo do 1º membro, temos:

$$\frac{(n-1)!}{(p-1)![n-1-(p-1)]!} + \frac{(n-1)!}{p![n-1-p]!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$

Como  $(n-p)! = (n-p)(n-p-1)!$  e  $p! = p(p-1)!$

vem  $\frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{(p+n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

portanto:  $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

Fonte: Coleção Matemática (2º grau) - Volume 2 (1992, p. 202).

Em relação aos Teoremas do triângulo de Pascal e à Fórmula binomial de Newton veja o que traz o livro.

Figura 7 - Teorema das linhas.

A soma dos números binomiais de uma mesma linha é uma potência de base 2 cujo expoente é a ordem da linha (dada pelo numerador).

linha 0  $\Rightarrow 1 \longrightarrow 2^0 = 1$   
 linha 1  $\Rightarrow 1 + 1 \longrightarrow 2^1 = 2$   
 linha 2  $\Rightarrow 1 + 2 + 1 \longrightarrow 2^2 = 4$   
 linha 3  $\Rightarrow 1 + 3 + 3 + 1 \longrightarrow 2^3 = 8$   
 linha 4  $\Rightarrow 1 + 4 + 6 + 4 + 1 \longrightarrow 2^4 = 16$   
 linha 5  $\Rightarrow 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 \longrightarrow 2^5 = 32$

Em geral:  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$  ou  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$

Fonte: Coleção Matemática (2º grau) - Volume 2 (1992, p. 204).

Figura 8 - Fórmula do binômio de Newton.

Neste item vamos obter o desenvolvimento de  $(x + a)^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , que é denominado **binômio de Newton**.

Observe os seguintes desenvolvimentos:

$$n = 0 \rightarrow (x + a)^0 = 1$$

$$n = 1 \rightarrow (x + a)^1 = 1x + 1a$$

$$n = 2 \rightarrow (x + a)^2 = 1x^2 + 2ax + 1a^2$$

$$n = 3 \rightarrow (x + a)^3 = 1x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + 1a^3$$

$$n = 4 \rightarrow (x + a)^4 = 1x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + 1a^4$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n = n \rightarrow (x + a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n$$

portanto:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n x^0$$

fórmula do binômio de Newton

Fonte: Coleção Matemática (2º grau) - Volume 2 (1992, p. 205).

Note que, de acordo com as Figuras 7 e 8, o livro não deixa claro se as justificativas trazidas para a validade das fórmulas são demonstrações ou apenas casos particulares que dão indícios de uma possível generalização.

## 4.2 COLEÇÃO MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO

A segunda coleção analisada foi editada no período 2000-2009. Ela é constituída por três volumes, sendo cada volume destinado a uma série do ensino médio.

### 4.2.1 Abordagem da Indução

Em nenhum dos três volumes o tema Indução Matemática é abordado.

### 4.2.2 Abordagem das Fórmulas Combinatórias

Os conteúdos em questão estão inseridos no Volume 2. A abordagem começa com o esquema do triângulo de Pascal e em seguida, sem a citação das propriedades elencadas para

sequência didática, a relação de Stifel é demonstrada usando a definição de combinação simples. Veja a seguir:

Figura 9 - Demonstração da relação de Stifel.

$$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1} \text{ ou } \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Por meio de algumas relações entre um conjunto e seus subconjuntos podemos provar a relação de Stifel.

Consideremos um conjunto **B** qualquer com  $n + 1$  elementos, sendo **a** um desses elementos. O número de subconjuntos de **B** com  $p + 1$  elementos é  $C_{n+1}^{p+1}$ . Esse número é igual à soma do número de subconjuntos nos quais **a** não está ( $C_n^{p+1}$ ) com o número de subconjuntos nos quais **a** está ( $C_n^p$ ).

Fonte: Coleção Matemática ensino médio -Volume 2 (2005, p. 82).

Em relação aos Teoremas do triângulo de Pascal e à Fórmula binomial de Newton veja o que traz o livro.

Figura 10- Demonstração do Teorema das linhas.

### Soma dos coeficientes numéricos da expansão binomial

Fazendo  $a = b = 1$  em:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n,$$

$$\text{vem } (1 + 1)^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \cdot 1^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^n.$$

Portanto, 
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n .$$

Fonte: Coleção Matemática ensino médio -Volume 2 (2005, p. 85).

Note que estamos diante de uma aplicação da Fórmula do binômio de Newton e que, apesar de o resultado da Figura 10 ser designado com outro nome, estamos diante do Teorema das Linhas do triângulo de Pascal.

Figura 11 - Fórmula do binômio de Newton.

Vamos observar o binômio  $(a + b)^0$ , os coeficientes dos termos das expansões de  $(a + b)^1$ ,  $(a + b)^2$ ,  $(a + b)^3$  e as linhas do triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{l} (a + b)^0 = 1 \qquad \qquad \qquad 1 \\ (a + b)^1 = 1a + 1b \qquad \qquad 1 \quad 1 \\ (a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 \qquad 1 \quad 2 \quad 1 \\ (a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \end{array}$$

Podemos escrever as potências do binômio  $(a + b)$ , do seguinte modo:

$$\begin{aligned} (a + b)^0 &= \binom{0}{0} a^0 b^0 \\ (a + b)^1 &= \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \\ (a + b)^2 &= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 \\ (a + b)^3 &= \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 \end{aligned}$$

Veja também os desenvolvimentos de  $(a + b)^4$  e  $(a + b)^5$ :

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4 \\ (a + b)^5 &= \binom{5}{0} a^5 b^0 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} a^0 b^5 \end{aligned}$$

De forma geral, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ , temos:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p + \dots + \binom{n}{n} a^{n-n} \cdot b^n$$

Esta fórmula é denominada **fórmula do binômio de Newton**.

Fonte: Coleção Matemática ensino médio -Volume 2 (2005, p. 83 - 84)

Perceba que a fórmula da Figura 11 foi estabelecida simplesmente pela observação de casos particulares expostos.

#### 4.3 COLEÇÃO CONTEXTO & APLICAÇÕES

A terceira coleção analisada foi editada no período 2010-2019. Ela é formada por três volumes, sendo cada volume designado a uma série do ensino médio.

### 4.3.1 Abordagem da Indução

Apesar do tema em questão não ser abordado de forma usual no ensino básico, ele está inserido no Capítulo 1 do Volume 3. A partir do estudo deste volume, podemos constatar que ele tem um capítulo dedicado ao tópico, nomeado como “O princípio de Indução Finita”. Todo o assunto foi desenvolvido de forma coerente, tratando do tema praticamente com proposições matemáticas, com apenas uma aplicação lúdica, a Torre de Hanói<sup>2</sup>. Para maiores esclarecimentos sobre o jogo e a Matemática envolvida nele, vide (Ferreira; Oliveira, 2023). No entanto, ele foi incorporado de forma estanque, isto é, totalmente isolado dos conteúdos da coleção. Por exemplo, no Volume 3, o princípio poderia ser usado para demonstrar a fórmula de Moivre, já no Volume 2, para demonstrar a fórmula do binômio de Newton, como podemos observar nas Figuras 14 e 15. No mais, ele aborda todo o assunto de forma adequada para este nível de ensino

Veja o que o livro discorre sobre o assunto.

Figura 12 - Princípio de Indução.

## O Princípio de Indução Finita (P.I.F.)

Consideremos  $\mathbb{N}^*$  o conjunto dos números naturais sem o zero ou dos inteiros positivos. Seja  $P(n)$  uma propriedade ou uma proposição aplicável aos números desse conjunto  $\mathbb{N}^*$ .

