Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação e Humanidades
Faculdade de Formação de Professores

André da Costa Passos

PRODUTO EDUCACIONAL: UM ESTUDO SOBRE A CARDINALIDADE DOS NÚMEROS TRANSCENDENTES

Rio de Janeiro
2025

ATIVIDADE 1

OBJETIVOS DA ATIVIDADE: Atividade proposta para que o aluno consiga compreender que existem mais números irracionais que racionais na reta real.

PÚBLICO ALVO: Alunos do 1° ao 3° ano do ensino médio.

DURAÇÃO DA ATIVIDADE: 60 minutos.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

PROCEDIMENTO E METODOLOGIA:

- Na primeira etapa da atividade o professor deverá representar os números racionais na forma decimal , ou seja, o aluno deverá compreender que um número racional pode ser representado como dízima periódica infinita.

- Que todos os números irracionais são decimais não periódicos.

Por exemplo:

O número racional $2,58585858$ onde os algarismos, 5 e 8 se repetem indefinidamente será representado na forma $2,\overline{58}$.

- Uma outra representação decimal de números racionais são para números decimais finitos, ou seja, tome como exemplo o número decimal finito 0,37 que será representado como $0,3699999\ldots$ onde o algarismo 9 será repetido indefinidamente. Utilize também o fato de acrescentar um bloco infinito de zeros num número decimal finito, como por exemplo: 7,2= 7,20000....

- Aborde a igualdade: $1 = 0,9999\ldots$.

- O professor poderá fornecer vários exemplos como os citados acima.

Por fim, agora, considere a escolha aleatória de um número na reta real.

Note e enfatize ao aluno que existem dez opções de escolha cada vez que se acrescenta um dígito no número.

- Explore o fato que para um número ser racional, deve existir uma coincidência muito grande que é a repetição de um bloco de dígitos;

- Perceba de forma intuitiva que as escolhas são mais restritas para um número ser racional;

- Sabendo que a probabilidade de escolha para cada dígito é $\frac{1}{10}$, utilize o princípio multiplicativo para mostrar que a probabilidade de repetição em n dígitos é $\frac{1}{10^n}$ e que se há um bloco de repetição de tamanho "k" então a probabilidade será de $\frac{1}{10^{kn}}$;
- Faça o aluno perceber de forma intuitiva que esse valor tende a zero para valores muito grandes de "n".

Conclusão: Perceba de forma intuitiva através do processo acima, que é muito improvável que as repetições aconteçam a medida que "n" cresça. Esses casos "improváveis" são os números racionais e os "prováveis" são os irracionais.

ATIVIDADE 2

OBJETIVOS DA ATIVIDADE: Atividade proposta para que o professor consiga propor a ideia da não enumerabilidade dos números transcendentes.

PÚBLICO ALVO: Alunos do 1° ao 3° ano do ensino médio.

DURAÇÃO DA ATIVIDADE: 60 minutos.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

PROCEDIMENTO E METODOLOGIA:

- Na primeira etapa da atividade o professor deverá introduzir o conceito do que é um número transcendente e de que esta categoria de números está inserida nos números reais. Inicie uma discussão perguntando se alguém conhece algum número que possa ser expresso como não sendo uma raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros. Trabalhe com polinômios de graus um e dois e encontre suas raízes. O que acontece com os números π e e? É possível encontrar algum polinômio de cujo esses números sejam raízes?

- Introduza a ideia de altura de um polinômio e mostre que os números algébricos são enumeráveis.

- Utilize o argumento de Cantor para mostrar a não enumerabilidade dos números reais.

- Nesta etapa mostre indiretamente que o conjunto dos números transcendentes não são enumeráveis. Para isto utilize as três afirmações a seguir:

1. A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável;
2. O conjunto dos números reais não é enumerável;
3. O conjunto dos números algébricos são enumeráveis.

Conclusão: Conclua, a partir desses itens expostos acima, se os números transcendentes fossem enumeráveis, então os transcendentes juntos com os algébricos seriam enumeráveis (itens 1 e 3). Mas a união dos transcendentes com os algébricos são justamente os números reais, que são não enumeráveis, o que geraria uma contradição, portanto os números transcendentes não são enumeráveis.