PROFMAT

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade Federal Fluminense

Recurso Educacional:
Ensinando geometria a partir das instruções de Origami

MARCELO DA SILVA SOUSA

ORIENTADORA : DIRCE UESU PESCO

Niterói - 2024

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

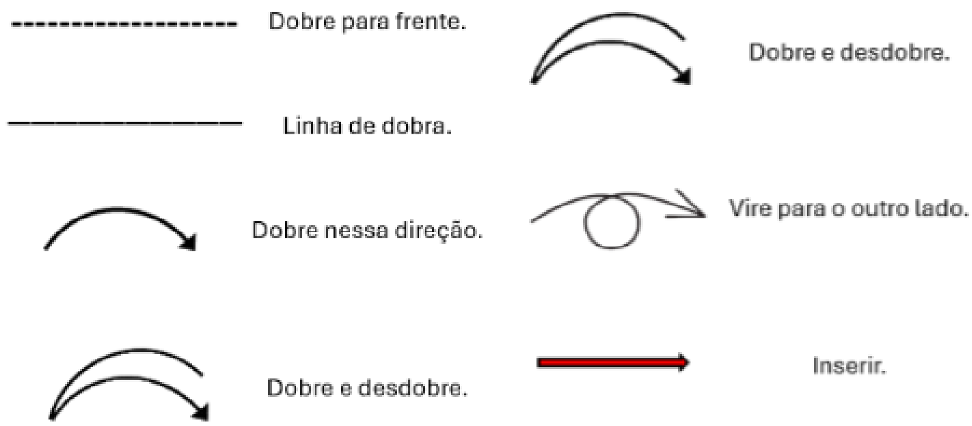
Esse recurso educacional é fruto da dissertação de mestrado intitulada *"GEOMETRIA COM DOBRADURAS: EXPLORANDO A TEORIA DE VAN HIELE COM ORIGAMI"* e consiste em uma proposta que se inspira nos moldes do programa *Origametria* (*https://origametria.com/*), desenvolvido pelo Centro de Origami de Israel, que utiliza a arte do origami para ensinar geometria nas escolas. Ele foi aprovado pelo Ministério da Educação de Israel e está implementado em diversas escolas do país desde 2017. Um dos aspectos desta abordagem é que, durante o processo de dobragem de algumas atividades, os alunos não serão informados sobre o produto final, o que permitirá que eles concentrem sua atenção nas formas geométricas em si, em vez de associarem as partes dobradas a elementos concretos, como animais ou objetos.

Antes da aplicação das atividades, é ideal que seja realizada uma avaliação diagnóstica para identificar o nível de compreensão prévio dos alunos de acordo com os níveis de Van Hiele. Essa avaliação ajudará a ajustar as atividades subsequentes de acordo com as necessidades específicas dos alunos. Nesse recurso educacional, utilizaremos uma avaliação diagnóstica adaptada de Nasser (2011) e Ursinski (1982).

A proposta aqui apresentada não substitui as atividades regulares da aula de matemática, mas sim as complementam, oferecendo um recurso extra para que os alunos consolidem seus conhecimentos de forma divertida e engajadora. É importante ressaltar que os conteúdos devem ser trabalhados em sala de aula antes da aplicação desta atividade.

Os manuais que apresentam diagramas de passo a passo para a construção de origamis geralmente utilizam símbolos específicos para indicar as instruções de dobragem, em vez de descrições textuais (MONTROLL, 2011). No entanto, como os alunos podem não estar familiarizados com esses símbolos, as atividades desta dissertação incluem tanto os símbolos quanto às descrições do passo a passo, descritos na Figura 1. Observe que a cada dobra forma-se a linha de vinco.

Figura 1 - Símbolos usados nos diagramas



Fonte: Adaptado de Montroll (2011) e Kawamura (2001).

2. PROPOSTAS

Avaliação Diagnóstica: O teste de Van Hiele

O teste presente no apêndice foi adaptado dos testes de Usiskin (1982) e Nasser (2011) para servir como uma ferramenta diagnóstica eficaz no início do ano letivo, permitindo que o professor determine o nível de compreensão geométrica dos alunos.

Como os níveis de Van Hiele são estruturados de forma hierárquica, espera-se que um aluno que atinge o nível de abstração também tenha dominado os níveis anteriores. No entanto, isso nem sempre ocorre. Por exemplo, um aluno pode compreender as propriedades de certas figuras geométricas sem, no entanto, conseguir reconhecer todas as formas correspondentes. Isso sugere que o aluno pode ter lacunas na formação de seu pensamento geométrico. Geralmente, essas deficiências podem ser corrigidas ao longo de alguns meses com um curso de geometria bem planejado e executado.

Nasser (2011) afirma que um aluno é considerado como tendo alcançado determinado nível quando responde corretamente a pelo menos 60% das questões do teste correspondente. Ou seja, 3 em cada 5 questões propostas. Usiskin (1982) escolheu o critério de "3 de 5" para equilibrar os tipos de erro estatístico envolvidos, especialmente entre o erro do Tipo I (falso positivo) e do Tipo II (falso negativo). O critério "3 de 5" reduz a probabilidade de erro do Tipo II, ou seja, a chance de não identificar um aluno que realmente tem o nível de proficiência desejado. Ao definir que o aluno deve acertar 3 de 5 questões, ele aumenta a probabilidade de classificar corretamente os estudantes que realmente estão prontos para o próximo nível, mesmo que haja um risco um pouco maior de cometer um erro do Tipo I (classificar um aluno erroneamente).

Após identificar os níveis de compreensão dos alunos, o professor pode planejar a abordagem pedagógica mais adequada para a turma. É comum encontrar alunos em diferentes estágios de raciocínio geométrico dentro de uma mesma classe, e, dependendo do tamanho da turma, as atividades propostas aqui são um caminho para poder alencar essa heterogeneidade da turma, mas, mesmo assim, o ensino deve ser direcionado levando em consideração o nível de compreensão alcançado pela maioria dos alunos da turma.

Após um certo período de trabalho, o mesmo teste pode ser reaplicado, esse tempo não é pré-definido e varia de acordo com os alunos e turmas.

> O progresso de níveis não ocorre num período muito curto de tempo. É necessário o amadurecimento nas estratégias, objetos de estudo e linguagem características daquele nível. (NASSER, 2011)

Atividade 1 - Dobrando e Classificando Triângulos

Objetivo: Classificar os triângulos com base nas medidas dos seus lados ou nos ângulos internos.

Ano escolar: 6° ano do Ensino Fundamental

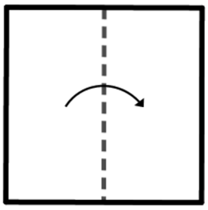
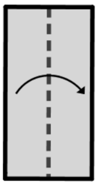
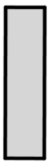
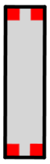
Habilidade: (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
Material necessário:
- Projetor/tela para exibir os slides.
- Folhas quadradas para origami (15cm x 15 cm).
- Material impresso.
- Régua.

Os alunos irão fazer duas construções de papel: uma régua simples que eles irão utilizar para medir os lados e os ângulos de um cisne. Durante as construções, os alunos deverão responder às perguntas destinada a cada etapa, sendo que, na construção do cisne, o ideal é que o aluno não tenha conhecimento do que está sendo dobrado, para que ele possa focar nos elementos somente pensando na geometria nas dobras.

1° Parte: Construção da Régua

Projete os diagramas seguido das instruções e peça que os alunos respondam as perguntas de cada etapa.

Quadro 1: Diagramas, instruções e perguntas na parte 1 da atividade 1

Diagrama	**Perguntas após essa etapa.**
	Nível 0: Visualização 1) Quais polígonos podemos identificar?
	Nível 0: Visualização 2) Que ângulos podemos identificar na figura?
	Nível 0: Visualização 3) Desenhe todos os ângulos retos presentes nessa régua.
	Sem perguntas nessa parte. Mostre aos alunos como podem utilizar a régua.

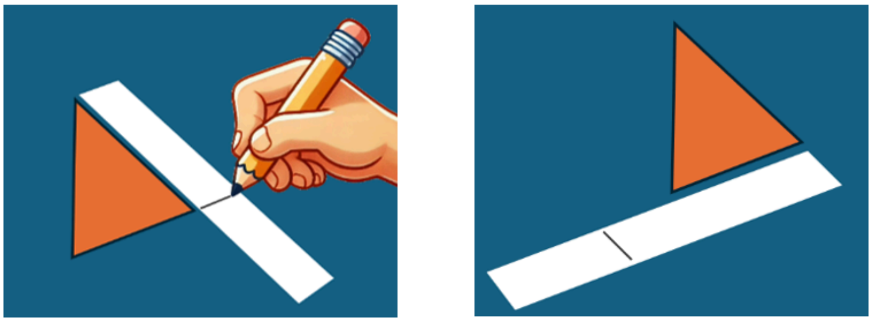
Fonte: Elaborado pelo autor.

Orientações ao professor:

A régua produzida pode ser utilizada para verificar se um triângulo possui lados iguais, basta fazer a marcação com um lápis ou caneta e comparar os lados, conforme a figura 2, onde se vê que o triângulo possui dois lados diferentes

.

Figura 2: Usando a régua para medir.



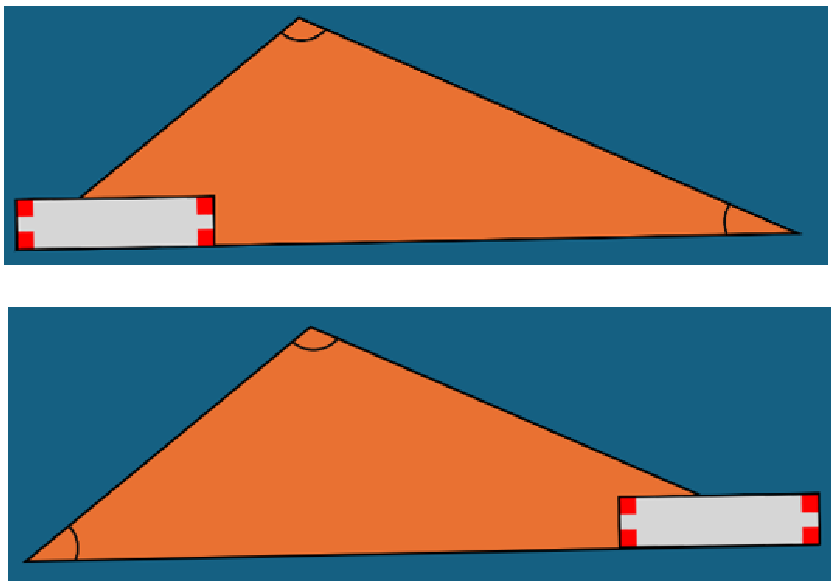
Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso, os alunos podem chegar a conclusão depois da medição, e com o valor aproximado, ao classificar um triângulo quanto ao tamanho dos lados, já que essas perguntas farão parte da próxima parte da atividade.

