



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

Fábio Vinicius Gouvêa Moura

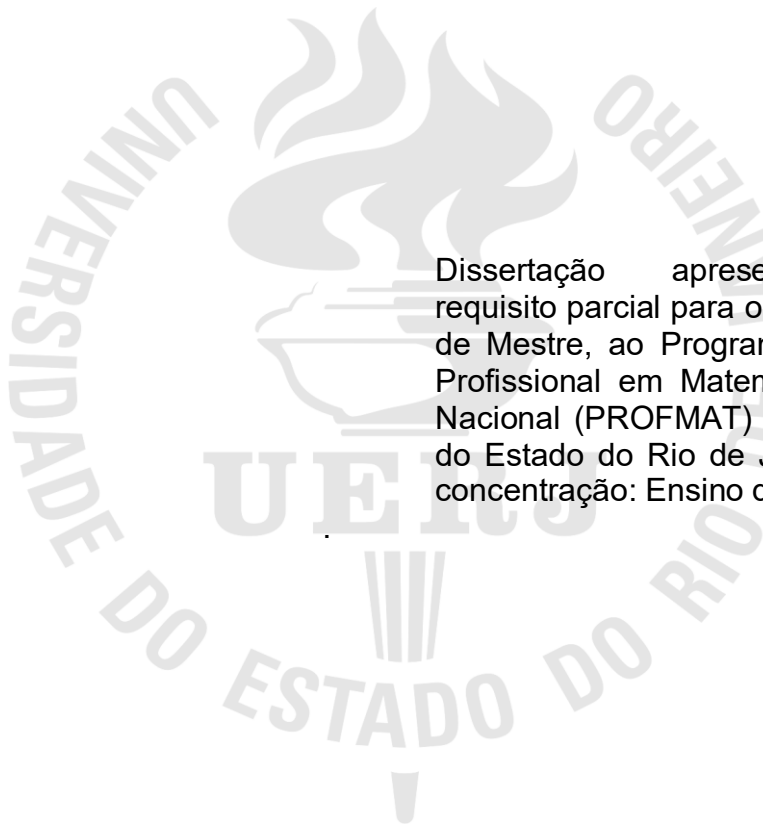
**Desenvolvendo uma Mentalidade Matemática por meio de uma
Abordagem Problematizada no ensino de Áreas Geométricas**

São Gonçalo

2025

Fábio Vinicius Gouvea Moura

**Desenvolvendo uma Mentalidade Matemática por meio de uma Abordagem
Problematizada no Ensino de Áreas Geométricas**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dra. Priscila Cardoso Petito

Coorientador: Prof. Dr. Fábio Menezes da Silva

São Gonçalo

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CEH/D

M929 Moura, Fábio Vinicius Gouvêa.
TESE Desenvolvendo uma mentalidade matemática por meio de uma
abordagem problematizada no ensino de áreas geométricas / Fábio
Vinicius Gouvêa Moura. – 2025.
216f. : il.

Orientadora: Profª. Dra. Priscila Cardoso Petito.
Coorientador: Prof. Dr. Fábio Menezes da Silva
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
Faculdade de Formação de Professores.

1. Geometria - Teses. 2. Aprendizagem ativa – Teses. 3.
Pesquisa-ação em educação - Teses. 4. Matemática - Estudo e
ensino – Teses. 5. Matemática (Ensino fundamental) – Teses. I. Petito,
Priscila Cardoso. II. Silva, Fábio Menezes da. III. Universidade do
Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores.
III. Título.

CRB7 – 5190

CDU 514

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Fábio Vinícius Gouvêa Moura

**Desenvolvendo uma Mentalidade Matemática por meio de uma Abordagem
Problematizada no ensino de Áreas Geométricas**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 16 de junho de 2025.

Banca Examinadora:

Prof^a. Dra. Priscila Cardoso Petito (Orientadora)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof. Dr. Fábio Menezes da Silva (Coorientador)
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dra. Marcele Câmara de Souza
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Prof. Dr. Diego Matos Pinto
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

São Gonçalo

2025

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos alunos que dele participaram, cuja colaboração foi imprescindível para sua existência. Dedico também aos alunos com quem já trabalhei, pois este trabalho reflete o carinho e a dedicação que sempre tive por eles. Por fim, dedico aos alunos com quem trabalharei no futuro, pois nossa busca incessante por conhecimento, formação e aperfeiçoamento visa sempre oferecer a eles a melhor aula possível.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Sony Alves Gouvêa, exemplo de amor, força e humanidade. Uma mulher que sempre acreditou em mim, mesmo quando eu duvidava de mim mesmo, e que me ensinou que estudar é essencial para compreender o mundo, enxergar as mudanças de que ele precisa e entender o nosso papel nesse processo.

À minha irmã, Michele Gouvêa, a primeira da família a concluir o ensino superior. Professora de História, inspiração constante em minha trajetória. Uma pessoa em quem sempre me espelhei e cujos passos tive orgulho de seguir.

À minha companheira, Monike Alves Gouvêa, que sempre me motivou, acreditou em mim, estudou ao meu lado e esteve presente em diversas etapas da minha vida, formação e na construção deste trabalho. Não há como mensurar o quanto sua presença foi essencial em todo esse percurso.

À minha orientadora, Professora Doutora Priscila Cardoso Petito, a quem sou profundamente grato desde os tempos da graduação, pela dedicação, pelo carinho constante com os alunos e pelo exemplo inspirador que representa.

Ao meu orientador, Professor Doutor Fábio Menezes da Silva, por quem nutro profunda admiração e gratidão. Agradeço por ter acreditado em mim, por me incentivar quanto à minha capacidade de escrita e por me apresentar a novas perspectivas e conhecimentos no campo da Educação Matemática.

A todas as Professoras e a todos os Professores da FFP, que contribuíram para a minha formação e para a de inúmeras outras pessoas, influenciando de maneira positiva a vida de incontáveis indivíduos ao longo de suas trajetórias.

Aos professores que compuseram a banca examinadora pela leitura atenta desta dissertação, pelo tempo dedicado e pelas valiosas contribuições apontadas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, por meio da concessão de bolsa, que foi fundamental para a realização deste mestrado.

As crianças precisam crescer no exercício desta capacidade de pensar, de indagar-se e de indagar, de duvidar, de experimentar hipóteses de ação, de programar e de não apenas seguir os programas a elas, mais do que propostos, impostos.

Paulo Freire (2021, p. 67-68).

RESUMO

MOURA, Fábio Vinicius Gouvêa. **Desenvolvendo uma mentalidade matemática por meio de uma abordagem problematizada no ensino de áreas geométricas**. 2025. 216f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2025.

A motivação para o desenvolvimento deste trabalho surge a partir da vivência do professor-pesquisador no contexto da rede de escolas públicas do município de São Gonçalo. Diante das dificuldades percebidas em relação à aprendizagem dos estudantes e de conversas com colegas de profissão, nas quais ecoava, quase constantemente, a ideia de que "é muito difícil ensinar quem não quer aprender", e a partir do contato com o livro *Mentalidades Matemáticas*, da professora Jo Boaler, no qual se destaca que as melhores oportunidades de aprendizagem surgem quando os estudantes confiam em si mesmos, o professor-pesquisador passa a refletir: será que os estudantes realmente não querem aprender, ou será que a falta de autoconfiança resulta em uma postura desinteressada? Dessa reflexão, delineia-se o objetivo central desta pesquisa: observar como os alunos desenvolvem uma mentalidade matemática de crescimento, tendo como foco a geometria. A metodologia adotada é qualitativa, com inspiração na pesquisa-ação, no estudo de caso e na investigação sobre a própria prática docente. A produção de dados ocorreu por meio de atividades matemáticas exploratórias e investigativas, utilizando materiais manipuláveis e uma abordagem dialógica. Os dados foram coletados por meio de um caderno de atividades, um para cada grupo de estudantes, e pela gravação dos encontros em áudio. A análise dos dados foi conduzida à luz dos conceitos de *Mentalidades Matemáticas*, da *Exploração e Investigação Matemática*, bem como da *Matemática Problematizada*. Como resultado, foi possível observar mudanças significativas na forma como os estudantes se relacionavam com a matemática, na maneira como passaram a reinterpretar conceitos, criar e verificar hipóteses, além da ampliação de sua visão matemática, ao trabalharem com conceitos em diferentes campos. Ademais, notou-se uma transformação nas relações interpessoais no espaço de aprendizagem, bem como uma melhora na autoestima dos educandos. Acrescentamos que a pesquisa realizada resultou em uma sequência didática como produto educacional, intitulada *Problematizando o ensino de áreas – criando sentidos e conexões entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria*. Esse material apresenta as atividades desenvolvidas durante nossa intervenção, além de sugerir outras problematizações que poderiam ter sido propostas aos educandos. A sequência didática tem como objetivo servir de ponto de partida para que outros docentes planejem e coloquem em prática aulas de Matemática voltadas ao desenvolvimento de uma mentalidade de crescimento e ao engajamento ativo dos estudantes no processo de aprendizagem.

Palavras-chave: laboratório de ensino de matemática; matemática problematizada; investigação matemática; geometria; ensino fundamental.

ABSTRACT

MOURA, Fábio Vinicius Gouvêa. **Developing a mathematical mindset through a problematized approach to teaching geometric areas.** 2025. 216f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2025.

The motivation for the development of this work arises from the teacher-researcher's experience within the public school network of the municipality of São Gonçalo. Faced with the difficulties observed in students' learning and through conversations with fellow educators – where the idea that "it's very hard to teach someone who doesn't want to learn" was frequently echoed – and after coming into contact with the book *Mathematical Mindsets* by Professor Jo Boaler, which emphasizes that the best learning opportunities arise when students believe in themselves, the teacher-researcher began to reflect: do students truly not want to learn, or does a lack of self-confidence result in a seemingly disinterested attitude? From this reflection, the central objective of this research was defined: to observe how students develop a mathematical growth mindset, with a focus on geometry. The adopted methodology is qualitative, drawing inspiration from action research, case study, and investigation of one's own teaching practice. Data production took place through exploratory and investigative mathematical activities, using manipulatives and a dialogical approach. Data were collected through an activity notebook – one for each student group – and through audio recordings of the sessions. The data analysis was guided by the concepts of Mathematical Mindsets, Mathematical Exploration and Investigation, as well as Problem-Based Mathematics. As a result, it was possible to observe significant changes in the way students engaged with mathematics, including how they began to reinterpret concepts, formulate and test hypotheses, and expand their mathematical understanding by working with concepts across different domains. Additionally, a transformation in interpersonal relationships within the learning environment was observed, along with an improvement in students' self-esteem. It is worth noting that this research resulted in an educational product: a didactic sequence titled *Problematizing the Teaching of Area – Creating Meaning and Connections between Arithmetic, Algebra, and Geometry*. This material presents the activities developed during our intervention and also suggests other problematizations that could have been proposed to students. The didactic sequence aims to serve as a starting point for other teachers to plan and implement mathematics lessons focused on the development of a growth mindset and the active engagement of students in the learning process.

Keywords: mathematics teaching laboratory; problem-based mathematics; mathematical investigation; geometry; elementary school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Triângulo ilustrativo referente	14
Quadro 1 –	Momentos na realização de uma investigação	31
Figura 2 –	Relação entre diversos tipos de tarefas	32
Figura 3 –	Barras de papel	49
Figura 4 –	Registro em quadro sobre retas	53
Figura 5 –	Registro em quadro sobre semirretas	54
Figura 6 –	Registro em quadro sobre semirretas	54
Figura 7 –	Registro em quadro sobre semirretas e segmentos de retas	58
Figura 8 –	Soma	59
Figura 9 –	Questionamento sobre a soma	60
Figura 10 –	Subtração	61
Figura 11 –	Segmentos de reta particionados	64
Figura 12 –	Registro em quadro sobre multiplicação 1	65
Figura 13 –	Registro em quadro sobre multiplicação 2	66
Figura 14 –	Registro em quadro sobre multiplicação 3	67
Figura 15 –	Multiplicação de segmentos de reta	68
Figura 16 –	Retângulos articulados 1	69
Figura 17 –	Retângulos articulados 2	70
Figura 18 –	Áreas e figuras geométricas para medição	71
Figura 19 –	Medindo áreas	74
Figura 20 –	Retângulos em papel cartão	76
Figura 21 –	Comparações com justificativas do grupo G	78
Figura 22 –	Comparações com justificativas do grupo J	79
Figura 23 –	Comparações com justificativas do grupo H	80
Figura 24 –	Comparações com justificativas do grupo B	81
Figura 25 –	Polígonos em papel cartão	83
Figura 26 –	Retângulo em papel cartão	85
Figura 27 –	Paralelogramo em papel cartão	85

Figura 28 –	Losango em papel cartão	86
Figura 29 –	Triangulo em papel cartão	86
Figura 30 –	Trapézio em papel cartão 1	87
Figura 31 –	Trapézio em papel cartão 2	88
Figura 32 –	Trapézio retângulo em desenho	89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FFP	Faculdade de Formação de Professores
LEM	Laboratório de Educação Matemática
NRE	Negatividade Relacionada ao Erro
PE	Potencial de Erro
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	REFERENCIAL TEÓRICO	17
1.1	Mentalidades (Mindset)	17
1.2	O cérebro e o aprendizagem matemática	19
1.3	O poder dos erros e das dificuldades	23
1.4	O desenvolvimento de uma Mentalidade Matemática	26
1.5	Investigação Matemática	30
1.6	Laboratório de Ensino de Matemática	33
1.7	Matemática Problematicada	37
1.8	Matemática e Equidade	41
2	METODOLOGIA DE PESQUISA	43
3	PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS	47
3.1	Primeiro encontro	49
3.2	Segundo encontro	63
3.3	Terceiro encontro	71
3.4	Quarto encontro	76
3.5	Análise dos Dados	91
4	PRODUTO EDUCACIONAL	105
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	106
	REFERÊNCIAS	111
	APÊNDICE A – Explorando a adição, a subtração e a ordenação no campo da geometria com segmentos de reta	114
	APÊNDICE B – Explorando a multiplicação no campo da geometria com segmentos de reta	120
	APÊNDICE C – Explorando a ideia de medir áreas com diferentes formatos	127
	APÊNDICE D – Comparados áreas de polígonos	136
	APÊNDICE E – Produto Educacional	146
	ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA O RESPONSÁVEL LEGAL DE PARTICIPANTE MENOR DE 18 ANOS	214

INTRODUÇÃO

Esta introdução apresenta um panorama que articula aspectos das trajetórias pessoal, profissional e acadêmica do autor, os quais foram determinantes para a escolha e o aprofundamento do tema da pesquisa. A escolha por iniciar esta comunicação com esses itinerários tem como objetivo delinear o lugar de fala do pesquisador e evidenciar seu comprometimento com o tema, destacando como suas inquietações derivam de suas experiências. Além disso, são apresentados apontamentos para uma discussão teórica que fundamentará as análises do objeto de estudo – exploradas de forma mais aprofundada no Capítulo 1 –, com o propósito de construir uma resposta à questão de pesquisa e alcançar os objetivos propostos. Por fim, descrevemos a organização geral do trabalho.

Ressaltamos que, ao relatar questões pessoais e subjetivas do pesquisador, utilizaremos a primeira pessoa do singular em nossa escrita. No entanto, de maneira geral, em se tratando de interpretações teóricas e análises de dados, optamos pela primeira pessoa do plural, considerando que todo trabalho acadêmico é, em essência, uma construção coletiva nesses aspectos. Assim, apresento a seguir as inquietações iniciais do pesquisador que fundamentam este trabalho.

Exerço a profissão de Professor há cerca de dez anos, atuando exclusivamente nos anos finais do Ensino Fundamental, em uma rede pública de educação. Desenvolvo meu trabalho em um bairro de baixa renda, localizado no município de São Gonçalo, uma cidade periférica do estado do Rio de Janeiro. A escola da qual faço parte está inserida em um contexto que, infelizmente, é facilmente associado ao imaginário coletivo quando se fala de instituições situadas em comunidades carentes: enfrentamos sérias limitações estruturais, tanto no entorno quanto no interior da escola. Considerando que os noticiários já realizam ampla cobertura sobre outras dificuldades cotidianas enfrentadas nesses bairros, entendo não ser necessário aprofundar-me nesta temática.

Ao longo de minha trajetória como professor de matemática na Educação Básica, tenho observado diversas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem dessa ciência, especialmente no que diz respeito à construção e compreensão de conceitos, à capacidade de abstração e ao entendimento e uso de determinados algoritmos. Em conversas com colegas que atuam nas etapas iniciais do ensino

fundamental, a impressão predominante é que, no início da vida escolar, os estudantes, em geral, não apresentam dificuldades significativas nem demonstram grande aversão à matemática.

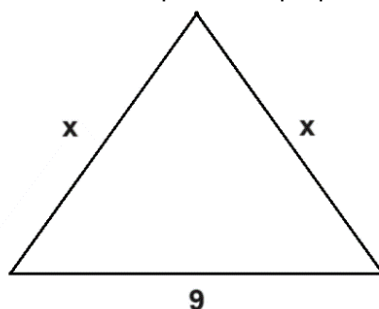
No entanto, à medida que os estudantes avançam no Ensino Fundamental e são desafiados a aplicar os conceitos matemáticos aprendidos, as dúvidas começam a emergir de forma mais evidente. Para mim, essas dificuldades tornam-se particularmente perceptíveis durante o estudo de frações, grandezas e medidas, sistemas de equações, raciocínio lógico e, sobretudo, geometria. Em casos menos frequentes, porém relevantes, observam-se desafios até mesmo com os algoritmos das operações básicas envolvendo números naturais.

Lembro-me de uma aluna do sexto ano, extremamente dedicada, que dominava com perfeição todos os algoritmos das operações básicas. No entanto, ao se deparar com problemas contextualizados que envolviam essas operações e exigiam a escolha de um método para a resolução, ela enfrentava dificuldades em determinar qual algoritmo aplicar. Um exemplo desse tipo de problema é o seguinte: *A escola Santa Helena deseja levar seus 233 alunos e 12 professores à Bienal do Livro. O ônibus a ser contratado para a viagem transporta até 35 pessoas. Quantos ônibus a escola precisará contratar?*

Durante minha experiência lecionando no oitavo ano, recordo-me de alunos que, apesar de demonstrarem facilidade na resolução de equações e na aplicação dos princípios aditivos e multiplicativos, encontravam dificuldades ao relacionar esses conceitos a problemas geométricos. Especificamente, tinham dificuldade em visualizar a questão e estabelecer conexões entre os conceitos matemáticos envolvidos.

Um exemplo marcante foi um exercício sobre a determinação do valor de uma incógnita em função do perímetro de uma figura geométrica. Consideremos o seguinte caso: *sabendo que o perímetro de um triângulo é 35cm, como podemos determinar a equação que representa essa situação e calcular o valor de x ?*

Figura 1 – Triângulo ilustrativo referente ao problema proposto.



Fonte: elaborado pelo autor, 2024

O ensino de Geometria ocupa um lugar de destaque neste trabalho. Essa escolha se justifica não apenas por termos selecionado a Geometria como objeto de conhecimento a ser abordado, mas também pelo fato de, em conversas com os alunos da escola em que atuo, a maioria relatar sentir maior apreensão e dificuldade em relação a esse conteúdo. Além disso, há décadas, discute-se sobre os desafios do ensino dessa área da matemática, e Lorenzato (1995) já alertava para o pouco domínio dos professores nesse campo. Um exemplo marcante encontra-se em uma pesquisa realizada pelo autor no ano de 1993, na qual 255 profissionais foram convidados a responder oito perguntas sobre geometria euclidiana, resultando em 2040 respostas incorretas. Além disso, a geometria escolar frequentemente é apresentada aos alunos como uma disciplina isolada, sem que se explorem as conexões e semelhanças entre ela, a aritmética e a álgebra (Lorenzato, 1995).

Acredito firmemente na importância das disciplinas escolares para a formação integral do indivíduo. Nesse contexto, a Matemática desempenha um papel crucial no desenvolvimento do raciocínio lógico, na percepção geográfica e espacial, e na construção do senso crítico. No entanto, tenho refletido sobre o fato de que oportunidades e sonhos de meus alunos podem ser frustrados pela falta de domínio dos conhecimentos matemáticos durante sua formação escolar.

Buscando aprimorar minha prática profissional e proporcionar uma experiência de aprendizado mais significativa para meus educandos, decidi ingressar no mestrado. Foi nesse percurso acadêmico que tive a oportunidade de explorar o livro *Mentalidades Matemáticas* (Boaler, 2018). Logo nos trechos iniciais, a obra de Boaler proporcionou uma reflexão profunda ao destacar que as melhores oportunidades de aprendizado emergem quando os estudantes têm confiança em si mesmos.

Essa ponderação me levou a considerar uma visão frequentemente expressa por docentes das escolas públicas de minha região: a ideia de que é difícil ensinar a quem não quer aprender. Apesar das complexas questões sociais enfrentadas no cotidiano do Rio de Janeiro, questionei se o problema realmente reside na falta de vontade de aprender ou se, na verdade, é resultado de uma ausência de crença dos alunos em sua própria capacidade de aprender. Se a falta de autoconfiança for, de fato, um dos obstáculos, seria possível ajudar esses alunos a desenvolvê-la?

Sob essa perspectiva, decidi interpretar os comportamentos de meus educandos à luz das Mentalidades Matemáticas propostas por Boaler. Assim, neste trabalho, busca-se aprofundar as questões levantadas por Boaler (2018), que incorpora e explora, no campo da Educação Matemática, dois conceitos fundamentais desenvolvidos por Carol Dweck (2017): a mentalidade fixa e a mentalidade de crescimento. A mentalidade fixa baseia-se na crença de que habilidades e inteligências são inatas e imutáveis. Por outro lado, a mentalidade de crescimento sustenta que habilidades podem ser desenvolvidas por meio de esforço, persistência, interesse e aprendizado contínuo, considerando os erros como parte natural do processo. À vista do exposto, elaboramos atividades voltadas ao ensino de geometria para o oitavo ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de observar como os alunos desenvolvem uma mentalidade matemática de crescimento, tendo como foco a geometria.

Acrescentamos que as atividades realizadas durante a pesquisa, assim como sugestões de explorações que poderiam ter sido desenvolvidas a partir delas, compõem uma sequência didática que constitui o Produto Educacional desta investigação. Essa sequência foi elaborada com o intuito de orientar e inspirar práticas pedagógicas voltadas para o desenvolvimento de uma Mentalidade Matemática de crescimento. Ao reunir essas propostas em um material estruturado, buscamos oferecer aos professores uma ferramenta concreta que dialogue com os desafios cotidianos do ensino de matemática, contribuindo para a construção de um ambiente de aprendizagem mais crítico, investigativo e inclusivo.

Isso posto, a comunicação desta dissertação está estruturada em cinco capítulos principais. No primeiro capítulo, apresentamos o referencial teórico, com destaque para a obra de Boaler (2018) e outros autores cujas ideias contribuem para a compreensão da mentalidade matemática de crescimento e para a reflexão crítica sobre o ensino da matemática. No segundo capítulo, descrevemos a metodologia

utilizada na pesquisa, detalhando o percurso investigativo, os instrumentos adotados e os fundamentos que nortearam a condução das atividades em sala de aula. O terceiro capítulo é dedicado à produção e análise dos dados, em que discutimos os resultados obtidos a partir das experiências vivenciadas com os estudantes. No quarto capítulo abordaremos com mais detalhes a estrutura do Produto Educacional. Por fim, no quinto capítulo, apresentamos as considerações finais, retomando os principais achados da pesquisa, refletindo sobre suas contribuições e apontando possíveis desdobramentos para futuras investigações.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresentaremos as fundamentações teóricas que embasam o desenvolvimento deste trabalho. Nosso objetivo é compreender e explorar as teorias e conceitos que sustentam a pesquisa, construindo um arcabouço que possibilite a análise e interpretação dos resultados obtidos. Assim, buscamos situar este estudo no contexto acadêmico, destacando as concepções de matemática, ensino e escola que orientam nossa investigação.

1.1 Mentalidades (Mindset)

Dweck (2017) afirma que grande parte do que as pessoas acreditam ser intrínseco a suas personalidades, na verdade, provém de mentalidades que são construídas e alimentadas ao longo de suas vidas. Mais ainda, a autora pondera que essas mentalidades, quando estabelecidas de forma tendenciosa para o fixo, acabam por limitar o alcance do nosso potencial humano, seja ele criativo, afetivo ou intelectual.

Há muito se discute sobre as qualidades humanas, questionando se elas podem ser cultivadas ou se são imutáveis. Dweck (2017) defende que nossas crenças influenciam profundamente nossas vidas. Segundo ela, acreditar que inteligência, personalidade e criatividade são passíveis de aprimoramento, em vez de características fixas, pode gerar grandes consequências. Estudos científicos demonstram que o cérebro humano é capaz de se desenvolver e aprender ao longo da vida, permitindo que experiências, treinamentos e esforços modifiquem habilidades e temperamentos.

Assim, a maneira como a vida de um sujeito se desenvolve é amplamente afetada pela forma como ele se percebe, como conclui Dweck (2017). Esse fator pode determinar se a pessoa atingirá seus objetivos, concretizará seus projetos e, até mesmo, desenvolverá conhecimentos e habilidades. Considerando o contexto social em que o indivíduo está inserido, um fator determinante para isso é a mentalidade, que também pode ser um elemento chave para a transformação.

Dweck (2017) define dois tipos de mentalidades: a mentalidade fixa e a mentalidade de crescimento. Segundo a autora, a mentalidade fixa refere-se à crença de que habilidades e inteligências são qualidades inatas e imutáveis. Indivíduos com essa mentalidade acreditam que suas capacidades estão pré-determinadas e que não podem ser significativamente alteradas por meio de esforço ou aprendizado. Essa visão, segundo Dweck, limita o desenvolvimento pessoal e profissional, pois desencoraja o aprendizado contínuo e a capacidade de adaptação.

Por outro lado, a mentalidade de crescimento, conforme descrita por Dweck (2017), é a crença de que habilidades e inteligências podem ser desenvolvidas por meio de esforço, aprendizado e perseverança. Pessoas que adotam essa perspectiva acreditam que, com dedicação e trabalho árduo, podem aprimorar suas capacidades ao longo do tempo.

Segundo a autora, a forma como interpretamos o erro pode determinar não apenas nosso desempenho, mas também nossa capacidade de evoluir ao longo da vida. Enquanto a mentalidade fixa enxerga o erro como uma ameaça à autoimagem, temendo julgamentos, a mentalidade de crescimento o compreende como uma ferramenta essencial para o desenvolvimento. Assim, uma pessoa com mentalidade de crescimento não vê o erro como o limite de sua capacidade, mas como um degrau que constrói a aprendizagem, impulsiona o aprimoramento contínuo e amplia as possibilidades de desenvolvimento pessoal e intelectual.

