



**Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT**

Thiago Gomes Pereira

**Música e Suas Aplicações no
Ensino da Matemática**

Orientador(a): Prof. Dr. Mário Olivero Marques da Silva



NITERÓI
ABRIL/2025

THIAGO GOMES PEREIRA

Música e Suas Aplicações no Ensino da Matemática

Dissertação apresentada por **Thiago Gomes Pereira** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador(a): Prof. Dr. Mário Olivero Marques da Silva

Niterói, 2025

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

P436m Pereira, Thiago Gomes
Música e Suas Aplicações no Ensino da Matemática / Thiago
Gomes Pereira. - 2025.
70 p.: il.

Orientador: Mário Olivero Marques da Silva.
Dissertação (mestrado profissional)-Universidade Federal
Fluminense, Niterói, 2025.

1. Ensino de Matemática. 2. Recurso Pedagógico. 3.
Matemática e Música. 4. Produção intelectual. I. Silva,
Mário Olivero Marques da, orientador. II. Universidade
Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística.
III. Título.

CDD - XXX


THIAGO GOMES PEREIRA

MÚSICA E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO DE MATEMÁTICA


Dissertação apresentada por **Thiago Gomes Pereira** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Aprovada em 30 de abril de 2025.


BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **MARIO OLIVERO MARQUES DA SILVA**
Data: 13/05/2025 09:14:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. MÁRIO OLIVERO MARQUES DA SILVA - UFF
Orientador

Documento assinado digitalmente
 **CRISTIANE DE MELLO**
Data: 13/05/2025 15:39:47-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. CRISTIANE DE MELLO - UNIRIO

Documento assinado digitalmente
 **NANCY DE SOUZA CARDIM**
Data: 13/05/2025 09:41:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. NANCY DE SOUZA CARDIM - UFF

Documento assinado digitalmente
 **MIRIAM DEL MILAGRO ABDON**
Data: 10/05/2025 12:31:05-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. MIRIAM DEL MILAGRO ABDÓN - UFF

Niterói, 2025

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, agradeço a Deus pela saúde, pelo amor à Matemática e ao ensino, por fazer parte do Profmat e por me conceder este momento único em minha vida, no qual tenho a oportunidade de adquirir e compartilhar conhecimento. Tudo o que tenho e tudo o que ainda conquistarei provém do cuidado e da graça divina sobre mim.

À minha estimada esposa, Ana Luiza Leandro Gomes, por seu amor, por ouvir pacientemente minhas histórias do cotidiano escolar, por sua constante dedicação e por me incentivar, dia após dia, a não desistir dos meus sonhos e objetivos.

À minha filha Liz, que diariamente derrete meu coração e me faz experimentar um sentimento tão profundo e intenso que até então desconhecia.

À minha mãe, Mirian, e à minha avó, Florecy, que, mesmo diante de muitas dificuldades, me criaram com amor, ensinaram-me a fé em Deus, proporcionaram-me uma boa educação e me colocaram em um dos lugares mais especiais do mundo: uma sala de aula.

Ao meu tio Isaías, que foi minha figura paterna, presenteando-me, inclusive, com meu primeiro livro de Matemática, e às minhas tias Maria das Neves e Osea, que sempre depositaram em mim confiança e afeto.

Aos meus professores, desde a educação básica até os do Profmat, que ao longo dos anos contribuíram para a formação do educador que hoje sou. Em especial, à professora Sandra Escobar, que lecionou durante todo o meu ensino fundamental II, sendo fundamental para a construção de uma base sólida em Matemática.

Aos colegas de profissão que encontrei ao longo dos meus mais de quinze anos de magistério e que, por meio de conselhos e acolhimento, contribuíram significativamente para o meu crescimento profissional. Em especial, aos colegas do Profmat, com quem compartilhei esta caminhada nos últimos dois anos.

Às instituições privadas em que atuei, bem como às Prefeituras de Maricá e Saquarema, onde desempenhei com amor e dedicação minha função docente.

A todos os alunos que fizeram parte da minha trajetória, que se dedicaram, conquistaram seus objetivos e, hoje, contribuem para a sociedade.

À professora Dirce Uesu Pesco, coordenadora do Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Fluminense, pela constante atenção e apoio nas questões relacionadas ao programa.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Mário Olivero Marques Da Silva, por sua educação, humildade e empenho incondicional em me orientar e apoiar no desenvolvimento desta pesquisa.

A todos vocês, o meu mais sincero agradecimento por fazerem parte da minha história profissional e por contribuírem para que este trabalho pudesse ser aqui apresentado.

A educação não tem preço. Sua falta tem custo.

Antônio Gomes Lacerda

*Educai as crianças para que não seja
necessário punir os adultos.*

Pitágoras

*Se a educação sozinha não transforma a
sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.*

Paulo Freire

RESUMO

Esta dissertação se coloca no ambiente de pesquisas relacionadas à possibilidade de incluir o uso da Música como recurso pedagógico para despertar o interesse pelo estudo da Matemática. Por seu carácter universal e sua capacidade de despertar emoções, a Música possui um enorme potencial para estimular o aprendizado de forma lúdica. Neste trabalho iremos propor uma aula chamada Frações e o Compasso Musical, e relatar experiências didáticas coletadas pela aplicação desta aula em uma turma de 9º ano da rede pública no município de Saquarema. A metodologia adotada foi explorar o significado das frações nos compassos musicais para ensinar os conceitos de frações como: o reconhecimento dos termos de uma fração, a equivalência de frações e a adição de frações. Durante o processo, observou-se uma resposta positiva por parte dos estudantes, especialmente na parte prática da aula, com destaque para a atividade que envolvia batidas, que foi amplamente apreciada. A análise dos resultados mostrou que a maioria dos alunos compreendeu bem a relação entre os conceitos matemáticos e os compassos musicais. Embora não tenha sido possível medir diretamente o impacto no aprendizado, os resultados indicam uma mudança positiva na percepção dos alunos sobre a Matemática, reforçando a viabilidade de metodologias que busquem integrar diferentes áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Música; Ensino da Matemática; Recurso Pedagógico

ABSTRACT

This dissertation is set in the context of research on the possibility of incorporating Music as a pedagogical tool to spark interest in the study of Mathematics. Due to its universal nature and ability to evoke emotions, Music has enormous potential to stimulate learning in an engaging way. In this work, we propose a lesson called *Fractions and Musical Meter* and report on the didactic experiences gathered from its implementation in a 9th-grade class in a public school in the municipality of Saquarema. The methodology adopted involved exploring the meaning of fractions in musical meters to teach fraction concepts such as recognizing the terms of a fraction, fraction equivalence, and fraction addition. Throughout the process, students demonstrated a positive response, particularly during the practical part of the lesson, with special enthusiasm for the activity involving rhythmic beats. The analysis of the results showed that most students understood the relationship between mathematical concepts and musical meters. Although it was not possible to directly measure the impact on learning, the results indicate a positive shift in students' perception of mathematics, reinforcing the feasibility of methodologies that integrate different areas of knowledge.

Keywords: Music; Mathematics Teaching; Pedagogical Tool

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Monocórdio de Pitágoras	18
Figura 2 - Arquitas de Tarento.....	18
Figura 3 - René Descartes	19
Figura 4 - Frederico Ardila.....	20
Figura 5 - Altura das Notas Musicais.....	23
Figura 6 - Pentagrama	24
Figura 7 - Compasso Musical.....	26
Figura 8 - Frações Equivalentes.....	30
Figura 9 - Obtendo Frações Equivalentes.....	30
Figura 10 - Simplificação de Fração.....	31
Figura 11 - Comentários dos alunos quanto Música na Matemática.....	49
Figura 12 - Círculo das Principais Figuras Rítmicas.....	51
Figura 13 - Prática do Exercício das Batidas.....	52
Figura 14 - Compasso do Exercício 1 das Batidas.....	53
Figura 15 - Compasso do Exercício 2 das Batidas.....	54
Figura 16 - Compasso Musical em branco	54
Figura 17 - Compasso do Exercício 1 do “tá”	55
Figura 18 - Compasso do Exercício 2 do “tá”	55
Figura 19 - Equivalência de Compassos.....	56
Figura 20 - Resposta do aluno A no feedback	67
Figura 21 - Resposta do aluno B no feedback	68
Figura 22 - Resposta do aluno C no feedback	68
Figura 23 - Resposta do aluno D no feedback	69

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Acertos e Erros nos Exercícios de Frações.....	57
Gráfico 2 - Questão 1 do Feedback	59
Gráfico 3 - Questão 2 do Feedback	59
Gráfico 4 - Questão 3 do Feedback	60
Gráfico 5 - Questão 4 do Feedback	61
Gráfico 6 - Questão 5 do Feedback	62
Gráfico 7 - Questão 6 do Feedback	62
Gráfico 8 - Questão 7 do Feedback	63
Gráfico 9 - Questão 8 do Feedback	64
Gráfico 10 - Questão 9 do Feedback	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Nome das 7 notas musicais	23
Tabela 2 - Figuras rítmicas, nome e duração	25
Tabela 3 - Leitura dos denominadores menores que 10	29
Tabela 4 - Leitura dos denominadores que são potências de 10	29
Tabela 5 - Respostas da pergunta 10 do Feedback.....	66
Tabela 6 - Respostas da pergunta 11 do Feedback.....	66
Tabela 7 - Respostas da pergunta 12 do Feedback.....	67

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	14
2 - MATEMÁTICA E MÚSICA	17
3 - NOÇÕES DE TEORIA MUSICAL	21
3.1. Música	21
3.2. Melodia	21
3.3. Harmonia	21
3.4. Ritmo	22
3.5. Som	22
3.6. Notas Musicais	23
3.7. Pentagrama ou Pauta Musical	24
3.8. Figuras Rítmicas	24
3.9. Compasso Musical	25
3.10. Intervalo Musical	26
4 - FRAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL	27
4.1. O Desafio do Ensino de Fração	27
4.2. Conceito de Fração	28
4.2.1. Definição de Fração	28
4.2.2. Leitura de uma Fração	28
4.2.3. Frações Equivalentes	29
4.2.4. Simplificação de Fração	30
4.2.5. Redução ao mesmo denominador	31
4.2.6. Adição e Subtração de Fração	32
4.2.7. O Corpo de Frações de um Domínio de Integridade	37
5 - PROPOSTA DE AULA	43
5.1 Aula 1: Frações e os Compassos Musicais	43
5.2 Aula 2: Frações e os Compassos Musicais	45
6 - A PESQUISA	48
6.1. A Escolha da Amostra	48
6.2. Conectando a Música e a Matemática	49
6.3. Compassos Musicais e as Frações	50
6.4. O 2º Dia da Aula de Frações	55
6.5. Análise das Respostas dos Exercícios	57
6.6. Feedback dos Alunos	58
6.6.1. Parte 1: Avaliação da Metodologia	58
6.6.2. Parte 2: Avaliação do Conteúdo	61
6.6.3. Parte 3: Autoavaliação	64
6.6.4. Parte 4: Sugestões e Feedback	65
7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	70

1 - INTRODUÇÃO

A Matemática é comumente considerada a uma disciplina complexa, com um aprendizado difícil e temida por muitos estudantes, tem sido o motivo de frustração para diversos alunos ao decorrer dos anos. Como apontam Moreira e Santos (2020): “Desse modo a matofobia refere-se ao medo do “bicho papão” chamado de Matemática que muitos(as) estudantes convivem e traz consigo essa fobia, tornando a aprendizagem algo doloroso que causa infelicidade além de ser complexo para eles(as)”. Além disso, Pereira (2022) destaca que um dos grandes desafios do professor de Matemática é tornar os conteúdos compreensíveis e aplicáveis ao dia a dia dos alunos:

“Um dos grandes desafios encontrados pelo professor ao ministrar as aulas, sobretudo no ensino de Matemática, é dar significado aos conteúdos de modo que permita a compreensão do aluno, possibilitando que contextualize tal aprendizado ao seu cotidiano, uma vez que o ensino relacionado ao dia a dia do aluno tende a ser bem mais produtivo.”.
(PEREIRA, 2022, p.10)

E isso mostra que a Matemática não é uma disciplina fácil de ensinar nem de aprender. Por sua vez, a Música com seu caráter universal e sua capacidade de despertar emoções, possui um enorme potencial para estimular o aprendizado. Barbosa (2022) destaca que: “Assim, além de promover a socialização, a Música oferece grande apoio em todo processo de aprendizagem por favorecer a ludicidade, a memória e a criatividade”.

A conexão entre Música e Matemática tem sido foco de estudo e pesquisa no decorrer da história, comprovando como essas duas áreas do conhecimento estão entrelaçadas. Desde os estudos de Pitágoras sobre a harmonia dos sons até as aplicações modernas da Matemática na composição musical, é notório que os conceitos matemáticos estão profundamente inseridos na estrutura da Música. Dessa forma, utilizar a Música como recurso pedagógico pode ser uma estratégia eficaz para tornar a Matemática mais atrativa e dinâmica.