Se

(1)  $P(1)$  (para  $n = 1$ ) é verdadeira

e se

(2)  $P(k)$  verdadeira acarretar que  $P(k + 1)$  também é verdadeira, para *qualquer*  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

então

$P(n)$  é verdadeira, para *qualquer*  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Fonte: Coleção Contexto & Aplicações -Volume 3 (2011, p. 10).

<sup>2</sup> A Torre de Hanói é um jogo criado no fim do século XIX. Ele consiste em uma base onde estão fixadas três hastes e alguns discos de diâmetros diferentes furados no centro. Numa das hastes estão colocados todos os discos em ordem crescente de diâmetros, de cima para baixo. O objetivo é mudar a pilha de discos para uma haste distinta, usando uma das hastes como auxiliar e obedecendo a duas regras: mover apenas um disco de cada vez e nunca posicionar um disco maior sobre um menor.

Figura 13 - Exemplo de aplicação do Princípio de Indução.

1ª) Vamos demonstrar que a proposição  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$  é verdadeira, qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(1) Notamos que  $P(1)$  é verdadeira, pois para  $n = 1$  temos  $1 = 1^2$ .

(2) Suponhamos que  $P(k): 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , é verdadeira.

Vamos provar que  $P(k + 1)$  também é verdadeira.

Sabemos que  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$  (hipótese).

Somando  $(2k + 1)$  a ambos os membros da igualdade acima, temos:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Fonte: Coleção Contexto & Aplicações -Volume 3 (2011, p. 10).

#### 4. 3.2 Abordagem das Fórmulas Combinatórias

Os conteúdos em questão estão inseridos no capítulo 13 do Volume 2. O livro começa com a definição de número binomial, em seguida, como nos livros anteriormente analisados, a fórmula do binômio de Newton sem demonstração conforme as Figuras 14 e 15.

Figura 14 - Fórmula do binômio de Newton.

#### **Fórmula do binômio de Newton**

A fórmula do binômio de Newton é a fórmula que dá o desenvolvimento de  $(x + y)^n$ . Ela é encontrada fazendo o produto:

$$\underbrace{(x + y) \cdot (x + y) \cdot \dots \cdot (x + y)}_{n \text{ vezes}}$$

O termo genérico do produto é obtido tomando em  $p$  dos fatores ( $p = 0, 1, 2, \dots, n$ ) a segunda parcela e tomando nos restantes  $n - p$  fatores a primeira parcela. Como isso pode ser feito de  $C_n^p$  (ou  $\binom{n}{p}$ ) modos, o termo genérico do produto é  $C_n^p y^p x^{n-p}$  (ou  $\binom{n}{p} y^p x^{n-p}$ ) e

Fonte: Coleção Contexto & Aplicações -Volume 2 (2011, p. 296).

Figura 15 - Fórmula do binômio de Newton.

$$(x + y)^n = C_n^0 y^0 x^n + C_n^1 y^1 x^{n-1} + C_n^2 y^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n y^n x^0 \text{ ou}$$

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \dots + \binom{n}{n} y^n$$

Note que os expoentes de  $x$  começam em  $n$  e decrescem de 1 em 1 até 0, enquanto os expoentes de  $y$  começam em 0 e crescem de 1 em 1 até  $n$ .

Fonte: Coleção Contexto & Aplicações -Volume 2 (2011, p. 297).

Mais adiante é construído o esquema do triângulo de Pascal, em seguida, a relação de Stifel e o Teorema das Linhas é provado usando a definição de combinação simples, de acordo com as Figuras 16, 17 e 18.

Figura 16 - Demonstração da relação de Stifel

2ª) Observe:

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2} \rightarrow \text{Considere um conjunto } \mathbf{A} \text{ com 4 elementos. Podemos formar } \binom{4}{2} \text{ subconjuntos de}$$

$\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3}$  2 elementos. Considere agora  $x$  um dos elementos de  $\mathbf{A}$ .  $x$  está presente em  $\binom{3}{1}$  subconjuntos de  $\mathbf{A}$  e  $x$  não está presente em  $\binom{3}{2}$  subconjuntos de  $\mathbf{A}$ .

$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$  Logo,  $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}$ .

(Somando dois elementos lado a lado no triângulo obtém-se o elemento situado abaixo no meio deles.)

Fonte: Coleção Contexto & Aplicações -Volume 2 (2011, p. 300).

Figura 17 - Demonstração da relação de Stifel

De modo geral:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \quad (\text{relação de Stifel})$$

*Prova:* Considere que  $x$  é um dos elementos de um conjunto  $A$  de  $n$  elementos. O número de subconjuntos de

$A$  com  $p$  elementos é  $\binom{n}{p}$ . Esse número é igual à soma do número de subconjuntos nos quais  $x$  não figura,  $\binom{n-1}{p}$ ,

com o número de subconjuntos nos quais  $x$  figura,  $\binom{n-1}{p-1}$ .

Fonte: Coleção Contexto & Aplicações -Volume 2 (2011, p. 300).

Figura 18 - Demonstração do Teorema das linhas.

3ª) Observe a soma dos elementos de uma mesma linha no triângulo de Pascal:

$$\binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$$

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

Qual seria o valor de  $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$ ?

De modo geral, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

*Prova:* Observe que os dois membros são iguais ao número de subconjuntos de um conjunto com  $n$  elementos.

Fonte: Coleção Contexto & Aplicações -Volume 2 (2011, p. 300).

#### 4.4 COLEÇÃO MULTIVERSOS MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO

A quarta coleção analisada foi editada no período 2020-2024. Ela é destinada ao novo ensino médio e formada por seis volumes.

##### 4.4.1 Abordagem da Indução

Em nenhum dos volumes o tema indução matemática é abordado.

##### 4.4.2 Abordagem das Fórmulas Combinatórias

Em nenhum dos volumes o tema fórmulas combinatórias é abordado.

Percebemos que nessa coleção, em contraste com as anteriores, que trataram de dois dos quatro teoremas citados no início desse capítulo, nenhum deles foi incorporado aos seus livros-texto.

Diante do que foi descrito neste capítulo até o momento, apresentamos a tabela-resumo a seguir, que sintetiza a presença ou ausência dos conteúdos abordados e suas respectivas demonstrações.

Tabela 4 – Resumo da análise dos livros.

<b>PERÍODO DA COLEÇÃO</b>	<b>INDUÇÃO MATEMÁTICA</b>	<b>BINÔMIO DE NEWTON</b>	<b>TEOREMA DAS LINHAS</b>	<b>TEOREMA DAS COLUNAS</b>	<b>TEOREMA DAS DIAGONAIS</b>
<b>1990-1999</b>	NÃO	SIM SEM PROVA	SIM SEM PROVA	NÃO	NÃO
<b>2000-2009</b>	NÃO	SIM SEM PROVA	SIM COM PROVA	NÃO	NÃO
<b>2010-2019</b>	SIM	SIM SEM PROVA	SIM COM PROVA	NÃO	NÃO
<b>2020-2024</b>	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO

Fonte: Autoria própria.

#### 4.5 CONSIDERAÇÕES E REFLEXÕES

Garbi (2010) observa que, no Brasil, o uso de provas e demonstrações nas aulas de matemática da educação básica varia enormemente ao longo do tempo. No passado, as demonstrações foram amplamente utilizadas, mas atualmente, esse processo tem sido quase totalmente abandonado nas salas de aula. Aguilar Junior e Nasser (2014) atribuem essa mudança à influência do Movimento da Matemática Moderna. Eles relatam que "a partir de então, constata-se a renúncia tácita (talvez tática) de se ensinar Matemática através de modelos dedutivos, tornando assuntos que estão encadeados em sequência lógico-dedutiva em conteúdos estanques, sem ligações e implicações" (AGUILAR JUNIOR; NASSER, 2014, p. 1014).