Com base nessas definições, compreendemos que a mentalidade de crescimento é a convicção de que habilidades e inteligências, inclusive aquelas relacionadas à matemática, podem ser aprimoradas por meio de esforço, estratégias de aprendizagem eficazes e orientação adequada. Em contraste, a mentalidade fixa representa a visão de que essas capacidades são rígidas e inalteráveis, independentemente do esforço empregado em estudo, treino ou desenvolvimento pessoal.

Boaler (2018) adapta esses conceitos para o contexto escolar, fundamentando-se em pesquisas que demonstram sua relevância crítica. A autora enfatiza que essas mentalidades influenciam diretamente os comportamentos de aprendizagem e, conseqüentemente, os resultados alcançados pelos alunos. Segundo Boaler, diversos estudos indicam que, quando o indivíduo muda sua mentalidade e passa a se considerar capaz de aprender em níveis mais altos, ele modifica e fortalece os caminhos que conduzem à aprendizagem.

“Quando os alunos constroem a ideia de que não são aptos para matemática, eles frequentemente mantêm uma relação negativa com ela pelo resto de suas vidas” (Boaler, 2018, p. xiii). Segundo Boaler (2018), essa mentalidade fixa é frequentemente incentivada, e até mesmo criada, por educadores que tratam a matemática como um dom inato, algo que algumas pessoas possuem enquanto outras não, sem possibilidade de transformação.

Essa percepção está profundamente enraizada no inconsciente coletivo, sustentando a ideia de que a matemática é uma ciência rígida, na qual não há espaço para discussão: ou a resposta está certa, ou está errada. No entanto, é justamente nesse ponto que a mudança de abordagem no ensino da matemática deve começar. É essencial valorizar sua natureza criativa e interpretativa, como também destaca Boaler (2018).

A autora reforça que, por ser uma disciplina multidimensional, a matemática exige e promove o desenvolvimento de raciocínio lógico, criatividade, conexões e métodos. Além disso, ela defende que o ensino da matemática deve explorar sua amplitude, incentivando e legitimando as diversas formas pelas quais os alunos podem abordar e resolver problemas. Essa mudança de abordagem, fundamentada nos avanços recentes sobre o funcionamento do cérebro, as mentalidades e os processos de aprendizagem, pode transformar significativamente a trajetória educacional dos estudantes (Boaler, 2018).

Diante disso, torna-se indispensável discutir a relação entre aprendizagem e o funcionamento cerebral, tema que será abordado na próxima subseção.

1.2 O cérebro e o aprendizagem matemática

Na última década, assistimos ao surgimento de tecnologias que proporcionaram aos pesquisadores uma nova perspectiva sobre os mecanismos da mente e do cérebro, como o eletroencefalograma. Hoje os cientistas são capazes de observar a atividade cerebral de crianças e adultos envolvidos em atividades matemáticas, além de investigar o crescimento, a degeneração e os efeitos de diferentes estados emocionais sobre a função cerebral. Anteriormente, acreditava-se

que o cérebro era imutável desde o nascimento. Contudo, essa ideia foi refutada pelos avanços do conhecimento científico (Boaler, 2018).

Atualmente, sabemos que o cérebro possui uma extraordinária capacidade de se organizar e reorganizar, formando novas conexões entre suas células, especialmente os neurônios, ao longo de toda a vida. Esse potencial adaptativo do cérebro é conhecido como neuroplasticidade, conforme definido por Abiola e Dhindsa (2012). Segundo esses autores, a neuroplasticidade é influenciada por diversos fatores, como a fase do ciclo de desenvolvimento, a predisposição genética, o ambiente em que o indivíduo vive e suas próprias ações. Assim, o cérebro se ajusta continuamente para enfrentar os desafios impostos por diferentes estágios da vida e experiências, demonstrando que ele nunca para de mudar.

Com base em vários desses estudos, Boaler (2018) argumenta que, ao aprendermos uma nova ideia, ocorre uma atividade elétrica em nosso cérebro, resultante de sinapses que conectam diferentes áreas cerebrais. Quando a aprendizagem é feita de maneira profunda, isso indica que a atividade sináptica levou à construção de conexões duradouras no cérebro, estabelecendo caminhos estruturais que facilitam o acesso e a retenção do conhecimento.

Outros estudos contribuíram significativamente para a mudança de perspectiva dos cientistas sobre a capacidade e a aprendizagem do cérebro. Dentre eles, Boaler (2018) destaca a pesquisa de Eleonor A. Maguire *et al.* (2006 *apud* Boaler, 2018). Nesse estudo, constatou-se que os motoristas de táxi de Londres possuem um hipocampo maior, especialmente na região posterior, em comparação aos motoristas de ônibus da mesma cidade. Essa diferença deve-se ao fato de o hipocampo ser responsável por processar e utilizar informações espaciais complexas para uma navegação eficiente. Enquanto os motoristas de táxi precisam navegar por toda a cidade de Londres, os motoristas de ônibus seguem um conjunto limitado de rotas predefinidas.

Outro estudo, conduzido por Gaser e Schlaug (2003), comparou músicos profissionais, que dedicavam pelo menos uma hora por dia à prática musical, com músicos amadores e não músicos. Os resultados revelaram que o volume da substância cinzenta (córtex) era maior nos músicos profissionais, intermediário nos músicos amadores e menor nos não músicos, especialmente em áreas cerebrais envolvidas na execução musical, como regiões motoras, áreas parietais anterossuperiores e áreas temporais inferiores. Esses achados indicam que o

cérebro dos músicos também é suscetível a mudanças plásticas em resposta à prática.

Seguindo essa mesma linha, Boaler (2018) apresenta um estudo relevante para o campo da educação. Pesquisadores do *National Institute for Mental Health* realizaram um experimento no qual participantes executaram um exercício diário de 10 minutos ao longo de três semanas. O exercício consistia em repetir duas sequências de movimentos com os dedos, cada uma composta por cinco movimentos seguidos de suas contrapartes invertidas. Os participantes realizavam as sequências sem *feedback* visual, buscando máxima precisão e rapidez. Ao comparar os cérebros dos participantes que realizaram o treinamento com os que não participaram, os resultados revelaram mudanças estruturais significativas no cérebro.

Surpreendentemente, apenas alguns minutos diários de exercício mental por 15 dias úteis foram suficientes para reprogramar e promover o crescimento cerebral nos participantes, conforme observado por Karni *et al.* (1998). Esses resultados desafiam a concepção de rigidez cerebral e de aprendizado que ainda permeia muitas instituições educacionais, reforçando a necessidade de abandonar a ideia de que crianças são simplesmente "inteligentes ou não", "rápidas ou lentas", "aptas ou não" para determinados conhecimentos.

Baseada em evidências da neurociência, Boaler (2018) defende que, com a abordagem correta e mensagens apropriadas, todas as pessoas podem alcançar o *sucesso em matemática*¹ e atingir níveis elevados de aprendizagem. Contudo, a autora reconhece que essa perspectiva diverge de concepções tradicionais, frequentemente mantidas por profissionais que categorizam alunos como aptos ou não, moldando o ensino de acordo com tais pressupostos.

Em consonância com Boaler (2018), o trabalho de Giraldo (2018) denuncia que a crença de que a matemática é uma ciência criada e desenvolvida exclusivamente por indivíduos geniais sustenta a ideia de que apenas aqueles dotados de um talento inato seriam capazes de compreendê-la plenamente.

¹ O sucesso na matemática está relacionado a encarar a disciplina de maneira positiva e independente. Isso inclui enxergar os erros não como falhas, mas como oportunidades de aprendizado. Além disso, o sucesso na matemática envolve a compreensão dos conceitos, em oposição à simples memorização de métodos. Essa perspectiva se manifesta também na habilidade de aplicar os conhecimentos adquiridos para solucionar problemas do cotidiano e em outras áreas do conhecimento escolar.

Sob essa perspectiva, o papel do professor de matemática seria limitado a identificar os alunos talentosos e separá-los daqueles considerados menos capazes. Consequentemente, a maioria dos estudantes, vista como desprovida desse talento natural, seria direcionada para uma abordagem de ensino que tornasse a matemática mais acessível, renunciando à sua abstração e complexidade. Essa abordagem pragmática e instrumental teria como objetivo capacitá-los para desempenhar funções específicas e ocupar posições sociais e profissionais vistas como adequadas aos contextos de suas realidades sociais, muitas vezes perpetuando desigualdades e limitando o alcance de seus potenciais matemáticos.

Os estudos de Mendick (2006) também destacam a problemática associada à crença de que apenas algumas pessoas possuem aptidão natural para a matemática, bem como à visão reducionista que limita a disciplina a respostas certas ou erradas. Mendick ressalta que essa abordagem pode ser prejudicial aos alunos. Além disso, a autora defende a necessidade de reconsiderar as formas como a matemática é ensinada, com o objetivo de permitir que mais pessoas experimentem sucesso e satisfação ao aprender a disciplina. O trabalho de Mendick também enfatiza a importância de revisar práticas educacionais que perpetuam exclusões, promovendo, em seu lugar, um ambiente de ensino mais inclusivo e acessível, onde todos os alunos tenham oportunidades reais de engajamento e aprendizado matemático.

Portanto, é fundamental afastar-se da concepção de salas de aula em que apenas uma resposta correta e única é esperada de cada estudante. Em vez disso, para fomentar uma mentalidade de crescimento, optamos pela busca de ambientes escolares que valorizem a diversidade de abordagens na resolução de problemas matemáticos, promovendo a colaboração entre os alunos. Tais ambientes têm o potencial de estabelecer uma cultura na qual professores e estudantes reconhecem e acolhem diferentes formas de pensar, todos engajados em explorar e aplicar a matemática de maneira significativa e transformadora (Mendick, 2006).

E o que significa a mentalidade de crescimento no ensino da matemática? Entendemos ser o estímulo às conjecturas e experimentações, ações que inevitavelmente geram erros e nos levam a caminhos de desenvolvimento matemático antes inimagináveis. Esse é o poder dos erros, tema que discutiremos na próxima subseção.

1.3 O poder dos erros e das dificuldades

Segundo Giraldo e Roque (2021), no ensino de matemática, é comum o erro ser considerado desprovido de valor intrínseco, visto como algo que não contribui positivamente para o processo de aprendizagem. Sob essa ótica, o erro é interpretado principalmente como um indicador de lacunas, desvios ou falta de compreensão que precisam ser corrigidos ou superados para que os objetivos educacionais sejam atingidos.

Nos espaços escolares, é frequente atribuir os erros a deficiências cognitivas, como a ausência de determinadas habilidades ou aptidões, ou a fatores relacionados à personalidade, como a falta de interesse, esforço ou comprometimento dos estudantes (Giraldo; Roque, 2021). Para os autores, essa visão frequentemente responsabiliza os discentes por seus erros, levando a uma abordagem moralizante, que os interpreta como falhas de caráter ou como reflexo de uma suposta falta de vontade de aprender. Nesse contexto, o erro é tratado como algo a ser corrigido ou penalizado pelo sistema educacional.

Em diálogo com pesquisas no campo da neurociência (Moser *et al.*, 2011 *apud* Boaler, 2018; Mangels *et al.*, 2006 *apud* Boaler, 2018), os erros podem ser valorizados como elementos que desencadeiam atividades cerebrais específicas, promovendo sinapses que contribuem para o crescimento e a plasticidade do cérebro. As evidências neurocientíficas reforçam o valor significativo dos erros no processo de aprendizagem, destacando seu papel no desenvolvimento cognitivo. Entretanto, é comum que os estudantes associem a ocorrência de erros à falta de habilidade em matemática ou até mesmo à ideia de não serem inteligentes. Essa visão negativa pode desmotivá-los, prejudicar sua autoconfiança e limitar seu envolvimento com a disciplina (Boaler, 2018).

Moser *et al.* (2011 *apud* Boaler, 2018) investigaram os mecanismos neurais envolvidos no cérebro quando as pessoas cometem erros, identificando duas respostas distintas. A primeira, denominada Negatividade Relacionada ao Erro (NRE), é caracterizada por um aumento na atividade elétrica cerebral em situações de conflito entre uma resposta correta e um erro, independentemente de a pessoa estar consciente desse erro. A segunda resposta, chamada Potencial de Erro (PE), reflete a atenção consciente direcionada ao erro. Esse sinal cerebral é ativado

quando a pessoa percebe que cometeu um erro e direciona sua atenção para ele. Esses estudos revelam a complexidade dos processos neurais relacionados à detecção e ao processamento de erros, fornecendo um discernimento sobre como o cérebro humano lida com o erro e aprende com ele, seja de maneira positiva ou negativa.

Nos estudos de Moser *et al.* (2011 *apud* Boaler, 2018), foi constatado que os cérebros dos estudantes apresentavam maior atividade elétrica ao cometerem erros do que ao responderem corretamente, evidenciada pelos sinais de NRE e PE. Além disso, observaram que essa atividade cerebral era mais intensa em indivíduos com mentalidade de crescimento em comparação àqueles com mentalidade fixa. Esses achados destacam a influência significativa da mentalidade na forma como o cérebro responde aos erros, sugerindo que a postura diante do aprendizado pode impactar positivamente o desenvolvimento cognitivo e o processo de aprendizagem.

Boaler (2018) destaca a relevância das pesquisas neurocientíficas sobre o cérebro e os erros para a prática docente, especialmente no ensino de matemática. Essas pesquisas evidenciam que cometer erros é uma etapa fundamental no processo de aprendizagem, pois estimula o crescimento cerebral. Conforme a autora, os erros não apenas oferecem oportunidades de aprendizado quando reconhecidos conscientemente pelos educandos, mas também promovem o desenvolvimento do cérebro, mesmo sem a consciência imediata dos equívocos.

Para Boaler (2018), reconhecer o valor dos erros é crucial, dado que crianças e adultos frequentemente experienciam sentimentos negativos ao errar em matemática. Essa reação é reflexo de uma cultura que prioriza o desempenho e desvaloriza os erros, frequentemente punindo-os. No entanto, a autora reforça que cometer erros é essencial para a aprendizagem verdadeira. Ainda assim, muitas salas de aula priorizam atividades que favorecem respostas corretas, limitando o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas e a capacidade de aprender com os erros.

Boaler (2018) enfatiza que estudos neurocientíficos demonstram não apenas que pessoas com mentalidade de crescimento exibem maior atividade cerebral ao cometerem erros do que aquelas com mentalidade fixa, mas também que nossas crenças sobre nós mesmos podem influenciar diretamente os mecanismos do cérebro. Quando acreditamos em nosso potencial de aprendizado e no valor dos

erros, criamos condições para que o cérebro reaja positivamente a essas experiências.

Partindo dessa perspectiva teórica, reconhecemos que cometer erros em um ambiente de aprendizagem favorável é essencial para o desenvolvimento da autoconfiança dos estudantes em matemática. Essa abordagem não só potencializa o aprendizado, mas também transforma a relação dos discentes com a disciplina, permitindo que enxerguem a matemática como uma ciência dinâmica e significativa, com impactos que transcendem o âmbito escolar e alcançam a vida cotidiana e a sociedade.

Conforme Borasi (1996), ao priorizar a (re)construção do conhecimento em vez da mera correção de erros, adotamos uma abordagem construtivista que também permeia este trabalho, especialmente na concepção das atividades analisadas. Isso se dá porque, ao encarar os erros como oportunidades para o surgimento de novas ideias, considera-se a possibilidade de transformá-los em desafios a serem explorados por alunos e professores, incentivando a busca por soluções que promovam o aprendizado (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2020).

Queremos finalizar esta subseção destacando que a imperfeição é uma característica inerente a qualquer processo criativo e à vida em geral. No entanto, em uma cultura profundamente avessa ao fracasso, muitas vezes somos paralisados pelo medo e pelo perfeccionismo rígido. Esse estado de espírito pode ser altamente limitante para quem busca desenvolver criatividade, inovação ou empreendedorismo (Sims, 2011 *apud* Boaler, 2018).

Sims (2011 *apud* Boaler, 2018) sintetiza os hábitos de pessoas bem-sucedidas, enfatizando que elas aceitam seus erros com naturalidade; exploram ideias que inicialmente podem parecer extravagantes; estão abertas a experiências diversificadas; brincam com ideias sem fazer julgamentos imediatos; desafiam conceitos tradicionais; e perseveram mesmo diante de dificuldades.

Nesse contexto, Giraldo e Roque (2021) convidam os profissionais do ensino de matemática a rejeitar a ideia de que os erros são apenas deficiências ou desvios indesejáveis do caminho esperado, sendo, no máximo, toleráveis temporariamente. Propõem, em vez disso, que os erros sejam vistos como potenciais criativos e que manifestações frequentemente interpretadas como falta de compreensão sejam consideradas oportunidades para explorar novos significados. Essa perspectiva transforma a visão sobre o erro e conecta o ensino da matemática às concepções de

uma mentalidade de crescimento, promovendo um ambiente de aprendizagem mais reflexivo e inclusivo.

1.4 O desenvolvimento de uma Mentalidade Matemática

Ao considerarmos a matemática escolar como uma forma hegemônica de apresentar essa ciência, Boaler (2018) destaca que os indivíduos bem-sucedidos na matemática possuem uma abordagem distinta e uma compreensão diferenciada em relação àqueles que apresentam maior dificuldade. Segundo a autora, essas pessoas não apenas buscam compreender profundamente os conceitos matemáticos, mas também refletem sobre eles, confiando em sua capacidade de atribuir significados e criar novos sentidos sobre o mundo por meio dessa disciplina, ainda que muitas vezes de forma tácita.

De acordo com Boaler (2018), indivíduos bem-sucedidos em matemática adotam uma postura ativa na identificação de padrões e relações, bem como na reflexão sobre as conexões entre diferentes conceitos. Eles abordam a matemática com uma mentalidade orientada ao crescimento, percebendo-a como um campo dinâmico e em constante evolução, no qual seu papel é aprender e explorar novas ideias. Assim, é essencial cultivar essa mentalidade matemática nos estudantes desde as primeiras interações com a disciplina, promovendo uma abordagem mais reflexiva e significativa.

Boaler (2018) aponta que, nos primeiros anos escolares, é comum os educandos serem expostos a métodos matemáticos formais, especialmente aqueles voltados para a resolução de operações básicas, como soma, subtração, multiplicação e divisão. Essa abordagem, no entanto, tende a afastá-los das mentalidades matemáticas e a conduzi-los a uma visão fixada em procedimentos mecânicos. Por esse motivo, esse período inicial é considerado crucial, sendo desejável que os professores apresentem a matemática como uma disciplina conceitualmente flexível, que estimula o pensamento, a criatividade e a atribuição de significado às suas práticas.

A pesquisadora ressalta que o trabalho inicial com números oferece um exemplo nítido de como podem emergir duas mentalidades distintas entre os

discentes: uma negativa, que pode resultar em fracasso, e outra positiva, que os leva ao sucesso. Para ilustrar essa ideia, Boaler (2018) faz referência à pesquisa de Eddie Gray e David Tall (1994 *apud* Boaler, 2018).

Na pesquisa de Gray e Tall (1994 *apud* Boaler, 2018), alunos foram apresentados a problemas numéricos simples, como adição e subtração. Os resultados evidenciaram uma distinção significativa entre os estudantes de alto e baixo desempenho. Aqueles com alto desempenho demonstraram senso numérico, abordando os números de maneira flexível e conceitual. Por outro lado, os alunos com baixo desempenho estavam presos a métodos padronizados, insistindo em algoritmos mesmo quando era evidente que eles não representavam a opção mais eficiente.

Boaler (2015) destaca que os alunos de baixo rendimento na pesquisa de Gray e Tall (1994) não apresentavam menos conhecimento, mas sim dificuldade em aplicar os números de forma flexível. Essa limitação, segundo a autora, pode ser atribuída à prática precoce de direcioná-los à memorização de métodos e fatos numéricos, sem incentivá-los a explorar os números de maneira conceitual e adaptativa.

Infelizmente, esses alunos são frequentemente rotulados como aqueles que possuem dificuldade com matemática e, como consequência, submetidos a mais exercícios repetitivos e prática mecânica. Essa abordagem reforça a percepção equivocada de que o sucesso em matemática depende exclusivamente da memorização e aplicação de métodos, em detrimento da compreensão e atribuição de significado às situações (Boaler, 2018). Esse ciclo prejudicial leva muitos discentes a se limitarem aos procedimentos formais, perpetuando suas dificuldades com a matemática ao longo da vida.

Boaler (2018) argumenta que a matemática deve ser entendida como um campo conceitual, e não como uma simples coleção de fatos e métodos a serem memorizados. Para ela, uma mentalidade matemática envolve uma abordagem dinâmica ao conhecimento, na qual os estudantes se reconhecem como agentes ativos na busca por compreensão e significado.

Reuben Hersh (1999) acrescenta que a matemática é frequentemente mal interpretada nas salas de aula, onde muitos alunos a percebem como um conjunto de respostas para perguntas que eles nunca formularam. Contudo, o autor enfatiza que são precisamente as perguntas que impulsionam a matemática. Resolver

problemas e gerar novas questões constitui o núcleo da prática matemática. Sem essa dimensão investigativa, a disciplina tende a parecer estática e desprovida de vida.

Giraldo e Roque (2021) oferecem outra perspectiva importante, destacando que os problemas matemáticos não desaparecem após serem resolvidos; eles não são apenas obstáculos momentâneos. Ao contrário, os problemas são elementos intrínsecos ao próprio conhecimento, permanecendo presentes e atuando como pontos de partida para novas criações. Nesse contexto, as soluções não se limitam a uma reprodução mecânica, mas podem ser constantemente reinterpretadas e aprimoradas ao longo do tempo.

A relevância dos problemas na matemática também se reflete no papel central das conjecturas. É no esforço para demonstrar ou refutar uma conjectura que novas teorias emergem. Um problema matemático eficaz é aquele que abre caminho para o desenvolvimento de ideias inovadoras e avanços significativos na disciplina (Giraldo; Roque, 2021).

Quando os estudantes compreendem que seu propósito vai além de simplesmente reproduzir um método e passa a incluir a sugestão de ideias, a dinâmica do aprendizado se transforma. O conteúdo matemático deixa de ser encarado apenas como questões que demandam procedimentos e passa a ser abordado como problemas que incentivam a reflexão e a criatividade (Boaler, 2018).

Ao nos dedicarmos à resolução de um problema, nosso foco inicial geralmente é encontrar a solução desejada. No entanto, além de resolver o problema, o processo frequentemente nos conduz a descobertas adicionais que podem ser tão ou mais relevantes que a solução original. Em outras situações, mesmo que não alcancemos a solução, o esforço envolvido ainda pode ser enriquecedor devido às novas ideias e percepções gerados ao longo do caminho (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2020).

Boaler (2018) também enfatiza o poder transformador da compreensão visual no aprendizado matemático, destacando seu papel em ampliar as possibilidades de compreensão dos educandos. Segundo a autora, a dimensão visual pode ser desenvolvida por meio de recursos como diagramas, esquemas, figuras e também através do uso de objetos concretos, como cubos encaixáveis ou ladrilhos de álgebra.

Boaler (2018) argumenta que a compreensão visual desempenha um papel crucial no aprendizado matemático, permitindo que os discentes alcancem níveis mais avançados de entendimento. A autora destaca que esse componente visual pode ser explorado por meio de recursos variados, como diagramas, esquemas, figuras e objetos físicos, tais como cubos encaixáveis ou ladrilhos de álgebra.

Nesse sentido, o Laboratório de Educação Matemática (LEM) surge como uma ferramenta valiosa para preencher lacunas no ensino da disciplina. Por meio de atividades com materiais manipuláveis, o LEM promove o entusiasmo dos alunos, ao mesmo tempo em que estimula a interação de processos mentais, criando um ambiente mais dinâmico para o aprendizado (Lorenzato, 2012).

De acordo com Lorenzato (2012), é essencial que os estudantes desenvolvam a capacidade de interpretar problemas matemáticos, abstrair ideias e compreender conceitos, aplicando-os em diferentes contextos. As atividades laboratoriais proporcionam uma abordagem prática que favorece a experimentação e, a partir dela, a generalização, permitindo que os educandos construam propriedades de conceitos matemáticos de forma ativa e significativa.

Boaler (2018) sugere que é possível transformar questões matemáticas tradicionalmente associadas a uma mentalidade fixa em oportunidades para o desenvolvimento de uma mentalidade de crescimento. Para isso, ela recomenda estratégias como: propor problemas abertos que possibilitem múltiplos métodos e representações; incorporar atividades investigativas; apresentar o problema antes de ensinar o método; incluir elementos visuais; questionar os alunos sobre suas percepções da matemática; ampliar a complexidade das tarefas, garantindo um *piso baixo e teto alto*²; e incentivar a argumentação crítica e a justificação de respostas.

O conceito de investigação matemática, quando utilizado como prática pedagógica, introduz o verdadeiro espírito da atividade matemática na sala de aula. Nessa abordagem, os alunos são convidados a atuar como matemáticos, formulando perguntas e conjecturas, realizando provas e refutações, apresentando resultados e debatendo ideias com seus colegas e professores. Esse processo torna-se uma metáfora educacional poderosa, capaz de transformar a sala de aula em um espaço de descoberta e colaboração (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2020).

² “Piso baixo” significa que qualquer pessoa tem acesso às ideias. “Teto alto”, por sua vez, significa que os alunos podem desenvolver as ideias em altos níveis (Boaler, 2018, pag. 152).

Nas próximas subseções, abordaremos algumas estratégias pedagógicas de ensino da matemática que estão alinhadas com as propostas de Boaler (2018) para o desenvolvimento de uma mentalidade matemática. Essas abordagens, ao focarem no desenvolvimento do conhecimento matemático, também buscam cultivar uma mentalidade mais flexível, criativa e reflexiva nos estudantes.

1.5 Investigação Matemática

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), para os matemáticos, investigar consiste em desvendar conexões entre objetos matemáticos conhecidos e desconhecidos, explorando suas propriedades. Segundo os autores, a investigação matemática geralmente se desenvolve em torno de um ou mais problemas específicos, sendo o primeiro passo crucial a identificação precisa do problema a ser resolvido. Nesse sentido, evidenciam uma estreita relação entre problemas e investigações no contexto matemático.

Ao resolver um problema específico, o objetivo principal é alcançar sua solução. No entanto, o processo de investigação pode levar a descobertas inesperadas, muitas vezes tão significativas quanto ou até mais importantes que a solução inicial. Mesmo quando a solução do problema proposto não é alcançada, o esforço despendido pode revelar insights valiosos e contribuir para o aprendizado e a construção do conhecimento matemático (Ponte, Brocardo; Oliveira, 2020). Essa ideia se alinha ao que Boaler (2018) ressalta sobre a importância de transformar questões matemáticas fixas em oportunidades para explorar diferentes perspectivas e ampliar a compreensão conceitual.

