



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

André da Costa Passos

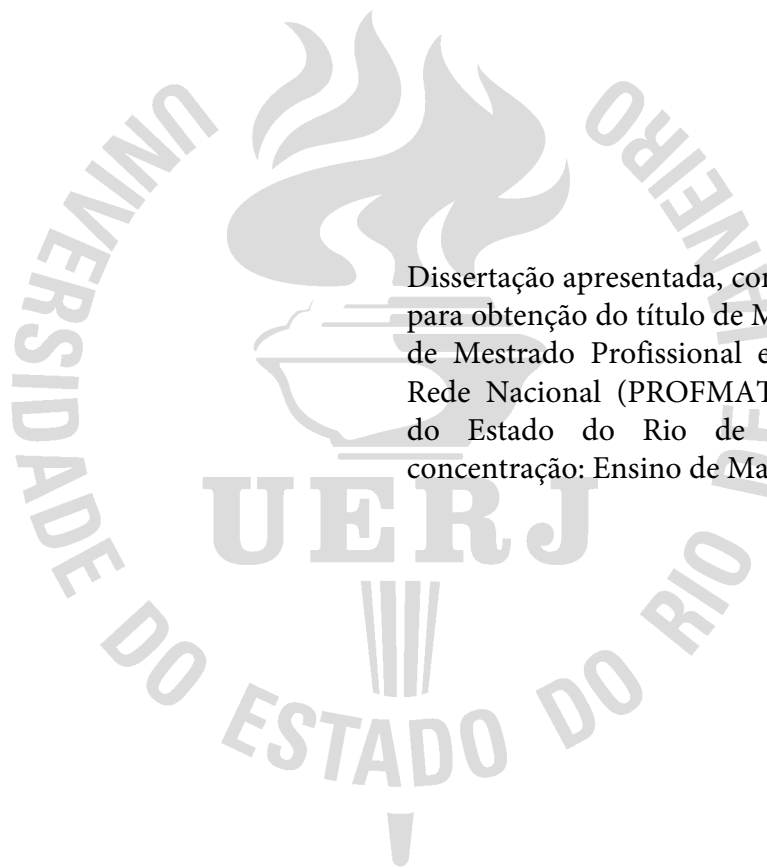
**Um estudo sobre a cardinalidade dos números transcendent**

São Gonçalo

2025

André da Costa Passos

**Um estudo sobre a cardinalidade dos números transcendent**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Daniela Mendes Vieira da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Abel Rodolfo García Lozano

São Gonçalo

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CEH/D

P289 TESE	<p>Passos, André da Costa. Um estudo sobre a cardinalidade dos números transcendentos / André da Costa Passos. - 2025. 62f. : il.</p> <p>Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Daniela Mendes Vieira da Silva. Coorientador: Prof. Dr. Abel Rodolfo García Lozano. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.</p> <p>1. Números irracionais - Teses. 2. Números transcendentos - Teses - 3. Matemática - Estudo e ensino - Teses. I. Silva, Daniela Mendes Vieira da. II. García Lozano, Abel Rodolfo. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. IV. Título.</p> <p>CRB7 - 6150</p>	CDU 511.46
--------------	--	------------

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

André da Costa Passos

**Um estudo sobre a cardinalidade dos números transcendentos**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 13 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora:

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Daniela Mendes Vieira da Silva (Orientadora)  
Faculdade de Formação de Professores - UERJ

---

Prof. Dr. Abel Rodolfo García Lozano (Coorientador)  
Faculdade de Formação de Professores - UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Marcele Câmara de Souza  
Faculdade de Formação de Professores - UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Fabiana Chagas de Andrade, D.Sc.  
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

São Gonçalo

2025

## DEDICATÓRIA

Aos meus pais por todo esforço em fornecer uma educação de qualidade, ao meu irmão pelo apoio em toda minha trajetória acadêmica, à minha esposa pelo incentivo e acima de tudo a Deus.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família, aos colegas de turma, aos docentes do PROFMAT, a instituição UERJ-FFP por todo ensino de qualidade a mim oferecido desde a graduação até a conclusão deste trabalho e a minha orientadora por todo apoio nesta trajetória.

O importante é não parar de questionar; a curiosidade tem sua própria razão de existir.

*Albert Einstein*

## RESUMO

PASSOS, André da Costa. *Um estudo sobre a cardinalidade dos números transcendentos*. 2025. 62f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2025.

Nesta dissertação é apresentada a não enumerabilidade dos números transcendentos. Também é descrita de maneira detalhada a enumerabilidade de  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e a não enumerabilidade de  $\mathbb{R}$ , além de serem apresentadas demonstrações das irracionalidades do número  $\pi$ , do número  $e$  e sua transcendência, enfatizando a importância desses conceitos no aprofundamento da compreensão dos alunos sobre os números reais. Como objetivo geral buscou-se apresentar a característica da não enumerabilidade dos números transcendentos além de melhorar o entendimento dos alunos sobre a não enumerabilidade dos números irracionais. O objetivo específico foi a construção de duas atividades com intuito de auxiliar professores e alunos a superarem as complexidades desses conceitos. Para tal fim, esta pesquisa adota uma metodologia qualitativa tendo como base a revisão de literatura como principal método de coleta. A justificativa é que pode haver um falso senso comum de que a cardinalidade dos números irracionais é menor do que a dos números racionais, o que pode ocorrer por conta da forma que esse conteúdo é apresentado nas aulas. Como resultado, foram desenvolvidas duas atividades com o objetivo de ajudar os professores a aprimorar a compreensão dos alunos sobre este tema. A primeira atividade visa demonstrar que os números irracionais existem em maior quantidade do que os racionais, enquanto a segunda tem como propósito introduzir a ideia da não enumerabilidade do conjunto dos números transcendentos.

Palavras-chave: irracionalidade; transcendência; cardinalidade.

## ABSTRACT

PASSOS, André da Costa. *A study on the cardinality of transcendental numbers*. 2025. 62f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2025.

In this dissertation the non-enumerability of transcendent numbers is presented. It is also described in detail the enumerability of  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  and the non-enumerability of  $\mathbb{R}$ , besides being presented demonstrations of the irrationalities of the number  $\pi$ , the number  $e$  and its transcendence, emphasizing the importance of these concepts in deepening students' understanding of real numbers. The general objective was to present the characteristic of non-enumerability of transcendent numbers and improve students' understanding of the non-enumerability of irrational numbers. The specific objective was the construction of two activities in order to help teachers and students overcome the complexities of these concepts. To this end, this research adopts a qualitative methodology based on the literature review as the main collection method. The justification is that there may be a false common sense that the cardinality of irrational numbers is less than that of rational numbers, which can occur because of the way this content is presented in classes. As a result, two activities were developed with the aim of helping teachers to improve students' understanding on this topic. The first activity aims to demonstrate that irrational numbers exist in greater quantity than rational ones, while the second has as purpose to introduce the idea of non-enumerability of the set of transcendent numbers.

Keywords: irrationality; transcendence; cardinality.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Diagrama de Flechas - Enumerabilidade dos Racionais . . . . .	13
Figura 2 - Representação dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) a partir dos Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e Números Irracionais ( $\mathbb{Q}'$ ) . . . . .	16
Figura 3 - Representação dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) a partir dos Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e Números Irracionais ( $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ) . . . . .	16
Figura 4 - Representação dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) a partir dos Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e Números Irracionais ( $\mathbb{I}$ ) . . . . .	17
Figura 5 - Representação dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) a partir dos Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e Números Irracionais ( $\mathbb{I}$ ) . . . . .	17
Figura 6 - Representação dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) a partir dos Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e Números Irracionais ( $\mathbb{I}$ ) . . . . .	17
Figura 7 - Diagrama com a classificação dos números Reais . . . . .	31
Figura 8 - Irrracionalidade de $\sqrt{2}$ . . . . .	34
Figura 9 - Publicação Original de Ivan Niven . . . . .	39

## LISTA DE TABELAS

Tabela	1 - Classificação dos conjuntos de acordo com sua cardinalidade . . . . .	28
Tabela	2 - Exemplos de altura de polinômios . . . . .	29
Tabela	3 - Momentos na realização de uma investigação . . . . .	47
Tabela	4 - Exemplos de obtenção de números algébricos . . . . .	54
Tabela	5 - Exemplos de alturas de polinômios de grau um e dois . . . . .	54

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números Naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números Inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números Racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números Reais
$\mathbb{Q}'$	Conjunto dos números Irracionais
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números Irracionais
$\mathbb{T}$	Conjunto dos números Transcendentes
$\overline{\mathbb{Q}}$	Conjunto dos números Algébricos
$\pi$	Número pi
$e$	Número de Euler
$\varphi$	Letra grega phi
$\gamma$	Letra grega gama
$\psi$	Letra grega psi
$\approx$	Mesma cardinalidade

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	12
1	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	19
1.1	<b>Coleta</b> . . . . .	19
1.2	<b>Análise</b> . . . . .	19
2	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b> . . . . .	21
2.1	<b>Conjuntos Enumeráveis e Não Enumeráveis</b> . . . . .	21
2.1.1	<u>Conjuntos Finitos e Infinitos</u> . . . . .	21
2.1.2	<u>Conjuntos Enumeráveis e Não Enumeráveis</u> . . . . .	23
2.2	<b>Números Algébricos e Transcendentes</b> . . . . .	28
2.3	<b>Algumas Irracionalidades</b> . . . . .	32
2.3.1	<u>As irracionalidades de <math>\sqrt{2}</math>, <math>\sqrt[3]{2}</math> e <math>\sqrt{p}</math></u> . . . . .	32
2.3.2	<u>A Irracionalidade de <math>\pi</math></u> . . . . .	34
2.3.3	<u>A Irracionalidade de <math>e</math></u> . . . . .	40
2.4	<b>A Transcendência do Número <math>e</math></b> . . . . .	41
2.5	<b>Investigação na Sala de Aula</b> . . . . .	46
3	<b>CONSTRUÇÃO DAS ATIVIDADES</b> . . . . .	49
3.1	<b>Atividade 1: Existem mais números Irracionais ou Racionais?</b> . . . . .	49
3.2	<b>Atividade 2: Introduzir a ideia de que o conjunto <math>\mathbb{T}</math> é não enumerável.</b> . . . . .	53
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	56
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	58
	<b>APÊNDICE A – Primeira Atividade Proposta ao Professor</b> . . . . .	60
	<b>APÊNDICE B – Segunda Atividade Proposta ao Professor</b> . . . . .	62

## INTRODUÇÃO

### Apresentação

O que são números? Para que eles servem? Por que há diferenças entre eles? Esses são exemplos de perguntas simples que qualquer aluno, ao tomar conhecimento da existência dos números, pode elaborar e mostra o quão bela, simples e ao mesmo tempo complexa a matemática pode ser. Tais diferenças se refletem diretamente da maneira de como os conjuntos numéricos são estudados e organizados.

De um modo geral, as respostas para tais perguntas envolvem todo um contexto histórico e mostram com clareza que a matemática se desenvolveu e ainda se desenvolve a partir das necessidades que os seres humanos têm ao longo do tempo levando em contas as necessidades básicas iniciais da estruturação dos números para contagem, medição ou organização. “O estudo sistemático dos conjuntos que acabou levando a uma teoria axiomática desse campo de estudos, começou com Georg Cantor, por volta de 1872” (AVILA, 2006, p. 32).

Também, segundo Avila (2006), tal fato levou à investigação dos conjuntos infinitos em sua generalidade. Tais estudos sobre conjuntos infinitos foram de grande avanço para a matemática estabelecendo como consequência o conceito de equivalência entre conjuntos. O fato, nem sempre intuitivo de um subconjunto próprio de um conjunto poder ser equivalente ao próprio conjunto, a primeira vista é surpreendente, pois parece ser impossível uma parte ser equivalente ao todo, mas é o que acontece, por exemplo, entre os conjuntos dos números pares e o conjunto dos números naturais.

O conjunto dos racionais era denso mas não contínuo, e isso criava a suspeita de que existiam, de fato, dois tipos distintos de conjuntos infinitos: um primeiro tipo capaz de reunir todos aqueles conjuntos que poderiam ser colocados em uma relação um-a-um com o conjunto dos números naturais, e entre si; e um segundo tipo, cuja característica era, justamente, a de não aceitar uma correspondência, um-a-um, com aqueles conjuntos do primeiro tipo. Em poucas palavras, tudo indicava que havia infinitos de tamanhos distintos, isto é, infinitos que apresentam quantidades distintas de elementos. (SANTOS, 2008, p. 113)

Segundo Marques (2020), em 1874 Cantor publicou um artigo intitulado, em tradução livre: “Sobre uma propriedade da coleção de todos os números algébricos reais”, no qual mostrou a existência de infinitos de “tamanhos diferentes”. Antes disso os matemáticos tratavam o infinito como “grandeza equinumerável” (todos os infinitos teriam o mesmo tamanho).

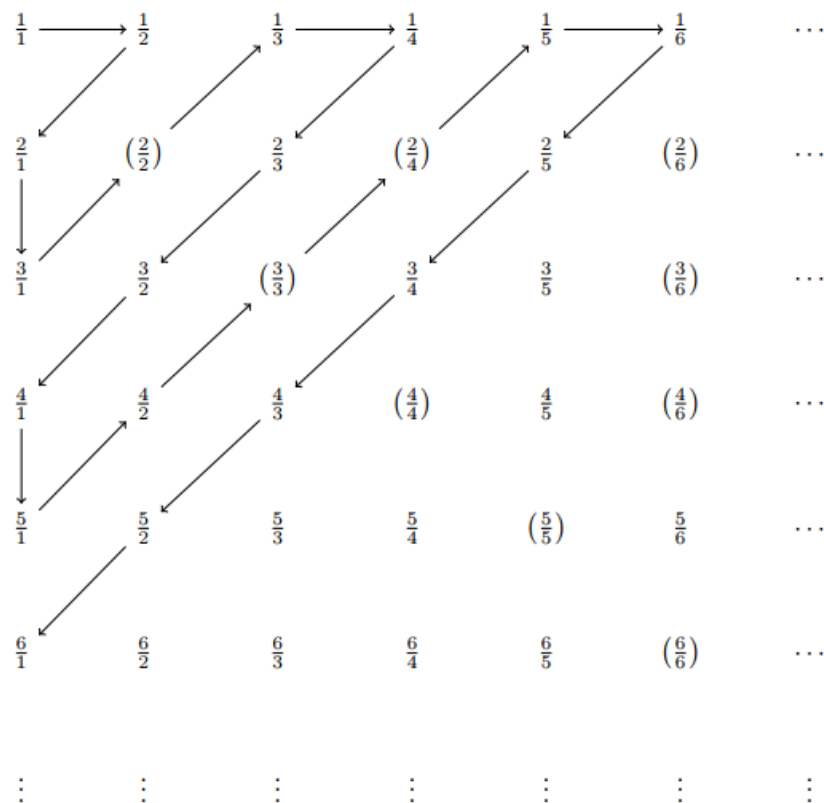
Já Roque (2012) cita que Dedekind observou que existem mais pontos na reta do que podem ser representados pelos números reais e se questionava sobre como defini-los. Os estudos de Cantor e Dedekind sobre os números reais originaram uma enorme

quantidade de perguntas sobre os números reais tais como se é possível enumerá-los ou se existem mais números racionais ou irracionais.

O conceito de correspondência biunívoca servirá de base para a constituição da nova teoria dos conjuntos, por volta de 1879. Dois conjuntos são ditos com a mesma “potência” se existe correspondência biunívoca entre seus elementos. Os conjuntos que possuem a mesma potência dos naturais são chamados “enumeráveis”, e os outros são “não enumeráveis”.(ROQUE, 2012, p. 513)

O diagrama mostrado na Figura 1, associa cada número natural a um único número racional positivo (o mesmo raciocínio vale para os racionais negativos), desconsiderando as repetições que porventura aparecem, estabelecendo assim a bijeção entre esses dois conjuntos tornando-os equivalentes. Note que seguindo as indicações da seta é construída uma sequência de números racionais  $(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \dots)$  fornecendo assim, uma listagem de forma intuitiva de todos os números racionais.

Figura 1 - Diagrama de Flechas - Enumerabilidade dos Racionais



e  $\mathbb{R}$  e, então, trabalha-se sobre os elementos da diagonal da tabela e se chega a uma contradição. Com tal prova, ficou demonstrado que havia diferentes tipos de infinitos estabelecendo uma hierarquia entre eles.