A indução matemática é um dos pilares do pensamento lógico-dedutivo e desempenha um papel significativo na demonstração de proposições que envolvem números naturais. A aplicação dela no ensino médio não apenas ensina os alunos a seguir passos lógicos consistentes, mas também os ajuda a entender a estrutura subjacente de uma demonstração matemática. Isso, por sua vez, melhora suas habilidades de resolução de problemas e promove uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

Ainda, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do ensino médio, são objetivos do ensino da Matemática:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática (Brasil, 2000, p. 42).

Perceba que, considerando o foco desta seção, dos nove objetivos elencados no livro texto, somente quatro foram listados, pois são voltados para o raciocínio lógico-dedutivo presente em todo campo da Matemática.

Contudo, diante de tudo o que foi dito até agora, atesta-se que das quatro coleções analisadas, três não fazem nenhuma menção sobre o tema (indução matemática). Além do mais, aquela que o citava deixou de incluí-lo nas suas edições posteriores. Portanto, em alguns casos, verifica-se uma incoerência entre aquilo que se deseja alcançar do ensino de Matemática e

aquilo que é abordado nos livros didáticos. Assim, muitas vezes, a pouca ou nenhuma relevância dada às demonstrações pelos livros, bem como pelos professores de Matemática do ensino médio, colabora para que os alunos aceitem passivamente os resultados estudados. Além de não atingir os objetivos dos PCN, temos como consequências o desenvolvimento limitado do raciocínio lógico, baixa capacidade de resolver problemas, prejuízo no Desenvolvimento de Habilidades de Comunicação Matemática e, desse modo, impactando no desempenho em exames nacionais e internacionais. Veja as inteligentes conclusões de Trevizan e Brolezzi.

Pode-se observar que a Matemática, seja do Ensino Médio, seja do Ensino Fundamental, público ou privado, não tem sido trabalhada de modo a contribuir para se alcançar as metas que são estabelecidas para a disciplina. Em vez de raciocinar, aprende-se a memorizar; em vez de deduzir, a acreditar. Em vez de adquirir ferramentas para sua vida extraescolar, o aluno adquire um novo conhecimento sem perceber sua relação com o conhecimento que adquire paralelamente fora da escola. Em vez de adquirir a habilidade de resolver problemas, o aluno é condicionado a responder alguns problemas-padrão do conteúdo que está vendo naquele momento, reproduzindo um procedimento fornecido pelo professor (Trevizan; Brolezzi, 2016, p.15).

Com o advento do novo ensino médio, algumas alterações foram aplicadas aos livros didáticos e uma delas, muito preocupante, foi a debandada de conteúdos, principalmente daqueles ensinados no segundo e terceiro anos do ensino médio. Como exemplo, podemos citar os conteúdos trabalhados na sequência didática que será apresentada no próximo capítulo, o estudo das cônicas, o estudo dos polinômios e dos números complexos. Sendo este último abandonado há tempo.

No caso do foco deste trabalho (binômio de Newton e triângulo de Pascal), temos em suma que a ausência destes tópicos no programa de ensino pode afetar a performance dos estudantes em combinatória e probabilidade e, além disso, não os prepara adequadamente para temas avançados em Matemática.

Um dos motivos que podem explicar o abandono dos conteúdos de combinatória abordados neste trabalho pode ser a percepção de que esses tópicos são considerados não essenciais para os alunos do ensino médio pelos autores de currículos. Além disso, o novo modelo do ensino médio pode não exigir a inclusão desses conteúdos com a mesma importância que anteriormente. Acreditamos que tal fato seja em decorrência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), visto que ele está conforme os PCN, o qual assegura a flexibilidade dos assuntos e da BNCC, por trazer apenas uma habilidade a ser alcançada pelos estudantes do

ensino médio, que é “resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore” (Brasil, 2018, P. 546).

Se no Brasil nota-se pouca ênfase dada às demonstrações matemáticas no ensino médio, uma questão natural é saber o que acontece em outros países que têm o ensino básico bem desenvolvido. Nos currículos de países como França, Inglaterra, Japão, Estados Unidos e Portugal, a recomendação pela inserção das demonstrações em sala de aula é explícita, destaca Pietropaolo (2005). Pierpaolo declara que:

De modo geral, os PCN parecem ter pontos em comum com orientações de outros países, apesar da menor ênfase no trabalho com as demonstrações se compararmos, por exemplo, com os currículos da França e Inglaterra. Reiteramos que currículos atuais de Matemática para Educação Básica de alguns países indicam claramente que, para que essa disciplina possa desempenhar adequadamente seu papel, é necessário desenvolver um trabalho com argumentações e provas desde as séries iniciais (Pietropaolo, 2005, p.111).

## 5 Indução no Ensino de Combinatória: uma Sequência Didática

Neste capítulo, apresentamos uma proposta de sequência didática visando abordar essa lacuna que está sendo deixada pelos livros didáticos, especificamente em relação ao binômio de Newton e o triângulo de Pascal, como visto no Capítulo anterior. Ao longo dessa sequência, não apenas apresentamos o método de indução matemática e suas aplicações, mas também exploramos como essa técnica pode estimular o interesse, a curiosidade e o engajamento dos alunos no processo de aprendizagem de fórmulas combinatórias.

### 5.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A indução matemática é uma ferramenta poderosa no ensino de Matemática. Ela é essencial para desenvolver o pensamento lógico e a capacidade de abstração dos estudantes, conforme discutido no Capítulo 3. Essa importância é corroborada por Dante, que afirma: “O Princípio de Indução Finita, como um modelo de demonstração de proposições matemáticas, permite ao aluno compreender o mecanismo de argumentação lógica dedutiva, próprio da Matemática e presente em todo seu campo” (DANTE, 2011, p. 47).

Ao abordar o ensino de combinações, a utilização de uma sequência didática bem estruturada é crucial para facilitar o entendimento e a aplicação desse conceito. Este capítulo pretende explorar a importância da indução matemática no ensino de combinações, antecedida pela fundamentação teórica sobre a construção e a relevância de sequências didáticas no ensino.

Nesse sentido, a indução matemática é uma técnica de prova fundamental no estudo das combinações, permitindo demonstrar a veracidade de proposições para todos os números naturais (NACARATO; MENGALI; Passos, 2011). No ensino médio, introduzir os alunos a essa técnica através de exemplos e exercícios práticos pode fortalecer sua compreensão e habilidade em resolver problemas combinatórios.

Ao ensinar combinações, a indução matemática pode ser utilizada para provar propriedades importantes dos coeficientes binomiais, como a soma dos elementos de uma coluna do Triângulo de Pascal, a relação entre coeficientes binomiais consecutivos e outras

identidades binomiais. Por exemplo, para demonstrar que a soma dos elementos da linha  $n$  vale  $2^n$ , a indução matemática se torna uma ferramenta pedagógica valiosa.

Uma sequência didática é um conjunto organizado e estruturado de atividades de ensino e aprendizagem planejadas com o objetivo de desenvolver determinadas competências e habilidades nos alunos. Segundo (ZABALA, 1998, p.18), “sequências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”

Essa abordagem pedagógica visa garantir a progressão e a continuidade do aprendizado, permitindo que os alunos construam conhecimento de forma gradual e consolidada.

