



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE**  
**CENTRO CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA**  
**DEPARTAMENTO DE Matemática MESTRADO**  
**PROFISSIONAL**  
**EM Matemática EM REDE NACIONAL - PROFMAT**



**PROFMAT**

**Valdir Belo Cardoso**

# **Técnicas (não) usuais de resolução de problemas:**

**Paridade, Argumentos combinatórios, Contagens duplas,  
Invariância e Colorimentos**

**Orientador: Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva**

**Natal/RN - Agosto 2024**

**Valdir Belo Cardoso**

# **Técnicas (não) usuais de resolução de problemas:**

**Paridade, Argumentos Combinatórios, Contagens Duplas,  
Invariância e Colorimentos**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva.

Natal/RN - 2024

Dissertação de Mestrado sob o título Técnicas não usuais de resolução de problemas: Paridade, Argumentos Combinatórios, Contagens Duplas, Invariância e Colorimentos, apresentada por Valdir Belo Cardoso e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

---

Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Carlos Alexandre Gomes da Silva

Orientador

UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>o</sup>. Esteban Pereira da Silva.

Examinador Interno

UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

---

Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Elthon John Rodrigues de Medeiros

Examinador externo

IFRN - Instituto Federal do Rio Grande do Norte - Campus central.

Natal/RN - Agosto 2024

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Cardoso, Valdir Belo.

Técnicas (não) usuais de resolução de problemas: paridade, argumentos combinatórios, contagens duplas, invariância e colorimentos / Valdir Belo Cardoso. - 2024.

84 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, RN, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva.

1. Matemática - Dissertação. 2. Resolução de problemas - Dissertação. 3. Técnicas de demonstração - Dissertação. 4. Ensino da Matemática - Dissertação. I. Silva, Carlos Alexandre Gomes da. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 51(043.3)

# Agradecimentos

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todas as pessoas que tornaram possível a realização deste trabalho. Esta jornada acadêmica foi enriquecida pelas contribuições e apoio de muitos indivíduos excepcionais. Agradeço primeiramente a Deus, por sempre estar comigo. Segundo, quero agradecer ao meu orientador, *Carlos Alexandre Gomes*, pela orientação valiosa, paciência e incentivo ao longo deste processo. Sua expertise e orientação foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação.

Por fim, agradeço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para este projeto. Cada interação, conselho e apoio foram essenciais para a conclusão desta dissertação.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é abordar técnicas de resolução de problemas não usuais em contextos variados, explorando sua aplicação em argumentos combinatórios e contagens duplas para alunos do ensino básico. Ao examinar diferentes situações, são destacados os métodos de contagem que envolvem invariantes, proporcionando uma compreensão mais profunda das propriedades matemáticas subjacentes. Além disso, a análise abrange a teoria dos colorimentos, ressaltando a importância das técnicas combinatórias na resolução de problemas relacionados à coloração de grafos. A interconexão entre paridade, argumentos combinatórios, contagens duplas, invariantes e colorimento é explorada para demonstrar a aplicabilidade desses conceitos em uma variedade de situações matemáticas, revelando as relações intrínsecas entre essas áreas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Resolução de problemas, Técnicas de demonstração, ensino de Matemática.

# Abstract

The aim of this work is to address techniques for solving unusual problems in various contexts, exploring their application in combinatorial arguments and double counting for elementary school students. By examining different situations, methods of counting involving invariants are highlighted, providing a deeper understanding of the underlying mathematical properties. Additionally, the analysis covers the theory of graph coloring, emphasizing the importance of combinatorial techniques in solving problems related to graph coloring. The interconnection between parity, combinatorial arguments, double counting, invariants, and coloring is explored to demonstrate the applicability of these concepts in a variety of mathematical situations, revealing the intrinsic relationships between these areas.

**KEYWORDS :** Problem-solving, Proof techniques, Teaching Mathematics.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Um convite à resolução de problemas</b>	<b>10</b>
1.1	Introdução . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Paridade</b>	<b>13</b>
2.1	Introdução . . . . .	13
2.1.1	Alguns exemplos envolvendo paridade . . . . .	17
2.1.2	Alguns exemplos propostos envolvendo paridade . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Argumentos combinatórios</b>	<b>25</b>
3.1	Introdução . . . . .	25
3.2	Argumento Combinatório . . . . .	25
3.3	Princípio Fundamental da Contagem (ou Multiplicativo) . . . . .	26
3.4	Permutações . . . . .	26
3.5	Combinações . . . . .	27
3.6	Argumentos combinatórios . . . . .	28
3.6.1	Aplicações prática . . . . .	28
3.6.2	Identidades envolvendo números combinatórios . . . . .	30
3.6.3	Se contar é inteiro! . . . . .	37
3.7	Contagem Dupla . . . . .	41
3.7.1	Estrutura básica da contagem dupla: . . . . .	41
3.8	Alguns problemas propostos (Argumentos combinatórios) . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Invariantes</b>	<b>48</b>
4.1	Introdução . . . . .	48
4.2	Integração de técnicas . . . . .	50

---

4.3	Procurando (e encontrando) invariantes . . . . .	50
4.4	Alguns problemas propostos sobre invariantes . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Colorações, pintando é que se descobre!</b>	<b>60</b>
5.1	Introdução . . . . .	60
5.2	Colorimento de Grafos . . . . .	64
5.3	Alguns problemas propostos sobre coloração . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Proposta de ensino</b>	<b>74</b>
6.1	Proposta de ensino . . . . .	74
6.2	Conclusão . . . . .	77
6.3	Sugestões para pesquisas futuras . . . . .	79
6.4	Considerações finais . . . . .	81

# Capítulo 1

## Um convite à resolução de problemas

### 1.1 Introdução

No vasto universo da Matemática, a resolução de problemas desempenha um papel fundamental. Desde tempos imemoriais, matemáticos notáveis têm encarado desafios complexos com tenacidade e criatividade, revelando não apenas soluções para questões específicas, mas também os intrincados padrões subjacentes que governam o mundo ao nosso redor. Como o renomado matemático húngaro George Pólya afirmou, “Resolver problemas é uma parte essencial da formação de um matemático”. Esta afirmação ecoa ao longo da história, desde os antigos sábios até os visionários contemporâneos.

Quando nos deparamos com um problema matemático, somos convidados a uma jornada de descoberta, onde cada passo nos aproxima não apenas da resposta, mas também, do entendimento profundo dos princípios subjacentes. O matemático e filósofo francês René Descartes ressaltou essa ideia ao dizer: “A leitura de todos os bons livros é como uma conversa com os melhores espíritos dos séculos passados”. Da mesma forma, ao resolver problemas matemáticos, nos envolvemos em um diálogo com as mentes brilhantes que moldaram a disciplina ao longo dos séculos.

A resolução de problemas é uma atividade essencial em Matemática, pois permite aos estudantes e pesquisadores aplicarem seus conhecimentos teóricos na solução de questões de Matemática Pura e Aplicada. Além disso, a capacidade de resolver problemas matemáticos está intrinsecamente ligada ao desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade e da habilidade de comunicação matemática. Logo, para se

tornar bom na resolução de problemas é preciso praticar!

Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esqui ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. [...] se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom “resolvedor de problemas” tem que resolver problemas. (POLYA, 1978 [27], p. 65)

Os grandes matemáticos da história, como Euclides, Arquimedes, Euler e muitos outros, deixaram um legado duradouro não apenas por suas descobertas, mas pela abordagem metódica e tenaz que aplicaram à resolução de problemas. Como dizia Leonhard Euler, “Os números governam o universo”, e é através da resolução de problemas que desvendamos os segredos numéricos que moldam nossa realidade.

A resolução de problemas matemáticos é uma habilidade central no desenvolvimento do pensamento lógico e crítico. Dentre as inúmeras abordagens utilizadas para solucionar problemas, destacam-se as técnicas não usuais, que vão além das fórmulas e algoritmos tradicionais, oferecendo novas perspectivas e estratégias inovadoras. Entre essas técnicas, a paridade, os argumentos combinatórios, a contagem dupla, a invariância e o colorimento se destacam pela capacidade de desenvolver habilidades críticas e analíticas nos alunos, prepará-los para enfrentar problemas complexos e melhorar o raciocínio lógico.

Essas técnicas combinatórias têm raízes profundas na história da matemática, com suas origens ligadas ao estudo de problemas de contagem e organização que remontam à antiguidade. No entanto, foi ao longo do século XX que essas abordagens se consolidaram e ganharam destaque, impulsionadas pelo desenvolvimento da Teoria dos Grafos e da combinatória moderna. A Paridade, por exemplo, é um conceito simples que tem aplicações em problemas que envolvem a contagem de elementos com determinadas propriedades, enquanto a Contagem Dupla e a Invariância são fundamentais na resolução de problemas em que se requer o entendimento de simetrias ou estruturas imutáveis. A Teoria dos Grafos, amplamente associada ao Colorimento, desempenhou um papel crucial no desenvolvimento dessas ideias, especialmente na resolução de problemas como o Teorema das Quatro Cores e questões de otimização. No ensino moderno, essas técnicas são essenciais para o desenvolvimento do pensamento crítico e da capacidade de resolução de problemas, preparando os alunos para

enfrentarem questões complexas tanto na matemática pura quanto em suas aplicações em ciência da computação, economia e outras áreas.

No ensino de técnicas de resolução de problemas matemáticos, cada abordagem tem objetivos específicos a serem alcançados. Com Paridade, busca-se desenvolver no aluno a habilidade de identificar propriedades relacionadas a números pares e ímpares, aplicando esse conceito em problemas que envolvem divisibilidade e estrutura numérica. O uso de Argumentos Combinatórios visa aprimorar a capacidade de organizar e contar objetos de forma eficiente, estimulando o raciocínio lógico para encontrar soluções através da enumeração sistemática. Já a Contagem Dupla tem como objetivo ensinar os alunos a resolver problemas por meio de duas perspectivas diferentes de contagem, promovendo a flexibilidade no raciocínio. A técnica de Invariância incentiva os alunos a identificar propriedades que permanecem constantes em um sistema em transformação, aprimorando sua capacidade de analisar a evolução de um problema. Por fim, o uso de Colorimento no ensino visa a construção de um raciocínio visual e estratégico, onde o aluno aprende a agrupar ou distinguir elementos de um conjunto com base em padrões de cores, aplicando isso em problemas de Combinatória e Teoria dos Grafos.

Nesse contexto, apresentamos uma reflexão sobre a resolução de problemas. No capítulo 2 falaremos sobre o estudo da Paridade e sua importância na compreensão de padrões regulares em sequências numéricas. No capítulo 3 nos debruçaremos no Argumento Combinatório e a Contagem Dupla que são ferramentas poderosas na resolução de problemas de contagem. O capítulo 4 será palco para os Invariantes, que são ferramentas valiosas para demonstrar resultados matemáticos, oferecendo uma abordagem elegante e concisa na resolução de problemas de diversas naturezas. No capítulo 5 exploraremos o estudo do Colorimento, que estimula o raciocínio lógico, tem aplicações em grafos e Teoria dos Números. Por fim, no 6º e último capítulo, será apresentada uma proposta de ensino desses conteúdos para jovens estudantes que nunca tiveram contato anterior com os temas acima listados. Assim, o ensino desses conceitos não apenas amplia o repertório matemático dos estudantes, mas também, os prepara para desafios intelectuais e aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento.

# Capítulo 2

## Paridade

### 2.1 Introdução

Com a intenção de motivar as ideias que desenvolveremos neste capítulo iniciaremos com a seguinte questão:

**Questão 1.** *Existem números naturais ímpares  $a, b, c, d, e$  tais que*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1?$$

A questão acima, se tratada com ferramentas inadequadas pode ser bem difícil de responder. Neste capítulo, vamos mostrar como o fato de qualquer número inteiro ser par ou ímpar pode mostrar-se como uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas de diversos ramos da Matemática, como, por exemplo, o problema acima.

O desenvolvimento das ideias tratadas neste capítulo será totalmente baseado num fato simples e claro, a saber: **todo número inteiro é par ou é ímpar**. Ao longo deste capítulo vamos mostrar como este fato tão trivial pode ser utilizado como uma ferramenta poderosa para resolver problemas bem diversos. Como de costume na literatura usual, representaremos por  $\mathbb{Z}$  o conjunto dos números inteiros. Em  $\mathbb{Z}$  funciona o chamado **Algoritmo da divisão de Euclides**, segundo o qual dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , existem (únicos)  $q, r \in \mathbb{Z}$  tais que  $a = q \cdot b + r$  e  $0 \leq r < |b|$  (os inteiros  $q$  e  $r$  chamam-se, **o quociente** e **o resto** da divisão de  $a$  por  $b$ ). Em particular tomando  $b = 2$ , todo inteiro  $a$  admite uma das seguintes representações:

$$a = 2q, \text{ com } q \in \mathbb{Z} \text{ ou } a = 2q' + 1, \text{ com } q' \in \mathbb{Z}$$

No primeiro caso, diz-se que o inteiro  $a$  é **par**, já no segundo, diz-se que  $a$  é **ímpar**. Logo, a paridade é a propriedade de um número inteiro ser par ou ímpar.

Um dos pontos mais notáveis da paridade é sua capacidade de simplificar a análise de problemas, fornecendo uma ferramenta poderosa para argumentação matemática. Em muitos casos, a determinação da paridade de uma quantidade ou de uma soma pode ser suficiente para provar teoremas ou encontrar contraexemplos. Na teoria dos números, por exemplo, a paridade é usada para estudar a estrutura dos números inteiros, facilitando a busca de propriedades como a primalidade e as sequências numéricas.

Além disso, a paridade é amplamente utilizada em argumentos combinatórios, onde constantemente se explora a paridade de conjuntos ou somas de elementos para estabelecer resultados importantes. Na teoria dos grafos, a paridade é utilizada na análise de ciclos e caminhos, realizando um papel crucial na caracterização de grafos bipartidos e em problemas de colorimento.

Por fim, o conceito de paridade é fundamental para a construção de invariantes matemáticos, que são ferramentas que permanecem constantes sob certas transformações, permitindo a resolução de problemas por meio da identificação de propriedade constantes. A paridade de um conjunto ou de uma sequência muitas vezes serve como um invariante poderoso em diversos contextos, desde jogos matemáticos até problemas de otimização.

Assim, a paridade não é apenas uma simples classificação de números inteiros, no entanto, um conceito profundo e versátil que permeia grande parte da matemática. Sua aplicação vai além da aritmética básica, estendendo-se a várias áreas da matemática pura e aplicada, tornando-se uma ferramenta indispensável para a resolução de problemas difíceis e a formulação de teorias matemáticas avançadas.

**Teorema 1.** *Com relação à paridade de números inteiros, são verdadeiras as seguintes proposições:*

(a) *A soma (ou a diferença) de dois inteiros pares é sempre par, ou seja,*

$$\text{par} + \text{par} = \text{par}, \quad \text{par} - \text{par} = \text{par}.$$

*Como consequência a soma de qualquer quantidade finita de números pares é sempre par.*

(b) *A soma (ou a diferença) de dois inteiros ímpares é sempre par, ou seja,*

$$\text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{par}, \quad \text{ímpar} - \text{ímpar} = \text{par}.$$

*Em particular, a soma de uma quantidade par de inteiros ímpares é sempre par.*

(c) *A soma (ou a diferença) de um inteiro par com um inteiro ímpar é sempre ímpar, ou seja,*

$$\text{par} + \text{ímpar} = \text{ímpar}, \quad \text{par} - \text{ímpar} = \text{ímpar}.$$

*Em particular, a soma de uma quantidade ímpar de inteiros ímpares é sempre ímpar.*

(d) *O produto de dois números inteiros, onde um deles é par, será sempre par, ou seja,*

$$\text{par} \cdot (\text{qualquer número inteiro}) = \text{par}.$$

(e) *O produto de dois números inteiros ímpares será sempre ímpar, ou seja,*

$$\text{ímpar} \cdot \text{ímpar} = \text{ímpar}.$$

### **Demonstração:**

(a) De fato, se  $a, b \in \mathbb{Z}$  são inteiros pares, segue que  $a = 2q$  com  $q \in \mathbb{Z}$  e  $b = 2q'$  com  $q' \in \mathbb{Z}$ . Nesse caso,

$$a \pm b = 2q \pm 2q' = 2(q \pm q') = 2q'', \text{ com } q'' \in \mathbb{Z},$$

o que revela que  $a \pm b$  é par. É evidente que essa mesma propriedade ocorre para qualquer quantidade finita de parcelas, noutras palavras, a soma ou a diferença de qualquer quantidade finita de números pares é sempre par.

- (b) Seja  $x, y \in \mathbb{Z}$  inteiros ímpares, segue que  $x = 2k + 1$  com  $k \in \mathbb{Z}$  e  $y = 2k' + 1$  com  $k' \in \mathbb{Z}$ . Logo,

$$x \pm y = 2k + 1 \pm 2k' + 1 = 2(k \pm k' + 1) = 2k'', \text{ com } k'' \in \mathbb{Z},$$

Portanto,  $x \pm y$  é par. Essa mesma propriedade é válida para qualquer quantidade finita de parcelas pares. Logo, a soma ou diferença de qualquer quantidade finita de números ímpares com parcelas em quantidade pares é sempre par.

- (c) Sabendo que, se  $c, d \in \mathbb{Z}$  são inteiros par e ímpar respectivamente, segue que  $c = 2q$  com  $q \in \mathbb{Z}$  e  $d = 2q' + 1$  com  $q' \in \mathbb{Z}$ . Sendo assim,

$$c \pm d = 2q + 1 \pm 2q' = 2(q \pm q') + 1 = 2q'' + 1, \text{ com } q'' \in \mathbb{Z},$$

Como queríamos demonstrar,  $c \pm d$  é ímpar.