A régua também pode ser usada para determinar se algum ângulo é maior, menor ou igual a 90°, basta alinhá-lo ao ângulo tentando encaixá-lo.

Por exemplo, na figura 3, é notado que os ângulos são menores do que 90°.

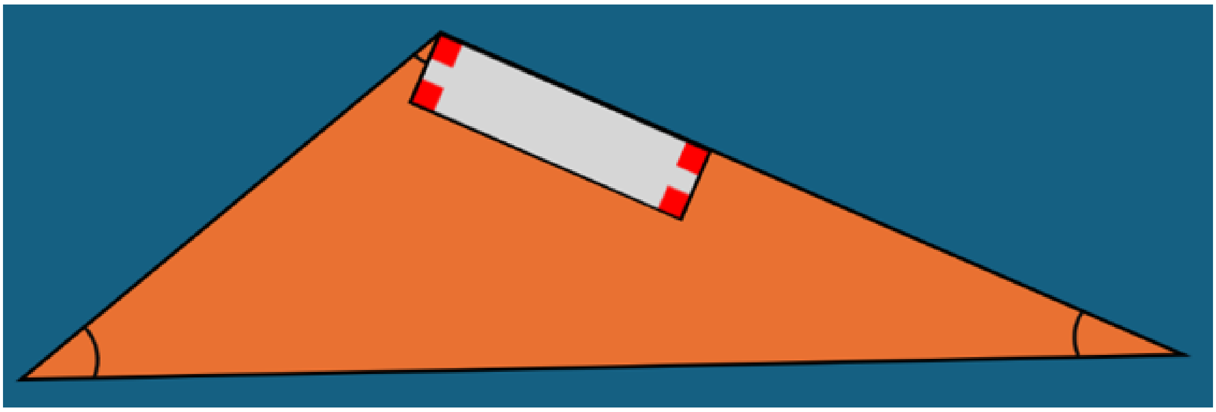
Figura 3: Usando a régua para medir ângulos agudos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso o ângulo seja obtuso, ele irá sobrar além dos 90° marcados em vermelho, conforme a figura 4, por exemplo.

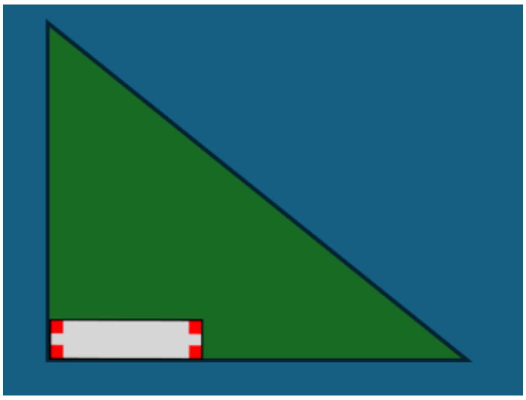
Figura 4: Usando a régua para medir ângulo obtuso.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso o ângulo seja reto, o ângulo da régua irá encaixar perfeitamente, conforme a figura 5, por exemplo.

Figura 5: Usando a régua para medir ângulo reto.



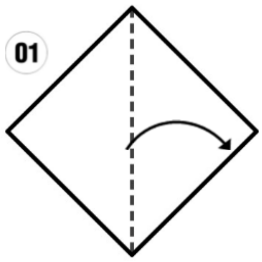
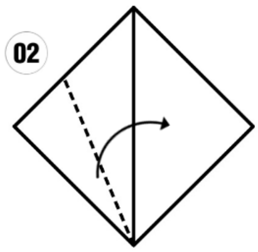
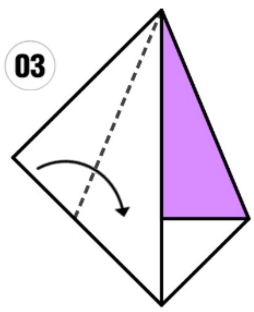
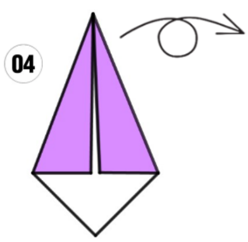
Fonte: Elaborado pelo autor.

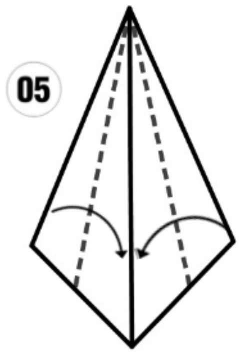
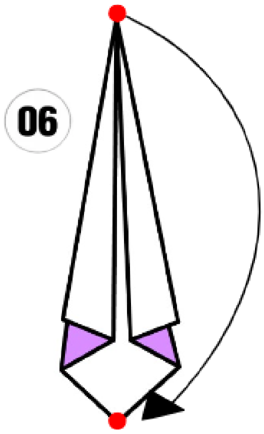
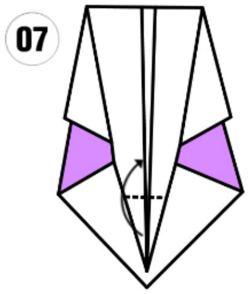
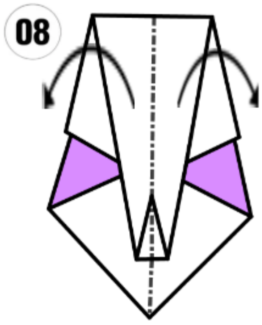
Assim como mencionado anteriormente, com essa medição, os alunos podem classificar os triângulos em relação aos ângulos, pois essas perguntas irão aparecer ao longo da próxima parte da atividade. Para treinar o uso dessa ferramenta, alguns exemplos podem ser apresentados para os alunos se familiarizarem com a régua produzida, incluindo uma atividade de incentivar aos alunos para classificar os ângulos de objetos presentes na sala de aula.

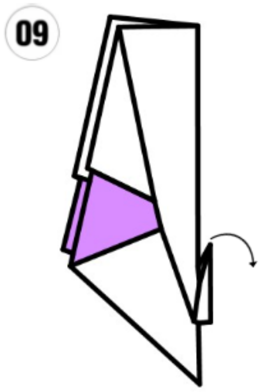
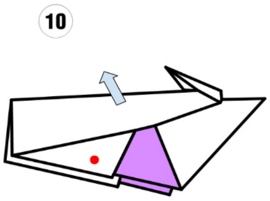
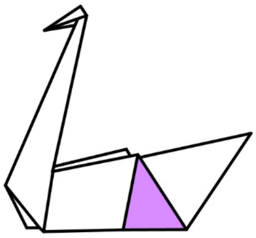
2° Parte: Construção do Cisne

A dinâmica desta atividade será semelhante à da construção da régua, mas desta vez com um processo um pouco mais extenso. Durante o procedimento, ao responder questões sobre a igualdade dos lados de um triângulo, por exemplo, os alunos devem utilizar a régua construída na primeira parte, usando um lápis para fazer as marcações. Para classificar os triângulos encontrados em relação aos ângulos, os alunos também podem utilizar os cantos da régua construída.

Quadro 2: Diagramas, instruções e perguntas da parte 2

Diagrama	Pergunta após a etapa
	Nível 0: Visualização 1) Quais polígonos podemos encontrar? Nível 2: Análise 2) Qual é a soma dos ângulos internos em qualquer triângulo?
	Sem perguntas após essa etapa.
	Nível 0: Visualização 3) Que tipos de ângulos podemos identificar? 4) Que tipos de triângulos podemos identificar?
	Nível 0: Visualização 5) Quantos triângulos retângulos estão presentes nessa parte? 6) Que tipos de polígonos podemos encontrar aqui?

	Nível 2: Análise 7) O quadrilátero formado possui pares de lados paralelos?
	Nível 0: Visualização 8) Quantos triângulos obtusângulos aparecem aqui? E quantos triângulos acutângulos?
	Nível 0: Visualização 9) Nessa etapa contém alguém triângulo isósceles? Quantos?
	Sem perguntas após essa etapa.

	Sem perguntas após essa etapa.
	Sem perguntas após essa etapa.
	Nível 0: Visualização 10) Quais tipos de triângulos podemos encontrar?

Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, seguem-se as perguntas a serem realizadas e o manual do cisne.

PERGUNTAS DA ATIVIDADE 1

1) Que tipo de polígonos podemos identificar?

____

2) Que ângulos podemos identificar na figura?

____

3) Desenhe todos os ângulos retos presentes na régua que você produziu.

4) Quais polígonos podemos encontrar?

5) Qual é o resultado da soma dos ângulos internos em qualquer triângulo?

6) Que tipos de ângulos podemos identificar?

7) Que tipos de triângulos podemos identificar?

8) Quantos triângulos retângulos estão presentes nessa parte?

9) Que tipos de polígonos podemos encontrar aqui?

10) O quadrilátero formado possui pares de lados paralelos?

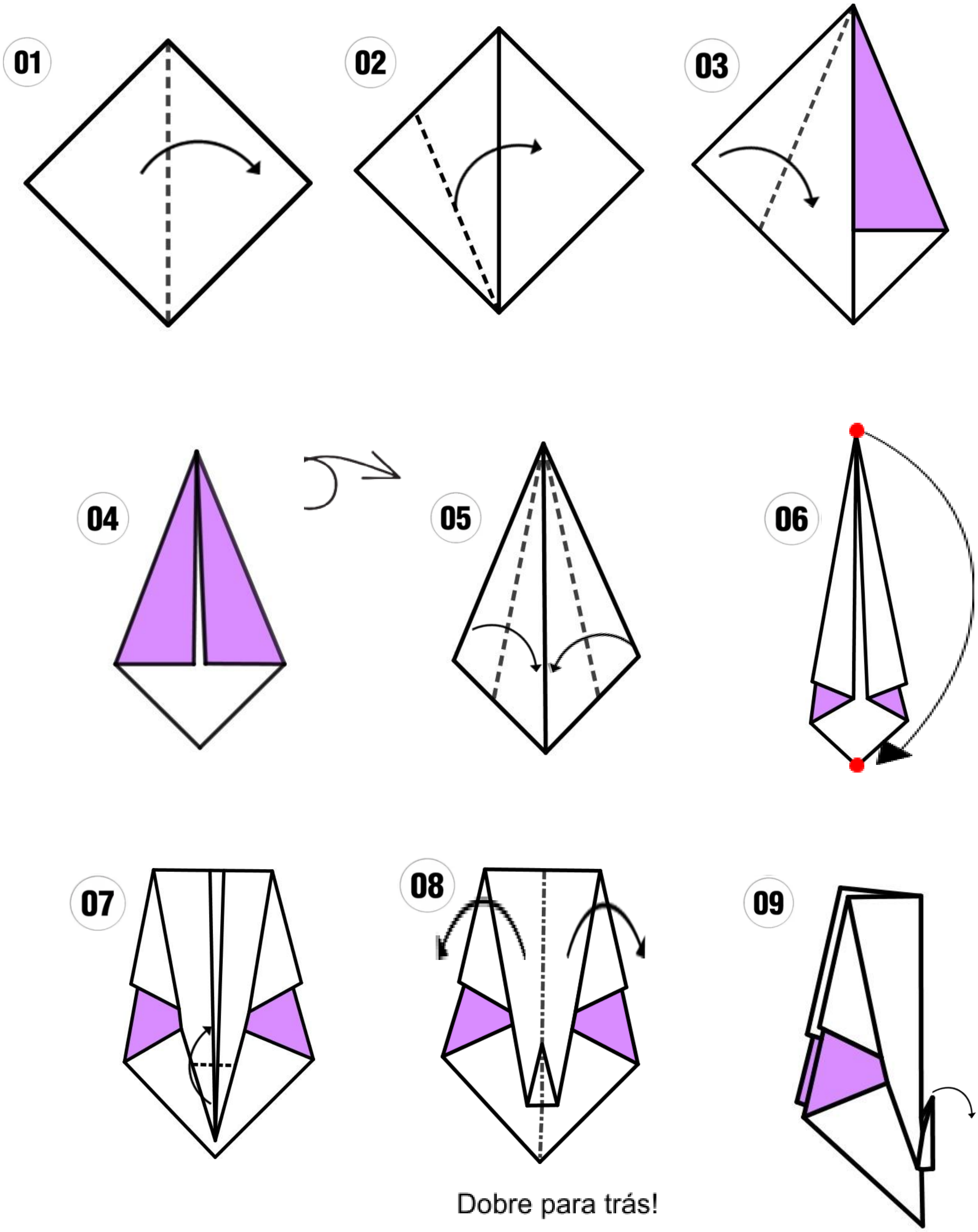
11) Quantos triângulos obtusângulos aparecem aqui? E quantos triângulos acutângulos?