Ugualde e Roweder (2020, p. 10) afirmam que:

Tanto na concepção de Zabala (1998) quanto na de Oliveira (2013), a sequência didática além de contribuir para a reflexão da prática do cotidiano da sala de aula, por meio da observação do seu desenvolvimento e da interação professor-aluno, aluno-aluno, é um instrumento que deve ser desenvolvido, considerando a perspectiva do ensino de conteúdos por meio de atividades sequenciadas, organizadas, com objetivos bem delimitados e explicados para professores e alunos. Tais atividades devem auxiliar no processo de ensino-aprendizagem e na construção de novos saberes e conhecimentos.

Os autores citados acima, de maneira direta ou indireta, apontam algumas vantagens na aplicação desse instrumento em sala de aula.

- Estruturação do conhecimento: permite uma abordagem sistemática e progressiva dos conteúdos, facilitando a compreensão e a retenção do conhecimento pelos alunos.
- Desenvolvimento de habilidades: favorece o desenvolvimento de habilidades cognitivas, como a análise, a síntese e a avaliação, essenciais para a resolução de problemas complexos.
- Integração de conceitos: facilita a integração de diferentes conceitos matemáticos, promovendo uma visão mais ampla e coesa da disciplina.
- Avaliação contínua: permite a avaliação contínua do progresso dos alunos, identificando dificuldades e ajustando a abordagem pedagógica conforme necessário.

- Engajamento dos alunos: promove o engajamento dos alunos através de atividades diversificadas e contextualizadas, tornando o aprendizado mais interessante e relevante.

A fundamentação teórica de uma sequência didática baseia-se em princípios pedagógicos que sustentam o ensino e a aprendizagem efetivos. Alguns desses princípios estão elencados nas próximas subseções.

### **5.1.1 Teoria Da Aprendizagem De Ausubel**

A teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel destaca a importância de relacionar novos conhecimentos com estruturas cognitivas previamente existentes. De acordo com Ausubel, “a aprendizagem significativa ocorre quando novas informações são ancoradas em conceitos relevantes e preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz” (Ausubel, 2003, p. 67). Essa ancoragem é crucial para que o aprendizado seja duradouro e compreensível, ao invés de uma simples memorização de fatos desconectados.

No contexto das combinações, a aplicação da teoria de Ausubel implica em conectar novos conceitos matemáticos às experiências e conhecimentos prévios dos alunos. Por exemplo, ao introduzir os coeficientes binomiais, é possível relacionar este conceito a situações cotidianas que envolvam escolhas e combinações, como a organização de uma equipe esportiva ou a seleção de ingredientes para uma receita. Esse processo de ancoragem facilita a construção de novos significados e promove uma aprendizagem mais profunda e integrada.

Ausubel (2003) afirma que “a tarefa educacional mais importante é apresentar material novo de forma que ele possa ser prontamente assimilado na estrutura cognitiva existente” (p. 78). Portanto, ao planejar uma sequência didática para o ensino de combinações, é essencial considerar os conhecimentos prévios dos alunos e construir pontes entre esses conhecimentos e os novos conceitos. Isso pode ser feito através de atividades que incentivem a reflexão sobre experiências passadas e a exploração de novas ideias de maneira contextualizada e relevante.

A aprendizagem significativa, segundo Ausubel, também envolve a diferenciação progressiva, onde conceitos mais gerais são apresentados inicialmente, seguidos de informações mais específicas e detalhadas. “Para que a aprendizagem seja significativa, o material deve ser organizado de forma hierárquica, começando com conceitos mais gerais e abrangentes e, gradualmente, introduzindo detalhes e especificidades” (AUSUBEL, 2003, p. 85). No ensino de análise combinatória, isso significa começar com uma introdução aos

conceitos básicos de combinação e permutação, antes de avançar para tópicos mais complexos como coeficientes binomiais e identidades combinatórias.

Ao seguir esses princípios, a sequência didática pode ser estruturada de modo a facilitar a construção de conhecimento de forma significativa, promovendo uma compreensão sólida e duradoura dos conceitos combinatórios.

### **5.1.2 Zona De Desenvolvimento Proximal De Vygotsky**

A teoria de Lev Vygotsky sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) é fundamental para entender como os alunos podem ser auxiliados a alcançar níveis mais altos de compreensão e habilidade. Segundo Vygotsky, “a ZDP é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da resolução de problemas de forma independente, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com pares mais capazes” (VYGOTSKY, 2007, p. 112).

A ZDP sugere que os alunos podem realizar tarefas mais complexas quando recebem o suporte adequado, conhecido como *scaffolding*. Este suporte pode incluir dicas, instruções e outros tipos de assistência que ajudam o aluno a completar a tarefa e, eventualmente, desenvolver a capacidade de realizá-la de forma independente. Vygotsky argumenta que o aprendizado desperta uma variedade de processos internos de desenvolvimento que são capazes de operar somente quando a criança está em interação com pessoas em seu ambiente e em cooperação com seus pares (VYGOTSKY, 2007).

Ao planejar uma sequência didática para o ensino de combinações, é crucial oferecer suporte apropriado para que os alunos possam progredir dentro de sua ZDP. Por exemplo, ao introduzir conceitos como combinações e permutações, os professores podem inicialmente demonstrar o processo de resolução de problemas, para então permitir que os alunos pratiquem com assistência gradual (COLE, 2010). À medida que os alunos ganham confiança e competência, o suporte pode ser reduzido, promovendo a autonomia.

Vygotsky destaca a importância da interação social no desenvolvimento cognitivo:

O aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento culturalmente organizado, especificamente humano. Esta é uma das premissas principais da abordagem histórico-cultural. Portanto, atividades colaborativas, como trabalho em grupo e discussões em sala de

aula, são estratégias eficazes para explorar e expandir a ZDP dos alunos (Vygotsky, 2007, p. 35).

Através da aplicação destes princípios, uma sequência didática bem estruturada não apenas facilita o entendimento dos conceitos combinatórios, mas também promove habilidades de resolução de problemas e a capacidade de trabalhar de forma independente e colaborativa.

### **5.1.3 Teoria De Bruner**

Jerome Bruner, um influente teórico da educação, enfatiza a importância da aprendizagem ativa e da descoberta. Bruner argumenta que os alunos aprendem de maneira mais eficaz quando são encorajados a descobrir princípios por si mesmos, ao invés de receber informações de forma passiva. “O principal objetivo da educação deve ser o de criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não simplesmente de repetir o que outras gerações fizeram – homens que sejam criativos, inventivos e descobridores” (BRUNER, 1966, p. 67).

A abordagem de Bruner sugere que o ensino deve ser organizado de modo a promover a exploração e a descoberta. No contexto do ensino de combinações, isso pode ser implementado através de atividades exploratórias que incentivem os alunos a formular e testar hipóteses. Por exemplo, os alunos podem ser apresentados a problemas combinatórios e ser encorajados a encontrar diferentes maneiras de resolvê-los, discutindo suas estratégias e descobertas com os colegas. De acordo com Bruner:

A importância da estrutura do conhecimento é fundamental no desenvolvimento de um currículo. Um currículo deve estar organizado de modo que permita que os alunos compreendam os princípios subjacentes dos conhecimentos que estão aprendendo. Essa organização não só facilita a compreensão dos conteúdos, mas também possibilita que os alunos transfiram esses princípios para novas situações, aplicando o que aprenderam de maneira prática e relevante em diversos contextos (Bruner, 1966, p. 80).

Isso implica que, ao ensinar combinações, os educadores devem focar não apenas na memorização de fórmulas, mas também na compreensão dos conceitos fundamentais que podem ser aplicados a diferentes problemas.

A aprendizagem por descoberta, segundo Bruner, envolve a interação ativa com o material de estudo e o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. Ele destaca que “os alunos são mais propensos a lembrar e aplicar o conhecimento que eles mesmos descobriram” (BRUNER, 1966, p. 85). Portanto, uma sequência didática baseada na teoria de

Bruner pode incluir atividades práticas, experimentos e discussões que incentivem a curiosidade e a investigação.