- (d) De fato, se  $a \in \mathbb{Z}$  é inteiro par e  $b \in \mathbb{Z}$ , segue que  $a = 2q$  com  $q \in \mathbb{Z}$  e  $b = q'$  com  $q' \in \mathbb{Z}$ . Nesse caso,

$$a \cdot b = 2q \cdot q' = 2(q \cdot q') = 2qq'.$$

O que mostra que o produto de um número inteiro par por qualquer inteiro será sempre par.

- (e) De fato, se  $e, f \in \mathbb{Z}$  são inteiros ímpares, sendo que  $e = 2k + 1$  com  $k \in \mathbb{Z}$  e  $f = 2k' + 1$  com  $k' \in \mathbb{Z}$ . Logo,

$$e \cdot f = (2k + 1) \cdot (2k' + 1) = 2(2kk' + k + k') + 1 = 2z + 1.$$

Portanto, o produto de quaisquer dois números inteiros ímpares será ímpar.

Um vez que estão estabelecidas as ideias básicas sobre paridade, vamos mostrar, através de uma série de exemplos interessantes, que a paridade é, de fato, uma ferramenta de grande utilidade na resolução de problemas matemáticos que envolvem números inteiros. Para iniciar, reponderemos a questão que abriu no início deste capítulo.

**Exemplo 1.** *Existem números naturais ímpares  $a, b, c, d, e$  e  $f$  tais que*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1?$$

**Solução:** Não existem tais inteiros  $a, b, c, d, e$  e  $f$  tais que  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$ . De fato, suponha, por absurdo, que tais inteiros  $a, b, c, d, e$  e  $f$  existem. Nesse caso,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{bcdef + acdef + abdef + abcef + abcdf + abcde}{abcdef} = 1 \Leftrightarrow$$

$$bcdef + acdef + abdef + abcef + abcdf + abcde = abcdef$$

Ora, como os inteiros  $a, b, c, d, e$  e  $f$  são ímpares, segue que cada uma das parcelas do primeiro membro é ímpar, o que nos permite concluir que a soma das 6 parcelas do primeiro membro é par (soma de uma quantidade par de números ímpares). Já o segundo membro,  $abcdef$  é um número ímpar, o que nos leva a uma contradição! Diante do exposto, concluímos que não existem tais inteiros  $a, b, c, d, e$  e  $f$  tais que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1.$$

### 2.1.1 Alguns exemplos envolvendo paridade

Nesta seção mostraremos outros problemas envolvendo Paridade na sua discussão que, apesar de simples, são motivadores.

**Exemplo 2.** Determine  $x, y$  e  $z$  primos tais que  $2x + 4y + 5z = 202$ .

**Solução:** Ora, como  $x, y$  e  $z$  são números primos, em particular são inteiros. Diante disso,  $2x$  e  $4y$  são pares, o que nos permite concluir que a soma  $2x + 4y$  é par. Ora, como 202 é par, segue que  $5z$  tem que ser necessariamente par. Mas 5 é ímpar, o que obriga que  $z$  seja par. Por outro lado,  $z$  é primo. Por fim, como o único primo par é o 2, segue que  $z = 2$ . Substituindo  $z$  por 2 na equação original, obtemos:

$$2x + 4y + 5 \cdot 2 = 202 \Rightarrow 2x + 4y = 192 \Rightarrow x + 2y = 96.$$

Ora, como  $2y$  é par, segue que  $x$  tem que ser par, pois  $x = 96 - 2y$  (é uma diferença de dois números pares!). Como  $x$  é primo e, como já relembramos, o único primo par é o 2, concluímos que  $x = 2$ . Por fim, voltando à equação  $x + 2y = 96$ . Segue que

$$2 + 2y = 96 \Rightarrow 2y = 94 \Rightarrow y = 47,$$

mostrando que a única solução da equação  $2x + 4y + 5z = 202$ , com  $x, y$  e  $z$  primos é  $x = 2, y = 47$  e  $z = 2$ .

**Exemplo 3.** *Imagine uma sala cheia de pessoas, onde cada pessoa dá a mão a exatamente uma outra pessoa. O problema é determinar se é possível que o número total de apertos de mão seja ímpar.*

**Solução:** Se cada aperto de mão envolve duas pessoas, o número total de apertos será sempre par, independentemente de quantas pessoas estejam na sala. Isso ocorre porque dois indivíduos estão envolvidos em cada aperto, e como dois é um número par, o total de apertos de mão também será par. Assim, é impossível que o número total seja ímpar.

**Exemplo 4.** *Escrevemos abaixo os números naturais de 1 a 10.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10.

*Antes de cada um deles, coloque sinais + (positivo) ou - (negativo) de forma que a soma de todos seja zero.*

**Solução:** Não é possível. Para que a soma seja zero, devemos escolher os sinais de modo que a soma final seja reduzida a uma soma parcial da forma  $a + (-a)$ , já que  $a + (-a) = 0$ . Para isso, é necessário separar os números em questão em dois grupos que tenham a mesma soma e, então, colocar sinais + na frente dos números de um grupo e sinais - na frente dos números do outro grupo. No entanto isso não é possível, pois

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

e 55 é ímpar.

De uma forma mais rápida, no entanto mais sutil, podemos observar que, escolhidos os sinais, a paridade da soma final dos números é a paridade da quantidade de parcelas ímpares que serão somadas. Como a paridade independe do sinal que foi colocado na frente dos números, a paridade da soma é ímpar, pois temos cinco ímpares: 1, 3, 5, 7, 9. Assim, não é possível obter zero como resultado, já que zero é par!

**Exemplo 5.** *Um cavalo de xadrez parte de um quadrado branco em um tabuleiro de xadrez e faz vários movimentos válidos de cavalo. Ele pode terminar em um quadrado preto após um número ímpar de movimentos?*

**Solução:** Vamos analisar a questão usando a paridade.

1. Um cavalo de xadrez, em cada movimento, pula para um quadrado de cor diferente. Se o cavalo começar em um quadrado branco, o primeiro movimento o levará a um quadrado preto, o segundo movimento o levará de volta a um quadrado branco, e assim por diante.

2. Portanto, após um número par de movimentos, o cavalo estará na mesma cor de quadrado em que começou (branco). Após um número ímpar de movimentos, ele estará em um quadrado da cor oposta (preto).

Conclusão: Se o cavalo começou em um quadrado branco, ele pode terminar em um quadrado preto se fizer um número ímpar de movimentos.

**Exemplo 6.** *Em um quartel existem 100 soldados e, todas as noites, três desses soldados são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que, após certo tempo, um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?*

**Solução:** Não é possível. Fixemos um dos soldados; soldado S. Em cada noite em que trabalha, esse soldado terá a companhia de dois outros; Como  $99 = 2 \cdot 49 + 1$ , os demais 99 soldados (diferentes do soldado S) do quartel poderão formar 49 grupos de dois soldados, e sobrá 1. Assim, em 49 noites, o soldado S poderá ficar de sentinela com dois companheiros sempre diferentes, mas, na noite número 50, o único soldado que sobrou vai ter que se juntar a outro que já fez sentinela com o soldado S.

De uma outra forma, para cada noite em que trabalhe, o soldado S deverá ter a companhia de dois soldados diferentes. Assim, será necessário agruparmos os demais soldados de 2 em 2 para definirmos as escalas do soldado S, ou seja, necessitaremos de um número par de soldados. Mas, além do soldado S, há um número ímpar de soldados no quartel: 99.

**Exemplo 7.** *Pedro comprou um caderno com 96 folhas, com páginas numeradas de 1 a 192, em ordem crescente. Vitor arrancou aleatoriamente 25 folhas do caderno e*

somou todos os 50 números de página destas folhas. É possível que essa soma seja 1990?

**Solução:** Mais uma vez, temos uma situação não possível. Com efeito, como as páginas foram numeradas em ordem crescente, então as páginas de uma folha qualquer do caderno foram numeradas com números naturais consecutivos. Pela paridade da soma, observamos que a soma de dois números de paridade oposta é ímpar; a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é um número ímpar. Devido a essa última afirmação, a soma em questão não pode ser 1990, já que este é um número par!

**Exemplo 8.** *Existem números inteiros  $a$  e  $b$  que satisfazem a igualdade*

$$a \cdot b \cdot (a - b) = 8507?$$

**Solução:** Não existem tais números. De fato, considere as quatro possibilidades de paridade para  $a$  e  $b$ :

- (a)  $a$  é par e  $b$  é par.
- (b)  $a$  é ímpar e  $b$  é ímpar.
- (c)  $a$  é par e  $b$  é ímpar.
- (d)  $a$  é ímpar e  $b$  é par.

Em qualquer um dos casos descritos, o produto  $a \cdot b \cdot (a - b)$  é par, pois sempre apresenta um fator par. Portanto não pode ocorrer a igualdade  $a \cdot b \cdot (a - b) = 8507$ , visto que 8507 é ímpar.

**Exemplo 9.** *De quantas maneiras poderemos escrever 103 como a soma de dois números naturais  $a$  e  $b$  primos?*

**Solução:** Suponhamos que existam naturais  $a$  e  $b$  tais que  $a < b$  e  $a + b = 103$ . Observando a propriedade da soma da paridade, podemos afirmar que  $a$  e  $b$  têm paridade oposta, já que 103 é ímpar mas, o único natural primo que é par é o número 2, assim  $a = 2$  ou  $b = 2$ .

Suponha, sem perda de generalidade, que  $a = 2$ ; Assim  $b = 103 - 2 = 101$ . Ao consultar uma tabela que contenha os primeiros primos naturais, comprovamos que 101 é um número primo. Portanto, ao menos da ordem das parcelas, existe uma única maneira de se escrever 103 como soma de dois primos naturais:  $103 = 2 + 101$ .

**Exemplo 10.** *Um fazendeiro deseja abater 30 porcos em 5 dias de modo que em cada dia sejam abatidos somente um número ímpar de porcos. Caso isso seja possível, determine como. Caso seja impossível, explique o motivo.*

**Solução:** A soma de cinco números ímpares quaisquer tem a mesma paridade que o 5, ou seja, é ímpar. Logo, é impossível que sejam abatidos 30 porcos nestas condições, já que 30 é um número par.

O estudo da paridade vai além da identificação de números pares e ímpares. Ele desenvolve o raciocínio lógico dos alunos, capacitando-os a resolver uma variedade de problemas matemáticos de maneira eficaz. Ao incorporar atividades práticas e desafios em sala de aula, os educadores podem promover uma compreensão mais profunda desse conceito essencial e abrir portas para a resolução de uma gama de problemas cuja solução torna-se bastante elegante e simplificada com o uso da ideia de paridade.

### 2.1.2 Alguns exemplos propostos envolvendo paridade

A lista de problemas a seguir é uma pequena seleção de uma imensa vastidão de fontes sobre o assunto. Entre as várias referências, destacamos [15] como uma excelente fonte para um estudo posterior do assunto. O livro [34], também é uma excelente fonte de ideias e novos problemas. Acreditamos que os problemas que listamos a seguir podem servir de uma primeira fonte que complementam e estendem os exemplos que resolvemos acima e que portanto podem ser utilizados por leitores que queiram aprofundar-se um pouco mais ou até mesmo ensinar o assunto, fazendo escolhas de acordo com o nível da sua turma e a disponibilidade de tempo.

**Problema 1.** *Um número diz-se superímpar se o produto dos seus algarismos for um número ímpar. Quantos são os números superímpares com três algarismos? E com 5000 algarismos?*

**Rep.** 125 e  $5^{5000}$ .

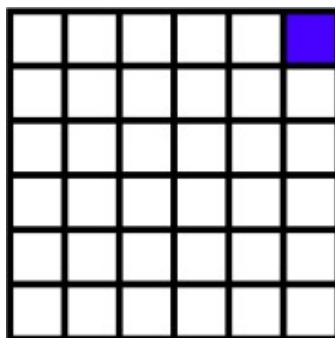
**Problema 2** ([15]). *Um gafanhoto pula ao longo de uma linha. No seu 1º pulo, ele anda 1cm, ou para a direita ou para a esquerda. No 2º pulo, ele anda 2cm, no 3º pulo 3cm, e assim por diante. Cada pulo o leva para a direita ou para a esquerda. Após 100 pulos, o gafanhoto pode retornar à sua posição inicial?*

**Rep.** Não.

**Problema 3** ([15]). *5 engrenagens estão colocadas abaixo. Todas as engrenagens podem rodar ao mesmo tempo? Justifique!*

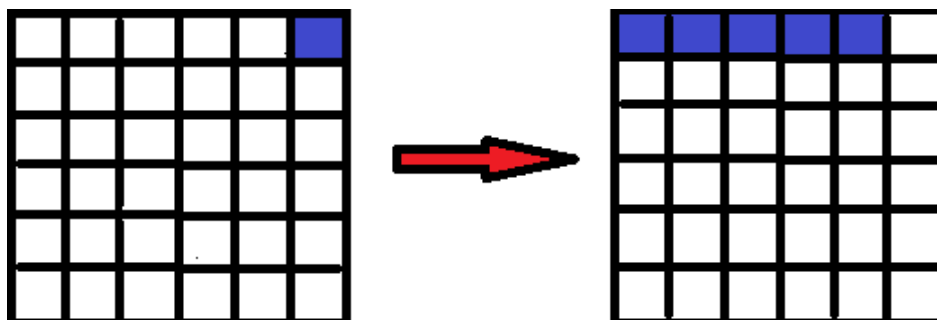


**Problema 4** ([15]). *Num tabuleiro  $6 \times 6$  o quadradinho do canto superior direito está inicialmente pintado e todos os demais quadradinhos do tabuleiro estão em branco, conforme ilustra a figura abaixo:*



*Considere que você possa efetuar, no referido tabuleiro, a seguinte operação (quantas vezes você desejar): escolha ao acaso uma linha ou uma coluna do tabuleiro e troque*

as cores de cada um dos quadradinhos da linha ou coluna escolhida. Por exemplo, se, no tabuleiro original, escolhermos a primeira linha, o seu único quadradinho que estava azul será pintado de branco e os demais quadradinhos, que estavam brancos, serão pintados de azul, conforme ilustra a figura abaixo:



Repetindo essa operação, quantas vezes você quiser, é possível que em algum momento todos os quadradinhos do tabuleiro sejam todos pintados de azul? Justifique!

**Problema 5.** John e Peter têm três pedaços de papel. Cada um dos meninos escolhe um pedaço, rasga-o e coloca os pedaços menores de volta. John apenas rasga um pedaço de papel em 3 pedaços menores enquanto Peter apenas rasga um pedaço de papel em 5 pedaços menores. Depois de alguns minutos, pode haver exatamente 100 peças de papel?

**Res.** Não.

**Problema 6.** Suponha que  $a, b$  e  $c$  sejam números inteiros tais que a equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  possua uma raiz racional. Prove que pelo menos um dos inteiros  $a, b$  e  $c$  é par.

**Problema 7** ([15]). Num campeonato de futebol há 13 times. É possível que ao longo desse campeonato, cada time jogue exatamente 9 vezes?

**Res.** Não.

**Problema 8** (China). Dado um número inteiro positivo  $n$ , determine o número de maneiras de expressá-lo como a soma de quatro números quadrados, de tal forma que a paridade de cada termo da soma é preservada (todos pares ou todos ímpares).

**Problema 9.** Prove que, em qualquer sequência de  $n$  números inteiros, onde  $n$  é maior que  $2k$ , sempre há uma subsequência de  $k$  inteiros cuja soma é divisível por  $k$ .

**Problema 10 (USA).** *Seja  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  uma sequência de  $2n$  inteiros positivos. Prove que sempre é possível dividir essa sequência em dois grupos de  $n$  números cada, tais que a soma dos números em cada grupo é par.*

**Problema 11 (OBM).** *Se  $n$  é um número inteiro positivo e  $a_1, a_2, \dots, a_n$  é uma sequência de  $n$  inteiros, mostre que, se a soma dos elementos da sequência é ímpar, então o número de elementos ímpares na sequência deve ser ímpar.*

**Problema 12 (IMO-Shortlist).** *Prove que, para qualquer número inteiro positivo  $n$ , o número de subconjuntos da coleção  $\{1, 2, \dots, n\}$  que têm uma soma par é igual ao número de subconjuntos cuja soma de seus elementos é ímpar.*

# Capítulo 3

## Argumentos combinatórios

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, introduziremos as ideias centrais sobre dois métodos muito interessantes e poderosos para resolver certos problemas, a saber: Argumentos Combinatórios e Contagem Dupla. Ambos são ferramentas fundamentais em combinatória, usadas para provar identidades matemáticas e resolver problemas de contagem.

A Combinatória é um ramo da Matemática que lida com a contagem e a organização de certas configurações de elementos em conjuntos finitos. Neste capítulo, vamos mostrar dentro desse campo do conhecimento como o Argumento Combinatório e a técnica de Contagem Dupla mostram-se ferramentas poderosas usadas para resolver uma enorme variedade de problemas.

### 3.2 Argumento Combinatório

O Argumento Combinatório é uma abordagem fundamental na Matemática Discreta, que utiliza raciocínio lógico e princípios de contagem para resolver problemas. Ainda segundo (Kenneth H. Rosen, [32], página 254), “O princípio básico de um argumento combinatório é que podemos contar o número de elementos de um conjunto de duas maneiras diferentes, e a igualdade dessas contagens pode fornecer informações valiosas.”

Antes de apresentarmos a técnica utilizada nas demonstrações por Argumento Combinatório, além do conhecido *Princípio Multiplicativo*, vamos fazer um breve

lembrete sobre as técnicas básicas de contagem, combinações e permutações. Essas operações são essenciais para entender como os elementos de um conjunto podem ser organizados ou escolhidos de diferentes maneiras.