Neste trabalho será apresentado um estudo sobre a não enumerabilidade dos números transcendententes. Os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais são definidos como enumeráveis, ou seja, aqueles nos quais podem ser estabelecidas uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais e segundo Cantor equivalentes, o que também acontece com o conjunto dos números algébricos. O interessante é que, assim como os números reais, tanto os números irracionais como os transcendententes não são enumeráveis, o que claramente contradiz a nossa intuição, já que os números racionais e algébricos estão mais presentes no nosso dia a dia e na natureza, o que pode causar uma falsa percepção de existirem em maior quantidade, o que de fato não é verdade.

A probabilidade de um número ser racional (dentre os números reais) é zero! No entanto, basicamente todos os números que usamos no dia a dia são números racionais. Uma conta de restaurante, colocar gasolina no carro, fazer apostas em loterias, etc, etc, etc. (MARQUES, 2020, p. 55)

Tal afirmação pode parecer surpreendente, mas também é válida para os números algébricos, ou seja, quase todos os números reais são irracionais ou transcendententes, apesar do nosso mundo parecer girar somente em torno dos racionais. De um modo geral, podemos resumir que nós pouco utilizamos os números no nosso cotidiano.

## Objetivos

### Objetivos Gerais

Nesse contexto, este trabalho teve como objetivo apresentar a característica da não enumerabilidade dos números transcendententes, propondo a devida compreensão da cardinalidade deste conjunto numérico, sua comparação com os números algébricos e seus aspectos elementares. Também é apresentada uma demonstração detalhada das irracionalidades de  $\pi$  e do número  $e$ , além de sua transcendência.

### Objetivos Específicos

Primeiramente é feita uma revisão de literatura sobre a cardinalidade dos números reais, tendo como foco principal os números irracionais e transcendententes. Também são apresentadas algumas demonstrações de irracionalidades e da transcendência do número  $e$  tendo em vista que compreender a cardinalidade dos números transcendententes é um enorme

desafio, tanto pela complexidade dos conceitos abordados, como pelo modo como esses conceitos são apresentados nos livros didáticos.

Posteriormente, são desenvolvidas duas atividades pedagógicas com o objetivo de proporcionar aos professores e alunos do ensino médio uma melhor compreensão sobre a cardinalidade dos números transcendentais. A primeira atividade consiste em abordar as diferenças entre os números irracionais e racionais partindo de um contexto mais simples, de forma que os alunos entendam que os números irracionais existem em maior quantidade, mesmo que não sejam utilizados no nosso cotidiano como os números racionais. Na segunda atividade é introduzido o conceito de números transcendentais adotando uma abordagem mais formal, com foco específico na cardinalidade desse conjunto.

### Justificativa

Como justificativa, pode-se afirmar a falsa percepção de que a cardinalidade dos irracionais<sup>1</sup> é menor que a dos racionais, fato que pode ser visto em diagramas de representação desses conjuntos apresentados em alguns livros do ensino médio conforme Figura 2, ou o fato de que o conjunto dos números reais possa ser dividido exatamente ao meio formando dois conjuntos de mesma cardinalidade, como mostrado nas Figuras 3, 4, 5 e 6. Tal percepção também ocorre quando se trata dos números transcendentais em comparação com os números algébricos, já que estes também não estão tão presentes no nosso cotidiano.

Pesquisas como a de Miguel (1993), Souto (2010), Pommer (2012), entre outras, sinalizam a existência de livros didáticos que não conferem ao conceito de números irracionais a relevância que esse estudo deveria ter, dada a sua importância na matemática e outras áreas do conhecimento, além da superficialidade teórica na apresentação do conteúdo. (PAZ et al., 2021, p. 3)

Ainda que Brasil (2018), em uma das unidades temáticas para o Ensino Fundamental - Anos Finais, proponha o aprofundamento das noções de números, reconhecendo a necessidade do uso dos números irracionais por meio da exposição de problemas, sobretudo geométricos, essa abordagem pode ser insuficiente para lidar de forma eficaz com o tema da irracionalidade, sobretudo quando se leva em consideração a cardinalidade deste conjunto, sendo sua natureza infinita e o fato de ser um conjunto não enumerável, características fundamentais para a correta compreensão desses números.

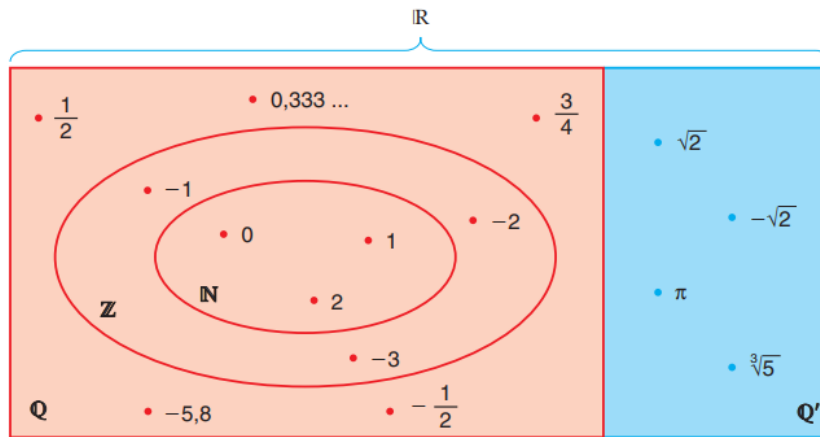
Um outro fato relevante que se pode destacar é que a introdução dos números transcendentais no ensino médio permite a expansão do conceito dos números irracionais.

---

<sup>1</sup> Observa-se, nas Figuras 2, 3, 4, 5 e 6 diferentes tipos de simbologia para a representação do conjunto dos números irracionais:  $\mathbb{Q}'$ ,  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  e  $\mathbb{I}$ ,

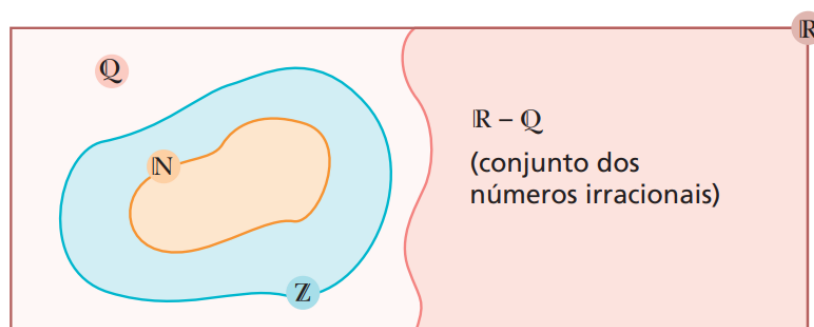
Ao estudar esses números os alunos percebem que existem números que não podem ser expressos como soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros e que determinados números e alguns muito conhecidos como,  $\pi$  e  $e$ , possuem esta propriedade. Tal fato pode servir de incentivo e despertar interesse por áreas de estudos mais avançadas proporcionando uma maior compreensão e apreciação pela matemática.

Figura 2 - Representação dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) a partir dos Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e Números Irracionais ( $\mathbb{Q}'$ )



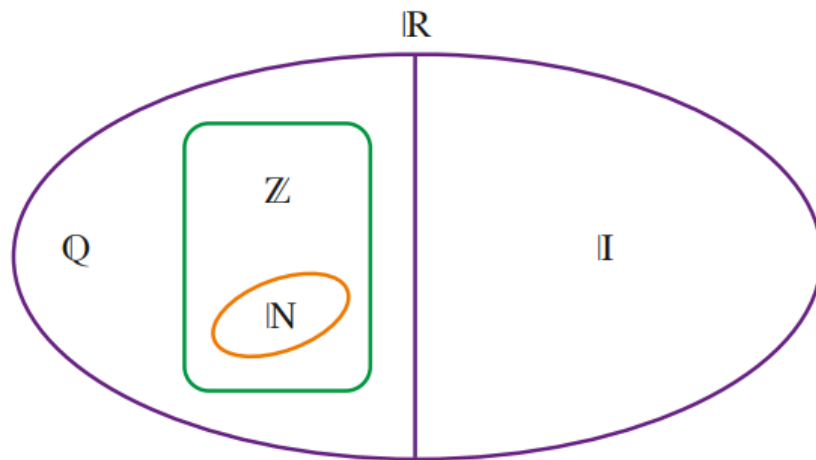
Fonte: Paiva (2010)

Figura 3 - Representação dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) a partir dos Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e Números Irracionais ( $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ )



Fonte: Moderna (2016)

Figura 4 - Representação dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) a partir dos Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e Números Irracionais ( $\mathbb{I}$ )



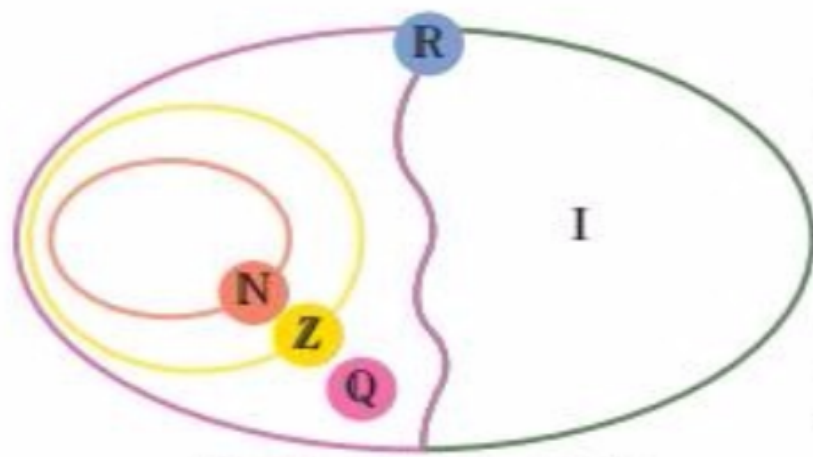
Fonte: Dante (2016)

Figura 5 - Representação dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) a partir dos Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e Números Irracionais ( $\mathbb{I}$ )



Fonte: Iezzi et al. (2016)

Figura 6 - Representação dos Números Reais ( $\mathbb{R}$ ) a partir dos Números Racionais ( $\mathbb{Q}$ ) e Números Irracionais ( $\mathbb{I}$ )



Fonte: Bonjorno, Júnior e Sousa (2016)

Este estudo foi desenvolvido da seguinte forma: no primeiro capítulo, a introdução, onde estão descritas a apresentação, os objetivos e a justificativa; no capítulo 2, a metodologia, onde é detalhada a abordagem metodológica adotada nesta pesquisa; no capítulo 3, é realizada uma revisão de literatura sobre os conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, conjuntos finitos e conjuntos infinitos, números algébricos e transcendentos. Também são apresentadas algumas irracionalidades, com destaque as dos números  $\pi$  e  $e$ , a transcendência do número  $e$ , e a investigação matemática em sala de aula; no capítulo 4, estão descritas as construções de duas atividades pedagógicas que têm o intuito de facilitar a compreensão da não enumerabilidade dos números transcendentos; e, por fim, no último capítulo, são realizadas as considerações finais.

## 1 METODOLOGIA

### 1.1 Coleta

Neste estudo, foi adotada uma abordagem de pesquisa qualitativa. De acordo com Fonseca e Moraes (2002), esse tipo de método é utilizado quando não há quantificação de dados e que os dados utilizados não são baseados em números. Para isto, foi realizada uma revisão da literatura buscando compreender todo o contexto teórico que envolve a cardinalidade dos conjuntos numéricos e, em particular, a dos números transcendentos. Buscou-se uma análise de publicações e estudos sobre este tema de forma a sintetizar as principais características e propriedades que levaram a conclusão da não enumerabilidade do conjunto dos números transcendentos.

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. (GIL, 2002, p. 44)

Neste contexto, é relevante destacar alguns trabalhos que foram fundamentais para o desenvolvimento deste estudo. A importância de Marques (2013, 2020) para a compreensão adequada da teoria dos números transcendentos, o artigo de Niven (1947), no qual é apresentada a demonstração da irracionalidade do número  $\pi$ , a publicação de Figueiredo (2011), que apresenta de maneira metódica toda a construção da demonstração da transcendência do número  $e$ , e por fim, o de Niven (2012), que aborda de forma intuitiva os números racionais e irracionais.

Adicionalmente, foram utilizados alguns livros do ensino médio, com o objetivo de obter um melhor entendimento de como a irracionalidade é abordada nessa etapa de ensino, destacando-se Paiva (2010), (Dante; Moderna; Bonjorno, Júnior e Sousa; Iezzi et al., 2016), livros com os quais o autor deste estudo possui familiaridade no uso diário.

### 1.2 Análise

Segundo Gil (2008), após a coleta, os dados devem ser analisados e interpretados, portanto nesta etapa do estudo se buscará construir um percurso didático que facilite a compreensão da não enumerabilidade dos números transcendentos.

A análise tem como objetivo organizar e resumir os dados de forma tal que possibilitem o fornecimento de respostas ao problema proposto para investigação. Já a interpretação tem como objetivo a procura do sentido mais amplo as

respostas, o que é feito mediante sua ligação a outros conhecimentos anteriormente obtidos. (GIL, 2008, p. 156)

Desta forma, serão construídas duas atividades pedagógicas onde o tema deste estudo poderá ser abordado de forma gradual, facilitando a compreensão dos conceitos que serão abordados.

A primeira atividade, um pouco mais intuitiva, será construída com o objetivo principal de mostrar de forma simples que na reta real existem mais números irracionais do que racionais. Para esse fim, será necessário analisar as propriedades dos números irracionais e racionais e compreender suas representações de uma maneira que poderá ser explorado o fato de que os números racionais obedecem sempre a um mesmo padrão, ou seja, o padrão de repetição de algarismos, levando-se em conta a representação infinita de um número decimal. Esta característica de repetição de algarismos, será fundamental para entender o porquê dos números irracionais existirem em maior quantidade.

Já a segunda atividade será construída com intuito de introduzir a ideia da não enumerabilidade dos números transcendentos. Para isto será necessário compreender as cardinalidades dos números naturais, inteiros, racionais e reais. Assim como as características dos números algébricos e de como esses números poderão ser obtidos a partir de equações polinomiais. Também será necessário entender como esse conjunto pode ser construído e como o fato de ser um conjunto enumerável implicará na não enumerabilidade do conjunto dos números transcendentos.

Por fim, para que o embasamento teórico seja aplicado, serão utilizadas as ideias de investigação em sala de aula propostas por (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019). Sob essa ótica as construções das atividades obedecerão quatro etapas: Exploração e Formulação; Formulação de Conjecturas; Testes e Reformulação; Justificação e Avaliação. Por tanto, as atividades serão iniciadas estimulando os alunos a formular questões sobre o tema, para que posteriormente seja feita elaboração de uma conjectura por parte dos estudantes, seguida da testagem desta conjectura. Em caso positivo os estudantes deveriam expor suas conclusões à turma em um fórum aberto a todos, em caso negativo se faz outra conjectura e, por fim será proposta uma maneira formal de justificar uma conjectura e também um meio de avaliação.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 Conjuntos Enumeráveis e Não Enumeráveis

Nesta seção serão apresentadas as noções de conjunto finito e infinito, assim como a enumerabilidade dos conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e a não enumerabilidade  $\mathbb{Q}'$ ,  $\mathbb{R}$ .

#### 2.1.1 Conjuntos Finitos e Infinitos

**Definição 1.** *Uma função  $\phi : A \rightarrow B$  é dita injetiva, se para todo  $x, y \in A$  tal que  $\phi(x) = \phi(y)$  implica que  $x = y$ .*

**Definição 2.** *Uma função  $\phi : A \rightarrow B$  é dita sobrejetiva, se para todo  $b \in B$ , existe um  $a \in A$  tal que  $\phi(a) = b$ .*

**Definição 3.** *Uma função  $\phi : A \rightarrow B$  é dita bijetiva se  $\phi$  for injetiva e sobrejetiva.*

**Teorema 1.** *Se a função  $\phi : A \rightarrow B$  é bijetiva, então sua inversa  $\phi^{-1} : B \rightarrow A$  também é.*

Prova: Como  $\phi : A \rightarrow B$  é injetiva, segue que se  $\phi(x) = \phi(y) \Rightarrow x = y$ , logo  $\phi^{-1}(\phi(x)) = \phi^{-1}(\phi(y)) \Rightarrow x = y \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$ . Logo  $\phi^{-1}$  é injetiva. Como  $\phi$  é sobrejetiva, então  $\forall x \in A, \exists y \in B$  tal que  $\phi(x) = y$ . daí segue que  $\forall y \in B, \exists x \in A$  tal que  $\phi^{-1}(y) = x$ . Logo  $\phi^{-1} : B \rightarrow A$  é sobrejetiva.

