Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Marco Antônio Campos de Lira

Do triângulo retângulo ao ciclo trigonométrico: Conceitos e aplicações

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva

Natal - RN
Agosto de 2024

MARCO ANTÔNIO CAMPOS DE LIRA

DO TRIÂNGULO RETÂNGULO AO CICLO TRIGONOMÉTRICO: CONCEITOS E APLICAÇÕES.

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRN como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva.

Dissertação de Mestrado sob o título **Do triângulo retângulo ao ciclo trigonométrico: Conceitos e aplicações)**, apresentada por Marco Antônio Campos de Lira e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva
Orientador
UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva.
Examinador Interno
UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Prof. Dr. Elthon John Rodrigues de Medeiros
Examinador externo
IFRN - Instituto Federal do Rio Grande do Norte - Campus central.

Natal/RN - Agosto de 2024

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Lira, Marco Antônio Campos de.
Do triângulo retângulo ao ciclo trigonométrico: conceitos e aplicações / Marco Antônio Campos de Lira. - 2024.
96 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Natal, RN, 2024.
Orientação: Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva.

1. Trigonometria - Dissertação. 2. Geometria - Dissertação. 3. História da Matemática - Dissertação. 4. Ensino de Matematica - Dissertação. I. Silva, Carlos Alexandre Gomes da. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 514.116(043.3)

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dedico a Deus e a toda minha família, em especial à minha mãe Maria Iolanda Campos de Lira, ao meu pai Sebastião Rodrigues de Lira, à minha esposa Íris Marroque e à milha filha Renata Marroque de Lira.

Agradecimentos

Agradeço à santíssima trindade, Deus Pai, Filho e Espirito Santo por me dar todo dia a certeza de que vale a pena continuar buscando novos conhecimentos e aprendizados. Agradeço também minha família pela força, e por acreditar que eu seria capaz de vencer mais este desafio. Agradeço aos professores(as), Débora, Ronaldo, Igor e Fagner, em especial, ao meu orientador Carlos A. Gomes da Silva e aos coordenadores do curso, que estiveram sempre presentes ao longo da minha jornada. Também agradeço aos meus amigos de turma que tanto me ajudaram nessa conquista, neste longo percurso de três anos, assim como, a todos meus amigos maravilhosos que fazem parte de minha vida e que contribuíram com uma palavra de incentivo para o meu sucesso.

A todos, meus sinceros agradecimentos!

”Os ensinamentos das pessoas sábias são como uma fonte de vida; eles ajudam a evitar as armadilhas da morte.”
(Provérbios 13.14)

Resumo

O presente trabalho oferece um panorama sobre a evolução da trigonometria ao longo da história, destacando como alguns dos antigos sábios desenvolveram e empregaram os princípios que hoje conhecemos como a Trigonometria. Inicialmente, essa teoria foi fundamental para a determinação de distâncias inacessíveis e, com o tempo, passou a ser aplicada no estudo dos movimentos periódicos e na modelagem de diversos fenômenos naturais. Já no século IXX, com o estabelecimento das chamadas *Series de Fourier*, através das quais podemos expressar diversos tipos de funções como uma soma das funções trigonométricas básicas (seno e cosseno), a trigonometria revelou-se mais ainda como tema central e de grande relevância dentro da Matemática pura e aplicada. O presente trabalho também propõe uma abordagem alternativa a para o ensino da trigonometria no Ensino Médio. A proposta inclui uma transição gradual e lógica do estudo da trigonometria no triângulo retângulo para a trigonometria na circunferência trigonométrica. Esse método visa proporcionar aos alunos uma compreensão mais aprofundada e coesa da matéria, ligando eventos históricos com o uso prático dessa ferramenta ao longo de séculos. Através dessa abordagem, busca-se não apenas facilitar a compreensão dos conceitos trigonométricos, mas também despertar o interesse dos alunos pela história e evolução dessa importante área da matemática, estimulando a sua curiosidade e despertando o seu interesse pelo tema.

PALAVRAS-CHAVE: Trigonometria, Geometria, História da Matemática, Ensino de Matemática.

Abstract

The present work provides an overview of the evolution of trigonometry throughout history, highlighting how some ancient scholars developed and employed the principles we now know as trigonometry. Initially, this theory was essential for determining inaccessible distances and, over time, it began to be applied to the study of periodic movements and the modeling of various natural phenomena. By the 19th century, with the establishment of the so-called Fourier Series, through which we can express various types of functions as a sum of basic trigonometric functions (sine and cosine), trigonometry revealed itself even more as a central and highly relevant subject within both pure and applied mathematics. The present work also proposes an alternative approach to teaching trigonometry in high school. The proposal includes a gradual and logical transition from the study of trigonometry in right-angled triangles to trigonometry on the unit circle. This method aims to provide students with a deeper and more cohesive understanding of the subject, linking historical events with the practical use of this tool over centuries. Through this approach, the goal is not only to facilitate the understanding of trigonometric concepts but also to spark students' interest in the history and evolution of this important area of mathematics, stimulating their curiosity and engaging them with the subject.

KEYWORDS : Trigonometry, Geometry, History of Mathematics, Teaching Mathematics.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Um convite à Trigonometria

1.1 Introdução

A Trigonometria é uma área da matemática com uma história rica e diversificada, que remonta a civilizações antigas. Apenas para termos uma ideia da evolução cronológica da Trigonometria, listamos, a seguir, um breve histórico das principais etapas e contribuições ao longo do tempo:

- Civilizações Antigas (cerca 2000 a.C. - 500 d.C.): ◦ Os babilônios e egípcios foram os primeiros a utilizar conceitos geométricos e relações angulares para resolver problemas práticos, como medições de terras e construções.

- Grécia Antiga (cerca 600 a.C. - 300 d.C.): ◦ Os gregos, especialmente os matemáticos como Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides e Hiparco, desenvolveram as bases teóricas da Trigonometria. Pitágoras, por exemplo, explorou as relações entre os lados de triângulos retângulos (Teorema de Pitágoras). ◦ Hiparco é conhecido por suas tabelas trigonométricas e métodos para resolver triângulos esféricos.

- Idade Média e Mundo Islâmico (cerca 700 - 1500 d.C.): ◦ Matemáticos árabes, como Al-Khwarizmi, desenvolveram métodos trigonométricos avançados, incluindo as funções seno e cosseno. ◦ A Trigonometria floresceu na Idade de Ouro Islâmica, com contribuições significativas de cientistas como Al-Biruni e Al-Battani.

- Renascimento e Idade Moderna (séculos 16-19): ◦ Durante o Renascimento, matemáticos europeus como Copérnico, Kepler e Galileu aplicaram Trigonometria à astronomia para estudar o movimento dos planetas. ◦ François Viète e outros matemáticos europeus desenvolveram métodos algébricos para resolver problemas trigonométricos.

- Desenvolvimentos no Século 19 até o Presente: ◦ A Trigonometria foi formalizada como uma disciplina matemática com definições precisas de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente etc.) e suas propriedades. ◦ O século 20 viu a expansão da Trigonometria para áreas como a ciência da computação, engenharia, física teórica e modelagem matemática.

Ao longo da história, a Trigonometria evoluiu de um conjunto prático de técnicas para resolver problemas do dia a dia para uma parte fundamental da matemática pura e aplicada, desempenhando um papel essencial em várias áreas do conhecimento humano.

A Trigonometria é uma área da matemática que estuda as relações entre os ângulos e os lados dos triângulos. Suas aplicações na vida real são diversas e fundamentais em várias áreas:

- Engenharia: Na construção civil, a Trigonometria é utilizada para calcular medidas, como altura de prédios, distâncias entre pontos e inclinações de terrenos.
- Física: Em áreas como a mecânica, a Trigonometria ajuda a calcular forças, movimentos e padrões oscilatórios, como os movimentos harmônicos simples.
- Astronomia: Astrônomos usam Trigonometria para calcular distâncias entre estrelas, planetas e outros corpos celestes, além de determinar suas trajetórias.
- Navegação: Pilotos e navegadores usam princípios trigonométricos para determinar localização, direção e distância em relação a outros pontos geográficos.
- Gráficos e Modelagem: Em computação gráfica e design, a Trigonometria é usada para criar animações, modelar formas complexas e simular movimentos naturais.
- Ciências da Computação: Algoritmos que envolvem gráficos 3D, reconhecimento de padrões e processamento de sinais muitas vezes se baseiam em funções trigonométricas.

- Biologia: Em biomecânica, a Trigonometria é aplicada para estudar o movimento de organismos vivos e calcular ângulos articulares.

- Economia e Finanças: Modelos matemáticos que utilizam funções trigonométricas são aplicados em análises de séries temporais e previsões econômicas.

Esses são apenas alguns exemplos de como a Trigonometria é uma ferramenta poderosa e essencial em diversas áreas do conhecimento e da prática cotidiana.

A Trigonometria é fundamental para medir distâncias inacessíveis através de métodos como a triangulação e a Trigonometria esférica. Aqui estão alguns contextos em que a Trigonometria é aplicada para medir distâncias em áreas onde não se pode acessar diretamente:

- Triangulação Geodésica: ◦ A triangulação é um método clássico e eficaz para medir distâncias longas e inacessíveis, como o tamanho de terras vastas ou a distância até objetos distantes. Consiste em medir os ângulos de um triângulo cujos lados são inacessíveis, usando pontos de observação conhecidos e ângulos de visão.

- Trigonometria Esférica: ◦ Em Astronomia e Geodésia, a Trigonometria Esférica é utilizada para calcular distâncias entre corpos celestes, como a distância até a Lua, planetas ou estrelas. Utiliza relações trigonométricas em triângulos esféricos formados pela Terra e pelo objeto celeste em questão.

- Métodos Indiretos em Engenharia: ◦ Engenheiros usam princípios trigonométricos para determinar distâncias inacessíveis durante o planejamento e construção de estruturas, como pontes, túneis e edifícios altos. Por exemplo, usando teodolitos para medir ângulos e triangulações para calcular distâncias.

- Estimativas em Ciência e Pesquisa: ◦ Em áreas como a biologia e a oceanografia, onde é difícil medir diretamente certas distâncias ou dimensões, a Trigonometria é utilizada para estimar tamanhos, alturas ou distâncias com base em observações angulares e modelos matemáticos.

- Aplicações Espaciais e Navegação: ◦ Na exploração espacial e em missões interplanetárias, a Trigonometria é usada para calcular trajetórias, distâncias e orientações entre sondas espaciais e planetas, utilizando medições angulares e distâncias conhecidas.

Em resumo, a Trigonometria é essencial para medir distâncias inacessíveis porque permite calcular tamanhos e distâncias usando apenas ângulos coletados a partir de pontos de observação conhecidos. Essa capacidade é crucial em diversas disciplinas científicas, tecnológicas e práticas, contribuindo para avanços significativos em nosso entendimento e na exploração do mundo ao nosso redor.

1.2 Trigonometria, o início

Nos últimos trinta anos tenho trabalhado como Professor de Matemática, sempre ministrando o conteúdo de Trigonometria nas turmas de segundo ou terceiros anos do Ensino Médio. O conteúdo de Trigonometria nunca foi bem aceito pelos alunos, tanto da Rede Pública como da Rede Privada. Por muito tempo, tive a impressão que o problema estava nos alunos, que não levavam a sério o curso. Com o passar dos anos e o ganho de experiência em ensinar trigonometria em diversas turmas (de diversos níveis) passei a me questionar: será mesmo que o problema está nos alunos ou poderia ser, também, a maneira como enfocamos esse conteúdo? Para sanar essa dúvida, venho tentando encontrar uma resposta, e há algum tempo, venho investigando a origem da trigonometria, assim como, o modo de introduzir a trigonometria, partindo de questionamentos como:

1. Como Surgiu a trigonometria?
2. Como surgiu a ideia do seno?
3. Qual a origem do nome de seno a razão das medidas do cateto oposto entre outros?
4. Como poderíamos motivar o conceito das razões trigonométricas no triângulo retângulo e posteriormente estender os conceitos das razões trigonométricas aos números reais com a introdução do ciclo trigonométrico?

Perguntas como essas começaram a me instigar a ir atrás de respostas, mesmo de uma forma não sistemática, desde as primeiras disciplinas do PROFMAT, surgiu a ideia de realizar um trabalho onde tanto eu quanto os outros professores que lecionam este conteúdo pudessem ter uma visão histórica da trigonometria. E pessoalmente acredito que um melhor conhecimento das origens e da evolução das ideias que encontram-se no cerne da trigonometria poderá facilitar e motivar os alunos a estudarem trigonometria. No últimos anos, tenho feito para os meus alunos a introdução da trigonometria, como indicado nos livros do José Ruy Giovanni ([8]) e José Roberto Bonjorno ([3]). Iniciamos a abordagem com as razões trigonométricas fazendo uso da velha e famosa ilustração de como um homem com uma trena, uma vara e uma boa noção de semelhança de triângulos poderia calcular a altura de uma pirâmide em um dia de sol. A resposta dessa questão nos remete ao estudo de semelhança de triângulos e a introdução da trigonometria no triângulo retângulo. Vejamos:

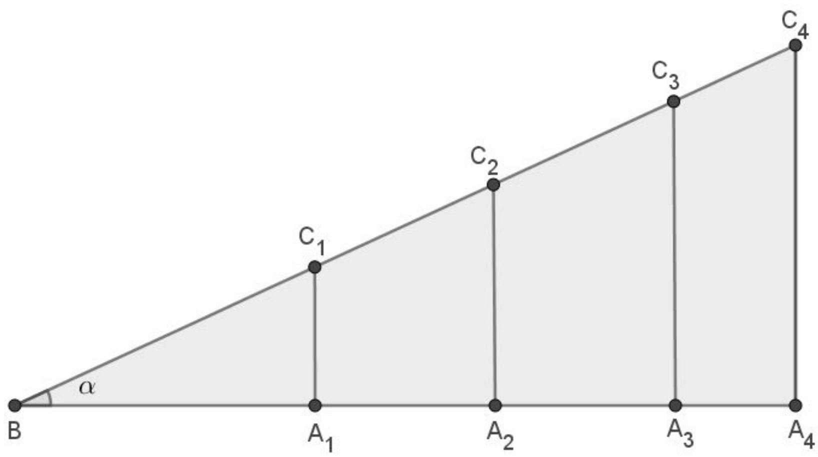


Figura 1.1: Semelhança livro da FTD

Como todo os triângulos da figura acima são semelhantes podemos estabelecer as razões de semelhança, isto é:

$$\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \frac{A_4C_4}{BC_4} = \cdots$$

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \frac{BA_4}{BC_4} == \cdots$$

$$\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \frac{A_4C_4}{BA_4} = \cdots$$

Cada uma das das razões representadas acima mantem-se constante, a menos que mudemos o ângulo agudo α, isso nos leva a concluir que o valor de cada razão é uma função do ângulo, isto é, para cada valor do ângulo α temos um valor para a razão. Na verdade essas razões tem nomes como vamos mostrar abaixo:

- Seno do ângulo agudo α:

$$\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \frac{A_4C_4}{BC_4} = \cdots = sen\alpha$$

- Cosseno do ângulo agudo α:

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \frac{BA_4}{BC_4} = \cdots = cos\alpha$$

- Tangente do ângulo agudo α:

$$\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \frac{A_4C_4}{BA_4} = \cdots = tg\alpha$$

Mesmo buscando mostrar as razões como função do ângulo colocá-las como, razão trigonométrica do ângulo agudo, permanecem em aberto questionamentos feitos no nosso preâmbulo. Dessa forma, para buscar respostas aos referidos questionamentos precisamos ir mais a fundo sobre as origens da trigonometria. É exatamente isso que faremos ao longo do presente trabalho.

No capítulo 2, veremos que a humanidade, desde os primórdios, teve um grande interesse em estudar a Astronomia. Os egípcios, por exemplo, olhavam os astros para prever os períodos de seca e de enchente do Rio Nilo. Outros fenômenos naturais de grandes proporções, tais com as estações do ano, também coincidiam com o posicionamento dos astros na abóboda celeste.

Além dos astros do espaço, havia interesse também pela Terra. Perguntas como: qual o formato da Terra? Olhando os planetas no nosso sistema com os recursos que os antigos possuíam, devem ter pensado que todo os planetas eram esféricos, pois era isso que viam ao observar o espaço. Entretanto, da superfície da Terra, olhando ao redor, parecia que a Terra era plana. Assim, a primeira pergunta a ser respondida é a Terra é plana? Caso não seja, deve ter o mesmo formato de todos os astros observados, ou seja, esférico? Veremos também como o famoso matemático grego Erastóstenes ofereceu respostas a essas perguntas.

No capítulo 3, mostraremos como as principais razões trigonométricas podem ser estendidas a triângulos quaisquer (leis dos senos e dos cossenos). Por fim, mostraremos neste capítulo como motivar, a partir de diversas situações práticas a introdução, das funções seno e cosseno, o que nos levará, naturalmente ao ciclo trigonométrico. Também daremos uma motivação para o fato do ciclo trigonométrico ter raio igual a 1. Neste mesmo capítulo mostraremos uma maneira de estender a trigonometria aos números reais.

Por fim, no capítulo 4, apresentaremos algumas situações cuja solução evoca naturalmente as razões trigonométricas. Acreditamos que esses problemas possam servir de motivação para introduzir a trigonometria como uma ferramenta que surgiu a partir de necessidade de encontrar soluções para problemas que surgiram em algum contexto da vida real. Por fim, para complementar a nossa proposta de introduzir e motivar um ensino mais cativante da trigonometria ao nível do ensino médio, apresentaremos uma breve seleção de questões extraídas de diversas fontes, entre elas, do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, que ao nosso ver, podem ser úteis no nosso propósito de um ensino honesto e mais motivador da trigonometria.

2 Problema das cordas e o nascimento da Trigonometria

Neste capítulo apresentaremos alguns contextos em que a necessidade humana em realizar medidas, especialmente aquelas inacessíveis de serem medidas diretamente, fizeram surgir, de modo natural, o aparecimento de novas ferramentas e técnicas matemáticas para resolver, mesmo que parcialmente, alguns daqueles problemas, revelando que a trigonometria surgiu como uma verdadeira necessidade da evolução humana e não como uma criação meramente intelectual dos pensadores antigos. Acreditamos que esse contexto histórico possa ser motivador para aqueles que irão ter um primeiro contato com o conteúdo, estimulando a curiosidade e o interesse pelo conteúdo.

As grandes civilizações da Antiguidade reuniram expressivo conhecimento de astronomia. Os egípcios, por exemplo, olhavam os astros para prever os períodos de seca e de enchente do Rio Nilo. Outros fenômenos naturais de grandes proporções também coincidiam com o posicionamento dos astros na abóboda celeste.

Além dos astros do espaço, havia interesse também na Terra. Nesse contexto surgiu naturalmente o questionamento sobre qual o formato da Terra. Olhando para as estrelas, com os poucos recursos que os povos antigos possuíam, é provável que tenham pensado que todos os astros eram esféricos, pois era isso que viam ao observar o espaço. Entretanto, da superfície da Terra, olhando-a ao seu redor, parecia que a Terra era plana.

Assim, a primeira pergunta a ser respondida é: Qual a forma da Terra? É plana? Caso não seja, deve ter o mesmo formato de todos os astros observados? ou seja, esférico?

A resposta à primeira pergunta foi dada por Erastóstenes. Quem foi Erastóstenes e como ele conseguiu responder esse questionamento?

2.1 Erastóstenes

Eratóstenes de Syene (Syene, 276 a.C. — Alexandria, 194 a.C.) foi um matemático, gramático, poeta, geógrafo, bibliotecário e astrônomo da Grécia Antiga, conhecido por calcular a circunferência da Terra. Nasceu em Cirene, na Líbia, e morreu em Alexandria. Estudou em Cirene, em Atenas e em Alexandria. Os contemporâneos chamavam-no de “Beta” porque o consideravam o segundo melhor do mundo em vários aspectos.