11) Nessa etapa contém algum triângulo isósceles? Quantos?

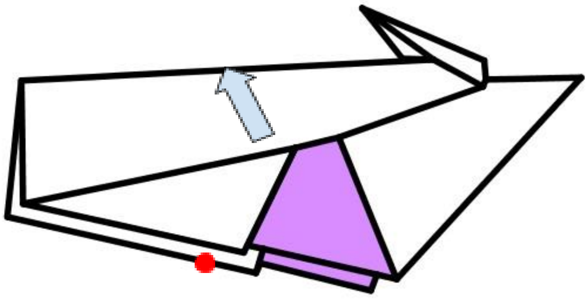
12) Nessa etapa contém algum triângulo isósceles? Quantos?

13) Quais tipos de triângulos podemos encontrar?

Manual do CISNE

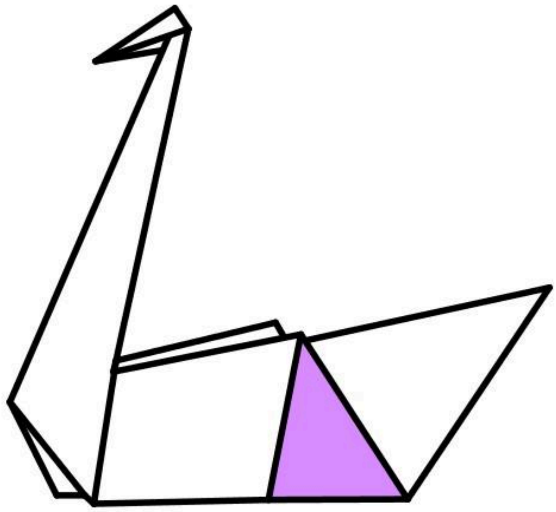


10



Segure o modelo no ponto vermelho e erga seguindo a seta.

11



Atividade 2 - Explorando proporções com origami

Objetivo: Classificar os triângulos e polígonos. Identificar as características que definem se uma figura representa uma ampliação ou redução de outra.

Habilidade: (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

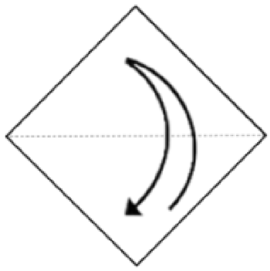
Material necessário:
- Projetor/tela para exibir os slides.
- Folhas quadradas para origami de dois tamanhos distintos: 10cm x 10cm e 15 cm x 15cm (os tamanhos ficam como sugestão).
- Material impresso.

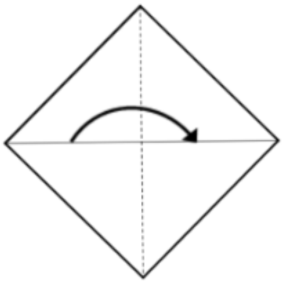
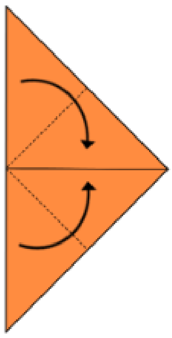
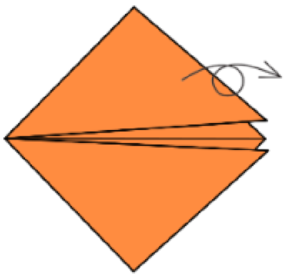
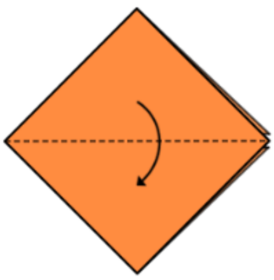
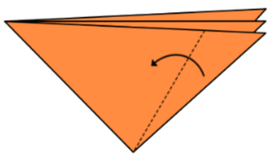
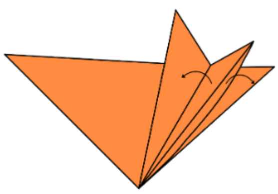
Seguindo a mesma lógica da atividade anterior, em um primeiro momento os alunos não saberão o que será construído e responderão as perguntas sobre os elementos geométricos. Em um segundo momento, os alunos irão fazer a mesma construção e realizar uma atividade sobre ampliação e redução de figuras. Essa atividade serve como complemento para a habilidade da BNCC citada acima.

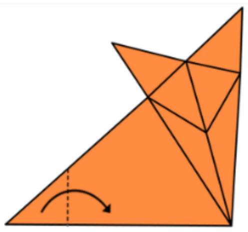
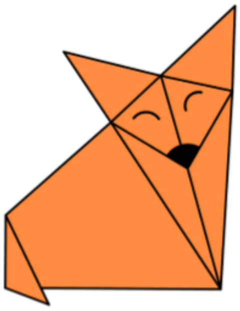
1° Parte: Construção da Raposa

Projete os diagramas seguido das instruções e peça que os alunos respondam as perguntas de cada etapa.

Quadro 3: Diagramas e perguntas na parte 1 da atividade 2

Diagrama	**Perguntas após essa etapa**
	Nível 1 - Análise 1) Quais são os tipos de triângulos formados pela extremidade da folha e a linha de vinco?

	**Sem perguntas após esta etapa.**
	Nível 1 - Análise 2) Os triângulos formados são retângulos? Nível 1 - Análise 3) Existe algum ângulo obtuso formado por alguma extremidade ou linha de vinco?
	Nível 0 - Visualização 4) A figura formada é um quadrado? Nível 2 - Ordenação 5) Se sim, o lado do quadrado do papel é quantas vezes maior que a desse quadrado?
	**Sem perguntas após esta etapa.**
	Nível 0 - Visualização 6) Quantos triângulos você consegue identificar no momento?
	**Sem perguntas após esta etapa.**

	**Sem perguntas após esta etapa.**
	**Sem perguntas após esta etapa.**

Fonte: Elaborado pelo autor.

As perguntas também podem ser projetadas ou entregues em uma folha separada.

2° Parte: Proporções

Peça que os alunos executem a dobradura novamente, dessa vez usando um papel de tamanho diferente do utilizado na primeira construção.

Após finalizada a dobradura da segunda raposa, entregue a segunda parte da atividade para que os alunos possam responder. Para essa atividade, é necessário que os alunos possuam uma régua, uma alternativa também, pensando em ampliação e redução, é o uso de uma malha quadriculada para que os alunos possam fazer a comparação.

A seguir, seguem-se as perguntas a serem realizadas na parte 2 e o manual completo da raposa.

PERGUNTAS DA ATIVIDADE 2

Proporções na Raposa

1) Dê um nome para cada raposa, meça três partes das raposas e escreva aqui:

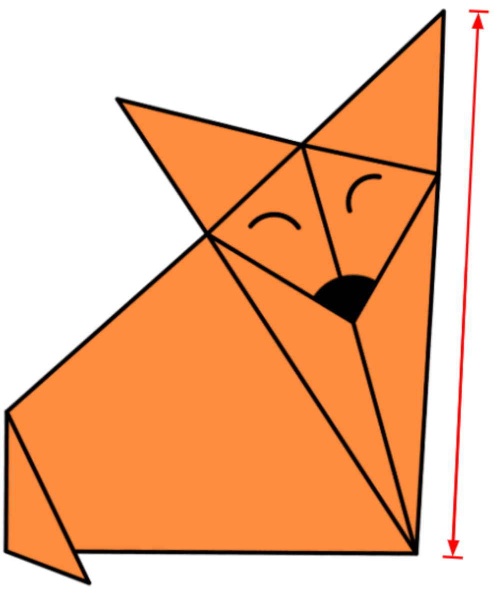
Raposa 1:	Raposa 2:
Exemplos: orelha, cabeça, etc.	

2) Quantos triângulos você consegue identificar em cada raposa? De quais tipos?

____

____

3) Agora vamos fazer uma medição específica, meça a altura da raposa que seria a extremidade da sua orelha até seus pés, como destacado em vermelho na figura abaixo.



Anote as medidas aqui:

Raposa 1	Raposa 2

Em seguida, responda as perguntas abaixo:

a) Essa medida poderia ser considerada a altura da raposa? Por quê?