### 3.3 Princípio Fundamental da Contagem (ou Multiplicativo)

Se um experimento é realizado em  $k$  etapas independentes, i.e., o resultado de cada etapa não depende das demais, com  $n_i$  possibilidades para a  $i$ -ésima etapa, então o total de possibilidades de o experimento ser realizado é  $n_1 n_2 \dots n_k$ .

A partir do Princípio Fundamental da Contagem são definidas outras quantidades que comumente ocorrem em problemas combinatórios, tais como Combinações, Arranjos e Permutações.

### 3.4 Permutações

Uma *Permutação* é uma ordenação dos elementos de um conjunto finito. Se tivermos  $n$  objetos distintos, o número de maneiras de arranjá-los em uma ordem específica é dado por  $P_n = n!$  (lê-se “n fatorial”). Por exemplo, se tivermos 3 objetos distintos A, B e C, as permutações possíveis são ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA, totalizando  $3! = 6$  permutações.

Já as Permutações com repetição referem-se ao número de maneiras de organizar um conjunto de itens onde alguns deles podem ser idênticos. É uma extensão das permutações simples na qual a ordem dos itens é importante, mas a repetição de certos itens é permitida.

Dado um conjunto com  $n$  itens onde alguns deles podem se repetir, o número total de permutações é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

onde:

- $n$  é o número total de itens.

- $n_1, n_2, \dots, n_k$  são as quantidades dos itens distintos que se repetem.

Por exemplo, na palavra *MAAM*. Nesta palavra, temos 4 letras no total: 2 letras *M* e 2 letras *A*. O número total de permutações distintas é calculado como:

$$P(4; 2, 2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

As permutações distintas são: *MAAM*, *MAMA*, *AMAM*, *AMMA*, *MAMA*, *MAAM*.

### 3.5 Combinações

Uma *combinação simples* é uma seleção não ordenada de objetos. Se tivermos  $n$  objetos distintos e queremos escolher  $k$  deles (de um conjunto de  $n$  elementos distintos, queremos escolher um subconjunto com  $k$  deles), o número de maneiras de fazer isso é

$$C(n, k) \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

conhecido como “ $n$  escolhe  $k$ ”. Por exemplo, se tivermos 5 objetos distintos e quisermos escolher 3 deles sem considerar qualquer ordenação, teremos  $\binom{5}{3} = 10$  combinações possíveis.

Assim como no caso das Permutações, aqui também há a possibilidade de termos elementos repetidos, ou seja, podemos fazer *combinações com repetição* que correspondem a selecionar itens de um conjunto onde a ordem não importa e os itens podem ser repetidos. Esse conceito é utilizado em diversas áreas da Matemática e em problemas de contagem onde as repetições são permitidas.

Dado um conjunto de  $n$  tipos diferentes de itens onde queremos escolher  $r$  itens com repetição permitida, o número de combinações é dado por:

$$CR(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$$

onde:

- $n$  é o número de tipos diferentes de itens.

- $r$  é o número total de itens a serem escolhidos.

CR responde de quantas formas possíveis podemos distribuir  $r$  itens em  $n$  categorias (ou “caixas”), permitindo que algumas caixas possam estar vazias.

Por exemplo, se quisermos escolher 3 bolas de uma caixa contendo 5 cores diferentes de bolas. Aqui,  $n = 5$  e  $r = 3$ . O número de maneiras de escolher essas bolas com repetição é dado por:

$$CR(5, 3) = \binom{5 + 3 - 1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Assim, há 35 maneiras diferentes de escolher 3 bolas das 5 cores disponíveis, onde a ordem das bolas não importa e as cores podem se repetir.

Combinações com repetição são amplamente utilizadas em problemas de contagem que envolvem a seleção de itens, onde a ordem não importa e as repetições são permitidas. Exemplos incluem problemas de distribuição de itens em categorias, planejamento de refeições com opções repetidas, e outros cenários em que a variedade e a frequência de seleção são relevantes.

## 3.6 Argumentos combinatórios

Como o próprio nome sugere um *argumento combinatório* consiste em usar técnicas de contagem para estabelecer a veracidade de certas identidades algébricas existentes entre expressões que geralmente envolvem números combinatórios e fatoriais. Normalmente isso é feito através de uma *contagem dupla*, isto é, contamos o número de um determinado tipo de configuração de duas formas distintas, que evidentemente devem produzir uma igualdade ao final.

### 3.6.1 Aplicações prática

A técnica de argumento combinatório é amplamente aplicada em várias áreas além da matemática pura, como na ciência da computação e na economia. Aqui estão alguns exemplos práticos dessas aplicações:

#### 1. Ciência da Computação: Algoritmos e Complexidade

Na ciência da computação, os argumentos combinatórios são frequentemente usados em análise de algoritmos e na teoria da complexidade para contar o número de estados ou operações que um algoritmo pode executar. Um exemplo clássico é o uso da combinatória para analisar a complexidade de algoritmos de busca em grafos ou de algoritmos de ordenação.

Exemplo: Algoritmo de Busca de Conjuntos Independentes em um Grafo

Em um grafo, um conjunto independente é um conjunto de vértices onde nenhum vértice está conectado por uma aresta. O problema de encontrar o maior conjunto independente pode ser resolvido usando métodos combinatórios para contar diferentes maneiras de formar subconjuntos de vértices e verificar a independência, explorando variações e combinações das arestas.

### **2. Economia:** Teoria dos Jogos e Combinatória

Na economia, especialmente em teoria dos jogos, os argumentos combinatórios são usados para estudar como os participantes de um jogo podem distribuir suas estratégias ou recursos.

Exemplo: Teorema de Sperner (Aplicação em Mercados de Bens)

O Teorema de Sperner, um resultado da combinatória, pode ser aplicado à teoria de mercados. Ele descreve uma maneira de dividir um mercado de maneira eficiente e justa usando triangulações e partições de conjuntos. Isso é útil, por exemplo, na alocação de recursos ou divisão de bens em mercados ou leilões.

### **3. Vida Real:** Combinatória no Planejamento de Eventos

Uma aplicação cotidiana de argumentos combinatórios é no planejamento de eventos, como a organização de assentos ou a distribuição de recursos em uma festa ou reunião.

Exemplo: Planejamento de Assentos em um Jantar

Imagine que você precisa organizar os assentos para um jantar com 10 convidados em uma mesa retangular. O número de maneiras possíveis de dispor os convidados pode ser calculado usando princípios combinatórios. Além disso, se houver restrições, como algumas pessoas que devem ou não sentar juntas, o problema se torna uma aplicação de contagens condicionais e argumentos combinatórios para otimizar a disposição.

#### 4. Design de Redes: Telecomunicações e Internet

Os argumentos combinatórios são aplicados no design de redes de telecomunicações para contar combinações de conexões possíveis ou rotas em uma rede.

Exemplo: Redes de Distribuição de Dados

Ao projetar uma rede de distribuição de dados (como na internet), os engenheiros usam combinações para contar o número de possíveis rotas que os dados podem seguir de um servidor para outro. Por meio de argumentos combinatórios, é possível otimizar a rede garantindo redundância e minimizando falhas em caso de congestionamento ou falhas de rota.

Esses exemplos mostram como os argumentos combinatórios têm aplicações práticas em várias disciplinas e contextos do dia a dia, permitindo a resolução de problemas complexos de maneira lógica e eficiente.

### 3.6.2 Identidades envolvendo números combinatórios

Neste ponto, mostraremos como estabelecer uma gama de identidades algébricas que envolvem números combinatórios e o fatorial de um inteiro não negativo através de argumentos de contagem. A técnica consiste no que chamamos de *Contagem dupla*, ou seja, utilizar dois pontos de vista diferentes para determinar o número de certas configurações dos elementos de um conjunto finito, e a partir daí, chegar à identidade desejada. Vamos apresentar como essa ideia simples pode mostrar-se uma ferramenta útil que pode ser disponibilizada mesmo ao nível da escola básica.

A contagem dupla é uma técnica importante na Matemática Combinatória, que envolve contar um conjunto de objetos de duas maneiras diferentes, geralmente levando a uma expressão algébrica que pode ser simplificada para obter a resposta desejada. Segundo (Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik [16], página 102), “A contagem dupla é uma técnica poderosa que é frequentemente usada para provar identidades combinatórias, onde se demonstra que duas expressões aparentemente diferentes representam, na verdade, a mesma quantidade.”

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 11** (Número de subconjuntos). *Para cada inteiro  $n \geq 0$ , mostre que*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

**Solução:** Vamos determinar o número de subconjuntos. Considere um conjunto  $S$  com  $n$  elementos,  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Queremos determinar o número total de subconjuntos de  $S$ .

Cada subconjunto de  $S$  pode ser formado escolhendo para cada elemento de  $S$  se ele está ou não no subconjunto. Para cada elemento  $a_i$  de  $S$ , há duas possibilidades:

- O elemento  $a_i$  está no subconjunto.
- O elemento  $a_i$  não está no subconjunto.

Como há  $n$  elementos e cada elemento pode ser incluído ou não incluído de maneira independente, o número total de subconjuntos é dado pelo produto das escolhas para cada elemento. Portanto, o número total de subconjuntos é:

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n$$

Por outro lado o número total de subconjuntos de um conjunto finito com  $n$  elementos é

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

Portanto,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

**Exemplo 12** (Números binomiais complementares). *Para quaisquer inteiros não negativos  $n$  e  $k$ , com  $k \leq n$ , mostre que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .*

**Solução:** De fato, imagine que você tenha um conjunto de  $n$  pessoas distintas e, a partir desse conjunto, você deseje formar uma comissão com  $k \leq n$  pessoas distintas. De quantas formas essa comissão pode ser feita?

Vamos resolver esse problema de dois pontos de vista diferentes:

- Das  $n$  pessoas disponíveis, vamos escolher  $k$  (sem ordenação), isso pode ser feito de  $nk$  modos distintos.
- Das  $n$  pessoas disponíveis, não vamos escolher  $n - k$  (sem ordenação), isso pode ser feito de  $n(n - k)$  modos distintos.

Ora, como o fato de escolher  $k$  entre as  $n$  pessoas disponíveis é completamente equivalente de entre as  $n$  pessoas não escolhermos  $n - k$  pessoas, segue que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

**Exemplo 13.** Para quaisquer inteiros não negativos  $n$  e  $k$ , com  $k \leq n$ , mostre que

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

**Solução:** Considere o problema:

A diretoria de um grêmio estudantil é formada por  $k$  representantes, sendo um deles o presidente. Se a escola tem  $n$  estudantes e qualquer um deles pode fazer parte do grêmio estudantil, então, de quantos modos pode-se formar a diretoria do grêmio?

Com  $n$  estudantes, é possível formar  $C(n,k)$  comissões com  $k$  representantes. Isso pode ser realizado fazendo uma combinação de  $\binom{n}{k}$  modos. A partir dessas comissões, é necessário escolher um representante para assumir a função de presidente. Assim, esse fato pode ser feito tomando uma combinação de  $\binom{k}{1} = k$ . Pelo princípio multiplicativo, temos  $k \cdot \binom{n}{k}$ . Esse valor corresponde ao número de diretorias possíveis.

Uma outra maneira de pensar é a seguinte:

Dentre os  $n$  estudantes, escolhemos o presidente da comissão, que pode ser escolhido de  $n$  modos. Com isso, a diretoria pode ser completada com os  $k - 1$  membros restantes escolhidos dentre os  $n - 1$  estudantes. Pelo princípio multiplicativo, o número de diretorias para formar o grêmio estudantil é dado por  $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ . Esse valor também corresponde ao número de diretorias possíveis. Assim,  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ .

**Exemplo 14.** Para todo quaisquer inteiros não negativos  $n$  e  $k$ , com  $2 \leq k \leq n$ ,

mostre que

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

**Solução:** Considere o seguinte problema:

Os proprietários de uma fábrica de sapatos querem formar uma comissão para representá-la em uma feira de calçados que ocorrerá em uma cidade vizinha. De quantas maneiras eles podem formar uma comissão com  $k$  membros, dentre eles um diretor e um vice-diretor, escolhidos dentre os  $n$  funcionários?

Podemos resolvê-lo de duas formas distintas:

A comissão pode ser escolhida tomando uma combinação de  $\binom{n}{k}$  maneiras. Dentre os  $k$  membros escolhidos, se faz a escolha do diretor, o que ocorre fazendo uma combinação de  $\binom{k}{1} = k$ . Por fim, faz-se a escolha do vice-diretor, a partir dos  $k-1$  membros restantes, que será uma combinação de  $\binom{k-1}{1} = k-1$ . Aplicando o princípio multiplicativo, temos:  $k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k}$ .

ou seguindo o seguinte raciocínio:

Formando a comissão a partir da escolha do diretor e em seguida do vice-diretor, temos que, por definição de combinação, a escolha do diretor pode ser realizada fazendo uma combinação de  $\binom{n}{1} = n$  maneiras. Tomando os mesmos princípios, a escolha do vice-diretor pode ser realizada fazendo uma combinação de  $\binom{n-1}{1} = n-1$  maneiras. Contudo, ainda restam  $n-2$  funcionários para comporem a comissão, que será escolhida a partir da combinação de  $\binom{n-2}{k-2}$ . Aplicando o princípio multiplicativo, temos:  $n \cdot (n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2}$ . Portanto, Para todo quaisquer inteiros não negativos  $n$  e  $k$ , com  $2 \leq k \leq n$ , mostre que

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

**Exemplo 15.** Para todo inteiro  $n \geq 1$ , mostre que  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ .

**Solução:** Considere o seguinte problema:

Quantas são as comissões, de qualquer tamanho, com membros escolhidos de uma classe com  $n$  estudantes, sendo que um dos membros é designado como presidente?

Uma solução seria:

Por definição de combinação, há  $\binom{n}{k}$  modos de formar uma comissão contendo  $k$  estudantes. Formada a comissão, tem-se, também,  $k$  modos de escolher o presidente dessa comissão. Pelo princípio multiplicativo, temos então  $k \cdot \binom{n}{k}$  comissões distintas. Sabendo-se que as comissões podem ser de qualquer tamanho possível, temos, pelo princípio aditivo:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k}$$

Por outro lado, formando a comissão a partir da escolha do presidente, há, no entanto,  $n$  maneiras de escolher o presidente. Escolhido o presidente, a comissão será composta pelos escolhidos dentre os  $n - 1$  estudantes. Para tanto, cada estudante pode fazer parte ou não dessa comissão, o que gera duas possibilidades para cada um deles. Logo, é possível completar a comissão, independente do tamanho, com  $2^{n-1}$  número de escolhas possíveis. Pelo princípio multiplicativo temos, então:  $n \cdot 2^{n-1}$ , o que nos permite concluir que:

Para todo inteiro  $n \geq 1$ , mostre que  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ .

**Exemplo 16** (Fórmula de Lagrange). *Mostre que*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}. \quad (3.1)$$

**Solução:** Faremos a prova a partir de um argumento combinatório, para tanto, considere um grupo formado por  $n$  homens,  $n$  mulheres e que se queira formar uma comissão de  $n$  pessoas. O total de possibilidades é  $\binom{2n}{n}$ . Por outro lado, podemos particionar o conjunto das partições em relação ao total de homens e mulheres

presentes em cada uma delas e pelo princípio aditivo e multiplicativo, tem-se que o total de possibilidades é dado por

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} \binom{n}{1} + \binom{n}{n} \binom{n}{0} =$$

$$\binom{n}{0} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

**Exemplo 17** (O Binômio de Newton). *Se  $x$  e  $y$  são números reais e  $n$  é um inteiro não negativo, mostre que*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

**Solução:** Considere o seguinte problema:

A professora de Matemática de uma turma de  $n$  alunos deu a seus alunos uma lista de  $x$  questões de combinatória e  $y$  questões de geometria, e pediu que cada aluno escolhesse uma questão para resolver. Quantas são as diferentes formas dos  $n$  alunos escolherem a sua questão?

Uma solução seria:

Considerando o banco de questões, cada aluno terá  $(x + y)$  escolhas. Para  $n$  alunos, o número total de escolhas possíveis é  $(x + y)^n$ .

Por outro lado, também poderíamos resolvê-lo da seguinte forma:

Considerando os  $n$  alunos da turma, onde  $k$  é o número de alunos que resolvem questões de combinatória e  $k - 1$  é o número de alunos que resolvem questões de geometria. Para um valor arbitrário de  $k$  (onde  $0 \leq k \leq n$ ):

- Se  $k = 0$ , significa que nenhum aluno resolve questões de combinatória, somente alunos resolvendo questões de geometria. Isto pode ser feito de  $\binom{n}{0} y^n = y^n$  maneiras.
- Se  $k = 1$ , haverá  $\binom{n}{1}$  maneiras de escolher o aluno que resolve uma questão de combinatória. Fixando o aluno escolhido, resta decidir a questão de combinatória ( $x$ ) e a questão de geometria ( $y$ ), o que gera um total de  $x \cdot y^{n-1}$  maneiras.

- Se  $k = 2$ , haverá  $\binom{n}{2}$  maneiras de escolher os dois alunos que resolvem questões de combinatória. Esses alunos têm  $x^2$  modos de escolher as questões de combinatória e para os outros  $n - 2$  alunos, eles escolhem entre  $y$  questões de geometria, gerando um total de  $\binom{n}{2}x^2y^{n-2}$  maneiras.

Assim, para um  $k$  arbitrário (onde  $0 \leq k \leq n$ ), escolhamos  $k$  alunos que resolvem questões de combinatória. Fixando esses  $k$  alunos, temos  $x^k$  modos de escolha das questões de combinatória e, para os  $n - k$  alunos restantes, temos  $y^{n-k}$  modos de escolha das questões de geometria. Pelo princípio multiplicativo, temos  $\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$ .

Se  $k = n$ , temos todos os alunos resolvendo somente questões de combinatória e nenhum resolvendo questões de geometria, o que pode ser visto com a combinação de  $\binom{n}{n}x^ny^0$  maneiras.