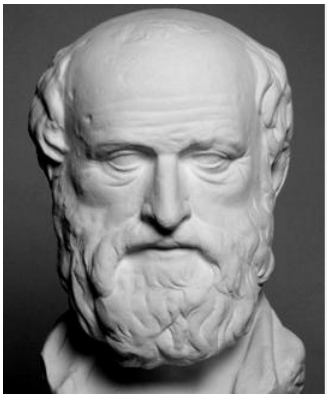


Figura 2.1: Eratóstenes de Cirene, 276 a.C. — Alexandria, 194 a.C

Por volta do ano de 240 a.C., Erastóstenes dirigia a biblioteca do museu de Alexandria, tendo, deste modo, acesso a catálogos relacionados a acontecimentos astronômicos importantes. Dentre as informações importantes que ele obteve, uma indicava o dia do ano em que ocorreria um solstício de verão no hemisfério norte, ou seja, ao meio-dia, na cidade de Syene (Assuã), os raios solares incidiriam de forma perpendicular à Terra. Nesta mesma cidade existia um poço muito fundo (Syene é uma cidade que ficava exatamente no limite da zona tropical e no mesmo meridiano de Alexandria) e, para comprovar o solstício, a luz do Sol deveria refletir nas águas deste poço muito profundo. Ora, se a Terra fosse de fato plana, toda coluna deveria ao meio-dia não ter sombra, uma vez que o sol estava iluminando a água do poço. Entretanto, Erastóstenes observou, ao meio-dia deste mesmo dia, em Alexandria (que se situava mais ao norte), a sombra de uma coluna projetada sobre o solo. Desta forma, Erastóstenes concluiu que a Terra não era plana.

Assim, conjecturou-se que a Terra teria a mesma forma dos astros observados, ou seja, esférica. Se o formato é esférico então existe um raio. Assim, a segunda pergunta natural a ser respondida era: Qual o raio da Terra?

Para responder essa pergunta Erastóstenes utilizou as informações desta mesma experiência. Ele sabia que os raios de Sol estavam perpendiculares em Syene, pois a água do poço estava iluminada pelos raios de Sol, ou seja, o Sol, o poço e o raio da Terra deveriam estar todos sobre uma mesma reta imaginária naquele momento.

Sabendo que os raios de luz provindos de grandes distâncias parecem paralelos ou comportam-se como se fossem, Erastóstenes concluiu que os raios terrestres que ligam as extremidades de um arco de $800km$, formariam um ângulo de $7,2°$ ($800km$ é a distância entre Syene e Alexandria, essa distância já era conhecida àquela época). A figura a seguir ilustra a situação que acabamos de descrever.

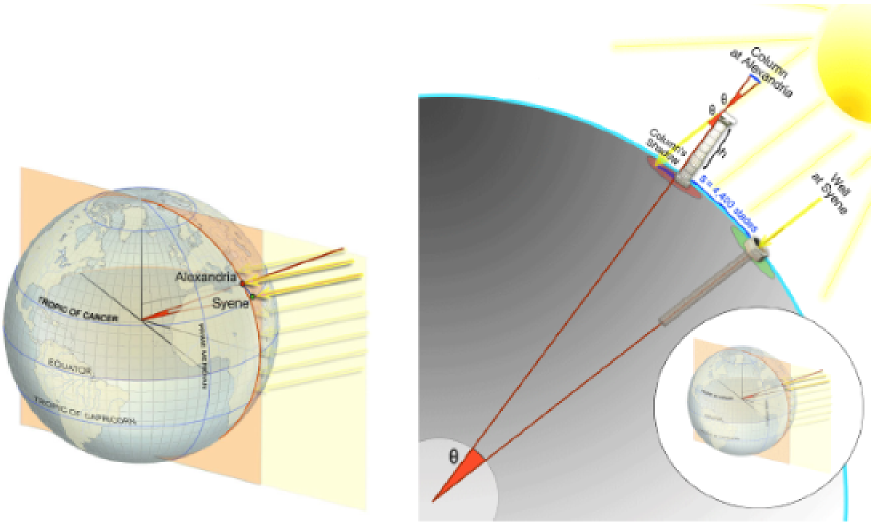


Figura 2.2: Representação da ideia de Erastóstenes

A partir dessas informações, Eratóstenes obteve uma estimativa para a medida do raio terrestre, utilizando uma simples proporção: o ângulo central de medida $\theta \simeq 7,2^o$ corresponde a um arco de comprimento $800km$ sobre a superfície terrestre, enquanto que o ângulo central de 360^o corresponde ao comprimento de uma circunferência que circunda superfície terrestre.

Supondo que a medida do raio da Terra (supostamente esférica) seja R, o comprimento dessa circunferência é $2\pi R$, onde $\pi \simeq 3,14$. Diante do exposto,

$$\frac{800}{7,2^o} = \frac{2\pi R}{360^o} \Rightarrow R \simeq \frac{360^o \cdot 800km}{7,2^o \cdot 2 \cdot 3,14} \Rightarrow R \simeq 6370km.$$

O valor aceito atualmente para o raio terrestre é $6371km$, portanto, o erro cometido por Eratóstenes foi de aproximadamente $1km$, que percentualmente corresponde a $0,01\%$. Esta estimativa é surpreendente, diante dos poucos recursos disponíveis na época.

Tempos depois, outro astrônomo teve curisiodade de medir a distância entre a Terra e a Lua. Estamos falando agora de Hiparco de Nicéia. Vamos apresentar algumas das suas ideias na seção a seguir.

2.2 Hiparco de Nicéia

Por volta de 190 a.C. - 120 a.C., um outro astrônomo chamado Hiparco de Nicéia, hoje considerado o pai da Trigonometria, teve uma ideia para medir a distância entre a Terra e a Lua.

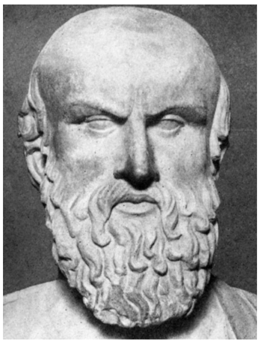


Figura 2.3: Hiparco de Nicéia (; Niceia, 190 a.C. — 120 a.C)

Nesta seção discutiremos como foi possível que ele realizasse tal feito com os poucos recursos disponíveis na época.

O que se conhecia na época?

- O tempo que a Lua levada para completar uma volta completa em torno da Terra;
- Ele sabia que era previsto um eclipse total da lua em um breve por vir;

- O raio da Terra;

A figura a seguir representa sua ideia:

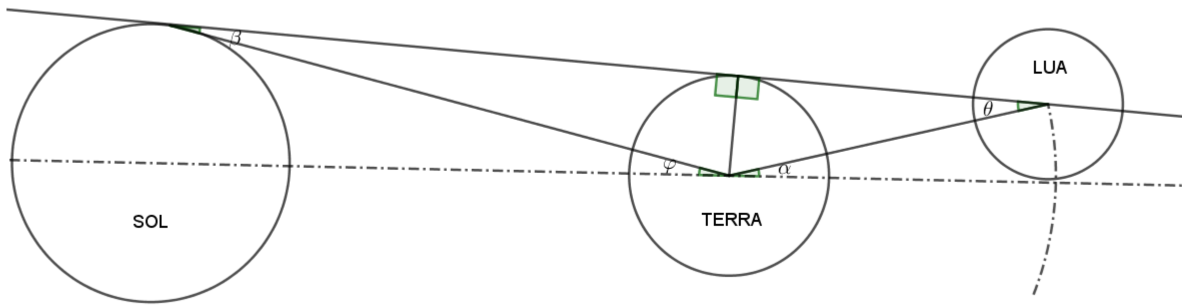


Figura 2.4: Figura do Sol, Terra e Lua

Hiparco concebeu um método simples e engenhoso para determinar a distância da Terra à Lua. O método baseia-se nas posições relativas do Sol, Terra e Lua durante um eclipse lunar, isto é, quando a Terra fica exatamente entre o Sol e a Lua.

Para medir a distância da Terra à Lua, Hiparco imaginou dois triângulos retângulos, cujas hipotenusas ligariam o centro da Terra às bordas do disco solar e lunar, por ocasião de um eclipse da Lua.

Naquela época acreditava-se que a Lua girava em torno da Terra em uma órbita circular. Assim, Hiparco considerou que a duração de um eclipse lunar era equivalente ao tempo que a Lua levava para percorrer uma distância circular determinada por duas vezes o ângulo α, ou seja, o tempo T_1 para que a lua percorra esse arco é proporcional a 2α, ou seja, $T_1 = k \cdot 2\alpha$, com k constante.

O período orbital da Lua, isto é, o tempo que ela gasta para completar uma volta inteira ($360°$) em torno da Terra já era conhecido. Então Hiparco estabeleceu uma segunda equação; $T_2 = k \cdot 360^o$ e através de uma regra de três simples determinou uma relação entre as duas equações uma vez que a única variável desconhecida era ω, ou seja,

$$\begin{array}{ccc} 2\alpha & ----- & T_1 \\ 360° & ------ & T_2 \end{array} \Rightarrow \alpha = \frac{180° T_1}{T_2}$$

Posteriormente, através do esquema acima, o ângulo φ foi identificado como o semidiâmetro do Sol, ou seja, a metade do ângulo pelo qual vemos o disco solar. O ângulo α representa a metade do ângulo pelo qual um observador no Sol veria a Terra. Utilizando o fato de que, num triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é $180°$, segue que:

$$(90^o - \beta) + (90^o - \theta) = 180^o - (\varphi + \alpha) \Rightarrow \beta + \theta = \varphi + \alpha.$$

Devido ao fato de que a distância do Sol à Terra é muito grande, segue que β é muito pequeno, o que nos permite escrever $\theta = \varphi + \alpha \Rightarrow \alpha = \theta - \varphi$.

Mesmo fazendo as aproximações anteriores, o que Hiparco tinha como dados do problema era o ângulo central e uma corda (da circunferência que a Lua percorria em torno da Terra). Entretanto, naquela época, não havia uma tabela de cordas, ou seja, uma tabela que associasse o ângulo central e o tamanho da corda com o raio da circunferência que tinha essa corda descrita pelo ângulo central dado, ou então uma tabela que relacionasse o ângulo central e o raio e obtivesse como resposta o tamanho da corda. Nesse ponto há uma pergunta natural a ser feita: como essas grandezas se relacionam?

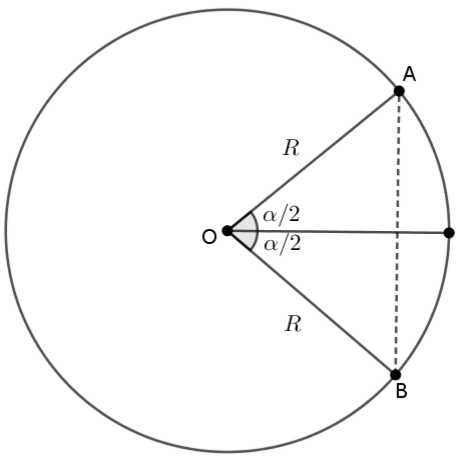


Figura 2.5: Obtendo informações do triângulo retângulo

Se esta relação dependesse do raio da circunferência, Hiparco continuaria com problemas, pois é exatamente o raio que ele está querendo encontrar. Logo, para que este método possa ser útil para a resolução do problema, precisamos que esta relação seja conhecida e então conhecendo o comprimento da corda, possamos determinar o comprimento do raio da trajetória descrita pela lua em torno da Terra.

Esse problema levou Hiparco a desenvolver uma tabela de cordas. Onde ele associava a medida do ângulo central de uma circunferência de raio conhecido e a medida da corda correspondente. Observe que, neste momento, ele está trabalhando com um raio conhecido. Poderíamos fazer mais uma pergunta: Como as medidas dessas cordas poderiam auxiliar Hiparco no cálculo da distância da terra a Lua?

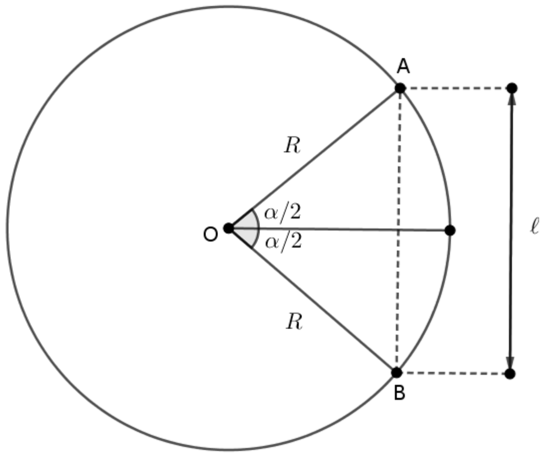


Figura 2.6: Relação entre medida da corda e medida do ângulo central

A ideia se baseia na semelhança de triângulos, mais especificamente, encontrar um triângulo retângulo semelhante ao encontrado por ele e, com uma simples proporção, a distância almejada. Por isso Hiparco escreveu uma tabela de valores de cordas para diversas medidas de ângulos centrais.

Ora, mas se é possível fazer via semelhança, que era uma técnica conhecida, para que construir uma tabela de cordas?

Na verdade, a tabela de cordas era para construir o triângulo que seria usado para fazer a semelhança, pois o ângulo central era dado e a dimensão do barbante que seria utilizado para montar a hipotenusa era conhecido, faltava então encontrar a corda com aquelas características. Depois de montada a tabela, fica fácil encontrar a distância desejada, pois basta olhar para a entrada da tabela que contém o ângulo central, e pegar os dados que serão usados para realizar a semelhança e, com isso, encontrar o que se deseja. Se imaginarmos que ele usou o barbante de tamanho 1, então dado o ângulo $\frac{\theta}{2}$ ele obteria, da tabela, o tamanho do segmento B_1C_1 e faria a semelhança representada na figura 2.7 para encontrar r uma vez que o tamanho do segmento B_1C_1 correspondia a medida do raio da Terra.

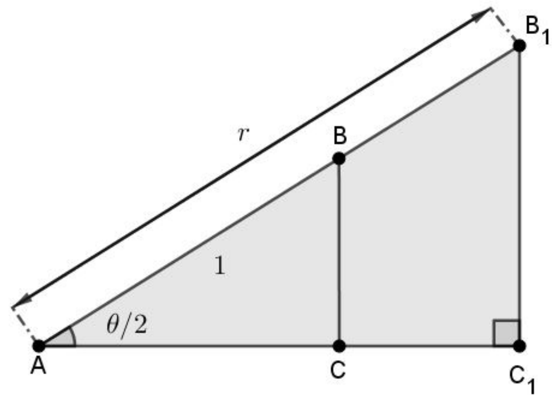


Figura 2.7: Usando a tabela para encontrar a semelhança

Isso tudo levou Hiparco a pesquisar e desenvolver conhecimentos matemáticos que possibilitassem tais cálculos. Possivelmente Hiparco teria apenas um trabalho, obter as medidas das cordas e definiu crd(α) como sendo a medida da corda para o ângulo central α. Para começar, ele utilizou algumas medidas conhecidas como a medida de lados de polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio r, por exemplo:

(a) $\mathrm{crd}(60°) = r$.

(b) $\mathrm{crd}(90°) = r\sqrt{2}$.

(c) $\mathrm{crd}(120°) = r\sqrt{3}$.

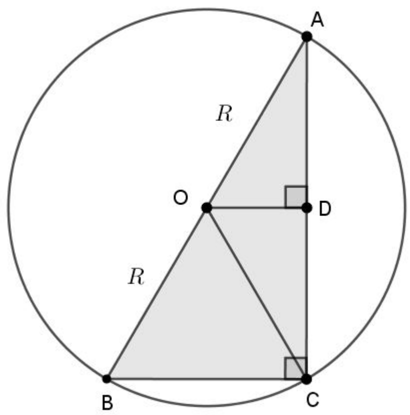


Figura 2.8: Usando a tabela para encontrar a semelhança

Observando a Figura acima, temos que se a medida do ângulo $A\widehat{B}C$ for $60°$, então a medida do ângulo $A\widehat{O}C$ será $120°$. Por Pitágoras,

$$(2r)^2 = \mathrm{crd}(60°)^2 + \mathrm{crd}(120°)^2 \Rightarrow 4r^2 = r^2 + \mathrm{crd}(120°)^2 \Rightarrow \mathrm{crd}(120°) = r\sqrt{3}$$

Outras cordas que podem ser obtidas, como a $\mathrm{crd}(72°)$ que é a medida do lado do pentágono regular de $\mathrm{crd}(36°)$, que por sua vez é a medida do lado de um decágono regular. A seguir, como era obtida a $\mathrm{crd}(36°)$.

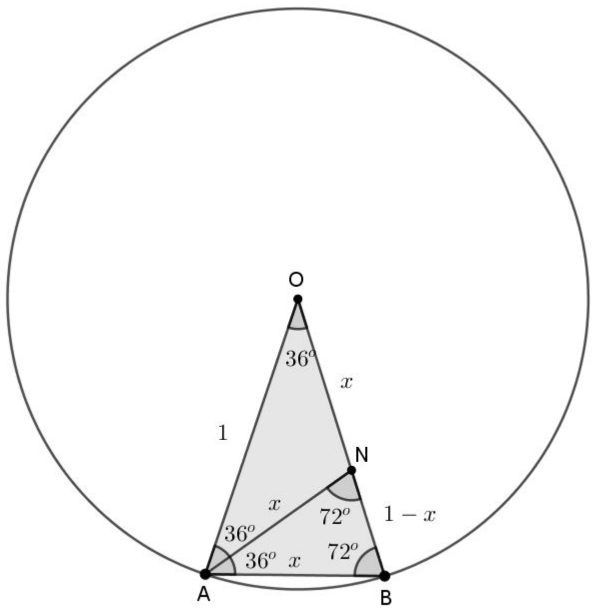


Figura 2.9: Corda associada a 36°

Observando a Figura acima temos que o triângulo OAB é isósceles, pois $\overline{AO} = \overline{OB} = r$, o segmento AN é bissetriz do ângulo interno de vértice A. Por construção, as medidas dos ângulos $O\widehat{A}N = B\widehat{A}N = 36°$, os ângulos $O\widehat{A}B = O\widehat{B}A = 72°$, logo os triângulos OAB e ABC são semelhantes, com isso podemos escrever:

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow 1 \cdot (1-x) = x \cdot x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvendo essa equação quadrática, segue que:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.6180$$

Então concluímos que em um círculo de raio unitário a $\mathrm{crd}(36°) = 0,6180$.

Como faltava a Hiparco conhecimentos necessários para construir uma tabela com variações pequenas para os ângulos centrais, coube a outro astrônomo Cláudio Ptolomeu a aperfeiçoá-la, conforme descreveremos a seguir.

2.3 Cláudio Ptolomeu

Cláudio Ptolomeu, foi sábio grego que viveu em Alexandria, uma cidade do Egito. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em óptica e teoria musical.

Figura 2.10: Cláudio Ptolomeu - 100 d.C - 170 d.C

Utilizando conceitos geométricos, Ptolomeu obteve uma tabela de cordas em uma circunferência para ângulos centrais variando de meio em meio grau.

Para encontrar medidas de cordas com diferença do ângulo central de $0,5°$, ele teve que descobrir um teorema, que leva o seu próprio nome, o Teorema de Ptolomeu, conforme enunciamos a seguir.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Ptolomeu)**.** *Em um quadrilátero cíclico (isto é, inscritível num círculo), o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.*

Se ABCD são vértices consecutivos do quadrilátero, então:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$

Usando esse Teorema, e algumas consequências (corolários) dele, foi possível para Ptolomeu obter as medidas de $\mathrm{crd}(\alpha - \beta)$, $\mathrm{crd}(\alpha + \beta)$ e $\mathrm{crd}(\frac{\alpha}{2})$. Vejamos como Ptolomeu demonstrou seu teorema e como ele obteve as consequências que ele precisou para completar sua busca de obter a tabela de cordas.

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível, vamos mostrar que

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

Sobre o segmento AC considere um ponto E de tal maneira que a medida do ângulo $A\widehat{B}E$ seja igual a medida do ângulo $D\widehat{B}C$, como na Figura.