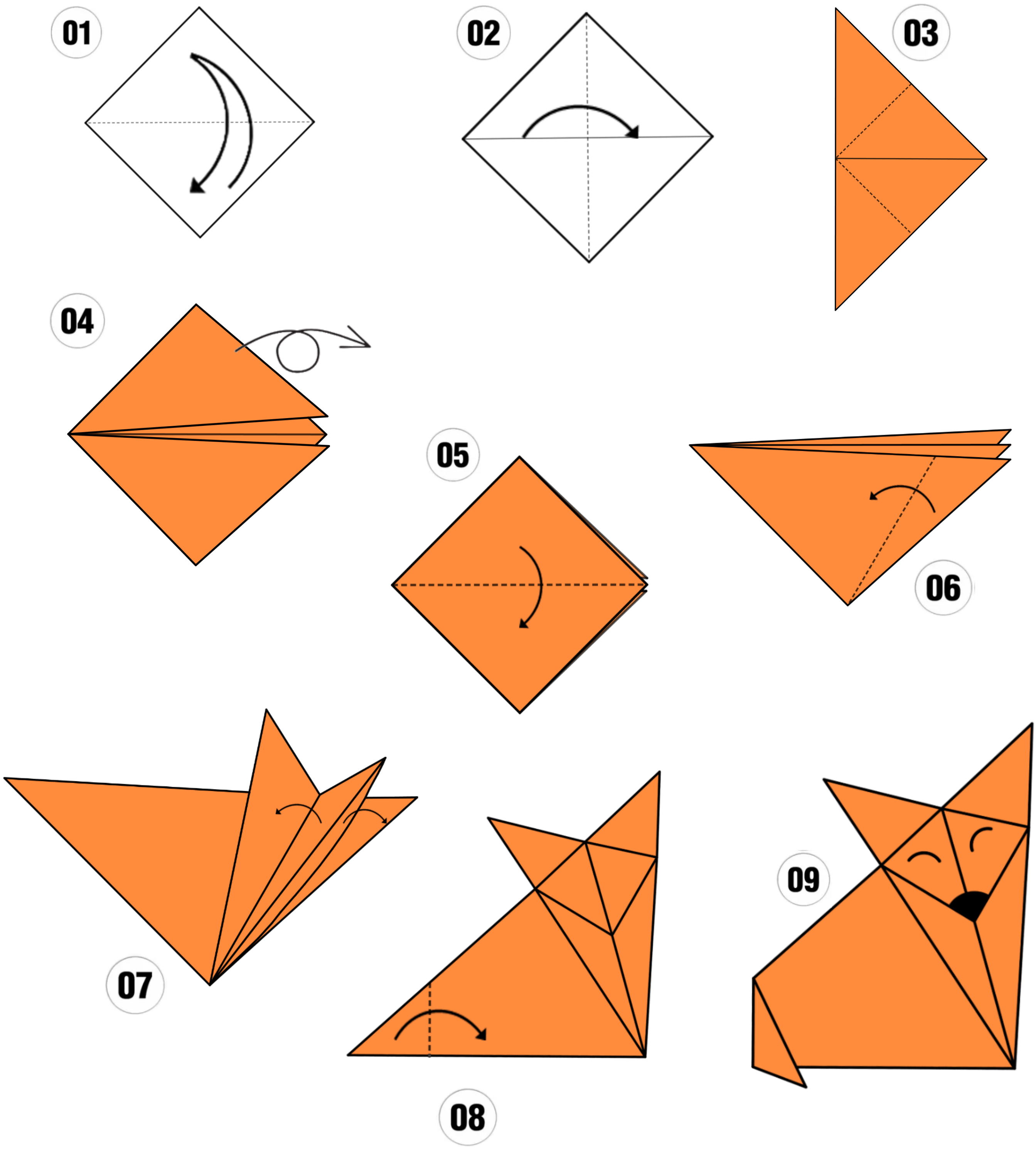
____

b) Qual é a razão entre a altura das duas raposas?

c) Se usarmos um papel quadrado medindo 50 cm x 50 cm, quanto mediria a altura da raposa?

d) Que tamanho deveria ser o papel para que a altura da raposa fosse igual a 20 cm?

Manual da RAPOSA



Atividade 3 - Proporções em três dimensões com origami

Para essa atividade, a dinâmica é a mesma das atividades anteriores. Dessa vez haverá uma transição clara entre as figuras de duas dimensões para os sólidos geométricos, portanto essa atividade pode ser usada como introdução para o ensino de alguma habilidades, como citado pela BNCC, por exemplo:

Figura 6: Habilidades da atividade 3.

(EF05MA21) Reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos.

(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).

(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

Fonte: BNCC.

Para a atividade sugerida, utilizaremos a habilidade pensando em turmas do 7° ano.

Objetivo: Compreender e aplicar os conceitos de volume e proporções por meio da construção de cubos de origami, explorando as relações entre as dimensões das figuras e o espaço ocupado.

Habilidade: (EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).

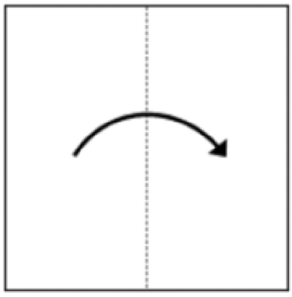
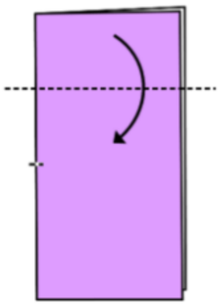
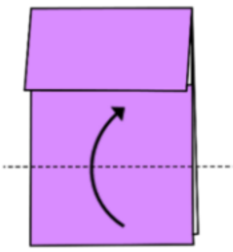
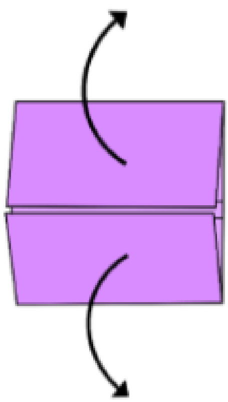
Material necessário:

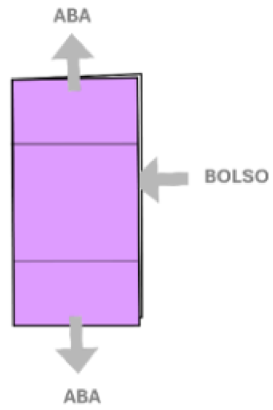
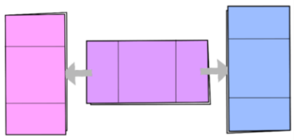
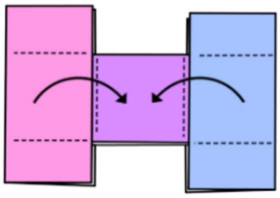
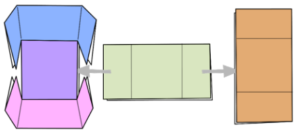
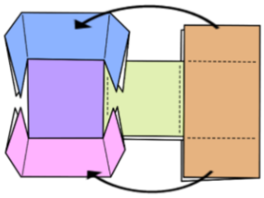
- Projetor/tela para exibir os slides.
- Folhas quadradas para origami de dois tamanhos distintos: 10cm x 10cm e 20 cm x 20cm (os tamanhos indicados são apenas sugestões, mas é preferível que as dimensões de um papel sejam o dobro da outra).
- Material impresso.

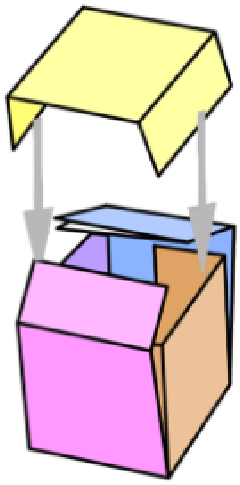
1° Parte: Construção do Cubo

Projete os diagramas seguido das instruções e peça que os alunos respondam as perguntas de cada etapa.

Quadro 4: Diagramas e perguntas na parte 1 da atividade 3

Diagrama	Perguntas após essa etapa
	Sem perguntas nesta etapa.
	Nível 0 - Visualização 1) Que formas geométricas podemos identificar nessa etapa?
	Nível 0 - Visualização 2) Que forma geométrica surgiu após essas três etapas? Nível 2 - Abstração 3) Que fração da folha original corresponde a essa figura formada?
	Sem perguntas nesta etapa.

	Nível 0 - Visualização 4) Que tipo de construção você acha que estamos fazendo?
	Nível 1 - Análise 5) Quanto ângulos retos você consegue localizar após essa etapa?
	Sem perguntas nesta etapa.
	Sem perguntas nesta etapa.
	Nível 1 - Análise 6) Você consegue agora dizer o que está sendo construído? Seu palpite anterior passou perto?

	Sem perguntas nesta etapa.

Fonte: Próprio autor.

2° Parte: Proporção

Assim como na atividade anterior da raposa, peça que os alunos executem a dobradura novamente, dessa vez usando um papel de tamanho diferente do utilizado na primeira construção. Para essa atividade, é necessário que os alunos possuam uma régua, uma alternativa também, pensando em ampliação e redução, é o uso de uma malha quadriculada para que os alunos possam fazer a comparação.

Após finalizada a dobradura da segunda raposa, entregue a segunda parte da atividade para que os alunos possam responder, as perguntas se encontram no apêndice.

Dessa vez, o objetivo da atividade é mostrar que ao dobrar a aresta do cubo, não faz diretamente com que seu volume dobre.

As perguntas e o manual completo do cubo estão a seguir.

PERGUNTAS DA ATIVIDADE 3

Proporções no Cubo

1) Meça as arestas dos cubos e calcule a área de uma das faces de cada um. Anote os resultados:

	CUBO 1	CUBO 2
Medida da aresta		
Medida da área		

2) Calcule a razão entre as arestas dos cubos 1 e 2.

3) Calcule o volume dos cubos.

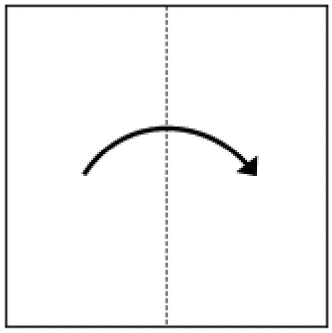
4) Calcule a razão entre os volumes dos cubos 1 e 2.

5) A razão encontrada na questão 5 é a mesma encontrada na questão 2? Justifique.

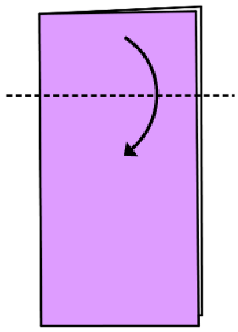
6) Desafio para a turma:

Quantos cubos podemos empilhar sem que a torre formada desabe?

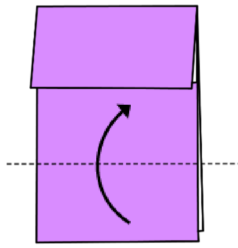
MANUAL DO CUBO



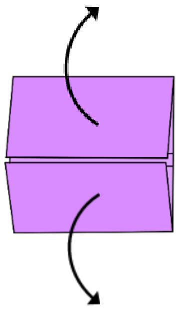
(1) Dobre na metade.



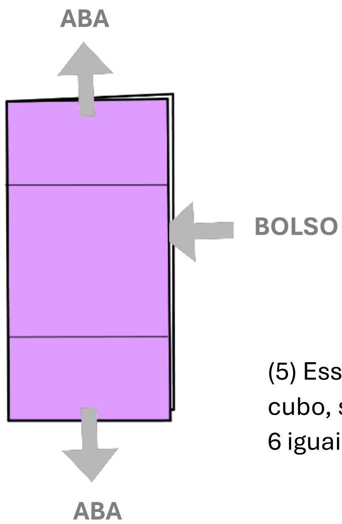
(2) Dobre em 1/4 da folha (metade da metade).