**Teorema 2.** *Sejam  $\phi : A \rightarrow B$  e  $\gamma : B \rightarrow C$  funções bijetivas. Então a composta  $\gamma \circ \phi : A \rightarrow C$  também é.*

Prova: Se  $\phi$  e  $\gamma$  são injetivas, então a injetividade de  $\gamma$  nos diz que dados  $x, y \in A$ ,  $\gamma(\phi(x)) = \gamma(\phi(y)) \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$ . Por outro lado, a injetividade de  $\phi$  nos diz que  $\phi(x) = \phi(y) \Rightarrow x = y$ . Portanto,  $\gamma \circ \phi(x) = \gamma \circ \phi(y) \Rightarrow x = y$  e  $\gamma \circ \phi$  é injetiva. Agora seja  $\phi : A \rightarrow B$  sobrejetiva. Então, para todo  $z \in B$ , existe um  $x \in A$ , de modo que  $\phi(x) = z$ . Seja agora  $\gamma : B \rightarrow C$  sobrejetiva. Então, para todo  $y \in C$  existe algum  $z \in B$ , de modo que  $\gamma(z) = y$ . Podemos ver que, se  $\phi$  e  $\gamma$  forem sobrejetivas, então para todo  $y \in C$  haverá algum  $z \in B$  tal que  $\phi(z) = y$ , e para todo  $z \in B$  existe  $x \in A$  tal que  $\phi(x) = z$ , donde  $(\gamma \circ \phi)(x) = y$  concluindo assim sua sobrejetividade. Portanto  $\gamma \circ \phi$  é bijetiva.

---

<sup>2</sup> Notações utilizadas para representação do conjunto dos números irracionais:  $\mathbb{Q}'$ ,  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  e  $\mathbb{I}$

**Definição 4.** Dizemos que os conjuntos  $A$  e  $B$  têm a mesma cardinalidade, se existir uma função bijetiva entre esses dois conjuntos e escrevemos  $A \approx B$ .

**Teorema 3.**  $\mathbb{R} \approx ]0, 1[$ , ou seja, o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e o intervalo  $]0, 1[$  têm a mesma cardinalidade.

Prova: De fato, defina a função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1[$ , tal que  $\varphi(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{1 + |x|} + 1 \right)$ . Note que a função  $\varphi$  é claramente bijetiva e pela Definição 4, conclui-se que  $\mathbb{R} \approx ]0, 1[$ .

**Teorema 4.** A relação  $A \approx B$  é uma relação de equivalência.

Prova:

1. (Reflexiva) Tome  $\phi : A \rightarrow A$  tal que  $\phi(x) = x$ . De fato  $\phi$  é bijetiva, logo  $A \approx A$ .
2. (Simétrica) Dados  $A$  e  $B$  dois conjuntos. Suponha que  $A \approx B$  e seja  $\phi$  uma bijeção de  $A \rightarrow B$ . Daí, seque pelo Teorema 1 que sua inversa  $\phi^{-1}$  também é bijetiva, logo  $B \approx A$ .
3. (Transitiva) Dados os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Suponha que  $A \approx B$  e  $B \approx C$ . Então existem bijeções  $\phi$  e  $\gamma$  tais que  $\phi : A \rightarrow B$  e  $\gamma : B \rightarrow C$ , logo pelo Teorema 2, a função composta  $\gamma \circ \phi$  é uma bijeção de  $A \rightarrow C$ , logo segue que  $A \approx C$ .

**Definição 5.** Um conjunto  $A$  chama-se finito quando é vazio ou quando existe, para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$ , de modo que  $\phi : I_n \rightarrow A$  é uma bijeção.

**Teorema 5.** Dados os conjuntos  $A$  e  $B$  e uma função bijetiva  $\phi : A \rightarrow B$  um desses conjuntos é finito se, e somente se, o outro também é.

Prova: Suponha que  $A$  é finito e  $\phi : A \rightarrow B$  é uma função bijetiva. Como  $A$  é finito, existe uma função bijetiva  $\phi : I_n \rightarrow A$ . Então  $I_n \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\gamma} B$ . A função  $\gamma \circ \phi : I_n \rightarrow B$  é uma função bijetiva, pois  $\gamma$  e  $\phi$  o são pelo Teorema 2. Portanto,  $B$  é finito. Suponha, agora, que  $B$  é finito. Então, existe uma função bijetiva  $\phi : I_n \rightarrow B$ . Como  $\gamma$  é bijetiva, existe  $\gamma^{-1} : B \rightarrow A$  tendo  $I_n \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\gamma^{-1}} A$ . A função  $\gamma^{-1} \circ \phi : I_n \rightarrow A$  é bijetiva, pois  $\gamma^{-1}$  e  $\phi$  o são pelo Teorema 2. Portanto,  $A$  é finito.

**Definição 6.** Um conjunto  $A$  chama-se infinito quando não for finito. Isto é: quando  $A$  não for vazio e não existir uma bijeção  $\phi : I_n \rightarrow A$ .

**Proposição 1.** O conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$  é infinito.

Prova: Suponha por absurdo que  $\mathbb{N}$  seja finito. Então existe algum  $n \in \mathbb{N}$  e uma bijeção  $\phi : I_n \rightarrow \mathbb{N}$ . Sem perda de generalidade, podemos restringir um subconjunto de  $\mathbb{N}$  com  $n + 1$  elementos  $\{\phi(1), \phi(2), \phi(3), \dots, \phi(n + 1)\}$ . Por injetividade esses elementos são distintos, mas pelo menos dois deles têm que ser iguais, uma vez que só existem  $n$  elementos em  $I_n$ . Uma contradição, então não há uma bijeção entre  $I_n$  e  $\mathbb{N}$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto  $\mathbb{N}$  é infinito.

**Definição 7.** Um conjunto  $A$  diz-se limitado se existe um número natural  $k$  tal que  $x \leq k$  para quaisquer  $x \in A$ .

**Teorema 6.** Se  $B$  é um conjunto finito então todo subconjunto próprio  $A \subset B$  é finito.

Prova: A prova se dará por indução no número de elementos do conjunto  $B$ . Seja  $a \in B$ . Então  $B - \{a\}$  é finito. De fato, como  $B$  é finito existe uma função bijetiva  $\phi : I_n \rightarrow B$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $\phi(n) = a$ . No caso  $n = 1$ , então  $B - \{a\} = \emptyset$  e  $B$  é finito por definição. No caso  $n > 1$ , considere a restrição de  $\phi$  a  $I_{n-1}$  e denote-a por  $\gamma$ . A função  $\gamma : I_{n-1} \rightarrow B - \{a\}$  é bijetiva, logo  $B - \{a\}$  é finito e tem  $n - 1$  elementos. Como hipótese de indução, suponha, agora, que a afirmação do Teorema vale para conjuntos com  $n$  elementos. Sejam  $B$  um conjunto com  $n + 1$  elementos e  $A$  um subconjunto próprio de  $B$ . Então, existe  $a \in B$  tal que  $a \notin A$  e, portanto,  $A \subseteq B - \{a\}$ . Como  $B - \{a\}$  tem  $n$  elementos, então, pela hipótese de indução,  $A$  é finito.

**Teorema 7.** Se um conjunto tem um subconjunto infinito, então ele também é um conjunto infinito.

Prova: Seja  $C = A \cup B$  e suponha que  $A$  é um conjunto infinito. Suponha, por absurdo, que  $C$  é um conjunto finito. Então, pelo Teorema 6, todo subconjunto de  $C$  é finito, o que contradiz a hipótese de que  $A$  é infinito. Logo,  $C$  não pode ser finito.

**Proposição 2.** Os conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  são infinitos.

Prova: De fato,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  e pela Proposição 1 e o Teorema 7 justificam a prova.

**Teorema 8.** Um subconjunto, não vazio,  $X \subset \mathbb{N}$  é finito se, e somente se, é limitado.

Prova: Como  $X$  é não vazio, tome  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{N}$  é finito, tomando  $k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , tem-se que  $k \geq x$  para todo  $x \in X$ . Logo  $X$  é limitado. Suponha, agora  $X \subset \mathbb{N}$  e  $X$  limitado, então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq x$ , para todo  $x \in X$ . Logo,  $X \subset I_k$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ , mas  $I_k$  é finito. Como  $X$  é subconjunto de  $I_k$ ,  $X$  é finito pelo Teorema 6.

**Teorema 9.** Dados os conjuntos  $X$  e  $Y$  e uma função bijetiva  $\phi : X \rightarrow Y$ , um desses conjuntos é infinito se, e somente se, o outro também é.

Prova: Suponha  $X$  infinito e, por absurdo, que  $Y$  é finito. Pelo Teorema 5, então  $X$  também é finito, contradizendo a hipótese. Suponha que  $Y$  é infinito e, por absurdo, que  $X$  é finito. Pelo Teorema 5,  $Y$  é finito, contradizendo a hipótese.

### 2.1.2 Conjuntos Enumeráveis e Não Enumeráveis

**Definição 8.** Um conjunto  $X$  é dito enumerável quando é finito, ou quando existe uma bijeção  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow X$ . No segundo caso,  $X$  é dito infinito enumerável.

**Teorema 10.** *O conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}^3$  é infinito enumerável.*

Prova: De fato, tome a função  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $\phi(n) = n$ . Observe que  $\phi$  é claramente bijetiva, o que conclui a prova.

**Teorema 11.** *O conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$  é infinito enumerável.*

Prova: De fato, tome a função  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que:  $\phi(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{se } n \text{ ímpar,} \\ -\frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$

Observe que  $\phi$  é claramente bijetiva, o que conclui a prova.

**Teorema 12.** *Seja  $X$  um subconjunto qualquer de  $\mathbb{N}$ . Então,  $X$  é enumerável.*

Prova: Se  $X$  é finito, então, por definição, ele é enumerável. Suponha  $X$  infinito. Chame  $x_1$  o menor elemento de  $X$ . Defina  $x_2$  como sendo o menor elemento do conjunto  $A_2 = X - \{x_1\}$ . Em seguida, defina  $x_3$  como sendo o menor elemento do conjunto  $A_3 = X - \{x_1, x_2\}$  e, assim por diante, defina  $x_n$  como sendo o menor elemento do conjunto  $A_n = X - \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ . Note que  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1}$ . Continuando este processo, obtém-se o conjunto infinito enumerável  $X' = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} \subseteq X$ . Prova-se, em seguida, que também  $X \subseteq X'$ . Suponha, por absurdo, que existe  $x \in X$  tal que  $x \notin X'$ . Nesse caso,  $x \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$  e, por isso,  $x > x_i, \forall x_i \in X'$ , o que implica que  $X'$  é limitado; logo, não é infinito, contradizendo o resultado anterior de que  $X'$  é infinito. Portanto, não pode haver  $x \in X$  tal que  $x \notin X'$ . Então,  $X \subseteq X'$ . Como anteriormente já foi provado que  $X' \subseteq X$ , segue que  $X = X'$ . Então, todo subconjunto  $X \subseteq \mathbb{N}$  é enumerável.

**Teorema 13.** *Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Prova: Seja  $X$  um conjunto enumerável, logo existe  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow X$  bijeção, de modo que  $\phi(n_1) = x_1, \phi(n_2) = x_2, \dots, \phi(n_i) = x_i, \dots$ . Agora tomemos  $A \subset X$  com  $A = X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$  e  $Y \subset \mathbb{N}$ , de modo que  $Y = \mathbb{N} \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}$ . Assim, temos que  $\phi : Y \rightarrow A$  é bijetiva e portanto como  $Y \subset \mathbb{N}$ , segue do Teorema 12 que  $Y$  é enumerável, e conseqüentemente existe  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow Y$  bijetiva. Logo, tomando  $(\phi \circ \gamma) : \mathbb{N} \rightarrow A$ , temos que  $(\phi \circ \gamma)$  pelo Teorema 2 é bijetiva, e assim  $A$  é enumerável.

**Teorema 14.** *Se  $Y$  é enumerável e  $\varphi : X \rightarrow Y$  é injetiva, então  $X$  é enumerável.*

Prova: Suponha que  $Y$  seja um conjunto enumerável, então, por definição existe uma bijeção  $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$ . Agora considere  $A \subset Y$  tal que  $A = \text{Im}(\varphi)$ , daí segue que  $\varphi : X \rightarrow A$  é bijetiva e como por hipótese  $Y$  é enumerável, tem-se que pelo Teorema 13 implica dizer que  $A \subset Y$  é enumerável, logo existe uma função bijetiva  $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Daí segue o esquema

---

<sup>3</sup> Considera-se que o zero pertence ao conjunto dos números naturais.

$\mathbb{N} \xrightarrow{g} A \xrightarrow{\varphi^{-1}} X$ , que implica em  $(\varphi^{-1} \circ g) : \mathbb{N} \rightarrow X$ . Note que a função  $(\varphi^{-1} \circ g)$  é bijetiva, pois  $g, \varphi$  são bijetivas e pelo Teorema 1,  $\varphi^{-1}$  também é bijetiva e pelo Teorema 2, a composição de funções bijetivas também é uma função bijetiva, logo temos uma bijeção entre  $\mathbb{N}$  e  $X$ , então podemos concluir que  $X$  é enumerável.

**Teorema 15.** *Seja  $X$  um conjunto enumerável. Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  é sobrejetiva, então  $Y$  é enumerável.*

Prova: Primeiramente temos que por hipótese  $\varphi$  é sobrejetiva, então segue que para todo  $y \in Y$ , existe algum  $x \in X$  tal que  $\varphi(x) = y$ . Daí segue que como  $\varphi$  pode não ser injetiva, defini-se uma função  $\gamma : Y \rightarrow X$  do seguinte modo:  $\gamma(y) := x$ , se  $y \in Y$  é imagem pela função  $\varphi$  de um único  $x \in X$ . Caso contrário, se  $y \in Y$  é imagem de dois ou mais elementos de  $X$  tais como  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ , escolha um único  $x_i$  tal que  $\gamma(y) = x_i$ , assim tem-se uma função que associa cada elemento de  $y \in Y$  a um único elemento de  $x \in X$  tal que  $\varphi(\gamma(y)) = y$  para todo  $y \in Y$ . Portanto, a função  $\gamma$  é injetiva e pelo Teorema 14, tem-se que  $Y$  é enumerável.

**Teorema 16.** *O produto cartesiano  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável.*

Prova: Considere a função  $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $\varphi(i, j) := 2^i \cdot 3^j$ . Segue que pelo Teorema Fundamental da Aritmética tem-se a unicidade da decomposição de fatores primos implicando que  $\varphi(i, j) = 2^i \cdot 3^j = 2^k \cdot 3^l = \varphi(k, l)$  implicando que  $(i, j) = (k, l)$ , ou seja, a função  $\varphi$  é injetiva e pelo Teorema 14, conclui-se que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável, pois  $\mathbb{N}$  é enumerável.

**Teorema 17.** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos enumeráveis, então o produto cartesiano  $X \times Y$  é enumerável.*

Prova: Por hipótese,  $X$  e  $Y$  são enumeráveis, então existem as funções bijetivas  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$  e  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow Y$ . Agora considere a função  $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X \times Y$  tal que  $\psi(m, n) = (\varphi(m), \gamma(n))$ . Daí segue que  $\psi$  é bijetiva, consequentemente sobrejetiva. Pelo Teorema 16, segue que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é enumerável e pelo Teorema 15, conclui-se que  $X \times Y$  é enumerável.

**Teorema 18.** *O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é enumerável.*

Prova: Pelo teorema 11, o conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$  é enumerável. Considere  $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$ , tal que  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ , logo tem-se que pelo Teorema 13, que o conjunto  $\mathbb{Z}^*$  também é enumerável. Agora considere a função  $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$  tal que  $\varphi(p, q) = \frac{p}{q}$ , segue que pelo Teorema 17, o produto cartesiano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  também é enumerável e como  $\varphi$  é sobrejetiva, pois todos os números racionais podem ser escritos na forma  $\frac{p}{q}$ , então tem-se que pelo Teorema 15, que  $\mathbb{Q}$  é enumerável.