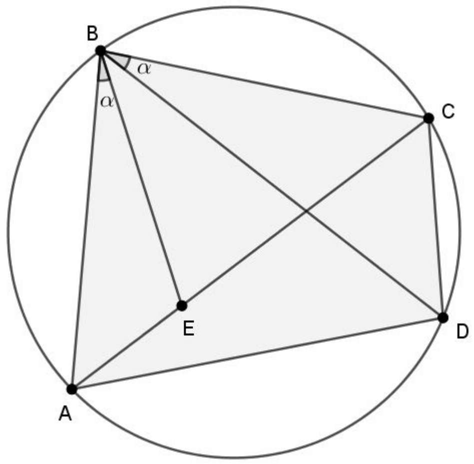


Figura 2.11: Marcação do ponto E

Observe que as medidas dos ângulos $B\widehat{C}A$ e $B\widehat{D}A$ são iguais, pois são ângulos inscritos com mesmo arco por ele subtendidos, ou seja, estamos com a seguinte situação

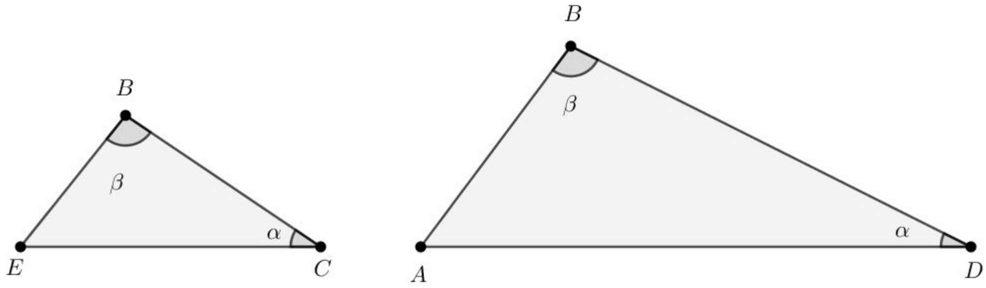


Figura 2.12: Triângulos semelhantes

Assim, pelo caso AAA concluímos que os triângulos BCE e ABD são semelhantes, logo seus lados correspondentes são proporcionais. Assim,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{CE} \cdot \overline{BD} \tag{2.1}$$

O mesmo ocorre para os triângulos BAE e BDC pois $A\widehat{B}E$ = $C\widehat{B}D$ por construção e $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C$ por serem inscritos de mesmo arco conforme Figura.

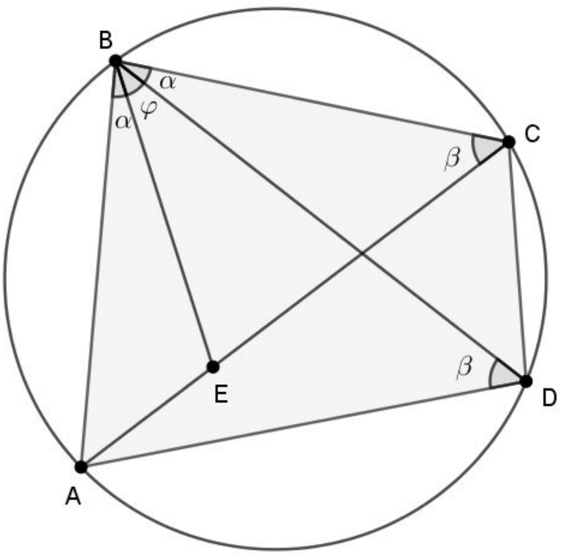


Figura 2.13: Marcação do ponto E com os ângulos congruentes

Portanto, segue a semelhança e vale a relação:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} \tag{2.2}$$

Adicionando (1.1) com (1.2) e sabendo que *CE* + *AE* = *AC*, concluímos que:

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{CE} \cdot \overline{BD} + \overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{BD} \cdot (\overline{AE} + \overline{CE}) = \overline{BD} \cdot \overline{AC}$$

Ou simplesmente:

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BD} \cdot \overline{AC}$$

Vejamos agora como Ptolomeu usou seu teorema e o Teorema de Pitágoras para obter $\mathrm{crd}(\alpha - \beta)$, $\mathrm{crd}(\alpha + \beta)$ e $\mathrm{crd}(\frac{\alpha}{2})$.

2.3.1 Obtendo $\mathrm{crd}(\alpha + \beta)$

Teorema 2.3.2. *Sejam a e b as cordas de dois arcos de uma circunferência de raio unitário, então:*

$$s = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{4 - b^2} + \frac{b}{2} \cdot \sqrt{4 - a^2}$$

é a corda da soma dos dois arcos.

Demonstração: Partindo de um mesmo ponto C considere cordas de tamanhos a e b delimitadas também por B e D respectivamente. Trace o diâmetro a partir de C, de modo a AC, dividir o ângulo $B\widehat{C}D$, como na figura 2.14.

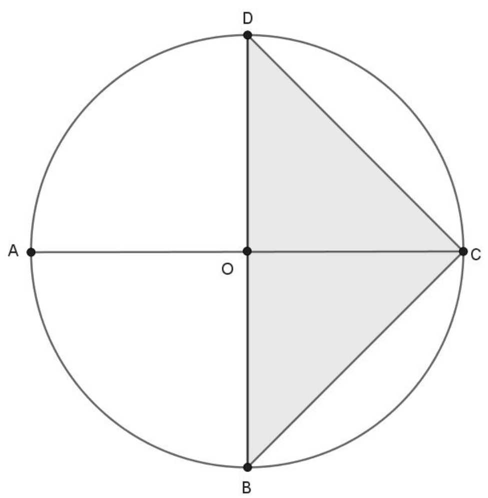


Figura 2.14: Soma 1

Note que isso só é possível se as duas cordas forem menores que o diâmetro.

Caso alguma corda seja o diâmetro, por exemplo $b = 2$ (lembrem-se que estamos adotando neste momento o raio igual a 1). Teremos um triângulo retângulo e pelo Teorema de Pitágoras,

$$4^2 = a^2 + s^2 \Rightarrow s = \sqrt{4 - a^2}$$

Como $b = 2$, segue que:

$$s = \sqrt{4 - a^2} = \frac{2}{2}\sqrt{4 - a^2} = \frac{b}{2}\sqrt{4 - a^2}$$

Continuando com a expressão

$$s = \frac{b}{2}\sqrt{4 - a^2} + 0 = \frac{b}{2}\sqrt{4 - a^2} + \frac{a}{2} \cdot 0 = \frac{b}{2}\sqrt{4 - a^2} + \frac{a}{2} \cdot \sqrt{4 - 4}$$

mas lembrando que $b = 2$, o número dentro da raiz pode ser reescrito como $4 - b^2$ e com isso

$$s = \frac{b}{2}\sqrt{4 - a^2} + \frac{a}{2}\sqrt{4 - b^2}$$

Do mesmo modo, se a corda que fosse igual ao diâmetro fosse a, procedendo da mesma maneira que acabamos de fazer (substituindo a por b e vice-versa) concluímos que quando um dos lados é igual ao diâmetro, o teorema vale.

E se as duas cordas forem iguais ao diâmetro?

Essa é a situação descrita na figura abaixo:

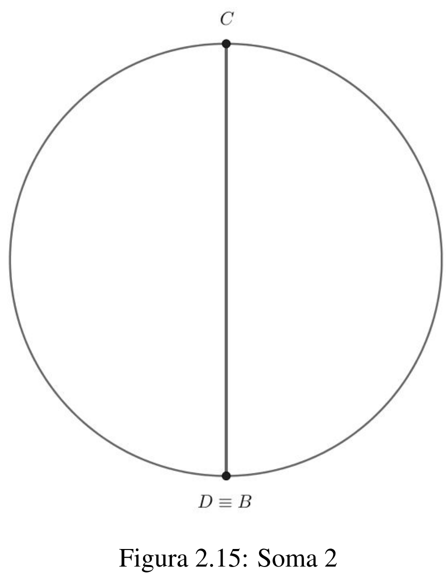


Figura 2.15: Soma 2

Nesta situação $B \equiv D$ e portanto $s = 0$. Substituindo os valores de $a = 2$ e $b = 2$ no lado direito da equação temos:

$$\frac{b}{2}\sqrt{4-a^2} + \frac{a}{2}\sqrt{4-b^2} = \frac{2}{2}\sqrt{4-2^2} + \frac{2}{2}\sqrt{4-2^2} = 0$$

Nesse caso, o teorema também é verdadeiro para o caso em que as duas cordas tem tamanhos iguais e igual ao diâmetro. Consideremos então o primeiro caso descrito, ou seja, onde os tamanhos das cordas são menores que o diâmetro. Chame este ponto de A e considere o quadrilátero inscritível, que tem como uma das diagonais o diâmetro e como a segunda diagonal a corda que representa a soma das cordas, conforme a figura a seguir.

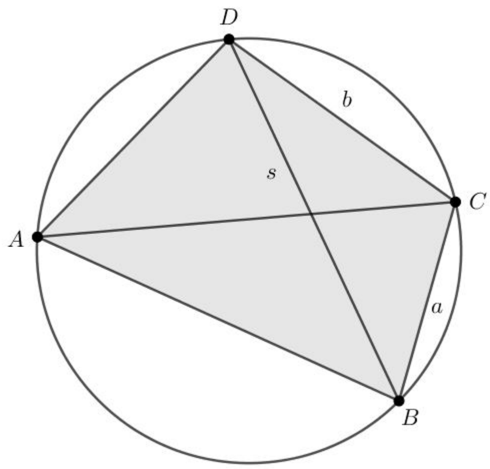


Figura 2.16: Soma 3

Como AC é o diâmetro, tanto ACD quanto ABC são triângulos retângulos. Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABCD$ temos

$$2s = a\overline{AD} + b\overline{AB} \tag{2.3}$$

Usando o Teorema de Pitágoras para os triângulos ACD e ABC obtemos:

$$\overline{AB}^2 + a^2 = 4 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{4-a^2} \tag{2.4}$$

$$\overline{AD}^2 + b^2 = 4 \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{4-b^2} \tag{2.5}$$

Substituindo (1.4) e (1.5) em (1.3) temos:

$$s = \frac{a}{2}\sqrt{4-b^2} + \frac{b}{2}\sqrt{4-a^2} \tag{2.6}$$

o que demonstra o teorema.

2.3.2 Obtendo $\text{crd}(\alpha - \beta)$

Teorema 2.3.3. *Sejam a e b as cordas de dois arcos de uma circunferência de raio unitário e $a > b$, então*

$$d = \frac{a}{2}\sqrt{4-b^2} - \frac{b}{2}\sqrt{4-a^2}$$

é a diferença dos dois arcos.

Demonstração: Partindo do ponto B do diâmetro AB, tracemos a corda b e do ponto C outra corda d. Para aplicar o teorema de Ptolomeu tracemos as cordas AD, AC e BD de medidas respectivas y, x e a e também denotemos a medida da corda AC de x. Veja as figuras a seguir.

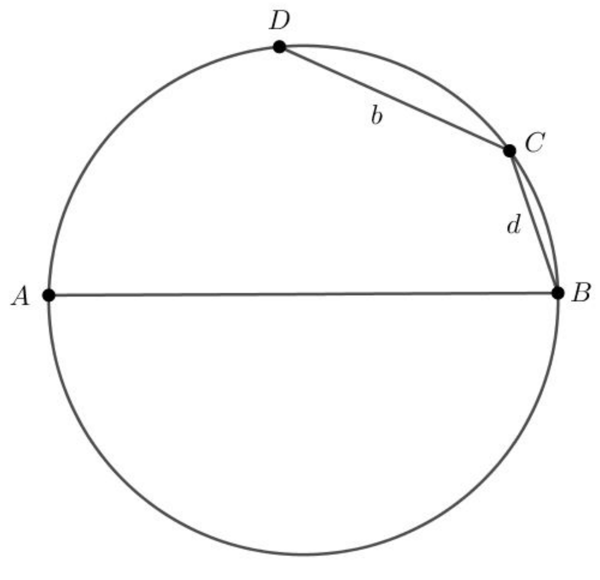


Figura 2.17: Diferença 1

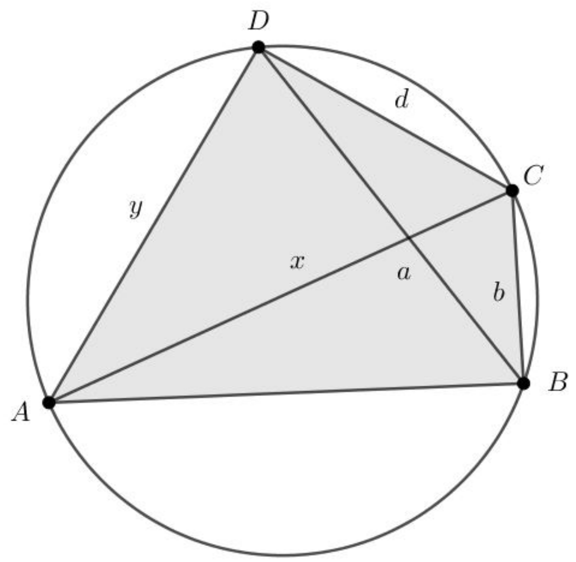


Figura 2.18: Diferença 2

Aplicando o Teorema de Ptolomeu para o quadrilátero $ABCD$ e o Teorema de Pitágoras para os triângulos retângulos ABC e ABD, temos:

(I) $a \cdot x = b \cdot y + 2 \cdot b$

(II) $b^2 + x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4 - b^2}$

(III) $a^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4 - a^2}$

Substituindo (II) e (III) em (I) encontraremos:

$$d = \frac{a}{2}\sqrt{4 - b^2} - \frac{b}{2}\sqrt{4 - a^2}$$

Caso uma das cordas seja o diâmetro, como, por hipótese $a > b$, trocaremos os valores das medidas a por b, e mostra também que o teorema é válido, como veremos a seguir.

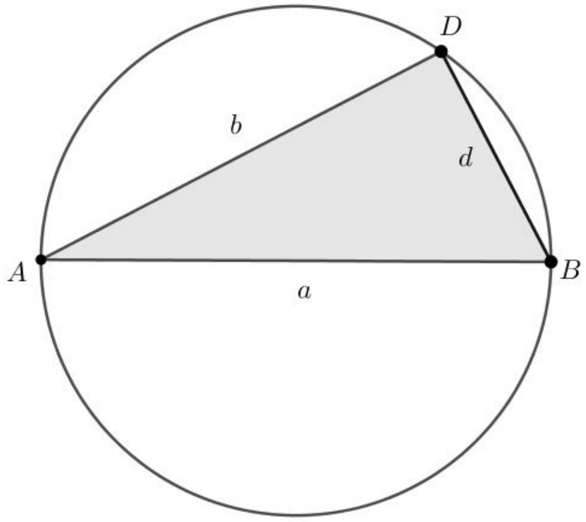


Figura 2.19: Diferença 3

Como o triângulo ABD é retângulo, pois AB é o diâmetro, temos que:

$$a^2 = d^2 + b^2$$

$$d^2 = a^2 - b^2$$

Como $a = 2$, temos:

$$d = \sqrt{4 - b^2} = \frac{a}{2}\sqrt{4 - b^2} - 0 = \frac{a}{2}\sqrt{4 - b^2} - \frac{b}{2}\sqrt{4 - a^2}$$

Logo o teorema é válido também quando a corda é o diâmetro, portanto o teorema é verdadeiro sempre.

2.3.3 Obtendo $\mathrm{crd}(\frac{\alpha}{2})$

Teorema 2.3.4. *Se t é a medida da corda de um arco de um círculo de raio unitário, então*

$$h = \sqrt{2 - \sqrt{4 - t^2}}$$

é a corda de metade do arco.

Demonstração 2.3.1. *A partir da extremidade B do diâmetro AB da circunferência, traçamos duas cordas de mesma medida e das extremidades BD e BC de medidas*

h. Como o triângulo BCD é isósceles, temos que o diâmetro divide a corda CD ao meio. Veja a figura abaixo.

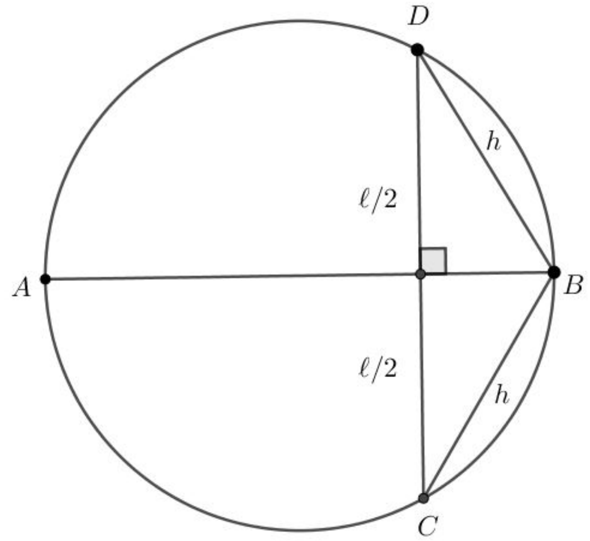


Figura 2.20: Metade 1

Traçaremos duas cordas AD e AC que por construção possuem mesma medida e aplicaremos o Teorema de Ptolomeu. Veja a figura abaixo.

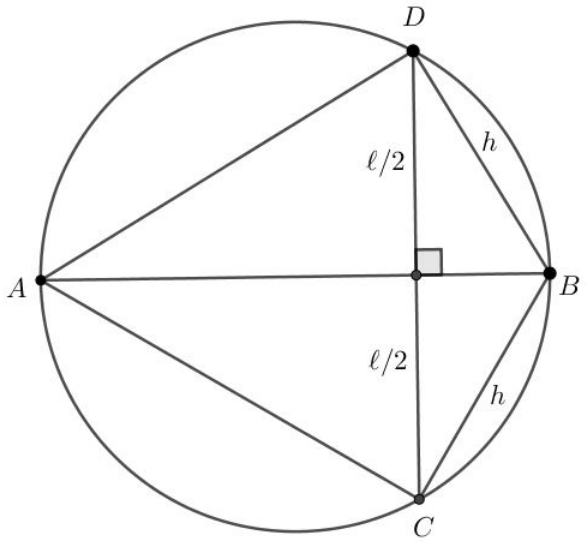


Figura 2.21: Metade 2

Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCD$, temos:

(I) $2t = ah + ah = 2ah$

$a = \frac{t}{h}$

Como o triângulo ABC é retângulo, temos:

(II) $a^2 + h^2 = 4$

Substituindo I e II temos:

$$\frac{t^{\ 2}}{2} + h^2 = 4$$

$$\frac{t^2}{h^2} + h^2 = 4$$

Multiplicando a equação por h^2, teremos:

$$4h^2 = t^2 + h^4$$

$$h^4 - 4h^2 + t^2 = 0$$

Resolvendo a equação em h^2, temos:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot t^2$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot t^2$$

$$\Delta = 4 \cdot (4 - t^2)$$

$$h^2 = \frac{4 - \sqrt{4(4 - t^2)}}{2}$$

$$h^2 = \frac{4 - 2\sqrt{(4 - t^2)}}{2}$$

$$h^2 = 2 - \sqrt{(4 - t^2)}$$

$$h = \sqrt{2 - \sqrt{(4 - t^2)}}$$

Para completar a demonstração vamos verificar se a afirmação também é válida para a corda BD sendo o diâmetro, vejamos a figura a seguir.

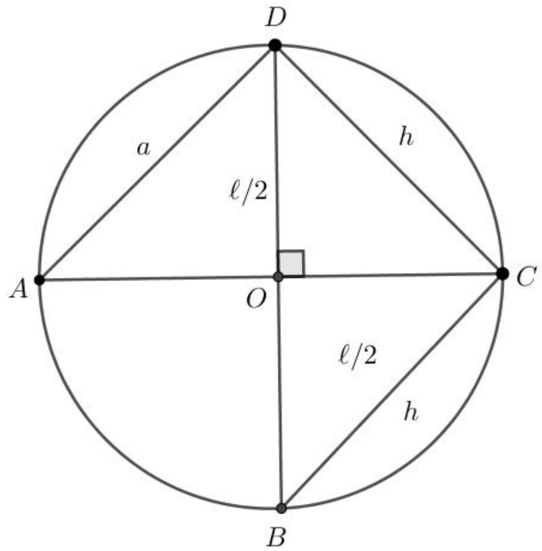


Figura 2.22: Metade 3

Como o triângulo OCD é retângulo e a medida do raio é 1, temos:

$$h^2 = 1^2 + 1^2$$

Por outro lado:

$$h = \sqrt{2 - \sqrt{(4 - t^2)}}$$

mas como

$$t = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2 - \sqrt{(4 - 2^2)}} \Rightarrow h = \sqrt{2}$$

a afirmação é verdadeira sempre.

A partir desses conhecimentos matemáticos de Ptolomeu e também utilizando o submúltiplo do grau como:

(i) Minutos: a subdivisão do grau em 60 partes.

(ii) Segundo: a subdivisão do minuto em 60 partes.

Ele pôde obter medidas de cordas de meio em meio grau para isso ele procedeu da seguinte maneira: utilizou resultados de crd já conhecidos como, o $\mathrm{crd}(24°)$ utilizou também os valores do $\mathrm{crd}(60°)$, do $\mathrm{crd}(36°)$ e $\mathrm{crd}(24°)$ = $\mathrm{crd}(60°$ - $36°)$ = 0,4158.