A adoção de abordagens interdisciplinares, como o uso da Música, pode contribuir para um aprendizado mais dinâmico e contextualizado. Ritmo, melodia e padrões musicais são elementos que contêm princípios matemáticos implícitos, como proporções, sequências e frações, tornando-se um recurso de alto valor para o incentivo de estudar os conteúdos matemáticos. Oliveira e Oscar (2023) afirmam:

“A interseção entre as disciplinas matemática e música pode trazer para a sala de aula excelentes oportunidades para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem, considerando que ambas as disciplinas desempenham papéis fundamentais no desenvolvimento cognitivo e criativo dos estudantes”. (OLIVEIRA, OSCAR, 2023, n.p).

A relevância deste estudo está na busca por metodologias que despertem o interesse e aumentem o engajamento dos alunos no aprendizado matemático. Como destaca LIMA:

“O bom professor é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico de transmitir esse conhecimento, portanto se interessa pelas dificuldades de seus alunos e procura se colocar no lugar deles, entender seus problemas e ajudar a resolvê-los.”. (LIMA, 1995, p. 5)

Desta forma espera-se que os professores tornem as aulas mais motivadoras e estimulantes para os alunos. Embora essa dissertação não apresente uma solução definitiva para o Ensino de Matemática, busca contribuir para o desenvolvimento de práticas pedagógicas que integram a Música como recurso inspirador no aprendizado da disciplina.

Nesta dissertação será apresentada uma proposta de aula que introduz o ensino de frações usando a Música como instrumento inspirador, visando estimular o interesse dos alunos pelo conteúdo. Essa aula se chama "**Frações com Compasso Musical**" e foi dividida em dois encontros com o objetivo de mostrar como os tempos musicais podem ser utilizados para ilustrar frações de maneira intuitiva e envolvente, facilitando a assimilação deste conceito.

A primeira aula (Aula 1) deve ser feita em dois tempos de 50 min e foi testada em uma turma de 27 alunos, ou seja, 1 hora e 40 minutos. E a segunda aula (Aula 2) em um tempo de 50 minutos que não foi possível testar pois o calendário escolar da turma estava apertado.

Além de todos os motivos apresentados para a escolha deste tema, há também uma razão pessoal. Sempre tive grande admiração pela Matemática e pelo ensino, além de possuir experiência com Música desde os 15 anos. Por isso decidi unificar esses dois assuntos que andam constantemente comigo. Assim como existem alunos que se interessam pelos desafios matemáticos em sua forma mais abstrata, há aqueles que precisam de um estímulo extra para se engajar no aprendizado. Considerando essa diversidade de perfis, sempre acreditei que a combinação entre Música e Matemática poderia atrair a atenção de um maior número de alunos.

Espera-se que abordagem proposta inspire os estudantes a enxergar a Matemática como algo presente em seu cotidiano tornando-se mais acessível e prazerosa. Além disso, almeja-se que os resultados obtidos incentivem outros professores a usarem essa alternativa em suas práticas pedagógicas, bem como a explorarem novas abordagens interdisciplinares para o ensino da Matemática.

2 - MATEMÁTICA E MÚSICA

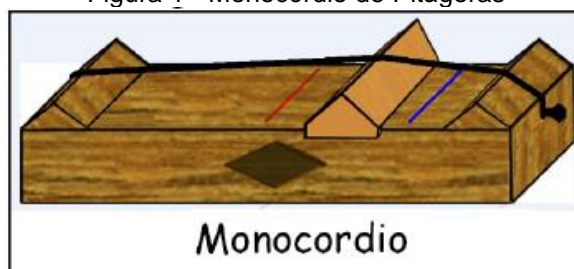
Em diversos povos da antiguidade encontram-se manifestações do uso de Música e Matemática. A Matemática encontra-se presente desde tempos mais antigos, por exemplo, na contagem. A Música, por sua vez, se fez presente na mitologia grega, como a história de Orfeu, cujo canto, acompanhado de sua lira, amansava feras e movia pedras. Na bíblia aprendemos que Davi, com sua harpa, possuía poder de cura.

A relação entre Matemática e Música se evidencia de forma científica primeiramente com Pitágoras no século VI a.C., sendo o primeiro a estudar a Música e os intervalos de frequências. Segundo a lenda, Pitágoras, ao passar em frente à oficina de um ferreiro, percebeu que os diferentes sons produzidos pelas batidas dos martelos proporcionavam uma sensação agradável e combinavam muito bem, notando que havia uma constante harmonia. Daí, o matemático pesou os quatro martelos e descobriu que o martelo A pesava 12, o martelo B pesava 9, o C pesava 8 e o D pesava 6.

Com os pesos dos martelos, o geômetra observou que a razão entre os pesos dos martelos B e A era de 3:4, dos martelos C e A era de 2:3 e dos martelos D e A era de 1:2. Pensando nessas proporções, o filósofo arquitetou se era possível repetir essa condição em outro experimento.

Por volta do século VI a. C., Pitágoras construiu um instrumento rudimentar de uma única corda estendida presa entre dois cavaletes fixados a uma tábua dividida em 12 espaços iguais, este instrumento mais tarde seria chamado de monocórdio, o qual se assemelha a um violão.

Figura 1 - Monocórdio de Pitágoras



Fonte: <https://paratodosmusica.wordpress.com>

No monocórdio quando o fio está esticado produz uma vibração numa frequência particular, quando o comprimento da corda é dividido ao meio e tocado, produz um tom uma oitava mais alta, e vibra a uma frequência duas vezes maior que a original (2:1). As metades desse comprimento irão produzir um tom duas oitavas mais alto que o original, a sua frequência (4:1) e assim por diante. [1]

Mais tarde Arquitas de Tarento (428–347 a.C.), filósofo e matemático grego e um dos discípulos de Pitágoras, fez contribuições para a ligação entre Música e Matemática. Ele é muito citado por seus estudos sobre a teoria dos sons e sua aplicação a intervalos musicais, utilizando conceitos matemáticos para compreender a harmonia musical.

Figura 2 - Arquitas de Tarento



Fonte: <https://www.estudantedefilosofia.com.br/filosofos/arquitas.php>

Tarento teria definido a Música como uma das quatro Ciências Matemáticas por excelência lecionadas na Europa desde a Idade Média. Essas eram: a Aritmética, a Geometria, a Astronomia e a Música. Por isso, quem quisesse fazer o curso de Matemática, também teria de aprender Música.

Outro matemático, físico e filósofo que contribuiu significativamente para a relação entre Música e Matemática foi René Descartes (1596–1650) por meio de sua obra *Compendium Musicae* (Compêndio de Música) (1618), na qual explicou como a Música pode ser vista matematicamente, investigando a conexão entre sons, proporções e percepção humana.

Figura 3 - René Descartes



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/René_Descartes

Dentre todas as suas contribuições, destacam-se o quanto Descartes ajudou a consolidar a visão da Música como uma Ciência exata, baseada em princípios matemáticos, ao mesmo tempo que reconhecia seu impacto sensorial e emocional. Sua contribuição na Teoria da Percepção Musical, onde estudou como os sons contribuem na percepção e no prazer humano, sugerindo que a consonância (união de notas que soam de forma agradável ao ouvido) e a dissonância (sensação de conflito entre notas) estão ligadas à facilidade com a qual o ouvido diferencia certas relações matemáticas entre notas. Assim, Descartes contribuiu na Teoria da Música Moderna, influenciando os pensadores vindouros a estabelecerem a base para a teoria musical baseada na acústica.

Nos tempos atuais, Frederico Ardila, matemático colombiano nascido em 1977, tem feito importantes contribuições que relacionam Música e Matemática, com maior destaque no campo da harmonia e à estrutura musical.

Figura 4 - Frederico Ardila



Fonte: <https://www.colombia.com/colombianos/>

Ardila colaborou na estrutura combinatória das notas musicais e a maneira com a qual elas podem ser distribuídas dentro de escalas e acordes; evidenciou a ideia de que conceitos geométricos podem ser usados para entender a simetria nas escalas e acordes musicais; e destacou-se em promover a interseção entre Matemática e Música na educação.

Por meio dessas abordagens, Frederico Ardila ajudou a demonstrar como a Matemática pode ser um instrumento poderoso para compreender a Música de maneira mais profunda, além de encorajar a exploração de conexões interdisciplinares entre essas duas áreas.

Hoje sabemos que a Matemática está presente nos tempos, durações do dos sons, nas fórmulas dos compassos, nas medidas dos elementos sonoros como o volume e frequência e na formação de escalas e acordes. Desta forma o uso da Música como forma de contextualização no ensino da Matemática se torna uma ferramenta viável para o aumento do nível de motivação para se estudar os conteúdos matemáticos.

3 - NOÇÕES DE TEORIA MUSICAL

3.1. MÚSICA

A Música é a arte de combinar sons de forma simultânea e sucessivamente, com equilíbrio, ordem e proporção dentro do tempo. Segundo o livro Teoria Musical de Bohumil Med, os principais componentes da Música são: harmonia, melodia e ritmo.

3.2. MELODIA

Conjunto de sons dispostos em ordem sucessiva relacionando entre si, dita como um dos elementos mais importantes da Música, sendo a parte que facilmente se memoriza. Geralmente, fica a cargo do cantor ou de um instrumento como flauta, sax, violino ou nos solos de piano e guitarra. Veja aqui: <https://moises.ai/pt/blog/dicas/o-que-e-melodia/> onde cita:

A melodia é um dos elementos mais essenciais da música. É uma sequência de notas que faz sentido, formando uma melodia reconhecível. É como a voz de uma música — a parte que você cantarola; algo que permanece por muito tempo depois que a música acaba.

3.3. HARMONIA

Diz respeito a combinação simultânea de sons para formar acordes e a progressão desses acordes ao longo de uma Música, adicionando profundidade e riqueza à Música, estabelecendo a base para a estrutura emocional da Música.

Podemos ouvir a bela canção *Eu sei que vou te amar* de Tom Jobim e Vinícius de Moraes um exemplo que harmonia bem marcante. Veja aqui: <https://www.youtube.com/watch?v=TARRNm0x1lw> .

3.4. RITMO

Ordem e proporção em que estão dispostos os sons que constituem a melodia e harmonia. Pode se pensar como a organização dos sons e silêncios no tempo. A relação entre durações de sons e silêncios definem o ritmo.

Veja os exemplos da Música *Sozinho* de Caetano Veloso apresentada em três ritmos diferentes: Versão original em MPB cantada por Caetano, pagode interpretada por Elias Oliveira e em sertanejo apresentada por Augusto e Atílio.

- MPB: <https://www.youtube.com/watch?v=j9UbE1sII-Q>
- Pagode: <https://www.youtube.com/watch?v=TLpQaulGj3g>
- Sertanejo: <https://www.youtube.com/watch?v=m8FFkVatDPI>

3.5. SOM

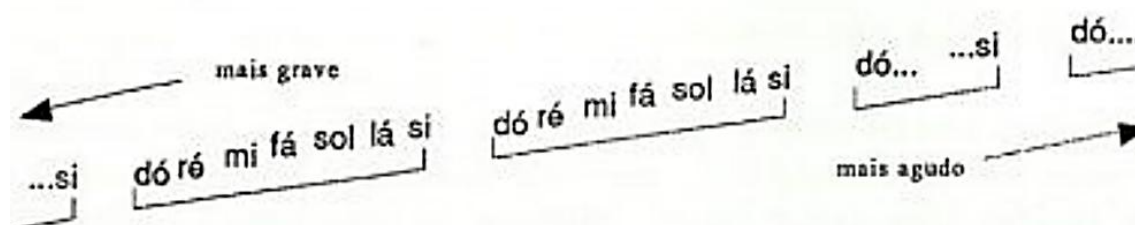
É a sensação produzida no ouvido pelas vibrações de um meio material elástico como ar, água ou sólidos. Uma vibração faz com que o ar se movimente em forma de ondas sonoras que se propagam em todas as direções simultaneamente, fazendo vibrar a membrana do tímpano quando chegam no ouvido. Essas vibrações são transformadas em impulsos nervosos e transmitidas ao cérebro que as identificam os diferentes sons.

Quando as vibrações que o som produz são irregulares chamamos o som de barulho, como o som dos automóveis ou um vidro quebrando. Já quando as vibrações são regulares produzem altura definida e chamamos o som de notas musicais. Por exemplo, o som do violão, piano ou flauta. Na Música são usados os dois tipos de sons: regulares (instrumentos com notas definidas) e irregulares (instrumentos de percussão). O som possui algumas características importantes que são a duração, altura, intensidade e timbre.