**Teorema 19.** *A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é conjunto enumerável.*

Prova: Considere o conjunto finito  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  e o conjunto enumerável  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ . Note que podemos estabelecer uma bijeção entre  $A \cup B$  e  $\mathbb{N}$  da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_1, & a_2, & a_3 & , \dots, & a_n, & b_1, & b_2, & b_3, & \dots \\
 \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \dots & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\
 1, & 2, & 3 & , \dots, & n, & n+1, & n+2, & n+3, & \dots
 \end{array}$$

o que conclui a prova.

**Teorema 20.** *A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Prova: Sejam  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  e  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$  dois conjuntos enumeráveis, então podemos estabelecer uma bijeção entre  $A \cup B$  e  $\mathbb{N}$  da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & a_3, & b_3, & \dots \\
 \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\
 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots
 \end{array}$$

o que conclui a prova.

**Teorema 21.** *A união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Prova: A prova será efetuada utilizando o princípio da indução. Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos enumeráveis, queremos mostrar que  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  também é enumerável.

- Para  $n = 2$  é verdade, pois pelo Teorema 20, sabemos que a união de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável, portanto  $A_1 \cup A_2$  é enumerável.
- Supor verdade para  $n = k$  e será provado a validade para  $n = k + 1$ . Segue que  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \cup A_{k+1}$ . Agora considere  $A = (A_1, A_2, \dots, A_k)$ , então tem-se que  $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \cup A_{k+1} = A \cup A_{k+1}$  que é válida por hipótese de indução.

Logo, podemos concluir que  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  é enumerável.

**Teorema 22.** *A união de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

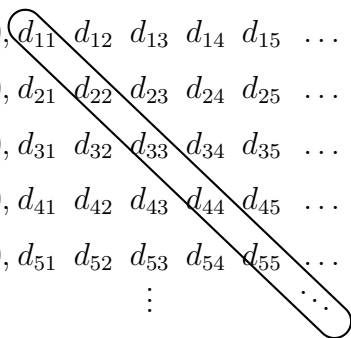
Prova: De fato, Sejam  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$  conjuntos enumeráveis, por consequência existem sobrejeções  $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow A_1, \varphi_2 : \mathbb{N} \rightarrow A_2, \dots, \varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n, \dots$ . Seja  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , então pode-se definir uma sobrejeção  $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A$ , sendo que  $\varphi(m, n) = \varphi_n(m)$ , logo segue pelo Teorema 15 que  $A$  é enumerável.

No caso de uma união finita, basta considerar  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_n \cup \dots$

**Teorema 23.** *O conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais não é enumerável.*

Prova: Pelo Teorema 3, sabemos que  $\mathbb{R} \approx ]0, 1[$ , então basta provar que o intervalo  $]0, 1[$  não é enumerável.

Suponha por absurdo que o intervalo  $]0, 1[$  seja enumerável, daí segue que existe uma bijeção  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow ]0, 1[$  de modo que se possa listar todos os números existentes entre  $]0, 1[$  tal que  $\varphi(i) = x_i$ , para to  $i \in \mathbb{N}$ , conforme esquema abaixo:

$$\begin{array}{cccccc}
 x_1 = 0, & d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & \dots \\
 x_2 = 0, & d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & \dots \\
 x_3 = 0, & d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & \dots \\
 x_4 = 0, & d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & \dots \\
 x_5 = 0, & d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & \dots \\
 \vdots & & & \vdots & & & \ddots
 \end{array}$$


Agora considere um número qualquer  $y \in ]0, 1[$ , tal que  $y = 0, y_1 y_2 y_3 y_4 \dots$ , sendo ainda que  $y_i \neq d_{ii}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Note que  $y \in ]0, 1[$ , mas  $y \neq x_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Então conclui-se que existe um número no intervalo  $]0, 1[$  que não é listado pela função  $\varphi$ , o que gera uma contradição, logo  $]0, 1[$  não é enumerável.

Este método no qual se constrói um novo elemento de uma lista de acordo com esquema apresentado acima é chamado de diagonal de Cantor.

Cantor percebeu que existem vários tamanhos de infinitos e que apesar de dois conjuntos serem infinitos, eles podem ter tamanhos diferentes. Isto é o que acontece com os conjuntos  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{R}$ , pois não há como estabelecer uma bijeção entre eles. Assim, o infinito dos números reais é maior que o infinito dos números naturais.

**Teorema 24.** *O conjunto  $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  dos números irracionais é não enumerável.*

Prova: De fato, seja  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ . Pelo Teorema 18, tem-se que o conjunto  $\mathbb{Q}$  é enumerável e pelo Teorema 23, tem-se que  $\mathbb{R}$  não é enumerável e como o Teorema 20 afirma que a união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável então  $\mathbb{Q}'$  não pode ser enumerável, o que conclui a prova.

Note que entre os conjuntos  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$  e  $\mathbb{R}$ , apesar de todos serem infinitos, apenas  $\mathbb{Q}'$  e  $\mathbb{R}$  não são enumeráveis.

O fato visto de  $\mathbb{Q}$  ser enumerável e  $\mathbb{Q}'$  não enumerável pode gerar muita dificuldade entre os alunos de modo geral e, principalmente, aqueles que estiverem cursando o ensino médio ou quando tiverem o primeiro contato com os números irracionais no ensino fundamental, pois os números racionais são mais vistos e trabalhados no ensino da matemática e no nosso cotidiano enquanto os irracionais estão associados principalmente ao estudo e operações de radicais. Isso pode ser constatado no estudo de Miguel (1993), onde afirma que os textos didáticos sobre os números irracionais se limitam a um amontoado de regras de operação, as quais, na maioria das vezes, são apresentadas sem justificativas, tornando-se inúteis aos olhos dos estudantes e desconectadas das demais áreas da matemática.

Tabela 1 - Classificação dos conjuntos de acordo com sua cardinalidade

Conjunto	Classificação
$\mathbb{N}$	infinito enumerável
$\mathbb{Z}$	infinito enumerável
$\mathbb{Q}$	infinito enumerável
$\mathbb{Q}'$	infinito não enumerável
$\mathbb{R}$	infinito não enumerável

Fonte: Autor, 2025

A Tabela 1 estabelece a classificação, de acordo com sua cardinalidade dos conjuntos vistos nesta seção.

## 2.2 Números Algébricos e Transcendentes

Nesta seção serão apresentados outros dois conjuntos infinitos, que são o conjunto dos números algébricos e conjunto dos números transcendententes.

**Definição 9.** Um número real  $x$  é dito algébrico se satisfizer alguma equação da forma:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0 \quad (1)$$

onde  $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  são coeficientes inteiros.

**Definição 10.** Um número real  $x$  é dito transcendente se ele não for algébrico.

**Definição 11.** Sejam  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais,  $\overline{\mathbb{Q}}$  o conjunto dos números algébricos e  $\mathbb{T}$  o conjunto dos números transcendententes são, tais que  $\mathbb{R} = \mathbb{T} \cup \overline{\mathbb{Q}}$ . Esta é uma outra forma de se definir os números reais.

**Proposição 3.** Todo número racional é algébrico.

Prova: De fato, seja  $x = \frac{p}{q}$  tais que  $p$  e  $q \in \mathbb{Z}$  e  $q \neq 0$ , agora basta considerar o polinômio  $qx - p = 0$  cuja  $x$  é sua raiz, o que conclui a prova.

**Proposição 4.** *Todo número transcendente é irracional.*

Prova: De fato, basta apenas usar a regra contra positiva da lógica na Proposição 3.

**Definição 12.** *Dado um polinômio de coeficientes inteiros:*

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n \quad (2)$$

definimos sua altura como sendo:

$$|P| = |c_0| + |c_1| + |c_2| + \dots + |c_{n-1}| + |c_n| + n \quad (3)$$

Tabela 2 - Exemplos de altura de polinômios

Altura	Polinômios
2	$x$
3	$x^2, 2x, x + 1, x - 1$
4	$x^3, 2x^2, x^2 + 1, x^2 - 1, 3x, 2x + 1, 2x - 1, x + 2, x - 2$
5	$x^4, 2x^3, x^3 + 1, x^3 - 1, 4x, 3x + 1, 3x - 1, x + 3, x - 3$

Fonte: Autor, 2025

Seja  $P(x)$  dado conforme a Equação 2, note que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra há exatamente no máximo “ $n$ ” raízes complexas para  $P(x) = 0$ , da mesma forma que o número de polinômios com uma dada altura é um conjunto finito, tendo em vista que o grau  $n$  e seus coeficientes  $c_n, \dots, c_0$  estão restritos a um conjunto finito de números inteiros.

**Teorema 25.** *O conjunto  $\overline{\mathbb{Q}}$  dos números algébricos é infinito enumerável*

Prova: Seja  $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n = 0$ , onde  $c_0 \neq 0$  e  $|P|$  a sua altura. Para cada inteiro positivo  $|P|$ , considere  $\overline{\mathbb{Q}}_{|P|}$  o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de altura  $|P|$ , tal que  $\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\mathbb{Q}}_{|P|}$ . Observe que se “ $n$ ” é o grau do polinômio, claramente  $n \leq |P|$  e  $|c_i| \leq |P|$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Então o conjunto de todos os polinômios com altura  $|P|$  é finito e portanto, pela Definição 8, enumerável. Adicionalmente, cada polinômio de altura  $|P|$  não possui mais que  $n$  raízes, daí  $\overline{\mathbb{Q}}_{|P|}$  é finito e portanto também enumerável. Logo, pelo Teorema 22 conclui-se que  $\overline{\mathbb{Q}}$  é enumerável.

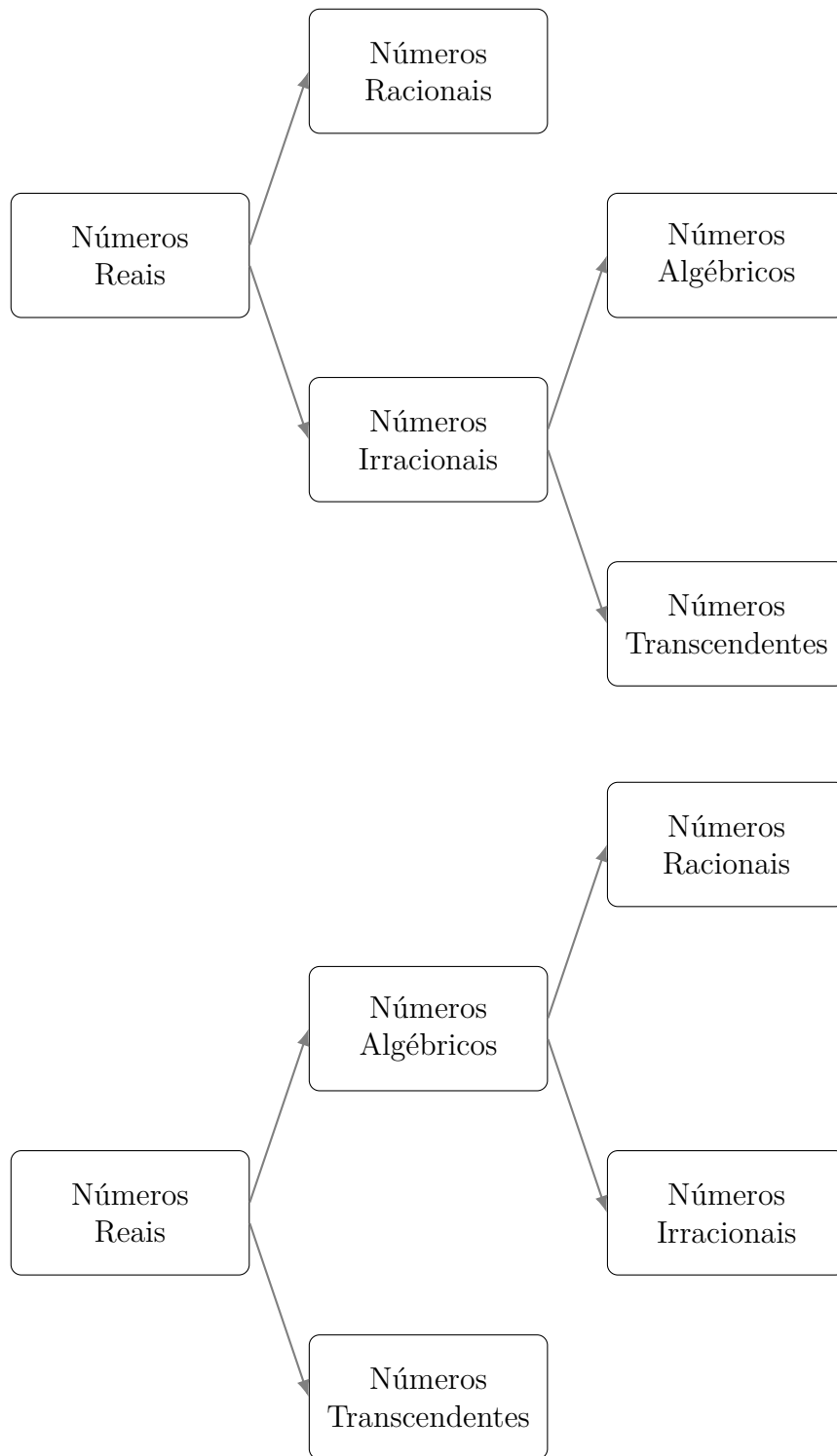
**Teorema 26.** *O conjunto  $\mathbb{T}$  dos números transcendentos é infinito não enumerável*

Prova: De fato, pelo Teorema 25 tem-se que  $\overline{\mathbb{Q}}$  é enumerável, pelo Teorema 23 tem-se que  $\mathbb{R}$  é não enumerável e pela Definição 11 tem-se que  $\mathbb{R} = \mathbb{T} \cup \overline{\mathbb{Q}}$ . Logo, pelo Teorema 21, tem-se que a união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável. Portanto, se  $\mathbb{T}$  fosse enumerável geraria uma contradição. Assim, pode-se concluir que  $\mathbb{T}$  é não enumerável.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Recomenda-se a leitura de Gaspar (2014), onde é mostrada uma prova direta da não enumerabilidade dos números transcendentos.

Figura 7 - Diagrama com a classificação dos números Reais



Fonte: Adaptado de Niven (2012)

Por fim, pode-se concluir que:

- A união dos números algébricos com os números transcendentés é uma forma de definir os números reais;
- Todo número racional é algébrico;
- Todo número transcendente é irracional;
- Números irracionais podem ser algébricos ou transcendentés (por exemplo:  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$  são algébricos, enquanto  $\pi$  e  $e$ , são transcendentés);
- O conjunto dos números algébricos é infinito enumerável;
- O conjunto dos números transcendentés é infinito não enumerável.

### 2.3 Algumas Irracionalidades

Um número irracional é todo número cuja sua representação decimal não é uma dízima periódica, ou seja, não pode ser representado por uma divisão entre dois números inteiros.

Como vimos anteriormente, o conjunto dos números irracionais é infinito não enumerável, ou seja, além de ser infinito, possui cardinalidade maior que a cardinalidade dos números naturais, apesar de não serem vistos ou utilizados com frequência no nosso dia a dia.

#### 2.3.1 As irracionalidades de $\sqrt[n]{2}$ , $\sqrt[n]{2^n}$ e $\sqrt[n]{p}$

A seguir serão apresentadas algumas demonstrações da irracionalidade de  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[n]{2}$  e  $\sqrt[p]{p}$ , onde  $p$  é um número primo. É importante destacar que serão apresentadas cinco provas da irracionalidade de  $\sqrt{2}$ , sendo algumas de fácil compreensão para alunos de ensino médio e outras que já necessitam de conceitos abordados nos cursos iniciais de graduação.