Boaler (2018) complementa essa perspectiva ao defender que a matemática não deve ser vista como um campo estático, mas como uma disciplina dinâmica, baseada em exploração, criatividade e pensamento crítico. Para a autora, encorajar os alunos a agirem como matemáticos investigativos contribui para o desenvolvimento de uma mentalidade matemática de crescimento.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), propõem que a investigação matemática seja conduzida em quatro etapas fundamentais (ver Quadro 1): a exploração e formulação de questões, a elaboração de conjecturas, o teste e a reformulação

dessas conjecturas, e, por fim, a justificação e avaliação do trabalho realizado. Cada uma dessas fases permite aos estudantes desenvolverem habilidades críticas, como o raciocínio lógico, a argumentação e a avaliação de resultados. Esse processo, segundo Boaler (2018), fomenta uma abordagem mais ativa e engajada no aprendizado da matemática, incentivando os discentes a se sentirem agentes de sua própria compreensão.

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhece uma situação problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Teste e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte; Brocardo; Oliveira (2020, p.20).

Segundo os autores, a investigação matemática está intimamente ligada à resolução de problemas, sendo que, em alguns casos, uma investigação pode ter início a partir de um exercício. Para diferenciar exercícios e problemas, utilizam a definição de Pólya (1975 *apud* Ponte; Brocardo; Oliveira, 2020): enquanto um exercício requer a aplicação de um método já conhecido, um problema apresenta um desafio para o qual o estudante ainda não possui uma solução pronta.

Ponte (2003) amplia essa distinção ao propor uma classificação de tarefas matemáticas:

- Exercício: tarefa fechada, de baixa dificuldade, com resposta única.
- Problema: tarefa fechada, que exige maior esforço cognitivo e apresenta maior dificuldade.

- Investigação: tarefa aberta, que não pressupõe resposta única ou mesmo sua existência, demandando grande esforço cognitivo.
- Exploração: tarefa aberta e acessível, que pode ser realizada sem grande dificuldade.

A figura abaixo ajuda a posicionar essas interpretações:

Figura 2 – Relação entre diversos tipos de tarefas



Fonte: Ponte (2003, p. 4).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), argumentam que, diferentemente de exercícios e problemas, cuja solução já é conhecida e possui critérios claros de correção, a investigação matemática é marcada por sua natureza aberta e pela necessidade de o investigador definir as questões a serem exploradas. Essa dinâmica permite que os resultados variem, estimulando a criatividade e a autonomia dos estudantes. Em consonância, Boaler (2018) defende que transformar exercícios e problemas fechados em tarefas mais abertas, que possibilitem múltiplas abordagens e explorações, é uma estratégia valiosa para ampliar tanto o engajamento dos estudantes quanto a profundidade do aprendizado.

A autora (Boaler, 2018) reforça que uma abordagem matemática focada na criatividade, exploração conceitual e descoberta deve considerar também os aspectos emocionais dos estudantes, promovendo confiança e entusiasmo. Essa visão conecta-se à ideia de que uma investigação matemática autêntica introduz na sala de aula a essência da prática matemática, transformando os educandos em verdadeiros matemáticos. Nesse processo, os discentes formulam questões, testam conjecturas e argumentam sobre os resultados, em diálogo com colegas e professores (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2020).

Para além das práticas de investigação, exploração e resolução de problemas, Boaler (2018) ressalta a importância dos aspectos visuais e táteis no ensino da matemática, destacando seu papel no engajamento e na compreensão dos estudantes. Nesse contexto, o LEM se apresenta como uma abordagem ideal para atender a essa demanda, integrando recursos manipulativos e experiências concretas ao processo de ensino-aprendizagem.

1.6 Laboratório de Ensino de Matemática

De acordo com Lorenzato (2012), diversos educadores renomados ao longo dos séculos enfatizaram a relevância do suporte visual e tátil como ferramentas facilitadoras no processo de aprendizagem. Essa perspectiva é reforçada pelas ideias de Boaler (2018), que destaca em seus estudos a importância desses recursos no ensino da matemática, permitindo aos alunos perceber e experimentar os conceitos matemáticos de forma mais concreta.

Lorenzato (2012) cita exemplos emblemáticos, como Comenius, que enfatizou a transição do concreto para o abstrato no ensino, argumentando que o conhecimento tem origem nos sentidos e se consolida por meio da prática. Rousseau defendeu a importância da experiência direta com objetos para promover a aprendizagem, enquanto Pestalozzi e Froebel também destacaram a necessidade de iniciar o ensino a partir do concreto. Herbart propôs que a aprendizagem tem início no campo sensorial, enquanto Poincaré recomendou o uso de imagens vívidas para elucidar conceitos matemáticos. Montessori, por sua vez, deixou um legado significativo com materiais didáticos e atividades que priorizam a aprendizagem sensorial, especialmente por meio da interação tátil.

Embora cada educador tenha desenvolvido sua própria abordagem, todos reconheceram o impacto positivo da interação entre o indivíduo e os objetos no processo de aprendizagem. No contexto da sala de aula, essa percepção destaca o papel essencial que os materiais didáticos desempenham na promoção de uma aprendizagem significativa (Lorenzato, 2012).

Conforme apontado por Lorenzato (2010), existem inúmeras razões favoráveis para que as escolas incorporem objetos e imagens como recursos

facilitadores no processo de aprendizagem. Entre essas razões, o autor destaca o estímulo ao pensamento lógico e à resolução de problemas. Complementando essa perspectiva, Boaler (2018) afirma que atividades baseadas na exploração visual e tátil tornam a matemática mais acessível a diferentes perfis de aprendizes, especialmente àqueles que apresentam dificuldades com abordagens expositivas centradas exclusivamente em símbolos ou teorias.

De acordo com Lorenzato (2012), o Laboratório de Ensino de Matemática é um espaço escolar destinado não apenas às aulas regulares de matemática, mas também ao atendimento de educandos com dúvidas, ao planejamento de atividades por parte dos professores – como aulas, exposições, competições e avaliações – e à discussão de projetos, tendências e inovações educacionais. Além disso, o LEM é um ambiente voltado para a criação e o desenvolvimento de atividades experimentais, incluindo a produção de materiais didáticos que possam aprimorar a prática pedagógica.

Ainda segundo Lorenzato (2012), mesmo em condições desfavoráveis, o LEM pode oferecer uma experiência gratificante para os professores e uma aprendizagem abrangente e agradável para os discentes, desde que o docente disponha de conhecimento, convicção e criatividade. O autor justifica essa visão ao destacar que é imprescindível o professor ter não apenas um bom domínio dos conteúdos matemáticos, mas também conhecimentos em metodologia de ensino e psicologia.

Além disso, Lorenzato (2012) enfatiza a importância da crença no que se pretende ensinar, transformar ou construir, apontando que a confiança no próprio trabalho é essencial. Por fim, o autor ressalta que a criatividade desempenha um papel central na concepção, planejamento, organização e implementação do LEM, bem como na orientação dos alunos, incentivando-os a se tornarem aprendizes ativos.

O material didático é definido como qualquer recurso que contribua para o processo de ensino-aprendizagem, abrangendo desde objetos simples, como giz ou calculadoras, até materiais mais complexos, como filmes, livros, quebra-cabeças, jogos e embalagens. Segundo Lorenzato (2012), esses materiais podem desempenhar diversas funções, dependendo do objetivo pedagógico para o qual são utilizados. O professor deve, portanto, refletir sobre o propósito de incorporar o material didático: seria para apresentar um conteúdo, motivar os alunos, auxiliar na memorização de resultados ou facilitar a redescoberta de conceitos pelos próprios

estudantes? As respostas a essas questões são fundamentais para a escolha do material mais adequado à aula.

Contudo, o autor ressalta que, por melhor que seja, o material didático nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, configurando-se como uma alternativa metodológica à disposição de docentes e discentes. Como tal, ele não garante, por si só, um ensino eficaz ou uma aprendizagem significativa, nem substitui o papel essencial do professor no processo educacional.

Lorenzato (2012) destaca a ampla variedade de materiais didáticos disponíveis. Alguns deles são fixos e não permitem modificações em suas formas, como os sólidos geométricos feitos de madeira ou cartolina, que oferecem possibilidades limitadas à observação. Por outro lado, há materiais que permitem maior interação por parte dos alunos, como o ábaco, o material montessoriano (cuisenaire ou dourado) e os jogos educativos. Além disso, existem materiais dinâmicos, capazes de se transformar continuamente, o que facilita descobertas, a percepção de propriedades matemáticas e a construção de uma aprendizagem significativa.

Para que os alunos aprendam de forma efetiva, não basta que a escola possua um Laboratório de Ensino de Matemática. É igualmente indispensável que o professor tenha habilidade e preparo para utilizar adequadamente os materiais didáticos disponíveis (Lorenzato, 2012). Essa competência exige planejamento detalhado, que envolve decidir se o uso de determinado material é apropriado ou necessário, bem como escolher qual material utilizar, em que momento e de que maneira ele será aplicado. Esse planejamento é essencial para facilitar a aprendizagem, embora não seja, isoladamente, suficiente para promover uma experiência significativa.

Ainda a respeito da participação do professor, Lorenzato (1995) reforça que, no contexto do LEM, o papel do docente é criar situações em que os alunos possam manipular, experimentar e explorar conceitos matemáticos, conectando essas experiências às abstrações necessárias para o aprendizado formal da ciência. Assim como Lorenzato, Boaler (2018) compartilha dessa visão e acrescenta que essa abordagem promove ambientes colaborativos e inclusivos, incentivando o trabalho em grupo e o compartilhamento de estratégias, contribuindo para desmistificar a matemática.

Retomando a discussão sobre o planejamento, Lorenzato (2012) apresenta um exemplo relacionado à representação de um triângulo em cartolina ou madeira. Através dessa representação, o professor pode demonstrar que, ao unir os três vértices do triângulo, a soma dos ângulos internos resulta em 180 graus. No entanto, o autor ressalta que essa abordagem, embora útil, tende a reforçar apenas a memorização do conceito matemático, frequentemente já encontrado em livros didáticos.

Por outro lado, o uso do material pode alcançar ramificações mais amplas e vantajosas se os alunos participarem ativamente do processo. Por exemplo, cada aluno pode desenhar seu próprio triângulo – seja equilátero, isósceles, escaleno ou retângulo, de diferentes tamanhos e posições –, recortá-lo, dobrá-lo e compartilhar com os colegas suas observações, descobertas e conclusões.

Conforme apontado por Lorenzato (2012), algumas das conclusões que podem emergir dessa atividade incluem:

- Ao unir os três ângulos de qualquer triângulo, forma-se um semicírculo;
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180 graus, independentemente do tipo de triângulo;
- Para que os três ângulos se encontrem, é necessário dobrar os lados ao meio;
- O ponto de interseção dos ângulos varia conforme as medidas dos próprios ângulos;
- Esse ponto de interseção corresponde ao pé da altura do triângulo;
- Todo triângulo pode ser decomposto em dois retângulos.

A disparidade entre as diferentes abordagens no uso do material didático evidencia que sua eficácia está mais relacionada à habilidade do professor do que à natureza do próprio recurso (Lorenzato, 2012). Essa constatação ressalta a importância da utilização adequada do material didático no desenvolvimento cognitivo e emocional do educando. Embora esses materiais geralmente despertem o interesse dos aprendizes, eles, por si só, não garantem o sucesso esperado. Para que ocorra uma aprendizagem significativa, é imprescindível que o discente se engaje não apenas de forma manipulativa, mas também mentalmente.

O autor enfatiza que o professor deve acreditar no potencial do material didático como um recurso auxiliar no processo de ensino-aprendizagem, pois, assim como muitos outros aspectos da vida, ele só oferece resultados positivos para aqueles que confiam em sua eficácia. Além disso, o uso correto do material didático

exige compreender as razões para empregá-lo, os métodos de sua aplicação e o momento oportuno para introduzi-lo. Sem esse entendimento, o material pode ser ineficaz ou até mesmo prejudicar a aprendizagem.

Por meio do material didático, o docente pode facilitar uma aprendizagem mais significativa e compreensiva para os alunos, contribuindo para desfazer crenças equivocadas sobre a matemática, como a ideia de que ela é uma disciplina restrita a poucos privilegiados, estática ou excessivamente difícil (Lorenzato, 2012). Outro benefício significativo é a possibilidade de transformar o ambiente das aulas de matemática, substituindo o medo, a ansiedade e a indiferença pela satisfação, alegria e prazer. No entanto, o efeito mais profundo pode ser o aumento da autoconfiança dos discentes e a melhoria de sua autoimagem, aspectos essenciais para o sucesso educacional e pessoal.

Ficam evidentes as convergências entre o Laboratório de Ensino de Matemática, conforme proposto por Lorenzato, e as abordagens defendidas por Boaler, que valorizam, sobretudo, a autoestima do educando. Ambos os autores destacam a importância de um ambiente acolhedor, livre de medo e ansiedade, como condição ideal para que os educandos alcancem um alto nível de desenvolvimento em matemática.

Após apresentarmos, de forma resumida, a investigação matemática e o Laboratório de Ensino de Matemática – abordagens amplamente difundidas no Brasil e que consideramos bem alinhadas às propostas de Boaler (2018) para o desenvolvimento de uma mentalidade matemática –, avançaremos para a apresentação de uma última abordagem: a Matemática Problematicada.

1.7 Matemática Problematicada

A nomenclatura dessa terceira "estratégia pedagógica" sugere uma ruptura com concepções tradicionais, evocando uma ideia de transformação ou revolução no ensino da matemática. Diferente das abordagens anteriores – como a investigação matemática, que busca padrões e significados através de análises profundas, e o laboratório de ensino de matemática, caracterizado por atividades experienciais com objetos manipuláveis para facilitar a compreensão de conceitos –

a Matemática Problematizada parece ser algo que vai além. Ela não se limita a métodos ou ferramentas, mas propõe uma nova forma de enxergar a própria natureza da matemática e sua relação com o mundo.

Nesse contexto, entendemos que a Matemática Problematizada não se apresenta apenas como um conjunto de conteúdos a serem memorizados ou como uma simples prática de resolução de problemas. Em vez disso, ela propõe uma reflexão crítica sobre os próprios fundamentos da disciplina, suas aplicações e significados, incentivando uma postura criativa e transformadora nos estudantes. Assim, surge como uma abordagem que questiona o *status quo* e promove a construção de sentidos, alinhada às experiências e realidades vividas pelos educandos.

Para introduzir o conceito de Matemática Problematizada, julgamos pertinente abordar inicialmente a ideia de Matemática não problematizada, que Giraldo (2019) classifica como Matemática naturalizada. Segundo o autor, essa perspectiva concebe a Matemática como um corpo fixo e estabelecido de conhecimentos, cuja forma atual é vista como o resultado inevitável de uma evolução linear – partindo de estágios "atrasados" até alcançar formas "avançadas" por meio da genialidade de indivíduos dotados de talento inato.

Em contraponto, a Matemática Problematizada compreende uma visão plural e dinâmica, reconhecendo possibilidades matemáticas situadas em variados contextos históricos e sociais, permeados por práticas de produção e mobilização de saberes. Essa abordagem valoriza a construção de significados e afetos no processo educativo, priorizando a reflexão e o engajamento dos estudantes em detrimento da mera exposição de fatos, procedimentos e informações (Giraldo, 2019).

Menezes e Quintaneiro (2023) destacam a necessidade de subverter um possível sentido negativo atribuído ao termo "problematizar." Se compreendido como causar, propor ou estabelecer problemas, o conceito de problematizar se entrelaça diretamente com a interpretação do que se entende por "problema." Os autores refletem que, se um problema for visto apenas como algo negativo a ser superado, a problematização pode adquirir conotações indesejadas.

Nesse cenário, eles defendem ser crucial ressignificar a ideia de problema em matemática como elemento propulsor dos processos criativos e produtivos. Problemáticas matemáticas, nesse contexto, deixam de ser obstáculos para se

tornarem oportunidades de inovação, pensamento crítico e descoberta. A problematização, assim, envolve engajar os sujeitos em uma prática matemática que valorize a produção de sentido e a invenção.

Essa abordagem ressoa com a perspectiva freiriana de educação, fundamentada na criatividade, na formação de uma consciência crítica e no constante questionamento da realidade posta. Dessa forma, problematizar a matemática não apenas amplia o horizonte dos processos educacionais, mas também transforma a disciplina em um espaço de emancipação e reinvenção constante (Menezes; Quintaneiro, 2023).

Giraldo e Roque (2021) argumentam que o problema, ao contrário de ser uma simples ausência ou deficiência de saber a ser eliminada com a obtenção de uma solução, constitui o elemento motivador essencial para o desenvolvimento matemático. Eles defendem que a Matemática, tanto como campo de conhecimento quanto como espaço de invenção, é estruturada e impulsionada pela presença de problemas, não pelas respostas ou soluções em si. Nessa perspectiva, os problemas deixam de ser apenas etapas intermediárias para se tornarem o cerne da produção e avanço matemático, fomentando um ambiente dinâmico de questionamento e descoberta contínuos.

Segundo Hersh (1999), a Matemática sofre uma séria deturpação nas salas de aula, onde muitos alunos a percebem apenas como uma coleção de respostas para perguntas que não formularam. Assim como destacam Giraldo e Roque (2021) e Menezes e Quintaneiro (2023), o autor defende que são as perguntas – os problemas – que orientam e impulsionam o desenvolvimento da Matemática. Resolver problemas e propor novos desafios constitui sua essência. Assim, quando o ensino da matemática é desvinculado dessa centralidade dos problemas, reduzindo-se à mera exposição de respostas e procedimentos, ela perde seu dinamismo, tornando-se, segundo Hersh, uma prática esvaziada de vida e significado.

A Matemática Problematizada questiona justamente a organização e a forma como a Matemática naturalizada é apresentada e ensinada em sala de aula. Menezes e Quintaneiro (2023), em alinhamento com Giraldo (2019), ilustram essa ordem da estrutura como Definição-Teoremas-Demonstração-Exemplo-Exercício. Essa estrutura formal, própria da Matemática naturalizada, contrasta com a dinâmica da ordem da invenção.

Segundo Giraldo e Roque (2021), na prática inventiva da Matemática, axiomas e definições – que formalmente precedem os teoremas – surgem como condições formuladas posteriormente para garantir a validade de resultados já alcançados. Esses elementos emergem de explorações prévias, buscando sistematizar e formalizar ideias já intuídas ou experimentadas de forma prática. Assim, ao invés de um ponto de partida, axiomas e definições representam um esforço deliberado para estruturar formalmente condições que assegurem a validade matemática dessas ideias.

Menezes e Quintaneiro (2023) argumentam que práticas naturalizadas no ensino da matemática, que priorizam a repetição de procedimentos em detrimento da produção criativa e significativa dos alunos, têm fomentado um cenário de segregação. Nessa lógica, os estudantes que conseguem reproduzir os procedimentos esperados são classificados como "talentosos", enquanto os que encontram dificuldades são rotulados como "fracos". Os autores ressaltam que essa abordagem apaga o papel ativo dos sujeitos na construção do conhecimento matemático.

Refletir sobre esses apagamentos nos insere em uma discussão mais ampla sobre as finalidades do ensino da matemática e, por extensão, sobre o papel da escola em nossa sociedade. Permanecer preso à ideia de “talento” reforça a noção implícita de que o saber matemático é algo pré-determinado e inalcançável para aqueles que não possuem um suposto dom inato, desconsiderando o potencial transformador do percurso educacional.

Sendo assim, entendemos a Matemática Problematicada como uma abordagem que busca romper com a lógica tradicional de ensino, na qual se apresenta uma propriedade, explora-se um exemplo e oferecem-se exercícios procedimentais para fixação. Essa reformulação decorre do entendimento de que o problema não é um obstáculo a ser superado, mas sim o motor para o desenvolvimento matemático.

A abordagem problematizadora propicia aos alunos a oportunidade de explorar problemas, estabelecer conexões com o conhecimento matemático prévio e, a partir disso, (re)construir os conceitos matemáticos. Dessa forma, a aula deixa de ser uma simples exposição da matemática já estabelecida, tornando-se um espaço de construção coletiva, em que todos os agentes envolvidos participam ativamente na produção e no desenvolvimento do saber matemático.

1.8 Matemática e Equidade

De acordo com D'Ambrosio (2020), a Matemática tem sido historicamente utilizada como um instrumento de seleção de elites, frequentemente vista como uma ciência que distingue indivíduos entre "capazes" e "incapazes". A disciplina funciona como um poderoso mecanismo de classificação que, segundo o autor, justifica a percepção de que indivíduos considerados "menos racionais" podem ser explorados por aqueles que dominam a Matemática como "um celeiro inesgotável para a satisfação de seus desejos e ambições" (D'Ambrosio, 2020, p. 79).

Boaler (2018) também discute os impactos negativos dessa visão elitista. Quando a Matemática é ensinada como uma disciplina intrinsecamente mais difícil e destinada apenas a um grupo seleto de estudantes superdotados, limita-se o acesso de muitos que poderiam ser bem-sucedidos não apenas na Matemática, mas também em áreas científicas correlatas. A combinação dessa postura elitista com estereótipos sobre "talento nato" gera sérias desigualdades educacionais.

Apesar dos discursos democráticos presentes na educação, inclusive na matemática, a disciplina frequentemente reforça funções sociais de diferenciação e exclusão, proporcionando oportunidades futuras desiguais para os estudantes que frequentam a escola (Skovsmose; Valero, 2012). Boaler (2018) argumenta que rotular alunos como incapazes e ensiná-los em níveis inferiores pode inicialmente criar uma ilusão de sucesso, mas, ao longo do tempo, essa prática leva à frustração e ao abandono definitivo da matemática. Para combater essa exclusão, é fundamental que os educadores acreditem no potencial de todos os estudantes, rejeitando a ideia de que a Matemática é reservada a poucos, e buscando torná-la acessível a todos, independentemente de desempenho prévio, etnia ou gênero.

Boaler ainda ressalta que a elitização da Matemática e a ênfase no desempenho refletem construções culturais que utilizam a disciplina como ferramenta de classificação. Para reverter esse cenário, ela defende a transformação da Matemática em uma ciência inclusiva e centrada na aprendizagem, promovendo oportunidades tanto para estudantes bem-sucedidos quanto para aqueles que enfrentam dificuldades. Essa mudança pode romper barreiras estruturais que afetam especialmente educandos oriundos de contextos periféricos e de classes trabalhadoras, frequentemente marginalizados em virtude de

seu desempenho em exames padronizados que limitam o acesso ao ensino superior (Gutstein, 2006).

Outro problema decorrente da cultura elitista na matemática é a desvalorização do esforço individual por parte de estudantes que se destacam. Muitas vezes, esses alunos preferem acreditar que seu sucesso resulta de um talento inato, e não de trabalho árduo (Boaler, 2018). Esse cenário pode levar estudantes que obtêm conquistas através do esforço a sentirem-se impostores, levando alguns à desistência da disciplina. A crença de que apenas os naturalmente talentosos possuem aptidão para a matemática reforça estereótipos e perpetua a exclusão.

Giraldo e Roque (2021) discutem a visão tradicional segundo a qual a matemática seria fruto da inspiração isolada de indivíduos considerados gênios inatos, o que implicaria que a compreensão dessa ciência estaria restrita apenas àqueles dotados de um talento natural. Nesse contexto, caberia ao professor de matemática a tarefa de identificar os alunos talentosos e separá-los dos fracos. Para a maioria dos estudantes, considerados desprovidos dessa aptidão, o ensino da matemática seria, então, simplificado, reduzido à sua dimensão pragmática e instrumental, a fim de capacitá-los para funções específicas em determinados contextos sociais e profissionais. Contudo, os autores afirmam que a Educação Matemática também possui um compromisso político: o de promover práticas pedagógicas que ultrapassem essas limitações, provocando os estudantes a imaginar e construir novas realidades para além de seus contextos de origem.

Para Boaler (2018), é urgente promover uma verdadeira revolução nas crenças sobre a matemática, superando o elitismo que ainda a associa a uma habilidade restrita a poucos. A proposta da autora é mudar o foco do desempenho, que frequentemente gera barreiras, para a aprendizagem, entendida como um processo contínuo e acessível. Essa nova abordagem deve reconhecer a matemática como uma disciplina multidimensional, que não só é possível de ser aprendida por todos, mas também é essencial e relevante para a formação integral dos estudantes em diversos contextos.

2 METODOLOGIA DE PESQUISA

Para dar início a este capítulo, gostaríamos de retomar o objetivo que orienta esta investigação: observar como os alunos podem desenvolver uma mentalidade matemática de crescimento, com foco na geometria. Considerando essa motivação, nosso trabalho busca analisar e evidenciar a forma como os alunos percebem e relacionam a matemática nas mais diversas formas. Nesse sentido, tornou-se imprescindível “fazer com que o humano apareça e não se esconda atrás de estatísticas” (Borba, 2004, p. 10).

A investigação realizada priorizou o processo mais do que os resultados em si. Os dados coletados não buscavam confirmar hipóteses prévias, mas contribuir para a construção de abstrações particulares conforme iam sendo agrupados (Bogdan; Biklen, 2007). Assim, a abordagem qualitativa mostrou-se especialmente útil, pois forneceu “informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações” (Borba; Araújo, 2020, p. 25). Essa perspectiva permitiu ao pesquisador compreender o contexto através de seu próprio prisma, considerando que “o conhecimento não [fosse] isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sociopolíticas do momento” (Borba, 2004, p. 3).

Concordamos com Fernandes e Garnica (2021), que afirmam que a abordagem qualitativa é mais uma postura de dialogar com o objeto de pesquisa do que um conjunto fixo de procedimentos. Por isso, a compreendemos como uma investigação que interage com os participantes e se transforma durante o processo, formando-se “com a compreensão de textos, contextos e teorias [...] que se oferecem como símbolos ávidos a serem interpretados” (Garnica, 2001, p. 42). Nesse sentido, consideramos os participantes da pesquisa não apenas como objetos de análise, mas como protagonistas e coautores do processo investigativo (Ferraço; Alves, 2015).

Essa compreensão está alinhada às ideias de Cochran-Smith e Lytle (2009), que enfatizam a investigação como uma postura docente. Para essas autoras, a reflexão crítica sobre o ensino e a aprendizagem não apenas amplia o conhecimento prático dos docentes, mas também transforma suas práticas em atos conscientes e intencionais de produção de saberes.