Em seguida utilizando $h = \sqrt{2 - \sqrt{(4 - t^2)}}$ obteve os $\text{crd}(12°)$, $\text{crd}(6°)$, $\text{crd}(3°)$, $\text{crd}(90°)$ e $\text{crd}(45°)$.

Ptolomeu, queria escrever uma tabela trigonométrica com variação de meio grau, para isso, teria de obter o crd da corda de $1°$.

Para esse caso, Ptolomeu aplica um outro resultado, o qual permite realizar o cálculo para pequenos tamanhos de comprimento de cordas com o mínimo de erro possível. Vejamos a afirmação.

2.3.4 Relação entre a medida da crd e do ângulo

Teorema 2.3.5. *Se α e β são comprimentos de arcos tais que* $0 < \alpha < \beta < 180°$

$$\frac{\text{crd}(\alpha)}{\text{crd}(\beta)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Demonstração: Esta demonstração utiliza muito os conceitos geométricos. Tomando as medidas das cordas $AB = \alpha$ e $BC = \beta$ e tomando o ponto D de forma que BD seja a bissetriz do ângulo ABC. No triângulo ABC, o ponto E é a intersecção entre o lado AB e a bissetriz BD. Veja a figura abaixo.

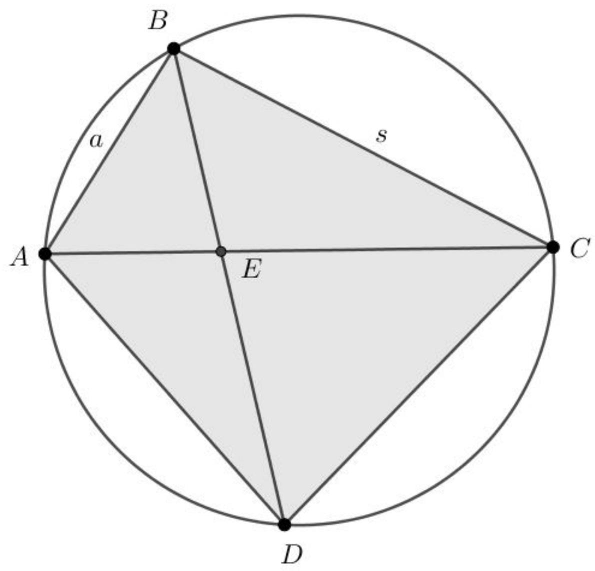


Figura 2.23: Relação entre a medida do crd e do ângulo

Como BD é a bissetriz do ângulo ABC do triângulo ABC, então pela Lei das

Bissetrizes, temos:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{CE}$$

Tomando o ponto K sobre o segmento BD de tal forma que $CE = CK$, isto é, de modo que o triângulo CEK seja isósceles, implicando nos ângulos $KEC = EKC = AEB$ e que os triângulos ABE e BCK sejam semelhantes, pois possuem dois ângulos de mesma medidas.

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{KC} = \frac{BC}{CE}$$

Agora voltemos à Figura (2.23), tracemos uma perpendicular do ponto D ao segmento AC com o ponto F a intersecção e em seguida tomemos o ponto D como centro do círculo onde GEH é um arco desse círculo de raio DE, tal que o pondo G é a intersecção do arco com o segmento AD e o pondo H é a intersecção do arco com o prolongamento do segmento DF, conforme figura abaixo.

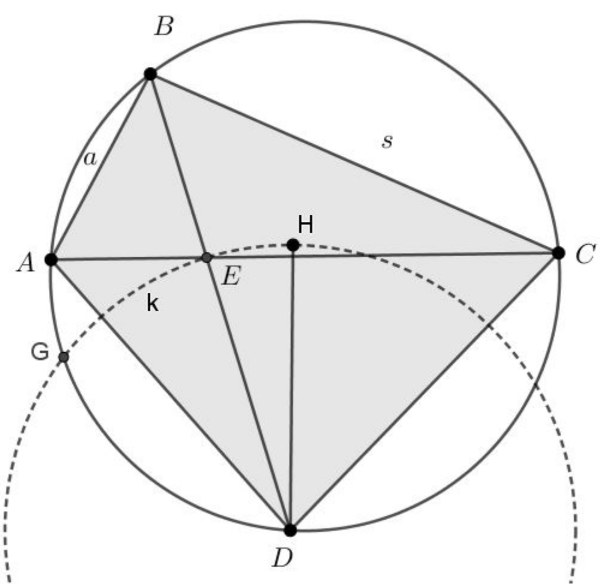


Figura 2.24: Relação entre a medida do crd e do ângulo

Note que a razão entre as áreas dos triângulos(Δ) DEF, ADE é menor que a razão entre as áreas dos setores DEH, DEG, isto é:

$$\frac{\Delta(DEF)}{\Delta(ADE)} < \frac{\Delta(DEH)}{\Delta(DEG)}$$

$$\Delta(DEF) < \Delta(DEH)$$

$$\Delta(DEG) < \Delta(ADE)$$

Agora note que:

$$EC = EF + FC = EF + AF = 2 \cdot EF + AE$$

Conforme a Figura 2.24:

$$EDC = EDF + FDC \tag{2.7}$$

$$EDC = EDF + ADE + EDF$$

$$EDC = 2 \cdot EDF + ADE$$

Assim, segue que:

$$\frac{\text{crd}(\alpha)}{\text{crd}(\beta)} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{\text{crd}(\alpha)}{\text{crd}(\beta)} = \frac{EC}{AE}$$

$$\frac{\text{crd}(\alpha)}{\text{crd}(\beta)} = \frac{2 \cdot EF}{AE} + \frac{AE}{AE}$$

Desse modo, temos:

$$\frac{2 \cdot EF}{AE} + \frac{AE}{AE} < \frac{2 \cdot EDF}{ADE} + \frac{ADE}{ADE}$$

Como:

$$2 \cdot EDF + ADE = EDF + ADF$$

$$2 \cdot EDF + ADE = EDF + FDC$$

$$2 \cdot EDF + ADE = EDC$$

Temos que:

$$\frac{2 \cdot EF}{AE} + \frac{AE}{AE} < \frac{EDC}{ADE} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Portanto,

$$\frac{\mathrm{crd}(\alpha)}{\mathrm{crd}(\beta)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Agora com as medidas das cordas conhecidas e com a relação $\frac{\mathrm{crd}(\alpha)}{\mathrm{crd}(\beta)} = \frac{\alpha}{\beta}$, Ptolomeu obteve a $\mathrm{crd}(1°)$, com o seguinte procedimento:

$$\frac{\mathrm{crd}(60°)}{\mathrm{crd}(45°)} < \frac{60°}{45°} \Rightarrow \mathrm{crd}(60°) < \mathrm{crd}(45°) \cdot \frac{4}{3}$$

Como o $crd(45°) = 0,0131$, então

$$\mathrm{crd}(60°) = \mathrm{crd}(1°) < 0.0131 \cdot \frac{4}{3} = 0,01747$$

Por outro lado, utilizando a $\mathrm{crd}(90°) = 0,0262$, o $\mathrm{crd}(60°)$ na desigualdade ficaria escrita da forma:

$$\frac{crd(90°)}{\mathrm{crd}(60°)} < \frac{90°}{60°} \Rightarrow \mathrm{crd}(60°) > \mathrm{crd}(90°) \cdot \frac{2}{3} = 0,0262 \cdot \frac{2}{3} = 0,01747$$

Das duas desigualdades concluímos que $\mathrm{crd}(1°) = 0,01747$. Tomando o valor para o $\mathrm{crd}(1°)$ com quatro casas decimais, temos o valor de $0,0175$ e aplicando a afirmação para corda de arco metade $h = \sqrt{2 - \sqrt{(4 - t^2)}}$ chegaríamos ao valor para o $\mathrm{crd}(0,5°)$ de:

$$\mathrm{crd}(0,5°) = h = \sqrt{2 - \sqrt{(4 - 0,01747^2)}} = 0,0100$$

Para Ptolomeu, construir sua tabela de cordas de meio em meio grau bastaria agora aplicar sucessivamente a afirmação que refere-se a soma das medidas de duas cordas.

2.4 Das medidas de cordas à circunferência trigonométrica

O desenvolvimento da teoria de relacionar a cada ângulo central a medida da sua corda correspondente, possibilitou os astrônomos da época obterem medidas importantes como já mencionado neste texto. Coube aos hindus por volta de 500 d.C., a partir das ideias de Hiparco e Ptolomeu, fazerem uma relação entre a metade dos ângulos centrais e a metade da suas cordas correspondentes, que eles chamaram de jiva. Como nos mostra a tabela a seguir.

Ângulo em grau	Medida da corda
$0,5°$	0,0100
$1°$	0,0175
$1,5°$	0,0262
$2°$	0,0349
$2,5°$	0,0436
$3°$	0,00523

Tabela 2.1: Parte da tabela de Ptolomeu

Jiva então seria definido por ele como sendo a razão entre a metade da corda pelo raio da circunferência, isto é:

$$\text{Jiva}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{c}{2}}{r}$$

Com essa nova forma de ver a medida da corda, os hindus começam a pensar a Trigonometria no triângulo retângulo, pois o segmento AO é perpendicular ao segmento DE, logo o triângulo OFD é retângulo. Como essa nova forma de pensar os astrônomos ficaram divididos entre as ideia de Ptolomeu e a Matemática hindu da meia corda.

Foi então que, por volta de 850 o matemático árabe Al Battani adotou a circunferência com raio unitário, concluindo que, em qualquer triângulo retângulo a razão jiva independe da medida da hipotenusa e sim do ângulo do ângulo central. Utilizando a hipotenusa de medida 1 passa a ser escrito simplesmente por $\text{Jiva}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{c}{2}$. Veja a figura a seguir.

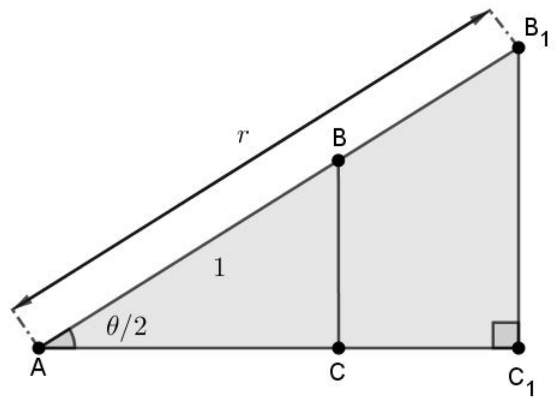


Figura 2.25: Ideia de Al Battani

Com os avanços dados na medição da meia corda, a Trigonometria teve um grande avanço. Foi criada uma nova tabela de valores que relacionava metade do ângulo central à metade da corda. E em vez de meio em meio grau, adotou-se a variação de $0,25°$.

A mudança de jiva para seno se deu por volta de 1150 devido à uma tradução equivocada, já que a palavra seno deveria significar metade da corda, que vem do hindu jya-ardha, abreviada para jiva. Esta foi traduzida para o árabe como jiba, escrita como jb, já que as vogais não são escritas em árabe. A seguir, a palavra foi mal traduzida, no século XII, para o latim, como sinus, com a impressão errônea de que jb referia-se à palavra jaib, que significa ”seio”em árabe, tal como sinus em latim. Finalmente, o uso em língua portuguesa converteu a palavra latina sinus para seno. A palavra cosseno surgiu somente séculos depois, como sendo o seno do complemento de um ângulo, $sen(x) = cos(90° - x)$. A partir da ideia de Al Battani de considerar o raio da circunferência de medida igual a 1, que levou a relacionar a cada ângulo a medida de um segmento, foi questão de tempo para chegarmos a Trigonometria na circunferência como é conhecida nos dias de atuais.

Com a ideia de René Descartes, de representar cada ponto do plano por um par ordenado (suas coordenadas) e dos estudo dos movimentos periódicos feitos em 1710 por Thomas-Fanten de Lagny, Leonard Euler em 1748 usa a circunferência de raio igual a 1 e define funções periódicas aplicadas em um número e não mais em um ângulo como era feito até então. Como fruto da nossa experiência ao ensinar o assunto para alunos do 2^o e 3^o anos do ensino médio. No próximo capítulo vamos oferecer uma sugestão de como introduzir isso focalizando nas ideias centrais do assunto.

3 Do triângulo retângulo ao Ciclo trigonométrico

3.1 Introdução

Em geral, os livros didáticos brasileiros que tratam de Trigonometria costumam dedicar muitas páginas ao assunto, frequentemente, abordando tópicos com uma quantidade excessiva de detalhes que não são essenciais para a compreensão prática e profunda da matéria. Esses textos, por vezes, concentram-se em manipulações algébricas extensas e abstrações teóricas que, embora possam ter algum valor em um contexto específico, acabam se tornando vazias e desconectadas de aplicações concretas. Essa abordagem, muitas vezes, confunde os alunos, que não conseguem ver a relevância e a utilidade do que estão aprendendo, resultando em uma perda de interesse e dificuldade em aplicar os conceitos em situações problemas.

Ao contrário dessa abordagem tradicional, além do contexto histórico já introduzido no capítulo anterior, no presente capítulo, propomos uma trajetória de ensino que foca no essencial da Trigonometria, priorizando uma compreensão clara e objetiva dos conceitos fundamentais. Nossa proposta é centrada em ensinar de forma direta e pragmática, mostrando a aplicação prática dos conceitos trigonométricos desde o início. Isso envolve a introdução de problemas reais e significativos que utilizam a Trigonometria para serem resolvidos, permitindo que os alunos vejam imediatamente a utilidade do que estão aprendendo.

Nossa abordagem busca simplificar o processo de aprendizado, eliminando o excesso de formalismo que muitas vezes sobrecarrega os estudantes, e substituindo-o por uma ênfase no entendimento intuitivo e na aplicação prática. Dessa forma, acreditamos que os alunos não apenas aprenderão a Trigonometria de maneira mais eficiente, mas também desenvolverão uma apreciação maior pela matéria, vendo-a como uma ferramenta poderosa e relevante, em vez de um conjunto de regras abstratas a serem memorizadas.

Além disso, ao focar no que realmente importa, podemos dedicar mais tempo a explorar aplicações interessantes da Trigonometria em diversas áreas, como física, engenharia, arquitetura, e até mesmo em disciplinas como música e arte. Isso não só amplia o horizonte dos estudantes, mas também torna o aprendizado mais envolvente e significativo.

Em resumo, nossa proposta busca reestruturar o ensino da Trigonometria, removendo o supérfluo e enfatizando o que é realmente útil e aplicável. Acreditamos que essa abordagem não apenas facilitará o aprendizado, mas também despertará o interesse dos alunos, mostrando-lhes o verdadeiro valor e a beleza dos conceitos trigonométricos.

3.2 Das razões trigonométricas às funções trigonométricas

É praticamente obrigatório em todos os textos que tratam do assunto, a introdução de um "novo modo" de medir ângulos quando se faz a transição da trigonometria do triângulo retângulo ao chamado *Ciclo trigonométrico*; a noção de *radiano*. Praticamente em todos os textos escolares é apresentada a definição de radiano e de modo súbito, sem maiores explicações do que vem a ser de fato um ângulo central correspondente a um radiano. Comumente apresenta-se a relação de que 360^o (medida de um ângulo correspondente a uma volta) corresponde a 2π radianos, sem fazer pelo menos algum esforço para esclarecer esse fato, muito menos o porquê de usarmos o radiano. Julgamos de extrema relevância que essas ideais sejam esclarecidas bem no início dessa transição que pretendemos fazer das razões trigonométricas no triângulo retângulo ao ciclo trigonométrico.

Como vimos no inicío do capítulo anterior, para cada ângulo agudo de um triângulo retângulo de medida θ podemos obter as razões trigonométricas que denominamos de seno do ângulo θ, o cosseno do ângulo θ e a tangente do ângulo θ. No caso do triângulo retângulo podemos também, perceber que esta relação, que associa a cada ângulo θ e medida do seno e do cosseno deste ângulo, se dar de maneira única, isto é, para cada medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo temos as medidas do seno, do cosseno e tangente definidas univocamente. Neste ponto cabe o questionamento, a saber:

Será que poderíamos estender essas noções para ângulos em geral?

De um modo mais geral: será que poderíamos utilizar essas ideias para definir funções que associassem a cada ângulo um seno, cosseno e tangente?

Como sabemos, uma função é constituída por três ingredientes bem definidos (A, B, f); um conjunto A chamado de *domínio da função*, um conjunto B chamado de *contra-domínio da função* e uma *lei* f que associa a cada elemento de A um único elemento de B.

Os matemáticos do século XVIII tiveram outro desafio, como definir tais "funções trigonométricas" especificando o domínio e o contra domínio dessas funções, como também a representação do gráfico de uma função assim definida. Como poderia ser feito no plano cartesiano? Pois sabemos que os eixos horizontal e vertical, no plano cartesiano, representam o conjunto dos números reais, como essa relação entre a medida do ângulo, em graus, e a medida do seno e cosseno desse ângulo, não teriam como representá-la no plano cartesiano.

A solução desse problema foi feita no início do século XVIII, quando o grande matemático, Leonard Euler $(1707 - 1783)$, ao tomar a medida do raio de um círculo como uma unidade de medir um ângulo, como essa forma de medir arcos, Euler abre a possibilidade então de relacionar um número real com o valor do seno e cosseno. Isto é, cria a noção de radiano, como descreveremos a seguir.

3.3 Definição do radiano

Um radiano é a medida do ângulo central de uma circunferência que determina um arco com o mesmo comprimento que o raio desta circunferência. Veja figura abaixo:

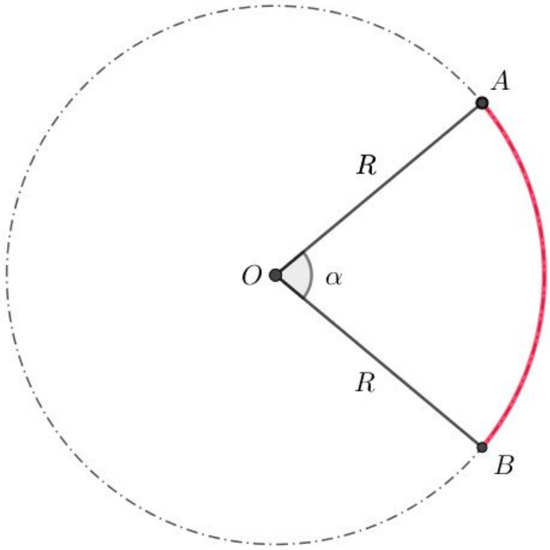


Figura 3.1: Radiano

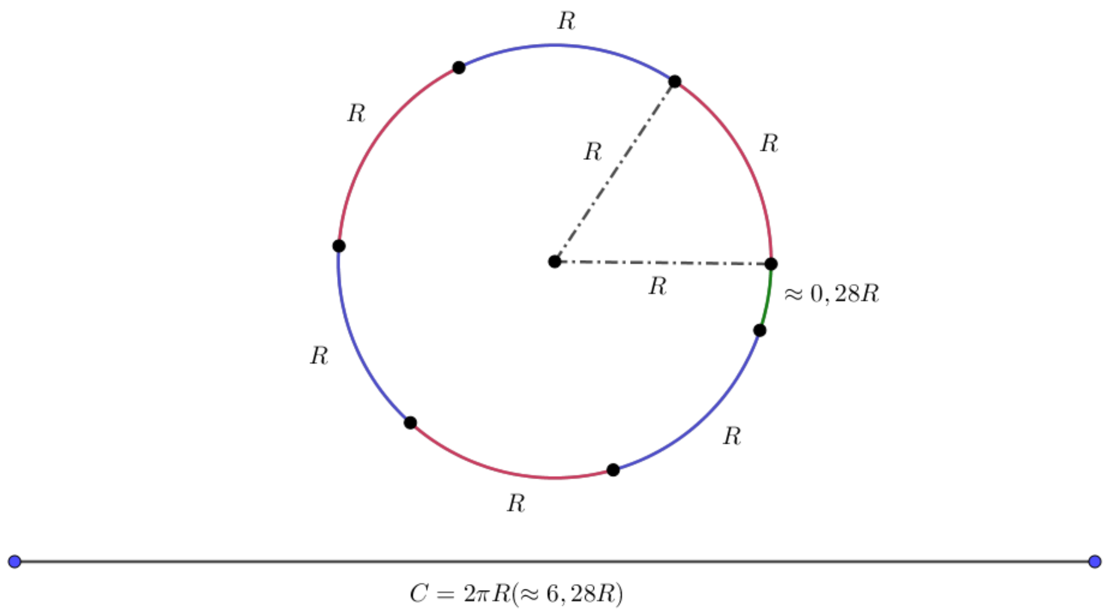
Quando o comprimento do arco menor AB é igual ao comprimento R do raio da circunferência, dizemos que a medida α do ângulo central é igual a 1 radiano, ou seja,

$$S = R \Rightarrow \alpha = 1 \text{ radiano}$$

Assim, quando um arco correspondente a um ângulo central tem medida S, a medida do ângulo central correspondente é dada por $\alpha = \frac{S}{R}$. Para ver isso, basta observar a seguinte proporcionalidade (regra de três):

$$\begin{array}{ccc} R & ---- & 1 \text{ radiano} \\ S & ---- & \alpha \text{ radianos} \end{array} \Rightarrow S.1 = \alpha.R \Rightarrow \alpha = \frac{S}{R}$$

Sabemos que o comprimento de uma circunferência de raio R é $C = 2\pi R$, segue que uma circunferência completa possui $\alpha = \frac{S}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ radianos. Essa informação está presente em praticamente em todos os livros escolares que tratam do assunto, entretanto praticamente nenhum dos livros escolares explica claramente o que significa o fato de uma circunferência possuir 2π radianos. A explicação é simples; como 1 radiano corresponde a medida de um ângulo central cujo comprimento do arco correspondente tem a mesma medida do raio da circunferência, o fato de um circunferência possuir 2π radianos significa que, sobre a linha da circunferência podemos desenhar o raio da circunferência 2π vazes (aproximadamente $6,28$ radianos), conforme ilustra a figura a seguir:



Lembrando que na geometria convenciona-se que uma circunferência possui 360^o, obtém-se a seguinte correspondência

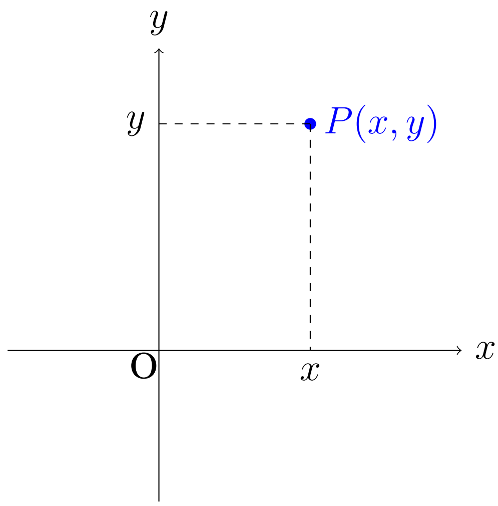
$$360^o \quad - - - - - \quad 2\pi \text{ radianos}$$

A grande vantagem de expressar as medidas dos ângulos em radianos reside no fato de podermos estender as ideias de seno, cosseno, tangente e as demais razões trigonométricas aos números reais, o que nos permite definir formalmente as funções trigonométricas.