**Teorema 27.** *O número  $\sqrt{2}$  é irracional.*

Prova 1: Suponha que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , podemos supor sem perda de generalidade que  $(p, q) = 1$ , pois  $\frac{p}{q} = \frac{\frac{p}{(p,q)}}{\frac{q}{(p,q)}}$ . Logo tem-se que  $\sqrt{2}q = p \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$  é par. Como  $p^2$  é par, implica que  $p$  também é par, logo  $p = 2k \Rightarrow p^2 = 4k^2$ . Daí segue que como

$2q^2 = p^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ , ou seja,  $q^2$  também é um número par, implicando que  $q$  seja par, concluindo que  $2 \mid (p, q)$ , que é um absurdo, pois  $(p, q) = 1$ , logo  $\sqrt{2}$  é irracional.

Prova 2: Essa prova se dará utilizando o princípio da boa ordenação (PBO) como base. Suponha que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Defina  $S = \{n \in \mathbb{N} : n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\}$  tal que  $S \neq \emptyset$ . Pelo princípio da boa ordenação, existe  $b = \min(S)$ . Em particular  $b\sqrt{2} = a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ . Logo:  $\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2 - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{2b - a}{a - b}$ . Como  $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 1 < \frac{a}{b} < 2 \Leftrightarrow b < a < 2b \Leftrightarrow 0 < a - b < b$ . Mas,  $(a - b)\sqrt{2} = 2b - a \in \mathbb{Z}$ . Daí,  $a - b \in S$ . Absurdo, pois  $a - b < b$  e  $a - b \in S$ , sendo que  $b$  é o menor elemento de  $S$ . Logo  $\sqrt{2}$  é irracional.

Prova 3: Essa prova se dará utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) como base. Suponha que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ . Então:  $2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$ . Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, podemos decompor  $a$  e  $b$  em fatores primos tais que:  $a = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$  e  $b = b_1 b_2 b_3 \dots b_n$ . Logo  $a^2 = 2b^2 \Rightarrow a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots a_n^2 = 2b_1^2 b_2^2 b_3^2 \dots b_n^2$ . Absurdo, pois podemos verificar que o fator 2 aparece um número par de vezes no lado esquerdo e um número ímpar de vezes no lado direito, o que contradiz o Teorema Fundamental da Aritmética. Nele, diz que um número natural maior que 1 só pode ser decomposto em fatores primos de forma única ao menos da ordenação, logo  $\sqrt{2}$  é irracional.

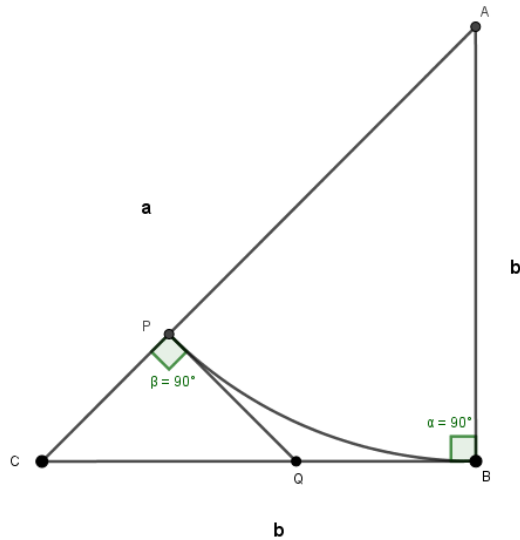
Prova 4: Essa prova se dará utilizando o teorema das raízes racionais. Seja  $x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0$ . Pelo teorema das raízes racionais as possíveis raízes racionais da equação seriam  $\pm 1$  e  $\pm 2$  o que não é verdade se verificarmos por inspeção, logo  $x = \sqrt{2}$  é irracional.

A seguir, será apresentada uma outra prova bastante interessante sobre a irracionalidade de  $\sqrt{2}$ . Neste caso uma prova geométrica que envolve semelhança de triângulos.

Prova 5: Suponha por absurdo que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , para inteiros  $a$  e  $b$  tal que esta fração seja irredutível, ou seja,  $(a, b) = 1$ . Agora considere o triângulo isósceles de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  representado na Figura 8. Note que pelo Teorema de Pitágoras,  $\sqrt{b^2 + b^2} = b\sqrt{2} = a$ , uma vez que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ . A partir daí constrói-se um outro triângulo  $PQC$ . Note também que  $\overline{PQ} = \overline{QB}$ , uma vez que são segmentos tangentes a circunferência a partir do mesmo ponto  $A$ . Observe também que os triângulos  $ABC$  e  $PQC$  são semelhantes. Segue que por semelhança  $\frac{\overline{CQ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{2b - a}{a} = \frac{a - b}{b} \Rightarrow \frac{2b - a}{a - b} = \frac{a}{b} = \sqrt{2}$ . Agora note que pela Figura 8, os seguimentos  $\overline{CQ} = 2b - a < \overline{AC} = a$  e  $\overline{PQ} = a - b < \overline{AB} = b$ , ou seja, a fração  $\frac{2b - a}{a - b}$  possui numerador e denominador menores que a fração  $\frac{a}{b}$ , o que gera uma contradição uma vez que fração  $\frac{a}{b}$  é irredutível por hipótese, logo  $\sqrt{2}$  é irracional.

Figura 8 - Irracionalidade de  $\sqrt{2}$ 

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{CB} = \overline{AP} = b \\ \overline{AC} &= a \\ \overline{PC} &= \overline{PQ} = \overline{QB} = a - b \\ \overline{CQ} &= b - (a - b)\end{aligned}$$



Fonte: Autor, 2025

**Teorema 28.** *O número  $\sqrt[n]{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 2$  é irracional.*

Prova: Essa prova se dará utilizando como base Teorema de Fermat, que afirma que não existem soluções inteiras para equação  $x^n + y^n = z^n$ , se  $n > 2$ . Suponha que  $\sqrt[n]{2} = \frac{a}{b}$ . Para  $n = 2$ , basta verificar o Teorema 27. Se  $n > 2$ , tem-se que:  $\sqrt[n]{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^n}{b^n} \Rightarrow 2b^n = a^n \Rightarrow b^n + b^n = a^n$ . Absurdo, pois pelo Teorema de Fermat não há solução para esta equação, logo  $\sqrt[n]{2}$  é irracional.

**Teorema 29.** *O número  $\sqrt{p}$ , tal que  $p$  é primo é irracional.*

Prova: Essa prova se dará utilizando o Teorema Fundamental da aritmética (TFA) como base. Suponha que  $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ . Então:  $p = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = pb^2$ . Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, podemos decompor  $a$  e  $b$  em fatores primos tais que:  $a = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$  e  $b = b_1 b_2 b_3 \dots b_n$ . Logo  $a^2 = pb^2 \Rightarrow a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots a_n^2 = p b_1^2 b_2^2 b_3^2 \dots b_n^2$ . Absurdo, pois podemos verificar que o fator  $p$  aparece um número par de vezes no lado esquerdo e um número ímpar de vezes no lado direito, o que contradiz o Teorema Fundamental da Aritmética que afirma que um número natural maior que 1 só pode ser decomposto em fatores primos de forma única ao menos da ordenação, logo  $\sqrt{p}$  é irracional.

### 2.3.2 A Irracionalidade de $\pi$

Infelizmente, ainda não existe uma demonstração simples para a irracionalidade de  $\pi$ , de modo que um aluno do ensino médio possa compreendê-la em sua totalidade.

A demonstração de Niven (1947), que será apresentada em sequência, é relativamente simples para um aluno de nível universitário compreendê-la. Envolve alguns conceitos que são vistos nos anos iniciais na maioria das graduações da área de ciências exatas. A demonstração será feita por contradição, supondo de início que  $\pi$  seja um número racional.

**Definição 13.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \quad (4)$$

onde  $n, a$  e  $b$  são inteiros positivos.

Suponha por absurdo que  $\pi = \frac{a}{b}$ . Posteriormente, iremos verificar algumas peculiaridades da função definida pela Equação 4, as quais independem do valor de  $n$ , e que serão mostradas em proposições e no fim, com a intenção de terminar a demonstração, iremos propor um valor adequado para  $n$ .

**Definição 14.** *Seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

$$F(x) = f(x) - f''(x) - \dots + (-1)^n f^{2n}(x) \quad (5)$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 5.** *A função  $f$  se anula nos pontos  $0$  e  $\pi$ , ou seja:  $f(0) = 0$  e  $f(\pi) = 0$ .*

Prova: Para  $x = 0$  a prova é trivial. Para  $x = \pi = \frac{a}{b}$  temos que:

$$f(\pi) = \frac{\pi^n(a - b\pi)^n}{n!} = \frac{\pi^n(a - b\frac{a}{b})^n}{n!} = \frac{\pi^n(a - a)^n}{n!} = 0 \quad (6)$$

**Proposição 6.** *A função  $f(x) > 0$  se  $x \in ]0, \pi[$ .*

Prova: Observe que  $x \in ]0, \pi[ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x^n > 0$

Posteriormente tem-se que,  $x \in ]0, \pi[ \Rightarrow \frac{a}{b} = \pi > x > 0 \Rightarrow a > bx > 0$

$\Rightarrow (a - bx) > 0 \Rightarrow (a - bx)^n > 0$

De acordo com as duas desigualdades e sabendo que  $n! > 0$ , concluímos que:

$$x^n(a - bx)^n > 0 \Rightarrow \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad (7)$$

**Proposição 7.** *Se  $x \in ]0, \pi[$ , tem-se que  $f(x)\text{sen}(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ .*

Prova: Pela hipótese tem-se que  $0 < x < \pi$  então:  $x^n < \pi^n$ . Como  $b > 0$  tem-se que:  $x \in ]0, \pi[ \Rightarrow 0 < bx \Rightarrow a < a + bx \Rightarrow a - bx < a \Rightarrow (a - bx)^n < a^n$ .

Considerando que  $0 < \text{sen}(x) \leq 1$  para todo  $x \in ]0, \pi[$  podemos concluir que:

$$f(x)\text{sen}(x) = \frac{x^n(a - bx)^n\text{sen}(x)}{n!} < \frac{\pi^n a^n 1}{n!} = \frac{\pi^n a^n}{n!} \quad (8)$$

**Proposição 8.** Se  $x \in ]0, \pi[$  tem-se que  $0 < f(x)\text{sen}(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ .

Prova: Pela Proposição 6 e como  $0 < \text{sen}(x) \leq 1$  no intervalo  $]0, \pi[$  podemos concluir que  $f(x)\text{sen}(x) > 0$  e pela desigualdade da Proposição 7 temos que  $0 < f(x)\text{sen}(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ .

**Proposição 9.** Para todo  $x \in \mathbb{R}$  tem-se que  $f(\pi - x) = f(x)$

Prova: Realizando algumas manipulações algébricas, temos que:

$$\begin{aligned}
 f(\pi - x) &= f\left(\frac{a}{b} - x\right) & (9) \\
 f(\pi - x) &= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n (a - b\left(\frac{a}{b} - x\right))^n}{n!} \\
 f(\pi - x) &= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n (a - a + bx)^n}{n!} \\
 f(\pi - x) &= \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n b^n x^n}{n!} \\
 f(\pi - x) &= \frac{\left(\left(\frac{a}{b} - x\right)b\right)^n x^n}{n!} \\
 f(\pi - x) &= \frac{(a - bx)^n x^n}{n!} \\
 f(\pi - x) &= f(x)
 \end{aligned}$$

**Proposição 10.**  $F(0) \in \mathbb{Z}$ .

Prova: Pela Equação 5 tem-se que:  $F(0) = f(0) - f''(0) - \dots + (-1)^n f^{2n}(0)$ . Assim, se  $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$  para todo  $k \in \mathbb{N} \Rightarrow F(0) \in \mathbb{Z}$ .

- Se  $k < n$ ,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{c_0}{n!}x^n + \frac{c_1}{n!}x^{n+1} + \dots + \frac{c_n}{n!}x^{2n} \\
 f^{(k)}(x) &= C_0x^{n-k} + C_1x^{n+1-k} + \dots + C_nx^{2n-k},
 \end{aligned}$$

onde  $C_i = \frac{c_i}{n!} \prod_{j=1}^k (n + i + 1 - j)$  para  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Logo  $f^{(k)}(0) = C_0 0^{n-k} + C_1 0^{n+1-k} + \dots + C_n 0^{2n-k} = 0$ .

Portanto, se  $k < n \Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$ .

- Se  $n \leq k \leq 2n$ ,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{c_0}{n!}x^n + \frac{c_1}{n!}x^{n+1} + \dots + \frac{c_n}{n!}x^{2n} \\
f^{(k)}(x) &= 0 + 0 + \dots + \frac{c_k}{n!}k! + \frac{c_k}{n!}(k+1)!x + \dots \\
f^{(k)}(0) &= \frac{c_k}{n!}k!
\end{aligned}$$

Portanto, se  $n \leq k \leq 2n \Rightarrow f^{(k)}(0) = \frac{c_k}{n!}k! \in \mathbb{Z}$

- Se  $k > 2n$ ,

Uma vez que o grau de  $f(x)$  é  $2n$ , é simples concluir que  $f^{(k)}(x) = 0$ . Portanto, se  $k > 2n \Rightarrow f^{(k)}(x) = 0 \in \mathbb{Z}$ .

Concluindo:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } k < n, \\ \frac{c_k}{n!}k!, & \text{se } n \leq k \leq 2n, \\ 0, & \text{se } n > 2k. \end{cases} \quad (10)$$

Em todos os casos  $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$  e pela Equação 5 e pela Proposição 5 temos que  $F(0) \in \mathbb{Z}$ , o que conclui a prova.

**Proposição 11.**  $F(\pi) \in \mathbb{Z}$ .

Prova: Pela Equação 5 tem-se que:  $F(\pi) = f(\pi) - f''(\pi) - \dots + (-1)^n f^{2n}(\pi)$ . Assim, se  $f^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$  para todo  $k \in \mathbb{N} \Rightarrow F(\pi) \in \mathbb{Z}$ . Pela Proposição 9 e pela regra da cadeia tem-se que:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x). \quad (11)$$

Substituindo  $x$  por  $\pi$  na Equação 11, tem-se que:

$$f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(0). \quad (12)$$

Pela Equação 12 e e como  $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ , tem-se que:  $f^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim  $F(\pi) \in \mathbb{Z}$ .

**Proposição 12.**  $F(x) + F''(x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Prova: Pela Equação 5 :

$$\begin{aligned}
F''(x) &= f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \dots + (-1)^{(n)} f^{(2n)}(x) \\
F(x) &= f(x) - (f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \dots + (-1)^{(n)} f^{(2n)}(x)) \Rightarrow \\
F(x) &= f(x) - F''(x) \\
F(x) + F''(x) &= f(x). \quad (13)
\end{aligned}$$

**Proposição 13.** A diferença  $F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\text{cos}(x)$  é uma primitiva de  $f(x)\text{sen}(x)$ .

Prova: Será demonstrada que  $F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\text{cos}(x)$  é uma função cuja derivada é  $f(x)\text{sen}(x)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\text{cos}(x)] &= F''(x)\text{sen}(x) + F'(x)\text{cos}(x) - F'(x)\text{cos}(x) + F(x)\text{sen}(x) \\ \frac{d}{dx}[F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\text{cos}(x)] &= F''(x)\text{sen}(x) + F(x)\text{sen}(x) = (F''(x) + F(x))\text{sen}(x) \\ \frac{d}{dx}[F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\text{cos}(x)] &= f(x)\text{sen}(x)\end{aligned}$$

**Proposição 14.**  $\int_0^\pi f(x)\text{sen}(x) = F(\pi) + F(0)$ .

Prova: Pela Proposição 13 tem-se que:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\text{sen}(x) &= F'(x)\text{sen}(x) - F(x)\text{cos}(x) \\ \int_0^\pi f(x)\text{sen}(x) &= (0 + F(\pi)) - (0 - F(0)) \\ \int_0^\pi f(x)\text{sen}(x) &= F(\pi) + F(0).\end{aligned}$$

O que encerra a prova.

**Proposição 15.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \frac{\pi^n a^n}{n!} = 0$ .

Prova: Seja  $a_n = \pi \frac{\pi^n a^n}{n!}$  e considere a série  $\sum_{n=1}^\infty a_n$ . Pelo teste da razão,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \frac{\pi^{n+1} a^{n+1}}{(n+1)!}}{\pi \frac{\pi^n a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi a}{n+1} = 0 < 1$ . Portanto, a série  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  é convergente, implicando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \frac{\pi^n a^n}{n!} = 0$ . Então, podemos afirmar que existe um  $n_0 \in \mathbb{Z}$  suficientemente grande tal que  $\pi \frac{\pi^{n_0} a^{n_0}}{n_0!} < 1$ .