Além disso, Bruner propõe a ideia de que a instrução deve ser adaptada ao estágio de desenvolvimento do aluno, utilizando representações inativas, icônicas e simbólicas para facilitar a compreensão. “Ao proporcionar aos alunos oportunidades de aprendizado que correspondam ao seu nível de desenvolvimento cognitivo, podemos ajudar a construir uma base sólida para a aprendizagem futura” (BRUNER, 1966, p. 92). No ensino de combinações, isso pode significar o uso de materiais concretos e visuais para ilustrar conceitos abstratos, antes de avançar para representações mais simbólicas.

#### 5.1.4 Modelo De Ensino De Polya

George Polya<sup>3</sup>, um matemático renomado, desenvolveu um modelo de ensino para a resolução de problemas que é amplamente utilizado na educação matemática. De acordo com Polya (1957):

A resolução de problemas é uma habilidade essencial que pode ser desenvolvida e aprimorada através de um processo sistemático. Para resolver um problema, é necessário seguir um conjunto de passos que inclui: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e, finalmente, revisar a solução. Compreender o problema envolve identificar as informações disponíveis e o que se deseja encontrar. Elaborar um plano implica em escolher uma estratégia ou método apropriado para abordar o problema. Executar o plano é a etapa onde se coloca em prática a estratégia escolhida, resolvendo as equações ou aplicando os métodos necessários. Revisar a solução é crucial para verificar a precisão e a validade dos resultados obtidos, garantindo que todas as etapas tenham sido seguidas corretamente e que o problema tenha sido resolvido de maneira adequada (Polya, 1957, p. 5-6).

O modelo de Polya sugere quatro etapas principais: compreender o problema, planejar a solução, executar o plano e revisar a solução. Este modelo é descrito detalhadamente em sua obra clássica "How to Solve It" (1945).

- Compreender o problema: Polya destaca a importância de compreender plenamente o problema antes de tentar resolvê-lo. Ele afirma que “se você não consegue resolver o

---

<sup>3</sup> George Pólya (1887-1985) nasceu em Budapeste, Áustria- Hungria. É considerado um dos grandes educadores matemáticos da história e fez inúmeras contribuições fundamentais na área de Matemática, principalmente no processo ensino-aprendizagem, desta disciplina, através de seu modelo de ensino visto nesta subseção.

problema, há alguma coisa que você não entendeu; ache o que é” (POLYA, 1945, p. 5). Isso implica ler e interpretar o problema com cuidado, identificando os dados fornecidos e o que é solicitado.

- Planejar a solução: depois de compreender o problema, é necessário elaborar um plano para resolvê-lo. Polya sugere que os alunos perguntem a si mesmos: “Você já viu esse problema antes? Ou já viu um problema semelhante? Sabe de onde pode tirar alguma informação útil?” (POLYA, 1945, p. 7). Nesta etapa, os alunos devem pensar em estratégias e métodos que possam aplicar, baseando-se em problemas resolvidos anteriormente.
- Executar o plano: esta etapa envolve colocar em prática o plano elaborado. Polya enfatiza a necessidade de precisão e cuidado na execução: “Carregue a execução de seu plano meticulosamente. Verifique cada passo. Pode você ver claramente que o passo está correto?” (POLYA, 1945, p. 9). Os alunos devem seguir suas estratégias passo a passo, verificando cada etapa para garantir a precisão.
- Revisar a solução: após resolver o problema, é crucial revisar todo o processo para confirmar a exatidão da solução e compreender o método utilizado. Polya afirma que “quando você termina a solução, revise-a e discuta o processo; veja se pode obter a mesma solução por diferentes métodos” (POLYA, 1945, p. 14). Esta etapa também envolve reflexão sobre a eficiência da estratégia utilizada e as possíveis melhorias.

A incorporação do modelo de Polya em uma sequência didática para o ensino de combinações pode desenvolver a capacidade dos alunos de abordar problemas de maneira estruturada e eficiente. Através da prática dessas etapas, os alunos aprendem a pensar criticamente e sistematicamente, habilidades que são essenciais para a resolução de problemas matemáticos.

Ao aplicar este modelo, os professores podem criar atividades que guiem os alunos por cada uma das quatro etapas, utilizando exemplos práticos de problemas combinatórios. Além disso, a revisão regular das soluções e dos métodos utilizados ajuda os alunos a consolidar o conhecimento adquirido e a desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos.

A indução matemática, quando ensinada através de uma sequência didática bem planejada, pode transformar a compreensão dos alunos sobre combinações e outras áreas da matemática. A fundamentação teórica que sustenta a sequência didática garante que o ensino seja estruturado, progressivo e alinhado com princípios pedagógicos reconhecidos. Ao integrar

essas abordagens, os educadores podem proporcionar um aprendizado mais significativo e eficaz, capacitando os alunos a dominar conceitos complexos de maneira profunda e duradoura.

## 5.2 DEMONSTRAÇÃO DOS RESULTADOS USADOS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção faremos, formalmente, as demonstrações dos teoremas e proposições da sequência didática que será redigida na próxima seção.

**Proposição 17:** Mostre que  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:**

**i) Base de Indução.**

Para  $n = 1$ , a igualdade se verifica, pois  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .

**ii) Passo Indutivo.**

Suponhamos que o resultado seja válido para um certo  $n \geq 1$  e vamos mostrar que a igualdade também vale para  $n + 1$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} 1+2+\dots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)+(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)+((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Mostrando, dessa maneira, que o resultado é válido para  $n + 1$  e, portanto, pelo Princípio da Indução Finita, o resultado é válido para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Note que na primeira igualdade acima foi usada a hipótese de indução. Portanto o resultado proposto é válido para  $n + 1$  e, por conseguinte, o princípio de indução nos garante o resultado para qualquer  $n$  natural. ■

Alguns fatos serão necessários para a compreensão das demonstrações vindouras. Por isso, os apresentamos abaixo.

1º) Define-se o fatorial de um número  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , denotado por  $n!$ , da seguinte maneira:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

2º) Sejam  $n > 0$  e  $k$  dois números inteiros tais que  $0 \leq k \leq n$ . Denomina-se número binomial, de numerador  $n$  e classe  $k$ , cuja notação é  $\binom{n}{k}$ , como sendo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Em particular, para  $k = 0$  ou  $k = n$ , temos  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .

3º) A fórmula seguinte é conhecida como Relação de Stifel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

**Teorema 4.2.2** (Fórmula Binomial de Newton): Sejam  $a$  e  $b$  números reais e  $n$  um número natural, então

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

**Demonstração:**

**i) Base de Indução.**

Para  $n = 1$ , a fórmula obtida é  $(a + b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b$ . Logo, a afirmação é válida nesse caso.

**ii) Passo Indutivo.**

Suponha que a afirmação seja verdadeira para algum  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e a partir disso, demonstremos que ela vale também para  $n + 1$ . Com efeito,

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = a(a + b)^n + b(a + b)^n.$$

De acordo com a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} a(a + b)^n &= a \left[ \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \right] \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{1} a^n b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^1 b^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(a + b)^n &= b \left[ \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \right] \\ &= \binom{n}{0} a^n b^1 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}. \end{aligned}$$

Adicionando ambas as expressões, obtemos:

$$(a + b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + [\binom{n}{1} + \binom{n}{0}] a^n b^1 + [\binom{n}{2} + \binom{n}{1}] a^{n-1} b^2 + \dots + [\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}] a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}.$$

Agora, usando várias vezes a relação de Stifel, temos

$$(a + b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 \dots + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}.$$

Além disso  $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$  e  $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ , de modo que,

$$(a + b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 \dots + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}.$$

Estabelecendo, assim, o resultado para  $n + 1$ . Logo, pelo Princípio da Indução Finita, o resultado é válido para todo  $n$  natural. ■

**Teorema 4.2.3** (Teorema das linhas): A soma dos elementos da linha  $n$  do triângulo de Pascal vale  $2^n$ . Algebricamente, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Note ainda que essa é a soma dos coeficientes numéricos da expansão binomial.