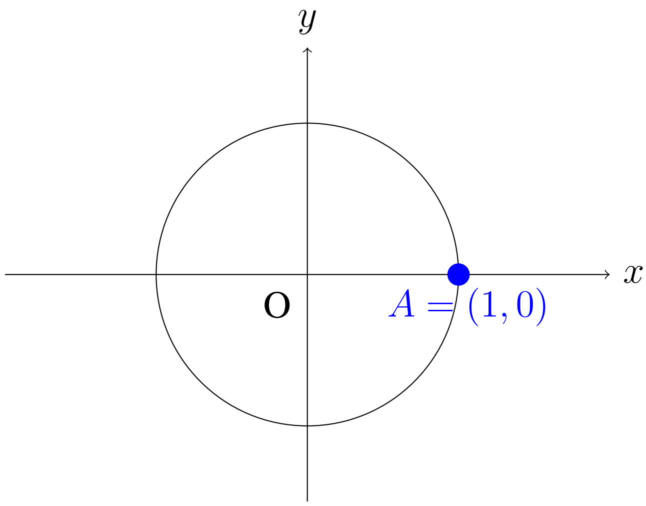
3.3.1 Em sala de aula

Neste ponto mostraremos uma sugestão de como pode ser feito em sala de aula essa transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para as chamadas *funções trigonométricas*.

De início lembramos aos estudantes o sistema de coordenadas cartesianas, onde num plano onde colocamos eixos orientados x e y. Há uma correspondência biunívoca entre os ponto desse plano e os pares de números reais, conforme ilustra a figura a seguir:



Nesse ponto introduzimos uma circunferência unitária (raio 1), centrada na origem e com uma orientação positiva no sentido anti-horário a partir do ponto $A = (0, 1)$, conforme ilustra a figura abaixo.



Uma primeira pergunta que sempre surge quando a trigonometria na circunferência é abordada é a seguinte:

Porque a circunferência adotada tem raio 1?

Primeiramente procuraremos mostrar ao aluno que a relação que define o seno de um ângulo não depende do raio da circunferência onde a relação é estabelecida.

Para mostrar isso, imagine duas circunferências concêntricas de raios diferentes, como ilustrado na figura.

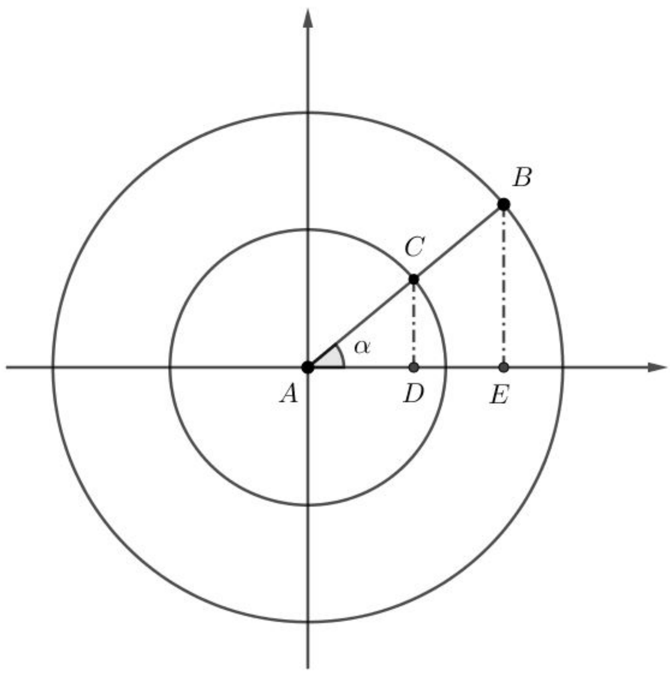


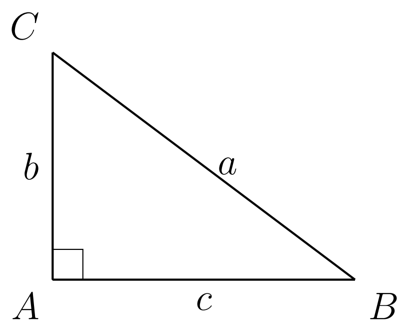
Figura 3.2: Circunferência concêntricas

Note que, pelo caso AAA, os triângulos OCD e OBE são semelhantes e portanto temos que

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{OB}}.$$

Mas isso é exatamente a relação que define o seno de alfa(α) , ou seja, independente do raio da circunferência que estamos usando, a relação seno só depende do ângulo α. Como essa razão independe o raio, pode-se tomar o valor 1 por simplicidade.

Entretanto há uma outra motivação que é a seguinte: num triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a, sendo θ a medida do ângulo oposto ao cateto b, tem-se que



$$\cos\theta = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta = \frac{b}{a}$$

então,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

o que sugere que o raio do ciclo trigonométrico deve ser tomado como 1.

Nesse contexto de ideias, consideremos uma partícula se movendo de forma circular no sentido anti-horário (periódico) ao redor da origem do sistema de coordenadas como na figura a seguir.

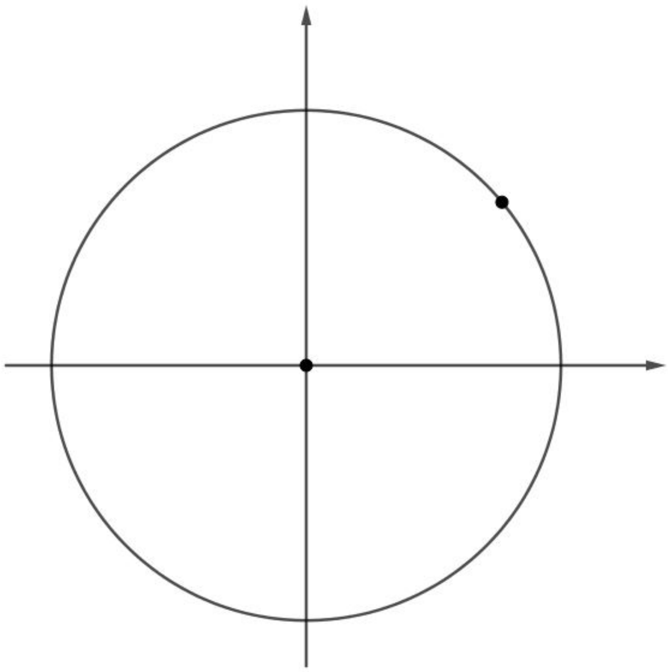


Figura 3.3: Figura Partícula 1

Note que isso pode ser construído considerando um segmento de tamanho 1 com uma das extremidades presa na origem dos eixos coordenados e a outra livre de modo que possa girar no sentido anti-horário. Adotemos A como o ponto inicial em que começamos a observar a partícula. Depois de algum tempo a partícula se move e se encontrará num outro ponto A_1, conforme a figura.

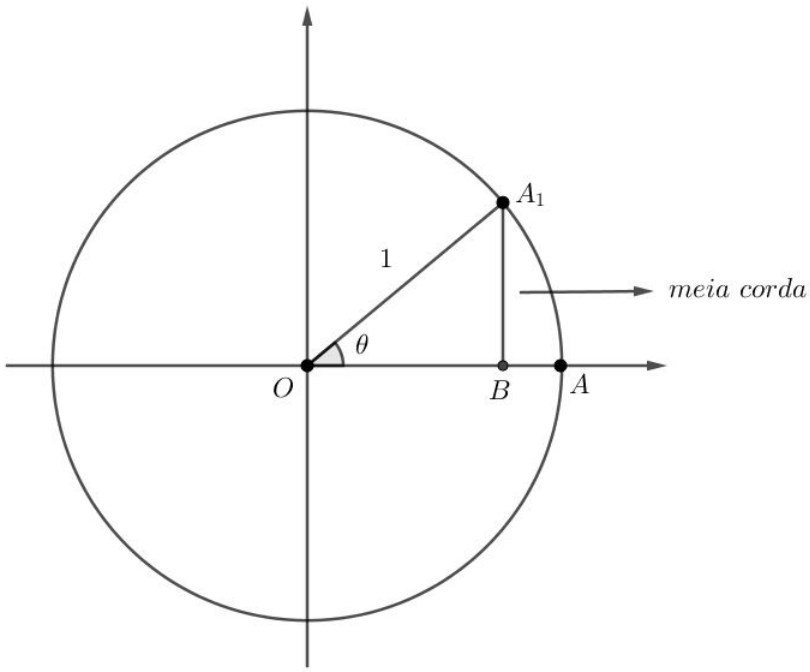


Figura 3.4: Figura Partícula 2

Assim:

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\frac{\mathrm{crd}(2\theta)}{2}}{1} = \overline{A_1B}$$

Olhando para o triângulo OA_1B vemos que $O\widehat{A_1}B$ = $(90°-\theta)$ e assim aplicando a relação:

$$\mathrm{Jiva}(2(90° - \theta)) = \cos(\theta) = \frac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB}$$

Assim, o ponto A_1 pode ser representado pelo ponto $(\mathrm{sen}(\theta)$, $\cos(\theta))$ do plano.

Euler definiu a função que a cada ângulo (na verdade, foi ao arco $\widehat{OA_1}$) θ associa o ponto $(\mathrm{sen}(\theta)$, $\cos(\theta))$ sobre a circunferência de raio 1. Olhando para a circunferência é fácil visualizar que para θ = 0^o, o ponto sobre a circunferência com este ângulo central é o ponto $A = (1, 0)$, donde verificamos que

$$(\mathrm{sen}(0), \cos(0)) = (0, 1)$$

e concluímos que $\mathrm{sen}(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$. Da mesma forma, verificamos que

- $\text{sen}(90°) = 1$ e $\cos(90°) = 0$
- $\text{sen}(180°) = 0$ e $\cos(180°) = -1$
- $\text{sen}(270°) = -1$ e $\cos(270°) = 0$
- $\text{sen}(360°) = 0$ e $\cos(360°) = 1$

Note que a cada ponto A da circunferência podemos obter três outros pontos como ilustrado na figura.

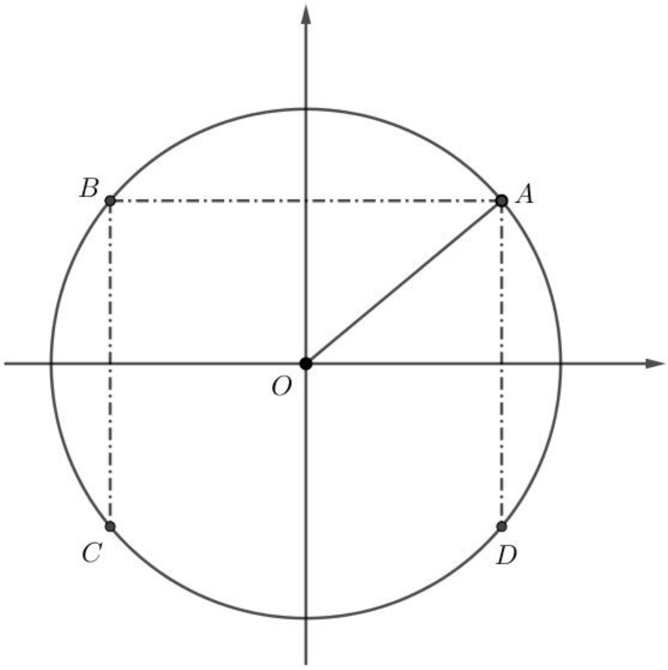


Figura 3.5: Simetria

1. O ponto B é obtido pela interseção de uma paralela ao eixo x passando por A e a circunferência.
2. O ponto C é obtido pela interseção do prolongamento do segmento AO e a circunferência.
3. O ponto B é obtido pela interseção de uma paralela ao eixo x passando por A e a circunferência.

No primeiro caso, podemos montar os triângulos OAA' e OBB' como mostrado na figura a seguir.

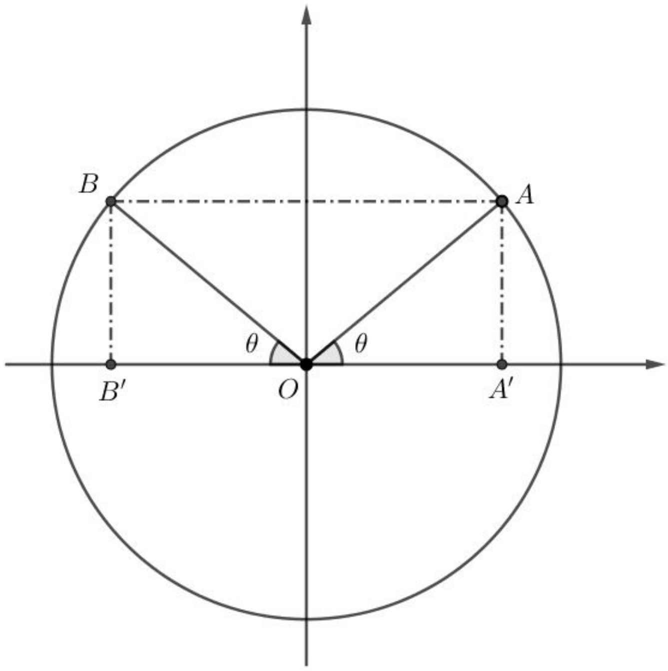


Figura 3.6: Redução do segundo para o primeiro quadrante

Note que $\overline{BB'} = \overline{AA'}$ e $\overline{OE} = \overline{OB} = raio$ e pelo Teorema de Pitágoras obtemos que $\overline{OB'} = \overline{OA'}$ e pelo caso LLL concluímos que os triângulos OBB' e OAA' são congruentes e portanto $B\widehat{O}B'$ = $A\widehat{O}A' = \alpha$, ou seja, $\beta = 180^\circ - \alpha$. Daí,

$$B = (\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha), \cos(180^\circ - \alpha))$$

$$= (\overline{BB'}, -\overline{OB'})$$

$$= (\overline{EA'}, -\overline{OA'})$$

$$= (sen(\alpha), -cos(\alpha))$$

E concluímos que: $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$ e $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

No segundo caso, representado na figura 3.7.

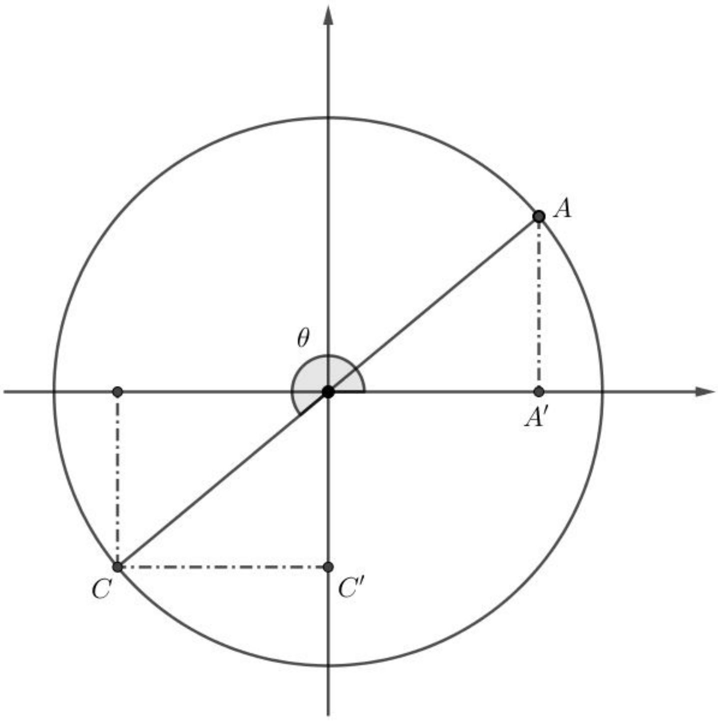


Figura 3.7: Redução do terceiro para o primeiro quadrante

Por uma análise semelhante, a que fizemos no primeiro caso, que os triângulos OCC' e OAA' são congruentes, e pela relação de congruência temos que:

$$C = (\text{sen}(180^\circ + \alpha), \cos(180^\circ + \alpha))$$

$$= (-\overline{CC'}, -\overline{OC'})$$

$$= (-\overline{EA'}, -\overline{OA'})$$

$$= (-\text{sen}(\alpha), -\cos(\alpha))$$

E concluímos que:

$\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen}(\alpha)$ e $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$.

No terceiro caso, representado na figura 3.8.