Contudo, todos os modos possíveis de escolher a questão de combinatória ou de geometria são dados pela soma:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

que corresponde ao número total de escolhas possíveis, o que nos permite concluir que se  $x$  e  $y$  são números reais e  $n$  é um inteiro não negativo,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

**Exemplo 18** (Recorrência de Coeficientes Multinomiais). *Se  $n, n_1, \dots, n_k$  são inteiros não negativos tais que  $n_1 + \dots + n_k = n$ , então*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_k-1}.$$

**Solução:** A prova será por um argumento combinatório. Para tanto considere  $n$  objetos e  $k$  gavetas numeradas de 1 a  $k$ , que conterão, respectivamente,  $n_1, \dots, n_k$  objetos. O número de maneiras possíveis de distribuir os  $n$  objetos em  $k$  gavetas com a configuração dada é

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k}. \tag{3.2}$$

Por outro lado, contemos o total de possibilidades em relação à presença de um objeto especial, se ele está ou não numa gaveta específica. Assim, se o objeto especial estiver presente na  $i$ -ésima gaveta, há  $n - 1$  objetos agora a serem distribuídos em  $k$  gavetas, sendo  $n_i - 1$  objetos na  $i$ -ésima gaveta, pois esta já conta com o objeto especial. Logo, o total de possibilidades de distribuir  $n$  objetos com o objeto especial na caixa  $i$  é  $\binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_i-1, \dots, n_k}$ . Desde que o objeto especial pode ocupar qualquer uma das  $k$  caixas, pelo *Princípio Aditivo* tem-se que o total de possibilidades é

$$\binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_k} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \dots, n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_k-1}. \quad (3.3)$$

O resultado segue de (3.2) e (3.3).

Esses exemplos são apenas uma pequena amostra do alcance da técnica. Para complementar, a seguir, vamos mostrar um outro ponto de vista do *Argumento Combinatório*: é dada uma expressão que normalmente envolve variáveis de fatoriais e potências de inteiros e pede-se para mostrar que aquela expressão sempre assume valores inteiros.

### 3.6.3 Se contar é inteiro!

Um outro tipo de problema que tradicionalmente pode ser atacado por um argumento combinatório é mostrar que um determinado número (normalmente expresso por uma função de inteiros) é, de fato, um inteiro positivo. A fim de tornar essas ideias mais claras, mostraremos, a seguir, alguns exemplos onde podemos utilizar essa técnica. A ideia central é mostrar que aquela expressão dada é a resposta de um problema de combinatória, ou seja, expressa a quantidade de certas configurações de um subconjunto de um conjunto finito de elementos.

**Exemplo 19.** *Mostrar que  $\frac{(m+n)!}{m!n!}$  é sempre um número inteiro para quaisquer inteiros não negativos  $m$  e  $n$ .*

**Solução:** Você poderia pensar no problema:

*Quantas permutações de  $m$  letras  $A$  e  $n$  letras  $B$  podem ser formadas?*

Ora, são  $m + n$  letras onde  $m$  delas é de um tipo e  $n$  delas é de outro tipo. Assim o número de permutações (ordenações em linha reta) que podemos formar com essas letras é  $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ .

Uma outra forma de suspeitar seria perceber que a expressão  $\frac{(m+n)!}{m!n!}$  é o coeficiente binomial  $\binom{m+n}{m}$ , que é sempre um número inteiro.

**Exemplo 20.** *Mostrar que  $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$  é sempre um número inteiro para qualquer inteiro não negativo  $n$ .*

**Solução:** Agora temos o mesmo problema anterior no caso em que  $m = n$ . Assim, a expressão  $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$  é o coeficiente binomial  $\binom{2n}{n}$ , que é sempre um número inteiro.

**Exemplo 21.** *Mostrar que  $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$  é sempre um número inteiro para qualquer inteiro não negativo  $n$ .*

**Solução:** De fato, considerando o seguinte problema:

*De quantas formas distintas podemos dividir  $2n$  pessoas em  $n$  grupos de 2 pessoas cada?*

Inicialmente podemos arrumar as  $2n$  pessoas em fila, o que pode ser feito de  $(2n)!$  modos distintos. Em seguida, considera que as duas primeiras pessoas formam o primeiro grupo, as duas pessoas seguintes o segundo grupo, e assim por diante até que as duas últimas pessoas formam o  $n$ -ésimo grupo. Como a posição dos  $n$  grupos, nem a posição das pessoas dentro dos grupos é relevante, existem  $n!$  maneiras distintas de arrumar os grupos e 2 maneiras de arrumar os dois componentes de cada grupo, segue que dividir  $2n$  pessoas em  $n$  grupos de 2 pessoas cada pode ser feito de  $\frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}$  modos distintos, o que revela que esse número é, de fato inteiro.

**Exemplo 22.** *Mostrar que  $\frac{(2n)!}{2^n}$  é sempre um número inteiro para quaisquer inteiro não negativo  $n$ .*

**Solução:** De fato, pela questão anterior sabemos que  $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$  é inteiro, ou seja,  $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = k$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Então,

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = k \Rightarrow \frac{(2n)!}{2^n} = k \cdot n! \in \mathbb{Z},$$

pois tanto  $k$  quanto  $n!$  são inteiros.

**Exemplo 23.** *Mostrar que  $\frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$  é sempre um número inteiro para qualquer inteiro não negativo  $n$ .*

**Solução:** De fato, considere o seguinte problema:

*De quantas formas distintas podemos dividir  $3n$  pessoas em  $n$  grupos de 3 pessoas cada?*

Inicialmente vamos arrumar as  $3n$  pessoas numa fila, o que pode ser feito de  $(3n)!$ . Uma vez em fila, suponhamos que as duas primeiras pessoas formam o primeiro grupo, as duas pessoas seguintes formam o segundo grupo e assim sucessivamente até que as duas últimas pessoas formam o último grupo. Como os  $n$  grupos não precisam ter uma ordem prefixada, existem  $n!$  maneiras distintas para arrumar os  $n$  grupos. Além disso, dentro de cada grupo os 3 componentes podem ser permutados de  $3! = 6$  modos distintos. Ora, como são  $n$  grupos, segue que para permutar os componentes dentro do grupo existem  $\underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \dots 6}_{n \text{ vezes}} = 6^n$  possibilidades. Diante do exposto, existem  $\frac{(3n)!}{n! \cdot 6^n} = \frac{(3n)!}{n! \cdot 2^n \cdot 3^n}$  modos distintos de distribuir das  $3n$  pessoas em  $n$  grupos de 3 pessoas cada um. Isto revela que o número  $\frac{(3n)!}{n! \cdot 2^n \cdot 3^n}$  é inteiro para todo inteiro não negativo  $n$ . Ora, como  $\frac{(3n)!}{n! \cdot 2^n \cdot 3^n} = k$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , segue que  $\frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n} = k \cdot n!$  também é inteiro para todo inteiro não negativo  $n$ .

**Exemplo 24.** *Para cada inteiro não negativo  $n$  definimos o Número de Catalan de ordem  $n$  como sendo  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Mostre que  $C_n$  é inteiro!*

**Solução:** De fato, O número de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  pode ser expresso como a diferença de dois números binomiais utilizando a seguinte identidade:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

## Demonstração

Começamos com a identidade binomial básica:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Aplicando isso à expressão  $\binom{2n}{n}$ , temos:

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1}$$

Portanto, podemos reescrever  $C_n$  como:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \left( \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1} \right)$$

Agora, observe que:

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

Assim, podemos expressar  $C_n$  como:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

Essa identidade mostra que o número de Catalan pode ser obtido pela diferença entre dois números binomiais, o que nos permite concluir que  $C_n$  é inteiro para todo inteiro não negativo  $n$ .

A seguir mostraremos um problema de mesma natureza, mas que continua em aberto há mais de 150 anos. Para isso, definiremos o que vem a ser o *Supercatalan*.

**Definição 1** (Supercatalan). *Para todo  $m, n \in \mathbb{N}$  define-se o supercatalan  $C(m, n)$  por*

$$C_{m,n} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

**Observação 1.** *Historicamente falando o número supercatalan foi apontado por Gessel como sendo estudado em 1874 por E. Catalan, o qual provou que estes números são inteiros, entretanto Aguiar e Hsiao citaram estudos anteriores em que aparecem tais números.*

Se na definição (1) fizermos  $m = 0$ , então  $C_{n,0} = \frac{(2n)!}{n!n!}$  que é o binomial médio e se  $m = 1$ , então  $C_{1,n} = 2C_n$ . Exceto para  $m = n = 0$ , os números  $C_{m,n}$  são pares.

Apesar de muitas propriedades do número Supercatalan já terem sido descobertas, veja Dickson e Gessel, ainda não se tem uma prova por *Argumento Combinatório* que  $C_{m,n}$  é inteiro. Gessel e Xin mostraram via um argumento combinatório que para  $m = 2$  e  $m = 3$  que  $C_{m,n}$  é inteiro, mas para  $m$  e  $n$  quaisquer o problema via argumento combinatório ainda segue em aberto.

### 3.7 Contagem Dupla

A contagem dupla é uma técnica combinatória muito poderosa que se baseia na ideia de contar um conjunto de objetos de duas maneiras diferentes para extrair informações importantes ou resolver equações. O princípio por trás dessa técnica é que se temos dois métodos de contar a mesma quantidade de objetos, os resultados devem ser iguais.

#### 3.7.1 Estrutura básica da contagem dupla:

**1. Identificação de um conjunto de objetos:** O primeiro passo é definir claramente qual conjunto de objetos será contado.

**2. Contar o conjunto de duas maneiras diferentes:** Depois de definir o conjunto, contamos os objetos com dois métodos distintos, mas que nos dão a mesma quantidade total.

**3. Igualar os resultados:** Como estamos contando o mesmo conjunto, os dois métodos de contagem devem nos levar ao mesmo resultado. Essa igualdade, em muitos casos, nos ajuda a derivar informações importantes ou resolver problemas.

A técnica de contagem dupla é uma ferramenta poderosa em combinatória, especialmente útil em problemas de Olimpíadas de Matemática. A seguir mostraremos alguns exemplos que podemos usar para introduzir essa técnica de resolução de problemas.

**Exemplo 25.** Para todo inteiro positivo  $n$ , mostre que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Solução:** Considere o seguinte problema:

*Numa sala existem  $n + 1$  pessoas. Se cada uma delas aperta a mão de cada uma das outras, quantos apertos de mão serão realizados?*

O número de apertos de mão corresponde ao número de comissões de 2 das  $n + 1$  pessoas (em cada comissão de 2 pessoas há apenas um aperto de mão), que é  $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ . Por outro lado, o número de apertos de mão pode ser calculado da seguinte forma:

- A pessoa 1 irá apertar a mão de todas as  $n$  outras pessoas, ou seja, realizará  $n$  apertos de mão.
- A pessoa 2 também irá apertar a mão de todas as outras pessoas, ou seja, também efetuará  $n$  apertos de mão (mas um deles já foi realizado com a pessoa 1), restando então  $n - 1$  apertos de mão.
- A pessoa 3 também irá apertar a mão de todas as outras pessoas, ou seja, também efetuará  $n$  apertos de mão (mas dois deles já foram realizados com as pessoas 1 e 2), restando então  $n - 2$  apertos de mão.
- Seguindo a mesma linha de raciocínio, quando chegarmos a última pessoa não restará nenhum aperto de mão a ser acrescentado, pois ela já terá apertado as mãos de todas as demais  $n$  pessoas.

Diante do exposto, o número de apertos de mão será

$$n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 + 0 = 1 + 2 + \dots + n,$$

o que nos permite concluir que para todo inteiro positivo  $n$ , tem-se que:

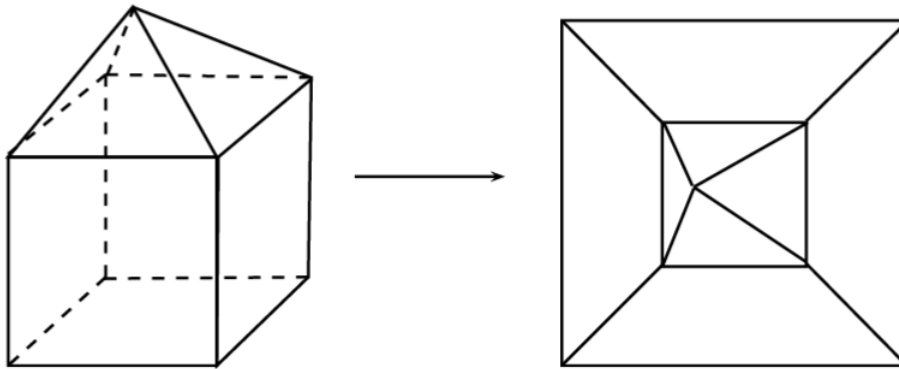
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Exemplo 26.** *Em um comitê, cada membro pertence a exatamente três subcomitês e cada subcomitê tem exatamente três membros. Prove que a quantidade de membros é igual à quantidade de subcomitês.*

**Solução:** Seja  $n$  a quantidade de membros do comitês e  $m$  a quantidade de subcomitês. A quantidade de pares (membro, subcomitê) em que o membro pertence ao subcomitê é igual a  $3n$  ( $n$  membros, 3 subcomitês para cada membro) e a  $3m$  ( $m$  subcomitês, 3 membros para cada subcomitê). Assim o total de pares é igual a  $3n$  e  $3m$ . Logo  $3n = 3m \iff n = m$ .

**Exemplo 27** (Teorema de Euler). *Um poliedro é um sólido delimitado por polígonos. Sejam  $V$ ,  $A$  e  $F$  as quantidades de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Prove que  $V - A + F = 2$*

**Solução:** Calculemos de duas maneiras a soma  $S$  de todos os ângulos internos do poliedro “esticado”. Sejam  $n_1, n_2, \dots, n_F$  as quantidade de arestas/vértices em cada uma das faces, sendo  $n_1$  a quantidade correspondente à face que delimita todas as outras.



Então, lembrando que a soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados é  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ , somando por faces temos  $S = (n_2 - 2) \cdot 180^\circ + (n_3 - 2) \cdot 180^\circ + \dots + (n_F - 2) \cdot 180^\circ = (n_2 + n_3 + \dots + n_F) \cdot 180^\circ - 2(F - 1)180^\circ$  Contado por vértices, temos que cada um dos  $V - n_1$  vértices no interior da face contribuem com  $360^\circ$  e os demais, com a soma dos ângulos internos da face externa, de modo que

$$S = (V - n_1) \cdot 360^\circ + (n_1 - 2) \cdot 180^\circ = (V - 1) \cdot 360^\circ - n_1 \cdot 180^\circ$$

Igualando nossas duas somas obtemos

$$(n_2 + n_3 + \cdots + n_F) \cdot 180^\circ - 2(F - 1)180^\circ = (V - 1) \cdot 360^\circ - n_1 \cdot 180^\circ$$

$$\iff 2V - (n_1 + n_2 + \cdots + n_F) + 2F = 4$$

Enfim, note que a soma  $n_1 + n_2 + \cdots + n_F$  pode ser interpretada como a quantidade de arestas. Como cada aresta pertence a exatamente duas faces, cada aresta está sendo contada duas vezes, de modo que  $n_1 + n_2 + \cdots + n_F = 2A$ . Logo

$$2V - 2A + 2F = 4 \iff V - A + F = 2$$

**Exemplo 28** (OBM). *Em um torneio de xadrez, cada participante joga com cada um dos outros. Uma vitória vale 1 ponto, um empate vale 1/2 ponto e uma derrota vale 0 ponto. Cada jogador ganhou a mesma quantidade de pontos contra homens e contra mulheres. Prove que a quantidade de participantes do torneio é um quadrado perfeito.*

**Solução:** Considere a seguinte tabela, em que colocamos os participantes, separados por sexo, nas linhas e nas colunas. Sendo  $h$  a quantidade de homens e  $m$  a quantidade de mulheres no torneio, marcamos as quantidades de pontos distribuídos:

	homens	mulheres
homens	$\binom{h}{2}$	$x$
mulheres	$hm - x$	$\binom{m}{2}$

Então temos  $\binom{h}{2} = x$  e  $hm - x = \binom{m}{2}$ . Somando as duas equações para eliminar o  $x$ , obtemos

$$\binom{h}{2} + \binom{m}{2} = hm \iff h + m = (h - m)^2$$

**Exemplo 29** (IMC). *Duzentos estudantes participaram de uma competição de matemática. A prova tinha seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido por pelo menos 120 participantes. Prove que existem dois estudantes tais que cada problema foi resolvido por pelo menos um deles.*

**Solução:**

Suponha o contrário. Então, para cada par de estudantes existe um problema que nenhum deles resolveu. Vamos, então, contar problemas não resolvidos por pares de estudantes.

Considere, então, a tabela com seis linhas, uma para cada problema, e 200 colunas, uma para cada estudante. Colocamos 1 na linha  $i$  e coluna  $j$  se, e somente se, o aluno  $j$  não resolveu o problema  $i$ .

	1	2	3	...	200
Problema 1	1	0	0	...	0
Problema 2	1	0	0	...	0
Problema 3	0	1	1	...	0
Problema 4	1	1	1	...	1
Problema 5	1	0	1	...	0
Problema 6	0	0	0	...	1

Os problemas não resolvidos por pares de estudantes são, então, pares de uns na mesma linha. Seja  $A$  o conjunto dos pares de uns na mesma linha, então. - Por linhas: Como pelo menos 120 estudantes fizeram cada problema, no máximo  $200 - 120 = 80$  não fizeram. Então cada linha tem no máximo  $\binom{80}{2}$  pares. Assim,  $|A| \leq 6 \cdot \binom{80}{2} = 6 \cdot 40 \cdot 79$ . - Por colunas: Como cada par de estudantes não resolveu pelo menos um problema,  $|A| \geq \binom{200}{2} = 199 \cdot 100$ .