Vamos verificar o que acontece com a soma dos elementos das linhas em alguns casos particulares de  $n$ :

linha 0: $\binom{0}{0}$	linha 0: 1	soma: $2^0$
linha 1: $\binom{1}{0} \binom{1}{1}$	linha 1: 1	soma: $2^1$
linha 2: $\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$	linha 2: 1 2 1	soma: $2^2$
linha 3: $\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$	linha 3: 1 3 3 1	soma: $2^3$
linha 4: $\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$	linha 4: 1 4 6 4 1	soma: $2^4$

**Demonstração:**

**i) Base de Indução.**

Para  $n = 0$ , a fórmula obtida é  $\binom{0}{0} = 2^0$ . Logo, a igualdade é válida nesse caso.

**ii) Passo Indutivo.**

Suponha que a afirmação seja verdadeira para algum  $n \geq 0$  e a partir disso, demonstremos que ela vale também para  $n + 1$ . Com efeito, pela relação de Stiefel temos:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{1} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \\ \binom{n+1}{2} &= \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \\ &\vdots \\ \binom{n+1}{n} &= \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4} + \dots + \binom{n+1}{n+1} &= \binom{n+1}{0} + [\binom{n}{0} + \\ &+ \binom{n}{1}] + [\binom{n}{1} + \binom{n}{2}] + [\binom{n}{2} + \binom{n}{3}] + \dots + [\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}] + \binom{n+1}{n+1}. \end{aligned}$$

Note ainda que  $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$  e  $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ , de modo que,

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4} + \dots + \binom{n+1}{n+1} &= \binom{n}{0} + [\binom{n}{0} + \binom{n}{1}] + \\ &+ [\binom{n}{1} + \binom{n}{2}] + [\binom{n}{2} + \binom{n}{3}] + \dots + [\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}] + \binom{n}{n} = 2 \cdot [\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \\ &+ \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}] = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}, \end{aligned}$$

estabelecendo, assim, o resultado para  $n+1$ . Logo, pelo Princípio da Indução Finita, o resultado é válido para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . ■

**Teorema 4.2.5** (Teorema das colunas): Na coluna  $n$  do triângulo de Pascal, a soma de seus elementos, começando do primeiro até um elemento qualquer dela, é igual ao elemento que está imediatamente à direita do primeiro elemento da coluna que não foi adicionado.

Algebricamente, temos:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \binom{n+4}{n} + \dots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Vamos examinar o que ocorre com a soma dos elementos das colunas em alguns casos particulares de  $n$ :

$$\begin{aligned} \text{linha 0: } & \binom{0}{0} \\ \text{linha 1: } & \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\ \text{linha 2: } & \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\ \text{linha 3: } & \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\ \text{linha 4: } & \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\ \text{linha 5: } & \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} \text{linha 0:} & \boxed{1} & & & & \\ \text{linha 1:} & 1 & \boxed{1} & & & \\ \text{linha 2:} & 1 & 2 & 1 & & \\ \text{linha 3:} & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \text{linha 4:} & 1 & \boxed{4} & 6 & 4 & 1 \\ \text{linha 5:} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

**Demonstração:****i) Base de Indução.**

Para  $k = 0$ , a fórmula obtida é  $\binom{n+0}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+0+1}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ . Logo, a igualdade é válida nesse caso.

**ii) Passo Indutivo.**

Suponha que a afirmação seja verdadeira para algum  $k \geq 0$ , ou seja,  $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \binom{n+4}{n} + \dots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$ , e a partir disso, demonstremos que ela vale também para  $k + 1$ . De fato,

$$\begin{aligned} \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \binom{n+4}{n} + \dots + \binom{n+k}{n} + \binom{n+k+1}{n} &= \left[ \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \right. \\ &+ \left. \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \binom{n+4}{n} + \dots + \binom{n+k}{n} \right] + \binom{n+k+1}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} + \binom{n+k+1}{n} = \\ &= \binom{n+k+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Estabelecendo, assim, o resultado para  $k + 1$ . Logo, pelo Princípio da Indução Finita, o resultado é válido para todo  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . ■

Note que, na última adição as parcelas referem-se à hipótese de indução e à Relação de Stiefel. Além disso, podemos verificar o teorema das colunas observando o triângulo acima construído com 6 linhas.

**Teorema 4.2.7** (Teorema das diagonais): Na diagonal  $n$  do triângulo de Pascal, a soma de seus elementos, começando de um elemento da primeira coluna até um elemento qualquer dela, é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da última parcela. Algebricamente, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Vamos observar o que advém da soma dos elementos das diagonais em alguns casos particulares de  $n$ :

linha 0:  $\binom{0}{0}$

linha 1:  $\binom{1}{0} \binom{1}{1}$

linha 2:  $\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$

linha 3:  $\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$

linha 4:  $\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$

linha 0: 1

linha 1:  $\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 1 \end{array}$

linha 2:  $\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{array}$

linha 3:  $\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \end{array}$

linha 4:  $\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$

**Demonstração:**

**i) Base de Indução.**

Para  $k = 0$ , a fórmula obtida é  $\binom{n+0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n+0+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ . Logo, a igualdade é válida nesse caso.

**ii) Passo Indutivo.**

Suponha que a afirmação seja verdadeira para algum  $k \geq 0$ , ou seja,  $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$ , e a partir disso, demonstremos que ela vale também para  $k + 1$ . De fato,

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} + \dots + \binom{n+k}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \left[ \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} + \dots + \binom{n+k}{k} \right] + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}.$$

Estabelecendo, assim, o resultado para  $k + 1$ . Logo, pelo Princípio da Indução Finita, o resultado é válido para todo  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Note que, nos dois últimos sinais de igualdade foram usadas a hipótese de indução e a Relação de Stifel, respectivamente. ■

### 5.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO BINÔMIO DE NEWTON E TEOREMAS DO TRIÂNGULO DE PASCAL

Nesta seção, apresentamos a sequência didática propriamente dita. Ela aborda os conteúdos de combinatória que, nos últimos anos, foram retirados dos livros didáticos paulatinamente, como visto no Capítulo 4. Nesse sentido, nossa proposta visa preencher essa lacuna, introduzindo a indução matemática como ferramenta acessível e eficaz na demonstração do Teorema do Binômio de Newton e dos Teoremas do Triângulo de Pascal. Além disso, essa sequência justifica-se pelo alinhamento com as diretrizes curriculares atuais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCM), que valorizam o desenvolvimento de habilidades cognitivas e socioemocionais dos estudantes.

Apesar dos resultados propostos nesta seção terem sido demonstrados neste trabalho, eles podem ser encontrados em (GOMES, 2012; LOPES, 1999). Abaixo, delineamos as características da nossa sequência didática.

**Público-alvo:** alunos do 2º ano do ensino médio, em busca de dominar as expansões binomiais e os teoremas relacionados ao Triângulo de Pascal.

**Tempo total:** 5 aulas (50 minutos cada).

**Objetivo geral:** contribuir para a integração do estudante na sociedade em que vive, proporcionando-lhe conhecimentos básicos de teoria e prática da Matemática, bem como promover o exercício pleno da cidadania, auxiliando-o na formação de cidadão consciente.