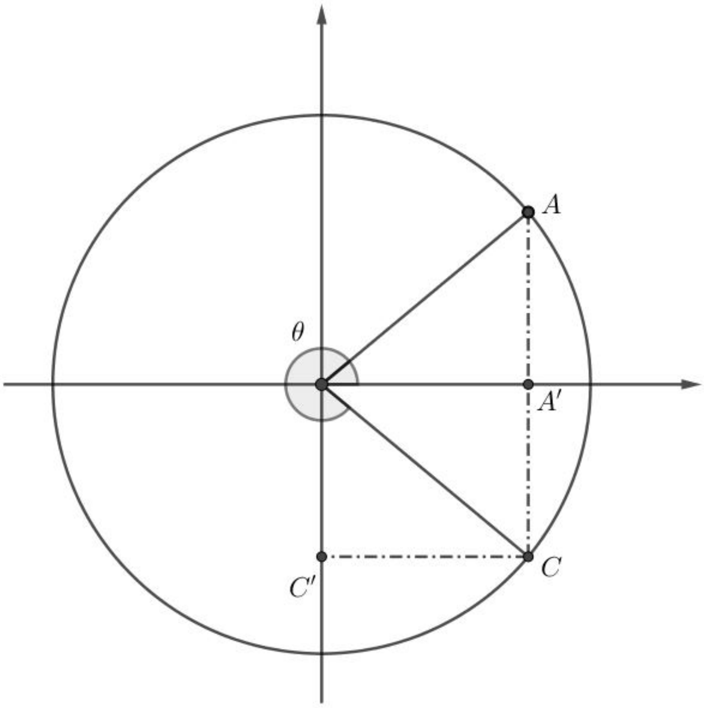


Figura 3.8: Redução do quarto para o primeiro quadrante

Por uma análise semelhante à que fizemos no primeiro e segundo casos teremos que os triângulos ODA' e OAA' são congruentes, e pela relação de congruência temos que:

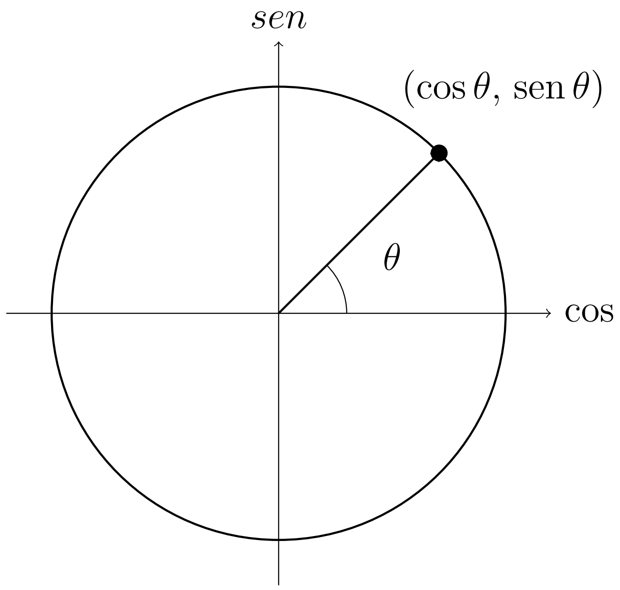
$$\begin{aligned} C &= (\text{sen}(360^\circ - \alpha), \cos(360^\circ - \alpha)) \\ &= (-\overline{A'D}, \overline{OA'}) \\ &= (-\overline{EA'}, \overline{OA'}) \\ &= (-\text{sen}(\alpha), \cos(\alpha)) \end{aligned}$$

E concluímos que

$$\text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen}(\alpha) \quad \text{e} \quad \cos(360^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha).$$

3.4 As funções seno e cosseno reais

Com a definição de radiano podemos associar a cada número real t o seu seno e o seu cosseno. No inicio do nosso trabalho, onde definimos as razões trigonométricas no triangulo retângulo, vimos que para qualquer dos ângulos α agudos de um triângulo retângulo, temos a qualquer $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, como já dissemos, isso sugere que num sistema de coordenadas cartesianas o ponto $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ pertence à circunferência unitária de centro na origem, conforme ilustra a figura abaixo.



A fim de definir as funções $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para cada números real t devemos associar esse número a uma ângulo para poder calcular o cosseno e o seno desse ângulo. Mas como podemos fazer isso?

Para associar para cada número real x um ângulo podemos utilizar a chamada **Função de Euler**, $E : \mathbb{R} \to \Gamma$ que associa a cada número real t um ponto $E(t) = (x, y)$ sobre a circunferência unitária Γ do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- Se $t > 0$, percorremos a circunferência Γ no sentido anti-horário a partir do ponto $A = (1, 0)$ um caminho de comprimento t. O ponto final desse caminho é definido como $E(t)$.
- Se $t < 0$, percorremos a circunferência Γ no sentido horário a partir do ponto $A = (1, 0)$ um caminho de comprimento t. O ponto final desse caminho é definido como $E(t)$.

- $E(t + 2\pi) = E(t)$, para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Note que, se $P \in \Gamma$, há uma infinidade de números reais da forma $t + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, cuja imagem pela função E é exatamente o ponto P. Comumente nos referimos a esse fato dizendo que $t + 2k\pi$ são as várias *determinações* do arco $\widehat{AP}$ (querendo dizer que $t + 2k\pi$ são as várias imagens inversas de P pela função E) ou ainda que t e $t + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ são *côngruos* módulo 2π, significando dizer que a diferença entre eles é um múltiplo inteiro de 2π.

A seguir temos uma ilustração de como atua a função de Euler, que conecta a reta real ao ciclo trigonométrico, permitindo assim estender as funções trigonométricas aos números reais.

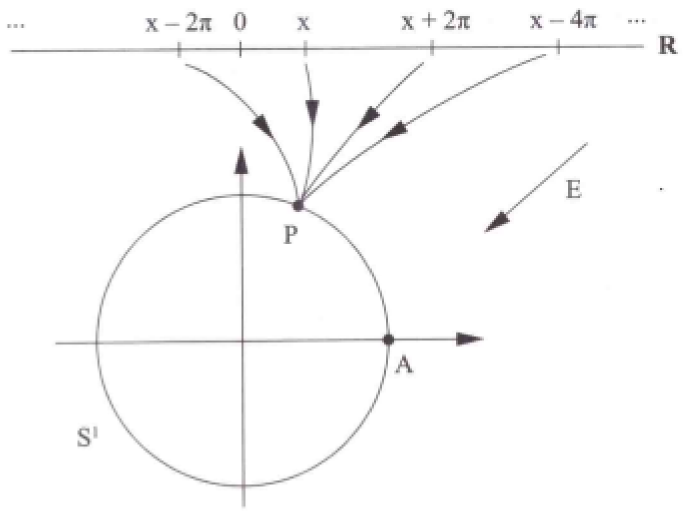


Figura 3.9: Função de Euler

3.5 Seno e cosseno, as principais funções trigonométricas

Para finalizar, vamos apresentar como as ideias desenvolvidas acima podem ser, de fato, utilizadas para definir precisamente as funções seno e cosseno, que são as duas principais funções trigonométricas. Essas funções são extremamente úteis tanto na Matemática em si como nas ciências afins que utilizam ferramentas matemáticas para modelar e descrever fenômenos naturais, especialmente aqueles de natureza periódica.

3.5.1 A Função seno

Definição 3.5.1. *Dado um arco $\widehat{AB}$, de medida x radianos, definimos como seno de x a ordenada do ponto B e representamos $\operatorname{sen} x = BC = y_B$, conforme ilustra a figura a seguir*

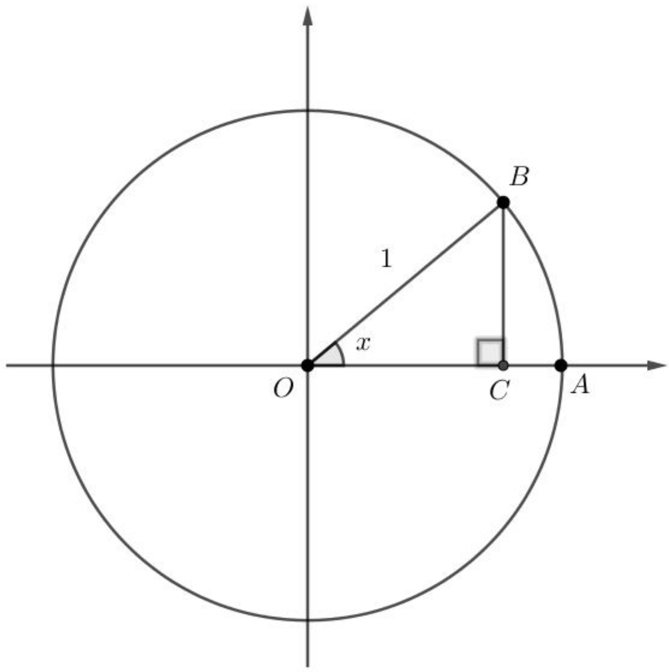


Figura 3.10: Função seno

Dessa forma, faz sentido estabelecer uma função real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Devido o fato de que o raio do ciclo trigonométrico Γ mede 1, segue que, para todos os pontos $B \in \Gamma$, tem-se que $-1 \leq y_B \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. Além disso, pela periodicidade da função de Euler, segue que $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

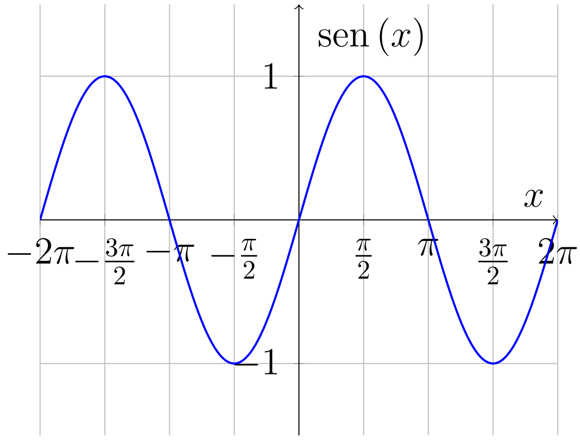
3.5.2 Representação gráfica da função seno

Dada uma função $f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$, o seu gráfico é o conjunto

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$$

Esse subconjunto do plano cartesiano costuma ser representado graficamente no que chamamos de *representação gráfica* da função f.

No caso específico da função seno é possível provar que sua representação gráfica será uma curva denominada *senóide*, conforme ilustramos a seguir.



Representação gráfica da função $y = senx$.

Em sala de aula, neste ponto vale a pena estender os conceitos acima apresentados para as funções *tipo seno*, definidas por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas pela lei $f(x) = A + B \cdot \text{sen}\,(mx + n)$, em que A, B, m e n são números reais. No capítulo seguinte, ilustraremos alguns exemplos que abordam esse contexto.

De modo análogo também podemos definir a função cosseno.

3.6 Função cosseno

Definição 3.6.1. *Dado um arco $\widehat{AB}$ de medida x radianos, definimos como cosseno x a abcissa do ponto B e representamos $\cos x = OC = x_B$, conforme ilustra a figura a seguir*

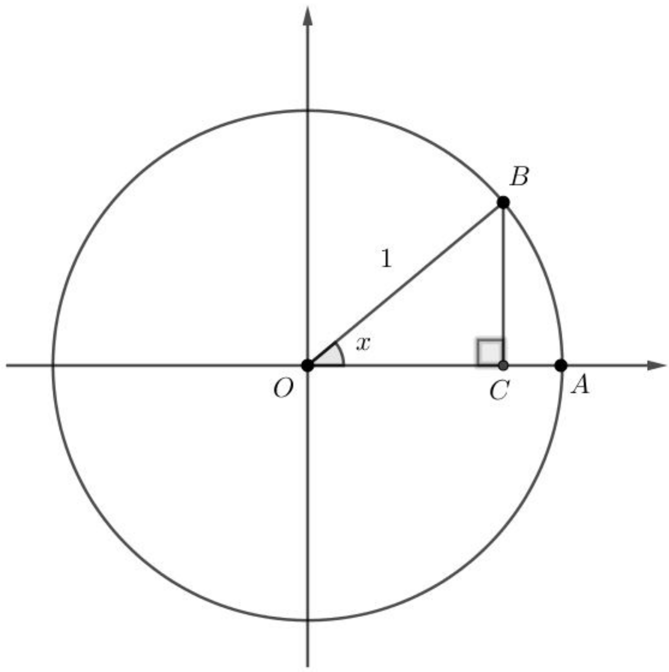
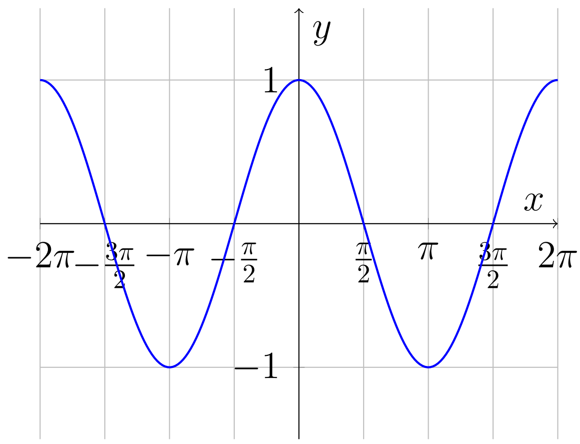


Figura 3.11: Função cosseno

Devido o fato de que o raio do ciclo trigonométrico Γ mede 1, segue que, para todos os pontos $B \in \Gamma$, tem-se que $-1 \leq x_B \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$. Além disso, pela periodicidade da função de Euler, segue que $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

3.6.1 Representação gráfica da função cosseno

No caso específico da função cosseno, usando a propriedade de que $cosx = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ para todo x real, segue que a representação gráfica da função cosseno é uma senóide deslocada horizontalmente de $\frac{\pi}{2}$ unidades, conforme ilustramos a seguir.



Evidentemente, vale aqui o mesmo comentário que mencionamos no caso da função seno sobre o estudo das funções *tipo cosseno* definidas por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas tal que $f(x) = A + B \cdot \text{sen}\,(mx + n)$, em que A, B, m e n são números reais.

Um outro ponto que consideramos importante é o seguinte: como as funções trigonométricas (especialmente seno e cosseno) são usadas para modelar fenômenos periódicos encontrados no dia a dia, os alunos que têm um primeiro contato com o tema costumam pensar duas coisas que não são verdadeiras:

- Que qualquer função em que na sua lei apareça um seno ou um cosseno são periódicas;
- Que as funções trigonométricas são os únicos exemplos de funções periódicas.

Na proposta de ensino que vamos sugerir no próximo capítulo, daremos algumas sugestões para esclarecer que essas ideias não são verdadeiras.

Para finalizar, gostaríamos de responder mais um questionamento natural:

E as demais funções trigonométricas? Devemos ensiná-las?

É claro que a resposta a esse pergunta depende de alguns fatores, como público-alvo, interesse de preparação para uma prova específica, carga horária disponível para ensinar o assunto, entre tantos outros fatores que podem influenciar na decisão de como a até onde ensinar o assunto. Mas uma coisa é certa, um bom entendimento das funções seno e cosseno, cobrirá a imensa maioria das situações práticas onde as funções trigonométricas são usadas como ferramentas para descrever situações problema. Além disso as demais funções trigonométricas (tangente, cotangente, secante e cossecante) pode ser obtidas a partir de relações apropriadas com as funções seno e cosseno. No século XVIII o famoso matemático e físico francês Jean Baptiste Fourier mostrou que, sob certas condições, a maioria das funções usuais pode ser aproximada de modo bastante satisfatório como uma soma de funções senos e cossenos de diferentes periodicidades (*Séries de Fourier*).

4 Motivações, sugestões e aplicações para o ensino da Trigonometria

Apresentaremos neste capítulo alguns fatos e questões que julgamos interessantes para a serem tratadas na sala de aula, por serem motivadoras e estimularem a curiosidade dos estudantes sobre o assunto.

Começaremos com um breve apanhado de ideias que, ao nosso ver, algumas delas podem ser escolhidas pelo professor, dependendo do tempo disponível e do nível de interesse da sua turma para mostrar um panorama geral do surgimento da Trigonometria como uma necessidade humana para resolver certos problemas, assim como a sua evolução ao longo da história.

Algumas das questões sugeridas podem ser encontradas em diversas referências da vasta literatura Matemática do assunto. Algumas delas foram adaptadas para serem inseridas em diferentes contextos de sala de aula a para públicos bem diversos. Já outras foram retiradas de exames vestibulares pelo Brasil e afora, assim como do ENEM - Exame nacional do ensino médio, que como sabemos é neste momento o principal canal de seleção para o ensino superior no nosso pais. Independentemente da origem, acreditamos que essas questões possam estimular a curiosidade do iniciante no assunto, além de mostrar que a Trigonometria surgiu de uma necessidade humana de fazer medições de distâncias inacessíveis e, posteriormente, tornou-se uma ferramenta fundamental para resolver problemas da Matemática Pura, Aplicada e de áreas afins que utilizam a Matemática como ferramenta e linguagem. Esperamos verdadeiramente que as situações problema a seguir possam ser úteis para estimular o aprendizado e o desejo de aprender cada vez mais sobre o tema.

O problema básico, que estará sempre presente em todas as situações problemas envolvem a análise de triângulos. O que significa isso? Os elementos principais de um triângulo são seus lados e seus ângulos. Resolver um triângulo significa determinar três desses elementos quando os outros três são dados (desde que não sejam os três ângulos). Este problema básico, dependendo dos dados, pode ter uma única solução, pode ser impossível ou pode ter mais de uma solução, e você poderá verificar isso nos problemas que vamos discutir.

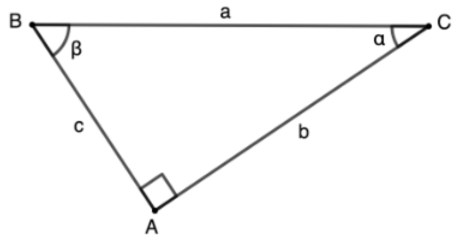
4.1 Questões motivadoras

Uma postura que julgamos interessante antes de iniciarmos um curso regular de Trigonometria para alunos iniciantes no assunto é apesentar algumas das questões (sem inicialmente resolvê-las, é claro!) e questionar os estudantes sobre possíveis ideias para solucioná-las. A experiência mostra que, rapidamente, os estudantes percebem que os seus conhecimentos anteriores não são suficientes para atacar tais problemas, surgindo então a necessidade natural de introduzirmos novas ferramentas que possam ser úteis para a solução desses problemas. Alguns desses problemas surgiram como uma real necessidade dos seres humanos ao longo dos séculos, especialmente, para medir distâncias que não podem ser aferidas diretamente, como por exemplo, a medida do raio da Terra, a altura de uma montanha, a distância entre duas cidades, entre outras. O origem desses problemas remontam À Grécia antiga, cerca de 400 anos antes de Cristo. Essas ideias foram sendo reformuladas e melhoradas e continuam a ser usadas até hoje em modelos muito mais elaborados como nos modernos sistemas de localização sobre o globo terrestre, o GPS - *Global Positioning System*.

4.1.1 Usando o triângulo retângulo para obter outras relações trigonométricas

A partir as razões trigonométricas do triângulo retângulo, podemos deduzir (mesmo que em casos particulares) muitas outras relações trigonométricas, como por exemplo as lei dos senos e dos cossenos, as fórmulas de adição e subtração de arcos e até mesmo o Teorema de Pitágoras, como ilustraremos a seguir. Devido ao grande apelo geométrico, essas deduções que apresentaremos agora são muito bem aceitas para turmas que estão tendo o seu primeiro contato com o conteúdo e cujo foco não é o extremo rigor matemático mas, as ideias centrais que venham acompanhadas de bons argumentos de plausibilidade.

Para fixar melhor essas ideias e algumas notações, vamos considerar um triângulo ABC retângulo em A, construído a partir de um ângulo agudo α, como da figura abaixo



As razões trigonométricas do ângulo α são seno de α, cosseno de α e tangente de α, e serão denotadas por $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$, respectivamente. Usando o triângulo ABC, calculamos as razões trigonométricas de α da seguinte forma:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}\,, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

As definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo, apesar de construídas a partir de um triângulo retângulo, independem do triângulo escolhido, como discutido anteriormente. Por isso, calculamos o seno, cosseno e tangente do ângulo α e não do triângulo ABC.

A partir das definições dadas anteriormente, podemos encontrar outras relações importantes envolvendo o seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Do triângulo retângulo ABC, podemos observar que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

E ainda,

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} = 1. \tag{4.1}$$

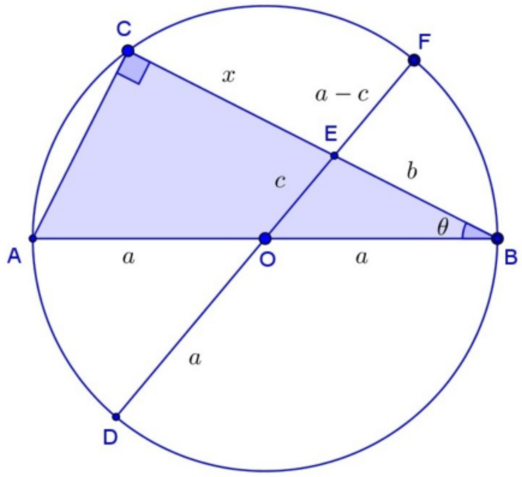
que é a conhecida *Relação Fundamental da Trigonometria*.

Analisando um pouco mais o triângulo ABC, podemos obter as seguintes relações entre as razões trigonométricas do ângulos complementares α e β:

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Resumindo, quando $\alpha + \beta = 90^0$ (ângulos complementares) o seno de um deles é igual ao cosseno do outro e as tangentes são inversas (quando nenhum deles é igual a 0^o).