Além disso, Nóvoa (2009) concebe o professor como um pesquisador em ação, cuja prática docente deve ser constantemente interrogada e reconstruída por meio de uma postura investigativa. Para ele, a docência não se resume à aplicação de métodos fixos, mas exige reflexão sistemática sobre o trabalho pedagógico. O professor-pesquisador articula saberes teóricos e experiências concretas, transformando a sala de aula em um espaço de experimentação e produção de conhecimento. Ao documentar e analisar criticamente sua prática, o educador não apenas promove sua própria formação, mas também contribui para a evolução da profissão.

Para além da investigação sobre a própria prática, a abordagem metodológica adotada neste trabalho também foi fortemente influenciada pela pesquisa-ação, considerando que o professor-pesquisador está inserido no ambiente investigado. Assim, parte-se de uma avaliação prévia, que motiva a investigação e tem como finalidade a modificação dos processos de aprendizagem vivenciados pelos envolvidos. Acrescenta-se, ainda, que o professor desempenha múltiplos papéis ao longo do processo: planeja, aplica, medeia, participa e analisa tanto os produtos gerados pelas atividades quanto as formas pelas quais os estudantes as desenvolveram. Tais atividades não apenas visam promover mudanças na aprendizagem dos alunos, como também provocam reflexões sobre a própria prática docente, incentivando seu aprimoramento contínuo.

Michel Thiollent (2011) compreende a pesquisa-ação como uma metodologia voltada à transformação concreta da realidade. O autor a define como uma forma de pesquisa social estruturada a partir de uma ação coletiva, cujo objetivo é identificar, analisar e propor soluções para problemas específicos vivenciados pelos participantes do processo investigativo.

Essa metodologia valoriza a dinâmica das ações em contextos reais, contribuindo significativamente para o aprimoramento das aprendizagens, comportamentos e atitudes dos estudantes. Nesse sentido, Zeichner e Diniz-Pereira (2005) ressaltam que a pesquisa-ação incentiva modelos de ensino centrados nos alunos, destacando a importância de ouvi-los, observá-los e compreendê-los. Ainda nesse contexto, Cochran-Smith e Lytle (2009) evidenciam a relevância da colaboração entre professores, pesquisadores e discentes como componente essencial de uma prática investigativa transformadora. Tal diálogo promove uma

educação mais equitativa, em que todos os participantes se tornam agentes na construção do conhecimento.

No contexto latino-americano, Francischett (1999) reforça o caráter emancipatório da pesquisa-ação, associando-a a um impulso democrático e ao compromisso com transformações sociais. Essa abordagem proporciona ao pesquisador flexibilidade e criatividade nos processos de coleta e análise de dados, reconhecendo que “o bom resultado da pesquisa depende da sensibilidade, intuição e experiência do pesquisador” (Francischett, 1999, p. 174). Thiollent (2011) complementa, argumentando que é fundamental organizar a investigação em torno da concepção, execução e avaliação de uma ação planejada, visando “fazer progredir a consciência dos participantes no que diz respeito à existência de soluções e de obstáculos” (Thiollent, 2011, p. 27).

Michaliszyn e Tomasini (2005, p. 32) acrescentam que a pesquisa-ação “caracteriza-se pela interação entre os pesquisadores e o grupo social pesquisado, ocorrendo entre eles certo envolvimento de modo cooperativo ou participativo e supõe o desenvolvimento de ações planejadas”. Corroborando essa perspectiva, Penteado (2010) entende que a pesquisa-ação, no âmbito dos estudos qualitativos, promove a aproximação entre o pesquisador acadêmico e o professor da educação básica em um mesmo projeto, realizado no ambiente escolar, com vistas à interferência positiva no trabalho docente, contribuindo para sua melhoria.

Reafirmamos que essa prática investigativa transforma a educação em um processo dinâmico e contextualizado. Conforme apontam Cochran-Smith e Lytle (2009), ao considerar os contextos sociais e culturais como elementos fundamentais na produção do conhecimento, a pesquisa-ação promove uma integração entre teoria e prática que fortalece o compromisso com a transformação social e com a construção coletiva de significados.

Por fim, é importante esclarecer que os dados utilizados para análise foram coletados por meio de diferentes instrumentos, com o intuito de garantir uma compreensão mais abrangente e profunda do processo investigado. Entre esses instrumentos, destacam-se as gravações em áudio dos encontros realizados com os estudantes, os cadernos de atividades entregues a cada grupo, nos quais os alunos registraram suas resoluções, hipóteses e reflexões, além dos registros realizados pelo próprio professor-pesquisador ao longo das etapas da pesquisa. Esses registros incluíram observações sobre o comportamento dos estudantes, suas

interações durante as atividades, suas falas espontâneas e as mediações necessárias ao longo do processo.

Reforçamos a importância de uma abordagem que valorize o contexto, as relações interpessoais e a construção coletiva do conhecimento, considerando a complexidade dos processos educativos. A partir dessas escolhas metodológicas, a pesquisa busca contribuir não apenas para o avanço do conhecimento acadêmico, mas também para a transformação concreta da prática docente e das experiências de aprendizagem dos estudantes.

3 PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

A pesquisa foi realizada com duas turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, ambas do oitavo ano, sendo uma composta por 31 alunos e a outra por 29, organizados em grupos de quatro ou cinco estudantes. As atividades ocorreram ao longo de quatro encontros, cada um composto por três aulas de 50 minutos.

As intervenções foram desenvolvidas no âmbito da disciplina denominada Orientação de Estudos, cujo objetivo é oferecer suporte aos estudantes no enfrentamento de dúvidas e dificuldades escolares de maneira geral. Esta disciplina é ministrada por professores de Matemática ou de Língua Portuguesa, que têm como responsabilidade revisar conteúdos em que as turmas apresentam maiores dificuldades, além de poderem trabalhar temas que considerem relevantes para a formação dos alunos. O planejamento das atividades realizadas em Orientação de Estudos é submetido à aprovação da equipe de orientação pedagógica a cada bimestre.

No contexto desta intervenção, a escolha do conteúdo abordado foi motivada pela percepção dos próprios estudantes, que, sempre que questionados, relatavam maior apreensão e dificuldade em relação à Geometria. Diante desse cenário, planejou-se uma revisão dos conceitos geométricos, iniciando pela noção de reta e avançando até o estudo das áreas de polígonos – tema que, inclusive, constava no planejamento didático da disciplina de Matemática para aquele ano letivo.

O colégio em que a pesquisa foi realizada integra a rede pública do município de São Gonçalo, no estado do Rio de Janeiro, e está situado em um bairro periférico e socialmente vulnerável da cidade. Trata-se de uma instituição com infraestrutura limitada, caracterizada por salas de aula sem climatização, mobiliário insuficiente para atender às necessidades básicas e escassez de recursos e materiais pedagógicos. Além disso, a ausência de uma sala de informática compromete a possibilidade de planejamento e execução de atividades que dependem de tecnologias digitais, restringindo, assim, as opções metodológicas disponíveis para o trabalho pedagógico.

Como já mencionado, a atividade foi desenvolvida ao longo de quatro encontros. No primeiro encontro, abordou-se o conteúdo de retas, semirretas e

segmentos de retas, além das operações de adição e subtração de segmentos de retas, bem como a relação de maior e menor. No segundo encontro, foi trabalhada a multiplicação dos segmentos de retas e as áreas geométricas. No terceiro encontro, o tema central foi o conceito de medição, com ênfase na medição de áreas. No quarto encontro, discutiu-se a comparação das áreas de retângulos e, também, a comparação das áreas de polígonos diversos.

Tanto a abordagem quanto as atividades da intervenção foram planejadas com base no referencial teórico apresentado neste trabalho. Foram propostas aos alunos atividades que exigiam observação, discussão e reflexão sobre os conteúdos matemáticos, não apenas para que compreendessem melhor o assunto abordado, mas também para que participassem de um processo ativo de construção desse conhecimento (Boaler, 2018; Borasi, 1996; Menezes; Quintaneiro, 2023). Para apoiar essa transição, as atividades foram planejadas com o uso de materiais manipuláveis, pois, assim como Boaler (2018) e Lorenzato (2012), acreditamos na eficácia desses materiais para auxiliar os alunos na visualização do que está acontecendo matematicamente.

No que diz respeito à abordagem, a atividade foi desenvolvida com o objetivo de promover a problematização – no contexto da Matemática Problematizada – dos conteúdos trabalhados. Sempre que necessário, o professor convidou os alunos a refletirem sobre o motivo de determinado conceito ou procedimento, ou levantava a possibilidade de considerar alternativas (Menezes; Quintaneiro, 2023). Quando houve possibilidade, questionou-se também os erros, utilizando-os como uma oportunidade para buscar explicações, sanar dúvidas e construir conhecimento (Boaler, 2018; Giraldo; Roque, 2021). Vejamos, a seguir, os acontecimentos apresentados dia a dia.

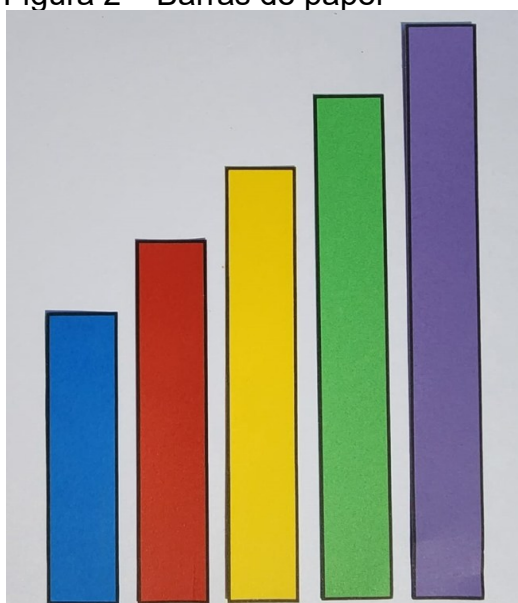
Ademais, é relevante retomar, conforme explicitado na metodologia, que o professor esteve ativamente inserido na construção do conhecimento proposta na intervenção. O educador não apenas entregou o material e apresentou as instruções para, em seguida, adotar uma postura de mero observador. Pelo contrário, interagiu continuamente com os estudantes, acolhendo suas dúvidas, propondo observações e incentivando reflexões. Afinal, tratava-se de uma situação de ensino-aprendizagem, na qual compreendemos que o professor assume um papel ativo e essencial, tanto quanto os alunos, no processo de construção do conhecimento.

Por último, é importante ressaltar que o registro das produções escritas dos educandos foi revisado e ajustado pelo autor com o intuito de garantir uma leitura mais fluida e de fácil compreensão. Essa intervenção foi necessária, pois algumas produções apresentavam dificuldades linguísticas, gramaticais ou ortográficas, além de, em alguns casos, não serem totalmente compreensíveis para um leitor que não estivesse presente durante as explicações verbais complementares. Entretanto, é fundamental frisar que, apesar dessas modificações, a integridade das ideias dos estudantes foi preservada.

3.1 Primeiro encontro

Para o primeiro encontro, planejou-se trabalhar os conceitos de reta, semirreta e segmento de reta por meio de uma abordagem problematizadora – analisando, questionando, refletindo, debatendo hipóteses e alternativas. Em seguida, explorou-se a noção de maior e menor, bem como as operações de adição e subtração com segmentos de reta. Para isso, os alunos receberam barras de papel de tamanhos variados (Figura 2) (Apêndice A), permitindo-lhes representar os segmentos de reta envolvidos nas operações.

Figura 2 – Barras de papel



Fonte: acervo do autor, 2024.

A intervenção teve início com a exploração e análise dos conceitos de reta, semirreta e segmento de reta. A dinâmica da atividade ocorreu por meio de um diálogo entre o professor e os alunos, no qual o docente formulava questionamentos, e os estudantes compartilhavam suas percepções sobre o tema. Sempre que necessário, o professor incentivava reflexões adicionais, conduzindo os alunos a uma compreensão mais aprofundada. Ao término de cada discussão, registravam-se no quadro representações ilustrativas e descrições escritas do conhecimento construído coletivamente. A discussão desenvolveu-se da seguinte forma:

Professor: Vamos falar sobre retas. Alguém sabe o que é uma reta?

Alunos: Reta é o que é reto.

Nesse momento, o professor percebe algumas risadas e comentários que podem comprometer o andamento da atividade, pois a dinâmica depende do engajamento e da participação ativa de todos, além de influenciar negativamente a autoestima do aluno envolvido. Acreditamos que o ambiente de aprendizagem deve ser acolhedor, favorecendo a troca de ideias, o respeito às diferentes perspectivas e a livre expressão de dúvidas. Diante disso, torna-se essencial uma reflexão coletiva para incentivar mudanças nesse comportamento social.

Professor: Sim, sua resposta não está errada. Compreendo sua dificuldade em explicar melhor, mas entendo o que você quer dizer. Isso ocorre porque a reta é um elemento primitivo da geometria, ou seja, não possui uma definição formal. Você conseguiria dar alguns exemplos de retas? Podem ser elementos presentes em nossa sala de aula.

Alunos: A grade da janela, a madeira acima do quadro, a régua, o acabamento da porta.

Após a identificação de exemplos satisfatórios, o professor percebe a oportunidade de estimular ainda mais o raciocínio dos alunos, ampliando sua compreensão do conceito. Para isso, propõe comparações com outros elementos do ambiente.

Professor: Muito bem, esses são bons exemplos. E a grade do ventilador, ela é uma reta?

Alunos: Não. A grade do ventilador é um círculo.

Professor: Vocês conseguem explicar a diferença? Conseguem observá-la e criar uma distinção?

Alunos: A reta não gira. A grade do ventilador gira. *(Neste momento, um aluno gesticula com o braço, desenhando um círculo no ar.)*

Professor: Boa observação! A partir disso, podemos refinar ainda mais a ideia.

O professor decide aprofundar a abordagem visual e incorporar movimentos para envolver os alunos na construção do conceito. Ele caminha em linha reta pela sala e, em determinado momento, muda de direção, ao mesmo tempo em que interage com os estudantes, incentivando a reflexão:

Professor: Vejam, estou seguindo um caminho reto, mas, de repente, mudo de direção. Alguém pode afirmar com certeza o quanto vou virar ou se darei um giro completo e continuarei na mesma direção?

Alunos: Não, professor. Sabemos apenas que você começou a fazer uma curva, mas não dá para saber onde vai parar.

Professor: Excelente. Agora conhecemos dois elementos: retas e curvas. O círculo, por exemplo, é um tipo específico de curva. Se tivessem que explicar o que é uma reta, como descreveriam?

Alunos: Reta é algo que não faz curva.

Professor: Agora olhem para o quadro. O quadro faz curva? Seria um bom exemplo de reta?

Alunos: Não. O quadro não faz curva, mas é grosso demais para ser uma reta. Ele é um retângulo. A reta precisa ser mais fina, como a grade da janela.

Professor: Muito bom. Por isso, ao falarmos de reta, usamos uma palavra que sugere algo fino. Alguém se lembra qual é?

Alunos: Linha! Linha reta.

Professor: Isso mesmo. A ideia de linha nos dá a sensação de algo extremamente fino, tão fino que nem percebemos sua espessura.

Com base nessa construção coletiva, o professor desenha uma reta no quadro e questiona:

Professor: Se quisermos medir essa linha reta, de onde até onde devemos medir?

Alunos: De uma ponta até a outra, mas precisaremos de mais de uma régua.

O professor gesticula para destacar a espessura da linha e faz um novo questionamento:

Professor: Por que não medimos por aqui?

Os alunos demonstram insegurança, trocando comentários entre si, mas sem coragem de se manifestar.

Professor: Intuitivamente, vocês já sabem a resposta. Vocês disseram que a reta deve ser fina e que não mediriam a espessura. Isso mostra que perceberam que a reta não tem espessura, ou seja, sua espessura é zero. A reta é uma figura que possui apenas uma medida: o comprimento.

Professor: Temos uma última característica das retas para abordar. Para chegarmos a essa característica, vamos relembrar os números. Se eu começar a contar do zero, depois um, dois, três e assim por diante, em algum momento eu chegarei ao fim?

Alunos: Não, nunca chega ao fim. Porque os números são infinitos.

Professor: Mas essa ideia de ser infinito vale apenas para quando o número fica maior, ou também se aplica ao lado em que ele fica menor?

Alunos: Vale para os dois lados. Do outro lado também é infinito, só que negativo.

Professor: Exatamente! Era aí que queríamos chegar. Vocês se lembram de que os números foram apresentados a vocês usando uma reta? Lembram da reta numérica? Têm alguma ideia do porquê essa relação entre a reta e os números faz sentido? O que esses elementos devem ter em comum?

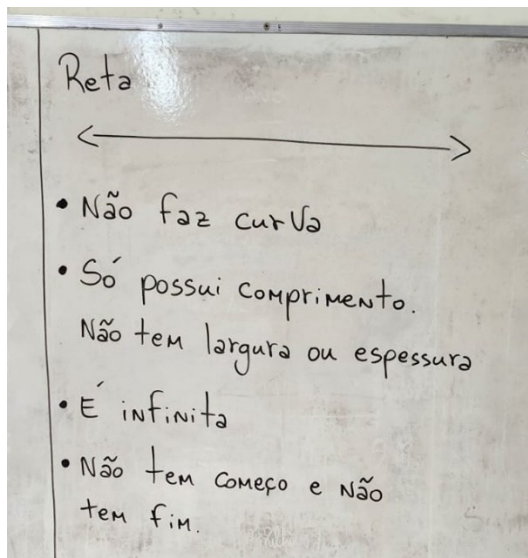
Alunos: Então, a reta é infinita?

Professor: Exatamente. A reta é infinita, e é infinita para os dois lados. Não conseguimos chegar nem no seu começo, nem no seu final.

Professor: Então, pela nossa discussão, chegamos à conclusão de que a reta é uma figura geométrica que não faz curva, que só tem comprimento, não possui largura ou espessura, e esse comprimento é infinito.

Uma vez que a discussão e colaboração em aula chegaram ao conceito de reta, o avanço foi registrado no quadro (Figura 3), e a dinâmica prosseguiu para a discussão sobre semirretas e segmentos de reta. Vejamos:

Figura 4 – Registro em quadro sobre retas



Fonte: acervo do autor, 2024.

Professor: E o que vocês acham que seria uma semirreta?

Alunos: Algo que é quase uma reta, mas não é.

Professor: Exatamente. A semirreta vai ter quase todas as características de uma reta. Então, vamos recapitular: estabelecemos que a reta é uma figura geométrica que não faz curva, que só tem comprimento, não possui largura ou espessura, e esse comprimento é infinito.

Professor: Vocês acham que, se agora essa figura fizesse curva, faria sentido chamá-la de semirreta?

Alunos: Acho que não. Porque aí mudaria completamente a figura. Acho que passaria a ser uma curva infinita.

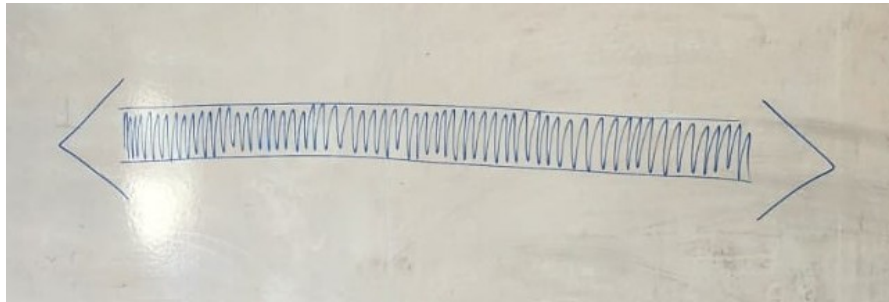
Professor: E se eliminássemos a condição de ter apenas comprimento? Se agora a figura tivesse também largura ou espessura?

Alunos: Isso poderia ser. Porque, se olharmos de longe, às vezes uma coisa que parece ser fina, como uma linha, pode ser mais grossa, como um cano. E ela ainda seria reta, que é o principal.

Professor: Excelente observação. Vamos refletir sobre essa ideia. Ela é ótima para a nossa discussão. Mais alguém pensou algo parecido, mas não quis falar? Vamos simular isso no quadro.

O professor fez uma ilustração (Figura 4) no quadro e deu prosseguimento à atividade, convidando os alunos a refletir e questionando-os.

Figura 5 – Registro em quadro sobre semirretas

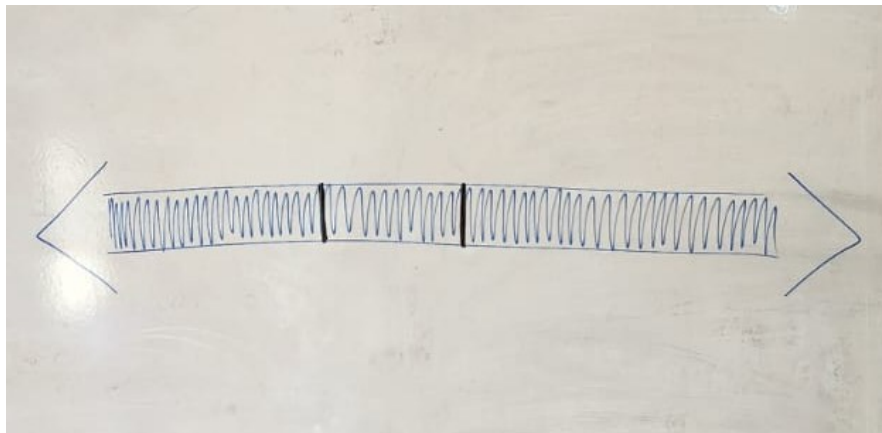


Fonte: acervo do autor, 2024.

Professor: Observem, a parte em azul representa a nossa reta. Imaginem que, além da nossa área de observação, ela continua infinitamente tanto para a esquerda quanto para a direita.

Após isso, o professor retorna ao quadro e faz uma pequena adição na ilustração (Figura 5). Ele traça dois segmentos de retas verticais e retoma o raciocínio, dando continuidade ao diálogo com a turma.

Figura 6 – Registro em quadro sobre semirretas



Fonte: acervo do autor, 2024.

Professor: Agora, observando o quadro, que figura chama mais a atenção de vocês?

Alunos: Agora é um retângulo?

Professor: Certo. Mais alguém acha que é um retângulo? Alguém consegue ver outra figura?

Alunos: Diferente da reta que tínhamos no início, eu só consigo ver o retângulo.

Professor: Então, todos concordam com o colega? Estamos todos vendo a mesma coisa? Eu também estou vendo um retângulo. Vamos recapitular: a parte azul representa uma reta e ela é infinita, certo?

Professor: Se a parte azul é infinita, eu poderia deslocar essas retas pretas mais para a esquerda e para a direita, certo? O que aconteceria se eu fizesse isso?

Alunos: Continuaría tendo um retângulo no meio.

Professor: Sim. Mas agora esse retângulo seria o quê?

Alunos: Seria maior.

Professor: Isso. E como a parte azul é infinita, o que aconteceria com o retângulo se eu continuasse aumentando-o cada vez mais?

Alunos: O retângulo também poderia se tornar infinito.

Professor: Então, pensando dessa forma, a figura que imaginamos e representamos no quadro é uma reta com largura (ou espessura) ou é um retângulo?

Alunos: É um retângulo, professor.

Aluno: Mas e se fosse tipo um cano, professor, como eu falei? O cano não formaria um retângulo.

Professor: Muito bem observado! Realmente, no caso do cano, não teríamos um retângulo. Você está certo. E não se trata de uma pegadinha de professor. Você consegue me explicar por que, no cano, não formaríamos um retângulo?

Alunos: Ué, professor, porque o cano é redondo e o retângulo tem que ser reto, tipo a mesa.

Professor: Olha aí! Você acabou de responder à sua própria pergunta. Se fosse como um cano, ele seria redondo. E algo redondo é curva ou é reta?

O professor faz essa última fala enquanto segura uma folha de papel e a enrola para representar um cano. Durante a explicação, ele movimenta o objeto, alterando constantemente o ângulo de visualização para que todos os alunos possam perceber as curvas presentes na estrutura.

Alunos: É curva. E se é curva, não pode ser reta.

Professor: Exato! Foi a primeira característica que eliminamos, certo? Estamos tentando entender o que é uma semirreta, mas já sabemos que ela não pode ser curva.

Professor: Agora só falta pensarmos sobre mais uma característica: o fato de a reta ser infinita, ou seja, de não ter começo nem fim.

Alunos: Então é isso! É como usamos o tempo todo nas continhas de geometria. É uma reta que não é infinita.

Professor: Será? Vamos pensar com calma. Ainda temos dois conceitos para analisar: semirreta e segmento de reta. O que você disse corresponde a uma parte de algum desses conceitos.

Professor: Para descobrirmos onde isso se encaixa, precisamos ter uma noção clara do que estamos buscando. Já refletimos que a semirreta deve ser muito parecida com uma reta, então seguimos nessa direção. Mas e o segmento de reta? Vocês já ouviram essa expressão antes? Sabem o que significa?

Alunos: Já ouvimos sim. Nós somos alunos do segundo segmento. Mas não sei exatamente o que significa. Acho que é só outra forma de chamar o colégio, tipo primário e ensino médio.

Professor: Ótima observação! Mas que tal investigarmos um pouco mais? Sempre que não souberem algo, pesquisem! Sejam curiosos. Pesquise no Google: "o que é segmento?".

Alunos: Professor, já apareceu aqui algo sobre geometria. Diz que é uma porção de uma reta ou curva limitada por dois pontos.

Professor: E o que vocês entenderam disso?

Alunos: Nada, professor.

Professor: Tem mais alguma explicação aí? Alguma outra informação?

Alunos: Sim, tem outra definição que não fala de matemática. Diz que é qualquer parte em que se pode dividir algo.

Professor: Essa já conseguimos entender melhor, certo? O que podemos concluir a partir disso? Segmento tem a ver com o quê?

Alunos: Com partes!

Professor: Isso mesmo! No exemplo do colégio que vocês citaram, temos o primeiro segmento e o segundo segmento do ensino fundamental. São duas partes em que ele é dividido.

Professor: Agora, uma dica: o ensino fundamental é dividido em dois segmentos, e cada um deles tem um começo e...?

Alunos: Um fim! Então, segmento é algo que tem começo e fim?

Professor: Exatamente! E é aí que se encaixa a ideia da reta finita, mencionada pelo colega. Se a reta é finita, ela tem começo e fim. Então já sabemos que o segmento de reta tem essas características. Mas ainda falta entendermos a semirreta.

Alunos: Agora ficou complicado, professor. Porque ou a reta é infinita ou ela tem começo e fim, como o segmento. Não faz sentido existir uma semirreta!

Professor: Vou dar mais uma dica. Vamos voltar à reta numérica. Por onde ela começava? E onde ela terminava?