Logo  $6 \cdot 40 \cdot 79 \geq |A| \geq 199 \cdot 100 \implies 6 \cdot 4 \cdot 79 \geq 1990$ , mas  $6 \cdot 4 \cdot 79 < 24 \cdot 80 = 1920 < 1990$ , e obtemos um absurdo. Logo existem dois estudantes que, juntos, resolveram todos os problemas.

Para finalizar o capítulo, deixamos uma pequena lista de problemas que podem servir de fonte para estudos posteriores e aprofundamento sobre o tema aqui tratado.

### 3.8 Alguns problemas propostos (Argumentos combinatórios)

**Problema 13.** *Demonstre as seguintes identidades combinatórias (se possível demonstre via argumento combinatório):*

- $\binom{k}{i} \binom{k-i}{i} = k \binom{k-1}{i}$ .

$$2. \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} \right]^2 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}.$$

$$3. \sum_{k \leq m} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m}.$$

$$4. \binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}.$$

$$5. \sum_k \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n} \quad \forall m, n, \in \mathbb{Z} \text{ e } r, s \in \mathbb{R}.$$

**Problema 14 (OBM).** *O professor Piraldo aplicou uma prova de 6 questões para 18 estudantes. Cada questão vale 0 ou 1 ponto; não há pontuações parciais. Após a prova, Piraldo elaborou uma tabela como a seguinte para organizar as notas, em que cada linha representa um estudante e cada coluna representa uma questão.*

Questões/Estudantes	1	2	3	4	5	6
Arnaldo	0	1	1	1	1	0
Bernaldo	1	1	1	0	0	1
Cernaldo	0	1	1	1	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

*Piraldo constatou que cada estudante acertou exatamente 4 questões e que cada questão teve a mesma quantidade  $m$  de acertos. Qual é o valor de  $m$  ?*

**Problema 15 (OBM/1999).** *Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro, 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças. Quantas são as costuras feitas na fabricação de uma bola de futebol?*

**Problema 16 (OBM/2005).** *Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?*

**Problema 17 (OBM/2003).** *No triminó marciano, as peças têm 3 números cada (diferente do dominó da terra, onde cada peça tem apenas 2 números). Os números no triminó marciano também variam de 0 a 6, e para cada escolha de 3 números*

(não necessariamente distintos) existe uma e somente uma peça que contém esses 3 números. Qual é a soma dos números de todas as peças do triminó marciano?

**Problema 18** (OBM/2011). Um álbum, composto por 2011 figurinhas, está sendo colecionado por 33 amigos. Uma distribuição de figurinhas entre os 33 amigos é incompleta quando existe pelo menos uma figurinha que nenhum dos 33 amigos tem. Determinar o menor valor de  $m$  com a seguinte propriedade: toda distribuição de figurinhas entre os 33 amigos tal que, para quaisquer dois dos amigos, faltam, para ambos, pelo menos  $m$  figurinhas em comum, é incompleta.

**Problema 19** (OBM/1999). Temos um tabuleiro quadrado  $10 \times 10$ . Desejamos colocar  $n$  peças em casas do tabuleiro de tal forma que não existam 4 peças formando em retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro. Determine o maior valor de  $n$  para o qual é possível fazer esta construção.

**Problema 20** (OBM/2004). Determine todos os valores de  $n$  tais que é possível dividir um triângulo em  $n$  triângulos de modo que não haja três vértices alinhados e em cada vértice incida o mesmo número de segmentos.

# Capítulo 4

## Invariantes

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos mais um tema que pode mostrar-se essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico, analítico e matemático. Trata-se do estudo dos **invariantes**. Há uma gama de problemas de Matemática que envolvem invariantes, isto é, o cerne da solução desses problemas frequentemente requer a identificação de quantidades ou propriedades que permanecem constantes ou se comportam de maneira previsível ao longo de uma sequência de transformações. Ao longo do nosso texto, vamos mostrar vários problemas que julgamos interessantes e apropriados para que esse tema possa ser inserido por volta do Ensino Fundamental II (6<sup>o</sup> ao 9<sup>o</sup> anos) e outros problemas mais elaborados que podem ser tratados por estudantes mais experientes do Ensino Médio ou até mesmo de cursos superiores dos Cursos de Licenciatura em Matemática. Esses exemplos ilustram como os invariantes podem ser úteis na resolução de problemas olímpicos de Matemática, fornecendo uma abordagem sistemática para analisar padrões e encontrar soluções.

Os invariantes são perceptíveis constantemente na Matemática. Antes de definir o conceito de Invariância é importante salientar a importância dos invariantes em sua totalidade, para facilitar a compreensão do princípio e utilizá-lo na resolução de problemas matemáticos. Uma relação bastante compreensível que se faz Segundo Lopes (2012) é que:

Como o próprio nome sugere, este material fala sobre coisas que não mudam. Essa frase foi muito vaga, mas a matéria é bem vasta e ampla mesmo, pois a Matemática

apresenta muitas invariantes. Um exemplo óbvio é o bom e velho fato de que a ordem das parcelas não altera a soma (isso pode ser considerada uma invariante, pois mudamos as parcelas de lugar na hora de fazer a soma, mas o resultado final deu o mesmo). O mesmo pode ser dito quando falamos que a ordem dos fatores não altera o produto. Na geometria, as invariantes são ainda mais evidentes: quando você recorta uma figura em vários pedaços, a soma das áreas desses pedaços permanece constante, e é igual à área da figura inicial. Podemos dizer o mesmo sobre um cubo que foi dividido em vários cubinhos, por exemplo, ou então quando tomamos uma corda e montamos figuras diferentes com ela (neste caso, o perímetro das figuras é a invariante, pois ele é igual ao comprimento da corda). A relação apresenta aparentemente uma ideia simples, no entanto, é de grande relevância na resolução de problemas diferenciados na Matemática. Embora o conteúdo seja simples, não é comum encontrar as invariantes, pois mudam de problema para problema. Logo, podemos dizer, que os desafios das invariantes se diferenciam nos problemas. O pior de tudo é informar que não existe uma expressão, um teorema que resolva todos os problemas que envolvam as invariantes. Logo, será preciso muita prática e inspiração para adquirir técnicas que permitam detectar as invariantes e resolver problemas básicos aos difíceis.

A teoria dos invariantes baseia-se na ideia de identificar propriedades que permanecem inalteradas ao longo de uma sequência de operações ou transformações. Essas propriedades, chamadas de invariantes, são ferramentas poderosas em resolução de problemas, pois ajudam a restringir o comportamento de um sistema. Um invariante pode ser um valor numérico, uma característica estrutural ou uma relação entre elementos que, independentemente das operações realizadas, permanece constante. Por exemplo, considere um problema onde se move peças em um tabuleiro, e o objetivo é determinar se uma certa configuração final pode ser alcançada. Um invariante possível seria a paridade do número de peças em certas posições. Se, após cada movimento, a paridade se mantém constante, então, se a configuração inicial possui uma paridade ímpar, é impossível atingir uma configuração final com paridade par. Para demonstrar isso formalmente, considere uma sequência de movimentos que alterem o estado de um sistema; se for possível mostrar que uma certa função  $f$ , definida no sistema,

mantém o mesmo valor antes e depois de cada operação, conclui-se que esse valor é um invariante. Assim, se a condição final desejada requer uma alteração nesse valor, tal configuração torna-se impossível, provando a impossibilidade de certas transformações ou o sucesso de outras.

A verdade é que, as invariantes são bastantes presente na Matemática e em nossa vida diária, pois o ser humano busca se guiar por padrões, sejam eles de convivência social, étnicos e outros que, na filosofia, são caracterizados como invariantes axiológicas, e nisso a Matemática tem grande influência.

Em resumo, a ideia de invariante é fundamental na Matemática, proporcionando uma perspectiva única para analisar e resolver problemas. Seja na Álgebra, Geometria, Teoria dos Números ou Teoria dos Grafos, os invariantes geram uma estrutura conceitual importante para compreender propriedades que permanecem constantes em meio a diversas transformações.

## **4.2 Integração de técnicas**

Invariantes e colorimentos podem ser combinados com paridade, argumento combinatório e contagem dupla para resolver problemas matemáticos complexos, fornecendo uma abordagem multidimensional. A paridade, que lida com a distinção entre números pares e ímpares, muitas vezes serve como uma primeira pista em problemas que envolvem invariantes, já que essa propriedade se mantém inalterada em certas transformações. O uso de colorimentos é útil para visualizar padrões e identificar restrições em situações combinatórias, enquanto argumentos de contagem dupla garantem que diferentes métodos de contagem cheguem ao mesmo resultado. Juntos, esses métodos formam uma estratégia poderosa para atacar problemas multifacetados, revelando relações ocultas e simplificando a análise.

## **4.3 Procurando (e encontrando) invariantes**

A técnica de invariantes é uma ferramenta poderosa em resolução de problemas de Matemática, especialmente em competições olímpicas. Um invariante é uma

propriedade ou quantidade que permanece constante mesmo após a aplicação de certas operações ou transformações em um sistema. Identificar um invariante adequado pode simplificar e até mesmo resolver completamente um problema complexo.

A seguir mostramos algumas situações onde a determinação de uma certa quantidade invariante é a “chave certa” para determinarmos a solução do problema. Esses são apenas alguns exemplos de problemas que envolvem invariância. Eles demonstram como a identificação e análise de quantidades ou propriedades invariantes podem ser fundamentais na resolução de problemas desafiadores.

**Exemplo 30.** *Escrevemos os números de 1 até 10 em um quadro. A cada passo, escolhemos dois números quaisquer do quadro e trocamos esses pela soma deles. Ao final, vai sobrar somente um número. Quem é esse número?*

**Solução:** Solução: Perceba que a operação muda os números, mas não muda a soma de todos eles. Então, a soma dos números é a nossa invariante. Como no fim só resta um número, ele só pode ser igual à soma dos 10 iniciais, logo o número é:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$$

**Exemplo 31.** *Escrevemos os números de 1 a 10 numa lousa. A cada passo, trocamos dois números da lousa  $a$  e  $b$  pelo número  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Qual é o número que vai ficar no final, independentemente das operações?*

**Solução:** Aqui a invariante não está mais tão na cara como no exemplo 1. Então qual a invariante? Neste caso, a invariante é a soma dos quadrados dos números da lousa, pois, ao fazermos uma transformação, se  $S$  é a soma dos quadrados dos números não escolhidos, então podemos dizer que: - A soma dos quadrados antes era igual a  $S + a^2 + b^2$ ; - A soma depois é igual a  $S + (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = S + a^2 + b^2$

Então a soma dos quadrados realmente se conserva. Com isso, se  $x$  é o número que vai restar no final, temos que, comparando as situações inicial e final:

$$x^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385 \Rightarrow x = \sqrt{385}$$

**Exemplo 32** (Problema das Moedas). *Suponha que existam algumas moedas em uma linha. Em cada etapa, podemos escolher duas moedas adjacentes e substituí-las por*

*uma única moeda com o dobro do valor da moeda menor. O problema pede para determinar se é possível fazer todas as moedas desaparecerem.*

**Solução:** Definimos o “peso” total das moedas como a soma dos valores das moedas multiplicada pelo número de moedas. Este é um invariante, pois em cada etapa, o peso total não muda. Se houver alguma moeda restante, deve ter um valor mínimo, e essa moeda não pode ser substituída, levando a uma contradição. Portanto, todas as moedas podem desaparecer.

**Exemplo 33** (Problema das Cores em um Triângulo). *Considere um triângulo equilátero dividido em pequenos triângulos equiláteros. Inicialmente, alguns triângulos são pintados de preto e outros de branco. Em cada etapa, escolhemos um triângulo preto e pintamos os três triângulos vizinhos de preto, e escolhemos um triângulo branco e pintamos os três vizinhos de branco. O problema pede para determinar se podemos chegar a uma configuração onde todos os triângulos têm a mesma cor.*

**Solução:** Definimos o “excesso” como a diferença entre o número de triângulos pretos e brancos. Este é um invariante, pois em cada etapa, o excesso não muda (cada ação adiciona ou subtrai 3 do excesso). Se o excesso inicial for zero, então todos os triângulos podem ter a mesma cor.

**Exemplo 34** (Problema dos Copos de Água). *Existem  $n$  copos de água numerados de 1 a  $n$ . Em cada etapa, podemos derramar água de um copo para outro. O problema pede para determinar se podemos fazer com que todos os copos contenham a mesma quantidade de água.*

**Solução:** Definimos a “desigualdade” como a soma das diferenças entre a quantidade de água em cada copo e a média das quantidades de água em todos os copos. Este é um invariante, pois em cada etapa, a desigualdade não muda. Se a desigualdade inicial for zero, então todas as quantidades de água podem ser iguais.

**Exemplo 35** (Problema das Fichas). *Suponha que temos  $n$  fichas, cada uma com um número inteiro escrito nela. Em cada etapa, podemos escolher duas fichas e substituí-las por uma única ficha contendo a soma dos números das duas fichas escolhidas. O objetivo é provar que, independentemente das escolhas feitas em cada etapa, a soma dos números em todas as fichas sempre permanecerá a mesma.*

**Solução:** Seja  $S$  a soma inicial dos números nas fichas. Em cada etapa, a soma dos números aumenta em duas vezes a soma das duas fichas escolhidas e diminui pela soma da ficha substituída. Portanto, a soma total sempre permanece  $S$ .

**Exemplo 36** (Problema do Xadrez com Cavalo). *Considere um tabuleiro de xadrez infinito e uma peça de cavalo colocada em qualquer quadrado. A cada movimento, o cavalo se move em forma de “L” (2 casas em uma direção e 1 na perpendicular). O problema pede para provar que, independentemente do ponto de partida do cavalo, após um número par de movimentos, ele retornará ao mesmo quadrado.*

**Solução:** Podemos observar que, após cada movimento, a paridade da soma das coordenadas (linha e coluna) do cavalo muda. Portanto, após um número par de movimentos, a paridade da soma das coordenadas permanece a mesma, o que significa que o cavalo volta ao mesmo quadrado.

**Exemplo 37.** *2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, uma pessoa anda para um quarto com número igual ou maior de pessoas do qual ela estava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.*

**Solução:** Solução: Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_{115}$  a quantidade de pessoas nos quartos  $1, 2, \dots, 115$  respectivamente em um dado momento. Defina a energia como:

$$I = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{115}^2$$

Você já deve suspeitar que o  $I$  é uma semi-invariante né? De fato, isso é verdade, e mais ainda: vamos provar que a cada passo  $I$  sempre cresce.

Digamos que uma pessoa sai de um quarto com  $n$  pessoas e vai para um quarto com  $m$  pessoas (com isso deduzimos que  $m \geq n$ ). A variação de  $I$  é dada por:

$$\Delta I = I_{\text{depois}} - I_{\text{antes}} = ((m+1)^2 + (n-1)^2) - (m^2 + n^2)$$

Explicando a conta acima: precisamos apenas considerar os dois quartos com  $m$  e  $n$  pessoas, pois os outros quartos não foram afetados pelo movimento, e isso explica o termo  $-(m^2 + n^2)$ . Depois que a pessoa chega ao quarto com  $m$  pessoas, esse

quarto fica com  $(m + 1)$  pessoas, e o outro quarto fica com  $(n - 1)$  pessoas. Isso explica o termo  $((m + 1)^2 + (n - 1)^2)$ . Fazendo a conta acima, vemos que:

$$\Delta I = 2(m - n + 1) > 0$$

Pois  $m \geq n$ . Assim, toda vez que uma pessoa muda de quarto o valor da energia  $I$  cresce. Porém, sabemos que o valor de  $I$  não pode crescer indefinidamente, pois o número de pessoas é finito. Ou seja, em um dado momento  $I$  não poderá mais crescer, e isso é acontecerá quando nenhuma pessoa puder mudar de quarto. Logo, todas elas dever estar no mesmo quarto

**Exemplo 38.** *Temos os números 2048 e 1024, nesta ordem, numa lousa. A cada passo, se trocamos os dois números  $a$  e  $b$  da lousa por  $(3a + b)/4$  e  $(a + 3b)/4$ , é possível obter os números? (a) 1540 e 1532 (b) 1546 e 1526*

**Solução:**

Observe que, como:

$$\frac{3a + b}{4} + \frac{a + 3b}{4} = a + b$$

A soma dos dois números da lousa não se altera. Como  $2048 + 1024 = 3072$ , e ainda  $1540 + 1532 = 1546 + 1526 = 3072$ , podemos afirmar que... Infelizmente, não podemos afirmar nada, pois não obtemos nenhuma contradição. Então isso significa que ambos os itens são possíveis? Não! Neste caso, precisamos de outros métodos.

A resposta do item (a) é sim. Vejas as transformações abaixo:

$$\begin{aligned} 2048 \text{ e } 1024 &\rightarrow 1792 \text{ e } 1280 \rightarrow 1664 \text{ e } 1408 \rightarrow 1600 \text{ e } 1472 \rightarrow 1568 \text{ e } 1504 \\ &\rightarrow 1552 \text{ e } 1520 \rightarrow 1544 \text{ e } 1528 \rightarrow 1540 \text{ e } 1532 \end{aligned}$$

Já no item (b), a resposta é não, e dessa vez vamos olhar um padrão de comportamento dos números. A justificativa é o fato de que a diferença entre os números sempre cai pela metade, haja vista que:

$$\frac{3a + b}{4} - \frac{3b + a}{4} = \frac{a - b}{2}$$

Com isso, a diferença inicial é 1024, depois 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1,  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ , ... (Confira!) e decrescendo. Como  $1546 - 1526 = 20$ , temos que é impossível obtermos esses números

**Exemplo 39.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$  uma função quadrática. Definindo as transformações

$$T_1 : f(x) \mapsto x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x} + 1\right).$$

$$T_2 : f(x) \mapsto (x - 1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x - 1}\right).$$

Utilizando um número finito de vezes as transformações  $T_1$  e  $T_2$ , é possível transformar a  $g(x) = x^2 + 4x + 3$  em  $h(x) = x^2 + 10x + 9$ ?