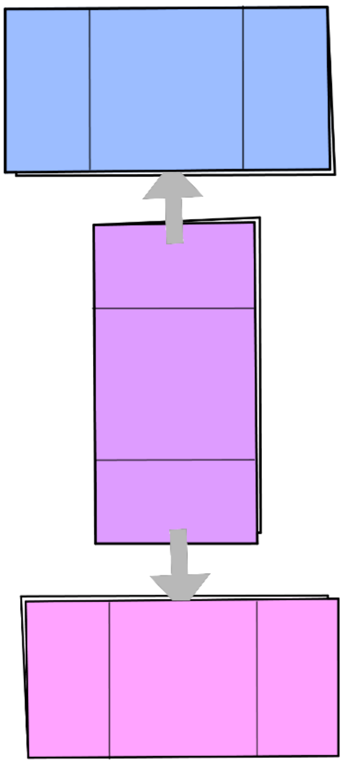
(3) Dobre em 1/4 da folha na outra extremidade, as pontas irão se encontrar no meio.



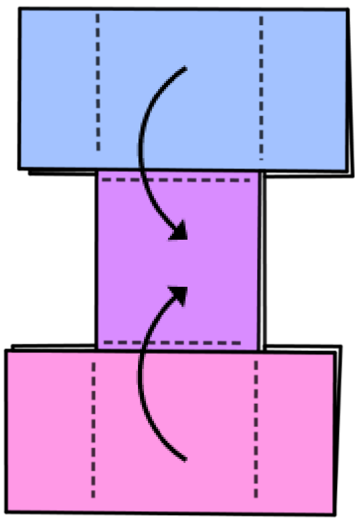
(4) Desdobre.



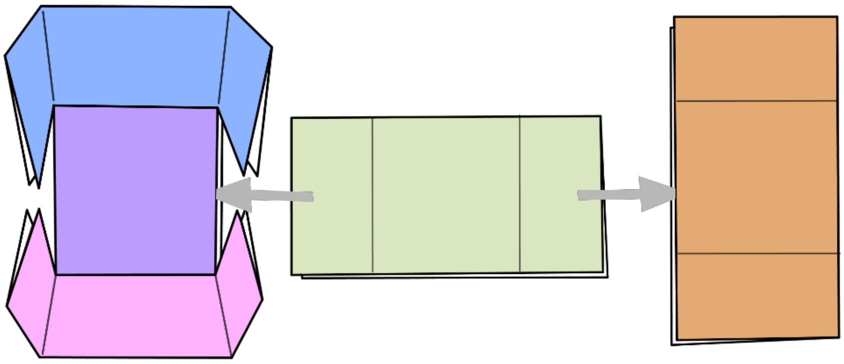
(5) Esse é o módulo do cubo, serão necessários 6 iguais a esse.



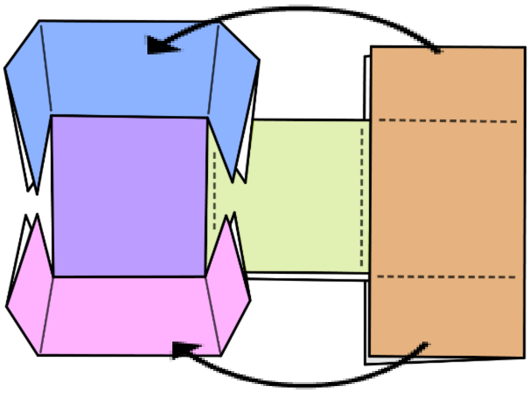
(6) Insira.



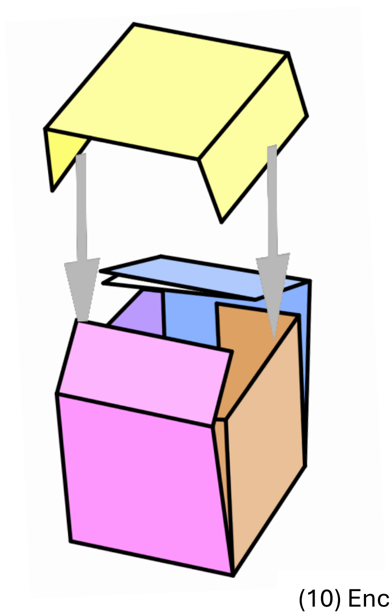
(7) Levante e dobre de acordo com as indicações.



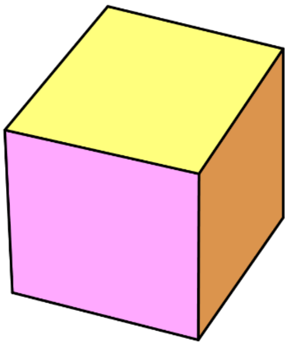
(8) Insira.



(9) Levante e dobre de acordo com as indicações.



(10) Encaixe a peça restante.



(11) O CUBO estará pronto!

Atividade 4 - Elementos em três dimensões com origami

Para essa atividade, sairemos da dinâmica utilizada nas anteriores, pois as construções serão um pouco mais trabalhosas. Recomenda-se que essa atividade seja feita em grupo, para que os alunos possam ter uma facilidade maior em manusear os encaixes das dobraduras.

Um dos focos da atividade é observar os elementos que aparecem em um sólido, especialmente: faces, arestas e vértices.

Objetivo: Resolver problemas envolvendo os elementos de prismas e pirâmides.

Habilidade: (EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.

Material necessário:

- Folhas quadradas para origami.
- Material impresso.

Em um primeiro momento, os alunos irão realizar a construção de três sólidos e, somente após as construções, serão entregues as perguntas que eles irão responder como parte da atividade.

Para essa atividade, os sólidos escolhidos foram: tetraedro, hexaedro (bipirâmide) e o octaedro. Dependendo do nível da turma e do tempo disponível, é interessante que os alunos realizem a construção do cubo também, seguindo o manual da atividade anterior.

Os manuais para a construção dos sólidos e as perguntas se encontram a seguir.

PERGUNTAS DA ATIVIDADE 4

Questionário sobre os poliedros

1) O tetraedro e a bipirâmide são o mesmo sólido, mas em tamanhos diferentes?

____

2) Preencha a tabela a seguir com a quantidade de vértice, face e aresta de cada figura:

Nome do poliedro	Vértices	Faces	Arestas
1 -			
2 -			
3 -			

3) Leonhard Euler é um dos grandes matemáticos da história e, certamente, o mais prolífico de todos os tempos. Seus trabalhos contêm inúmeras contribuições fundamentais a diversas áreas da matemática (da teoria dos números até a probabilidade), da física (acústica, ótica), da astronomia (do movimento planetas e cometas até a geofísica e o estudo das marés), da mecânica (da teoria dos corpos rígidos à ciência naval), da lógica, da filosofia e até da música.

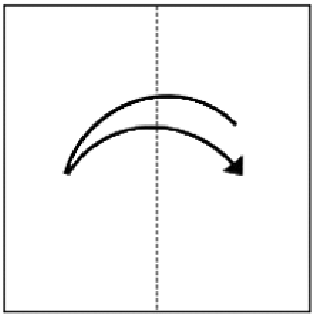
Euler, o matemático mais prolífico da história.
Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em 26 ago. 2024.

Uma das suas contribuições é a fórmula de Euler, onde ele afirma que para qualquer poliedro convexo, o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) obedece à seguinte equação:

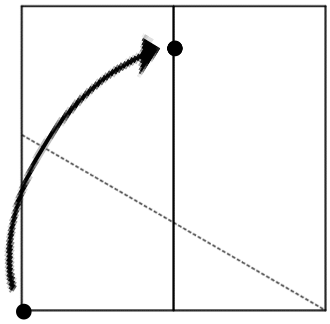
$$V - A + F = 2$$

Usando os poliedro que construímos em sala e os dados coletados na tabela da questão anterior, verifique se a fórmula de Euler funciona corretamente para os três sólidos.

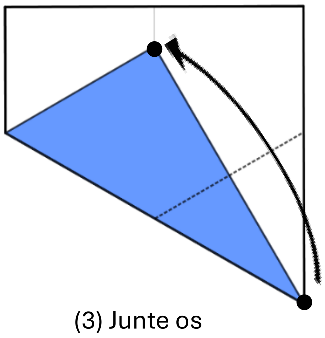
MANUAL DO TETRAEDRO



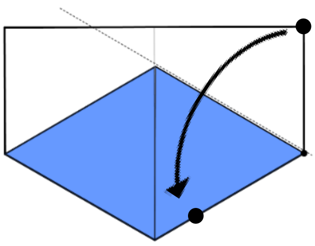
(1) Dobre ao meio e desdobre.



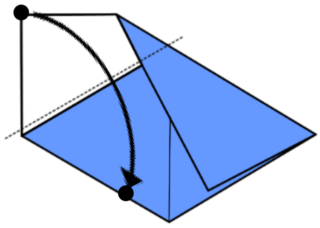
(2) Leve o vértice inferior esquerdo até a linha do meio de modo que a dobradura contenha o canto inferior direito.



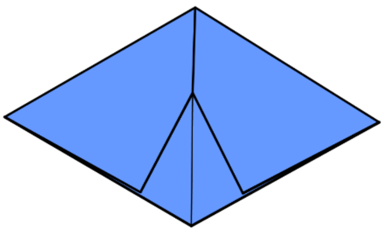
(3) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.



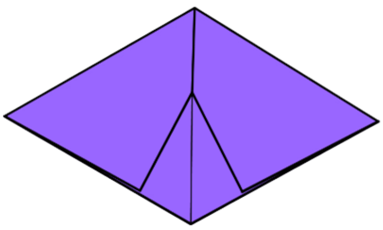
(4) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.

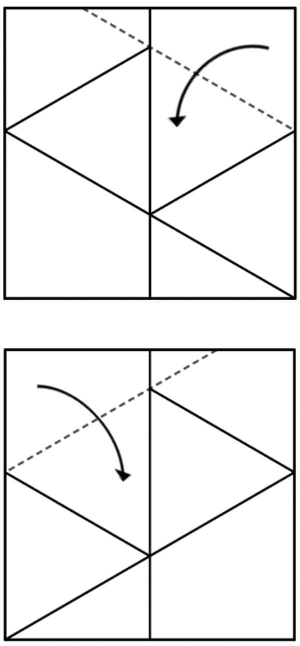


(5) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.