Alunos: Ela começa no zero, mas não tem fim. Ela cresce para sempre porque os números são infinitos.

Professor: Isso mesmo! Já discutimos que, quando representamos os números com uma reta, fazemos isso para destacar as similaridades entre esses dois conceitos matemáticos. Como vocês disseram, os números são infinitos. E a reta?

Alunos: A reta também é infinita.

Professor: Exato! Os números começam e continuam crescendo para sempre. E a reta numérica, que os acompanha, o que acontece com ela?

Alunos: Já entendi, professor! A semirreta tem um ponto de início, mas não tem fim. Ela é infinita, assim como os números, e só vai aumentando.

Professor: Muito bem! Esse é um exemplo de semirreta: uma que tem um ponto inicial, e se estende infinitamente em uma direção. Mas agora, vamos pensar nos números negativos. O que acontece com a reta numérica quando olhamos para eles? Vocês sabem em que número os negativos começam?

Alunos: Ué, começa no zero, depois vem o menos um, o menos dois, o menos três e assim por diante.

Professor: Mas esses números estão ficando maiores ou menores? Lembrem-se de que são negativos.

Alunos: Ah, verdade! Eles estão ficando cada vez menores. Agora fiquei confuso.

Professor: E é justamente aí que precisamos colocar nossas ideias no lugar. Quando organizamos algo, geralmente começamos pelo menor ou pelo maior?

Alunos: Pelo menor e seguimos até o maior.

Professor: Então, pensando nos números negativos, qual é o maior número deles na reta numérica?

Alunos: É o menos um.

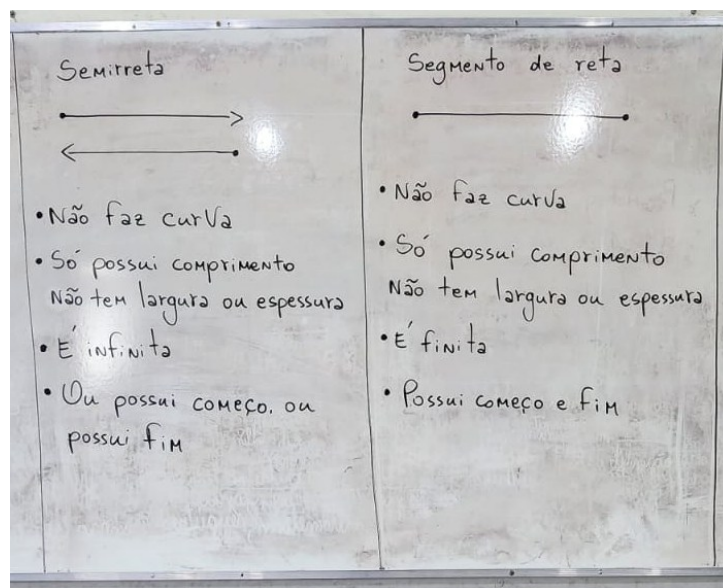
Professor: Exato! Agora, olhando para a reta numérica negativa, sabemos onde ela começa ou onde ela termina?

Alunos: Ah, é mesmo! Então também tem a semirreta que tem fim, mas não tem começo.

Professor: Muito bem! Agora conseguimos organizar todas as ideias. Vejam só: A reta não faz curva, tem apenas comprimento, é infinita e não tem começo nem fim. A semirreta tem uma dessas características modificadas: ou tem começo e se estende infinitamente em uma direção, ou tem um fim, mas se estende infinitamente na outra. O segmento de reta tem um ponto inicial e um ponto final, como se cortássemos um pedaço da reta.

Mais uma vez, o professor registra no quadro os conceitos construídos coletivamente durante a interação em sala de aula, conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 7 – Registro em quadro sobre semirretas e segmentos de retas



Fonte: acervo do autor, 2024.

Após esse início promissor, que, segundo o professor pesquisador, demonstrou um envolvimento dos alunos superior ao observado nas aulas tradicionais, a intervenção avançou para a segunda atividade. Nessa etapa, os estudantes receberam barras de papel (Figura 2) representando segmentos de reta e foram desafiados a realizar operações de soma e subtração de forma geométrica, além de comparar o comprimento dos segmentos, identificando quais eram maiores ou menores.

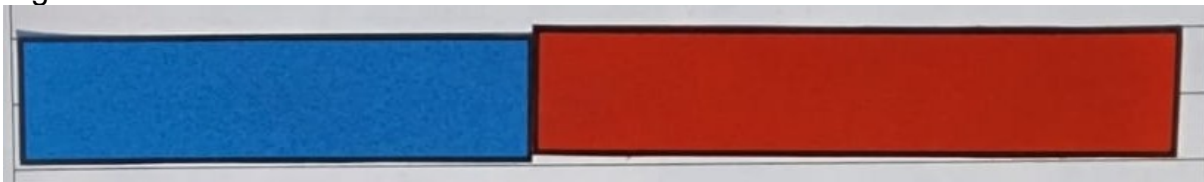
A atividade foi planejada com base nas argumentações de Boaler (2018), que defende a transformação de atividades fechadas em abertas. Esse princípio norteou a proposta, pois, embora os estudantes já dominassem as operações de soma e subtração, foram desafiados a aplicá-las de maneira não convencional, estimulando um raciocínio matemático mais analítico e criativo.

Dessa forma, cada grupo de alunos recebeu dois segmentos de reta e foi desafiado a responder às seguintes perguntas: Como ficaria a soma e a subtração desses dois segmentos de reta? Qual dos segmentos é maior? Além de responder, os estudantes deveriam registrar suas justificativas, explicando o raciocínio por trás de cada resposta.

A Figura 7 apresenta a resposta geométrica dada por um dos grupos para a soma. Como todos os grupos chegaram à mesma solução, com variações apenas nas cores e tamanhos dos segmentos de reta, decidimos ilustrar apenas com essa

imagem. Após a figura, apresentamos as justificativas fornecidas pelos grupos de alunos.

Figura 8 – Soma



Fonte: acervo do autor, 2024.

Grupo A: Estamos somando o comprimento da reta roxa com o comprimento da reta amarela, o que resulta nesse tamanho total.

Grupo B: As retas têm apenas comprimento, então devemos somá-las lado a lado, de forma que fiquem deitadas.

Grupo D: Se a reta azul tivesse comprimento 5 e a reta verde tivesse comprimento 6, o resultado da soma seria 11. Montamos dessa forma porque é onde a medida total chega a 11.

Grupo F: Formamos uma nova reta juntando o início da reta roxa com o fim da reta vermelha. Assim, se a reta roxa vale 6 e a vermelha vale 3, a soma será 9.

Grupo G: A imagem representa a soma porque, ao juntar as extremidades das duas retas, criamos uma nova reta com o comprimento aumentado.

Grupo H: Pegamos o comprimento da reta verde e juntamos com o comprimento da reta vermelha. Assim, obtemos uma nova reta com a soma dos dois comprimentos. $verde = g, vermelho = r \rightarrow g + r = v$.

Grupo I: Juntamos os comprimentos para obter um segmento maior.

Grupo J: Conseguimos somar juntando os comprimentos. $Azul = a, vermelho = v \text{ e } a + v = s, \text{ sendo } s = \text{soma}$.

Inicialmente, os alunos enfrentaram dificuldades nesta atividade. Eles não aceitavam bem a ideia de somar sem que houvesse uma transformação dos elementos envolvidos na operação. Diante dessa angústia, o professor iniciou um diálogo com os estudantes para tranquilizá-los, assegurando que poderiam associar a soma de formas que já conheciam com a proposta geométrica, explorando as similaridades entre aritmética, álgebra e geometria para chegar à resolução do problema. O professor também enfatizou a importância de entender os conceitos, o que cada elemento significava e como esse entendimento seria muito útil na resolução do problema.

Superada a resistência inicial, provocada por um problema simples, mas apresentado de maneira distinta daquela à qual os estudantes estavam habituados, as respostas elaboradas foram apresentadas, conforme exposto anteriormente. Mantendo a abordagem problematizada (Menezes; Quintaneiro, 2023), o professor questiona os alunos sobre suas produções, indagando o porquê de terem feito daquela forma e não de outra.

Sendo assim, o professor fez uma nova montagem dos segmentos de reta (Figura 8) e questionou o porquê a soma não poderia ser feita daquela maneira. A seguir, apresentamos a imagem e as argumentações dos alunos.

Figura 9 – Questionamento sobre a soma



Fonte: acervo do autor, 2024.

Grupo A: A largura da reta é sempre zero. Por isso, o roxo não está somando ao amarelo.

Grupo B: A reta não tem largura, ou seja, estamos tentando somar zero. Devemos somar o comprimento.

Grupo C: Quando está assim, uma em cima da outra, estamos tentando somar a largura e, nesse caso, o resultado é sempre zero.

Grupo D: Assim, estamos tentando somar as larguras, o que não é possível, pois a reta só tem comprimento.

Grupo E: Esta figura não está correta para a soma porque a reta tem largura igual a zero.

Grupo F: Desse jeito, estamos juntando a largura, que é sempre zero, pois a reta não tem largura. E se for medir o comprimento, continua dando só o do roxo, que é maior.

Grupo G: Essa figura não representa soma, pois não aumenta o comprimento.

Grupo H: Isso não é soma de retas, pois o comprimento da verde não está somando ao comprimento da vermelha. A imagem não está tentando aumentar o comprimento, está tentando aumentar a largura, sendo que a largura equivale a zero.

Grupo I: Colocar uma reta ao lado da outra desse jeito não resulta em soma dos comprimentos. Também não soma a largura, pois a largura tem valor zero.

Grupo J: Não conseguimos somar porque a reta não tem largura.

Grupo K: Não tem como somar porque a reta vermelha está em cima da reta roxa e a reta só tem comprimento, não largura.

Ao trabalhar esse segundo questionamento, o professor percebeu menos resistência à atividade. Os alunos deixaram de reclamar do material ou da dinâmica diferente e passaram a se concentrar em relatar suas percepções sobre o primeiro e o segundo casos. No que diz respeito à construção conceitual, a atividade estava atendendo às expectativas, pois os alunos conseguiram fazer a conexão entre a primeira discussão sobre retas, semirretas e segmentos de reta e a manipulação do material.

Na próxima imagem (Figura 9), apresentamos como os alunos realizaram a montagem geométrica para a subtração. Além da imagem, em seguida, estão as justificativas escritas apresentadas pelos grupos.

Figura 10 – Subtração



Fonte: acervo do autor, 2024.

Grupo A: O amarelo está subtraindo o roxo, cortando ele.

Grupo B: Para subtrair, temos que tirar a medida do azul do vermelho e ver o que sobra do vermelho, que é o resultado.

Grupo D: Dessa forma, tiramos o azul do verde e o que sobra é o resultado.

Grupo E: A gente faz assim porque o amarelo é maior que o azul. Aí tiramos a parte igual ao azul e vemos o que sobra do amarelo.

Grupo F: Nessa figura, conseguimos ver a diferença entre o roxo e o amarelo. Tirando o menor do maior, vemos a diferença de tamanho.

Grupo H: Pegamos o comprimento da verde e subtraímos o comprimento da vermelha, e assim conseguimos ver o quanto a verde é maior que a vermelha. $verde = g, vermelho = r \rightarrow g - r = a.$

Grupo I: Se o amarelo valesse 10 e o azul valesse 5, tiraríamos 5 de 10 e a resposta seria 5. Então, sobrepomos o azul no começo do amarelo.

amarelo = a , *azul* = $z \rightarrow a - z = c$. O c indica o tamanho que sobra do amarelo.

Grupo J: Colocamos um em cima do outro para representar. *vermelho* = v , *azul* = a . E o resultado da conta é $v - a$.

Grupo K: Não dava para fazer a operação se fosse o roxo em cima do vermelho, então colocamos o vermelho, que é menor, em cima do roxo.

Grupo M: Alinhamos os dois começando juntos para ver o que ia sobrar no final.

Nesta proposta, os alunos puderam visualizar fisicamente o conceito de Diferença, resultado da operação de subtração. Além disso, trabalharam constantemente com números representando comprimentos e distâncias, em vez de quantidades. Essa abordagem contribuiu para a construção e a atribuição de significado aos conceitos matemáticos, o que se refletiu nas justificativas apresentadas pelos grupos.

Além disso, ao buscar justificativas para a imagem que representava a operação proposta, muitos alunos recorreram à abordagem algébrica, estabelecendo conexões entre álgebra e geometria. Houve também grupos que atribuíram valores fictícios aos segmentos de reta, analisaram visualmente o que acontecia e, em seguida, associaram as representações geométricas aos elementos correspondentes na operação aritmética, o que evidencia uma ampliação na abordagem matemática por parte dos alunos.

Seguimos adiante expondo a explicação dos alunos sobre qual segmento é maior. Fizemos esse questionamento porque a ordenação é um tópico constantemente abordado no ensino básico. A seguir, apresentamos as respostas dos alunos:

Grupo A: O roxo é maior porque tem o mesmo tamanho do amarelo e mais um tamanho adicional. *roxo* = r , *amarelo* = $a \rightarrow a + x = r$

Grupo B: O vermelho é maior porque conseguimos encaixar o azul dentro dele, mas não o contrário.

Grupo D: O verde é maior porque ele sobrepõe o azul, mas o azul não sobrepõe o verde.

Grupo E: A reta amarela é maior que a reta azul, pois percorre uma distância igual à azul e ainda sobra um pedaço.

Esta última pergunta teve menos respostas, tanto devido à iminência do fim da aula quanto pela dificuldade de alguns grupos em registrar no papel o que observavam e pensavam. O aspecto positivo é que as contribuições recebidas demonstram que os alunos conseguiram aplicar ideias discutidas anteriormente na explicação deste novo conceito.

O Grupo A, além de explicar, fez um registro matemático, expressando o segmento roxo em função do amarelo. Os Grupos B e C reutilizaram a ideia de sobreposição aplicada na subtração. Já o Grupo E parece ter interpretado a comparação como um deslocamento, em que os segmentos amarelo e azul percorrem juntos até o ponto em que um deles para, enquanto o maior continua.

O primeiro dia de intervenção apresentou um balanço extremamente positivo. No início das atividades, a manifestação de um dos estudantes suscitou alguns comentários inadequados, ainda que em tom de brincadeira; contudo, tal episódio foi rapidamente superado, possibilitando o estabelecimento de um diálogo produtivo que enriqueceu a aula e contribuiu significativamente para a construção de conceitos matemáticos. Em seguida, com a introdução do material manipulável, houve certa resistência inicial, porém, gradativamente, os alunos perceberam que aquilo poderia representar fisicamente as incógnitas que utilizavam constantemente em álgebra.

Após esse momento inicial de estranhamento, a maioria dos alunos conseguiu transpor para a geometria os conceitos já familiarizados na álgebra e na aritmética. Alguns fizeram o caminho inverso, justificando algebricamente as construções geométricas realizadas. No entanto, o aspecto mais relevante foi o interesse e a dedicação demonstrados na atividade. Todos os alunos participaram de alguma forma e, em sua maioria, conseguiram estabelecer conexões entre os conhecimentos matemáticos que já utilizavam e a nova abordagem proposta, o que lhes permitiu avançar na resolução dos problemas.

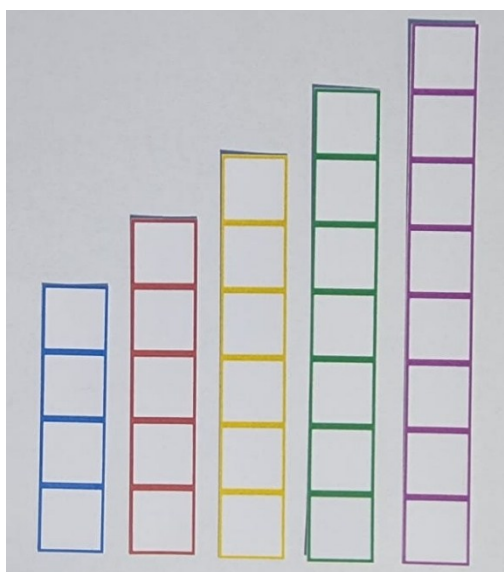
3.2 Segundo encontro

No segundo encontro, a proposta manteve o uso das barras de papel para representar segmentos de reta (Figura 2). Contudo, nesta nova etapa, foi solicitado

aos alunos que realizassem operações de multiplicação entre segmentos de reta (Apêndice B).

Inicialmente, houve muita confusão. Os estudantes não conseguiram visualizar como ficaria a montagem geométrica dessa operação. O professor tentou auxiliar de forma coletiva, conversou com a turma sobre o conceito de multiplicação, trabalhou alguns exemplos aritméticos e, por fim, entregou aos alunos um novo material manipulável. As barras, semelhantes às primeiras (Figura 2), com os mesmos tamanhos e larguras, mas dessa vez com quadradinhos (Figura 10) para auxiliar os alunos na exploração, foram distribuídas. Esse novo material tinha como objetivo ajudar os alunos a entenderem e chegar à montagem da multiplicação na forma geométrica.

Figura 11 – Segmentos de reta particionados



Fonte: acervo do autor, 2024.

Neste diálogo sobre a multiplicação, o professor optou por detalhar a representação aritmética da operação, oferecendo aos alunos a oportunidade de refletirem sobre como poderiam traduzir esse conhecimento para o contexto geométrico. Assim como em todas as discussões, a abordagem adotada foi problematizada, com o professor questionando os alunos, trabalhando a partir de suas contribuições e, por fim, chegando a conclusões coletivas. A seguir, apresentamos o diálogo sobre a multiplicação:

Professor: Nosso objetivo é realizar a multiplicação desses segmentos de reta, mas antes de prosseguirmos, precisamos compreender o que significa multiplicar. Alguém poderia me explicar o que é multiplicação?

Alunos: Multiplicar é somar o mesmo número várias vezes. Por exemplo, se tivermos três vezes sete, o sete deve aparecer três vezes, e somamos para achar o resultado, que é vinte e um.

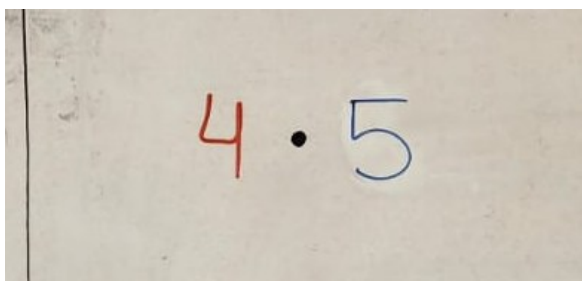
Professor: Excelente. E alguém tem uma ideia de como podemos aplicar isso aos segmentos de reta?

Alunos: Bem, se o segmento azul valesse quatro e o segmento amarelo valesse cinco, eu colocaria um segmento amarelo ao lado do outro quatro vezes, formando uma reta que teria comprimento vinte. Mas, sem saber os números, não sei como conseguiríamos fazer isso.

Professor: Entendi. Vamos refletir um pouco sobre o que está acontecendo, analisando os números que você sugeriu.

Neste momento, o professor se volta ao uso do quadro para ilustrar e fornecer um componente visual ao raciocínio que será desenvolvido. Inicialmente, ele escreve no quadro a operação "quatro vezes cinco" (Figura 11) e retoma o diálogo com os alunos.

Figura 3 – Registro em quadro sobre multiplicação 1



Fonte: acervo do autor, 2024.

Professor: Vamos voltar um pouco. No quadro, estamos vendo uma operação com números, certo? Mas o que esses números significam?

Alunos: Significam o valor.

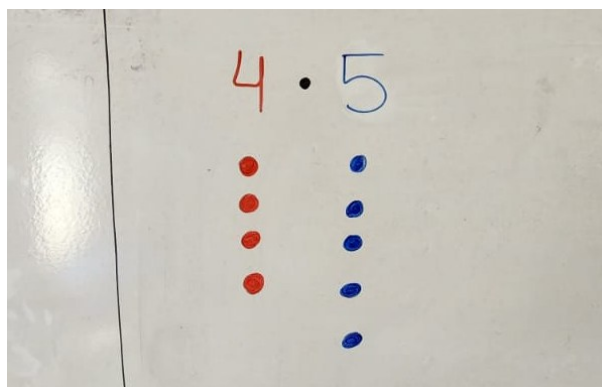
Professor: Não exatamente. Vamos tentar de outra maneira. Se eu tiver aquele número de laranjas dentro da minha mochila, o número representaria o quê?

Alunos: A quantidade de laranjas.

Professor: Isso! O primeiro significado que vocês aprenderam sobre os números é que eles representam quantidades. Então, se eu quisesse substituir esse número por bolinhas, eu teria que colocar aqui quatro bolinhas. Concordam? E no outro, teria que colocar cinco bolinhas.

Junto à última fala, o professor faz o registro no quadro (Figura 12). Após o registro, ele prossegue com a linha de raciocínio.

Figura 13 – Registro em quadro sobre multiplicação 2



Fonte: acervo do autor, 2024.

Professor: Vamos retomar o conceito de multiplicação, mas, desta vez, utilizando bolinhas vermelhas e bolinhas azuis. Imaginem que vocês não sabem quantas bolinhas de cada cor existem. Chamem-nas apenas de bolinhas vermelhas e bolinhas azuis.

Alunos: Acho que podemos fazer assim: a quantidade total de bolinhas azuis se repete na mesma quantidade de bolinhas vermelhas e, depois, somamos tudo.

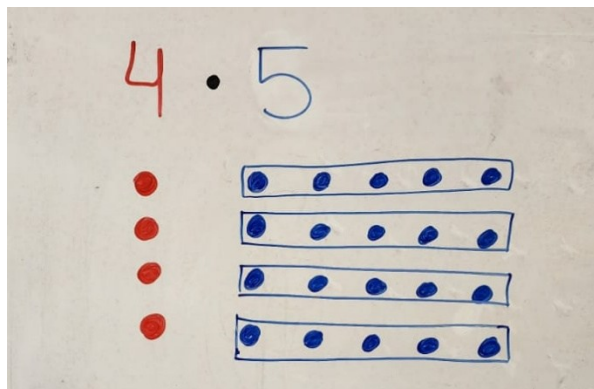
Professor: E se, em vez de falarmos na quantidade total de bolinhas vermelhas, considerarmos cada uma individualmente? Não acham que assim fica mais fácil de entender?

Alunos: Então, para cada bolinha vermelha, repetimos a quantidade total de bolinhas azuis e, depois, somamos tudo?

Professor: Não sei. Vamos tentar montar isso no quadro para verificar se a ideia faz sentido.

Neste momento, o professor reorganizou as representações visuais no quadro. Ele dispôs o grupo de quatro bolinhas em uma linha vertical e o grupo de cinco bolinhas azuis em uma linha horizontal. Para cada bolinha vermelha, posicionou ao lado um grupo correspondente de bolinhas azuis, formando a Figura 13. Durante esse processo, manteve o diálogo contínuo com a turma.

Figura 14 – Registro em quadro sobre multiplicação 3



Fonte: acervo do autor, 2024.

Professor: Vejam, o grupo azul tem de se repetir para cada elemento do grupo vermelho. Então, é só eu ir arrumando aqui do lado, certo?

Professor: Bom, todos sabem quanto é quatro vezes cinco, certo? Então, quantas bolinhas devem ter no resultado? E quantas bolinhas temos aqui ao todo?

Alunos: Tem que ter 20 bolinhas, professor. Mas aí tem 24. Está errado.

Professor: Sim. Mas por que está errado?

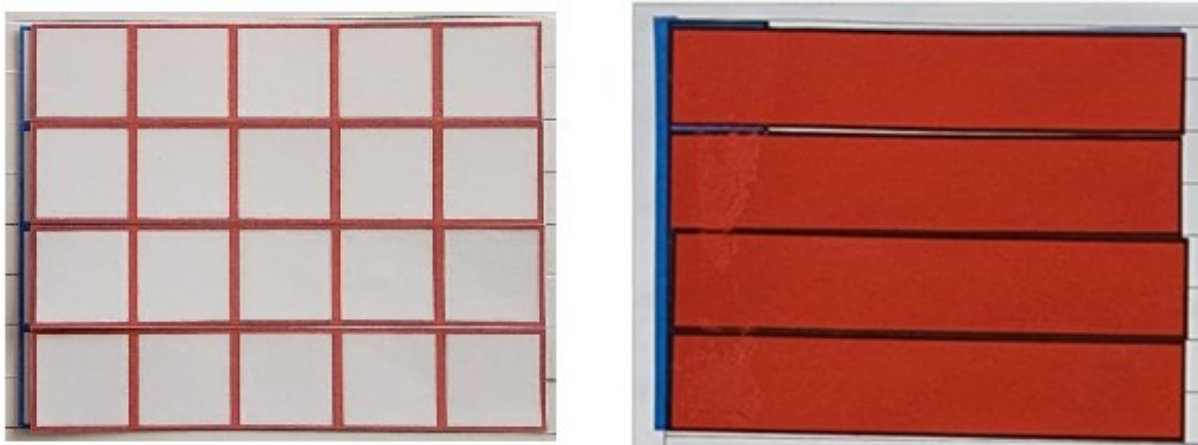
Alunos: Dá errado se a gente contar tudo, azul e vermelha. Mas se a gente contar só as azuis, dá certo.

Professor: Exatamente. E alguém sabe o porquê disso?

Alunos: É que, no fim, temos que somar só as azuis, que representam o cinco. O cinco tem de aparecer quatro vezes. Se a gente soma também as vermelhas, estamos fazendo $4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 4$, o que está errado.

Após essa reflexão coletiva, cujo objetivo foi aprofundar as percepções dos alunos sobre a multiplicação e orientá-los para uma possível associação da operação com a geometria, os estudantes retornaram ao trabalho com os segmentos de reta. O professor sugeriu que, inicialmente, realizassem a tarefa utilizando os segmentos divididos em quadradinhos (Figura 10) e, posteriormente, voltassem aos segmentos sem essa divisão (Figura 2). Após concluírem essa etapa, os alunos apresentaram, de modo geral, imagens similares à Figura 14 como resposta.

Figura 15 – Multiplicação de segmentos de reta



Fonte: acervo do autor, 2024.

Com os grupos chegando aos produtos da multiplicação de dois segmentos de reta, a discussão foi retomada. O professor voltou a fazer questionamentos com o objetivo de, por meio da reflexão, levar os alunos a perceberem características da operação e a construírem conceitos matemáticos.

Professor: Todos sabem o nome da figura que obtiveram como resposta?

Alunos: Retângulo.

Professor: Exatamente. E na soma, qual foi a figura que tivemos como resposta?

Alunos: Tivemos outro segmento de reta.