**Teorema 30.** (NIVEN, 1947). O número  $\pi$  é irracional.

Prova: Pela Proposição 8:  $0 < f(x)\text{sen}(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$ . Integrando os membros:

$$0 < \int_0^\pi f(x)\text{sen}(x) < \pi \frac{\pi^n a^n}{n!} \quad (14)$$

Agora, de acordo com a Proposição 15, podemos escolher um  $n_0 \in \mathbb{Z}$  suficientemente grande tal que:  $\pi \frac{\pi^{n_0} a^{n_0}}{n_0!}$  seja menor que 1.

$$0 < \int_0^\pi f(x)\text{sen}(x) < \pi \frac{\pi^{n_0} a^{n_0}}{n_0!} < 1 \quad (15)$$

o que contradiz a Proposição 14, pois  $F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}$ , mas não existe inteiro entre 0 e 1, portanto,  $\pi$  é irracional.

Figura 9 - Publicação Original de Ivan Niven

### A SIMPLE PROOF THAT $\pi$ IS IRRATIONAL

IVAN NIVEN

Let  $\pi = a/b$ , the quotient of positive integers. We define the polynomials

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!},$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

the positive integer  $n$  being specified later. Since  $n!f(x)$  has integral coefficients and terms in  $x$  of degree not less than  $n$ ,  $f(x)$  and its derivatives  $f^{(j)}(x)$  have integral values for  $x=0$ ; also for  $x=\pi=a/b$ , since  $f(x)=f(a/b-x)$ . By elementary calculus we have

$$\frac{d}{dx} \{F'(x) \sin x - F(x) \cos x\} = F''(x) \sin x + F(x) \sin x = f(x) \sin x$$

and

$$(1) \quad \int_0^\pi f(x) \sin x dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0).$$

Now  $F(\pi) + F(0)$  is an *integer*, since  $f^{(j)}(\pi)$  and  $f^{(j)}(0)$  are integers. But for  $0 < x < \pi$ ,

$$0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

so that the integral in (1) is *positive, but arbitrarily small* for  $n$  sufficiently large. Thus (1) is false, and so is our assumption that  $\pi$  is rational.

PURDUE UNIVERSITY

---

Received by the editors November 26, 1946, and, in revised form, December 20, 1946.

### 2.3.3 A Irrracionalidade de $e$

O número  $e$  surgiu na matemática pela primeira vez no início do século *XVIII*, na amplitude de problemas envolvendo juros compostos. Neste contexto, o número  $e$  é definido conforme equação abaixo:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (16)$$

Por outro lado, o número  $e$  também pode ser definido através da série de Taylor abaixo:

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \quad (17)$$

Diferentemente da demonstração da irracionalidade de  $\pi$  vista anteriormente, onde é exigido maior conteúdo teórico para compreendê-la, a demonstração da irracionalidade de  $e$  é relativamente simples para que um aluno do ensino médio possa compreendê-la na íntegra, é baseada na definição do número  $e$  referente a Equação 17 e tem como referência (RUDIN, 1976). Novamente, se utiliza a técnica de demonstração por redução ao absurdo na qual se supõe como hipótese que  $e$  seja racional.

**Teorema 31.** *O número  $e$  é irracional.*

Prova: Suponha por absurdo que  $e = \frac{p}{q}$  tais que  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $q \neq 0$

$$e = \frac{p}{q} = \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) + \frac{1}{(q+1)!} + \dots \Rightarrow$$

$$0 < \frac{p}{q} - \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \dots = \sum_{i=q+1}^{+\infty} \frac{1}{i!}$$

como:

$$\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \dots = \frac{1}{q!} \left( \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots \right)$$

e:

$$0 < q+1 < q+2 < q+3 < \dots \Rightarrow \frac{1}{q+1} > \frac{1}{q+2} > \frac{1}{q+3} > \dots$$

então:

$$\frac{1}{(q+1)^2} > \frac{1}{(q+1)(q+2)}, \quad \frac{1}{(q+1)^3} > \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} \dots$$

logo:

$$0 < \frac{1}{q!} \left( \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots \right) \\ < \frac{1}{q!} \left( \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots \right)$$

mas:  $\left\{ \frac{1}{q+1}, \frac{1}{(q+1)^2}, \frac{1}{(q+1)^3}, \dots \right\}$  é uma Progressão Geométrica infinita de razão  $\frac{1}{q+1}$  cuja soma vale  $\frac{1}{q}$ . daí, tem-se que:

$$0 < \frac{p}{q} - \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \dots < \frac{1}{q!} \frac{1}{q} \Rightarrow \\ 0 < \frac{p}{q} - \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) < \frac{1}{q!} \frac{1}{q} \Rightarrow \\ 0 < q! \left( \frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{q!} \right) < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Analisando a conclusão acima, podemos observar que  $q \mid q!$ ,  $1 \mid q!$  e  $\forall j \leq q \Rightarrow j! \mid q!$ , logo o absurdo se dá pois  $q! \left( \frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{q!} \right)$  deve ser inteiro, mas não existe número inteiro entre 0 e 1, portanto  $e$  é irracional.

## 2.4 A Transcendência do Número $e$

Nesta seção será apresentada a demonstração da transcendência do número  $e$ . O primeiro matemático a demonstrar a transcendência de  $e$  foi o francês Charles Hermite em 1873 e após esse fato tal demonstração sofreu algumas simplificações.

A demonstração foi efetuada pelo matemático alemão Adolf Hurwitz em 1893, e tem como referência (FIGUEIREDO, 2011, p. 41-45). A técnica utilizada na demonstração é a de redução ao absurdo, onde temos como hipótese o fato de  $e$  ser algébrico. Para compreendê-la de forma efetiva bastam apenas alguns conhecimentos elementares de Cálculo tais como: limite, derivada e continuidade.

A demonstração será dividida em várias definições e proposições com intuito de facilitar o entendimento.

A principal argumentação, partindo do princípio que  $e$  seja algébrico, é demonstrar que para um determinado polinômio  $P$  escolhido, haverá um número inteiro não divisível por um número primo  $p$  e, simultaneamente, este número inteiro deverá ser menor que 1 em valor absoluto, acarretando num absurdo.

**Definição 15.** *Seja  $P(x)$  um polinômio de grau  $r$  e  $F(x)$  uma função tal que:*

$$F(x) = P(x) + P'(x) \dots + P^r(x) \tag{18}$$

onde  $P^{(r)}$  é a derivada de ordem  $r$  em  $P$ .

**Definição 16.** Seja  $h(x)$  uma função definida por:

$$h(x) = e^{-x}F(x) \quad (19)$$

**Proposição 16.**  $h'(x) = -e^{-x}P(x)$ .

Prova: Aplicando a regra da derivada do produto, tem-se que:  $h'(x) = (e^{-x}F(x))' = (e^{-x})'F(x) + F'(x)e^{-x} = -e^{-x}F(x) + F'(x)e^{-x} = -e^{-x}(F(x) - F'(x)) = -e^{-x}P(x)$ , o que conclui a prova.

**Proposição 17.**  $F(k) - e^kF(0) = -ke^k(1-\theta_k)P(k\theta_k)$ , para todo  $k > 0$  e  $0 < \theta_k < 1$ .

Prova: Como  $h(x)$  é diferenciável por hipótese, então podemos aplicar o Teorema do Valor Médio no intervalo  $[0, k]$  e como  $0 < \theta_k < 1$ , tem se que:

$$\begin{aligned} h'(0 + \theta_k(k - 0)) &= \frac{h(k) - h(0)}{k - 0} \\ h'(\theta_k k) &= \frac{h(k) - h(0)}{k - 0} \end{aligned} \quad (20)$$

Utilizando a Definição 16 e a Proposição 16 e substituindo na Equação 20, tem-se que:

$$-e^{-\theta_k k}P(\theta_k k) = \frac{e^{-k}F(k) - F(0)}{k} \Rightarrow -ke^{-\theta_k k}P(\theta_k k) = e^{-k}F(k) - F(0)$$

Multiplicando ambos os termos por  $e^k$ , tem-se que:

$$e^k[-ke^{-\theta_k k}P(\theta_k k)] = [e^{-k}F(k) - F(0)]e^k \Rightarrow -ke^{(1-\theta_k)k}P(\theta_k k) = F(k) - e^kF(0) \quad (21)$$

o que conclui a prova.

**Definição 17.** Seja  $\epsilon_k$  tal que:

$$\epsilon_k = -ke^{(1-\theta_k)k}P(\theta_k k) \quad (22)$$

**Teorema 32.** O número  $e$  é transcendente.

Prova: Suponhamos por absurdo que  $e$  seja algébrico, decorrente da Definição 9 tem-se que existem inteiros  $c_0, c_1, \dots, c_n$  tais que:

$$c_n e^n + \dots + c_2 e^2 + c_1 e + c_0 = 0 \quad (23)$$

Suponha, sem perda de generalidade que  $c_0 > 0$ . A seguir, serão apresentadas algumas definições e proposições:

**Proposição 18.**  $c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) = c_1 \epsilon_1 + \dots + c_n \epsilon_n$

Prova: De fato, pela Definição 17 e pela Equação 21 tem-se que:

$$F(k) - e^k F(0) = -k e^{(1-\theta_k)k} P(\theta_k k) = \epsilon_k$$

Multiplicando ambos os lados por  $c_k$

$$c_k [F(k) - e^k F(0)] = c_k \epsilon_k$$

Variando  $k = 1, \dots, n$ .

$$(c_1 F(1) + c_2 F(2) + \dots + c_n F(n)) - F(0) (c_1 e + c_2 e^2 + \dots + c_n e^n) = c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2 + \dots + c_n \epsilon_n$$

Pela Equação 23 implica que  $c_n e^n + \dots + c_2 e^2 + c_1 e = -c_0$ , Logo:

$$\begin{aligned} c_1 F(1) + c_2 F(2) + \dots + c_n F(n) + F(0) c_0 &= c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2 + \dots + c_n \epsilon_n \\ c_0 F(0) + c_1 F(1) + c_2 F(2) + \dots + c_n F(n) &= c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2 + \dots + c_n \epsilon_n \end{aligned} \quad (24)$$

o que conclui a prova.

**Definição 18.** Definimos o polinômio  $P(x)$  na forma:

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \dots (n-x)^p \quad (25)$$

sendo  $p$  primo e  $p > n$  e  $p > c_0$ .

**Proposição 19.** Seja  $Q(x) = \sum_{j=0}^r a_j x^j$  um polinômio com coeficientes inteiros, e seja  $p < r$ , então:

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^r \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}, \quad i \leq r \quad (26)$$

Prova: A prova será efetuada por indução.

Para  $i = 1$  tem-se que  $(Q(x))' = (\sum_{j=0}^r a_j x^j)' = \sum_{j=1}^r j a_j x^{j-1} = \sum_{j=1}^r \frac{j!}{(j-1)!} a_j x^{j-1} = Q^{(1)}(x)$ .

Passo indutivo: Supondo verdade para  $i = k$ , ou seja,  $Q^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^r \frac{j!}{(j-k)!} a_j x^{j-k}$ , provaremos que  $Q^{(k+1)}(x) = \sum_{j=k+1}^r \frac{j!}{(j-(k+1))!} a_j x^{j-(k+1)}$  também é válida.

$Q^{(k+1)}(x) = (Q^{(k)}(x))' = (\sum_{j=k}^r \frac{j!}{(j-k)!} a_j x^{j-k})' = (\frac{k!}{(k-k)!} a_k x^{k-k} + \frac{(k+1)!}{((k+1)-k)!} a_{k+1} x^{(k+1)-k} + \dots + \frac{r!}{(r-k)!} a_r x^{r-k})' = (k+1-k) \frac{(k+1)!}{((k+1)-k)!} a_{k+1} x^{(k+1)-k-1} + \dots + (r-k) \frac{r!}{(r-k)!} a_r x^{r-k-1} = \frac{(k+1)!}{((k+1)-(k+1))!} a_{k+1} x^{(k+1)-(k+1)} + \dots + \frac{r!}{(r-(k+1))!} a_r x^{r-(k+1)} = \sum_{j=k+1}^r \frac{j!}{(j-(k+1))!} a_j x^{j-(k+1)}$ , o que conclui a prova.

**Proposição 20.**  $\frac{1}{(p-1)!} Q^{(i)}(x)$ , para  $i \geq p$  é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por  $p$ .

Prova:  $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{j=1}^r \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i} = \sum_{j=1}^r \frac{1}{(p-1)!} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}$ . Podemos perceber que cada coeficiente do polinômio é da forma  $b_j = \frac{1}{(p-1)!} \frac{j!}{(j-i)!} a_j$ . Queremos mostrar que todo  $b_j \in \mathbb{Z}$  e é divisível por  $p$ . Note que  $j \geq i \geq p \Rightarrow j! \geq p!$ . Como  $a_j \in \mathbb{Z}$ , basta provar que  $\frac{1}{(p-1)!} \frac{j!}{(j-i)!} \in \mathbb{Z}$  e divisível por  $p$ . Segue que  $\frac{1}{(p-1)!} \frac{j!}{(j-i)!} = \frac{p}{p!} \frac{j(j-1)(j-2)\dots(p+1)p!}{(j-i)!} = \frac{j(j-1)(j-2)\dots(p+1)p}{(j-i)!}$ , que é um inteiro, o que conclui a prova.

**Proposição 21.**  $P(x)$  definido pela Equação 25 pode ser escrito na forma:

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!} x^p + \dots \quad (27)$$

Prova: Seja  $P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \dots (n-x)^p$ . Define-se  $g(x) = (1-x)(2-x) \dots (n-x)$ . Segue que  $g(x)$  é um polinômio da forma  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + n!$ . Portanto,  $[g(x)]^p = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + n!)^p$  que resultará em outro polinômio da forma  $b_{np} x^{np} + b_{n-1} x^{np-1} + \dots + b_1 x + (n!)^p$ . Logo,  $P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} [g(x)]^p = \frac{b_{np}}{(p-1)!} x^{np+p-1} + \dots + \frac{b_1}{(p-1)!} x^p + \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1}$ . Assim, tem-se que  $P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!} x^p + \dots$ , o que conclui a prova.

**Proposição 22.**  $P^{(i)}(k) = 0$ ;  $k = 1, \dots, n$ ;  $i < p$ .

Prova: Pela Equação 25, podemos perceber que  $1, 2, \dots, n$  são raízes de  $P(x)$  de multiplicidade  $p$  e também são raízes das derivadas de ordens menores que  $p$ . Logo  $P^{(i)}(k) = 0$ ;  $k = 1, \dots, n$ ;  $i < p$ .

**Proposição 23.**  $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$  e  $P^{(i)}(0)$ ,  $i < p-1$ .

Prova: Seja  $P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!} x^p + \dots$ . Segue que  $P^{(p-1)}(x) = (n!)^p + b_1 p x + \dots$ . Note que  $(n!)^p$  é única parcela sem a variável  $x$ . Dá fazendo  $x = 0$  tem-se que  $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ , o que conclui a primeira parte da prova. Entretanto se  $i < p-1$ , todos os termos de  $P^{(i)}(x)$  terão a variável  $x$ , logo fazendo  $x = 0$ , tem-se que  $P^{(i)}(0) = 0$ ;  $i < p-1$ , o que conclui a segunda parte da prova.

**Proposição 24.** Seja  $F(x)$  definida pela Equação 18, então  $F(k)$  é um inteiro divisível por  $p$ , para  $k = 1, \dots, n$ .

Prova: Seja  $F(k) = P(k) + P'(k) + P''(k) + \dots + P^{(p-1)}(k) + P^p(k) + \dots + P^r(k)$ . Pela Proposição 22, temos que para todo  $k = 1, \dots, n$  e  $i < p$  tem-se que  $P^{(i)}(k) = 0$ , implicando que  $F(k) = 0$ . Segue que pela Proposição 20 temos que  $P^{(i)}(k)$  é divisível por  $p$ , para todo  $i \geq p$ , logo  $F(k)$  é divisível por  $p$ .