Duração é o tempo no qual cada som fica em execução na Música, seja ele um som regular ou irregular. Também podemos pensar no tempo em que cada silêncio fica em execução.

Altura é a frequência das vibrações produzidas pelas notas musicais. Existem notas que vibram uma quantidade maior que outras, quanto mais vibra uma nota dizemos que ela é mais **aguda** (maior frequência) e quanto menos vibra dizemos que ela é mais **grave** (menor frequência).

Figura 5 - Altura das Notas Musicais



Fonte: Bohumil (1996)

Intensidade é a amplitude das vibrações, que é determinada pela força ou pelo volume do agente que as produz. É o grau do volume sonoro.

3.6. NOTAS MUSICAIS

Notas Musicais são sons que possuem vibrações regulares. Cada nota musical vibra uma certa quantidade de vezes durante o tempo de 1 (um) segundo e chamamos isso de frequência da nota. Embora existam uma infinidade de notas musicais, as que usamos na Música brasileira são representadas com apenas sete notas (Tabela 1).

Tabela 1 - Nome das 7 notas musicais

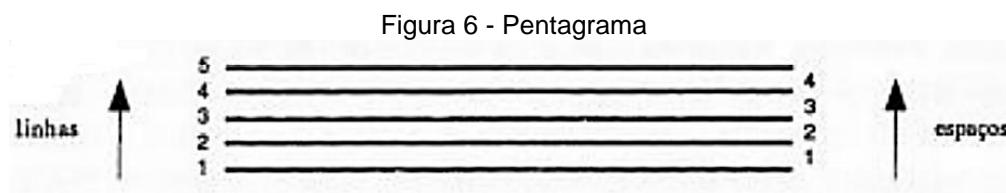
Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si
----	----	----	----	-----	----	----

Fonte: Elaborado pelo autor.

Essas sete notas musicais são muito conhecidas, porém devemos saber que duas notas diferentes podem receber o mesmo nome. Por exemplo a nota Dó aparece na maioria dos pianos um total de 8 vezes, porém os que aparecem mais à esquerda são mais graves do que os mais à direita.

3.7. PENTAGRAMA OU PAUTA MUSICAL

O pentagrama ou pauta musical é um conjunto de 5 linhas horizontais e paralelas com 4 espaços intermediários, onde se escrevem as notas musicais e os silêncios.

















Fonte: Bohumil (1996)

A Figura 6 mostra a contagem das linhas e dos espaços. Se uma figura rítmica é escrita em cima da linha 1 será tocada uma nota com certa duração, porém deverá se tocar outra nota com a mesma duração, se a mesma figura rítmica for escrita em cima de qualquer outra linha ou de qualquer espaço entre as linhas.

3.8. FIGURAS RÍTMICAS

As notas musicais têm durações diferentes na Música, isso é dado conforme a criatividade do autor da canção. Essas durações são representadas por figuras e chamadas de **Figuras Rítmicas**.

Tabela 2 - Figuras Rítmicas, nome e duração

Número da Figura	Nome	Som	Silêncio	Duração
1	Semibreve			1
2	Mínima			$\frac{1}{2}$
4	Semínima			$\frac{1}{4}$
8	Colcheia			$\frac{1}{8}$
16	Semicolcheia			$\frac{1}{16}$
32	Fusa			$\frac{1}{32}$
64	Semifusa			$\frac{1}{64}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Tabela 2, é apresentada o tempo de duração, os símbolos e os nomes de cada figura rítmica que serão usadas para informar o tempo que cada nota ou silêncio deve permanecer em execução.

3.9. COMPASSO MUSICAL

Para compreender melhor o compasso musical devemos tomar o pentagrama, onde escrevemos as figuras rítmicas para saber qual a duração e qual a nota que deve ser tocada. Podemos dividir uma Música em intervalos de tempo regulares. Essa divisão é chamada de **compasso musical**.

Figura 7 - Compasso Musical

BARRAS DE COMPASSO



Fonte: Luciana Amaral, 2023

Na Figura 7 é apresentada um trecho de uma canção onde o pentagrama foi dividido em 5 partes por 4 traços verticais chamado de barra de compasso. Além disso, no início do primeiro compasso podemos observar dois números conhecidos como fração ou fórmula do compasso, sendo o numerador (número de cima) responsável por indicar o número de batidas em cada compasso, e o denominador (número de baixo) indica o valor da nota que recebe uma batida. Assim, cada compasso no exemplo onde a fórmula é $\frac{3}{4}$, cabem o tempo de 3 semínimas. Caso a fórmula fosse $\frac{6}{8}$, em cada compasso caberiam o tempo de 6 colcheias.

3.10. INTERVALO MUSICAL

Intervalo musical é a distância entre duas notas musicais, ou seja, a diferença de altura entre elas. Esta diferença de frequência é percebida pelo ouvido humano, que distingue as notas

4 - FRAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

4.1. O DESAFIO DO ENSINO DE FRAÇÃO

Os obstáculos encontrados pelos alunos do Ensino Básico e do Ensino Médio ao lidarem com operações básicas com números racionais são um desafio recorrente para os professores. Essa dificuldade surge, em grande parte, da falta de uma progressão estruturada e bem gerida do aprendizado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

A construção dos números racionais ocorre em duas etapas: a formação dos números racionais positivos (\mathbb{Q}^+) e suas operações, seguida pela expansão para o conjunto \mathbb{Q} . No entanto, a principal dificuldade está na primeira etapa, que deveria ser consolidada nas séries iniciais. Como nessa fase esses conteúdos são ministrados por professores sem formação específica em Matemática, os alunos acabam memorizando algoritmos sem compreender seus significados. Isso resulta em lacunas que se estendem até o Ensino Médio, tornando-se um obstáculo ao aprendizado mais avançado.

No Ensino Fundamental, frações são introduzidas como representação de partes de um todo. Porém, no 5º e 6º anos, surgem desafios que exigem novos significados, principalmente ao abordar as operações elementares. No 7º ano, amplia-se e aprofunda-se o estudo para números racionais, porém o número excessivo de avaliações e recuperações fazem com que os professores precisem ensinar os conteúdos de maneira corrida ou incompleta, dificultando que seja corrigido essa falha na educação do aluno. Essa abordagem fragmentada pode contribuir para que as dificuldades se perpetuem.

A fim de superar essas dificuldades, torna-se essencial utilizar estratégias didáticas mais acessíveis, dinâmicas e lúdicas. Dessa forma, a reconstrução dos conceitos matemáticos pode se tornar mais efetiva, promovendo um ensino mais significativo e melhorando a compreensão dos estudantes sobre números racionais.

4.2. CONCEITO DE FRAÇÃO

No dia a dia, as frações são utilizadas para expressar quantidades e medidas que não podem ser representadas por números naturais. Usamos o conceito de fração em diversas situações, como dividir uma pizza entre amigos ou medir ingredientes em uma receita. No Ensino de Matemática, compreender frações é essencial, pois elas servem de base para o estudo de números racionais, proporções e probabilidades.

4.2.1. Definição de Fração

Dados dois números naturais a e b , com $b \neq 0$, definimos como fração o número escrito na forma $\frac{a}{b}$, sendo a o numerador e b o denominador. O numerador e o denominador são chamados **termos da fração**.

É importante lembrarmos que a 'definição' dada anteriormente é usada para alunos do ensino fundamental, longe da definição de que uma fração é uma classe de equivalência e que $\frac{a}{b}$ é apenas um representante de tal classe. Isso, por exemplo, explicaria o porquê de $\frac{2}{3}$ ser igual a $\frac{4}{6}$.

No final do capítulo, daremos um tratamento mais refinado da construção dos Racionais a partir dos Inteiros como o seu corpo de frações. Esse fato é de grande importância e pode ser generalizado para a construção do corpo de frações de um domínio de integridade.

4.2.2. Leitura de uma Fração

Na leitura de uma fração, devemos inicialmente ler o numerador e, a seguir, o termo correspondente ao denominador.

- **Denominador menor que 10**

Tabela 3 - Leitura dos denominadores menores que 10

Denominador	Leitura	Denominador	Leitura
2	meio	6	sexto
3	terço	7	sétimo
4	quarto	8	oitavo
5	quinto	9	nono

Fonte: Elaborado pelo autor

Exemplo: $\frac{3}{5}$ → lê-se “três quintos”

- **Denominador sendo uma potência de 10**

Tabela 4 - Leitura dos denominadores que são potências de 10

Denominador	Leitura	Denominador	Leitura
10	décimo	10 000	décimo de milésimo
100	centésimo	100 000	centésimo de milésimo
1 000	milésimo	1 000 000	milionésimo

Fonte: Elaborado pelo autor

Exemplo: $\frac{7}{1000}$ → “sete milésimos”

Nos demais casos devemos ler o numerador e, em seguida, o denominador acrescentando a palavra **avos**. Assim a fração $\frac{8}{17}$ lê-se “oito dezessete avos”.

4.2.3 Frações Equivalentes

Duas ou mais frações que represente a mesma parte da unidade são chamadas equivalentes.

Figura 10 - Simplificação de Fração

$$\frac{144}{32} = \frac{72}{16} = \frac{36}{8} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Fonte: <https://comosaber.se/fracoes-equivalentes/>

Na Figura 10, é possível observar que ao dividir os termos da fração por 2, obtemos outras frações equivalentes entre si, porém a fração mais à direita (a última) é chamada de **fração irredutível**, já que não é mais possível fazer uma simplificação, uma vez que o 9 e o 2 não possuem mais divisores comuns diferentes da unidade.

4.2.5. Redução ao mesmo denominador

É o processo feito para encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador, entre duas ou mais frações que não possuem o mesmo denominador. Dadas duas ou mais frações, o processo de redução ao mesmo denominador consiste em:

- i. Calcular o M.M.C. ou qualquer outro múltiplo comum entre todos os denominadores.
- ii. Dividir o esse múltiplo encontrado por cada denominador, obtendo números naturais como quocientes.
- iii. Multiplicar cada quociente encontrado pelo seu respectivo numerador.

Desta forma encontramos frações equivalentes as iniciais, porém todas com o mesmo denominador.

Considere as frações $\frac{2}{9}$ e $\frac{5}{6}$ cujos denominadores são diferentes. Devemos então encontrar qualquer múltiplo comum de 9 e 6, porém se usarmos o menor deles facilitaremos as contas futuras. Assim, o menor múltiplo comum (mmc) entre 9 e 6 é o 18.

Daí, dividiremos o mmc encontrado por cada denominador anterior obtendo os números 2 e 3, respectivamente, multiplicando esses números pelos numeradores (2 e 5).

Deste modo, teremos o novo denominador para ambas as frações, que é o mmc encontrado. Além disso, novos numeradores que são os resultados obtidos da última multiplicação.

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{4}{18} \text{ e } \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$$

Possuindo então, o mesmo denominador.

4.2.6. Adição e Subtração de Fração

Para somar ou subtrair frações com denominadores iguais, basta repetir o denominador e somar ou subtrair os numeradores.

Caso os denominadores sejam diferentes, devemos reduzir ao mesmo denominador todas as frações envolvidas. Fazendo, em seguida, as operações indicadas com os numeradores. Veja o exemplo 1 a seguir:

Exemplo 1

i. $\frac{2}{7} + \frac{3}{8} \quad mmc(7,8) = 56$

ii. Dividimos o $mmc(7,8) = 56$ pelos denominadores, obtendo quocientes naturais.

iii. Multiplicamos

iv. esses quocientes pelos termos de $\frac{2}{7}$ e pelos termos de $\frac{3}{8}$, obtendo,

respectivamente, $\frac{16}{56}$ e $\frac{21}{56}$.

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{8} = \frac{16 + 21}{56} = \frac{37}{56}$$

Exemplo 2

- i. $\frac{5}{12} + \frac{7}{18} - \frac{3}{8}$ $\text{mmc}(12, 18, 8) = 72$
- ii. Dividimos o $\text{mmc}(12, 18, 8) = 72$ pelos denominadores, obtendo quocientes naturais iguais a 6, 4 e 9.
- iii. Multiplicamos os termos de $\frac{5}{12}$ por 6, os termos de $\frac{7}{18}$ por 4 e os termos de $\frac{3}{8}$ por 9, obtendo, respectivamente, $\frac{30}{72}$, $\frac{28}{72}$ e $\frac{27}{72}$.