Professor: Vejam, a ideia era que colocar os segmentos de reta um ao lado do outro não geraria uma soma. Porém, para criar o retângulo, a ideia matemática é que colocamos infinitos segmentos de reta, uns ao lado dos outros, até que consigamos formar o retângulo.

Professor: E alguém lembra por que o retângulo é diferente da linha reta?

Alunos: Porque o retângulo é uma superfície.

Professor: Isso. Uma superfície ou uma área. Alguém lembra a fórmula da área do retângulo?

Alunos: É base vezes altura.

Professor: Então, no nosso exemplo (Figura 14), quem é a base e quem é a altura?

Alunos: A base é a reta vermelha e a altura é a reta azul.

Professor: Então, de onde vem a área?

Alunos: Da multiplicação de duas retas.

Pelo relato, fica perceptível que o processo é consideravelmente mais trabalhoso. No entanto, os alunos atuam como agentes ativos na construção de conceitos e significados matemáticos. Anteriormente, eles apenas decoravam que, para calcular a área de um retângulo, era necessário multiplicar a base pela altura. Ao longo desse processo, tiveram a oportunidade de visualizar a área do retângulo emergindo a partir da multiplicação. Essa abordagem foi fundamental para que compreendessem, de forma concreta, como a área é gerada pela multiplicação, justificando, assim, o motivo pelo qual utilizamos essa operação para calculá-la.

Para finalizar o segundo encontro, o professor preparou uma última problematização. Após estabelecer a relação entre a multiplicação e a área, ele propôs novos questionamentos aos alunos: Como vocês explicariam a multiplicação de segmentos de reta? A multiplicação de dois segmentos de reta resultará sempre em um retângulo? E se inclinarmos um dos segmentos, sem alterar suas medidas, ainda estaríamos realizando uma multiplicação? Seria possível obter produtos diferentes ao multiplicar os mesmos elementos?

Para auxiliar nessa exploração, o professor confeccionou retângulos articulados (Figura 15) utilizando os mesmos segmentos de reta empregados pelos alunos ao longo da atividade (Apêndice B). Nesse momento, o material manipulável mostrou-se extremamente eficaz para esclarecer quaisquer dúvidas que surgissem. Ao manuseá-lo e comparar os tamanhos, os alunos rapidamente chegavam a conclusões sobre os questionamentos propostos pelo professor.

Figura 16 – Retângulos articulados 1



Fonte: acervo do autor, 2024.

A seguir, apresentamos algumas das considerações feitas pelos alunos em resposta aos questionamentos propostos pelo professor.

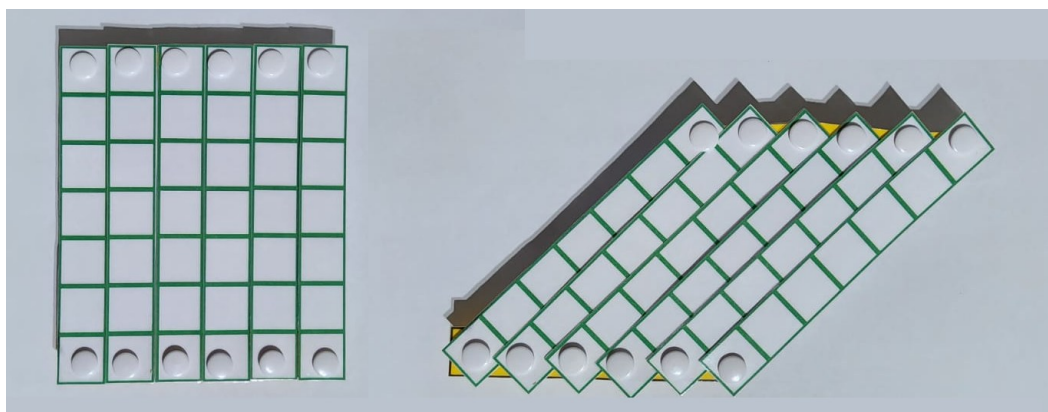
Alunos: Na multiplicação com duas retas, uma delas percorre a outra até cobri-la completamente.

Alunos: Se inclinarmos um dos segmentos, a área do retângulo diminui. Por isso, acredito que a multiplicação ocorra apenas quando a área é a máxima possível, pois não faz sentido que a operação tenha diferentes resultados. Para ser multiplicação, os segmentos devem formar um ângulo de noventa graus.

Alunos: Se observarmos atentamente, ao inclinar um dos segmentos, ele começa a se sobrepor ao outro. Ao mesmo tempo, na base, começa a aparecer a parte do segmento que está por baixo. Eu interpreto isso como uma multiplicação incompleta, pois uma parte da base e uma parte dos segmentos ficam ocultas. Por isso, a área resultante é menor. Se construíssemos esse retângulo com os quadradinhos, seria mais fácil visualizar essa perda de área.

Seguindo a sugestão dos alunos, posteriormente foi confeccionado um retângulo articulado com os segmentos de reta seccionados em quadradinhos. A construção está apresentada na Figura 16.

Figura 17 – Retângulos articulados 2



Fonte: acervo do autor, 2024.

Dessa forma, encerra-se o segundo dia de atividades. Observou-se um grande interesse dos alunos em manipular o material, que passaram a encarar as questões como um desafio, semelhante a um quebra-cabeça, no qual a resposta já estava presente e cabia a eles perceberem-na. O suporte visual e manipulativo foi essencial para que os estudantes pudessem verificar fisicamente aquilo que imaginavam acontecer.

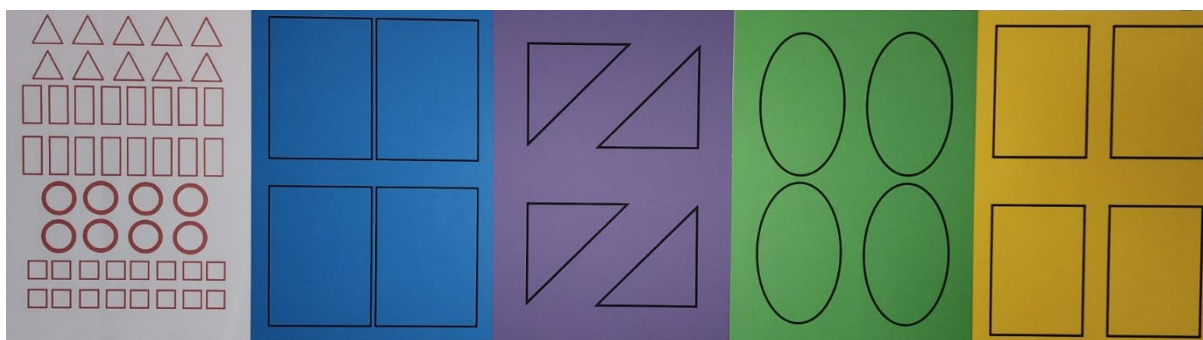
A manipulação também facilitou e enriqueceu o desenvolvimento conceitual. Inicialmente, os estudantes não tinham ideia de como a multiplicação poderia ser aplicada geometricamente. No decorrer do processo, eles observaram os fenômenos envolvidos e reformularam seu conceito de multiplicação para abranger também essa abordagem na matemática.

Além do interesse pelo material manipulável e da ampliação do conceito, os alunos participaram ativamente do estabelecimento de conexões entre a multiplicação na aritmética, na álgebra e na geometria. Eles conduziram todo o processo de desenvolvimento que lhes permitiu afirmar com segurança que o produto de dois números, mesmo que sejam desconhecidos (incógnitas), pode ser compreendido como a área de um retângulo.

3.3 Terceiro encontro

Para o terceiro encontro, decidimos abordar o conceito de medida, com o objetivo principal de construir um entendimento significativo sobre a forma como medimos áreas. Para isso, a atividade propôs que os estudantes medissem diferentes regiões – incluindo áreas retangulares, triangulares e elípticas – utilizando distintas figuras geométricas, como quadrados, retângulos, círculos e triângulos. Ao final, os alunos deveriam apresentar suas próprias percepções e justificativas para a escolha de determinada figura na medição de áreas. A Figura 17 apresenta o material utilizado (Apêndice C).

Figura 18 – Áreas e figuras geométricas para medição



Fonte: acervo do autor, 2024.

Além da exploração, os alunos deveriam responder a algumas questões fundamentais: o que significa medir? Como determinar o comprimento de um segmento de reta? De que forma poderiam medir a área de um retângulo? E, entre as figuras utilizadas na atividade, qual seria a mais apropriada para essa medição e por quê?

A intervenção teve início, mais uma vez, com uma conversa sobre as concepções dos alunos. Esse diálogo mostrou-se bastante proveitoso nas duas primeiras atividades, pois permitiu que, por meio dos questionamentos do professor e das perspectivas dos alunos, os conceitos fossem gradualmente desenvolvidos em conjunto. A seguir, apresentamos parte dessa dinâmica:

Professor: Então, pessoal, vocês sabem o que significa medir?

Alunos: Medir é quando usamos uma trena para ver a altura de uma pessoa.

Professor: Certo, esse é um exemplo. Mas, de maneira geral, o que significa medir? Pensem no que vocês disseram: usamos uma trena para medir a altura de uma pessoa. Nesse processo, quantos objetos são necessários?

Alunos: Como assim? Não estamos entendendo.

Professor: Percebam: usamos a trena para medir, por exemplo, uma mesa. Seria possível medir se tivéssemos apenas a mesa ou apenas a trena?

Alunos: Sim. Se tivéssemos só a mesa, poderíamos usar o palmo. Mas se tivéssemos apenas a trena, não teríamos o que medir.

Professor: Muito bom. Vamos pensar sobre isso. No primeiro caso, ainda temos dois elementos, certo? Apenas substituímos a trena pelo palmo. Já no segundo caso, temos apenas um objeto, e o colega disse que não há nada para medir. Então, para que a medição aconteça, precisamos de, no mínimo, quantos objetos?

Alunos: Precisamos de dois. Um para medir e outro para ser medido.

Professor: Ou seja, medir é estabelecer uma relação entre duas coisas. Se eu quiser, posso medir esta mesa usando o comprimento de uma caneta. Vejam: para cobrir toda a extensão da mesa, preciso de quatro canetas. Ou seja, estou verificando quantas vezes o comprimento da caneta se encaixa na mesa.

Professor: Então, quando medimos algo, estamos fazendo uma comparação, certo?

Alunos: Sim, estamos comparando quantas vezes uma coisa cabe dentro da outra.

Professor: E como vocês fariam para medir esta reta que desenhei no quadro?

Alunos: Com a régua.

Professor: Ótimo! E a régua se assemelha a qual figura geométrica?

Alunos: A régua é uma reta.

Professor: E se agora eu quiser medir essa curva que desenhei no quadro?

Alunos: Então vamos precisar usar uma curva?

Professor: Não exatamente. Queremos uma associação semelhante, mas não é essa. Para encontrar a resposta, precisamos relembrar as propriedades da reta. Alguém se lembra?

Alunos: A reta é infinita, não tem começo nem fim, e a única medida que possui é o comprimento.

Professor: Certo. Então, quando eu queria medir a reta desenhada no quadro, meu objetivo era medir um comprimento, correto? Sendo assim, sempre que eu quiser medir um comprimento, devo utilizar o quê?

Alunos: Vamos usar outra reta.

Professor: E a curva? Ela possui alguma outra medida além do comprimento? Ela tem largura? Tem espessura? Então, para medir a curva, o que devemos utilizar?

Alunos: Então, também devemos usar uma reta.

Professor: Exatamente. Sempre que quisermos medir um comprimento, devemos utilizar outro comprimento conhecido como referência, assim como usamos o comprimento da caneta para essa comparação.

Professor: E se quisermos medir uma área retangular, com o que podemos medir?

Alunos: Se, para medir uma reta, usamos outra reta, então, para medir um retângulo, vamos usar outra figura retangular.

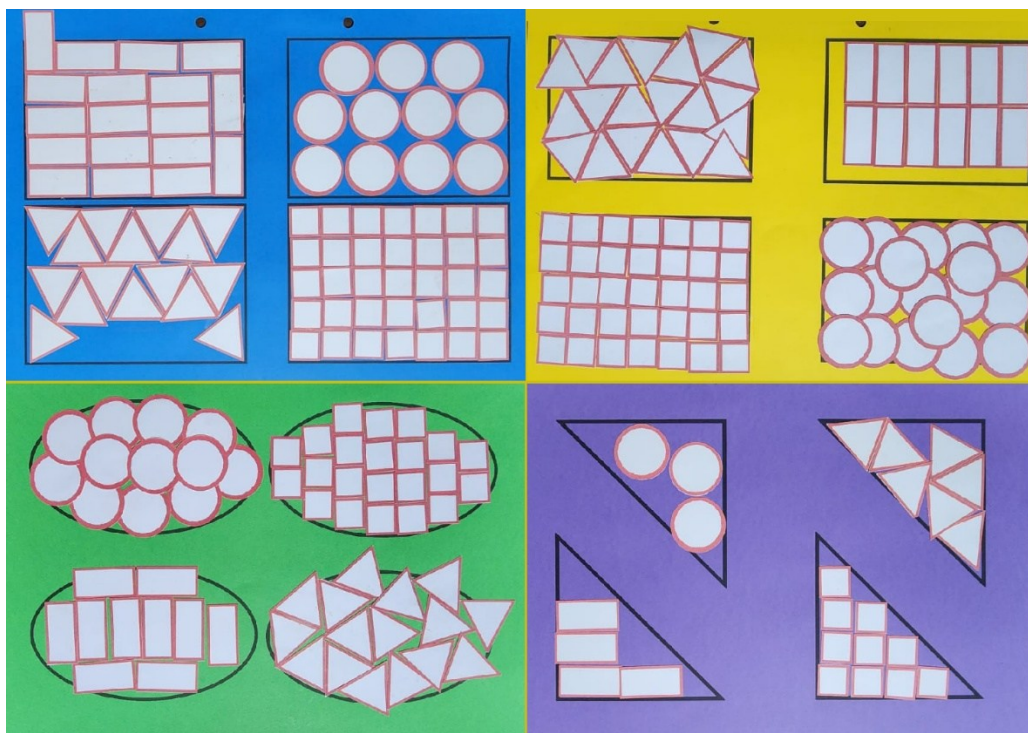
Professor: E para medir uma área circular?

Alunos: Vamos usar outros círculos?

Professor: Então, para analisar essa parte, vamos realizar a atividade com o material manipulável e vocês me dirão a que conclusão chegam.

Neste momento, o professor entregou o material aos alunos para que eles realizassem a medição de várias áreas com diferentes elementos e, assim, criassem suas próprias percepções sobre a medição de áreas. Vejamos abaixo (Figura 18) algumas das produções dos alunos.

Figura 19 – Medindo áreas



Fonte: acervo do autor, 2024.

Após a experiência prática em que os alunos foram desafiados a medir áreas utilizando diferentes figuras geométricas, vamos apresentar suas percepções sobre o tema abordado na aula. A seguir, estão algumas de suas contribuições.

Grupo A: Medir significa comparar uma quantidade de uma grandeza com outra da mesma natureza. Para medir um comprimento, utilizamos outro comprimento. Para medir uma área, podemos realizar um cálculo multiplicando a base pela altura. Os quadrados são a melhor opção para medir uma área, pois se ajustam mais facilmente.

Grupo B: Medir é fazer uma comparação, associando o tamanho de uma coisa à outra. Para medir o comprimento, precisamos colocar uma reta sobre o objeto que queremos medir. Para medir uma área, é necessário usar outra área para comparar os tamanhos. As melhores opções para medir uma área são o quadrado, pois ele é menor e cobre os espaços mais facilmente, e o retângulo, que também cobre bem, embora possa deixar alguns buracos por ser maior.

Grupo E: Medir é comparar duas coisas da mesma natureza. Medimos um comprimento com outro comprimento e uma área com outra área. O quadrado foi o melhor, pois encaixava melhor. Ele deixava menos buracos e não saía tanto da figura.

Grupo F: Medir é comparar duas coisas. Para medir uma área, precisamos de outra área. A melhor solução é usar o quadrado, pois ele não deixa espaço sobrando e se ajusta melhor do que os outros.

Grupo G: Para medir um comprimento, precisamos de outro comprimento. Para medir uma área, precisamos de outra área. A melhor figura para medir

a área foi o quadrado, pois ele cobriu melhor as superfícies. A pior foi o círculo, pois deixava muito espaço entre as figuras.

Grupo H: Medir é quando usamos um objeto para cobrir outro. Para medir um comprimento, colocamos outro sobre ele, cobrindo-o por inteiro. Para medir uma área, colocamos outra área sobre ela, cobrindo-a completamente. A melhor forma de medir uma área é com o quadrado, pois ele se ajusta bem, sem deixar espaços sobrando. A pior forma foi o triângulo, que é difícil de encaixar e deixa muitos buracos. O círculo também foi ruim, pois deixa muito espaço sobrando.

Grupo J: Medir é comparar um comprimento com outro. Para medir um comprimento, usamos uma reta. Para medir uma área, utilizamos outra área. O quadrado foi a melhor opção para medir as áreas, pois cobriu melhor.

Grupo M: Medir é comparar, pelo menos, duas coisas iguais. Para medir um comprimento, usamos outro comprimento, posicionando-o de uma ponta à outra. Para medir uma área, utilizamos outra área até cobrir por completo. A melhor figura para medir a área foi o quadrado, pois cobriu mais facilmente. O círculo foi o pior para cobrir a área, pois deixou muito espaço.

Embora todos os estudantes soubessem medir, por exemplo, sua própria altura, nenhum deles demonstrou uma compreensão mais aprofundada sobre o conceito de medição. Inicialmente, não perceberam como esse conceito se relaciona com a matemática de maneira mais ampla. Nesse sentido, a problematização inicial mostrou-se uma estratégia eficaz para incentivá-los a refletir sobre o significado da medição e sua conexão com os princípios matemáticos.

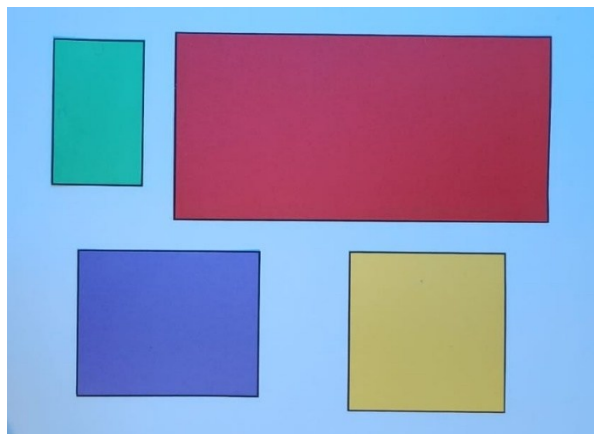
A atividade com material manipulativo foi essencial para que os alunos experimentassem e visualizassem a cobertura de diferentes áreas utilizando diversas figuras geométricas. Durante essa experiência, eles puderam desenvolver suas próprias percepções sobre quais figuras geométricas seriam mais adequadas para realizar essa medição, o que é fundamental para atribuir significado ao processo e compreender seus elementos de forma mais profunda.

Dessa forma, encerrou-se o terceiro dia de intervenção com a turma. A percepção do professor-pesquisador foi de que a tarefa cumpriu de maneira satisfatória o propósito para o qual foi planejada, isto é, possibilitar uma discussão mais aprofundada sobre as áreas dos polígonos. Para isso, ele considerava essencial que os alunos compreendessem o significado dos termos como centímetros quadrados, metros quadrados e outras unidades de medida antes de avançarem no estudo do tema.

3.4 Quarto encontro

Para este último encontro, foi planejada uma aula com maior foco na ação. No primeiro momento, os alunos receberam quatro retângulos confeccionados em papel cartão (Figura 19) (Apêndice D) e foram desafiados a organizá-los em ordem crescente, de acordo com a medida da área. Além disso, deveriam justificar, matematicamente, por que cada retângulo era maior ou menor que o outro, promovendo, assim, a reflexão e a aplicação dos conceitos trabalhados, bem como a conexão entre a geometria, a álgebra e a aritmética.

Figura 4 – Retângulos em papel cartão



Fonte: acervo do autor, 2024.

Inicialmente, os estudantes recorreram a uma justificativa visual e intuitiva, já explorada em atividades anteriores. Eles tentavam sobrepor um retângulo ao outro e, caso a sobreposição não fosse possível, concluíam que o retângulo que ficava visível em menor extensão possuía a menor área.

Neste momento, o professor interveio, conversou com os alunos e confirmou que o procedimento utilizado para ordenar os retângulos estava correto. No entanto, explicou que isso, por si só, não era suficiente para uma justificativa matemática, que era o objetivo da atividade. Assim, sugeriu que eles retornassem aos conceitos trabalhados, indicando que o caminho para a justificativa poderia ser a utilização dos conceitos de maior e menor, construídos com os segmentos de reta, bem como a compreensão de como a área retangular foi formada. Vejamos o diálogo que se seguiu:

Professor: Observem que um caminho adequado para a justificativa matemática é retomar e refletir sobre os conceitos previamente trabalhados.

Professor: Podem me dizer como a área foi criada na aula anterior?

Alunos: A área foi criada pela multiplicação de duas retas, uma na posição vertical e outra na horizontal.

Professor: Sim. Eu já perguntei isso, vou perguntar de novo: como calculamos a área de um retângulo?

Alunos: É a base vezes a altura.

Professor: Então, é aí que está o segredo. Vocês acabaram de afirmar que a área é o resultado de uma multiplicação de segmentos de reta e sabem como localizar esses segmentos no retângulo. Agora, reflitam sobre isso e conectem-no com o conceito de maior ou menor, que foi desenvolvido para os segmentos de reta nas atividades anteriores.

Professor: Mais uma dica: vocês conseguem fazer as medições da base e da altura dos retângulos? Estamos utilizando régua graduadas para isso?

Alunos: Não, professor. Você raspou as marcações da régua.

Professor: Então, não conseguimos obter o número exato, mas vocês podem identificar qual base é maior e qual é menor, assim como qual altura é maior e qual é menor. Utilizem esses elementos e, assim, o processo será bem-sucedido. E lembrem-se de anotar o que estão pensando e verificando, caso contrário, podem acabar esquecendo, o que dificultará o avanço do processo.

Após o diálogo, a turma passou a trabalhar com mais empenho. Embora ainda houvesse uma leve desconfiança, assim como nas atividades anteriores, a confiança foi aumentando gradualmente, a ponto de conseguirem avançar na tarefa e compreender melhor o que estavam fazendo na proposta. A seguir, apresentamos algumas das produções dos estudantes:

Grupo E: O vermelho é o maior e o verde é o menor. Isso porque o vermelho tem o tamanho do verde e mais algum tamanho.

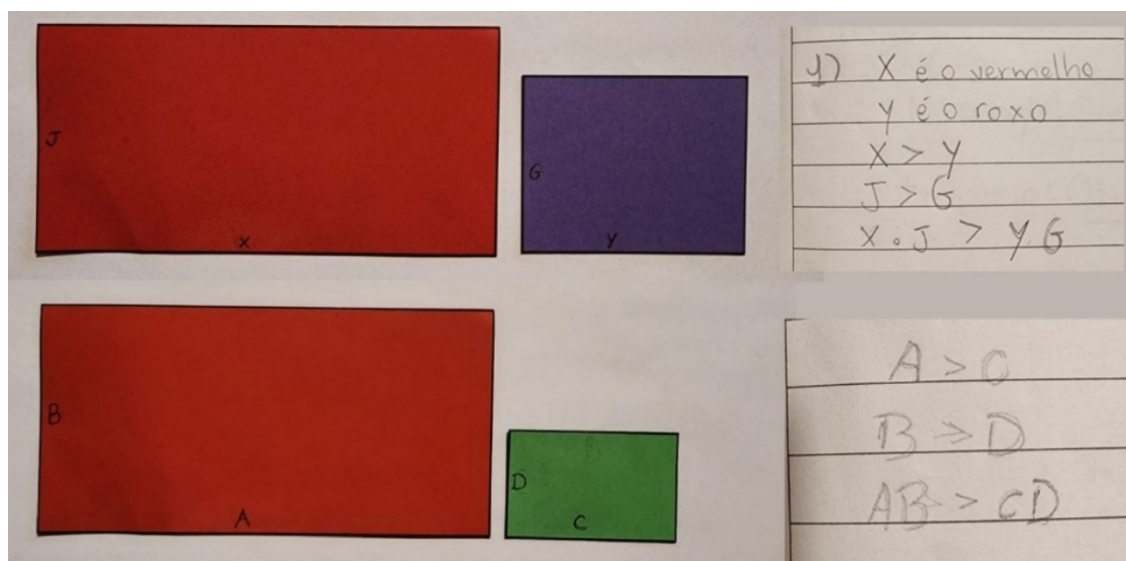
Grupo A: O vermelho é o amarelo mais alguma coisa, logo o vermelho é maior que o amarelo. A base e a altura do vermelho são maiores que a base e a altura do amarelo, por isso o vermelho é maior.

Nessa etapa da atividade, observamos que o *grupo E* conseguiu incorporar à explicação um elemento sugerido: a definição de maior ou menor construída na primeira aula. No entanto, não conseguiram, ou talvez não tenham considerado necessário, estabelecer a relação da atividade com a multiplicação dos elementos do retângulo.

Assim como o grupo E, o *grupo A* utilizou a definição de maior ou menor construída coletivamente nas aulas anteriores. Além disso, avançaram um pouco mais ao apresentar uma justificativa que relacionava os elementos dos retângulos para explicar por que um era maior que o outro. No entanto, não chegaram a uma conclusão que explicitasse como essa relação implica no resultado final.