**Solução:** O discriminante da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Ao aplicarmos sobre  $f$  a transformação  $T_1$  obtemos a função

$$\begin{aligned} T_1(f)(x) &= x^2 f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = x^2 \left[ a \left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 + b \left(\frac{1}{x} + 1\right) + c \right] \\ &= (a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a \end{aligned}$$

Note que  $\Delta(T_1 f) = (2a + b)^2 - 4(a + b + c)a = b^2 - 4ac$

Aplicando  $T_2$  a  $f$ , segue que:

$$T_2(f)(x) = (x - 1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x - 1}\right) \quad (4.1)$$

$$= (x - 1)^2 \left[ a \left(\frac{1}{x - 1}\right)^2 + b \left(\frac{1}{x - 1}\right) + c \right] \quad (4.2)$$

$$= cx^2 + (b - 2c)x + (a - b + c) \quad (4.3)$$

Nesse caso,

$$\Delta(T_2 f) = (c - 2c)^2 - 4a(a - b + c) = b^2 - 4ac$$

ou seja, ao aplicarmos as transformações  $T_1$  e  $T_2$  sobre uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , o seu discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  não varia. Por outro lado, as funções quadráticas  $g(x) = x^2 + 4x + 3$  e  $h(x) = x^2 + 10x + 9$  são tais que  $\Delta_g = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$  e  $\Delta_h = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64$  são diferentes, segue que **não é possível** transformar  $g(x)$  em  $h(x)$  utilizando as transformações  $T_1$  e  $T_2$ .

**Exemplo 40.** *No Parlamento da OBM-lândia, cada pessoa tem no máximo 3 inimigos. Mostre que as pessoas desse parlamento podem ser colocadas em duas salas, de modo que cada pessoa dentro de uma sala tem no máximo um inimigo dentro de sua própria sala. Lembre-se: se  $A$  é inimigo de  $B$ , então  $B$  é inimigo de  $A$ .*

**Solução:** Inicialmente, colocamos as pessoas do parlamento nas duas salas de qualquer maneira. Se essa divisão satisfaz o problema, não há nada a fazer. Caso contrário, vamos definir  $\Delta$  como sendo a soma das quantidades de inimigos que cada pessoa tem em sua própria sala. Vamos provar que  $\Delta$  é uma semi-invariante, e que ela decresce ao fazermos a seguinte operação: Se há uma pessoa com pelo menos dois inimigos dentro da sua sala, quando trocarmos essa pessoa de sala, ela vai ter no máximo um inimigo dentro da nova sala. Com isso,  $\Delta$  diminuiu.

Como  $\Delta$  é inteiro positivo, em algum momento  $\Delta$  vai atingir seu valor mínimo. Neste momento, vai ser impossível trocar alguém de sala, e se isso é impossível, é porque todo mundo tem no máximo um inimigo na sua sala. Logo, encontramos a divisão de pessoas que queremos.

Assim como fizemos nos capítulos anteriores, deixamos a seguir uma relação de problemas interessantes sobre o tema tratado neste capítulo, a fim de servir de fonte para quem deseja ensinar ou até mesmo aprofundar-se no assunto.

#### 4.4 Alguns problemas propostos sobre invariantes

**Problema 21.** *Em cada um dos dez degraus de uma escada está uma rã. Cada rã pode, de um pulo, pular para qualquer outro degrau, mas quando fizer isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?*

**Problema 22.** *Os números  $1, 2, \dots, 1989$  são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois números e escrever sua diferença no local. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Esse número pode ser o zero?*

**Problema 23.** *Os números  $1, 2, \dots, 20$  são escritos em um quadro negro. Podemos*

apagar dois deles  $a$  e  $b$  e escrever no lugar o número  $a + b + ab$ . Após muitas operações ficamos apenas com um número. Qual deve ser esse número?

**Problema 24.** Em um tabuleiro  $8 \times 8$  uma das casas está pintada de preto e as outras casas estão pintadas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

**Problema 25.** Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e virá-las ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa?

**Problema 26.** Dado um polinômio quadrático  $ax^2 + bx + c$  podemos fazer as seguintes operações:

(i) Trocar  $a$  com  $c$ .

(ii) Trocar  $x$  por  $x + t$  onde  $t$  é um real.

Usando essas operações é possível transformar  $x^2 - x - 2$  em  $x^2 - x - 1$ ?

**Problema 27.** Começando com a tripla  $\{3, 4, 12\}$  podemos a cada passo escolher dois número  $a$  e  $b$  e trocá-los por  $\frac{3a-4b}{5}$  e  $\frac{4a+3b}{5}$ . Usando essa operação podemos obter  $\{4, 6, 12\}$ ?

**Problema 28.** Em um tabuleiro  $3 \times 3$  uma das casas do canto está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

**Problema 29.** Três cangurus estão alinhados em uma estrada. A cada segundo um dos cangurus salta. É permitido que um canguru salte por cima de um outro canguru, mas não de dois cangurus de uma só vez. Depois de 2007 segundos, os cangurus podem voltar a ocupar a posição relativa inicial?

**Problema 30.** Colocamos os números de 1 a 16 (inclusive) em uma reta na ordem crescente. Podemos escolher dois números e trocá-los de lugar. Podemos obter uma configuração em que a soma de quaisquer dois vizinhos seja um quadrado perfeito?

**Problema 31.**  $2n$  embaixadores foram convidados para um banquete. Todo embaixador tem no máximo  $n - 1$  inimigos. Prove que os embaixadores podem se sentar sobre uma mesa redonda, de modo que ninguém se sente ao lado de um inimigo seu.

**Problema 32.** (Ucrânia/2000) Existem inicialmente  $n$  números 1 escritos em um quadro. Em cada passo podemos apagar  $a$  e  $b$  e escrever o número  $\left(\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}\right)$  no seu lugar. Após repetir essa operação  $(n - 1)$  vezes, prove que o último número escrito não pode ser menor que  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

**Problema 33.** (São Petersburgo/1998) Um total de 119 anões vivem em uma aldeia com 120 pequenas casas. Uma casa é dita super-habitada se 15 anões ou mais vivem nela. Todo dia, os anões de uma casa super-habitada têm uma briga e se mudam para outras casas da aldeia. Algum dia, necessariamente, esse processo se encerrará?

**Problema 34.** (IMO/1986) Para cada vértice de um pentágono regular associamos um número inteiro, de modo que a soma dos cinco números é positiva. Se três vértices consecutivos estão associados aos números  $x, y, z$ , respectivamente, e se  $y < 0$ , então a seguinte operação é permitida: substituimos  $x, y, z$  por  $x + y, -y, z + y$ , respectivamente. Podemos fazer essa operação repetidas vezes, desde que pelo menos um dos cinco números seja negativo. Prove que em algum instante todos os cinco números serão todos maiores do que ou iguais a zero.

**Problema 35.** O número 123 está na tela do computador de Teddy. A cada minuto o número escrito na tela é somado com 102. Teddy pode trocar a ordem dos dígitos do número escrito na tela quando ele quiser. Ele pode fazer com que o número escrito na tela seja sempre um número de três dígitos?

**Problema 36.** Temos sete moedas formando um círculo. Inicialmente, todas estão mostrando a face da coroa. Podemos escolher quaisquer cinco vizinhas e virar-las. É possível fazer com que todas mostrem a face da cara?

**Problema 37.** (Leningrado/1990) Vinte números estão escritos em um círculo. Podemos escolher uma tripla de números consecutivos  $x, y, z$  e trocá-la pela tripla  $x + y, -y, z + y$  (na mesma ordem). Usando essa transformação é possível obter a sequência

$$[10, 9, 8, \dots, 2, 1, -10, -9, \dots, -2, -1]$$

a partir da sequência  $[1, 2, \dots, 9, 10, -1, -2, \dots, -9, -10]$ ? (os números são dados no sentido horário.)

**Problema 38.** (OBM/2004) Esmeralda tem uma pilha com 100 pedras. Ela divide essa pilha em duas novas pilhas e em seguida multiplica as quantidades de pedras nessas duas novas pilhas e escreve o produto em um quadro. Ela então escolhe uma pilha com mais de uma pedra e repete esse procedimento: a pilha é dividida em duas, as quantidades de pedras nessas duas pilhas são multiplicadas e o produto escrito no quadro. Esta operação é realizada até se obter apenas pilhas com 1 pedra cada. Quais são os possíveis valores da soma de todos os produtos escritos no quadro?

**Problema 39.** (Bulgária/2004) Considere todas as “palavras” formadas por  $a$ 's e  $b$ 's. Nestas palavras podemos fazer as seguintes operações: Trocar um bloco  $aba$  por um bloco  $b$ , trocar um bloco  $bba$  por um bloco  $a$ . Podemos fazer também as operações ao contrário. É possível obter a sequência  $b \underbrace{aa \dots a}_{2003}$  a partir de  $\underbrace{aa \dots ab}_{2003}$ ?

**Problema 40.** (Fortaleza/2003) Sobre uma circunferência tomamos  $(m + n)$  pontos, que a divide em  $(m + n)$  pequenos arcos. Nós pintamos  $m$  pontos de branco e os  $n$  restantes de preto. Em seguida, associamos a cada um dos  $(m + n)$  arcos um dos números  $2, 1/2$  ou  $1$ , dependendo se as extremidades do arco sejam, respectivamente, ambas brancas, ambas pretas ou uma preta e uma branca. Calcule o produto dos números associados a cada um dos  $(m + n)$  arcos.

# Capítulo 5

## Colorações, pintando é que se descobre!

### 5.1 Introdução

O colorimento é uma técnica intrigante e poderosa para a resolução de alguns problemas de Matemática. Embora muitas pessoas possam associar o colorimento principalmente a atividades artísticas, como colorir livros de colorir, seu papel na Matemática vai muito além da estética. Vários ramos da Matemática, Teoria dos Números e a Geometria, fazem uso do colorimento para elucidar propriedades e relações entre elementos.

A técnica de colorimento, bastante utilizada em problemas de Teoria dos Grafos, pode ser aplicada em diversas situações práticas e em outros campos de estudo. Por exemplo, na otimização de horários, o problema de colorir vértices pode ajudar a garantir que atividades que compartilham recursos não sejam alocadas ao mesmo tempo. Na área de redes de computadores, o colorimento de grafos é útil para evitar colisões de dados em canais de comunicação. Além disso, na biologia, essa técnica pode ser aplicada ao estudar padrões de dominância genética ou na organização de ecossistemas, onde diferentes espécies ou características são representadas por cores para identificar interações. No campo da logística, o colorimento é uma ferramenta eficaz para resolver problemas de rotas e alocação de recursos de forma eficiente, evitando sobrecargas.

A técnica de coloração é uma ferramenta poderosa em problemas de Combinatória e Teoria dos grafos, frequentemente utilizada em competições matemáticas. A ideia principal é associar uma cor a cada elemento de um conjunto de forma a simplificar a

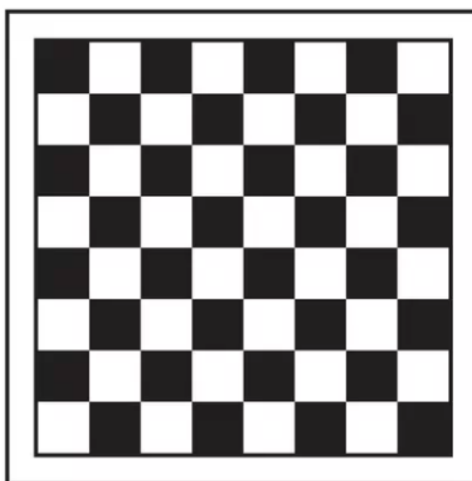
análise do problema ou para encontrar uma contradição com certas condições impostas. Ao colorir os elementos, podemos detectar padrões, simetrias ou irregularidades que não seriam evidentes de outra forma.

A técnica de coloração é uma abordagem versátil e eficaz em muitos problemas combinatórios. Com ela, podemos reduzir a complexidade de um problema, identificar padrões, ou até mesmo provar a impossibilidade de certas configurações. Como visto nos exemplos acima, colorações inteligentes frequentemente levam a soluções elegantes e profundas, mostrando-se uma ferramenta indispensável em competições matemáticas. A seguir, mostraremos vários problemas onde uma *coloração esperta* revela a solução.

**Exemplo 41** (Coloração em um Tabuleiro de Xadrez). *Suponha que um tabuleiro de xadrez  $8 \times 8$  tenha duas casas em cantos opostos removidas. Mostre que não é possível cobrir o tabuleiro restante usando 31 dominós, onde cada dominó cobre exatamente duas casas adjacentes.*

**Solução:**

Primeiro, colorimos o tabuleiro de xadrez de maneira usual, com as casas alternando entre preto e branco, como mostrado a seguir:



As casas em cantos opostos são ambas da mesma cor (digamos, preto). Quando removemos essas duas casas, o tabuleiro restante tem 30 casas pretas e 32 casas brancas. Cada dominó cobre exatamente uma casa preta e uma casa branca. Portanto, 31 dominós cobririam 31 casas pretas e 31 casas brancas. Como restam 30 casas pretas e 32 casas brancas, é impossível cobrir o tabuleiro usando apenas 31 dominós. Concluimos que a cobertura proposta é impossível.

**Exemplo 42** (Coloração de uma Grade Infinita). *Considere uma grade infinita de pontos no plano. Mostre que é possível colorir os pontos com duas cores de forma que não existam três pontos colineares com a mesma cor.*

**Solução:** Colorimos cada ponto  $(x, y)$  da grade com base na soma das suas coordenadas. Se  $x + y$  for par, colorimos o ponto de uma cor; se  $x + y$  for ímpar, colorimos de outra cor.

Suponha, para obter uma contradição, que três pontos colineares têm a mesma cor. Esses três pontos devem estar na mesma linha reta, ou seja, satisfazem uma equação linear do tipo  $ax + by = c$  para algumas constantes  $a$ ,  $b$ , e  $c$ . Mas, se  $x_1 + y_1 \equiv x_2 + y_2 \equiv x_3 + y_3 \pmod{2}$ , então não há como três pontos com a mesma soma  $(x + y)$  serem colineares, pois as diferenças dessas somas não podem ser constantes. Isso contradiz a hipótese de colinearidade, provando que tal configuração é impossível. Portanto, a coloração descrita garante que não existem três pontos colineares com a mesma cor.

Alguns dos exemplos a seguir trazem a noção de *Grafo* por isso a definiremos resumidamente.

**Definição 2** (Grafo). Um **grafo**  $G = (V, E)$  é uma estrutura matemática que consiste em dois conjuntos:

- Um conjunto  $V$  de **vértices** (ou **nós**), que são os elementos fundamentais do grafo.
- Um conjunto  $E$  de **arestas**, onde cada aresta é um par não ordenado  $\{u, v\}$  de vértices  $u, v \in V$ , representando uma conexão entre esses dois vértices.

Em outras palavras, um grafo é uma coleção de pontos (vértices) e linhas (arestas) que conectam pares desses pontos. Se as arestas são pares ordenados, o grafo é chamado de **grafo dirigido** ou **dígrafo**.

Além disso, Um grafo  $G = (V, E)$  é chamado de **bipartido** se o conjunto de vértices  $V$  puder ser dividido em dois subconjuntos disjuntos  $V_1$  e  $V_2$  tais que nenhuma aresta em  $E$  conecta dois vértices dentro do mesmo subconjunto. Em outras palavras, toda aresta de  $G$  conecta um vértice de  $V_1$  a um vértice de  $V_2$ .

Formalmente, um grafo  $G = (V, E)$  é bipartido se existir uma partição  $V = V_1 \cup V_2$  com  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  tal que para toda aresta  $(u, v) \in E$ , temos  $u \in V_1$  e  $v \in V_2$  ou  $u \in V_2$  e  $v \in V_1$ .

## 5.2 Colorimento de Grafos

O colorimento de grafos é um tópico central na teoria dos grafos, com aplicações que vão desde programação até genética. Os problemas variam em dificuldade e podem ser adaptados para diferentes níveis de ensino. A seguir listaremos alguns problemas clássicos e mais complexos relacionados ao colorimento de grafos.

**1. Problema das Quatro Cores:** O problema das quatro cores pergunta se é possível colorir qualquer mapa em um plano de forma que regiões adjacentes tenham cores diferentes usando no máximo quatro cores. Este problema foi resolvido afirmativamente em 1976 por Appel e Haken usando um computador.

**2. Problema do Colorimento de Grafos:** O problema geral do colorimento de grafos pergunta qual é o menor número de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo de modo que nenhum vértice adjacente tenha a mesma cor. O número mínimo de cores é chamado de número cromático do grafo.

**3. Problema de Colorimento de Arestas:** O objetivo é colorir as arestas de um grafo de modo que duas arestas que compartilham um vértice não tenham a mesma cor. O número cromático de arestas é o número mínimo de cores necessárias para realizar essa coloração.

**4. Problema de Colorimento de Grafos Bipartidos:** Um grafo bipartido pode ser colorido com duas cores de tal forma que os vértices adjacentes tenham cores diferentes. O problema consiste em verificar se um grafo é bipartido e qual a coloração adequada.

**5. Problema de Colorimento em Grafos de Intervalo:** Grafos de intervalo são grafos onde cada vértice pode ser associado a um intervalo real, e há uma aresta entre dois vértices se seus intervalos se sobrepõem. O problema do colorimento aqui é encontrar o número cromático mínimo para tais grafos.