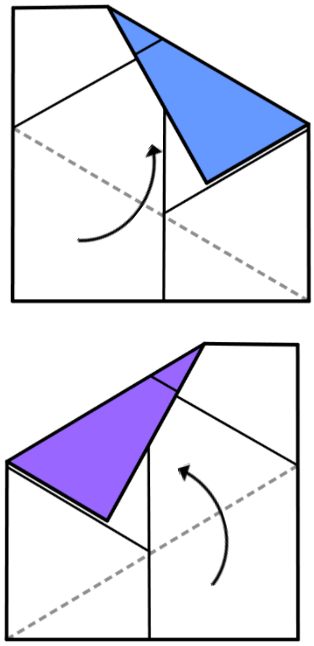


(6) Após as primeiras etapas, teremos o resultado acima. Repita os mesmos passos para fazer a segunda peça, de preferência de cor diferente igual a essa de baixo:

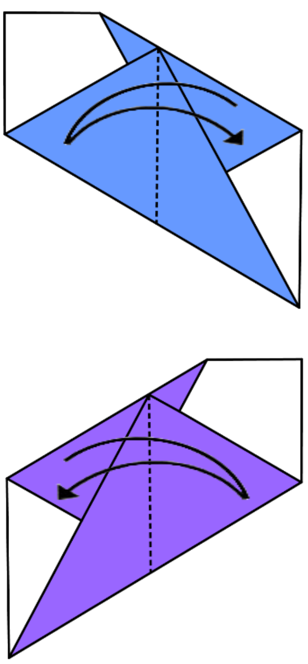


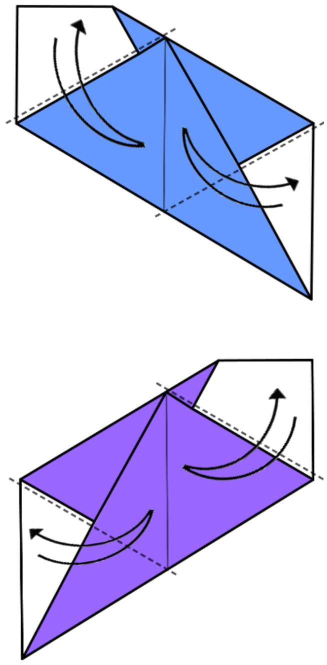


(7) Desdobre as duas peças. E dobre seguindo as orientações.



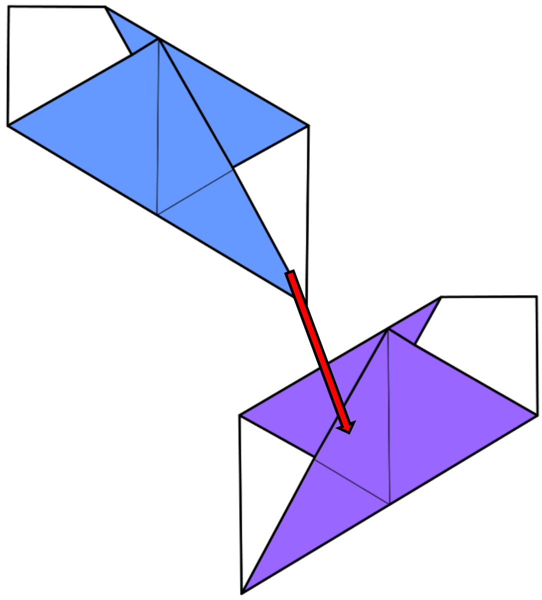
(8) Tome cuidado, pois as duas peças serão dobradas de formas diferentes. Siga os diagramas na direção correta.



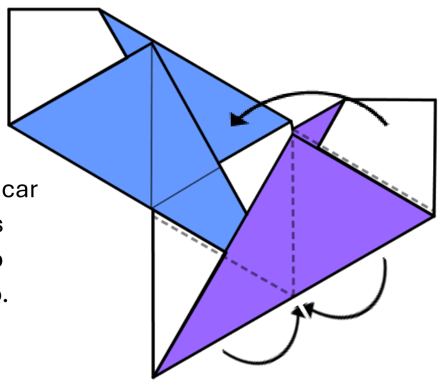


(10) Dobre e desdobre seguindo o diagrama e os módulos estarão prontos.

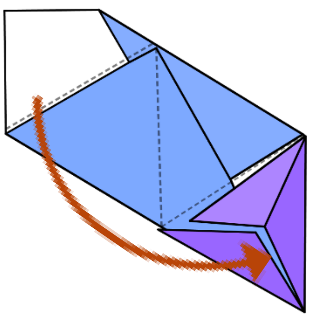
(9) Dobre e desdobre.



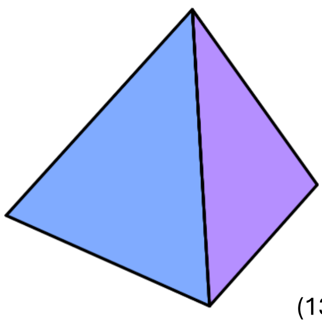
(11) Insira conforme o diagrama.



(12) Faça a dobradura ficar em pé ao longo das três linhas pontilhadas, isso dará forma ao tetraedro.

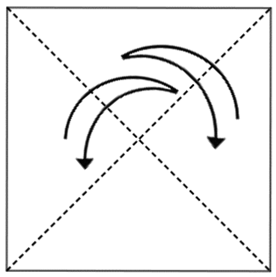


(13) Faça a dobradura seguindo o formato do tetraedro e encaixe a parte branca.

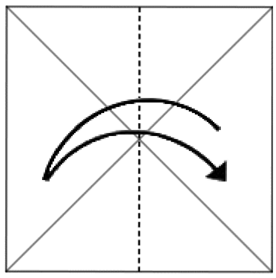


(13) Tetraedro pronto!

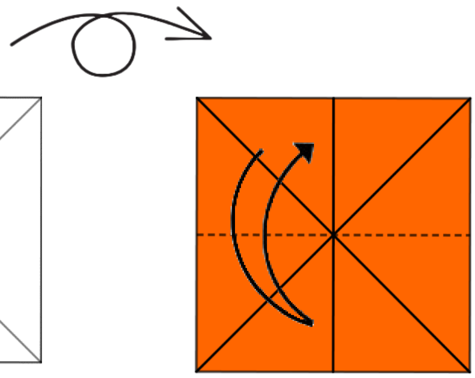
MANUAL DA BIPIRÂMIDE



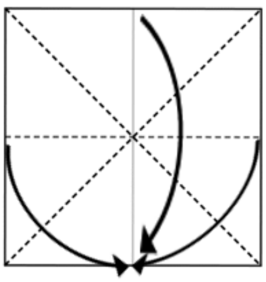
❶ Dobre e desdobre para marcas as diagonais.



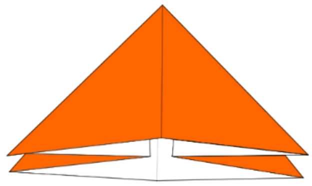
❷ Dobre e desdobre na horizontal.



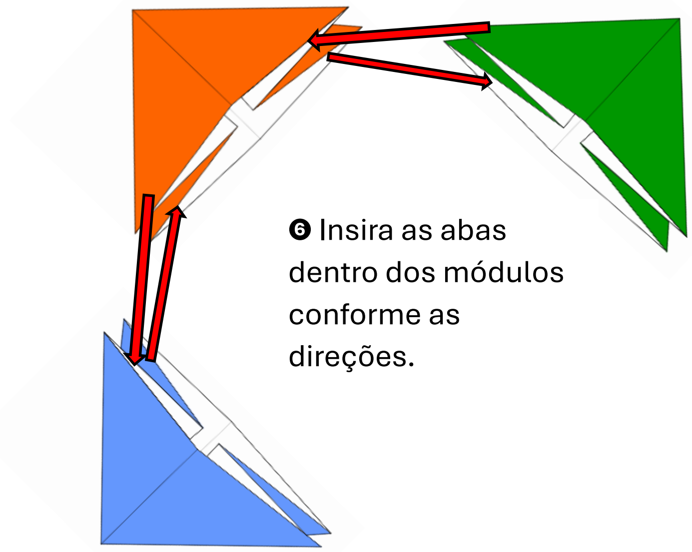
❸ Vire a folha e faça a dobradura na vertical, em seguida vire novamente.



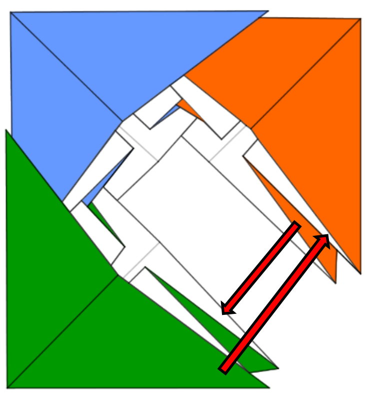
❹ Faça as dobras em definitivo, seguindo as direções.



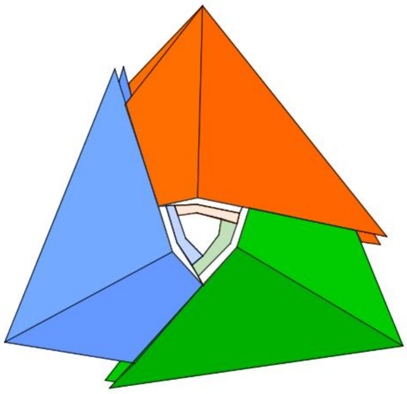
❺ Serão necessários três módulos iguais a esse para realizar o encaixe.



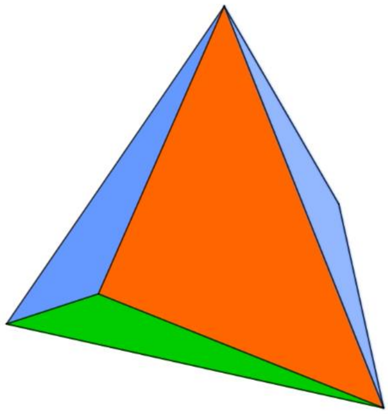
❻ Insira as abas dentro dos módulos conforme as direções.



❼ Insira até o meio das abas e encaixe as restantes.

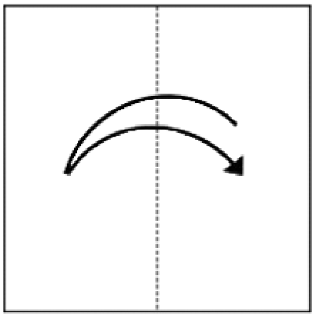


❽ Termine o encaixe das peças. Nessa etapa, um pouco de paciência é necessário, não force muito os módulos!

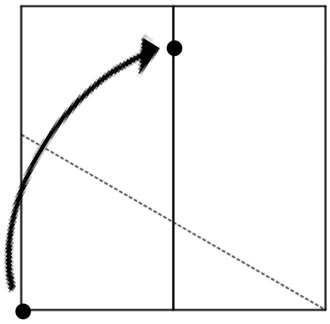


❾ E assim ficará a bipirâmide!

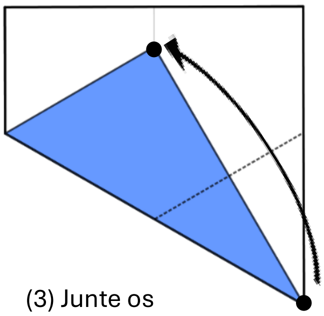
MANUAL DO OCTAEDRO



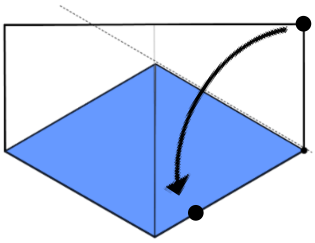
(1) Dobre ao meio e desdobre.