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} - \frac{3}{8} = \frac{30+28-27}{72} = \frac{31}{72}$$

4.2.8. Anéis e Corpos

O conjunto dos números inteiros com a soma e o produto são o primeiro exemplo de uma estrutura algébrica mais geral: os anéis, que definimos a seguir:

Definição 1 (Operação)

Dizemos que um conjunto A está munido com operações de adição (+) e multiplicação (\cdot) se, e somente se, para todo par $(a, b) \in A \times A$ sabemos associar um único elemento $c \in A$ e um único elemento $d \in A$ denotados, respectivamente, por:

$$c = a + b \text{ e } d = a \cdot b$$

Nesse caso, dizemos que as operações estão fechadas no conjunto A , isto é, para quaisquer $a, b \in A$, temos $a + b \in A$ e $a \cdot b \in A$.

A adição e a multiplicação são descritas por funções

$$\begin{array}{l} +: A \times A \rightarrow A \\ (a, b) \mapsto c = a + b \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} A \times A \rightarrow A \\ (a, b) \mapsto d = a \cdot b \end{array}$$

Definição 2 (Anel)

Um anel A é um conjunto munido com operações de adição (+) e de multiplicação (\cdot), tendo as seguintes propriedades:

A1 (associativa) Para quaisquer $a, b, c \in A$, temos $(a + b) + c = a + (b + c)$.

A2 (Comutativa) Para quaisquer $a, b \in A$, temos $a + b = b + a$.

A3 (Existência de elemento neutro para a adição)

Existe $\theta \in A$, tal que $a + \theta = \theta + a = a$, para todo $a \in A$.

A4 (Existência de simétrico)

Para cada $a \in A$, existe $a' \in A$, tal que $a + a' = a' + a = \theta$.

M1 (Associativa) Para quaisquer $a, b, c \in A$, temos $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

AM (Distributiva) Para quaisquer $a, b, c \in A$, temos $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Definição 3 (Anel comutativo)

Dizemos que um anel A é *comutativo* se, e somente se, tem a propriedade:

M2 (Comutativa) Para quaisquer $a, b \in A$, $a \cdot b = b \cdot a$.

Existe $e \in A$, tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$, para todo $a \in A$

Definição 4 (Anel com unidade)

Dizemos que o anel A tem *unidade*, se e somente se, A tem a propriedade:

M3 (Existência de elemento neutro multiplicativo)

Outro exemplo de anel é o $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, definido como

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$$

com as operações de adição e multiplicação definidas como segue:

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (a \cdot c + 2b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c + d)\sqrt{2}$$

Observe que as operações estão bem definidas pois todos os números a seguir são inteiros

$$a + c, b + d, a \cdot c + 2b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c$$

Como a nova adição e multiplicação usa a adição e multiplicação dos números inteiros, é fácil ver que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ é um anel comutativo com unidade.

O conjunto dos números inteiros tem outra propriedade importante, ele é um domínio. Isto é se o produto de dois números inteiros for igual a zero, então um dos fatores era zero.

Seguindo as ideias para construção do conjunto dos números racionais a partir dos inteiros, podemos construir o corpo de frações de qualquer domínio D . Isto é, dado um domínio D é possível encontrar um conjunto maior que será um corpo e que contém o domínio.

Definição 8 (Corpo) Um anel comutativo com unidade é chamado de corpo se, e somente se, todo elemento não-nulo é invertível.

Para todo domínio D , podemos construir o seu corpo de frações $Q(D)$, a saber, o conjunto

$$Q(D) = \left\{ \frac{a}{b}; a, b \in D, b \neq 0 \right\}$$

onde $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $a \cdot d = b \cdot c$.

$Q(D)$ é um corpo com as operações:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Estas operações independem dos representantes das frações.

$Q(D)$ é um corpo que tem as seguintes propriedades:

- (i) D é um subanel de $Q(D)$.
- (ii) Se K é um corpo e D é um subanel de K , então $Q(D)$ é subcorpo de K .

Por exemplo, o corpo de frações de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ é $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ onde

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{r + s\sqrt{2}; r, s \in \mathbb{Q}\}$$

Mostrar que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é um anel comutativo com unidade não é difícil. Vamos mostrar que todo elemento não nulo tem inverso.

Seja $r + s\sqrt{2} \neq 0$ afirmamos que o inverso é $\frac{r}{r^2+2s^2} + \frac{s}{r^2+2s^2}\sqrt{2}$. Observe que como r e s não são os dois nulos, então $\frac{r}{r^2-2s^2}$ e $\frac{s}{r^2-2s^2}$ estão bem definidos e são números racionais.

Agora

$$(r + s\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{r}{r^2 + 2s^2} - \frac{s}{r^2 - 2s^2} \sqrt{2} \right) = \left(\frac{r}{r^2 - 2s^2} - \frac{s}{r^2 - 2s^2} \right) + \left(\frac{r \cdot (-s\sqrt{2})}{r^2 - 2s^2} + \frac{s\sqrt{2} \cdot r}{r^2 + 2s^2} \sqrt{2} \right) = 1$$

4.2.8. O Corpo de Frações de um Domínio de Integridade

Toda essa construção das frações - os elementos do Conjunto dos Números Racionais - é resultado da evolução do conceito de número e decorreu ao longo de gerações de matemáticos. Esse processo é tão marcante - ao mesmo tempo engenhoso e prático - que pode ser abstraído e generalizado, resultando no teorema afirmando que todo 'domínio de integridade' (a estrutura algébrica cujo exemplo primeiro é o Conjunto dos Números Inteiros) pode ser mergulhado num corpo - o seu 'Corpo de Frações'.

Nesta seção vamos apresentar de maneira resumida esse resultado matemático.

Vamos lembrar da definição usando, como referência, o livro Tópicos de Álgebra de I. N. Herstein, que segue:

Teorema: *Todo anel de integridade pode ser imerso num corpo.*

Demonstração. Antes de proceder formalmente com os detalhes da demonstração tomemos um ponto de vista informal do problema.

Seja D nosso anel de integridade, isto é, D é um anel em que vale a propriedade $\forall a, b \in D$ se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Em termos não rigorosos, o corpo que procuramos deve ser constituído de todas as frações $\frac{a}{b}$ onde $a, b \in D$ e $b \neq 0$.

Evidentemente $\frac{a}{b}$ pode muito bem não ter sentido. O que devemos exigir destes símbolos $\frac{a}{b}$? Assim, precisamos ter uma resposta às três perguntas seguintes:

(1) Quando é $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$?

(2) O que é $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

(3) O que é $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$?

Para responder (1), nada mais natural do que afirmar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$? Quanto a (2) e (3), por que não tentar o óbvio, isto é, definir $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$?

De fato, no que se segue faremos destas considerações nosso guia. Portanto, vamos entrar no domínio da Matemática, com definições precisas e deduções rigorosas.

Seja M o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , onde $a, b \in D$ e $b \neq 0$. (Imaginar (a, b) como $\frac{a}{b}$). Em M definimos agora uma relação de equivalência da seguinte maneira:

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ se, e somente se, } ad = bc.$$

Essa relação é baseada no fato de que dois pares representarão a mesma fração se forem equivalentes.

Afirmamos que \sim define uma relação de equivalência sobre M . Para demonstrar isto verificamos as três condições da definição de uma relação de equivalência para esta particular relação.

- i) Se $(a, b) \in M$ então $(a, b) \sim (a, b)$, ou seja, a relação é reflexiva, pois $ab = ba$.
- ii) Se (a, b) e (c, d) estão em M e $(a, b) \sim (c, d)$, então $ad = bc$, donde $cb = da$, e, portanto, $(c, d) \sim (a, b)$. Assim, a relação é simétrica.
- iii) Se (a, b) , (c, d) e (e, f) estão em M e $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então $ad = bc$ e $cf = de$. Assim, $bcf = bde$, e como $bc = ad$, segue-se que $adf = bde$. Como D é comutativo, esta relação torna-se $afd = bed$. Além disso, D é um anel de integridade e $d \neq 0$, esta relação implica que $af = be$. Mas então, $(a, b) \sim (e, f)$ e a relação é transitiva.

Seja $[a, b]$ a classe de equivalência em M de (a, b) e seja F o conjunto de todas estas classes de equivalência $[a, b]$, onde $a, b \in D$ e $b \neq 0$. F é um candidato a corpo que estamos procurando. Para tornar F um corpo precisamos introduzir uma adição e uma multiplicação para seus elementos e então mostrar que com estas operações F forma um corpo.

Vamos começar à adição. Motivados pela nossa discussão heurística no início da demonstração, definimos $[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$.

Como D é um anel de integridade e como $b \neq 0$ e $d \neq 0$ temos $bd \neq 0$; isto nos diz pelo menos que $[ad + bc, bd] \in F$. Afirmamos agora que esta adição está bem definida, isto é, se

$$[a, b] = [a', b'] \text{ e } [c, d] = [c', d'], \text{ então } [a, b] + [c, d] = [a', b'] + [c', d'].$$

Para ver que isto é verdade, de $[a, b] = [a', b']$ temos que $ab' = ba'$; de $[c, d] = [c', d']$ temos que $cd' = dc'$. O que precisamos é que estas relações impliquem a igualdade de $[a, b] + [c, d]$ e $[a', b'] + [c', d']$.

Da definição de adição isto se resume em mostrar que

$$[ad + bc, bd] = [a'd' + b'c', b'd'],$$

ou, em termos equivalentes, que $(ad + bc)b'd' = bd(a'd' + b'c')$.

Usando $ab' = ba'$, $cd' = dc'$ isto se torna:

$$(ad + bc)b'd' = adb'd' + bcb'd' = ab'dd' + bb'cd' = ba'dd' + bb'dc' = bd(a'd' + b'c')$$

que é a igualdade desejada.

Evidentemente, $[0, b]$ funciona como o elemento zero para esta adição e $[-a, b]$ como o oposto de $[a, b]$. É fácil verificar que F é um grupo abeliano com relação a esta adição.

Voltamos agora para a multiplicação em F . Novamente, motivados pela nossa discussão heurística preliminar definimos $[a, b][c, d] = [ac, bd]$. Como no caso da adição, sendo $b \neq 0$, $d \neq 0$, $bd \neq 0$ e assim $[ac, bd] \in F$. Um cálculo, com o mesmo espírito daquele há pouco efetuado, demonstra que se $[a, b] = [a', b']$ e $[c, d] = [c', d']$, então $[a, b][c, d] = [a', b'][c', d']$. Da definição de multiplicação é o mesmo que mostrar que $[ad, bc] = [a'd', b'c']$, ou que $adb'c' = bca'd'$. Usando $ab' = ba'$ e que $cd' = dc'$, daí temos $adb'c' = ab'dc' = ba'cd' = bca'd'$, que é o resultado que buscávamos.

Pode-se agora demonstrar que os elementos não nulos de F (isto é, todos os elementos $[a, b]$ onde $a \neq 0$) formam um grupo abeliano com relação à multiplicação no qual $[d, d]$ funciona como o elemento unidade e onde $[c, d]^{-1} = [d, c]$ (pois $c \neq 0$, $[d, c]$ está em F). Com cálculos simples pode-se ver que a lei distributiva vale em F . Assim, F é um corpo.

Falta apenas mostrar que D pode ser imerso em F . Exibiremos um monomorfismo explícito de D em F . Antes de fazê-lo notemos primeiramente que para $x \neq 0$, $y \neq 0$ em D , $[ax, x] = [ay, y]$ pois $(ax)y = x(ay)$; indiquemos $[ax, x]$ por $[a, 1]$. Definamos $\phi: D \rightarrow F$ por $\phi(a) = [a, 1]$ para todo $a \in D$.

Para que $\phi: D \rightarrow F$ seja um homomorfismo a adição deve ser preservada, isto é, $\forall a, b \in D$, $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$. De fato, pois

$$\phi(a) + \phi(b) = [a, 1] + [b, 1] = [a \cdot 1 + 1 \cdot b, 1 \cdot 1] = [a + b, 1] = \phi(a + b)$$

Também, ϕ deve preservar a multiplicação, ou seja,

$$\forall a, b \in D, \phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

E isso de fato ocorre, pois

$$\phi(a) \cdot \phi(b) = [a, 1] \cdot [b, 1] = [ab, 1 \cdot 1] = [ab, 1] = \phi(ab)$$

Agora basta mostrar que o elemento neutro é preservado, ou seja, que ϕ transforma o '1' de D no '1' de F . E temos que $\phi(1) = [1, 1]$ que é a unidade de F , porque $[1, 1] \cdot [a, b] = [a, b] \cdot [1, 1] = [a, b]$. Assim, concluímos que ϕ é homomorfismo de D em F .

Para concluir, se provarmos que ϕ é injetiva, teremos que ϕ é um monomorfismo.

Precisamos que $\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow a = b$ ou que $\phi(a) = [a, 1] = 0 \Rightarrow a = 0$. Como ϕ é um homomorfismo, o núcleo determina se ela é injetiva.