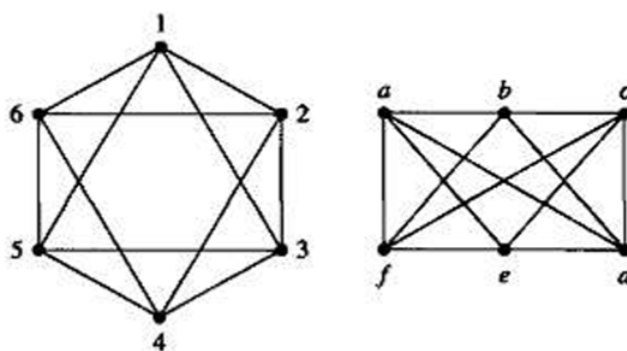
**6. Colorimento em Grafos Planares de Maior Gênero:** Grafos planares podem ser coloridos com até 4 cores, mas se o grafo tem um gênero maior (isto é, pode ser desenhado em uma superfície com furos), o número de cores necessárias pode aumentar. O problema envolve determinar esse número cromático em superfícies mais complexas.

**Exemplo 43** (O Problema dos apertos de mãos). *Em uma festa, cada convidado aperta a mão de outros três convidados. Mostre que é possível colorir os convidados com duas cores, de forma que cada convidado aperte as mãos de exatamente um convidado de cada cor.*

**Solução:** Este é um problema típico de coloração de grafos. Vamos representar os convidados por vértices e os apertos de mãos por arestas de um grafo cúbico (um grafo onde cada vértice tem grau 3). O problema é então reduzir a coloração a um problema de coloração de grafos com duas cores, onde cada aresta conecta vértices de cores diferentes.

Como cada vértice tem grau 3, o grafo resultante é bipartido. Em um grafo bipartido, é sempre possível colorir os vértices com duas cores de forma que nenhuma aresta conecte vértices da mesma cor. Portanto, é possível colorir os convidados com duas cores, de forma que cada convidado aperte as mãos de um convidado de cada cor.

**Exemplo 44** (grafo completo  $K_6$ ). *Seja  $K_6$  o grafo completo com 6 vértices (quaisquer dois vértices estão ligados por uma aresta). As arestas de  $K_6$  são coloridas com duas cores (vermelho e azul).*



*Mostre que sempre existe um triângulo cujas três arestas têm a mesma cor.*

**Solução:** Vamos considerar um vértice arbitrário  $v$  em  $K_6$ . Este vértice está conectado aos outros 5 vértices por 5 arestas. Pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos 3 dessas arestas devem ter a mesma cor. Suponha, sem perda de generalidade, que essas três arestas conectam  $v$  a  $a$ ,  $b$  e  $c$  e são todas vermelhas.

Agora, consideramos o subgrafo completo induzido pelos vértices  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Se qualquer aresta entre  $a$ ,  $b$  e  $c$  for vermelha, temos um triângulo vermelho. Caso contrário, todas as arestas entre  $a$ ,  $b$  e  $c$  são azuis, formando um triângulo azul.

Portanto, independentemente de como colorimos as arestas de  $K_6$ , sempre existe um triângulo monocromático.

**Exemplo 45.** *Considere um tabuleiro  $3 \times 3$ . Cada célula é colorida com uma das três cores: vermelho, verde ou azul. Mostre que sempre existem duas células adjacentes (compartilhando um lado) com a mesma cor.*

**Solução:** Um tabuleiro  $3 \times 3$  tem 9 células e 12 pares de células adjacentes. Se tentarmos colorir as células usando três cores diferentes, o melhor que podemos fazer é garantir que cada cor apareça em exatamente três células. No entanto, cada célula tem quatro células adjacentes (exceto as células nas bordas e cantos). Se cada célula tivesse uma cor diferente de todas as suas adjacentes, precisaríamos de pelo menos 5 cores para cobrir todas as adjacências sem repetição, o que não é possível com apenas 3 cores. Portanto, em qualquer coloração, deve haver pelo menos um par de células adjacentes com a mesma cor.

**Exemplo 46.** *É possível colorir os pontos de um plano infinito com duas cores de modo que não existam dois pontos a uma distância de 1 unidade com a mesma cor?*

**Solução:** Vamos provar que tal coloração é impossível. Suponha que seja possível colorir os pontos do plano com duas cores, digamos vermelho e azul, de modo que não existam dois pontos a uma distância de 1 unidade com a mesma cor.

Considere um triângulo equilátero  $ABC$  com lados de comprimento 1. Como os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão todos a uma distância de 1 unidade entre si, não podem ser todos da mesma cor. Suponha, sem perda de generalidade, que  $A$  é vermelho e  $B$  é azul. Mas agora o vértice  $C$  deve ser vermelho (para não ser da mesma cor que  $B$ ) e azul (para não ser da mesma cor que  $A$ ), o que é uma contradição.

Portanto, não é possível colorir os pontos do plano dessa forma.

**Exemplo 47.** *As arestas de um cubo são coloridas com duas cores. Mostre que sempre existe um ciclo de 4 arestas (um quadrado) cujas arestas têm a mesma cor.*

**Solução:** Um cubo tem 12 arestas e 8 vértices. Cada face do cubo é um quadrado, que é um ciclo de 4 arestas. Como há 2 cores disponíveis, podemos usar o Princípio da Casa dos Pombos para concluir que, ao colorir as arestas de um cubo, pelo menos uma das cores deve ser usada em pelo menos 6 arestas.

Agora, considere duas arestas de uma mesma face do cubo que compartilham um vértice. Essas duas arestas formam dois possíveis ciclos quadrados com outras duas arestas da face oposta. Como há 4 arestas em cada face, qualquer coloração deve resultar em pelo menos um quadrado monocromático. Portanto, sempre existe um ciclo de 4 arestas com a mesma cor.

**Exemplo 48** ( Coloração de Células em um Tabuleiro  $8 \times 8$ ). *Prove que é possível colorir as 64 células de um tabuleiro  $8 \times 8$  com quatro cores diferentes, de modo que não haja quatro células em uma configuração de quadrado  $2 \times 2$  com todas as células da mesma cor.*

**Solução:** Podemos usar uma construção baseada em um padrão repetitivo para colorir o tabuleiro. Dividimos o tabuleiro em blocos  $2 \times 2$ , e em cada bloco aplicamos uma das seguintes quatro cores:

Cor 1	Cor 2
Cor 3	Cor 4

Repetimos esse padrão em todo o tabuleiro  $8 \times 8$ . Em cada bloco  $2 \times 2$ , usamos todas as quatro cores de forma a garantir que nenhum quadrado  $2 \times 2$  no tabuleiro tenha todas as células da mesma cor.

Assim, garantimos que qualquer configuração de quadrado  $2 \times 2$  no tabuleiro terá pelo menos duas cores diferentes.

**Exemplo 49** ( Coloração e Dominós em um Tabuleiro  $8 \times 8$ ). *Prove que, para qualquer coloração de um tabuleiro  $8 \times 8$  de xadrez com duas cores, sempre há um dominó (cobertura de duas casas adjacentes) que cobre uma casa de cada cor.*

**Solução:** Colore o tabuleiro de xadrez com duas cores, digamos preto e branco. O tabuleiro é colorido de forma que cada dominó cobre uma casa preta e uma casa branca (devido à disposição alternada das cores).

Como cada dominó cobre uma casa de cada cor, e o tabuleiro é preenchido com dominós, sempre haverá dominós cobrindo casas de diferentes cores. Portanto, é garantido que qualquer coloração com duas cores terá dominós cobrindo uma casa de cada cor.

**Exemplo 50** (Caminhos e Coloração em um Tabuleiro  $8 \times 8$ ). *Prove que qualquer caminho de comprimento 8 em um tabuleiro  $8 \times 8$  de xadrez, onde cada célula é colorida com uma das duas cores (preto e branco), tem pelo menos dois segmentos consecutivos que são da mesma cor.*

**Solução:** Considere um caminho de comprimento 8 em um tabuleiro  $8 \times 8$ , onde cada célula é colorida com uma das duas cores. Como o caminho passa por 8 células e cada célula tem uma cor preta ou branca, há um total de 7 segmentos consecutivos no caminho.

Se todos os segmentos consecutivos fossem de cores alternadas, isso formaria um padrão de cores alternadas, o que não é possível, pois um caminho de 8 células com uma alternância perfeita de cores precisa de 9 segmentos (o que não é o caso aqui).

Assim, devido à restrição de comprimento do caminho e à quantidade limitada de cores, pelo menos dois segmentos consecutivos devem ter a mesma cor.

**Exemplo 51** (Padrões de Cores em um Tabuleiro  $8 \times 8$ ). *Mostre que em qualquer coloração das 64 células de um tabuleiro  $8 \times 8$  com três cores diferentes, sempre há um quadrado  $2 \times 2$  cujas quatro células são todas da mesma cor.*

**Solução:** Considere a coloração de um tabuleiro  $8 \times 8$  com três cores. Dividimos o tabuleiro em quadrados  $2 \times 2$ . Cada quadrado  $2 \times 2$  tem 4 células.

De acordo com o princípio da casa dos pombos, ao usar três cores para colorir todas as 64 células, e considerando que há  $4 \times 4 = 16$  quadrados  $2 \times 2$ , se cada quadrado  $2 \times 2$  tem pelo menos uma célula da mesma cor, sempre haverá pelo menos um quadrado  $2 \times 2$  onde todas as 4 células são da mesma cor devido à sobreposição de padrões e o número limitado de cores.

Assim, garantimos que em qualquer coloração com três cores, haverá pelo menos um quadrado  $2 \times 2$  com todas as células da mesma cor.

**Exemplo 52** (Coloração dos Números Naturais). *Prove que é possível colorir os números naturais com duas cores de forma que não existam três números naturais de cores distintos tais que  $a < b < c$  tal que  $a + b = c$ .*

**Solução:** Vamos usar uma coloração por duas cores, digamos vermelho e azul. Vamos definir um método de coloração específico:

Colorir um número  $n$  de vermelho se  $n$  é par, e de azul se  $n$  é ímpar.

Vamos mostrar que essa coloração atende à condição desejada. Suponha que temos três números naturais distintos  $a < b < c$  tal que  $a + b = c$ . Se  $a$  e  $b$  forem ambos vermelhos, então  $a$  e  $b$  são pares e  $c = a + b$  é par, o que implica que  $c$  seria vermelho também. No entanto, se  $c$  é vermelho e  $a$  e  $b$  são vermelhos, então  $a$  e  $b$  devem ser ímpares, o que contraria a hipótese.

Se um dos números for azul e outro vermelho, a soma de um número vermelho com um azul é um número ímpar. Portanto, a condição  $a + b = c$  com três números de cores diferentes não se realiza.

Assim, esta coloração satisfaz a condição dada, provando que é possível colorir os números naturais com duas cores de forma que não existam três números distintos  $a < b < c$  com  $a + b = c$ .

**Exemplo 53.** *Mostre que existe uma maneira de colorir os números naturais com 3 cores de tal forma que para qualquer número natural  $n$ , o conjunto de números  $\{n, n + 1, n + 2\}$  contenha pelo menos dois números da mesma cor.*

**Solução:** Considere uma coloração dos números naturais com três cores. Vamos mostrar que sempre haverá dois números com a mesma cor em qualquer conjunto  $\{n, n + 1, n + 2\}$ .

Para um conjunto de três números, temos  $3^3 = 27$  possíveis maneiras de colorir cada número de forma independente. Vamos considerar todos os casos possíveis:

- Se todos os três números em  $\{n, n + 1, n + 2\}$  fossem de cores diferentes, teríamos um total de 3 maneiras de colorir: cada número teria uma cor diferente.

No entanto, ao colorir um conjunto de números, é garantido que pelo menos duas cores serão usadas em um conjunto  $\{n, n + 1, n + 2\}$ . O Princípio da Casa dos

Pombos mostra que, ao usar 3 cores, é inevitável que pelo menos dois números em qualquer conjunto de três tenham a mesma cor.

Portanto, qualquer coloração dos números naturais com três cores garante que em qualquer conjunto de 3 números consecutivos haverá pelo menos dois números com a mesma cor.

**Exemplo 54** (Coloração de Pares de Números). *Prove que é possível colorir os pares de números naturais com duas cores de forma que não existam três pares  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  e  $(e, f)$  da mesma cor tais que  $a + d = b + c$  e  $a + f = b + e$ .*

**Solução:** Vamos considerar a coloração dos pares  $(a, b)$  dos números naturais com duas cores, digamos vermelho e azul. Vamos usar o seguinte método de coloração:

Colorir um par  $(a, b)$  de vermelho se  $a$  e  $b$  tiverem a mesma paridade, e de azul caso contrário.

Verificamos se a condição é satisfeita. Se três pares distintos  $(a, b)$ ,  $(c, d)$ , e  $(e, f)$  são tais que  $a + d = b + c$  e  $a + f = b + e$ , então:

- Se  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  e  $(e, f)$  têm a mesma cor, então todos os pares são coloridos da mesma forma, e a soma das paridades dos números segue a mesma paridade.

Neste caso, a condição dada é satisfeita porque a coloração não permite a configuração de três pares distintos que atendam às condições impostas.

Portanto, é possível colorir os pares de números naturais com duas cores para garantir que não existam três pares que satisfaçam a condição  $a + d = b + c$  e  $a + f = b + e$ .

**Exemplo 55** (Coloração de Números em Progressão Aritmética). *Prove que é possível colorir os números naturais com quatro cores de forma que não existam quatro números naturais distintos  $a < b < c < d$  em progressão aritmética, onde todos os quatro números têm a mesma cor.*

**Solução:** Vamos usar uma coloração com quatro cores, digamos  $C_1, C_2, C_3$ , e  $C_4$ . A ideia é utilizar um argumento de contagem e o princípio da casa dos pombos.

Se tivermos uma coloração com quatro cores, e considerarmos quatro números em progressão aritmética  $a < b < c < d$ , eles devem satisfazer a condição de que a

diferença entre quaisquer dois termos é a mesma. Para cada uma das cores, haverá pelo menos uma progressão aritmética de quatro termos com pelo menos uma cor.

Devido ao fato de que há apenas quatro cores e o número de possibilidades para escolher os quatro números cresce rapidamente, o Princípio da Casa dos Pombos garante que haverá uma configuração de quatro números em progressão aritmética que todos têm a mesma cor.

Portanto, com quatro cores, é possível evitar a configuração de quatro números em progressão aritmética todos da mesma cor.

**Exemplo 56** (Coloração de Quadrados Mágicos). *Prove que é possível colorir os números de 1 a 9 em um quadrado mágico  $3 \times 3$  com duas cores de forma que não existam duas linhas, duas colunas ou duas diagonais do quadrado com todos os números da mesma cor.*

**Solução:**

Vamos usar uma coloração dos números de 1 a 9 com duas cores, digamos vermelho e azul.

Para um quadrado mágico  $3 \times 3$ , os números são dispostos de forma que a soma dos números em cada linha, coluna e diagonal é a mesma. Para garantir que nenhuma linha, coluna ou diagonal tenha todos os números da mesma cor, devemos usar um método de coloração alternada.

Podemos usar um padrão de coloração de modo que cada linha, coluna e diagonal contenham pelo menos dois números de cada cor. Por exemplo:

<i>R</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>
<i>E</i>	<i>D</i>	<i>R</i>

Onde *R* representa a cor vermelha e *B* a cor azul. Assim, garantimos que em qualquer linha, coluna ou diagonal, haverá pelo menos um número de cada cor.

Portanto, ao usar uma coloração alternada e garantindo que nenhuma linha, coluna ou diagonal seja unicolor, a coloração atende à condição dada.

A exemplo do que fizemos nos capítulos anteriores, deixaremos a seguir uma

lista de outras questões interessantes sobre o tema para que possam servir de fonte para aprofundamento ou fonte para quem deseja introduzir o assunto tratado neste capítulo para públicos de diversos níveis; desde o iniciante que está tendo o seu primeiro contato com o assunto, até os mais experientes que desejam alargar seus conhecimentos sobre o tema aqui abordado.

### 5.3 Alguns problemas propostos sobre coloração

**Problema 41.** *Prove que qualquer coloração dos pontos em um plano euclidiano com 2 cores garante que existe uma linha reta que passa por pelo menos dois pontos da mesma cor.*

**Problema 42.** *Mostre que qualquer coloração dos pontos em um triângulo equilátero com 3 cores garante que pelo menos dois dos pontos em cada uma das três linhas médias do triângulo serão da mesma cor.*

**Problema 43.** *Prove que em qualquer coloração dos vértices de um triângulo equilátero com 3 cores, existe pelo menos um vértice que tem a mesma cor que os outros dois vértices do triângulo.*

**Problema 44.** *Prove que é possível colorir as faces de um poliedro convexo com 4 cores de forma que não existam quatro faces adjacentes todas da mesma cor.*

**Problema 45.** *Prove que é possível colorir as arestas de um cubo com 2 cores de forma que exista um cubo menor dentro do cubo original cujas arestas são todas da mesma cor.*

**Problema 46.** *Mostre que é possível colorir uma grade  $n \times n$  com 2 cores de forma que não existam quatro quadrados  $2 \times 2$  adjacentes com todas as células da mesma cor para  $n \geq 4$ .*

**Problema 47.** *Mostre que é possível colorir os números naturais com 4 cores de forma que não exista uma progressão aritmética de comprimento 4 onde todos os números são da mesma cor.*

**Problema 48.** *Mostre que é possível colorir os números naturais com 3 cores de forma que, para qualquer número natural  $n$ , o conjunto  $\{n, n + 1, n + 2, n + 3\}$  contenha pelo menos dois números da mesma cor.*

# Capítulo 6

## Proposta de ensino

### 6.1 Proposta de ensino

**Objetivo Geral:** Desenvolver habilidades de resolução de problemas por meio do estudo de conceitos fundamentais como paridade, argumentos combinatórios, contagem dupla, invariância e colorimento, promovendo o pensamento lógico e a criatividade matemática.

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Fundamental I, II e médio.