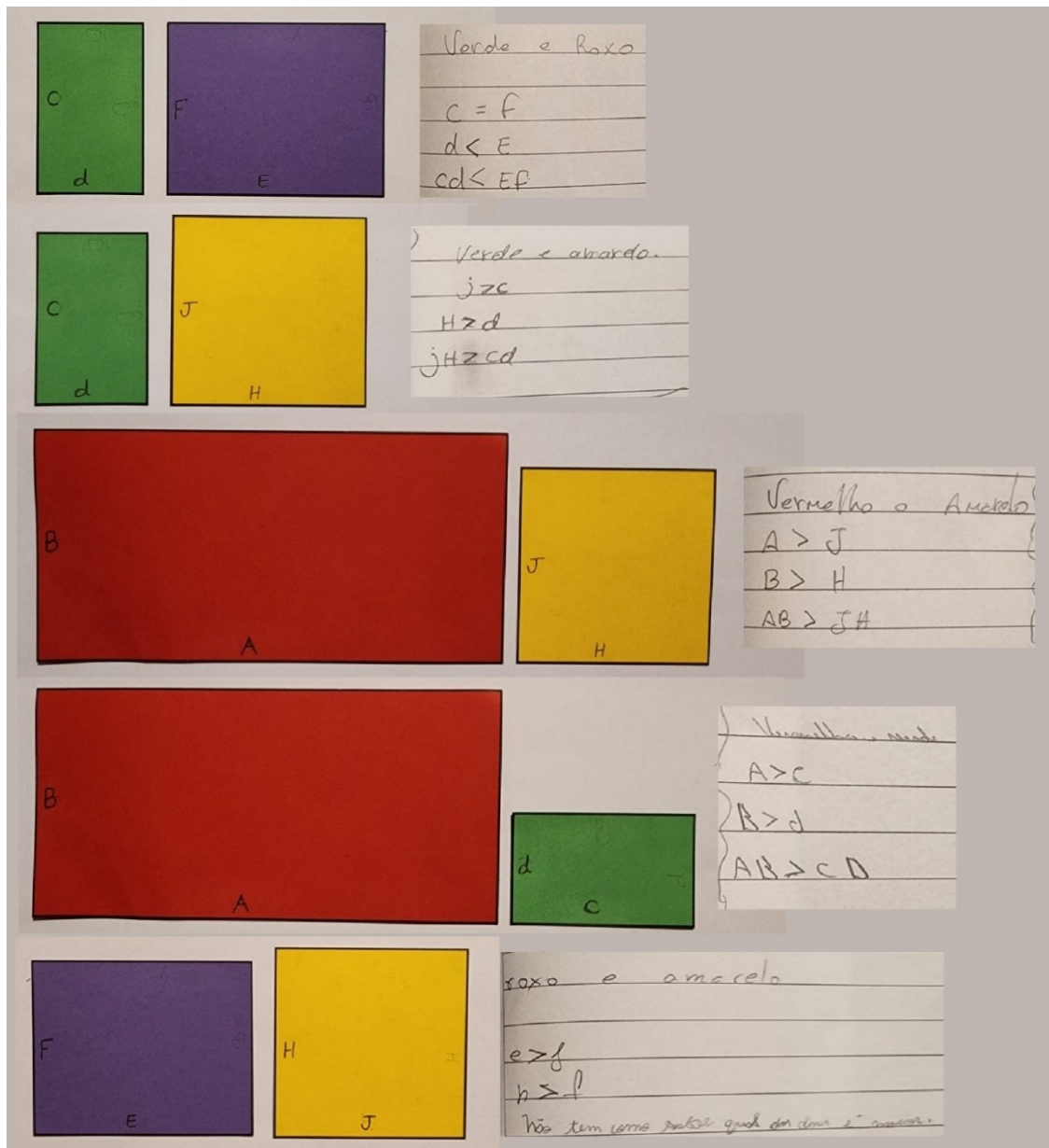
É importante ressaltar que, embora os grupos tenham apresentado justificativas apenas para um dos casos, conseguiram organizar os retângulos na ordem esperada pelo professor. Isso se deve ao fato de que o material foi projetado de forma a não permitir uma comparação absoluta entre todos os retângulos. O retângulo verde é o menor de todos, enquanto o retângulo vermelho é o maior. No entanto, entre os retângulos amarelo e roxo, a proposta era que não fosse possível realizar uma comparação direta. Com isso, seguimos para a exposição das produções de outros grupos.

Figura 5 – Comparações com justificativas do grupo G



Fonte: acervo do autor, 2024.

Figura 6 – Comparações com justificativas do grupo J



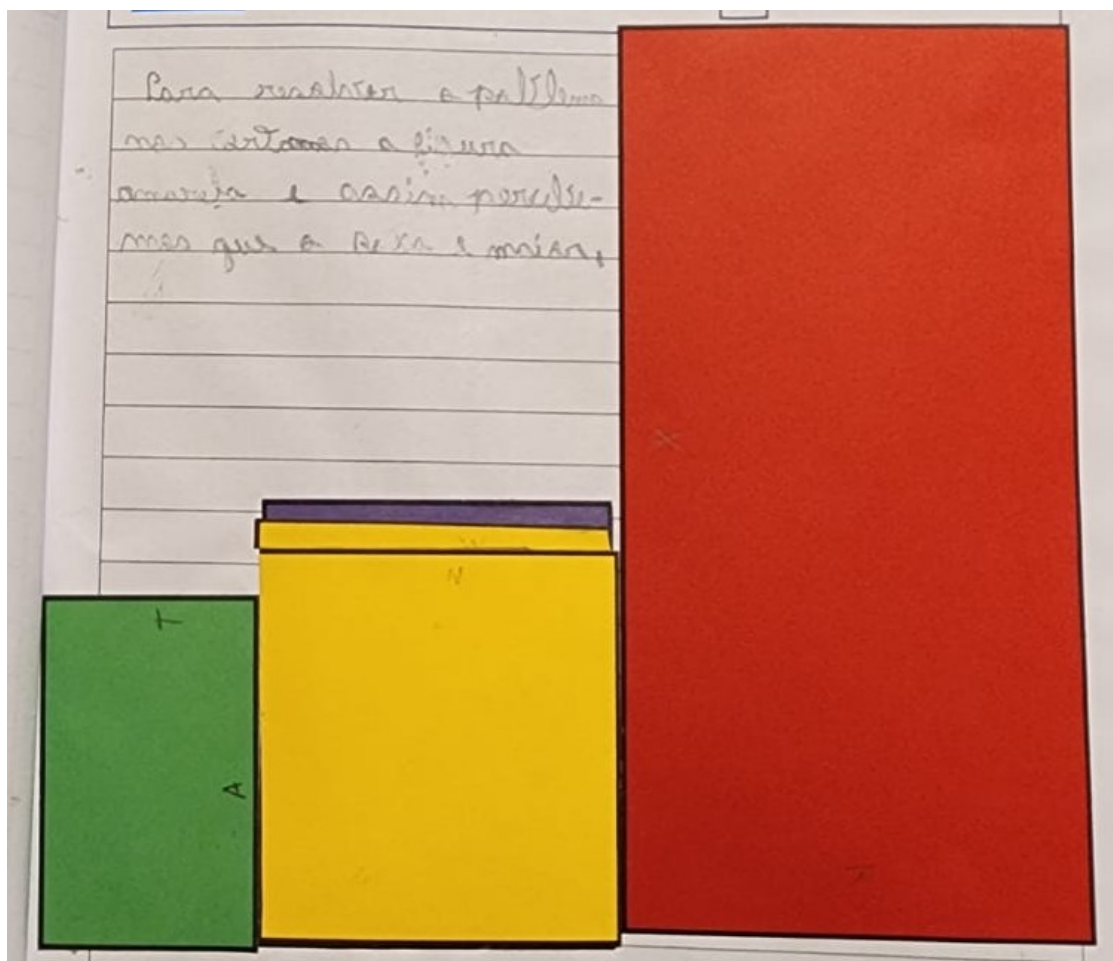
Fonte: acervo do autor, 2024.

Nas imagens 20 e 21, são apresentadas as produções dos grupos G e J. Observa-se que ambos optaram por uma abordagem predominantemente matemática, recorrendo, em especial, à álgebra e à propriedade da monotonicidade da multiplicação para fundamentar suas justificativas. Destaca-se, na produção do grupo J, a compreensão, mesmo sem uma instrução formal sobre a propriedade, de que não é possível estabelecer conclusões definitivas sobre a relação entre dois produtos, EF e JH , se $E > J$ e $F < H$.

Indo além, os alunos foram questionados sobre sua escolha de formatação e relataram que a adotaram por considerarem irrelevante a ordem, uma vez que

constatarem as relações $E > J$ e $E > F$, assim como $F < H$ e $F < J$. O que evidencia ainda mais a compreensão dos alunos sobre a propriedade, mesmo na ausência de uma instrução formal sobre ela. A seguir, apresentamos algumas outras produções que trazem elementos distintos daqueles já expostos até o momento.

Figura 7 – Comparações com justificativas do grupo H



Fonte: acervo do autor, 2024.

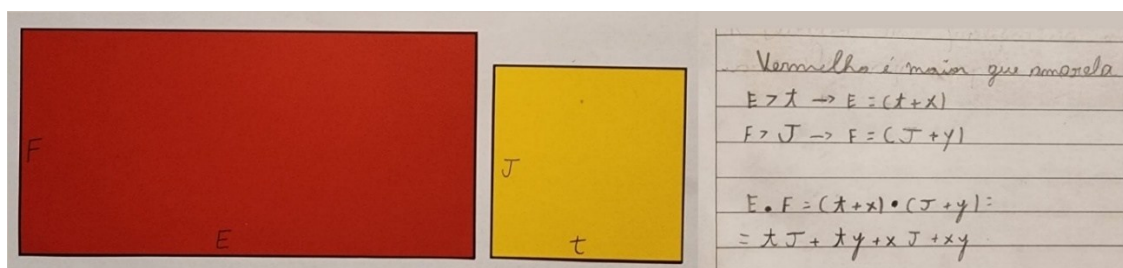
Além das comparações iniciais, nas quais o trabalho do grupo H se assemelha aos anteriores, tornando desnecessária sua exposição para evitar repetição excessiva, o grupo H apresentou uma contribuição interessante. Para superar a impossibilidade de comparação direta entre os retângulos amarelo e roxo, decidiram cortar um dos retângulos para cobrir o outro, o que lhes permitiu verificar que o retângulo roxo era maior que o amarelo.

Esta iniciativa se destaca por diversos fatores. Um deles é a autonomia e confiança dos alunos ao adotarem uma estratégia de resolução completamente distinta das demais abordagens da turma, ainda mais considerando que não

poderiam desfazer o corte no material. Outro ponto relevante é que a ideia se alinha de forma precisa com o conceito de maior ou menor, conforme definido na primeira aula. Por fim, na perspectiva do professor, a estratégia dos alunos de promover uma transformação geométrica para resolver o problema foi extremamente relevante, não apenas porque esse era o próximo passo nas atividades do dia, mas porque, para esses alunos, essa estratégia emergiu de maneira orgânica, evidenciando um avanço significativo em sua percepção matemática.

Para concluir a apresentação da primeira atividade do quarto encontro, será apresentada a produção do grupo B. A fim de evitar redundâncias, não abordaremos a totalidade da atividade, visto que, de maneira geral, as comparações são semelhantes às realizadas com os grupos G e J. Portanto, concentraremos nossa análise em um aspecto específico que se distingue dos demais e que despertou nossa atenção.

Figura 8 – Comparações com justificativas do grupo B



Fonte: acervo do autor, 2024.

Essa produção chama a atenção pelo grau de complexidade algébrica na justificativa apresentada pelo grupo para o caso do retângulo vermelho e do amarelo. É importante destacar que o grupo adotou essa abordagem apenas para este caso específico. Talvez não tenham repetido o mesmo procedimento nos outros casos por não conseguirem concluir a justificativa ou por considerarem o processo excessivamente trabalhoso. Contudo, na visão do professor, os alunos realizaram uma demonstração matemática, tendo faltado apenas a sinalização de que:

$$\text{como } EF = TJ + TY + XJ + XY$$

$$\text{então } EF > TJ$$

$$\text{pois } EF \text{ é } = TJ + (TY + XJ + XY)$$

Ou seja, faltou apenas que os alunos deixassem claro que perceberam ter chegado à definição de maior ou menor, construída nas aulas anteriores. Gostaríamos de destacar que acreditamos que as aulas devem contribuir para o processo de aprendizagem dos estudantes, principalmente por meio de construções coletivas de pensamento e reflexão. Nesse processo, o papel do professor não é fornecer a resposta para o problema, mas sim refletir junto aos alunos, ajudando-os a visualizar o caminho para o desenvolvimento das tarefas.

No caso desta atividade específica, o professor-pesquisador perdeu a oportunidade de fazer essa mediação, talvez por estar auxiliando outro grupo. No entanto, provavelmente, se tivesse contribuído com o grupo B, eles poderiam ter concluído a demonstração e teriam sido alertados sobre a real dimensão e dificuldade do que haviam produzido, considerando que se trata de alunos do oitavo ano.

Outro ponto de grande relevância decorrente desta atividade foi o questionamento de um dos estudantes. Ao final da tarefa, após o professor revelar que o material havia sido projetado de modo a impedir a comparação direta entre o retângulo roxo e o retângulo amarelo, e que, para realizar essa comparação, seria necessário recorrer a uma outra ferramenta matemática, um aluno levantou a seguinte questão: *“Como resolver o problema sem medir os lados e realizar as multiplicações? Por que estamos utilizando esse método, se ele não é eficaz para solucionar todos os problemas propostos? E, afinal, qual era o objetivo do professor com toda a atividade?”*

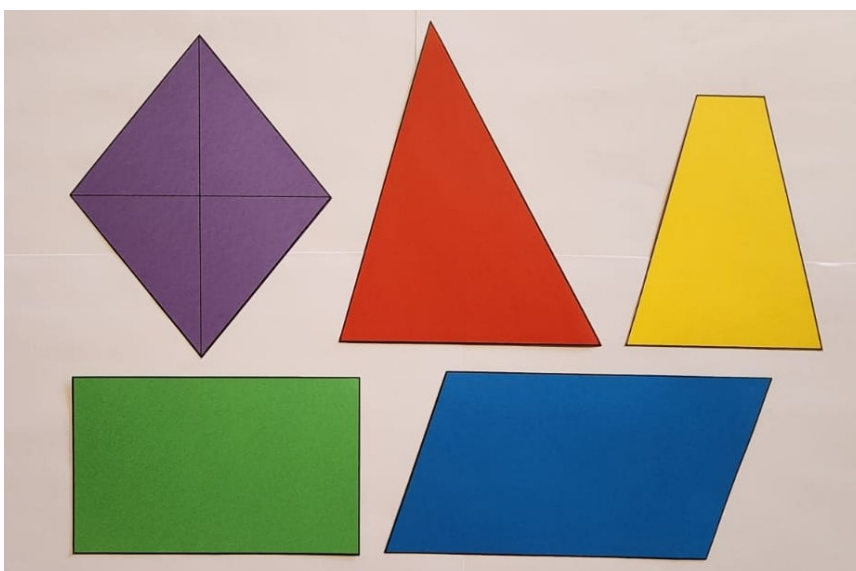
Em relação à colocação do aluno, primeiramente, destacamos que ela foi recebida de forma muito positiva pelo professor. Observamos que essa questão está distante de reclamações superficiais, como aquelas em que os alunos questionam: *“Por que preciso fazer isso?”*. Nesse caso, o estudante demonstrou senso crítico e autoconfiança, além de um interesse genuíno pelo que estava acontecendo em sala de aula, evidenciando que sua intenção era, de fato, compreender a situação e obter respostas para suas reflexões.

A resposta ao aluno foi construída lembrando todos os processos e conceitos trabalhados, enfatizando que a matemática não se apresenta como um conjunto de tópicos isolados, mas sim como uma área do conhecimento em que os temas se interconectam. O professor ressaltou que todo o percurso realizado era tão relevante para a formação matemática dos estudantes quanto a própria atividade de

comparação das áreas. Além disso, destacou que a impossibilidade de resolver um item também possuía valor pedagógico, como, por exemplo, ao evidenciar a necessidade de avanços na ciência. Por fim, o professor sugeriu a possibilidade de retomar essa questão em uma atividade futura, na qual poderiam explorar estratégias para buscar uma solução dentro das bases matemáticas propostas.

Após isso, a aula prosseguiu para a segunda atividade do dia. Para este momento, foram produzidos cinco polígonos distintos (Figura 24) (Apêndice D): retângulos, paralelogramos, losangos, trapézios e triângulos. A proposta consistia em levar os estudantes a aplicarem as fórmulas de cálculo da área para cada um dos polígonos e, assim, observarem o que ocorre em cada caso.

Figura 9 – Polígonos em papel cartão



Fonte: acervo do autor, 2024.

O objetivo desta atividade é que os alunos percebam que não é possível comparar as áreas dos polígonos em sua forma original, tornando necessária uma transformação. Entendemos que essa transformação, por sua vez, ocorre de maneira algébrica por meio das fórmulas de cálculo da área de cada polígono. No entanto, os alunos compreendem plenamente o que está acontecendo ao aplicarem essas fórmulas? Para explorar essa questão de maneira mais concreta, propusemos que os estudantes aplicassem as fórmulas de cálculo de área diretamente nas figuras. A seguir, apresentamos o diálogo que introduz a atividade aos alunos.

Professor: Pessoal, se quiséssemos comparar essas figuras geométricas (Figura 24), como poderíamos proceder?

Alunos: Poderíamos sobrepor as figuras, cortar as partes que sobram e tentar reorganizá-las para ver qual delas é maior.

Professor: Sim, isso seria possível, mas não seria a abordagem mais eficiente. Acho que daria muito trabalho. Porém, a sua ideia está no caminho certo. Quando cortamos a figura, ela continua igual?

Alunos: Não, ela fica diferente. Cortamos justamente para que isso aconteça.

Professor: Ou seja, o que vocês querem fazer com essa proposta é uma transformação matemática, mais especificamente uma transformação geométrica. Vocês vão cortar a figura e remontá-la de outro jeito, mas vão descartar algum pedaço? Quero dizer, a área da nova figura será diferente da anterior?

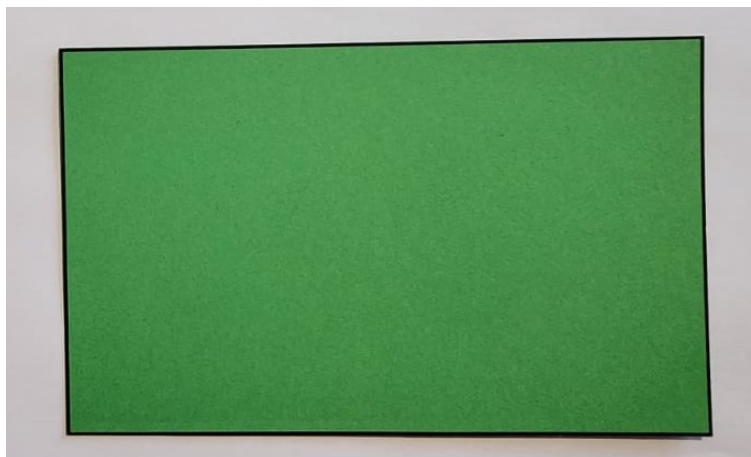
Alunos: Não. A gente não vai jogar fora nem colocar pedaço a mais. Vamos manter a área da figura original.

Professor: Exatamente. Muitos problemas em matemática são resolvidos dessa forma: fazemos substituições de um elemento por outro que mantém uma característica, mas que facilita o nosso trabalho. No caso em que vamos trabalhar agora, a característica que não podemos mudar é a medida da área, mas não necessariamente a figura precisa permanecer da forma em que foi apresentada inicialmente. Podemos manter a área e alterar a forma para tornar a comparação mais fácil.

Professor: Mas não vamos cortar e montar as figuras de qualquer maneira. Vocês já conhecem as fórmulas para calcular a área desses polígonos, e são elas que irão orientar essa transformação. Vamos aplicar as fórmulas nas figuras geométricas e, a partir disso, vocês poderão observar o que acontece.

Após isso, os grupos iniciaram a atividade. Gostaríamos de destacar que a maioria dos grupos adotou uma abordagem semelhante: sempre que necessário, optaram por dividir a altura ao meio. Acreditamos que essa escolha esteja relacionada à forma como as fórmulas de cálculo de área são tradicionalmente apresentadas, primeiramente com o elemento base e, em seguida, com a altura. Dessa maneira, ao interpretar fórmulas que envolvem divisão, os alunos podem ter sido induzidos a dividir o segundo elemento. A seguir, apresentamos a produção dos estudantes.

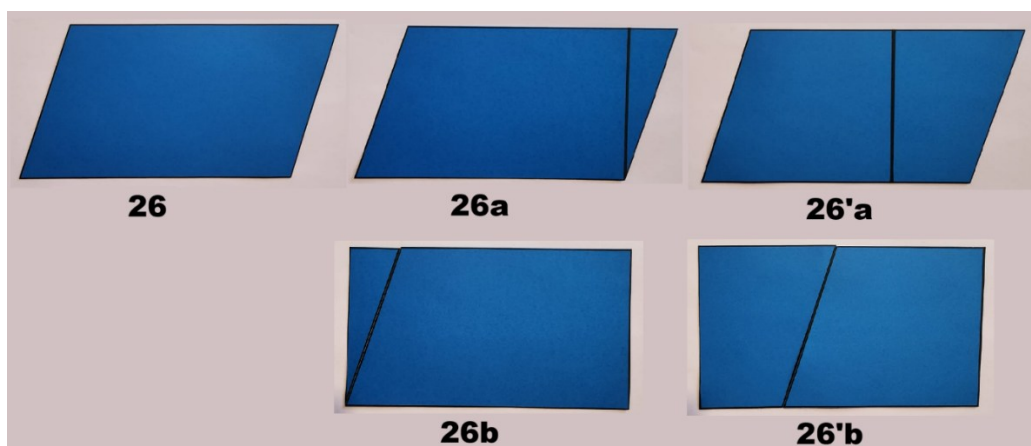
Figura 10 – Retângulo em papel cartão



Fonte: acervo do autor, 2024.

Tomando o retângulo da Figura 25 como a primeira figura geométrica a ser analisada, os estudantes perceberam que nenhuma transformação era necessária, uma vez que a fórmula sugerida, base vezes altura, correspondia exatamente ao conceito de área retangular desenvolvido em sala de aula.

Figura 11 – Paralelogramo em papel cartão

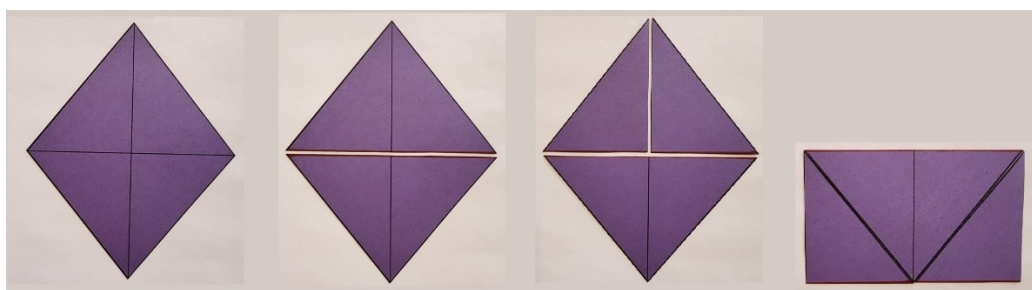


Fonte: acervo do autor, 2024.

Tomando o paralelogramo da Figura 26 como a segunda figura geométrica a ser analisada, os estudantes perceberam que a fórmula da área do paralelogramo era semelhante à do retângulo. Assim, identificaram a possibilidade de transformar a figura em um retângulo, preservando as medidas da base e da altura. Diante disso, houve duas abordagens distintas: em uma, traçaram a altura exatamente em um dos vértices do paralelogramo (Figuras 26a e 26b); na outra, traçaram a altura em qualquer ponto ao longo da base do paralelogramo (Figuras 26'a e 26'b).

Analisando as duas abordagens, surge a questão: os grupos que optaram por traçar a altura no vértice o fizeram para manter a base inalterada, ou apenas reproduziram o procedimento usualmente apresentado no sétimo ano ao se estudar a área dos triângulos? E quanto aos grupos que traçaram a altura em qualquer ponto da base, teriam eles percebido que essa escolha não a alteraria, uma vez que, no passo seguinte, essa medida seria reposicionada? De qualquer forma, independentemente de os estudantes terem trabalhado de maneira plenamente consciente ou não, é perceptível que compreendiam em qual figura desejavam transformar o paralelogramo.

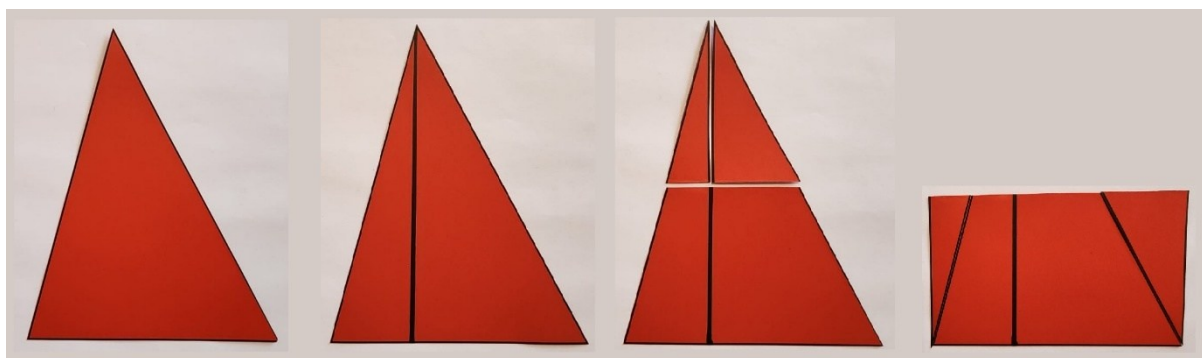
Figura 12 – Losango em papel cartão



Fonte: acervo do autor, 2024.

Tomando o losango da Figura 27 como a terceira figura geométrica a ser analisada, observamos que todos os estudantes adotaram a mesma abordagem: posicionaram o retângulo roxo de modo que a maior medida ficasse na base e a menor na altura. Acreditamos que essa escolha tenha ocorrido porque, usualmente, os retângulos são apresentados aos estudantes nessa configuração, o que pode ter influenciado sua organização da figura.

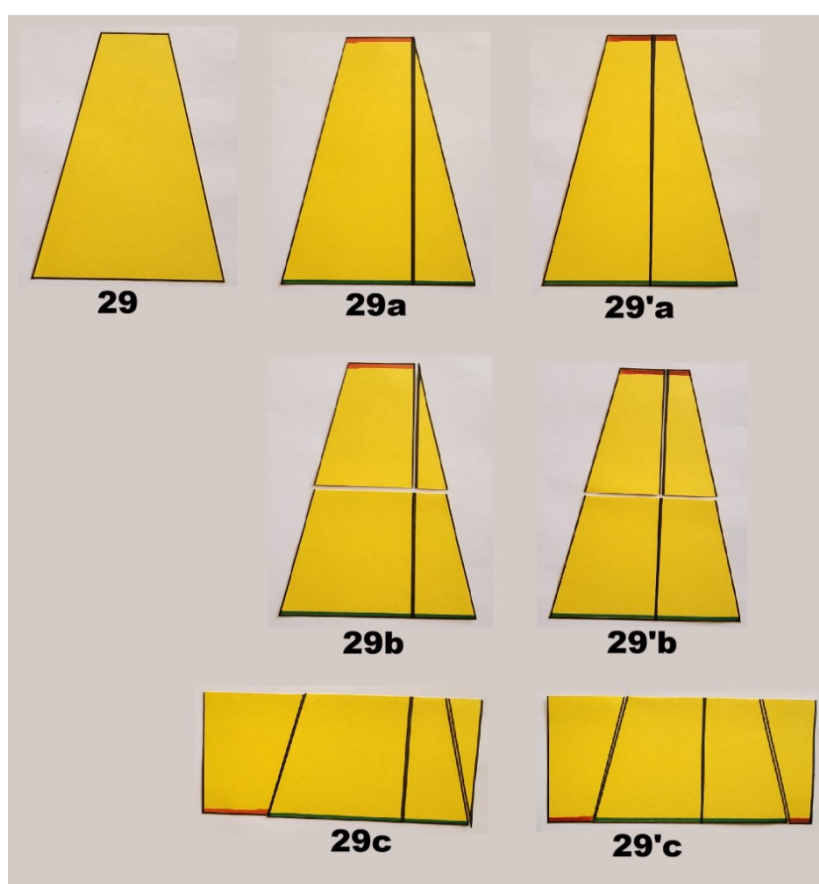
Figura 13 – Triângulo em papel cartão



Fonte: acervo do autor, 2024.