Como o zero é representado em F ? Em F , temos que $[a, b] = 0$ se, e somente se, $\exists t \in F$ tal que $ta = 0$. Então,

$$\phi(a) = [a, 1] = 0 \Leftrightarrow \exists b \in F \text{ tal que } ba = 0$$

Como A é um domínio de integridade, então $a = 0$. Portanto, $\phi(a) = 0 \Rightarrow a = 0$. Isso mostra que ϕ é injetiva, ou seja, é um monomorfismo.

F é usualmente denominado o corpo de frações de D . No caso particular em que D é o anel dos inteiros, o F assim construído é, evidentemente, o corpo dos números racionais.

Exemplo: Vejamos que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é o corpo de frações de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Pela nossa construção o corpo das frações $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ seria formado pelas frações, com denominador não nulo, do tipo

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{(ac - 2bd) + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 + 2d^2} = \frac{(ac - 2bd)}{c^2 + 2d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + 2d^2}\sqrt{2}$$

Como

$$\frac{(ac - 2bd)}{c^2 + 2d^2}, \frac{(bc - ad)}{c^2 + 2d^2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Isso mostra que o corpo das frações de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ está contido em $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

5 - PROPOSTA DE AULA

Neste capítulo será apresentado uma proposta de aula para o Ensino de Matemática utilizando a Música como tema inspirador, pois ao considerar a interação entre Música e Matemática, torna-se evidente a riqueza dessa abordagem interdisciplinar. Como destaca o neurocientista e professor Daniel J. Levitin em seu livro *This is your brain on music* (2006), argumenta que a música é uma expressão universal que transcende culturas e tempos, e que sua estrutura envolve princípios matemáticos e físicos, como frequência, ritmo e harmonia. Esse entendimento pode ajudar os alunos a enxergarem a Matemática de uma maneira mais ampla, conectando-a a aspectos da vida cotidiana e tornando o aprendizado mais relevante e significativo.

5.1 AULA 1: FRAÇÕES E OS COMPASSOS MUSICAIS

PLANO DE AULA – 1º dia

Tema: Frações e os Compassos Musicais

Objetivos:

- **Apresentar** as aplicações da Matemática em diversos campos de nossa vida, inclusive a Música.
- **Relacionar** os conceitos de frações com o compasso musical.
- **Reforçar** os principais conceitos de fração, como frações equivalentes e soma de frações.
- **Estimular** o estudo de Matemática usando como recurso algo que faça parte da vida dos alunos.

Material Necessário:

- Quadro e caneta para quadro branco.
- Papel com as pautas musicais em branco.
- Algum dispositivo eletrônico que possa reproduzir Música.
- Quatro cartolinas coloridas cada uma com uma cor distinta da outra.

Público-alvo:

O sexto ano do ensino fundamental e qualquer turma na qual se queria revisar frações.

Duração: 100 minutos.

Descrição:

1. (5 minutos) Iniciar a aula perguntando aos alunos como tem sido o contato deles com a Música, explicitar que na Música também tem Matemática.
2. (15 minutos) Revisar os conceitos iniciais de frações, como numerador e denominador, frações equivalentes e soma de frações.
3. (15 minutos) Apresentar a teoria da Música necessária para a aula, fazendo o aluno associar para que servem o numerador e o denominador no compasso musical.
4. (20 minutos) Utilizar os círculos coloridos, feito das cartolinas, para que os alunos possam fazer as batidas conforme as Músicas estejam tocando.

5. (15 minutos) Realizar exemplos de diferentes compassos com a ideia de fixarem o conceito de frações equivalentes. Como exemplo os compassos $3/4$ e $6/8$. Assim como, exercícios de preenchimentos de compassos de forma adequada.
6. (30 minutos) Aplicar os exercícios preparados para avaliar o aprendizado e o método de ensino.

5.2 AULA 2: FRAÇÕES E OS COMPASSOS MUSICAIS

PLANO DE AULA – 2º dia

Tema: Frações e os Compassos Musicais.

Objetivos:

- **Relacionar** os conceitos de frações com o compasso musical.
- **Reforçar** os conceitos de fração, como frações equivalentes e soma de frações.

Material Necessário:

- Quadro e caneta para quadro branco.
- Papel com as pautas musicais em branco.

Público-alvo:

O sexto ano do ensino fundamental e qualquer turma na qual se queria revisar frações.

Duração: 50 minutos.

Descrição:

1. (5 minutos) Iniciar a aula lembrando aos alunos as figuras rítmicas e as frações nas quais elas correspondem.
2. (10 minutos) Revisar o compasso musical com alguns exercícios de leitura das figuras rítmicas dentro do compasso, pedindo aos alunos que cantem fazendo o sistema de "tá".
3. (10 minutos) Realizar exemplos de diferentes compassos com a ideia de fixarem o conceito de frações equivalentes. Como exemplo os compassos $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$. Assim como, exercícios de preenchimentos de compassos de forma adequada.
4. (5 minutos) Explicar que somar diferentes notas musicais dentro de um compasso é como somar frações com o mesmo denominador.
5. (20 minutos) Aplicar os exercícios preparados para avaliar o aprendizado e o método de ensino.

Sugestão de Exercícios:**Exercícios de Frações.**

1. Quantas colcheias cabem em um compasso $\frac{4}{4}$?
 - a) 4
 - b) 6
 - c) 8
 - d) 16

2. Em uma peça musical, o compasso $\frac{3}{4}$ está sendo utilizado. Sabendo que uma semínima vale 1 tempo, quantas colcheias (que valem $\frac{1}{2}$ tempo cada) cabem em um compasso $\frac{3}{4}$?

- a) 3
- b) 4
- c) 6
- d) 8

3. Se em um compasso $\frac{6}{8}$, cada tempo é uma colcheia ($\frac{1}{8}$), quantas colcheias cabem em dois compassos completos de $\frac{6}{8}$?

- a) 6
- b) 8
- c) 12
- d) 16

4. No compasso $\frac{4}{4}$, uma semínima ocupa 1 batida. Se você tocar 2 semínimas, isso corresponde a qual fração do compasso? Agora, se você substituir as 2 semínimas por 4 colcheias, a fração do compasso representada pelas colcheias será equivalente à fração representada pelas semínimas? Explique.

5. No compasso $\frac{8}{8}$, uma colcheia vale $\frac{1}{8}$ do compasso. Quantas colcheias são necessárias para preencher metade do compasso?

6. No compasso $\frac{4}{4}$, 2 mínimas preenchem todo o compasso. Quantas semínimas seriam necessárias para preencher o mesmo compasso? E se usarmos colcheias, qual seria a fração representada por cada colcheia, e quantas seriam necessárias para preencher o compasso?

6 - A PESQUISA

Este capítulo descreve a experiência pedagógica desenvolvida ao aplicar a proposta do 1º dia da aula, ensinando o conceito de frações utilizando a estrutura dos compassos musicais como tema central. A aula foi aplicada a uma turma de 9º da rede pública no município de Saquarema com 27 alunos, visando conectar a abstração da Matemática ao contexto tangível e criativo da Música.

Serão apresentados também, o plano de aula utilizado, os dados estatísticos proveniente dos questionários respondidos e um breve fechamento parcial por cada questão.

Essa abordagem interdisciplinar é uma tentativa de estimular o interesse dos estudantes e promover uma compreensão mais profunda através de exemplos práticos e interativos.

6.1. A ESCOLHA DA AMOSTRA

Esta aula foi aplicada à uma turma de 9º ano, que havia estudado frações 1 mês antes da aula de *frações e o compasso musical*, porém os objetivos não foram plenamente alcançados. Os alunos, em sua maioria, lembraram o conteúdo, porém, ainda com muitas dificuldades em operações com frações e frações equivalentes.

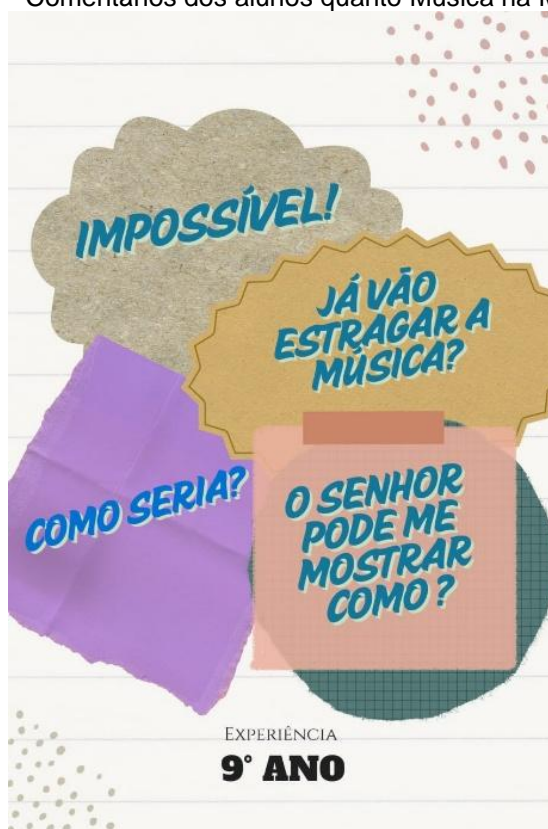
Normalmente frações é dado no 6º ano do ensino fundamental, porém diante da realidade da educação pública em alguns locais do Brasil e somado a questão social, muitos de nossos alunos hoje chegam ao ensino médio sem saber somar uma fração. Por isso foi decidido aplicar essa aula especial nesta turma, uma vez que se fazia necessária uma nova tentativa de ensino de maneira mais leve e despojada.

6.2. CONECTANDO A MÚSICA E A MATEMÁTICA

O início da aula se deu com uma breve discussão sobre o quanto a Música era presente na vida de cada um, e, o quanto a Matemática faz parte de nosso cotidiano. Os alunos foram incentivados a compartilhar experiências pessoais relacionadas à Música, como tocar instrumentos ou ouvir canções, criando um ambiente de engajamento.

Neste momento foi feita a indagação se na Música havia Matemática, e de forma oral, eles responderam

Figura 11 - Comentários dos alunos quanto Música na Matemática



Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos ver que há quem goste da Matemática e outros ainda a colocam como uma grande vilã.

Ao ouvirem que a Matemática está relacionada com a música em diversos aspectos, como na estrutura física dos violinos, violões, nos instrumentos de sopro, as frações no compasso musical, as potenciações na intensidade sonora e em outros, os alunos ficaram com um olhar de curiosos e uns de preocupados.

Após a discussão foi colocado no quadro a seguinte pergunta:

Qual seria o resultado da soma de frações abaixo?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Apenas dois alunos responderam corretamente pois lembravam como resolver usando o método de encontrar frações equivalentes com denominador comum, ou seja, usou o método tradicional visto anteriormente. Porém, de cabeça a maioria respondeu $\frac{3}{10}$, somando direto os numerados entre si e o mesmo com os denominadores entre si. Não foi dada a resposta certa e prometido que ao final da aula eles teriam a resposta.

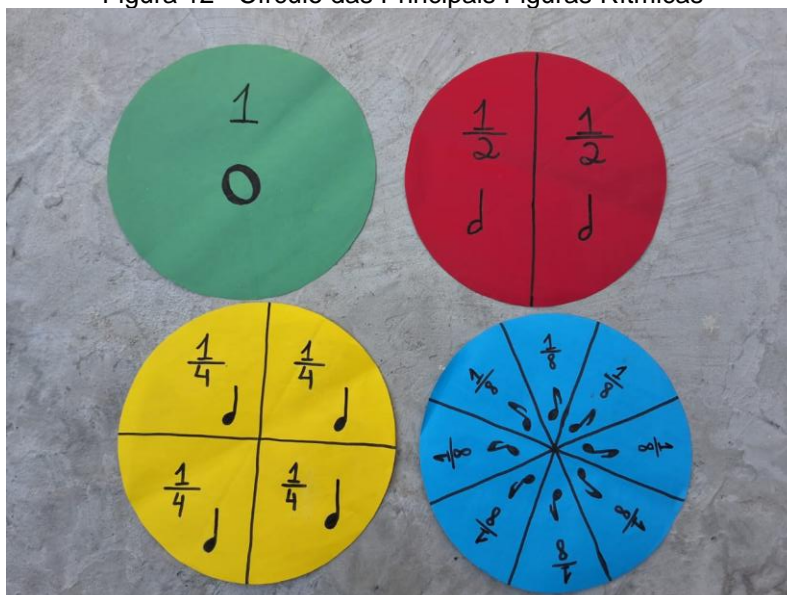
6.3. COMPASSOS MUSICAIS E AS FRAÇÕES

Iniciamos a aula com uma revisão dos conceitos básicos de frações como numerados e denominador, frações equivalentes e operações. Como haviam tido aula deste assunto 1 mês antes, essa parte foi mais rápida.