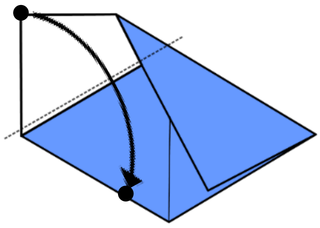
(2) Leve o vértice inferior esquerdo até a linha do meio de modo que a dobradura contenha o canto inferior direito.



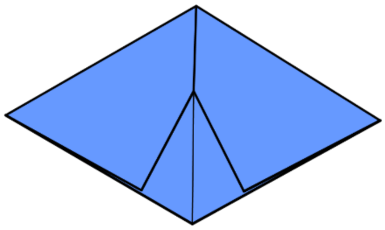
(3) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.



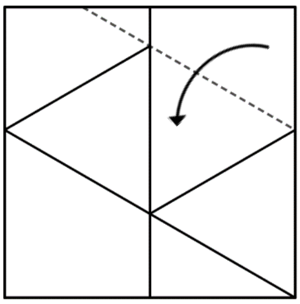
(4) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.



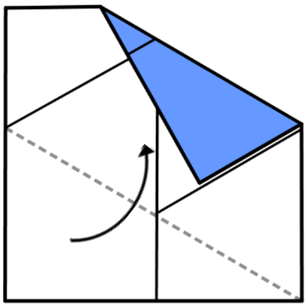
(5) Junte os dois pontos marcados com ● e dobre.



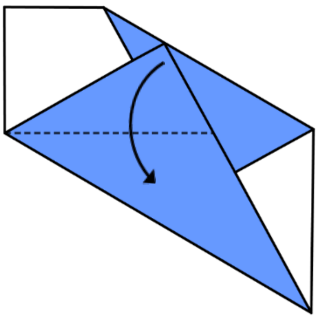
(6) Após as primeiras etapas, teremos o resultado acima. Desdobre tudo após esse passo.



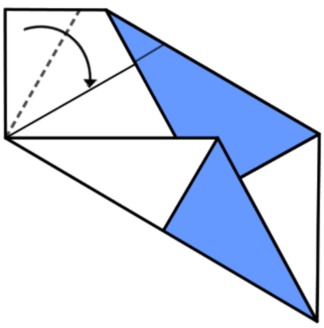
(7) Dobre conforme o diagrama.



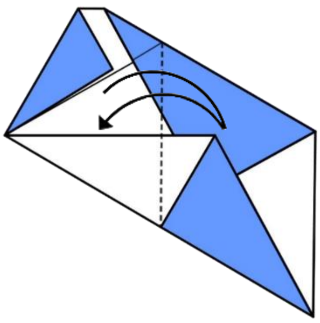
(8) Dobre conforme o diagrama.



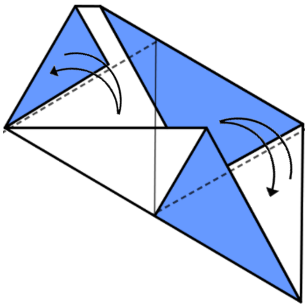
(9) Dobre trazendo o canto esquerdo da parte inferior até a extremidade.



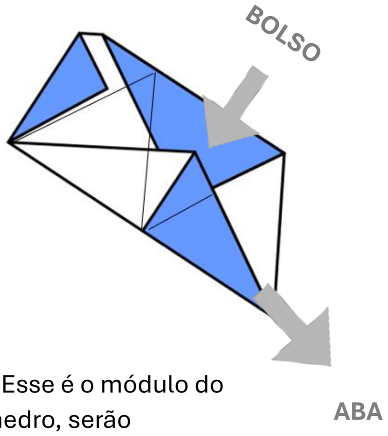
(10) Dobre o canto superior esquerdo até a linha de vínculo.



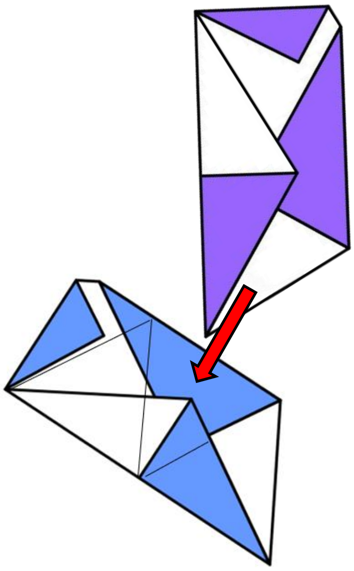
(11) Dobre e desdobre seguindo o diagrama ao lado.



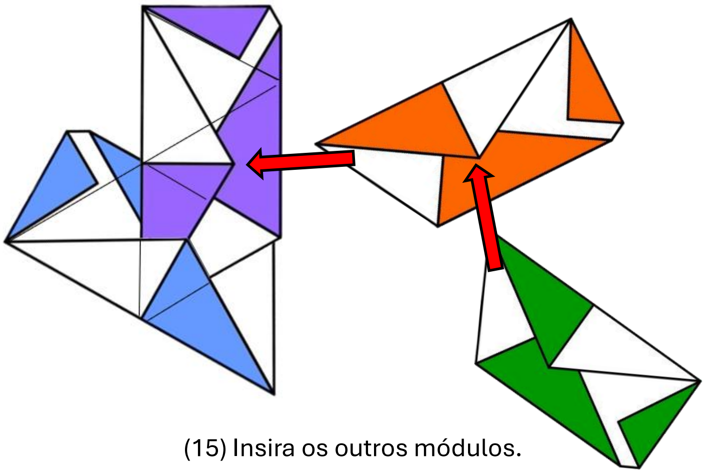
(12) Dobre e desdobre as abas seguindo o diagrama.



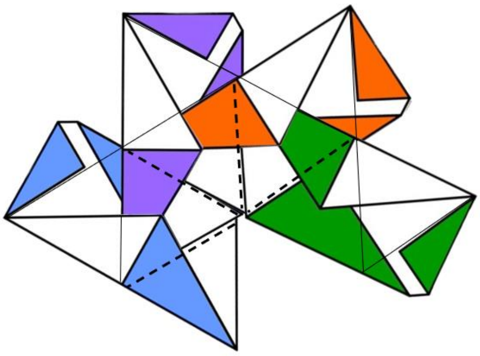
(13) Esse é o módulo do octaedro, serão necessário um total de 4 iguais a essa.



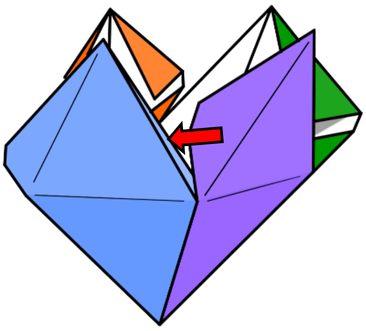
(14) Insira a aba de um módulo no bolso de outro.



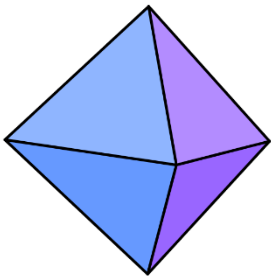
(15) Insira os outros módulos.



(16) Dobre conforme as linhas pontilhadas.



(17) Insira as abas restantes.

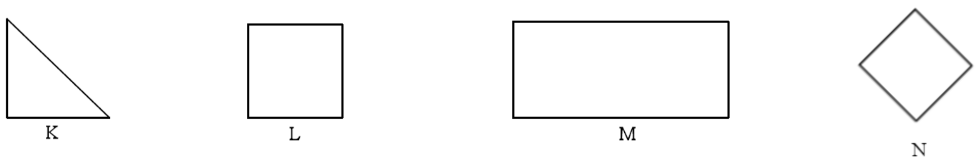


(18) E aqui está ele!

3. APÊNDICE: TESTE DE VAN HIELE - Adaptado de Usiskin e Nasser

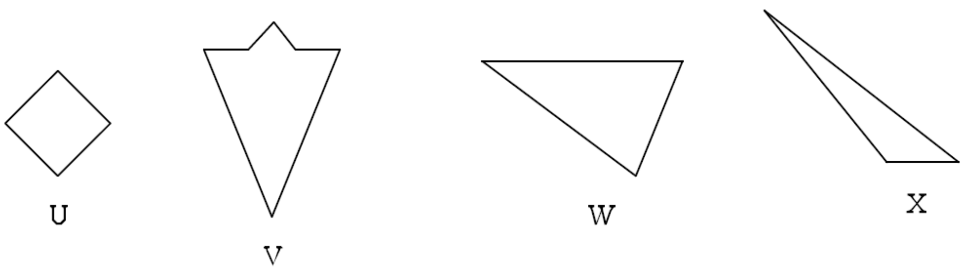
Nível 0 - Reconhecimento

1) Quais desses são quadrados?



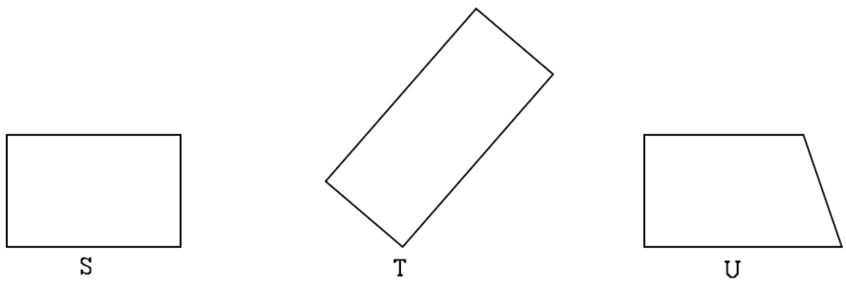
(a) Apenas K **(b)** Apenas L **(c)** Apenas M **(d)** Apenas L e N **(E)** Todos são quadrados

2) Quais desses são triângulos?



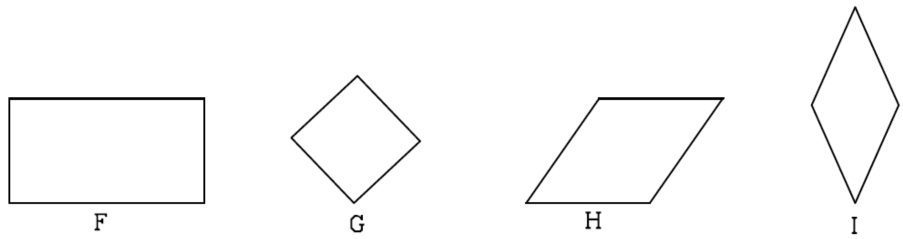
(a) Nenhum. **(b)** Apenas V **(c)** Apenas W **(d)** Apenas W e X **(e)** Apenas V e W

3) Quais desses são retângulos?