Agora apresentamos a *Lei dos cossenos*, Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual a soma do quadrado das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



A figura acima é uma circunferência de raio a na qual foi inscrito um triângulo cujo um dos lados, AB, coincide com o diâmetro da circunferência. De acordo com conhecimentos básicos de geometria plana, o triângulo ABC é retângulo em C. A seguir foi traçado um diâmetro na circunferência, DF, de modo que $DF//AC$. Utilizando trigonometria chegamos ao seguinte valor para o segmento CE:

$$\cos\theta = \frac{b+x}{2a} \Rightarrow x = 2a\cos\theta - b$$

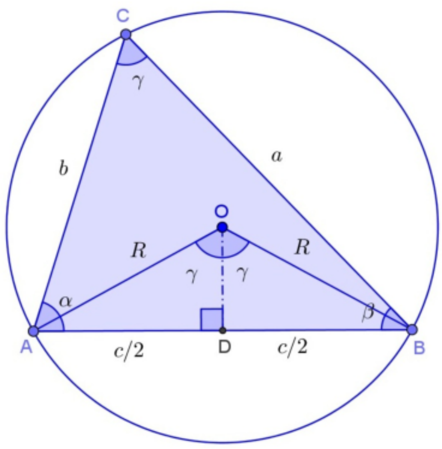
Agora vamos utilizar o conceito de Potência de um ponto em relação a uma circunferência. Vejamos: Utilizando a potência de E com relação à circunferência, segue

$$x \cdot b = (a + c) \cdot (a - c)$$

Substituindo o valor de $x = 2a\cos\theta - b$, obtemos:

$$(2a\cos\theta - b) \cdot b = (a + c) \cdot (a - c) \Rightarrow c^2 = a^b + b^2 - 2ab\cos\theta$$

A partir das razões trigonométricas no triângulo retângulo também podemos estabelecer a *Lei dos senos*. No $\triangle ABC$ da figura abaixo, seja γ a medida do ângulo $A\widehat{C}B$. Como esse ângulo é inscrito na circunferência, a medida do arco AB é 2γ (a medida, em graus, do arco é o dobro da medida do ângulo inscrito correspondente). Assim, sendo O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, segue que o ângulo $A\widehat{O}B$ tem medida 2γ, pois é o ângulo central correspondente ao arco AB, cuja medida é 2γ. Por fim, como o triângulo $\triangle AOB$ é isósceles de base AB, pois $OA = OB = R$, onde R é a medida do raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$, segue que OC é altura relativa ao lado AB desse triângulo e também bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$. Diante do exposto, tem-se que cada um dos ângulos $A\widehat{O}C$ e $B\widehat{O}C$ mede γ, conforme ilustra a figura a seguir.



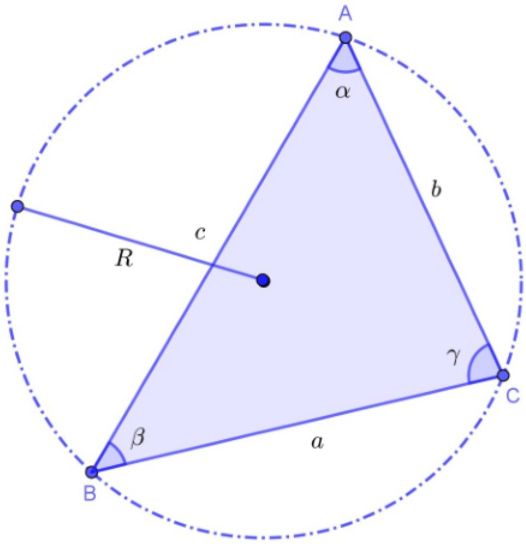
Assim, no $\triangle AOC$, tem-se que

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{c/2}{R} \Rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

Procedendo de modo completamente análogo para os demais lados do ABC, podemos concluir que $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = 2R$. Assim,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

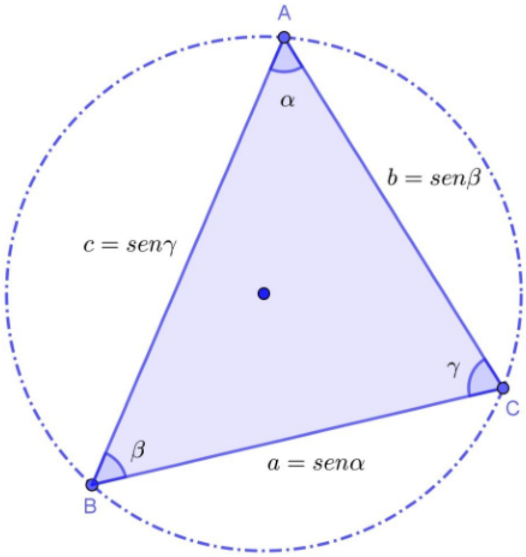
Uma vez estabelecida a lei dos senos, podemos usá-la para obter as chamadas *fórmulas de adição*. Com efeito, considerando o triângulo ABC representado na figura abaixo



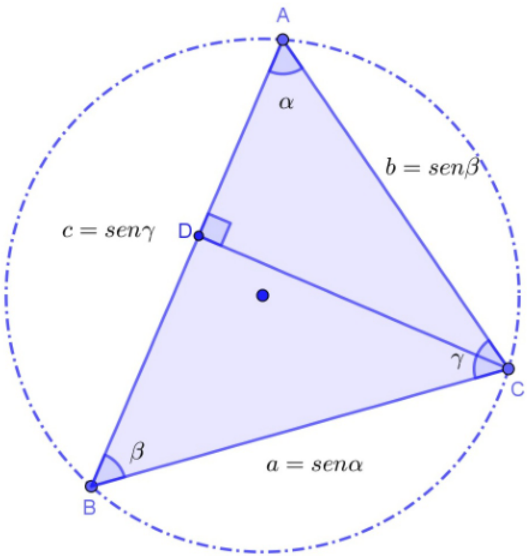
No caso em que $2R = 1$, tem-se que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \operatorname{sen}\alpha \\ b = \operatorname{sen}\beta \\ c = \operatorname{sen}\gamma \end{cases}$$

conforme ilustra a figura a seguir:



Nesse caso, No ΔABC, traçando a altura CD (relativa ao lado AB), obtemos dois triângulos retângulos, a saber: ΔADC e ΔBDC, conforme a figura seguir:



No ΔADC temos que:

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

Por outo lado, no ΔBDC tem-se que:

$$\cos\beta = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BD = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$

Mas ocorre que $AB = BD + AD$. Portanto,

$$\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$$

Por fim, como $\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}(180^o - (\alpha+\beta)) = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, o que nos permite concluir que:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$$

Observação 4.1.1. *Usando as identidades* $\cos(90^o - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}(90^o - \alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ *e* $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$*, pode-se deduzir as demais fórmulas de adição e subtração de arcos*

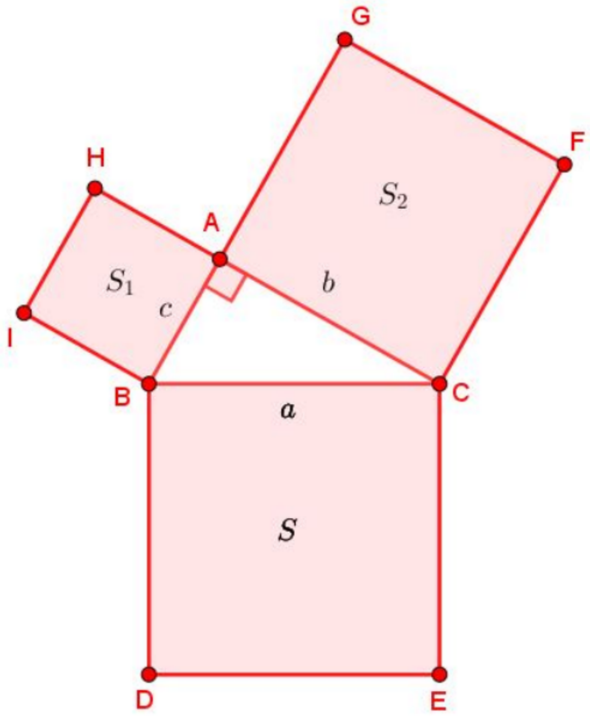
- $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta.$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta.$

e a partir daí tomando $\alpha = \beta$*, podemos obter as conhecidas fórmulas do arco duplo*

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \begin{cases} \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \end{cases}$$

Outro importante fato que podemos estabelecer com o uso as razões trigonométricas no triângulo retângulo é o famoso *Teorema de Pitágoras*. Segundo o qual a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.



Teorema de Pitágoras: $S = S_1 + S_2$.

A seguir apresentamos uma demonstração encontrada em [9]

- No triângulo retângulo ABC, temos que:

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} \;\; \text{e} \;\; \cos\beta = \frac{c}{a}.$$

- No triângulo ACL, $\cos\alpha = \frac{CL}{b} \iff CL = b \cdot \cos\alpha$. Analogamente, no triângulo ABL, $\cos\beta = \frac{BL}{c} \iff BL = c \cdot \cos\beta$.

- Ora, $S_1 = c^2$ e $S_2 = b^2$. Por outro lado, como $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos\beta = \frac{c}{a}$, o retângulo $BDJL$ tem lados $BL = c \cdot \cos\beta$ e $BD = a$ e o retângulo $CEJL$ tem lados $CL = b \cdot \cos\alpha$ e $CE = a$, segue que:

$$\text{Area}(BDJL) = ac \cdot \cos\beta = ac\frac{c}{a} = c^2 = S_1,$$

$$\text{Area}(CEJL) = ab \cdot \cos\alpha = ab\frac{b}{a} = b^2 = S_2.$$

- Por fim, como $S = a^2$ e $S = S_1 + S_2$, segue que:

$$S = S_1 + S_2 \iff a^2 = b^2 + c^2.$$

4.1.2 Medindo distâncias inacessíveis

Com já mencionamos muitas vezes ao longo do nosso texto, uma das primeiras motivações para o surgimento da Trigonometria mora no problema de medir distâncias que não podem ser medidas diretamente, tais como medir o raio da Terra, a distância ente duas ilhas, a altura de uma montanha, entre tantas outras. Iniciamos esse capítulo sugerindo três situações problemas que, ao nosso ver, podem ser uteis para estimular o interesse sobre o tema e o alcance das ferramentas trigonométricas.

Exemplo 4.1.1 (Medindo o comprimento de uma ponte)**.** *Imagine que desejamos construir uma ponte ligando duas margens opostas de um rio como ilustra a figura abaixo:*

Figura 4.1: Problema da ponte

Como poderíamos proceder como calcular o comprimento do vão da ponte que conecta as duas margens?

Resolução: Nesse caso um boa estimativa para o comprimento do vão da ponte poderia ser obtido da seguinte forma:

- Posicione-se num ponto A das margens do rio você escolheria um ponto fixo B na margem oposta que fosse visível a partir do ponto A.

- Na mesma margem do ponto A você fixe um outro ponto C, cuja distância entre A e C pode ser facilmente determinada com o auxílio de algum instrumento de medida (uma trena, por exemplo).

- Fixados os pontos A, B e C, com um Teodolito posto no ponto A, mire o ponto B e em seguida gire a cabeça do teodolito até o ponto C na mesma margem de A, a fim de determinar o ângulo $B\widehat{A}C = \alpha$.

- Deslocando o teodolito até o ponto C na mesma margem do ponto A, medimos, de forma completamente análoga, o ângulo $B\widehat{C}A = \varphi$

A figura a seguir ilustra os passos acima descritos.

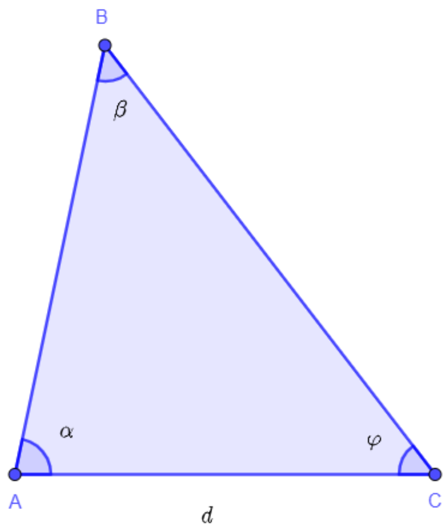


Figura 4.2: Exemplo da ponte

De posse dos ângulos α e φ podemos determinar o ângulo interno β do vértice B do triângulo ABC, pois $\alpha + \beta + \varphi = 180^o \Rightarrow \beta = 180^o - (\alpha + \varphi)$. Por fim, para determinarmos o comprimento x do vão livre da ponte, basta aplicarmos a Lei dos senos ao triângulo ABC. De fato,

$$\frac{x}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{d}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow x = \frac{d\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\beta}$$

Exemplo 4.1.2 (Medindo a altura de uma montanha localizada em torno de uma planície)**.** *No Rio Grande do norte uma das montanhas mais famosas é o Pico do*

Cabugi, localizado no município de Angicos. Como podemos utilizar a Trigonometria do triângulo retângulo para medir a altura dessa montanha?

Figura 4.3: Pico do Cabugi- Angicos/RN

No caso específico do Pico do Cabugi, há no seu entorno uma enorme planície, o que facilita bastante o processo de medição da sua altura. Uma pessoa localizada num ponto A dessa planície em torno da montanha pode, a partir desse ponto, apontar um teodolito (instrumento capaz de medir ângulos com o plano horizontal) e registrar um ângulo de medida. Após caminhar uma distância d em direção ao pico chega ao ponto B, onde aponta novamente o teodolito para o pico da montanha e, a partir dessa nova posição, o teodolito acusa uma nova medida, conforme ilustra a figura a seguir:

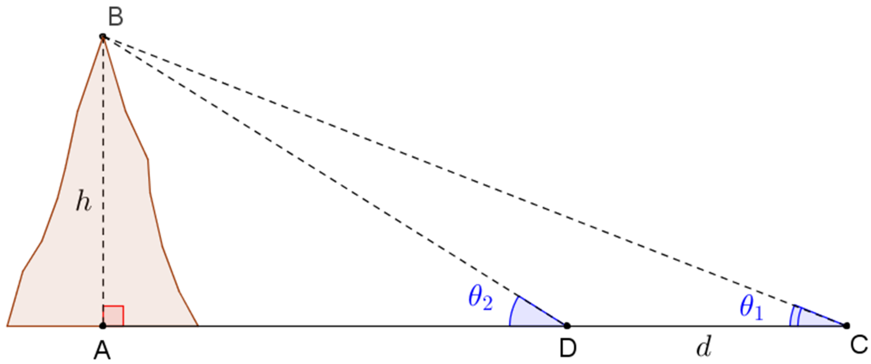


Figura 4.4: Exemplo Pico do Cabugi

Como os valores d, θ_1 e θ_2 são conhecidos, mostre que podemos achar a altura da montanha.

Resolução: *No triângulo ABC, temos:*

$$\mathrm{tg}\theta_1 = \frac{h}{AD + d} \Rightarrow Ad + d = \frac{h}{\mathrm{tg}\theta_1} \Rightarrow AD = \frac{h}{\mathrm{tg}\theta_1} - d \tag{4.2}$$

No triângulo ABD, temos:

$$\mathrm{tg}\theta_2 = \frac{h}{AD} \Rightarrow AD = \frac{h}{\theta_2} \tag{4.3}$$

Substituindo uma na outra, segue que:

$$\frac{h}{\mathrm{tg}\theta_2} = \frac{h}{\mathrm{tg}\theta_1} - d$$

$$\Rightarrow \frac{h}{\mathrm{tg}\theta_1} - \frac{h}{\mathrm{tg}\theta_2} = d$$

$$\Rightarrow h\frac{(\mathrm{tg}\theta_2 - \mathrm{tg}\theta 1)}{\mathrm{tg}\theta 2 \cdot \mathrm{tg}\theta_1} = d$$

$$\Rightarrow h = \left(\frac{\mathrm{tg}\theta_2 \cdot \mathrm{tg}\theta_1}{\mathrm{tg}\theta_2 - \mathrm{tg}\theta_1}\right) \cdot d$$

Assim, podemos determinar a medida da altura do pico em função dos valores d, θ_1 e θ_2 , que são conhecidos. (Apenas por curiosidade, o Pico do Cabugi tem cerca de 590 metros de altura.)

Exemplo 4.1.3 (Medindo a altura de uma montanha isolada)**.** *No mesmo contexto de medir a altura aproximada de uma montanha, no problema anterior, o fato de termos uma planície em torno da montanha (onde podemos caminhar diretamente a partir ela para medirmos a distância d e as medidas dos ângulos θ_1 e θ_2) foi essencial. Se essa planície não existir, como poderíamos vencer essa dificuldade e, ainda assim, determinar a altura da montanha? Uma situação como essa ocorre dentro da cidade de São Paulo, onde encontra-se o Pico do Jaraguá.*

Figura 4.5: Pico do Jaraguá - SP

Resolução: Nesse caso, não temos uma planície que nos permita caminhar diretamente para perto ou longe da montanha como no exemplo anterior do pico do Cabugi. Entretanto há uma via extensa que passa lateralmente à montanha. Para determinarmos a altura da montanha podemos proceder da seguinte forma:

- Fixe dois pontos A e B sobre via que passa lateralmente à montanha, de modo que a distância d entre eles possa ser encontrada com o auxílio de um instrumento de medida (como uma trena, por exemplo).

- A partir do ponto A, levantamos a mira do Teodolito até apontar para o topo C da montanha, e o giramos num plano inclinado determinando o ângulo $C\widehat{A}B = \alpha$,

- Transferindo o teodolido para o ponto B fazemos um procedimento análogo, determinando o ângulo $C\widehat{B}A = \beta$.

- Ainda com o teodolito em B, apontamos a sua mira para o ponto C (topo da montanha) e medimos no plano vertical o ângulo $C\widehat{A}P = \varphi$, onde P representa um ponto completamente inacessível que é o pé da vertical que passa pelo topo da montanha (estamos desprezando a altura do Teodolito, visto que é desprezível, diante da altura da montanha).

A figura a seguir ilustra o procedimento acima descrito:

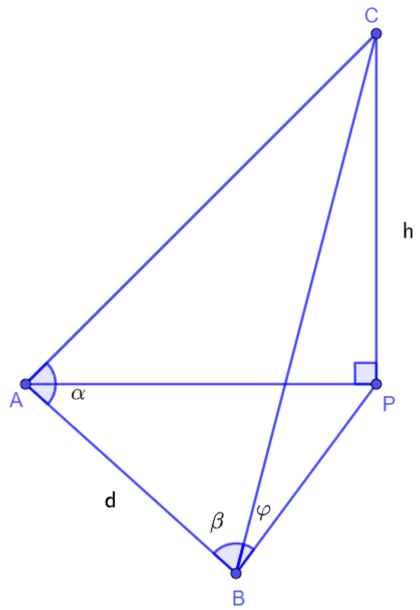


Figura 4.6: Exemplo Jaraguá

No triângulo ABC o ângulo interno do vértice C mede $\theta = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Aplicando a lei dos senos ao triângulo ABC, segue que:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{d}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow BC = \frac{d \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}$$

Por fim, no triângulo retângulo BCP, tem-se que:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{h}{BC} \Rightarrow h = BC \cdot \operatorname{sen}\varphi \Rightarrow h = \frac{d \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}$$

Exemplo 4.1.4 (Novamente o raio da Terra)**.** *Supondo conhecida a altura de uma montanha, temos uma alternativa para medir o raio da superfície terrestre.*

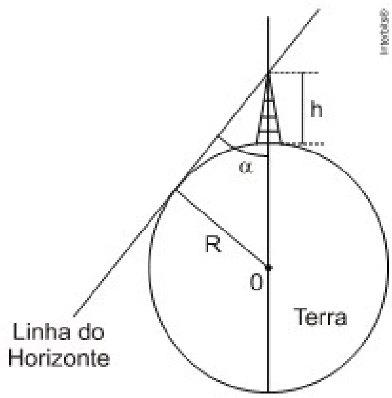


Figura 4.7: Exemplo raio da Terra

Resolução: Nesse caso, do alto da montanha podemos apontar a mira de um Teodolito para a linha do horizonte e girá-lo até a linha vertical local que passa pelo pico da montanha, determinado dessa forma a medida α. Então,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{R+h} \Rightarrow R = \frac{h \cdot \operatorname{sen}\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha}.$$

Exemplo 4.1.5 (Monumento Natural do Arquipélago das Ilhas Cagarras)**.** *Popularmente conhecido como simplesmente Ilhas Cagarras, é um arquipélago localizado no Oceano Atlântico, ao largo da cidade e estado do Rio de Janeiro, no Brasil. Cerca de cinco quilômetros ao Sul da conhecida praia de Ipanema, o arquipélago é integrado por sete ilhas e rochedos. Na figura a seguir podemos ver Bairros de Ipanema e Lagoa, no Rio de Janeiro, Brasil. Ao fundo, o Arquipélago das Cagarras.*

Figura 4.8: Arquipélago das Cagarras

Como podemos medir a distância que separa as duas ilhas mais próximas da orla?