Assim, demos início a parte da teoria musical necessária para um bom entendimento, comentando sobre notas, tempo, duração, ritmo, pentagrama, figuras rítmicas (Tabela 2) e o compasso musical (Figura 3). Neste momento os alunos perguntaram sobre outros conceitos que não são foco da aula, mas foi muito proveitoso usar um tempo para responder as perguntas explicando os nomes das notas, altura e intensidade. Além de explicar o que significa cada linha do pentagrama (Figura 3).

Após as definições iniciais, foi exibido direto em uma tela interativa que todas as salas dessa escola possuem, um vídeo de um menino batendo com uma baqueta em 4 círculos divididos em diferentes quantidades de setores circulares. Cada setor circular representava uma fração dentre as frações 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$. E, daí, foi feita uma aula prática usando esses círculos feito do recorte de cartolinas coloridas, e dividindo-os em setores congruentes em cada círculo, colocando as 4 frações listadas e a figura rítmica correspondente nos setores. Essa associação ajudou os alunos a visualizarem as frações como partes de um compasso musical.

Figura 12 - Círculo das Principais Figuras Rítmicas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Perante a dificuldade de fazer as batidas da Semicolcheia, Fusa e Semifusa, não foi cobrado na parte prática.

Primeiro foi mostrado aos alunos como identificar os compassos musicais dentro de uma Música. Foram escolhidas duas Músicas para esse exercício, uma com um nível um pouco mais elevado de dificuldade que a outra, sendo a mais simples a Música DANCE MONKEY, da cantora australiana Tones and I, cujo lançamento foi no dia 10 de maio de 2019, e se tornou um grande sucesso mundial.

A segunda Música escolhida foi O SOL, composta pelo vocalista da banda JOTA QUEST, Rogério Flausino e seu irmão Wilson Sideral, que pertence ao álbum *Funky Funky Boom Boom*, lançado em no ano de 2013. As duas Músicas foram escolhidas unicamente por terem um compasso musical bem expressivo e fácil de se identificar.

Dance Monkey: <https://www.youtube.com/watch?v=y1VeGvATWQs>

O Sol: https://www.youtube.com/watch?v=wPBFZldSsMI&list=PL0qvqhjJJy9n0N-_Rqv3meOLEzSmlXsvO&index=5

A Figura 13 mostra os alunos fazendo as batidas em cada setor circular conforme a Música ia tocando. Os alunos mostraram muito interesse em fazer as batidas e quem não conseguia fazer pediu a ajuda do professor.

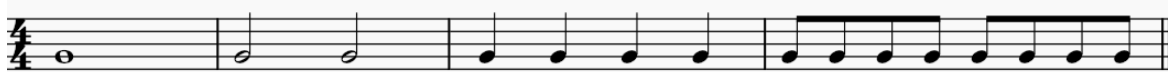
Figura 13 - Prática do Exercício das Batidas



Fonte: Elaborado pelo autor.

O primeiro exercício foi uma sequência de 4 compassos que devia ser repetido duas vezes, ou seja, 8 compassos sendo os 4 últimos iguais aos 4 primeiros.

Figura 14 - Compasso do Exercício 1 das Batidas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste caso, desconsideremos a altura de cada nota, o importante era entender o tempo que cada figura rítmica representa. Assim, no primeiro compasso o aluno fazia uma batida no primeiro círculo que tinha o número 1 e o símbolo da figura semibreve, mantendo a baqueta no círculo e contando até 4, até que começasse o segundo compasso.

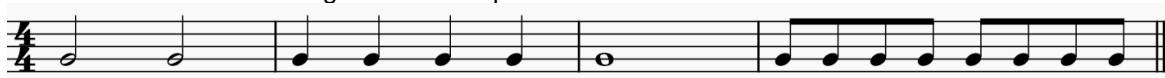
Já no segundo compasso, os alunos deveriam dar duas batidas no segundo círculo que estava dividido em dois setores de 180°. Nestes setores havia a figura rítmica da Mínima e a fração $\frac{1}{2}$. A primeira batida do segundo compasso deveria ser no início, assim que ele contasse o 1 e a segunda batida no momento que contasse o 3.

No terceiro compasso, cada batida era para ser dada em cada número que se contasse, e em cada setor de 90° do terceiro círculo que tinha a fração $\frac{1}{4}$ e a figura rítmica da semínima desenhada.

E por fim, no quarto compasso, as batidas se davam no quarto círculo dividido em 8 setores congruentes de 45°, onde havia os desenhos da figura rítmica colcheia e a fração $\frac{1}{8}$. Neste compasso seriam dadas 8 batidas, contando novamente até 4, com uma batida em cada número e uma batida entre um número e outro.

Os alunos gostaram muito desta atividade e pediram para fazer outra um pouco diferente. Então, foi alterado o exercício e novamente, alguns alunos voltaram a praticar.

Figura 15 - Compasso do Exercício 2 das Batidas



Fonte: Elaborado pelo autor.

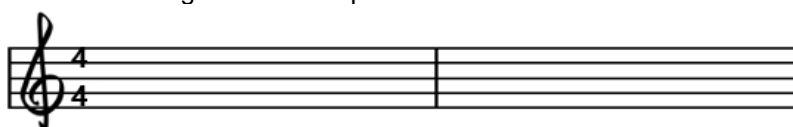
Após esse exercício um aluno perguntou se podia por duas figuras rítmicas diferentes em um mesmo compasso. E isso deu possibilidade de expandir mais os exercícios e entender o conceito de soma de frações.

Foi então perguntado aos alunos: *Qual fração está faltando para que a soma abaixo dê 2?*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Ou *Qual figura rítmica é preciso para preencher dois compassos 4/4 completos?*

Figura 16 - Compasso Musical em branco



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste momento foi entregue aos alunos uma folha com alguns compassos musicais em branco como o da figura acima, e foi solicitado que os alunos colocassem as figuras rítmicas representadas pelas frações dadas no exercício e completasse com a figura rítmica que responde o exercício. Assim, chegando na resposta do exercício que antes não conseguiram alcançar.

Outro exercício interessante, que foi feito de forma coletiva, foi o de cantar a palavra “tá” prolongando o a de acordo com a duração da figura rítmica. Veja dois dos exemplos aplicado na aula.

Figura 17 - Compasso do Exercício 1 do “tá”

taaaa taaaa taa taa taaaa taaaaaaa taa taaaa taa

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse segundo exercícios foi mudado o compasso para 3/4.

Figura 18 - Compasso do Exercício 2 do “tá”

taa taa taa taaaa taa ta ta taa taa taa ta ta ta ta

Fonte: Elaborado pelo autor.

No final da aula, muitos alunos entenderam e responderam corretamente o exercício proposto no início da aula, apenas lembrando das figuras rítmicas preenchendo um compasso.

6.4. O 2º DIA DA AULA DE FRAÇÕES

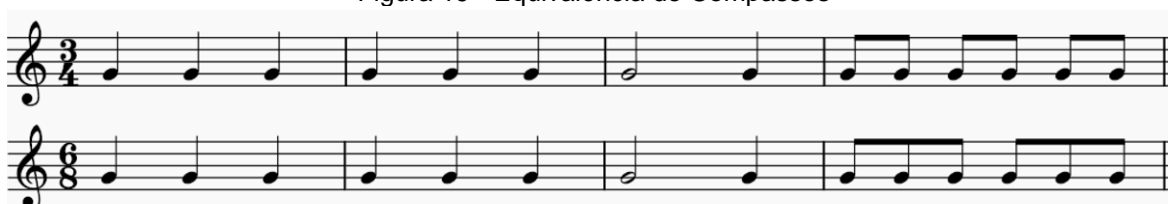
Infelizmente não foi possível aplicar a proposta de aula do 2º dia de Frações com Compasso Musical, pois o calendário de aula e avaliações estava apertado. Porém, esperamos que no 2º dia os alunos consigam lembrar o que cada figura rítmica representa e as frações correspondentes e a função do compasso musical.

No segundo passo da descrição esperamos que os alunos consigam resolver de forma coletiva exercícios similares o das Figuras 17 e 18. Sugerimos que seja feito três exemplos, sendo dois no compasso 4/4 e um no 3/4.

Agora, no terceiro passo da descrição, é o momento de fazer exemplos com compassos equivalentes como 1/2 e 2/4, também o 3/4 e 6/8. Um exemplo seria “tocar” os dois compassos abaixo, mostrando que não há distinção na execução mesmo trocando 3/4 por 6/8. Um metrônomo ajudaria muito neste momento, como é para um fim pedagógico, podemos usar um metrônomo no próprio celular.

Devido as consequências do uso do celular de forma inadequada e exagerada na escola como a dificuldade na interação social, problemas de saúde física e mental e a dificuldade de conseguirem prestar a atenção nas aulas, o presidente da República, Luiz Inácio Lula da Silva, sancionou a Lei nº 15100/2025, no dia 13 de janeiro de 2025 que veda o uso de aparelhos eletrônicos portáteis pessoais durante aulas, recreios e intervalos em todas as etapas da educação básica. Porém a vedação não se aplica ao uso pedagógico desses dispositivos, tornando possível o uso do aparelho para auxiliar no desenvolver da aula.

Figura 19 - Equivalência de Compassos



Fonte: Elaborado pelo autor.

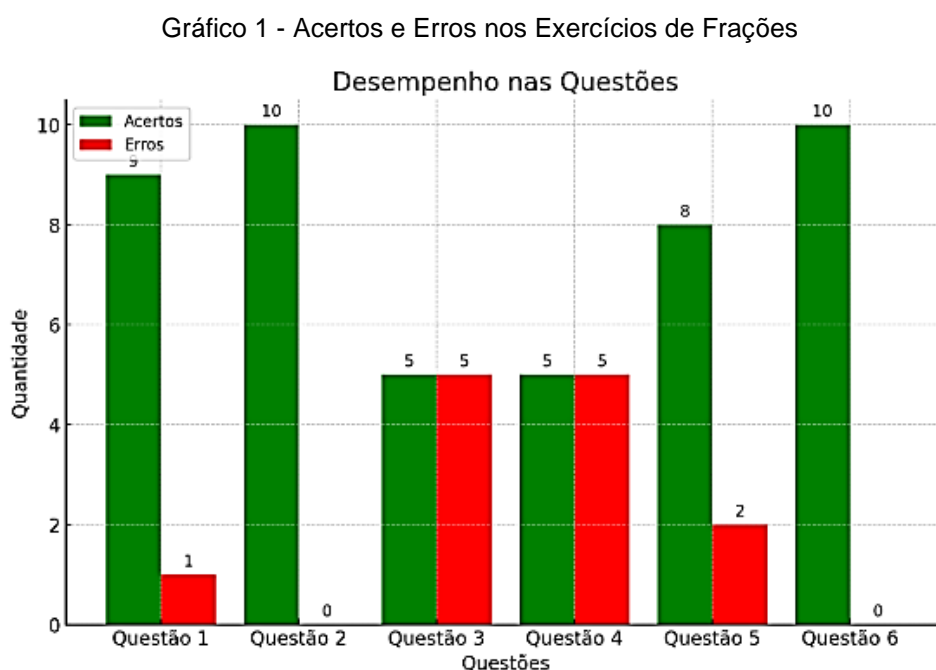
Já no quarto passo, explicar que somar diferentes notas musicais dentro de um compasso é como somar frações com o mesmo denominador. Por exemplo:

Um compasso 4/4 tem uma mínima ($1/2$) e duas colcheias ($1/8 + 1/8 = 1/4$). Quanto falta para completar o compasso? Resposta: $1/2 + 1/4 = 3/4$, falta $1/4$ para completar o compasso.

E por último, os alunos seriam desafiados a criar seus próprios compassos usando compassos em branco e as frações. Eles devem selecionar distintas notas e assegurar que as frações somem de forma correta para preencher o compasso (por exemplo, um compasso 6/8 deve somar exatamente 6/8).

Assim, teríamos um início de aula de frações bem inspirador e envolvente, entretanto, essa não é uma proposta que resolva o problema do ensino aprendizagem de Matemática, e sim uma tentativa de diminuir o desânimo apresentado pelos alunos ao saber que iniciará uma aula de Matemática.

6.5. ANÁLISE DAS RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS



Fonte: Elaborada pelo autor

A análise das respostas demonstrou que os alunos tiveram um bom aproveitamento quanto ao entendimento dos conceitos fundamentais que relacionam Matemática e Música, especialmente no que diz respeito à organização rítmica em compassos. A alta taxa de acertos em questões envolvendo a distribuição de semínimas, mínimas e colcheias em compassos 4/4 e 3/4 sugere que a relação entre tempo e subdivisões básicas está bem consolidada.