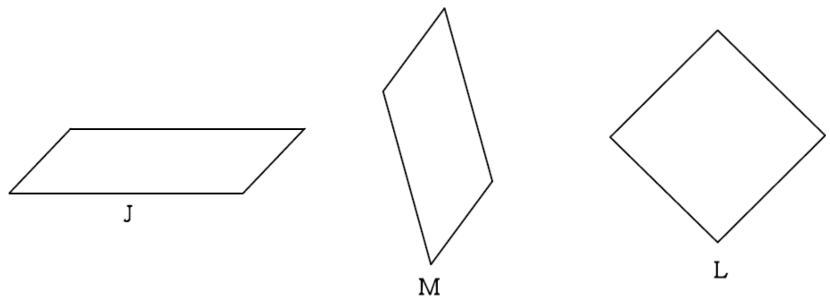
(a) Apenas S **(b)** Apenas T **(c)** Apenas S e T **(d)** Apenas S e U **(e)** Todos são retângulos

4) Quais desses são retângulos?



(a) Nenhum. **(b)** Apenas G **(c)** Apenas F e G **(d)** Apenas G e I **(e)** Todos são quadrados

5) Quais desses são paralelogramos?



(a) Apenas J **(b)** Apenas L **(c)** Apenas J e M

(d) Nenhum destes é um paralelogramo **(e)** Todos são paralelogramos

Nível 1 - Análise

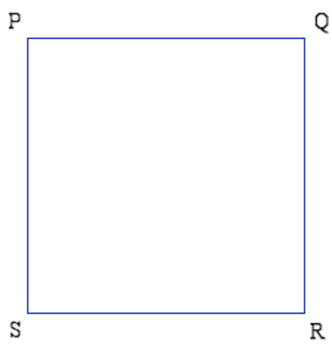
6) PQRS é um quadrado.

Qual relação é verdadeira em todos os quadrados?

(a) PR e RS têm o mesmo comprimento.

(b) QS e PR são perpendiculares.

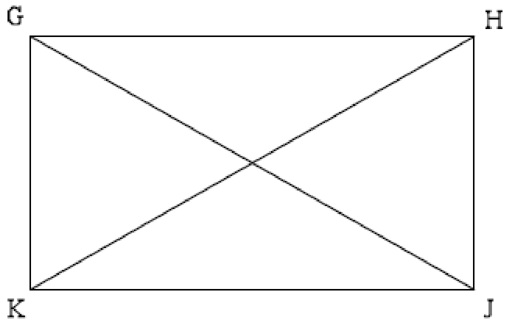
(c) PS e QR são perpendiculares.



(d) PS e QS têm o mesmo comprimento.

(e) O ângulo Q é maior que o ângulo R.

7) No retângulo GHJK, GJ e HK são as diagonais.



Qual das opções é falsa em qualquer retângulo?

(a) Existem quatro ângulos retos.

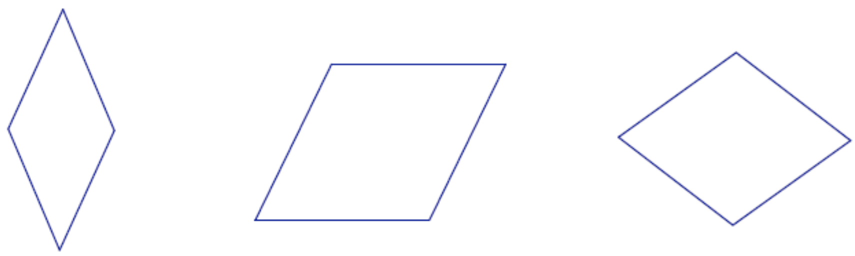
(b) Existem quatro lados.

(c) As diagonais têm o mesmo comprimento.

(d) Os lados opostos têm o mesmo comprimento.

(e) Todos os lados têm comprimentos diferentes.

8) Um losango é uma figura de quatro lados com todos os lados de mesmo comprimento. Aqui estão alguns exemplos.



Qual das opções não é verdadeira em todos os losangos?

(a) As duas diagonais têm o mesmo comprimento.

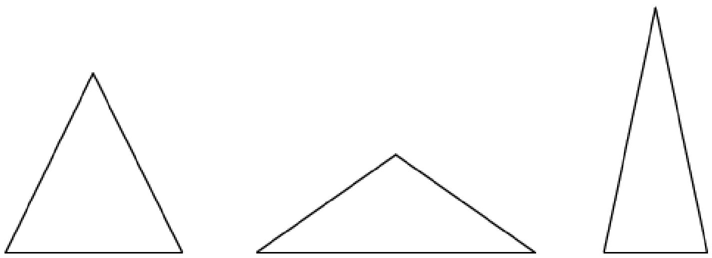
(b) Cada diagonal bissecta dois ângulos do losango.

(c) As duas diagonais são perpendiculares.

(d) Todos os ângulos são retos.

(e) Os ângulos opostos têm a mesma medida.

9) Um triângulo isósceles é um triângulo com dois lados de comprimento igual. Aqui estão três exemplos.



Qual das opções é verdadeira em todo triângulo isósceles?

(a) Os três lados devem ter o mesmo comprimento.

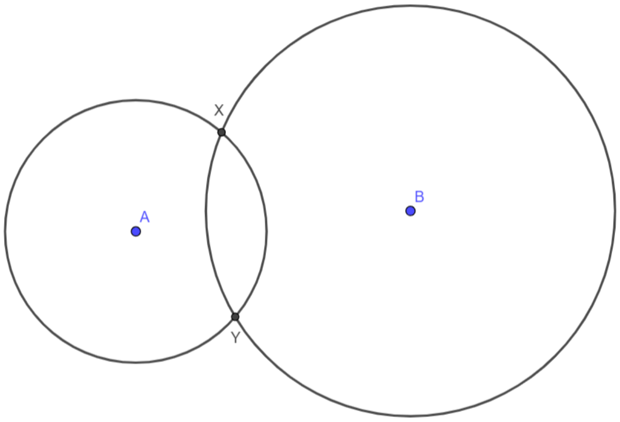
(b) Os três lados devem ter comprimentos diferentes.

(c) Um lado deve ter o dobro do comprimento de outro lado.

(d) Deve haver pelo menos dois ângulos com a mesma medida.

(e) Os três ângulos devem ter a mesma medida.

10) Duas circunferências com centros A e B se intersectam nos pontos X e Y, formando o quadrilátero AXBY. Veja um exemplo abaixo:



Qual das seguintes afirmações é falsa?

(a) AXBY sempre terá dois pares de lados de igual comprimento.

(b) O quadrilátero AXBY sempre terá pelo menos dois ângulos de medidas iguais.

(c) A reta $\overline{AB}$ é perpendicular à reta $\overline{XY}$.

(d) Os ângulos em $A\hat{X}B$ e $A\hat{Y}B$ sempre terão medidas iguais.

(e) Todas as afirmações (A) - (D) são verdadeiras.

Nível 2 - Abstração

11) Considere as duas afirmações:

Afirmação 1: A figura F é um retângulo.

Afirmação 2: A figura F é um triângulo.

Qual é a correta?

(a) Se 1 é verdadeira, então 2 é verdadeira.

(b) Se 1 é falsa, então 2 é verdadeira.

(c) 1 e 2 não podem ser ambas verdadeiras.

(d) 1 e 2 não podem ser ambas falsas.

(e) Nenhuma das opções anteriores é correta.

12) Considere as duas afirmações:

Afirmação S: ΔABC tem três lados de mesmo comprimento.
Afirmação T: Em ΔABC, o ângulo B e o ângulo C têm a mesma medida.

Qual é a correta?

(a) As afirmações S e T não podem ser ambas verdadeiras.

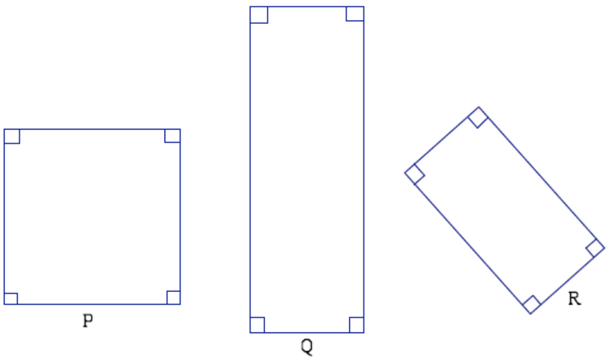
(b) Se S é verdadeira, então T é verdadeira.

(c) Se T é verdadeira, então S é verdadeira.

(d) Se S é falsa, então T é falsa.

(e) Nenhuma das opções (A) - (D) é correta.

13) Qual das figuras abaixo pode ser chamada de retângulo?



(a) Todas.

(b) Apenas Q.

(c) Apenas R.

(d) Apenas P e Q.

(e) Apenas Q e R.

14) Qual é a alternativa verdadeira?

(a) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades de todos os quadrados.

(b) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os retângulos.

(c) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades de todos os paralelogramos.

(d) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os paralelogramos.

(e) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

15) O que todos os retângulos têm que alguns paralelogramos não têm?

(a) Lados opostos iguais.

(b) Diagonais iguais.

(c) Lados opostos paralelos.

(d) Ângulos opostos iguais.

(e) Nenhuma das opções anteriores.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

GOLAN, M.; JACKSON, P. **Origametria: A Program to Teach Geometry and to Develop Learning Skills Using the Art of Origami.** In: LANG, Robert J. (Ed.). Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education. Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. p. 459-469.

GOLAN, M. **Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry.** In: IVERSON-WANG, Patsy; LANG, Robert J.; YIM, Mark (Eds.). Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education. Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011. p. 151-164.

GOLAN, M.; OBERMAN, J. **The Kindergarten Origametria Program.** In: MIURA, K., KAWASAKIM T.; IVERSON-WANG, P. (Eds.). Origami 6: Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education. American Mathematical Society, pp. 669-678, 2015.

KALEFF, A.M.M.R.; HENRIQUES, A.S.; REI, D.M.; FIGUEIREDO, L.G. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele, Bolema**, Rio Claro. nº 10, pp. 21-30, 1994.

KAWAMURA, M. **Polyhedron origami for beginners.** Tokyo: Nihon Vogue, 2001.

NASSER, L. **O desenvolvimento do raciocínio em geometria.** In: Boletim GEPEM/UFRJ, n. 27, p. 93-99, Rio de Janeiro, 1990.

NASSER, L; TINOCO, L. **Curso básico de geometria: enfoque didático.** 3. ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM. Projeto Fundão, 2011. Módulo I.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele.** Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1997.

SOUSA, M. S. **Geometria com Dobraduras: Explorando a Teoria de Van Hiele com Origami.** Dissertação (Mestrado). PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal Fluminense, Niterói-RJ, 2024.

USISKIN, Z. **The Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry.** Chicago: University of Chicago, 1982.

USISKIN, Z.; SENK, S. **Evaluating a Test of van Hiele Levels: A Response to Crowley and Wilson. Journal for Research in Mathematics Education,** v. 21, n. 3, p. 242, maio 1990.