### **Conteúdos Abordados**

- Princípio de Indução Matemática.
- Binômio de Newton.
- Triângulo de Pascal

### **Objetivos Específicos**

- Compreender o conceito e aplicar o Princípio de Indução Matemática.
- Desenvolver o raciocínio dedutivo e a habilidade de construir provas matemáticas.
- Demonstrar a fórmula do Binômio de Newton e desvendar os segredos da fórmula e sua relação com o Triângulo de Pascal.
- Dominar as técnicas de expansão e aperfeiçoar as habilidades para expandir binômios de qualquer potência.
- Desenvolver o raciocínio lógico e matemático e aprimorar o pensamento crítico e a capacidade de resolução de problemas.
- Promover o trabalho em equipe, assim como colaborar e incentivar a troca de ideias para construção conjunta do conhecimento.
- Introduzir e demonstrar os três principais teoremas do Triângulo de Pascal: Teorema das Linhas, Teorema das Colunas e Teorema das Diagonais

### **Materiais necessários**

- Quadro branco ou projetor para apresentações e visualizações.
- Calculadoras para auxiliar nos cálculos (opcional).
- Fichas com exercícios para prática individual e em grupo.

- Computador com acesso à internet para pesquisa e exploração de recursos online (opcional).

**Avaliação:** a avaliação dar-se-á considerando-se: a participação, o desempenho, o interesse e a responsabilidade, bem como uma atividade escrita, observando-se o domínio dos conteúdos ministrados durante as aulas.

## **Desenvolvimento das aulas**

### **Aula 1: Introdução ao Princípio de Indução Matemática (duas aulas)**

#### **1.1 Situação Desencadeadora**

Nesta etapa inicial é bom o professor expor situações interessantes para que os alunos se sintam estimulados a prosseguir e concluir as fases seguintes.

**Situação 1:** dado o trinômio  $n^2 + n + 41$  (estudado por Leonhard Euler), consideremos a seguinte afirmação: para todo inteiro positivo  $n$  o valor da expressão é um número primo.

**Situação 2:** obter uma fórmula exata em função de  $n \geq 1$  para a soma dos  $n$  primeiros números ímpares.

#### **1.2 Procura de Soluções**

Nesta fase, os alunos debatem sobre possíveis soluções para as atividades propostas. O professor, nesse momento, será apenas um mediador.

#### **1.3 Exposição Teórica**

O professor poderá utilizar a solução, da Situação 1, sugerida pelos estudantes, para formar a Proposição 1, para mostrar a importância das demonstrações matemáticas e do raciocínio dedutivo, bem como apresentar o formato do Método da Indução: base, hipótese de indução e o passo indutivo.

**Proposição 1:** Demonstre que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

#### **1.4 Apresentação do Método de Indução**

Nesta etapa, o professor, com o auxílio dos alunos, faz a demonstração da Proposição 1, mostrando passo a passo toda a dinâmica da indução matemática: primeiro, provamos que a proposição é verdadeira para um caso base, geralmente 0 ou 1; em seguida, assumimos que a proposição é verdadeira para um certo  $n$  natural (hipótese de indução) e provamos, com o uso desta hipótese, que ela também é verdadeira para  $n + 1$  (passo indutivo). Nestas condições, a proposição é válida para todos os números naturais. Ainda, se achar necessário, poderá fazer uma analogia com o efeito dominó: se podemos provar que a primeira peça cai (base da indução) e que cada peça derruba a próxima (passo indutivo), então todas as peças caem.

### 1.5 Atividade

Após a exposição do Método da Indução Matemática, os alunos deverão tentar demonstrar as duas proposições seguintes.

1. Mostre que  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais  $(a_n)$  tal que  $a_1$  é dado e, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

onde  $r$  é um número real fixo chamado razão. Mostre que  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ .

### Aula 2: Binômio de Newton (uma aula)

Antes de começarmos uma aula, é importante retomarmos a aula anterior para verificar se ficou alguma lacuna que possa prejudicar o andamento das aulas a serem ministradas. Assim, é interessante fazermos uma discussão sobre os diferentes elementos de uma prova por indução: base, hipótese de indução e passo indutivo. Como também, se for preciso, tecer comentários acerca dos problemas propostos, corrigindo erros comuns e reforçando conceitos importantes. Isto deve ser seguido por todas as aulas desta sequência.

O ideal é que esta sequência didática seja aplicada após o professor ter apresentado problemas de contagem, de modo que os alunos já estejam familiarizados com a definição do fatorial de um número.

#### 2.1 Situação Desencadeadora

**Situação 3:** Expanda os seguintes binômios:  $(x + y)^2$ ,  $(x + y)^3$  e  $(x + y)^4$ .

## 2.2 Procura de Soluções

Nesta fase, os alunos debatem sobre possíveis soluções para as atividades propostas. O professor nesse momento será apenas um mediador.

## 2.3 Exposição Teórica

Nesta etapa, se for preciso, o professor definirá número binomial cuja notação é  $\binom{n}{k}$  e poderá utilizar as soluções da Situação 3, sugerida pelos estudantes, para escrever as expansões propostas com os coeficientes binomiais. Por exemplo,

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3x^1y^2 + y^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3,$$

assim como para formular o Teorema 1.

**Teorema 1:** Sendo  $a$  e  $b$  números reais e  $n$  um número natural, tem-se

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

## 2.4 Apresentação da Demonstração da Fórmula do Binômio de Newton

Nesta etapa, o professor, com o auxílio dos alunos, faz a demonstração algébrica da Relação de Stifel, que é um pré-requisito para a demonstração do Teorema 1. Depois, prova a fórmula do Binômio de Newton, mostrando passo a passo toda a dinâmica da Indução Matemática: base de indução, hipótese de indução e passo indutivo.

## Aula 3: Teoremas do Triângulo de Pascal (duas aulas)

Novamente devemos fazer uma breve revisão da aula anterior, pois, como veremos, existe uma relação entre os termos de uma linha do Triângulo de Pascal e os coeficientes da fórmula do Binômio de Newton.

### 3.1 Situação Desencadeadora

**Situação 4:** Nesta etapa inicial é bom fazer uma projecção do Triângulo de Pascal no quadro para constatar a relação de Stifel, bem como conjecturar sobre os termos das linhas, colunas e diagonais.

$$\begin{array}{ll}
 \text{linha 0: } \binom{0}{0} & \text{linha 0: } 1 \\
 \text{linha 1: } \binom{1}{0} \binom{1}{1} & \text{linha 1: } 1 \quad 1 \\
 \text{linha 2: } \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} & \text{linha 2: } 1 \quad 2 \quad 1 \\
 \text{linha 3: } \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} & \text{linha 3: } 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 \text{linha 4: } \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} & \text{linha 4: } 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1
 \end{array}$$

### 3.2 Exposição Teórica

Nesta etapa, com o auxílio dos alunos, o professor fará a elaboração dos três teoremas que serão demonstrados na fase seguinte.

**Teorema 2** (Teorema das linhas): A soma dos elementos da linha  $n$  do triângulo de Pascal vale  $2^n$ . Algebricamente, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

**Teorema 3** (Teorema das colunas): Na coluna  $n$  do triângulo de Pascal, a soma de seus elementos, começando do primeiro até um elemento qualquer dela, é igual ao elemento que está imediatamente à direita do primeiro elemento da coluna que não foi adicionado. Algebricamente, temos:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \binom{n+4}{n} + \dots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

**Teorema 4** (Teorema das diagonais): Na diagonal  $n$  do triângulo de Pascal, a soma de seus elementos, começando de um elemento da primeira coluna até um elemento qualquer dela, é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da última parcela. Algebricamente, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

### 3.3 Apresentação das Demonstrações dos Teoremas das Linhas, das Colunas e das Diagonais

Nesta etapa, o professor, com o auxílio dos alunos, faz as demonstrações dos Teoremas 2, 3 e 4, mostrando passo a passo toda a dinâmica da Indução Matemática: base de indução, hipótese de indução e passo indutivo.