No entanto, o estudo também mostrou que houve um número significativo de erros, quando se tratava do compasso 6/8, mostrando que os alunos podem ter dificuldades em entender as divisões do tempo nesse contexto. Além disso, os exercícios sobre equivalência de figuras rítmicas tiveram um menor aproveitamento dos alunos, o que propõe a necessidade de reforço no estudo de frações musicais.

Com base no que foi apresentado, é de suma importância a aquisição de estratégias didáticas que ajudem a compreensão do compasso 6/8, da equivalência entre compassos e entre equivalência entre frações. Uma maior utilização de representações visuais, gráficos, exercícios práticos e experiências auditivas pode ajudar os estudantes a terem uma compreensão mais clara da Matemática aplicada à Música.

6.6. FEEDBACK DOS ALUNOS

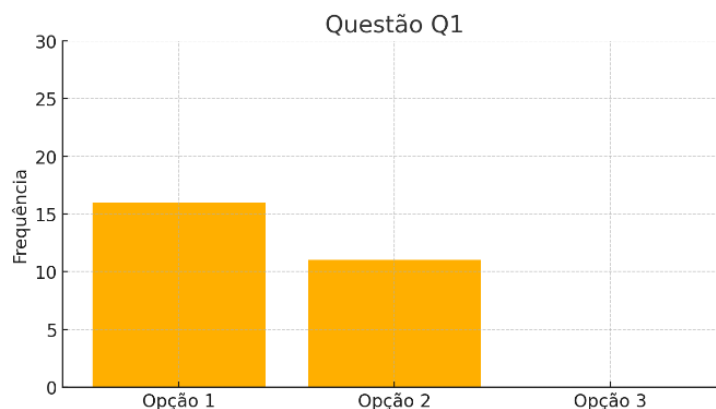
Ao final dos exercícios os alunos responderam a um pequeno questionário ou feedback. Assim, iremos ver cada pergunta feita e o gráfico mostrando como ficaram distribuídas as respostas.

Questionário (Feedback)

6.6.1. Parte 1: Avaliação da Metodologia

1. Você conseguiu relacionar o conceito de frações com os compassos musicais?
 - () Sim, foi muito fácil entender a relação.
 - () Sim, mas, porém, foi complicado.
 - () Não, achei a relação confusa.

Gráfico 2 - Questão 1 do Feedback



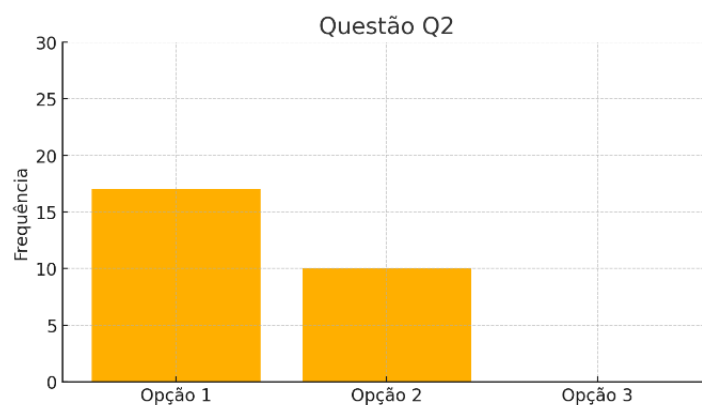
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados indicam que houve um maior número de alunos que conseguiram compreender a relação entre frações e compassos musicais, com 16 alunos opinando que a conexão é fácil de assimilar e 11 alunos compreendendo, porém com certa dificuldade. Nenhum aluno achou a relação confusa, o que é um indicativo positivo da forma que a aula foi abordada.

2. A utilização de compassos musicais (ex.: 4/4, 3/4, etc.) ajudou a compreender melhor os conceitos de frações?

- () Sim, foi muito útil.
- () Foi mais ou menos útil.
- () Não ajudou.

Gráfico 3 - Questão 2 do Feedback



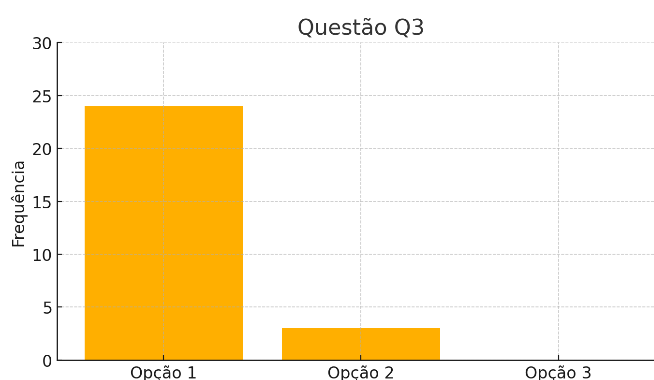
Fonte: Elaborado pelo autor.

A maioria dos alunos apontam que a abordagem adotada ajudou na compreensão do conteúdo, com 17 alunos considerando como muito útil e nenhum aluno considerando-a inútil. Porém, um número significativo (10 alunos) teve uma resposta mais moderada.

3. As atividades práticas (como batidas, “tá” ou leitura de partituras) foram adequadas para o aprendizado?

- () Muito adequadas.
- () Adequadas, mas poderiam ser mais interativas.
- () Não achei as atividades adequadas.

Gráfico 4 - Questão 3 do Feedback



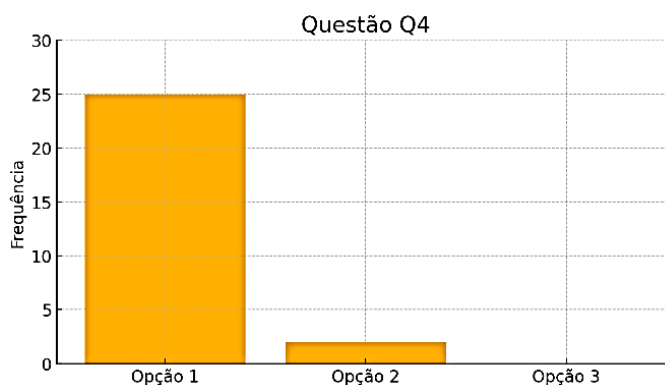
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados indicam que a maioria dos alunos avaliou de forma positiva as atividades práticas, com 24 alunos considerando-as "muito adequadas" e 3 alunos considerando que foram "adequadas, mas poderiam ser mais interativas". Nenhum aluno classificou as atividades como inadequadas, o que indica que a estratégia utilizada foi bem aceita. Assim, ter utilizado atividades práticas na aula foi um grande acerto, causando uma experiência positiva para a maioria dos alunos.

4. O uso da Música deixou a aula mais interessante?

- () Sim, adorei a abordagem.
- () Foi interessante, mas poderia ser mais bem trabalhada.
- () Não achei interessante.

Gráfico 5 - Questão 4 do Feedback



Fonte: Elaborado pelo autor.

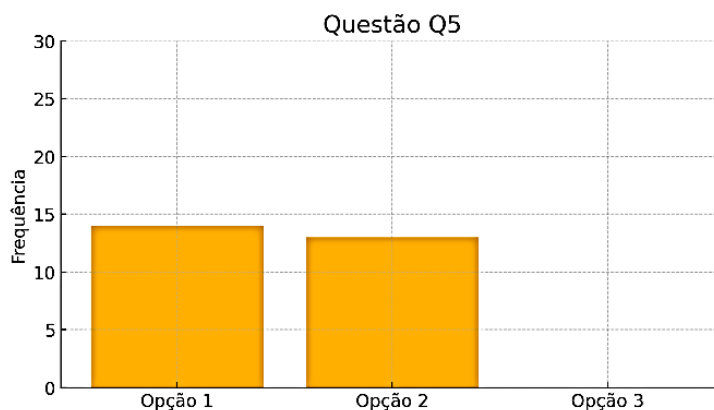
Os dados mostram que a abordagem musical foi muito bem recebida pelos alunos, com 25 alunos afirmando que "adoraram a abordagem" e 2 alunos considerando que "foi interessante, mas poderia ser mais bem trabalhada". Nenhum aluno classificou a aula como "não interessante", o que confirma que o uso da Música foi um fator positivo no aprendizado.

6.6.2. Parte 2: Avaliação do Conteúdo

5. Você conseguiu identificar as partes de uma fração (numerador e denominador) em um compasso musical?

- () Sim, compreendi perfeitamente.
- () Sim, mas fiquei com algumas dúvidas.
- () Não, não entendi bem.

Gráfico 6 - Questão 5 do Feedback



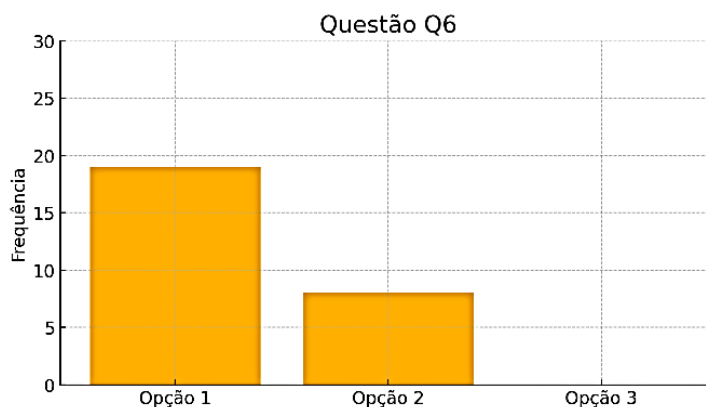
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados indicam 14 alunos conseguiram compreender a relação entre as partes de uma fração (numerador e denominador) em um compasso musical, embora 13 alunos ainda ficaram com algumas dúvidas no assunto. Mesmo com nenhum aluno tendo ficado sem entender, há possibilidade de fazer melhorias na explicação dos termos de uma fração no compasso musical.

6. As explicações sobre como os compassos musicais se relacionam com frações foram claras?

- () Muito claras.
- () Foram claras, mas poderiam ser mais detalhadas.
- () Não foram claras.

Gráfico 7 - Questão 6 do Feedback



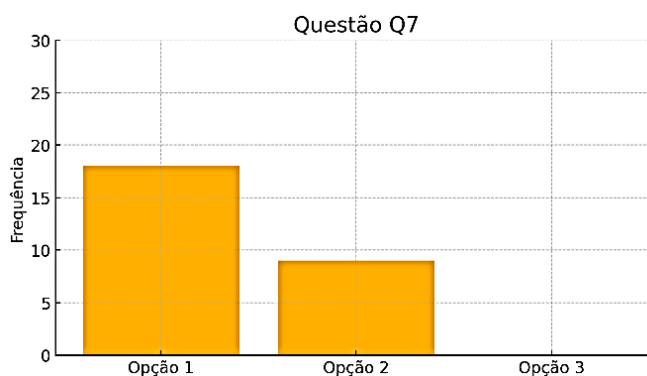
Fonte: Elaborado pelo autor.

A explicação sobre a relação entre compassos musicais e frações foi bem recebida pela maioria dos alunos, com 19 dizendo classificando-a como “muito clara”, porém quase um terço da turma gostaria de mais aprofundamento. Isso sugere que algumas partes da explicação poderiam ser complementadas para garantir um entendimento mais sólido.

7. Você acha que compreendeu o conceito de fração equivalente por meio da atividade musical?

- () Sim, foi fácil compreender.
- () Entendi parcialmente.
- () Não entendi.

Gráfico 8 - Questão 7 do Feedback



Fonte: Elaborado pelo autor.

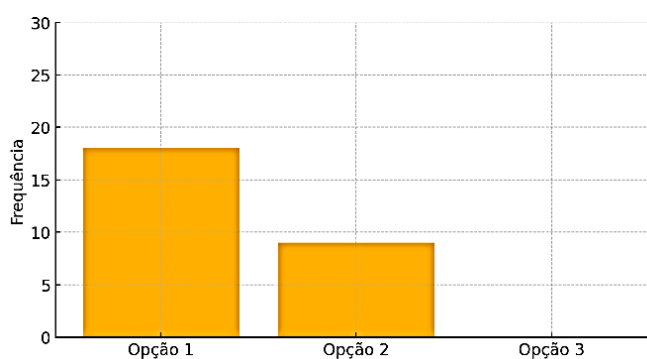
A atividade musical para ensinar frações equivalentes foi bem avaliada por 18 discentes, mas algumas melhorias podem ser feitas para que possa diminuir o número de alunos que a consideraram que o entendimento foi feito, mas de forma parcial.

6.6.3. Parte 3: Autoavaliação

8. Como você avalia seu desempenho nas atividades práticas da aula?

- () Excelente, consegui realizar tudo.
- () Bom, mas tive algumas dificuldades.
- () Não consegui acompanhar bem.