**Proposição 25.** Seja  $F(x)$  definida pela Equação 18, então  $F(0)$  é um inteiro não divisível por  $p$ .

Prova: Seja  $F(0) = P(0) + P'(0) + P''(0) + \dots + P^{(p-1)}(0) + P^p(0) + \dots + P^r(0)$ . Pela Proposição 23 tem-se que  $P^{(i)}(0)$ ,  $i < p - 1$  e  $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ , os demais termos ( $i \geq p$ ) por terem parcela com a variável  $x$  também irão se anular, pois  $x = 0$  logo tem-se que  $F(0) = (n!)^p$ . Como  $p > n$  e  $p$  é primo, logo implica que  $p \nmid n! \Rightarrow p \nmid (n!)^p$ , o que conclui a prova.

**Proposição 26.** *Sejam  $a, b$  inteiros e  $p$  primo, se  $p \nmid a$  e  $p \mid b$  então  $p \nmid a + b$ .*

Prova: Se  $p \nmid a$ , então existe  $0 < r < p$  tal que  $a \equiv r \pmod{p}$ . Como  $p \mid b$ , então  $b \equiv 0 \pmod{p}$ . Então tem-se que  $a + 0 \equiv r \pmod{p} \Rightarrow a + b \equiv r \pmod{p}$ , logo  $p \nmid a + b$ .

**Proposição 27.**  *$c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n)$  é um inteiro não divisível por  $p$ .*

Prova: Pela Proposição 24, tem-se que  $p \mid F(k)$  para todo  $k = 1, \dots, n$ . Segue daí que  $p \mid c_kF(k)$  para todo  $k = 1, \dots, n$ , logo  $p \mid (c_1F(1) + \dots + c_nF(n))$ . Note que pela Proposição 25  $p \nmid F(0)$ . Como  $p > c_0$  e  $p$  é primo então  $p \nmid c_0F(0)$  e pela Proposição 26  $p \nmid (c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n))$ .

**Proposição 28.** *Seja  $\epsilon_k$  definido pela Definição 17, então  $|\epsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$ , para  $k \leq n$ .*

Prova: Seja  $\epsilon_k = -ke^{(1-\theta_k)k}P(\theta_k k)$ , tal que  $0 < \theta_k < 1$  e  $k \leq n$ . Segue que  $\epsilon_k = -ke^{(1-\theta_k)k} \frac{1}{(p-1)!} (\theta_k k)^{p-1} (1 - \theta_k k)^p (2 - \theta_k k)^p \dots (n - \theta_k k)^p$ . Daí cabem as seguintes observações:

- $(1 - \theta_k)k \leq n$ ;
- $k(\theta_k k)^{p-1} \leq n^p$ ;
- $(1 - \theta_k k)^p (2 - \theta_k k)^p \dots (n - \theta_k k)^p \leq 1^p \cdot 2^p \cdot \dots \cdot n^p = (n!)^p$ .

Logo,  $|\epsilon_k| = ke^{(1-\theta_k)k} \frac{1}{(p-1)!} (\theta_k k)^{p-1} (1 - \theta_k k)^p (2 - \theta_k k)^p \dots (n - \theta_k k)^p \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} \Rightarrow$

$$|\epsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} \quad (28)$$

O que conclui a prova.

**Proposição 29.** *Seja  $p$  um primo suficientemente grande, então  $|c_1\epsilon_1 + \dots + c_n\epsilon_n| < 1$ .*

Prova: Usaremos os seguintes argumentos:

- $|\epsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$  conforme Equação 28.
- $\lim_{p \rightarrow \infty} |\epsilon_k| \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} = e^n \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(nn!)^p}{(p-1)!} = 0$

- Em particular, podemos escolher um  $p$  suficientemente grande que para  $k = 1, \dots, n$  tem-se que  $|c_k \epsilon_k| < \frac{1}{n}$ .

Daí segue que,  $|c_1 \epsilon_1 + \dots + c_n \epsilon_n| \leq |c_1 \epsilon_1| + \dots + |c_n \epsilon_n| < \overbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}^{n \text{ vezes}} = \frac{n}{n} = 1$ . Logo

$$|c_1 \epsilon_1 + \dots + c_n \epsilon_n| < 1 \quad (29)$$

A partir das ideias anteriores, podemos concluir a demonstração da transcendência do número  $e$ . Resumindo:

- A Proposição 18 implica que  $c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) = c_1 \epsilon_1 + \dots + c_n \epsilon_n$ .
- A Proposição 27 implica que  $p$  não divide  $c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n)$ .
- A Proposição 29 implica que  $|c_1 \epsilon_1 + \dots + c_n \epsilon_n| < 1$ .

Ou seja, pela Equação 24 da Proposição 18 tem-se que do lado esquerdo da igualdade temos um número inteiro não divisível por  $p$  e, simultaneamente, pelo lado direito da igualdade este inteiro tem que ser menor que 1, ou seja, zero. Mas isso é impossível, acarretando num absurdo. O absurdo surge a partir da premissa adotada de que  $e$  seja algébrico. Logo, podemos concluir que  $e$  é transcendente.

A seguir, será iniciada uma seção para abordar a investigação matemática em sala de aula, ressaltando sua importância no processo de desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos e para a construção das duas atividades pedagógicas.

## 2.5 Investigação na Sala de Aula

Segundo Brasil (2018), uma das competências específicas relacionadas ao ensino médio envolve habilidades que facilitam a interpretação e compreensão da realidade pelos estudantes. Nesse sentido, o desenvolvimento de habilidades cognitivas importantes tais como a capacidade de abstração e o raciocínio lógico são essenciais.

Entretanto, há várias dificuldades e desafios significativos a serem superados. Um dos principais é tornar o conteúdo acessível e relevante para os alunos, especialmente aqueles que possuem certas dificuldades em compreender conceitos abstratos. Para lidar e ajudar a superar esta dificuldade, é preciso adotar abordagens que conectem a matemática ao mundo real, mostrando suas aplicações práticas e incentivando a investigação, a descoberta e a exploração de diversos conceitos matemáticos.

Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. Henri Poincaré, um dos grandes matemáticos do início do século XX, deixou-nos uma interessante descrição desse processo. Começou por tentar demonstrar a impossibilidade de existência de funções com certo tipo de características. Acabou por provar precisamente o contrário. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019, p. 10)

Outro aspecto de grande relevância que é importante salientar, é o papel do professor durante o processo investigativo. Cabe ao professor propor aulas exploratórias e investigativas com intuito de auxiliar o aluno para que este se sinta motivado, estimulado e capaz de enfrentar os desafios inerentes que possam surgir a todo momento. Assim, o aluno poderá refletir e estar apto a criar suas próprias conjecturas provendo auxílio no desenvolvimento de suas habilidades cognitivas e na construção do conhecimento.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), a investigação matemática ocorre nos momentos descritos conforme a Tabela 3, na qual a interação entre os matemáticos somente é obrigatória na parte final, com objetivo de divulgação ou confirmação dos resultados junto a comunidade matemática.

Tabela 3 - Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 16)

O fato da matemática em si ser interconectada e não uma ciência de conceitos isolados ressalta mais ainda a importância do processo investigativo. Neste contexto, Roque (2012) cita as diferentes técnicas utilizadas no Egito e Mesopotâmia para, por exemplo, efetuar a operação de multiplicação, sendo que as necessidades que motivaram os desenvolvimentos dos números e a realização de cálculos eram praticamente semelhantes.

Se as necessidades cotidianas que levaram à investigação das técnicas de cálculo e das propriedades dos números eram semelhantes nos dois contextos, por que métodos distintos foram criados? Vimos que uma mesma conta era realizada de modos diferentes, podendo ser considerada difícil em um caso sem que no outro fosse. (ROQUE, 2012, p. 82)

A importância do processo investigativo no ensino da matemática também pode ser verificada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) tanto para o ensino fundamental quanto para o ensino médio. Há várias referências neste sentido. Segundo Silva e Costa (2016), nos PCN são indicados objetivos que trazem a tona a importância do aspecto instrumental da matemática, para que o aluno possa compreender o mundo ao seu redor fomentando o interesse a curiosidade, o estímulo a descoberta de estratégias, a investigação de hipóteses e o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas.

Ao solucionar problemas por meio da investigação, os alunos são estimulados a formular conexões, testar hipóteses e testar soluções de uma maneira lógica e coerente, ao invés de apenas memorizar fórmulas, tendo como consequência uma solidez na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Portanto, tais argumentos expostos enfatizam a importância do processo investigativo na construção do conhecimento matemático. Tal abordagem em sala de aula é fundamental para que a matemática não seja vista e entendida como uma disciplina chata e tediosa, mas sim ao contrário, como uma disciplina interessante, instigante e motivadora que visa o ensino de conteúdos de extrema relevância em que o aluno utilizará em toda sua vida acadêmica e profissional.

### 3 CONSTRUÇÃO DAS ATIVIDADES

Neste capítulo são propostas duas atividades, levando-se em conta as etapas investigativas propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) e descritas na Tabela 3, com intuito de fornecer ao professor ferramentas adequadas para a discussão em sala de aula dos conceitos abordados neste trabalho, de modo que seja possível abordar o fato de o conjunto dos números transcendentos não ser enumerável.

Tais atividades são indicadas para alunos do ensino médio. Segundo Brasil (2018), nesta etapa há o desenvolvimento de competências específicas voltadas à investigação, que possibilitam aos alunos a observações de padrões e formulação de conjecturas.

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 540)

Sugere-se também uma discussão ativa em sala de aula e que cada atividade tenha, no mínimo, uma aula com sessenta minutos de duração.

#### 3.1 Atividade 1: Existem mais números Irracionais ou Racionais?

Esta atividade tem como objetivo principal mostrar ao aluno que existem mais números irracionais do que racionais na reta real, se atentando ao fato de que o conjunto números racionais  $\mathbb{Q}$  é denso e infinito.

1. Nesta primeira etapa da atividade serão introduzidos os conceitos do que é um número racional e o que é um número irracional, com intuito de estimular a curiosidade dos alunos por meio de formulações. Uma possível exploração é iniciar a atividade com uma pergunta instigante: “Será que existem mais números racionais ou mais números irracionais?”, para que posteriormente sejam apresentadas formalmente as definições dos dois conjuntos numéricos em questão: os racionais, que podem ser representados por frações (por exemplo,  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ ) e os irracionais que não admitem este tipo de representação (por exemplo:  $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ ). A partir deste ponto, pode ser estimulada uma discussão inicial que aborde os conhecimentos previamente adquiridos pelos alunos sobre estes conjuntos e uma breve reflexão sobre dízimas, representação decimal e infinita de um número real utilizando como base

as seguintes afirmações <sup>5</sup>:

- (a) Os números racionais sempre obedecem a um mesmo padrão, ou seja, podem ser representados por uma dízima;
  - (b) Os números racionais são aqueles que possuem representação decimal finita ou periódica;
  - (c) Todo número com representação decimal finita também pode ser escrito na forma de dízima periódica infinita;
  - (d) Os números irracionais não possuem representação decimal periódica.
2. Na segunda etapa, o intuito é que e os alunos sejam estimulados a formular hipóteses sobre a quantidade de números racionais e irracionais que eles previamente conhecem, trazendo esta informação como base pra que seja possível formulações de conjecturas. É interessante e oportuno utilizar o fato de que os números racionais estão presentes em praticamente tudo na nossa vida e no nosso cotidiano. O que este fato significa? Pode-se iniciar uma discussão neste contexto e também sobre as afirmações com intuito meramente exemplificativo:
- (a) “Será que pelo fato de que os números racionais são infinitos, portanto, existem em maior quantidade?”
  - (b) “Será que pelo fato de que o números irracionais são infinitos, portanto, existem em maior quantidade?”
  - (c) “Será que pelo fato de que os números racionais são mais fáceis de representar e definidos por possuírem uma propriedade, então talvez possam existir em maior quantidade?”
  - (d) “Será que pelo fato de que os números racionais serem mais conhecidos e utilizados no nosso cotidiano, então talvez possam existir em maior quantidade?”
3. Nesta terceira etapa o intuito é que sejam realizados algumas comparações entre os números racionais e irracionais explorando os tipos de representações possíveis para estes números. Vamos explorar o fato de que um número real admite representação decimal infinita, que pode ser feita de uma maneira simples acrescentando uma infinidade de zeros a partir do último dígito de um determinado número. Porém, existe uma outra forma de representar uma fração decimal finita em uma infinita como visto em (MARQUES, 2020):

---

<sup>5</sup> Para uma explicação detalhada das afirmações, sugere-se a leitura de (NIVEN, 1947)[p.25-44].

$$\frac{1}{3} = 0,3333333 \dots \quad (30)$$

Onde o algarismo 3 após a vírgula aparece infinita vezes. Tal fração também pode ser representada pela igualdade:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots \quad (31)$$

Neste caso, a dízima infinita representa a fração ordinária do número. Se multiplicarmos a igualdade da Equação 31 por 3, obtemos a igualdade a seguir:

$$1 = 0,999999 \dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots \quad (32)$$

“Para um número ser racional deve haver uma coincidência pelo fato de sempre ter que existir uma repetição de um bloco de dígitos.”(MARQUES, 2020, p. 53). Ainda sobre Marques (2020), se considerarmos a dízima  $0,111\dots$ , e seja  $p_1$  a probabilidade do segundo dígito 1 ser igual ao primeiro, então  $p_1 = \frac{1}{10}$  já que teríamos dez escolhas possíveis de algarismos e  $p_2$  a probabilidade do terceiro dígito ser igual ao segundo também é  $\frac{1}{10}$  então, pelo princípio multiplicativo a probabilidade do segundo e terceiro dígitos serem iguais é  $p_1.p_2 = \frac{1}{10^2}$ , sendo assim  $p_n = \frac{1}{10^n}$  onde  $n$  representa a quantidade de dígitos repetidos em sequência. Observe que esta probabilidade tende a zero quando  $n$  cresce.

Considere os exemplos abaixo onde  $p$  representa a probabilidade de repetição dos dígitos.

$$\begin{aligned}
 0,111111 &= \textcircled{0,1} \underbrace{\textcircled{1} \dots \textcircled{1}}_{5 \text{ vezes}} \Rightarrow p = \frac{1}{10^5} \\
 0,4999999999 &= \textcircled{0,4} \underbrace{\textcircled{9} \dots \textcircled{9}}_{10 \text{ vezes}} \Rightarrow p = \frac{1}{10^{10}} \\
 0,777777777777777 &= \textcircled{0,7} \underbrace{\textcircled{7} \dots \textcircled{7}}_{15 \text{ vezes}} \Rightarrow p = \frac{1}{10^{15}} \\
 0,\underbrace{333333 \dots 3}_{n+1 \text{ vezes}} &= \textcircled{0,3} \underbrace{\textcircled{3} \dots \textcircled{3}}_{n \text{ vezes}} \Rightarrow p = \frac{1}{10^n}
 \end{aligned}$$

Observe também que se o número racional possui  $k$  blocos de dígitos repetidos então a probabilidade  $p_n = \frac{1}{10^{kn}}$  fazendo com que esta seja extremamente pequena quando a quantidade de dígitos  $n$  aumenta.

$$0,42424242 = \underbrace{\left( 0,42 \right) \left( 42 \right) \dots \left( 42 \right)}_{3 \text{ vezes}} \Rightarrow p = \frac{1}{10^{2 \times 3}}$$

Portanto, um fato relevante que pode ser discutido em sala de aula é o que acontece quando se tem uma repetição grande de dígitos, levando-se em consideração o fato de que para cada dígito existem dez possibilidades de escolha. Um possível questionamento que pode ser dirigido aos alunos é: “O que esse tipo de representação decimal significa no contexto dos números racionais e irracionais?” É interessante estimulá-los a observar que os racionais podem ter uma expansão decimal finita ou periódica, enquanto os irracionais têm uma expansão decimal infinita e não periódica.

“O que seria mais provável de acontecer numa escolha de um número qualquer na reta real?”

Após essa exploração e realizações dos testes, pode-se pedir que os alunos reformulem suas conjecturas sob a ótica da nova informação. Deixe claro que, embora ambos os conjuntos (racionais e irracionais) sejam infinitos, a quantidade de números irracionais na reta real é “maior”, fato que pode parecer bastante intrigante levando-se em consideração que quase não os usamos no nosso dia a dia.