#### 1. Habilidades a serem Desenvolvidas:

Reconhecer e aplicar a noção de paridade em diversos contextos matemáticos. Utilizar argumentos combinatórios para resolver problemas de contagem. Desenvolver soluções criativas e eficientes por meio de contagem dupla. Compreender e aplicar o princípio da invariância em problemas lógicos. Utilizar técnicas de colorimento como ferramenta para resolver problemas de grafos e geometria.

#### 2. Conteúdos e Sequência Didática:

##### Aula 1: Introdução à Paridade

A Paridade pode ser introduzida no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental I, onde os alunos começam a lidar com conceitos básicos de números e suas propriedades.

##### Objetivos Específicos:

Compreender o conceito de paridade (números pares e ímpares). Aplicar a paridade em problemas simples, como quebra-cabeças ou jogos.

**Atividades:** Iniciar com exemplos do dia a dia envolvendo paridade (quantidade de pares de sapatos, cadeiras ao redor de mesas, etc.). Apresentar problemas de lógica

que envolvem a distinção entre números pares e ímpares, como: É possível formar pares com 7 pessoas?

Jogo da paridade: Os alunos jogam um jogo de adicionar números consecutivos, onde o objetivo é determinar se a soma final será par ou ímpar.

### **Aula 2:** Argumentos Combinatórios

O Argumento Combinatório é mais adequado para o 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II e para o Ensino Médio. O raciocínio combinatório envolve a contagem e a análise de diferentes possibilidades, exigindo uma base sólida em aritmética e um pensamento mais abstrato.

#### **Objetivos Específicos:**

Introduzir os conceitos básicos de combinatória. Resolver problemas simples que envolvam o princípio fundamental da contagem e combinações.

**Atividades:** Discussão inicial sobre diferentes maneiras de combinar objetos.

**Problemas de contagem como:** “De quantas maneiras podemos sentar 3 alunos em 5 cadeiras?” Introduzir o conceito de princípio aditivo e multiplicativo com atividades práticas.

### **Aula 3:** Contagem Dupla

A Contagem Dupla deve ser abordada no ensino médio, especialmente a partir do 1º ano, quando os alunos começam a se aprofundar em temas de combinatória e lógica matemática. Nessa fase, eles já possuem maturidade suficiente para lidar com problemas que exigem raciocínio mais abstrato e multifacetado. A técnica é importante porque promove o desenvolvimento de habilidades analíticas ao ensinar os estudantes a observar uma situação de diferentes ângulos e perceber que o mesmo resultado pode ser obtido por dois métodos distintos. Isso reforça a compreensão sobre a consistência das estratégias matemáticas e aprimora o raciocínio lógico.

#### **Objetivos Específicos:**

Explicar a ideia de contagem dupla, onde um conjunto é contado de duas maneiras diferentes. Resolver problemas que envolvam Contagem Dupla.

#### **Atividades:**

Problema clássico: “Quantos aperto de mãos ocorrem em uma sala com 10 pessoas, se cada pessoa cumprimenta todas as outras uma vez”? Demonstração de como

resolver este problema com a contagem dupla. Propor novos desafios para os alunos aplicarem a técnica de contagem dupla.

#### **Aula 4: Invariância**

O conceito de invariância pode ser trabalhado do 6º a 9º anos do Ensino Fundamental II, mas com maior ênfase no Ensino Médio. A invariância envolve a compreensão de propriedades que permanecem constantes em diferentes situações ou transformações. Esse é um conceito abstrato que requer um nível de maturidade matemática alcançado tipicamente no final do Ensino Fundamental II e no Ensino Médio.

##### **Objetivos Específicos:**

Compreender o princípio da invariância, ou seja, identificar características que não mudam em um problema. Resolver problemas que envolvem análise de invariantes.

**Atividades:** Exemplo prático: “Jogo das moedas”: Dispor moedas numa mesa e criar regras de movimento. O objetivo é que os alunos percebam o que permanece invariável (por exemplo, a soma de movimentos ou posições). Problemas que envolvem invariância em jogos de tabuleiro.

#### **Aula 5: Colorimento**

Pode ser introduzido no 7º ano do Ensino Fundamental II, com aprofundamento no 8º e 9º anos. O colorimento é um conceito que pode ser explorado através de problemas de grafos e geometria, envolvendo a visualização e a resolução de problemas complexos de forma lúdica.

##### **Objetivos Específicos:**

Introduzir o conceito de colorimento em grafos e na geometria. Resolver problemas práticos que envolvam colorir de forma eficiente.

**Atividades:** Introduzir o conceito de grafos com exemplos simples, como colorir mapas de países vizinhos de maneira que países adjacentes tenham cores diferentes. Problema clássico: “É possível colorir um tabuleiro de xadrez 8x8 com duas cores de modo que peças adjacentes tenham cores diferentes?”

### **3. Avaliação:**

A avaliação será contínua e baseada na participação dos alunos nas atividades práticas, resolução de problemas propostos e discussões em grupo. Ao final de

cada tópico, propor um pequeno debate onde os alunos possam aplicar os conceitos aprendidos.

#### **4. Recursos Didáticos:**

Material manipulativo (moedas, fichas coloridas, etc.), folhas de atividades e problemas desafiadores. Lousa, piloto ou projetor para visualização de grafos e tabelas.

#### **5. Metodologia:**

A metodologia será centrada em problemas práticos, envolvendo interação em grupo e raciocínio lógico. As aulas seguirão o modelo de apresentação de conceito, exemplificação prática e resolução de problemas. Haverá espaço para debates e sugestões de soluções alternativas, promovendo o pensamento crítico.

Esses temas apesar de não serem comuns aos currículos escolares pode trazer benefícios importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático abstrato e a capacidade de resolução de problemas, habilidades fundamentais para o aprendizado contínuo da matemática.

## **6.2 Conclusão**

Ao longo desta dissertação, exploramos cinco técnicas essenciais de resolução de problemas matemáticos: **Paridade, Argumentos Combinatórios, Contagem Dupla, Invariância e Colorimentos**. Cada uma delas apresenta características únicas, mas inter-relacionadas, que ampliam a capacidade de análise e resolução de problemas matemáticos em diferentes contextos. A seguir, sintetizamos as principais descobertas e potenciais implicações pedagógicas de cada uma dessas técnicas.

A noção de paridade (se um número é par ou ímpar) é fundamental para entender propriedades básicas dos números inteiros. Ela é utilizada em várias áreas da Matemática, desde aritmética básica até Teoria dos Números e Álgebra. Além disso, compreender a paridade ajuda os alunos a desenvolver habilidades de raciocínio lógico e a reconhecer padrões em sequências numéricas. No ensino básico, a paridade pode ser introduzida como uma maneira simples e visual de verificar padrões em operações numéricas e em problemas de lógica.

A contagem dupla é essencial em problemas de contagem e probabilidade. Ela ensina os alunos a abordar um problema de duas maneiras diferentes para garantir que todos os casos sejam contados corretamente. A contagem dupla é especialmente útil em situações em que há várias maneiras de contar uma mesma configuração, ajudando os alunos a desenvolver habilidades úteis em resolução de problemas. No ensino básico, essa técnica pode ser aplicada a problemas de combinatória e probabilidade, oferecendo aos alunos uma ferramenta intuitiva para explorar diferentes abordagens em um problema, ajudando a desenvolver a habilidade de justificar respostas.

O Argumento combinatório está intimamente ligado à contagem e à probabilidade, mas vai além ao introduzir técnicas mais avançadas de abordagem de problemas de contagem. Ele inclui conceitos como permutações, combinações e princípio multiplicativo e aditivo, que são cruciais em diversas áreas da Matemática, como Teoria dos Conjuntos, Álgebra e Estatística. No ensino básico, o argumento combinatório pode ser usado para ensinar alunos a visualizar e estruturar problemas, incentivando a exploração de soluções alternativas para problemas de contagem e organização.

O conceito de invariante é uma propriedade de um sistema que permanece constante sob certas transformações. Esse conceito é importante porque ajuda os alunos a desenvolverem uma compreensão mais profunda de padrões e estruturas Matemáticas. Além disso, é frequentemente utilizado em problemas de resolução de problemas, especialmente em Geometria e Álgebra. No ensino básico, a invariância pode ser usada para introduzir noções de conservação e simetria, temas que podem ser explorados tanto em matemática quanto em ciências.

Por fim, o colorimento é uma técnica usada para resolver problemas de grafos, que são modelos matemáticos de redes ou sistemas de conexão. Ensinar aos alunos sobre colorimento ajuda a desenvolver habilidades de pensamento abstrato e lógico, bem como a compreensão de conceitos fundamentais em Teoria dos Grafos, que são aplicáveis em muitos campos, incluindo Ciência da Computação, Engenharia e Matemática Discreta. No ensino básico, o colorimento pode ser apresentado de maneira lúdica, incentivando a exploração de padrões e soluções criativas para problemas de divisão e organização.

Cada uma dessas técnicas oferece uma abordagem única para a resolução de

problemas e contribui para o desenvolvimento de habilidades analíticas e criativas nos alunos. Ao introduzi-las no ensino básico, é possível promover um aprendizado ativo, que estimula o pensamento crítico e prepara os estudantes para desafios mais complexos na matemática e em outras disciplinas.

Em resumo, o ensino desses conceitos básicos de Matemática não apenas prepara os alunos para resolver problemas específicos, avaliações da OBMEP, mas também os equipa com habilidades cognitivas e analíticas essenciais que são aplicáveis em várias áreas da vida e em campos acadêmicos e profissionais diversos.

### **6.3 Sugestões para pesquisas futuras**

A pesquisa sobre as técnicas de resolução de problemas matemáticos, como paridade, argumento combinatório, contagem dupla, invariância e colorimento, pode ser disseminada de várias maneiras, especialmente no contexto de inovações tecnológicas e de suas aplicações em outras áreas da matemática. Abaixo estão algumas direções promissoras para pesquisa futura.

#### **1. Integração com Tecnologia Educacional**

Uma área emergente é o uso de softwares matemáticos e aplicativos educativos para aprimorar a compreensão e a aplicação dessas técnicas. Ferramentas como GeoGebra, Wolfram Alpha, ou aplicativos interativos baseados em realidade aumentada (RA) e inteligência artificial (IA) poderiam ser exploradas para ajudar estudantes e professores a visualizar conceitos complexos, simular problemas combinatórios e explorar propriedades matemáticas de maneira mais interativa. As seguintes questões poderiam orientar futuras investigações:

- Como softwares educacionais podem ser adaptados para explorar os conceitos de paridade, contagem dupla e invariância de maneira mais interativa e visual?
- Seria possível desenvolver algoritmos ou simuladores que usem técnicas combinatórias para resolver problemas reais, como redes de comunicação ou otimização de tráfego?

- Aplicativos móveis podem ser projetados para automatizar a criação de problemas matemáticos baseados em colorimento ou outros argumentos combinatórios, facilitando a prática independente dos alunos?

## **2. Gamificação de Conceitos Combinatórios**

Outra linha de pesquisa envolve a Gamificação de conceitos matemáticos. Jogos que usam lógica combinatória e invariância poderiam ser uma forma eficaz de engajar estudantes. Pesquisas futuras poderiam focar no desenvolvimento de jogos educativos que desafiem os alunos a aplicar princípios de paridade ou contagem dupla para resolver problemas, proporcionando um aprendizado ativo e alegre.

## **3. Aplicações em Outras Áreas da Matemática**

As técnicas anunciadas têm o potencial de serem aplicadas em várias outras áreas da matemática e ciências aplicadas. Algumas áreas para futuras explorações incluem:

- Teoria dos Grafos: Paridade e colorimento têm aplicações diretas na teoria dos grafos, especialmente em problemas de coloração de grafos e na análise de propriedades topológicas de redes.
- Teoria dos Números: A paridade pode ser aplicada para explorar problemas envolvendo somas de números primos ou compostos, enquanto a contagem dupla pode ser proveitoso na análise de funções multiplicativas ou somatórias.
- Álgebra Linear e Otimização: Argumentos de contagem e invariância podem ser aplicados no estudo de redes e algoritmos otimizados em problemas de álgebra linear, como o problema de programação linear e redes de fluxo.

## **4. Pesquisa Interdisciplinar**

Há também um grande potencial para pesquisa interdisciplinar, onde essas técnicas são aplicadas a problemas em ciências da computação, engenharia e economia. Por exemplo, métodos de contagem dupla e invariância podem ser usados em algoritmos para otimização de recursos, redes de dados e até mesmo em modelos econômicos.

## **5. Ensino Personalizado e IA**

Com a expansão da Inteligência Artificial no campo educacional, futuras pesquisas podem investigar como sistemas de ensino personalizados, baseados em IA, podem ser

usados para identificar dificuldades específicas dos alunos em relação a essas técnicas e dar um feedback personalizado em tempo real. O uso de Machine Learning pode ajudar a antever onde os alunos estão mais propensos a errar e ajustar os conteúdos para maximizar o aprendizado.

Esse foco em tecnologia e novas áreas de aplicação pode abrir portas para práticas de ensino mais eficazes e engajar alunos em um aprendizado mais profundo e interativo.

## **6.4 Considerações finais**

Esses cinco temas não apenas contribuíram para o desenvolvimento do conteúdo da dissertação, mas também moldaram meu próprio processo de aprendizado e resolução de problemas. Ao explorar suas aplicações e interconexões, expandi meu repertório metodológico e passei a enxergar a matemática não apenas como um conjunto de regras, mas como uma ferramenta dinâmica e flexível para resolver problemas de maneira criativa e rigorosa. O processo de elaboração da dissertação, nesse sentido, foi uma jornada de descoberta e refinamento intelectual, onde cada conceito trouxe visões valiosas para minha formação acadêmica.

## Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura - 3ª edição**. Edgard Blucher, 2006.
- [2] BARTLE, Robert G.; **Introduction to Real Analysis**. Willey, 2011.
- [3] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Edgard Blucher, 1974.
- [4] BURTON, David M. **Elementary number theory**. Tata McGraw-Hill Education, 2006.
- [5] CAN, V.Q.B, Pohoatǎ, C., **Old and New inequalities, Volume 2**, GIL Publishing House, 2008.
- [6] CHARALAMBIDES, Charalambos A. **Enumerative combinatorics**. CRC Press, 2018.
- [7] CHARTRAND, Gary; LESNIAK, Linda. **Graphs Digraphs. 4. ed**. Boca Raton: Chapman Hall/CRC, 2005.
- [8] CLUBE de Matemática da OBMEP. **Disseminando o estudo da matemática** . Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/numeros-especiais-pares-e-impares/numeros-especiais-pares-e-impares-problemas-envolvendo-paridade/>. Acesso em 25 set. 2023.
- [9] CVETKOVSKI, Zdravko; **Inequalities - Theorems, Techniques and Selected Problems**. Editora Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [10] DESCARTES, René. **Discurso do Método**. Coleção LPM Pocket, 2005.

- [11] DINIZ, I.C., CRUZ, J.R. **Probabilidade: exercícios comentados Vol I**. Livraria da Física USP, 2017.
- [12] DOLCE, Osvaldo, POMPEO, J. Nocolau **Fundamentos de Matemática Elementar - vol 05**, Atual Editora, 1992.
- [13] EULER, L. (1736). **Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis**. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 8, 128-140.
- [14] FELLER, William. **An introduction to probability theory and its applications**. Willey, 1957.
- [15] FOMIN, Dmitri and GENKIN, Sergey and Itenberg, Ilia. **Mathematical circles**. Universities Press, 1996.
- [16] GRAHAM, Ronald L.; KNUTH, Donald E.; PATASHNIK, Oren. **Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science**. 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.
- [17] GOMES, C. A. GOMES, J. M. **Tópicos de Matemática Elementar: Indução e Teoria Elementar dos Números, v.02**. Fortaleza: VestSeller, 2012.
- [18] HOLANDA, Bruno. **Programa Olímpico de Treinamento: Curso de Combinatória - Nível 2**. Disponível em: [czm9f9di84088.pdf](http://czm9f9di84088.pdf) (impa.br). Acesso em: 11 de dez. 2023.
- [19] KOSHY, Thomas. **Discrete mathematics with applications**. Elsevier, 2004.
- [20] L.E. Dickson. **History of the Theory of Numbers**, Vol. 2, Carnegie Institution of Washington, 1920.
- [21] LOPES, Davi. Invariantes: como algo que não muda mudará sua vida. [S. l.: s. n.], 2012. Material da XV Semana Olímpica – Maceió, AL, Nível 1. - 27 de janeiro de 2012.
- [22] LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P., WAGNER, E., MORGADO, A. C., **A Matemática do Ensino Médio-Volume 2**, SBM, 1998.

- [23] MORGADO, A.C., CARVALHO, P.C.P. **Matemática Discreta**. Coleção PROF-MAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [24] MORGADO, A.C., CARVALHO, P.C.P., PITOMBEIRA, J., FERNANDEZ, PEDRO **Análise Combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [25] OLIMPÍADA Brasileira de Matemática, 2024. **OBM**. Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/bibliografia/>. Acesso em : 25 abr. 2024.
- [26] PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1978.
- [27] POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995
- [28] ROSEN, Kenneth H. **Discrete Mathematics and Applications**. McGraw-Hill, 1999.
- [29] ROSS, Sheldon. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. Bookman Editora, 2009.
- [30] SHINE, Carlos. Invariantes e Monoinvariantes. POTI - Pólos Olímpicos de Treinamento. 2020.
- [31] SKIENA, S. S.. **The Algorithm Design Manual**. Springer, 2008.
- [32] ROSEN, Kenneth H. **Discrete Mathematics and Its Applications**. McGraw-Hill, 2012.
- [33] WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory**. 2. ed.. Prentice Hall, 2001.
- [34] ZEITZ, Paul. **The art and craft of problem solving**. John Wiley & Sons, 2017.