## **Aula 4: Avaliação (uma aula e opcional)**

### **4.1 Objetivos Específicos**

- Consolidar os conhecimentos adquiridos.
- Avaliar a compreensão dos alunos.
- Revisar os principais pontos trabalhados.

### **4.2 Avaliação Formativa (um processo contínuo e acumulativo)**

Dependendo do perfil do professor, além das observações feitas durante as aulas, poderá ser aplicada uma prova escrita com discussão e feedback das respostas.

Concluída a sequência didática, espera-se que o aluno tenha atingido uma grande parte dos objetivos elencados anteriormente.

**Observação:** Lembre-se de adaptar a sequência às características da sua turma, oferecendo apoio adicional quando necessário e encorajando a participação ativa.

## 6 Conclusão

Ter domínio das diversas técnicas de demonstração é uma habilidade crucial para professores de Matemática, matemáticos e profissionais de muitas áreas afins. Uma questão sutil é definir quais técnicas de demonstração em Matemática devem ser ensinadas no contexto do ensino médio, pois muitas delas ultrapassam o nível de maturidade matemática dos estudantes desse nível. No entanto, a omissão dessas técnicas também não parece a melhor atitude pedagógica, podendo causar lacunas na formação dos discentes, que podem se refletir em dificuldades em exames nacionais, processos seletivos e, eventualmente, em cursos de ensino superior. Nesse sentido, Garbi (2010) pontua que, no Brasil, a utilização de provas e demonstrações nas aulas de matemática da educação básica oscilou de um extremo a outro: antigamente, demonstrava-se bastante, mas, atualmente, esse processo foi praticamente eliminado das salas de aula. Segundo Aguilar Junior e Nasser (2014), esse abandono do processo de demonstração de teoremas foi influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna. Aguilar Junior e Nasser (2014, p.1014) relatam que “A partir de então, constata-se a renúncia tácita (talvez tática) de se ensinar Matemática através de modelos dedutivos, tornando assuntos que estão encadeados em sequência lógico-dedutiva em conteúdos estanques, sem ligações e implicações”.

Acreditamos que o bom senso e o equilíbrio devem prevalecer na escolha de quais resultados provar e quais técnicas utilizar. Partindo da premissa de que a indução matemática é acessível ao nível de maturidade dos alunos, propomos, por meio de uma sequência didática, sua utilização no ensino do binômio de Newton e teoremas relativos ao triângulo de Pascal. A escolha desses tópicos deriva do fato de que eles vêm sendo retirados dos livros didáticos mais atuais, conforme indicado no Capítulo 4. Ainda no Capítulo 4, argumentamos que muitos países com um ensino básico de Matemática sólido incluem em seus currículos escolares técnicas de demonstração matemática (PIETROPAOLO, 2005). Um questionamento que surge naturalmente é: o bom desempenho no ensino básico desses países se deve, em parte, à presença das demonstrações em sala de aula? Esta é uma reflexão que deixamos para o leitor.

Esperamos que nosso trabalho possa fomentar o debate sobre a presença das demonstrações no ensino médio e que a sequência didática proposta no Capítulo 5 possa ser

utilizada por professores interessados em introduzir a técnica de indução matemática nesse contexto de ensino.

## Referências

- AGUILAR JUNIOR, C. A.; NASSER, L. **Estudo sobre a visão do professor em relação à argumentação e prova matemática na escola**. Bolema: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, São Paulo, v. 28, n. 50, p. 1012-1031, dez. 2014.
- AUSUBEL, D. P.; NOVAK J. D.; HANESIAN H. **Psicologia educacional: um ponto de vista cognitivo**. Tradução de Eva Nick et al. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- BONJORNO, R. J.; GIOVANNI, R. J. **MATEMÁTICA 2**. São Paulo: FTD, 1992.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000.
- BROLEZZI, A. C.; TREVIZAN, W. A. **Como ensinar Análise Combinatória**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.
- BUNER, J. S. **Toward a Theory of Instruction**. Cambridge: Harvard University Press, 1966.
- CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2014 (Coleção PROFMAT).
- DANTE, L. R. **Manual pedagógico do professor**. São Paulo: Ática, 2011.
- DANTE, L. R. **Matemática Contextos & Aplicações**. v 2. São Paulo: Ática, 2011.
- DANTE, L. R. **Matemática Contextos & Aplicações**. v 3. São Paulo: Ática, 2011.
- DINIZ, I. M. **Matemática ensino médio**. v 2. São Paulo: Saraiva, 2005.
- LIMA, E.L. **Curso de Análise** v. 1.14. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- LIMA, E.L. *et al.* **Exame de textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- FERREIRA, D. B.; OLIVEIRA, E. P de. **A matemática no jogo de Torres de Hanói**. Rio de Janeiro: SBM, 2023.
- FETISSOV, A. I. **A demonstração em geometria**. São Paulo: Atual, 1995. (Coleção matemática: aprendendo e ensinando).
- FILHO, E. A de. **TEORIA ELEMENTAR DOS NÚMEROS**. São Paulo: Nobel, 1992.

- FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos: A Experiência Russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012
- FREITAS, N. C. B. **Princípio de indução matemática: fundamento teórico e aplicações na educação básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Estadual do Ceará, 2013.
- GARBI, G. G. **C.Q.D.: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- GOMES, C. A.; GOMES, J. M. **Tópicos de Matemática, IME-ITA- Olimpíadas, volume 2**. Fortaleza: Vestseller, 2012.
- HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2014 (Coleção PROFMAT).
- HOFFMANN, J. **Avaliação mediadora: Uma prática em construção da pré-escola à universidade**. Mediação, 2008.
- LOPES, L. **Manual de Indução Matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.
- MORAIS FILHO, D. C. **Um Convite à Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. 3. ed., Editora Pedagógica e Universitária, 2011.
- NACARATO, A.; MENGALI, B.; PASSOS, C. **Matemática: Cenários e Ensino**. São Paulo: Cortez, 2011.
- OLIVEIRA, K. I. M.; CORCHO FERNÁNDEZ, A. J. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção olimpíadas de matemática)
- OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento: Um processo sócio-histórico**. 4 ed. Scipione, 1997.
- OLIVEIRA, M. M. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis: Vozes, 2013.
- PIETROPAOL, R. C. **(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- REGO, T. C. **Vygotsky: Uma perspectiva histórico-cultural da educação**. Vozes, 2003.
- SOMINSKI, I. S. **Método de Indução Matemática**. São Paulo: Atual, 1996. (Coleção matemática: aprendendo e ensinando).

UGALDE, M.C.P; ROWEDER, C. **Sequência didática: Uma proposta metodológica do ensino-aprendizagem**. Revista de Estudos e Pesquisas sobre ensino tecnológico do IFAC, v.6, Edição Especial, e099220, p. 10, 2020

VIDIGAL, A. *et al.* **Fundamentos de álgebra**. Belo Horizonte: UFMG, 2005.

VIEIRA, F.; CARVALHO, R. A. **Elementos de Aritmética e Álgebra**. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

ZABALA, A. **A prática educativa: Como ensinar**. 7 ed. Artmed, 2002.