- Esta etapa da atividade tem como objetivo justificar as conclusões com base nos testes realizados na etapa anterior e avaliar a compreensão dos alunos. Aqui o professor pode apresentar os argumentos apresentados ao longo deste trabalho, utilizando os conceitos de cardinalidade, para explicar aos alunos de uma maneira mais formal o fato de que, apesar de ambos os conjuntos serem infinitos, os racionais são enumeráveis e os irracionais não. Neste momento, uma avaliação pode ser realizada por meio de discussões com os alunos em sala de aula, observando a coerência das conjecturas formuladas anteriormente, a correta compreensão da representação infinita dos números decimais e a clareza das conclusões obtidas.

### 3.2 Atividade 2: Introduzir a ideia de que o conjunto $\mathbb{T}$ é não enumerável.

Esta atividade tem como objetivo principal, utilizando os argumentos apresentados ao longo deste trabalho, introduzir a ideia de que o conjunto  $\mathbb{T}$  é não enumerável.

1. Nesta primeira etapa da atividade deverão ser introduzidos os conceitos do que é um número transcendente, o que é um número algébrico, além de argumentar que os números reais podem ser definidos pela união do conjunto dos números algébricos com o conjunto dos números transcendentos ( $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{T}$ ). Uma possibilidade de exploração inicial é discutir tais conceitos destacando o fato de que os números reais podem ser divididos entre essas duas categorias de números, gerando os possíveis questionamentos:
  - (a) Qual a relação entre os números algébricos, números transcendentos e números reais?
  - (b) Alguém conhece algum número que seja raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros?
  - (c) Alguém conhece algum número que não seja raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros? Como seria este número?
  
2. Na segunda etapa os alunos devem ser instigados a formularem conjecturas sobre a não enumerabilidade dos números transcendentos estimulando um pensamento sobre a natureza desses números, levando os alunos a refletirem sobre se é possível listar todos eles. Aqui pode ser feito um paralelo com os números racionais e utilizar o fato de que os números reais não são enumeráveis. A sugestão é criar uma discussão com os alunos sobre a ideia de é ou não possível criar uma lista com todos os elementos dos conjuntos:
  - (a) Podemos criar uma lista e preencher toda essa lista com os números reais?
  - (b) Podemos criar uma lista e preencher toda essa lista com os números algébricos?
  - (c) Podemos criar uma lista e preencher toda essa lista com os números transcendentos?
  
3. Nesta etapa o professor deverá mostrar intuitivamente, que é impossível criar uma lista completa com todos os números reais, tendo com consequência a sua não enumerabilidade:
  - (a) Utilize como base o argumento de Cantor demonstrado no Teorema 23.
  - (b) Pergunte aos alunos se é possível utilizar o mesmo argumento para os números transcendentos.

(c) Cite alguns exemplos de números algébricos e enfatize como eles podem ser obtidos, conforme sugestão:

- i.  $\sqrt{2}$  pode ser obtido a partir da equação  $x^2 - 2 = 0$ ;
- ii. 0 pode ser obtido a partir da equação  $x = 0$ ;
- iii.  $\frac{1}{2}$  pode ser obtido a partir da equação  $2x - 1 = 0$ ;
- iv. Utilize a Tabela 4 como referência, para obtenção de números algébricos;

Tabela 4 - Exemplos de obtenção de números algébricos

Equações	Números algébricos obtidos
$x = 0, x - 1 = 0, x + 1 = 0$	$0, 1, -1$
$x - 2 = 0, x + 2 = 0, x - 3 = 0$	$2, -2, 3$
$5x + 1 = 0, 2x + 3 = 0, 2x - 3 = 0$	$-\frac{1}{5}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
$x^2 - 2 = 0, x^2 - 3 = 0, x^2 - 5 = 0$	$\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}$

Fonte: Autor, 2025

- v. Generalize que qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ , pode ser obtido a partir da equação  $x - k = 0$ ;
  - vi. Generalize que qualquer  $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}$ , pode ser obtido a partir da equação  $qx - p = 0$ ;
- (d) Utilize como base a Definição 12, que introduz a ideia de altura de um polinômio e desenvolva este conceito com alguns polinômios de grau um e dois, tendo como referência a Tabela 5;

Tabela 5 - Exemplos de alturas de polinômios de grau um e dois

Altura	Polinômios
2	$x$
3	$x^2, 2x, x + 1, x - 1$
4	$x^2 + 1, x^2 - 1, 3x,$ $2x + 1, 2x - 1, x + 2, x - 2$
5	$x^2 - 2, x^2 + 2, 2x + 2, 4x$ $3x + 1, 3x - 1, x + 3, x - 3$

Fonte: Autor, 2025

- (e) Introduza a ideia da construção do conjunto  $\overline{\mathbb{Q}}$ , a partir da união dos conjuntos de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas e utilize como base o Teorema 25, para mostrar que  $\overline{\mathbb{Q}}$  é enumerável;
- (f) Conclua utilizando como base o Teorema 26, para mostrar de forma indireta que  $\mathbb{T}$  é não enumerável.

4. Agora peça para que os alunos justifiquem suas conclusões com base no que foi discutido nas etapas anteriores. Faça com que eles reflitam sobre a ideia de que, enquanto os números algébricos são enumeráveis, os números transcendentess, como parte dos números reais, não podem ser enumerados. Sugere-se que seja iniciada uma discussão sobre o fato de que a união de um conjunto enumerável com um conjunto não enumerável resulta em um conjunto não enumerável, que foi um dos argumentos utilizados para mostrar a não enumerabilidade de  $\mathbb{T}$ . Também, nesta etapa, uma possível forma de avaliação é observar, por meio de discussões em sala de aula, a participação dos alunos nas formulações de conjecturas realizadas anteriormente, o correto entendimento do argumento de Cantor, a capacidade de identificar corretamente os números algébricos e transcendentess, e distinguir tais números, resultando, por fim, na compreensão da não enumerabilidade de  $\mathbb{T}$ .

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao decorrer deste trabalho foi mostrada a enumerabilidade dos números inteiros e racionais e a não enumerabilidade dos números irracionais e reais para que posteriormente pudesse ser afirmada e demonstrada a não enumerabilidade dos números transcendentos. Também foram apresentadas algumas demonstrações sobre irracionalidades, destacando-se as irracionalidades dos números  $\pi$  e  $e$  e o fato interessante de que o número  $e$ , além de ser irracional também é transcendente.

Pode parecer não ser razoável o fato de que os números que mais utilizamos no nosso dia a dia, seja para execução de tarefas rotineiras como efetuar uma simples compra, uma medição qualquer ou para uma representar uma certa quantidade assim quanto para verificar a hora do dia, pertença a conjuntos e numeráveis. Adicionalmente, estes números representam uma pequena quantidade de todos os números que existem.

De uma certa forma, mesmo que não seja usada no nosso cotidiano, a descoberta dos números irracionais foi um grande avanço teórico, tais números simplificam nossas tarefas, sejam na resolução de problemas geométricos ou na construção civil em geral, em cálculos computacionais ou financeiros e também nos ajudam a entender melhor o mundo em que vivemos. Eles preenchem as lacunas existentes no conjunto dos números racionais e, por consequência, nos permitem estudar, por exemplo, os conceitos de limites, continuidade, derivadas, integrais e assim por diante. Nada disso seria possível sem a existência dos números irracionais e como consequência, os números reais.

Já os números transcendentos, nos revelam a beleza, a grandeza e uma certa complexidade da matemática. O fato demonstrado de que este conjunto não ser enumerável assim como os irracionais e também dos números reais é de fato um pouco intrigante, visto que até o presente momento, tratando-se no aspecto quantitativo, conhecemos muito poucos destes números.

Também foi mostrado neste trabalho que os números transcendentos são caracterizados por uma propriedade que eles próprios não possuem, ou seja, não serem raízes de nenhum polinômio de coeficientes inteiros. Além disso, é importante salientar que quase todos os números reais são irracionais, e que no mesmo contexto também é possível afirmar que quase todos os números reais são transcendentos já que ambos não são enumeráveis. Esta relação intrínseca entre os números irracionais e transcendentos de existirem em maioria, é um fato ainda pouco estudado e pode ser usada como motivação para demais pesquisas na área, já que dentre os números transcendentos pouquíssimos são conhecidos, podendo-se destacar o número  $\pi$  e o número  $e$ .

Ainda pode-se destacar que o fato da transcendência ser um assunto complexo e relativamente novo e que isto não afasta a sua importância e sim nos enriquece e nos faz refletir como a matemática pode ser interessante, apesar dos poucos avanços obti-

dos na área, tais como muitos aspectos destes números ainda não serem completamente explorados e compreendidos.

Sob o aspecto pedagógico, foram propostas duas atividades levando-se em consideração a investigação em sala de aula e suas etapas. A primeira com o enfoque em fazer o aluno compreender de uma forma intuitiva e utilizando conceitos matemáticos que a maioria dos números reais são irracionais e a segunda atividade utilizando os argumentos demonstrados no decorrer deste trabalho para fornecer ao professor ferramentas que mostrem aos alunos a ideia da não enumerabilidade dos números transcendententes.

Portanto, o objetivo geral de apresentar a característica de não enumerabilidade dos números transcendententes foi alcançado e abordado de maneira objetiva, explicando de maneira bastante detalhada desde o conceito inicial de cardinalidade, a demonstração da sua não enumerabilidade e como esses números estão inseridos no conjunto dos números reais.

Como dificuldades enfrentadas, ressalta-se o fato de que os números transcendententes ainda serem poucos estudados, da enorme contradição de que apesar deste conjunto não ser enumerável, existem muito poucos números transcendententes conhecidos e o fato da cardinalidade de conjuntos numéricos exigir uma certa complexidade conceitual para ser abordada e explorada.

Como desdobramentos futuros, têm-se a aplicação dessas duas atividades em sala de aula, gerando dados para análise, tanto da perspectiva do professor que as media, como dos aprendizes. Espera-se também que o professor de matemática do ensino básico sintase motivado em abordar tais assuntos sobre uma nova perspectiva, tratando o conceito de irracionalidade com um outro enfoque e introduzindo o conceito de transcendência, destacando a sua importância e ressaltando o fato destes números existirem em maioria em contraste de serem poucos utilizados no nosso cotidiano.

## REFERÊNCIAS

- AVILA, G. *Análise Matemática para Licenciatura*. São Paulo: Blucher, 2006.
- BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. Roberto Câmara de. *Matemática Completa 1*. São Paulo: FTD, 2016.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
- DANTE, L. R. *Matemática Contexto & Aplicações*. São Paulo: Ática, 2016.
- FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- FONSECA, J. J. S.; MORAES, A. M. d. *Metodologia da Pesquisa Científica*. Sobral: INTA, 2002.
- GASPAR, J. Direct proof of the uncountability of the transcendental numbers. *The American Mathematical Monthly (AMM)*, v. 1, p. 78–80, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.121.01.080>>.
- GIL, A. C. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. São Paulo: Atlas, 2002.
- GIL, A. C. *Métodos e Técnicas de Pesquisas Social*. São Paulo: Atlas, 2008.
- IEZZI, G. et al. *Matemática ciência e aplicações*. São Paulo: Saraiva, 2016.
- MARQUES, D. *Teoria dos Números Transcendentes*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- MARQUES, D. *Números Transcendentes: Uma Introdução Quase Informal*. [S.l.: s.n.], 2020.
- MIGUEL, A. *Três Estudos sobre História e Educação Matemática*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.1993.69654>>.
- MODERNA, E. *Conexões com a Matemática*. São Paulo: Moderna, 2016.
- NIVEN, I. A simple proof that  $\pi$  is irrational. *Bulletin of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 53, n. 6, p. 509, 1947.
- NIVEN, I. *Números: Racionais e Irracionais*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- PAIVA, M. *Matemática Paiva - Volume 1*. São Paulo: Moderna Plus, 2010.
- PAZ, M. L. d. et al. Concepções de números irracionais na perspectiva da aprendizagem significativa. *Em Teia / Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 12, n. 1, maio 2021.
- PONTE, J. P. d.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.
- ROQUE, T. *História da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. USA: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1976.

SANTOS, E. E. d. *O Infinito de Georg Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 05 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2008.425138>>.

SILVA, D. K.; COSTA, D. A. d. Ensino investigativo e inovações curriculares. *Encontro Nacional de Educação matemática*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

## APÊNDICE A – Primeira Atividade Proposta ao Professor

### A.1 Atividade 1

**OBJETIVOS DA ATIVIDADE:** Atividade proposta para que o aluno consiga compreender que existem mais números irracionais que racionais na reta real.

**PÚBLICO ALVO:** Alunos do 1º ao 3º ano do ensino médio.

**DURAÇÃO DA ATIVIDADE:** 60 minutos.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

**PROCEDIMENTO E METODOLOGIA:**

- Na primeira etapa da atividade o professor deverá representar os números racionais na forma decimal, ou seja, o aluno deverá compreender que um número racional pode ser representado como dízima periódica infinita.

- Que todos os números irracionais são decimais não periódicos.

Por exemplo:

O número racional  $2,58585858$  onde os algarismos, 5 e 8 se repetem indefinidamente será representado na forma  $2,\overline{58}$ .

- Uma outra representação decimal de números racionais são para números decimais finitos, ou seja, tome como exemplo o número decimal finito  $0,37$  que será representado como  $0,3699999\dots$  onde o algarismo 9 será repetido indefinidamente. Utilize também o fato de acrescentar um bloco infinito de zeros num número decimal finito, como por exemplo:  $7,2 = 7,20000\dots$

- Aborde a igualdade:  $1 = 0,9999\dots$

- O professor poderá fornecer vários exemplos como os citados acima.

Por fim, agora, considere a escolha aleatória de um número na reta real.

Note e enfatize ao aluno que existem dez opções de escolha cada vez que se acrescenta um dígito no número.

- Explore o fato que para um número ser racional, deve existir uma coincidência muito grande que é a repetição de um bloco de dígitos;
- Perceba de forma intuitiva que as escolhas são mais restritas para um número ser racional;

- Sabendo que a probabilidade de escolha para cada dígito é  $\frac{1}{10}$ , utilize o princípio multiplicativo para mostrar que a probabilidade de repetição em  $n$  dígitos é  $\frac{1}{10^n}$  e que se há um bloco de repetição de tamanho “ $k$ ” então a probabilidade será de  $\frac{1}{10^{kn}}$ ;
- Faça o aluno perceber de forma intuitiva que esse valor tende a zero para valores muito grandes de “ $n$ ”.

**Conclusão:** Perceba de forma intuitiva através do processo acima, que é muito improvável que as repetições aconteçam a medida que “ $n$ ” cresça. Esses casos “improváveis” são os números racionais e os “prováveis” são os irracionais.

## APÊNDICE B – Segunda Atividade Proposta ao Professor

### B.1 Atividade 2

**OBJETIVOS DA ATIVIDADE:** Atividade proposta para que o professor consiga propor a ideia da não enumerabilidade dos números transcendententes.

**PÚBLICO ALVO:** Alunos do 1º ao 3º ano do ensino médio.

**DURAÇÃO DA ATIVIDADE:** 60 minutos.

**ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Individual.

#### **PROCEDIMENTO E METODOLOGIA:**

- Na primeira etapa da atividade o professor deverá introduzir o conceito do que é um número transcendente e de que esta categoria de números está inserida nos números reais. Inicie uma discussão perguntando se alguém conhece algum número que possa ser expresso como não sendo uma raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros. Trabalhe com polinômios de graus um e dois e encontre suas raízes. O que acontece com os números  $\pi$  e  $e$ ? É possível encontrar algum polinômio de cujo esses números sejam raízes?

- Introduza a ideia de altura de um polinômio e mostre que os números algébricos são enumeráveis.

- Utilize o argumento de Cantor para mostrar a não enumerabilidade dos números reais.

- Nesta etapa mostre indiretamente que o conjunto dos números transcendententes não são enumeráveis. Para isto utilize as três afirmações a seguir:

1. A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável;
2. O conjunto dos números reais não é enumerável;
3. O conjunto dos números algébricos são enumeráveis.

**Conclusão:** Conclua, a partir desses itens expostos acima, se os números transcendententes fossem enumeráveis, então os transcendententes juntos com os algébricos seriam enumeráveis (itens 1 e 3). Mas a união dos transcendententes com os algébricos são justamente os números reais, que são não enumeráveis, o que geraria uma contradição, portanto os números transcendententes não são enumeráveis.