Gráfico 9 - Questão 8 do Feedback



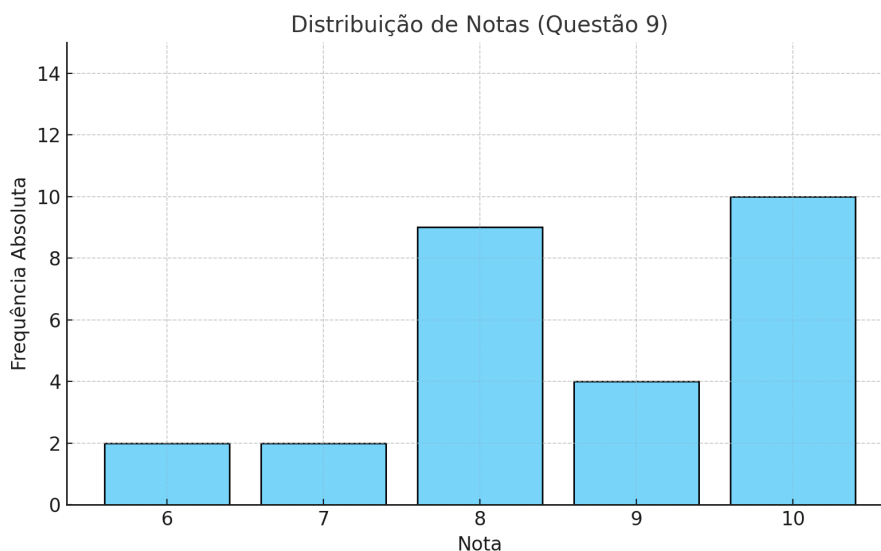
Fonte: Elaborado pelo autor.

A maioria dos alunos avaliou como excelente seu desempenho nas atividades práticas, com 18 alunos se sentindo confiantes em sua execução. No entanto, 9 alunos disseram ter enfrentado algumas dificuldades, o que indica que, embora as atividades tenham sido eficazes para a maioria, alguns alunos ainda precisam de mais apoio ou explicação para sanar completamente as dificuldades.

9. Se você pudesse dar uma nota de 0 a 10 para o seu aprendizado sobre frações nesta aula, qual seria?

Nota: _____

Gráfico 10 - Questão 9 do Feedback



Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico mostra que a opinião dos alunos sobre o nível de aprendizado que obtiveram na aula foi excelente, com 23 alunos dando notas como 8, 9 ou 10. Embora, as notas mais baixas (6 e 7) apontam que ainda é preciso que haja uma melhoria no método.

6.6.4. Parte 4: Sugestões e Feedback

10. O que você mais gostou na aula?

As respostas dos alunos revelam diversos aspectos positivos sobre a aula com destaque para a parte prática e a interação com a Música. A maioria dos alunos (17) destacou que gostou da parte prática e das batidas, mostrando que as atividades interativas foram úteis para o aprendizado. A didática e a explicação também foram mencionados por 3 alunos, notando que ambos desempenharam um papel importante na compreensão do conteúdo. Além disso, 3 alunos destacaram o entendimento sobre o compasso e a Música, enquanto 2 alunos mencionaram a relação entre Música e Matemática como um ponto positivo.

Tabela 5 - Respostas da pergunta 10 do Feedback

Aspectos Positivos	Número de Alunos
Parte prática e batidas	17
Didática e Explicação	3
Entendimento sobre o compasso e a música	3
Relação entre música e matemática	2
Aprendizado e interação	2

Fonte: Elaborada pelo autor

11. O que poderia ser melhorado na aula?

Quando se trata de melhorias, 16 alunos responderam que não há nada a melhorar, mostrando que a aula atendeu suas expectativas e objetivos. Contudo, algumas sugestões foram feitas por uma parte menor dos alunos. Quatro alunos sugeriram que poderiam ser usadas Músicas melhores, enquanto 3 alunos mencionaram o uso de um instrumento, 2 alunos queriam uma aula mais longa e aprofundada, e 2 alunos pediram mais aulas envolvendo Música.

Tabela 6 - Respostas da pergunta 11 do Feedback

Sugestões de Melhoria	Número de Alunos
Nada a melhorar	16
Melhores músicas	4
Instrumento musical	3
Duração da aula mais longa e aprofundada	2
Mais aulas envolvendo música	2

Fonte: Elaborada pelo autor

12. Você gostaria de ter mais aulas com essa abordagem musical? Por quê?

A resposta foi unânime: todos os alunos responderam "sim", os motivos para essa preferência variaram de maneira que: 13 alunos disseram que as aulas se tornaram mais interessantes, 6 opinaram que a aula ficou mais divertida, 4 alunos consideraram que essa abordagem favoreceu o aprendizado, 2 alunos destacaram o gosto pela Música e 2 pela diferenciação da metodologia.

Tabela 7 - Respostas da pergunta 12 do Feedback

Motivos para Querer Mais Aulas com Música	Número de Alunos
Torna a aula mais interessante	13
Divertido	6
Mais aprendizado	4
Gosto de música	2
É diferente	2

Fonte: Elaborada pelo autor

Para ilustrar melhor as respostas dos alunos, foram adicionadas 4 fotos das respostas coletadas, que complementam a análise das questões e auxiliam a visualizar a avaliação dos estudantes de maneira mais detalhada

Figura 20 - Resposta do aluno A no feedback

10. O que você mais gostou na aula?
Interação e aprendizado.

11. O que poderia ser melhorado na aula?
Nada, eu gosto de aula nesse estilo.

12. Você gostaria de ter mais aulas com essa abordagem musical? Por quê?
Sim, é divertido e todos prestam atenção.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 - Resposta do aluno B no feedback

10. O que você mais gostou na aula?

A Relação da música com
matemática

11. O que poderia ser melhorado na aula?

Músicas melhores.

12. Você gostaria de ter mais aulas com essa abordagem musical? Por quê?

Sim, muito eficiente para
quem se interessa.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22 - Resposta do aluno C no feedback

10. O que você mais gostou na aula?

Eu gostei de aprender que as notas
músicas de matemática ensaiado.

11. O que poderia ser melhorado na aula?

nada

12. Você gostaria de ter mais aulas com essa abordagem musical? Por quê?

Sim, porque é interessante.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 - Resposta do aluno D no feedback

10. O que você mais gostou na aula?
gostei que foi mais interativa

11. O que poderia ser melhorado na aula?
nada

12. Você gostaria de ter mais aulas com essa abordagem musical? Por quê?
Sim, ficou mais fácil de entender

Fonte: Elaborado pelo autor.

7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação teve como objetivo principal explorar a Música como um recurso pedagógico para estimular o ensino da Matemática, tornando-o mais dinâmico e envolvente. Com base nos resultados encontrados no desenvolvimento dessa pesquisa, pode-se indicar que o objetivo proposto foi alcançado. Embora, à primeira vista, essas duas áreas possam parecer distantes, a pesquisa demonstrou que elas compartilham uma conexão histórica e conceitual sólida, capaz de transformar a experiência de aprendizado dos alunos.

A aplicação prática da proposta pedagógica confirma que os alunos se sentiram mais motivados e participaram ativamente das atividades. A parte prática foi a mais apreciada, especialmente a atividade interativa das batidas. A didática clara e a explicação também foram elogiadas pelos alunos, o que sugere que os alunos compreenderam bem a relação entre os conceitos matemáticos e a Música.

Apesar de que tenham surgido desafios, como dificuldades na assimilação de compassos mais complexos, houve proposta de melhorias como a diversificação nas Músicas e uso de instrumentos musicais. Apesar de a abordagem musical ser bem recebida, a inclusão de Músicas variadas e a utilização de instrumentos musicais podem contribuir para que o interesse do aluno se torne mais amplo.

Alguns alunos sugeriram que a aula poderia ser mais longa e mais aprofundada, o que mostra que os alunos não sentiram o tempo passar, pois estavam inteiramente envolvidos com a aula e suas atividades.

Como todos os alunos expressaram interesse em ter mais aulas com essa abordagem, seria interessante considerar a possibilidade de integrar a Música de forma mais contínua no currículo dando segmento ao assunto de frações com atividades mais desafiadoras. Além disso, elaborar outras aulas com outros assuntos matemáticos utilizando a Música como ferramenta de ensino.

Não se pretende, com esta dissertação, apresentar uma solução definitiva para os desafios do ensino da Matemática, mas sim criar possibilidades para futuras pesquisas e práticas interdisciplinares, em particular, que envolva a Música. Pois, apesar de a Matemática também ser bonita e bela como a Música, é necessário que haja um convite atrativo para que pessoas que não gostam da Matemática de forma natural, consigam enxergar através do lado lúdico a beleza já existente na Matemática, colocando a Música como esse instrumento.

Concluo esta dissertação com a segurança de que a abordagem musical provou ser um recurso valioso para incentivo ao estudo da Matemática, especialmente para alunos que enfrentam obstáculos com métodos tradicionais. Que este estudo inspire outros professores a usarem a Música para despertar o interesse de seus discentes pela Matemática, vendo-a de forma mais humana, e tornando-a acessíveis a todos. Afinal, a aliança entre a Matemática e a Música, não são apenas números e notas, pois além de contribuir para o aprendizado, também muda a forma como os alunos enxergam o conhecimento.

REFERÊNCIAS

PEREIRA, José Carlos. **ANÁLISES DA PERCEPÇÃO DE ALUNOS DO 9º ANO SOBRE A MATEMÁTICA**. Orientador: Me. Daiana Estrela Ferreira Barbosa. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA- IFPB, Campina Grande - PB, 2022.

LIMA, Elon. Lages. **SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA**. Revista do Professor de Matemática, n. 28, 1995.

CIANBRONI, Samuel Henrique da Silva; DOS SANTOS, Regina Antunes Teixeira. Reflexões sobre os conceitos da Teoria dos Estilos de Meyer para a performance musical. **Revista Vórtex**, [S. l.], v. 12, p. 1–26, 2024. DOI: 10.33871/vortex.2024.12.9270. Disponível em: <<https://periodicos.unespar.edu.br/vortex/article/view/9270>>. Acesso em: 1 mar. 2025.

MED, Bohumil. **Teoria da Música**. 4.ed. Brasília: Musimed, 1996.

OLIVEIRA, Marta Aparecida Ferreira de, OSCAR Sergio Candido de, **MÚSICA E MATEMÁTICA: Diálogos possíveis**. Cintergeo, 2023. Disponível em: <https://revistas.uneb.br/index.php/cintergeo/article/view/18267/98_CINTERGEO_2023>. Acesso em: 01 de out. de 2024.

ETEC, Escola Técnica Estadual. Provas e Gabaritos <https://fatweb.s3.amazonaws.com/vestibulinhoetec/gabarito/201727490/Prova_1_modulo.pdf>. Acesso em 04 de mar. de 2025.

AMARAL, Luciana. **Compasso Musical: a matemática da música. Cursos de Canto**, 2023. Disponível em: <<https://cursosdecanto.com.br/compasso-musical/>>. Acesso em: 05 de mar. de 2025.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática: Compreensão e Prática**. São Paulo: Editora Moderna, 2008.

MIRANDA, Camila. **O que é Melodia? Entenda a Voz da Música**, 2024. Disponível em: <<https://moises.ai/pt/blog/dicas/o-que-e-melodia/#o-que-e-melodia>>. Acesso em: 22 de mar. de 2025.

HERSTEIN, I. N. **Tópicos de Álgebra**. Tradução: Adalberto P. Bergamasco e L. H. Jacy Monteiro. São Paulo, Editôra da Univ. e Polígono, 1970. 408 p. Título original: Topics in Algebra.

VALENCIA, Alejandro. **O premiado professor de matemática que inspira alunos com música**, 2021. Disponível em <https://www.bbc.com/portuguese/geral-57394451> Acesso: 22 de abril de 2025.

MOREIRA, Abel Cordeiro; SANTOS, Elisa Raquel Jesus dos. **O “bicho matemática papão” nos anos iniciais do ensino fundamental: desafios dos(as) monitores(as) do Programa Novo Mais Educação para evitar a matofobia**. Revista de Educação Matemática, Senhor do Bonfim, 2020. Disponível em: <https://estudosiat.educacao.ba.gov.br/index.php/estudosiat/article/download/359/347/710> . Acesso em: 02 de out. de 2024.

BARBOSA, Eduardo De Oliveira; ROCHA, Ana Lúcia Do Nascimento Teixeira; PAES, Deise Ferreira Fernandes. **O desenvolvimento da aprendizagem através da musicalização no cotidiano dos alunos do ensino fundamental**. Unigranrio, 2022. Disponível em: <https://publicacoes.unigranrio.edu.br/magistro/article/download/7256/3822/20872>. Acesso em: 02 de out. de 2024.

LEDITIN, Daniel J. **This is your brain on music: the science of a human obsession**. New York: Dutton, 2006.