Figura 4.9: Praia do Rio De Janeiro e Arquipélago ao fundo

Resolução: Para determinarmos (indiretamente) a distância entre as duas ilhas, podemos proceder da seguinte forma:

- Na praia de Ipanema, fixe dois pontos A e B cuja distância d entre eles possa ser facilmente determinada com o auxílio de um instrumento de medida (um trena, por exemplo);

- Com um teodolito fixado em A mire num ponto C da primeira ilha e gire o teodolito horizontalmente até o ponto D fixado outra ilha, medindo o ângulo $C\widehat{A}D = \alpha$;

- Continue a girar no plano horizontal o teodolito até que o mesmo aponte para o ponto B fixado ma margem da praia, determinando o ângulo $D\widehat{A}B = \beta$;

- Transporte o Teodolito até o ponto B fixado ma margem da praia e repita um procedimento análogo, determinando os ângulos $D\widehat{B}C = \varphi$ e $C\widehat{B}A = \theta$

A figura a seguir ilustra o procedimento descrito acima.

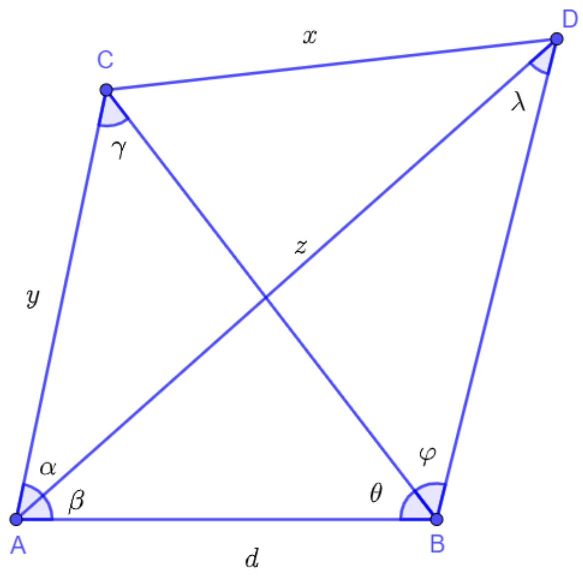


Figura 4.10: Exemplo Ilhas

Como os ângulos α, β, θ e φ foram medidos com o Teodolito, segue que os ângulos $\gamma = 180^{-}(\alpha + \beta + \theta)$ e $\lambda - 180^o - (\beta + \theta + \varphi)$ podem ser determinados, $CD = x$, $AC = y$ e $AD = z$ segue que:

$$\frac{y}{sen\theta} = \frac{d}{sen\gamma} \Rightarrow y = \frac{d.sen\theta}{sen\gamma}.$$

$$\frac{z}{sen(\theta + \varphi)} = \frac{d}{sen\lambda} \Rightarrow y = \frac{d.sen(\theta + \varphi)}{sen\lambda}.$$

Por fim, uma vez determinados os valores de y e z podemos finalmente encontrar a distância x entre as duas ilhas usando a lei dos cossenos no triângulo ABC. De fato,

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha \Rightarrow x = \sqrt{y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha}$$

4.1.3 Funções a partir de funções trigonométricas

Nesta última subseção, sugerimos algumas questões interessantes que estendem as funções seno e cosseno padrão e também desmistificam a ideia de que as funções trigonométricas são sempre periódicas. Chamaremos de funções *Tipo seno* ou *Tipo cosseno* as funções do tipo $f(x) = A + B \cdot \text{sen}\,(mx + n)$ ou $f(x) = A + B \cdot \cos(mx + n)$, com A, B, m e n reais. É bastante profícuo para um bom domínio do conteúdo e posteriores aplicações, o estudo dos “efeitos” que as constantes A, B, m e n provocam no gráfico dessas funções. A seguir, resumimos seus efeitos:

- $A \rightarrow$ provoca uma translação vertical no gráfico de f;
- $B \rightarrow$ provoca uma modificação na amplitude (metade da distância de pico a pico) da função f;
- $m \rightarrow$ afeta o período de f. Pode-se demonstrar que $T_f = \frac{2\pi}{|m|}$;
- $n \rightarrow$ provoca um deslocamento lateral no gráfico de f.

Exemplo 4.1.6 (ENEM)**.** *Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.*

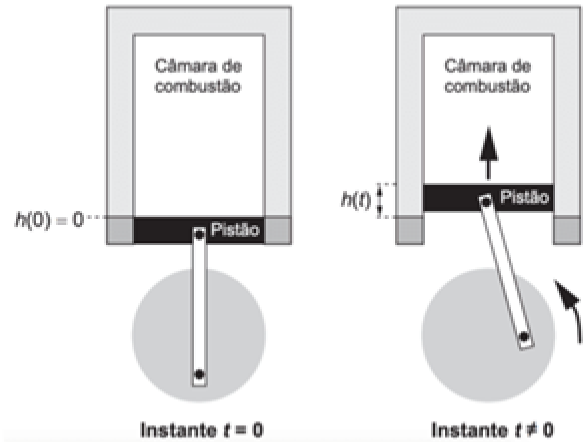


Figura 4.11: Exemplo Pistão

A função $h(t) = 4 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ *definida para* $t \geq 0$ *descreve como varia a altura h, medida em centímetros, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos. O valor do parâmetro* β*, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante t = 0), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3* *como aproximação para* π. *O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro* β*, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é:*

$(a)1$ $(b)2$ $(c)4$ $(d)5$ $(e)8$

Resolução:

Essa questão pode ser resolvida de uma forma rápida e outra mais longa, porém mais fácil de perceber a solução. Vejamos:

1ª Solução:

Como o período da função seno é dado por: $P = \frac{2\pi}{\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \therefore \beta = 4,5$. Logo a resposta é $\beta = 5$

2ª Solução: O pistão se deslocará no sentido anti-horário. Para que a altura seja igual a 6 é necessário que:

Sendo:

$$k = \frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$h(t) = 4 + 4 \cdot \text{sen}\,(k) = 6$$

$$\text{sen}\,(k) = \frac{2}{4}$$

$$\text{sen}\,(k) = \frac{1}{2} \therefore k = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \cdots$$

Logo, na terceira vez o ângulo terá medida $\frac{13\pi}{6}$. Desse modo:

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{2} \therefore \beta \cdot t = 16$$

Como o $t < 4$, logo $\beta = 5$.

Vamos a mais um exemplo

Exemplo 4.1.7 (ENEM)**.** *Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo* $P(t) = A + B \cdot \cos(kt)$ *em que* A, B *e* k *são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:*

Pressão Mínima	78
Pressão Máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

(a) $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t)$

(b) $P(t) = 78 + 42 \cdot \cos(3\pi t)$

(c) $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(2\pi t)$

(d) $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(t)$

(e) $P(t) = 78 + 42 \cdot \cos(t)$

Resolução: Como $|\cos(kt)| \leq 1$, a pressão será mínima quando $\cos(\pi t) = -1$ e máxima quando $\cos(\pi t) = 1$. Nesse caso,

$$\begin{cases} A + B \cdot (-1) = 78 \\ A + B \cdot 1 = 120 \end{cases} \Rightarrow A = 99 \quad e \quad B = 21.$$

Além disso, a frequência cardíaca é de 90 batimentos cardíacos por minuto, o que revela que o período (tempo para ocorrer um batimento) é $\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ segundos/batimento. Ora, como o período dessa função é dado por $\frac{2\pi}{k}$, segue que

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = 3\pi,$$

o que nos permite concluir que

$$P(t) = A + B \cdot cos(kt) \Rightarrow P(t) = 99 + 21 \cdot cos(3\pi t),$$

que é encontrada na alternativa A.

Exemplo 4.1.8 (ENEM). *Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:*

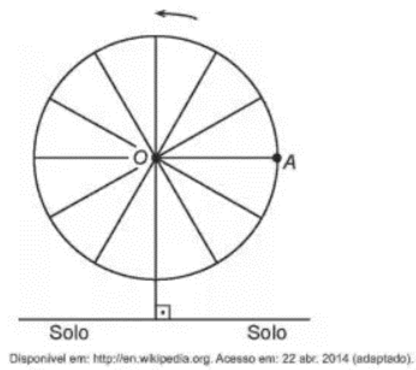
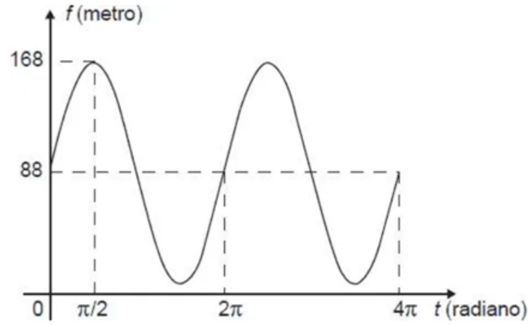


Figura 4.12: Exemplo Roda gigante

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Seja t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por:

(a) $f(t) = 80 \cdot \text{ sen }(t) + 88$

(b) $f(t) = 80 \cdot \cos(t) + 88$

(c) $f(t) = 88 \cdot \cos(t) + 168$

(d) $f(t) = 168 \cdot \text{ sen }(t) + 88 \cdot \cos(t)$

(e) $f(t) = 88 \cdot \text{ sen }(t) + 168 \cdot \cos(t)$

Resolução: A partir da representação gráfica dada pelo enunciado, podemos ver que a amplitude A é dada por $A = 168 - 88 = 80$, Além disso, o período da função é 2π. Como nesse caso, o período é dado por $\frac{2\pi}{|m|}$, onde m é o coeficiente de t no interior do cosseno, segue que $\frac{2\pi}{|m|} = 2\pi \Rightarrow m = \pm 1$. Por fim, o gráfico dado está 88 unidades acima da origem, o que sugere que há uma translação vertical de 88 unidades no sentido positivo do eixo y. Diante do exposto, entre as alternativas oferecias a função $f(t) = 80\cos(t) + 88$ cumpre todos os requisitos, o que nos premite concluir que a resposta correta é alternativa (B).

A seguir mostraremos um exemplo para chamar a atenção de que nem sempre funções trigonométricas são periódicas.

Exemplo 4.1.9. *A função a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei*

$$f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$$

é periódica?

Resolução: Note que $f(0) = \cos 0 + \cos(\sqrt{2} \cdot 0) = \cos 0 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$. Suponhamos que f fosse periódica de período $T > 0$. Nesse caso, $f(x) = f(x + T)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, para $x = 0$ teríamos

$$f(0) = f(0 + T) \Rightarrow 2 = f(T) \Rightarrow 2 = cosT + \cos(\sqrt{2}T).$$

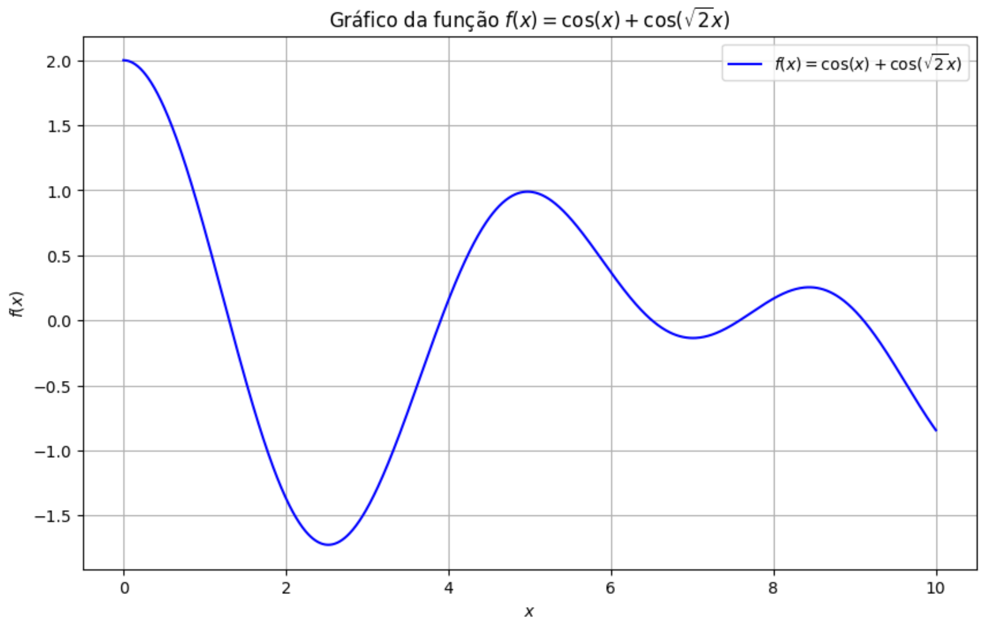
Ora, como $\cos T, \cos(\sqrt{2}T) \in [-1, 1]$, segue que

$$cosT + \cos(\sqrt{2}T) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos T = 1 \\ \cos(\sqrt{2}T) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = 2k\pi \\ \sqrt{2}T = 2s\pi \end{cases}, k, s \in \mathbb{Z}$$

Dividindo essas duas últimas igualdades membro a membro, segue que

$$\frac{\sqrt{2}.T}{T} = \frac{2s\pi}{2k\pi} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{s}{k} \in \mathbb{Q},$$

o que é uma contradição. Assim, f não é periódica. Apenas para ilustrar o fato de que essa função não é periódica apresentamos a seguir a sua representação gráfica.



Há muitos outros exemplos, como $f(x) = \cos(x^2)$,

Uma outra questão que costuma enganar muitos alunos é a seguinte.

Exemplo 4.1.10. *Qual o período das funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por*

(a) $f(x) = \cos^2 x$.

(b) $g(x) = |\cos x|$

Resolução: Nesse caso, a experiência de sala de aula revela que boa parte dos estudantes querem aplicar diretamente a conhecida expressão do período $T = \frac{2pi}{|m|}$, onde m é o coeficiente do x em $f(x) = A + B \cdot \cos(mx + n)$, o que produziria as respostas $T_f = T_g = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Nesse ponto há de se destacar para os estudantes que a conhecido fórmula não aplica-se a nenhuma dessas duas funções pois a presença do quadrado em f e do módulo em g fazem com que f e g não estejam diretamente enquadradas na família das funções descritas pela expressão $f(x) = A + B \cdot \cos(mx + n)$, com A, B, m e n reais. Como $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ No caso da f, podemos escrever

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \Rightarrow T_f = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Já no caso da g o melhor a se fazer observar a sua representação gráfica, conforme ilustra a figura a seguir.

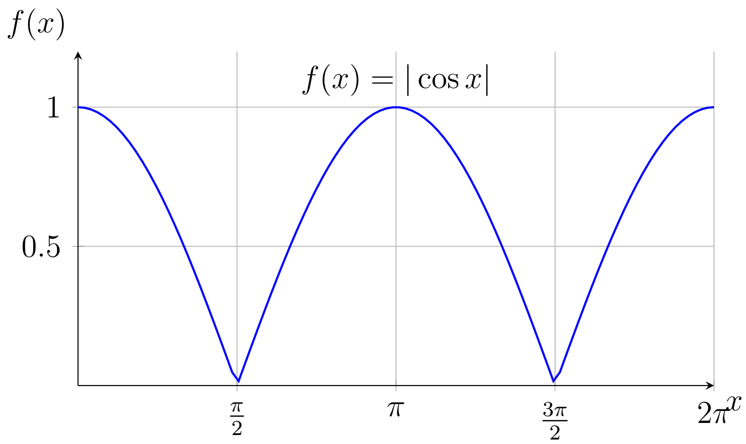


Figura 4.13: Gráfico da função $f(x) = |\cos x|$.

o que revela que o período da função g é $T_g = \pi$.

Considerações finais - Conclusão

Com a realização deste trabalho, esperamos contribuir com a redução da dificuldade que os alunos do Ensino Médio apresentam no estudo da Trigonometria, tais dificuldades podem ser verificadas através dos processos de avaliação. Esta proposta de ensino da Trigonometria tenta atender às necessidades dos nossos alunos atuais, motivando-os e mostrando a relevância dessa teoria tanto a Nível Médio como a Nível Universitário. Nesta proposta, o aluno é provocado a buscar respostas para algumas das indagações propostas que levam o a aluno a buscar o conhecimento da Trigonometria. Essa metodologia de ensino da Trigonometria já teve um resultado positivo quando apliquei, em parte, nas turmas do segundo ano do Ensino Médio de 2024. Foi possível ver que os alunos tiveram uma motivação nas aulas e com melhoras no resultados de avaliação, mesmo sem aplicar totalmente a metodologia proposta nesse TCC.

Considerando o estudo da Trigonometria sugerido nos livros didáticos, temos uma Trigonometria sem uma continuidade, isto é como se deu a evolução do triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica e também sem explicação de como e para que foi descoberta pelos antigos físicos e matemáticos. Hoje com todos os avanços da ciência com relação a informação, os adolescentes querem cada vez mais saber o porquê de tudo, até mesmo como os antigos pesquisadores sabiam o seno de valores como, por exemplo $10°$. Isso, de fato, ocorreu em uma de minhas aulas em uma turma do segundo ano de 2014.

Considero esse tipo de pergunta relevante dentro de qualquer aula teórica. Mostra o nível de motivação do aluno. Essa trabalho propõe uma nova forma de ensino, portanto, neste momento, cabe a todos nós, fazermos uma reflexão sobre nossa forma de ensino, pois, muitas das vezes, colocamos a “culpa” no próprio aluno por não aprender a teoria.

Nesse trabalho, buscamos desenvolver a Trigonometria por meio de problemas que motivem o aluno a buscar respostas para o problema, e ai a porta para o conhecimento se abre não como uma imposição, mas sim porque foi motivado e desafiado a encontrar respostas. Concluo dizendo que esse trabalho é mas uma contribuição na busca de uma metodologia que envolva uma aprendizagem significativa para o ensino da Trigonometria para alunos do Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

[1] Almeida, J. S. (2008). *Trigonometria: Conceitos e Aplicações*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna.

[2] Bhaskara II. (1150). *Siddhanta Shiromani*. Tradução de K. S. Shukla. Varanasi: Bharatiya Vidya Prakashan, 1998.

[3] Bonjorno, J. P. (2011). *Matemática: Ensino Médio*. São Paulo: Editora Moderna.

[4] Cruise, R. (2003). *Trigonometria e Suas Aplicações*. Londres: Cambridge University Press.

[5] Durell, C. (1962). *Trigonometria Avançada*. Nova Iorque: Dover Publications.

[6] Euclid. (circa 300 AC). *Elementos*. Tradução de Thomas L. Heath. Nova Iorque: Dover Publications, 1956.

[7] Fourier, J.-B. J. (1822). *Teoria Analítica da Calor*. Paris: Firmin Didot.

[8] Giovanni, J. A. (2008). *Matemática: Ensino Médio*. São Paulo: Editora Moderna.

[9] Gomes, Carlos A. (2015). Matemática - IME - ITA e Olimpíadas vol 03 - Geometria. 1^a Edição, Editora. Vestseller - Fortaleza CE.

[10] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1*. Rio de Janeiro: SBM.

[11] Mendes, J. P. (2011). *Matemática: História e Aplicações*. Lisboa: Editorial Presença.

[12] Morey, B. B.; Gomes, S. C. (2011). **Desafios da História da Matemática no Mestrado Profissional**. Anais do 60 Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática. São João Del Rey.

[13] Pereira, A. F. (2014). *Tradição e Inovação no Ensino da Trigonometria*. Porto Alegre: Editora UFRGS.

[14] Silva, L. C. (2006). *A História da Matemática e o Ensino da Trigonometria*. São Paulo: Editora Moderna.

[15] Stewart, J. (2011). *Cálculo: Transcendentais Precoces*. Boston: Cengage Learning.

[16] Swokowski, E. W. (1994). *Fundamentos de Trigonometria*. Boston: PWS Publishing Company.

[17] Vandenberg, B. J. (1990). *História da Trigonometria*. Nova Iorque: AMS Press.

[18] Viete, F. (1591). *In artem analyticem isagoge*. Paris: Apud Simonem Colinaeum.