Tomando o triângulo da Figura 28 como a quarta figura geométrica a ser analisada, observamos que todos os estudantes seguiram um procedimento semelhante. Inicialmente, dividiram a altura ao meio e, em seguida, cortaram a parte superior em duas seções para reposicioná-las na base, formando um retângulo. Durante a atividade, a partir da terceira figura, tornou-se evidente em sala de aula que, ao final do processo de transformação, eles sempre chegariam a um retângulo, o que mais uma vez demonstra um pensamento matemático.

Figura 14 – Trapézio em papel cartão 1



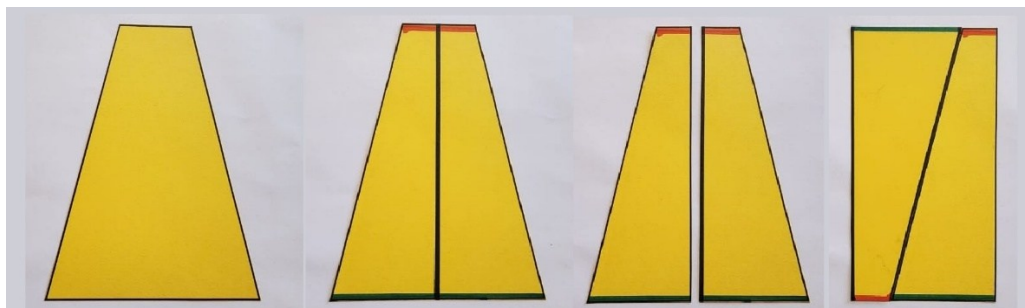
Fonte: acervo do autor, 2024.

Tomando o trapézio da Figura 29 como a quinta figura geométrica a ser analisada, observamos que os estudantes adotaram duas estratégias distintas, ambas semelhantes às utilizadas no caso do paralelogramo. Em uma das abordagens, traçaram a altura em um dos vértices do trapézio, dividiram-na ao meio e reposicionaram as partes, formando um retângulo. Na outra abordagem, traçaram a altura em um ponto aleatório da base, também dividiram a altura ao meio e reposicionaram as partes para formar um retângulo. A principal diferença entre as

abordagens foi a disposição da base menor após a transformação: no primeiro caso, ela ficou completamente posicionada em um dos lados da base maior, enquanto, na segunda abordagem, parte da base menor ficou à direita da base maior e parte ficou à esquerda.

Ainda sobre o trapézio, houve um grupo de alunos que, inicialmente, adotou uma abordagem distinta. Os estudantes perceberam a simetria da figura, uma vez que se tratava de um trapézio isósceles, e traçaram a altura de modo que coincidissem com o eixo de simetria. Em seguida, cortaram a figura ao longo dessa marcação e, a partir dessa divisão, reposicionaram as partes para formar um retângulo. Na Figura 30, ilustramos esse caso.

Figura 15 – Trapézio em papel cartão 2



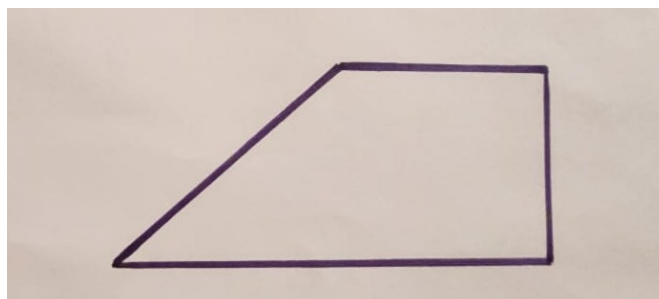
Fonte: acervo do autor, 2024.

Ao analisar a resolução dos estudantes, o professor parabenizou e elogiou a iniciativa deles em buscar diferentes maneiras de resolver o problema. Além disso, confirmou que a produção estava correta e propôs dois questionamentos ao grupo. O primeiro dizia respeito aos elementos do retângulo obtido: ele perguntou se os alunos conseguiam identificar as medidas desse retângulo em relação às do trapézio original. prontamente, os estudantes responderam que um dos lados correspondia à altura, que decidiram preservar, enquanto o outro lado era a soma de metade da base menor com metade da base maior, uma vez que ambas haviam sido divididas ao meio.

No segundo questionamento, o professor perguntou se a abordagem adotada pelos alunos ao manipular o trapézio funcionaria para qualquer tipo de trapézio ou apenas para aquele caso específico. Diante da pergunta, os estudantes se entreolharam e, a princípio, não souberam responder. Para ajudá-los a compreender melhor o problema, o professor desenhrou um trapézio retângulo no papel (Figura 31). Imediatamente, um dos alunos respondeu que, para esse novo trapézio, a

abordagem não funcionaria, pois as laterais não se encaixariam. Ele concluiu que seria necessário cortar a altura, assim como os outros grupos haviam feito.

Figura 16 – Trapézio retângulo em desenho



Fonte: acervo do autor, 2024.

Ao final da atividade, o professor decidiu retomar o diálogo com a turma para conhecer as percepções dos alunos sobre o trabalho realizado. Com esse objetivo, questionou a turma sobre suas impressões ao longo da atividade e abriu espaço para que compartilhassem suas reflexões. A seguir, apresentamos trechos dessa conversa.

Professor: Então, após este trabalho, o que vocês perceberam? Algo em particular chamou a atenção de vocês?

Alunos: O que chamou a atenção foi que, quando aplicamos a fórmula na figura, todas elas viraram retângulos.

Professor: Sim, a intenção era exatamente que vocês percebessem isso. E há alguma vantagem em todas as figuras se transformarem em retângulos?

Alunos: Tem, né? Fica mais fácil comparar quando todas são do mesmo tipo.

Professor: Exatamente. É semelhante à ideia que alguns colegas tiveram ao comparar o retângulo roxo e o retângulo amarelo na primeira atividade. Como não era possível chegar a uma conclusão com as figuras originais, eles tomaram a iniciativa de transformá-las. Mas quando aplicamos a fórmula, precisamos realizar essa transformação fisicamente? Quando vocês usavam a fórmula, tinham noção de que era isso que acontecia?

Alunos: Não. Eu achava que, por serem figuras diferentes, elas eram medidas de formas diferentes. Agora entendi o que a fórmula realmente faz.

Professor: Alguém mais gostaria de compartilhar algo?

Alunos: Eu também percebi, pela fórmula do triângulo, aquilo que você explicou, professor: o ponto não possui medida. Quando a gente corta o triângulo, o pontinho de cima dele se encaixa na base, mas nenhum valor é acrescentado a ela, porque o ponto não tem medida.

Professor: Sim, excelente observação! É um ótimo exemplo para mostrar essa característica dos pontos. Obrigado por compartilhar, eu nunca tinha pensado nisso.

Professor: Alguém mais gostaria de falar algo?

Alunos: Professor, nas fórmulas que envolvem divisão, eu posso escolher se quero dividir um elemento ou o outro, certo? Por exemplo, no triângulo, eu sempre preciso dividir a altura, ou, se eu quiser, posso dividir a base?

Professor: Então, quando temos uma multiplicação e uma divisão, não importa se vamos dividir o primeiro fator ou o segundo, ou ainda se primeiro fazemos a multiplicação dos elementos e depois efetuamos a divisão. No caso geométrico, se você preferir dividir a base e preservar a medida da altura, não há nenhum problema, também vai dar certo.

Alunos: É porque a gente tentou fazer assim, professor, dividindo a base. Mas não conseguimos chegar no retângulo. Aí pegamos outra figura e tentamos dividindo a altura. Mas fiquei curioso para saber se dava certo, porque, pela regra da matemática, deveria dar, mas quando tentei, não deu.

Professor: Então, para fazer essas transformações dividindo a base, realmente fica mais complicado. É similar a um quebra-cabeça, você precisa perceber como as peças se encaixam. Em uma aula futura, podemos desenvolver essa atividade, transformando as figuras ao mexer nas bases e não na altura.

Entendemos que esta última atividade superou as expectativas que o professor tinha ao idealizá-la. Além de observar como as fórmulas de cálculo de áreas transformam todas as figuras em retângulos, os alunos também fizeram observações além do esperado, demonstrando curiosidade e criatividade.

A curiosidade e a criatividade ficaram evidentes no caso do grupo de alunos que abandonou a fórmula do trapézio e preferiu aplicar a percepção que haviam desenvolvido. Isso demonstrou não apenas criatividade, mas também coragem e autoconfiança. Outro momento significativo ocorreu durante a verbalização final dos alunos, quando um estudante expressou o desejo de realizar as transformações geométricas de uma maneira diferente. Ele ainda apresentou um embasamento matemático sobre por que o método deveria ter funcionado, além de manifestar o desejo de refazer a atividade conforme o seu plano original.

Sendo esta a atividade final desenvolvida com os estudantes, apresentamos, a seguir, a análise dos acontecimentos à luz do referencial teórico abordado neste trabalho.

3.5 Análise dos Dados

Nesta seção, apresentamos a análise dos dados produzidos a partir das atividades realizadas com os estudantes, com o objetivo de compreender como se deu o desenvolvimento de uma mentalidade matemática de crescimento ao longo da prática pedagógica. A análise será conduzida à luz do referencial teórico discutido anteriormente, com foco na identificação de indícios de aprendizagem, pensamento crítico e construção de significados matemáticos.

Vamos iniciar a análise abordando o conceito de mentalidades e como esse aspecto foi observado nos estudantes. Acreditamos que essa dimensão se torna mais perceptível a partir da convivência e da interação com os indivíduos, razão pela qual grande parte desta análise será orientada pelas percepções e sensações do professor-pesquisador durante a vivência em sala de aula – e não, necessariamente, pela produção exposta nas seções anteriores.

Como mencionado anteriormente, a atividade foi desenvolvida em duas turmas do oitavo ano, com aproximadamente 30 alunos cada. É importante destacar que alguns desses estudantes já haviam passado por reprovações, em alguns casos mais de uma vez, sendo a matemática frequentemente apontada como um dos componentes curriculares que contribuíram para esse resultado. Consequentemente, esses participantes da experiência demonstravam já ter um julgamento prévio e consolidado em relação à disciplina.

Diante disso, interpretamos que muitos dos estudantes presentes nessas aulas já possuíam uma mentalidade consolidada sobre a matemática – em sua maioria, uma mentalidade fixa. Essa afirmação é feita com base em alguns indícios observados, como, por exemplo, as reações dos alunos ao serem apresentados aos conteúdos que seriam abordados e a forma como seriam trabalhados: houve muitas reclamações.

Alguns estudantes demonstravam preferência por permanecer no modelo de aula ao qual já estavam acostumados, um modelo que, de certa forma, mascarava suas dificuldades: copiar o conteúdo do quadro, assistir passivamente à explicação, ignorar os exercícios, copiar a correção e, ao final da aula, apresentar o caderno ao professor para obter o visto. Outros, por sua vez, acompanhavam com atenção as explicações e a resolução dos exemplos, conseguiam realizar os exercícios

propostos e tinham poucos ajustes a fazer durante a correção. Esses últimos, embora mais participativos, também não viam necessidade de mudança metodológica. Acreditamos que, nesse caso, havia mais receio de que uma mudança interferisse negativamente em suas notas do que a expectativa de que pudesse promover um ganho real de conhecimento.

Associamos esse cenário às mentalidades matemáticas propostas por Boaler (2018). Percebemos que alguns estudantes já apresentavam uma mentalidade fixa, acreditando não serem capazes de aprender matemática. E, assim como pensam não ser capazes de aprender essa disciplina, também demonstram acreditar que não são capazes – ou até mesmo merecedores – de conquistar outras coisas em suas vidas.

No mesmo espectro de mentalidade fixa estão os alunos que se consideram excepcionais em matemática, acreditando que são naturalmente talentosos e que conseguirão acompanhar os conteúdos sem grande esforço. Talvez por isso, não tenham enxergado na mudança metodológica uma oportunidade diferenciada de aprendizagem. Destacamos que também houve quem expressasse curiosidade em relação a uma nova forma de trabalhar a matemática em sala, ainda que esse grupo tenha sido numericamente menor do que desejávamos.

Foi nesse contexto que se deu a mudança de abordagem nas aulas. O objetivo consistiu em valorizar a natureza criativa e interpretativa da matemática, buscando, assim, promover uma transformação na trajetória educacional dos estudantes (Boaler, 2018). Ao iniciar as aulas dentro da nova perspectiva, de imediato nos deparamos com um momento delicado. Diante do questionamento do professor-pesquisador – que perguntou se alguém saberia dizer o que é uma reta – um dos estudantes respondeu: “reta é o que é reto”, o que provocou risos e comentários indelicados por parte de alguns colegas.

Esse acontecimento poderia ter afetado negativamente o aluno que fez a fala sobre a reta, abalando sua autoconfiança. Poderia, inclusive, ter gerado um ambiente desconfortável para outros estudantes, receosos de se tornarem alvo de risos e piadinhas, o que acabaria por inibir suas participações, interações e construções de conhecimento, conforme descritas nas seções anteriores.

Tendo em vista que cometer erros em um ambiente de aprendizagem acolhedor é essencial para o fortalecimento da autoconfiança e para o desenvolvimento dos estudantes (Boaler, 2018), bem como a importância de

espaços que valorizem a diversidade de pensamentos e abordagens, promovendo a colaboração e o respeito mútuo (Mendick, 2006), optamos por contornar a situação de forma sutil.

Em vez de chamar a atenção dos que zombaram, preferimos valorizar e elogiar a contribuição do aluno, explicando a possível origem de sua dificuldade em definir o conceito de reta – já que se trata de um elemento primitivo da geometria, que não possui definição formal. Além disso, seguimos sua linha de pensamento e solicitamos que ele exemplificasse o que queria dizer, de modo que todos pudessem compreender melhor sua colocação.

Nesta passagem, podemos perceber como a cultura que reproduz a crença de que a matemática é uma ciência criada e desenvolvida exclusivamente por indivíduos geniais (Boaler, 2018; Giraldo, 2018; Mendick, 2006) é nociva e prejudicial tanto aos alunos quanto ao processo de aprendizagem como um todo. Mesmo os estudantes que se consideram incapazes de lidar com a matemática em níveis mais complexos se sentem à vontade para rir ou debochar de colegas que apresentam desempenhos abaixo do que é socialmente considerado excelente.

Além do prejuízo psicológico que esse ambiente causa nos estudantes, é importante observar que essa cultura acaba condicionando aqueles que têm dúvidas e dificuldades a se calarem e não expressarem suas inseguranças, com receio de se tornarem alvo de chacotas. Assim, na tentativa de se preservarem, comprometem seus próprios processos de aprendizagem.

Ainda nessa perspectiva de desvalorização do erro – e assumindo a necessidade e a possibilidade de utilizá-lo como ferramenta positiva no processo educativo, bem como a importância da valorização da participação dos estudantes – gostaríamos de destacar alguns episódios.

Durante as discussões sobre retas, semirretas e segmentos de reta, por exemplo, os estudantes fizeram diversas contribuições que poderiam, num primeiro olhar, ser consideradas equivocadas, mas que, na prática, serviram como ponto de partida para reflexões e construções conceituais. Essa valorização das ideias dos alunos, promovendo análise, reflexão e (re)criação da matemática a partir de suas falas, mostra-se fundamental para engajá-los na aprendizagem dessa ciência e incentivá-los a pensar criticamente, contribuindo para a construção coletiva do conhecimento (Mendick, 2006; Menezes; Quintaneiro, 2023).

Neste caso, há um trecho específico que gostaríamos de resgatar. A discussão girava em torno do conceito de semirreta, quando um aluno levantou a hipótese de que uma semirreta seria uma reta que possui duas dimensões – comprimento e largura. Em vez de simplesmente descartar a ideia, o professor-pesquisador acolheu a contribuição e convidou a turma a analisá-la coletivamente.

Esse episódio ocorreu apenas 10 ou 20 minutos após o momento desagradável dos risos. O que nos faz acreditar que a abordagem do professor-pesquisador foi acolhedora o suficiente para que, nesse curto intervalo de tempo, os estudantes já pudessem compreender que suas ideias seriam respeitadas, analisadas e discutidas, e não descartadas unicamente por estarem equivocadas ou incompletas.

Na continuidade da análise, o próprio estudante percebeu e reconheceu que a ideia da reta possuir largura era incorreta, mas sentiu-se à vontade para questionar o professor-pesquisador sobre a mudança de perspectiva em relação à sua ideia inicial. Isso ocorreu porque ele havia sugerido que a semirreta se assemelharia mais a um cilindro muito fino, e não a um retângulo. Em resposta, o professor-pesquisador reconheceu a conjectura apresentada e elogiou sua percepção geométrica, destacando o mérito de sua observação – ao perceber que, em um cilindro, não se formaria um retângulo. Em seguida, questionou o aluno sobre o motivo disso, conduzindo-o à compreensão autônoma do equívoco presente em sua teoria.

Percebam que, para um estudante, há uma enorme diferença entre ser conduzido a perceber o erro e simplesmente receber a informação de que está errado. Ser informado de que errou pode afetar diretamente seu ego, sua autoestima e sua confiança em compartilhar ideias. Na abordagem adotada neste trabalho, as ideias do estudante são acolhidas com respeito e analisadas com seriedade. O estudante, por sua vez, tem a oportunidade de refletir de maneira mais aprofundada, moderando a impulsividade e desenvolvendo novas conclusões. Eles participam ativamente da correção. Eles mesmos identificam o que está errado. Ousamos dizer que se sentem parte da (re)criação da matemática.

A postura do professor-pesquisador ao acolher a conjectura do estudante e conduzi-lo, de forma respeitosa, à revisão de sua própria ideia, está em consonância com os princípios defendidos por Boaler (2018), que enfatiza a importância de ambientes de aprendizagem que valorizem a experimentação, o erro e a reflexão

como parte essencial do processo de construção do conhecimento matemático. Ao invés de corrigir imediatamente o aluno, o professor oferece espaço para que ele próprio perceba e compreenda seu equívoco, fortalecendo sua autonomia e autoconfiança.

Essa abordagem também encontra respaldo nas ideias de Lorenzato (2006), para quem a aprendizagem matemática deve estar fundamentada na valorização das ideias prévias dos alunos e no respeito às suas formas de pensar, uma vez que o conhecimento se constrói a partir da reflexão sobre as próprias experiências. Assim, o episódio demonstra como a escuta ativa e a mediação cuidadosa do professor podem transformar o erro em uma oportunidade potente de aprendizagem, promovendo um ambiente seguro, criativo e intelectualmente desafiador para todos os envolvidos.

Em outra oportunidade, o professor-pesquisador já havia preparado um material previamente, uma vez que considerava a hipótese de determinado erro surgir durante a atividade. Esse caso se exemplifica na situação em que foram utilizados retângulos articulados para problematizar se a área do retângulo seria igual à área de um paralelogramo com lados congruentes.

Nessa ocasião, além de a problematização ter sido útil para evidenciar as diferenças entre as duas figuras geométricas, os alunos puderam manusear um material que se transformava fisicamente, tornando o processo mais dinâmico e significativo. Essa experiência se alinha diretamente ao que propõe Lorenzato (1995), ao defender a importância do uso de materiais manipuláveis no ensino da matemática, pois permite que os alunos manipulem, experimentem e explorem conceitos. Além disso, observou-se que alguns estudantes conseguiram fazer conexões e abstrações a partir dessa interação concreta, o que evidencia o potencial dessa abordagem para favorecer a compreensão conceitual e o desenvolvimento do pensamento matemático.

Os aspectos positivos impulsionados pela exploração dos retângulos articulados tornam-se especialmente evidentes na fala de um estudante que cria uma hipótese para justificar por que o paralelogramo apresenta área menor que a do retângulo com lados congruentes. Após um período de observação e manipulação do material – movimentando-o de um lado para o outro –, o estudante afirma que, ao inclinar o retângulo para transformá-lo em um paralelogramo, parte das retas se sobrepõem. Simultaneamente, ele observa que, na base, uma porção do segmento

de reta permanece exposta, o que o leva a interpretar esse fenômeno como uma multiplicação em que nem todo o “valor” esperado está sendo utilizado. Essa interpretação dialoga com o conceito trabalhado anteriormente na atividade, no qual os alunos definiram que a área de um retângulo corresponde ao produto de dois segmentos de reta.

O mesmo estudante ainda sugere que essa visualização seria facilitada se os segmentos de reta do retângulo articulado fossem representados de forma fracionada, revelando uma atitude ativa, investigativa e criativa diante do objeto de estudo. Conforme afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), a investigação matemática promove justamente esse tipo de envolvimento: estimula a formulação de conjecturas, a identificação de padrões, a criação de hipóteses e a busca por justificativas. Foi exatamente esse processo que se manifestou nesse episódio, em que o aluno procurou atribuir sentido matemático ao que estava observando, contribuindo significativamente para a construção coletiva do conhecimento (Menezes; Quintaneiro, 2023).

Ainda sobre o papel do erro no processo de aprendizagem, destacamos mais dois episódios significativos. O primeiro ocorreu na atividade inicial, quando o professor-pesquisador posicionou dois segmentos de reta lado a lado e questionou se aquela configuração representava uma soma. Após um período de análise, os estudantes retomaram os conceitos previamente discutidos e afirmaram que não se tratava de uma soma, pois, dispostos daquela forma, os segmentos não possuíam medida definida e o comprimento do segmento maior permaneceria inalterado, ou seja, não haveria nenhum acréscimo. Para que ocorra a soma, segundo os alunos, as extremidades dos segmentos devem ser unidas, formando um novo segmento contínuo.

O segundo caso ocorreu na discussão sobre a área do trapézio. Nesse episódio, o aluno não cometeu um erro propriamente dito, mas foi instigado a refletir sobre a limitação da abordagem adotada, percebendo que ela não funcionaria para todos os tipos de trapézios. Em contrapartida, a estratégia que ele conhecia – e que optou por não utilizar, priorizando sua criatividade e autoconfiança – era, de fato, mais geral e aplicável a qualquer tipo de trapézio.

Esses casos, somados às justificativas algébricas e experimentações aritméticas que surgiram ao longo da atividade, ilustram de forma contundente o papel fundamental desempenhado pelos materiais manipuláveis. Como já indicavam

Boaler (2018) e Lorenzato (2012), o uso de recursos visuais e táteis não apenas facilita a compreensão conceitual, como também potencializa a construção de significados, ampliando a capacidade dos estudantes de observar regularidades, abstrair propriedades e desenvolver o pensamento matemático. Além disso, esse tipo de abordagem contribui para que os erros sejam encarados como oportunidades de aprendizagem, fortalecendo a autoconfiança e estimulando a postura investigativa dos estudantes.

Ademais, torna-se evidente que, em nenhuma das situações observadas, o erro foi tratado como uma falha a ser corrigida, uma lacuna no conhecimento ou um obstáculo à aprendizagem. Pelo contrário, os erros foram sempre acolhidos como oportunidades legítimas de reflexão e aprofundamento. Cada ocorrência foi cuidadosamente analisada, seja para compreender as razões pelas quais determinada ideia não se sustentava, seja como ponto de partida para novas construções e reinterpretações conceituais. Tal postura dialoga diretamente com o que afirmam Giraldo e Roque (2021), Borasi (1996) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), ao defenderem que o erro, quando abordado de forma construtiva, pode tornar-se um recurso pedagógico valioso, favorecendo o pensamento crítico, a autonomia intelectual e o engajamento dos estudantes na aprendizagem da matemática.

Ao longo de sua obra, Boaler (2018) enfatiza, em diversas ocasiões, que a matemática é uma disciplina multidimensional e, portanto, deve ser trabalhada de forma conceitual, promovendo a construção de significados e a conexão entre seus diferentes campos e conteúdos. A autora argumenta que, ao limitar o ensino à repetição de métodos e à aplicação mecânica de algoritmos, corre-se o risco de comprometer a compreensão profunda e o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. Acreditamos que parte dos prejuízos provocados por essa abordagem tradicional pode ser observada em algumas passagens do relato das atividades propostas neste trabalho.

Como exemplo, tomemos a primeira atividade com material manipulável, na qual os estudantes foram desafiados a realizar operações de adição e subtração com segmentos de reta. Apesar das dificuldades generalizadas em matemática, todos demonstraram familiaridade com os algoritmos convencionais dessas operações e afirmavam compreender o que significava somar ou subtrair. Contudo,

essa aparente segurança se desfez quando foram convidados a aplicar tais conceitos em um contexto fora do campo aritmético habitual.

Inicialmente, o nervosismo tomou conta da turma: a simples transposição dos conceitos para um ambiente geométrico causou estranhamento até mesmo entre os alunos que tradicionalmente se destacavam. Esse momento de paralisia inicial evidencia como a aprendizagem fragmentada – restrita a contextos específicos – pode limitar a mobilização do conhecimento matemático em situações distintas. Com o tempo, e com a mediação do professor, os alunos passaram a se sentir mais seguros e conseguiram desenvolver a proposta com maior autonomia.

Essa experiência revela que, mesmo conceitos considerados elementares, quando deslocados do ambiente habitual de ensino, geram dúvidas significativas. Isso reforça a importância de uma abordagem que valorize a articulação entre diferentes áreas da matemática e a aplicação de seus conceitos em múltiplas condições, como defendem Lorenzato (1995) e Boaler (2018).

Tal dificuldade de transposição de conceitos aritméticos e algébricos para o campo geométrico se manifestou em diversos momentos ao longo das atividades. Durante a proposta envolvendo multiplicação, por exemplo, os alunos demonstraram grande dificuldade em perceber que uma reta poderia “percorrer” outra, representando visualmente a ideia de multiplicar segmentos. Mesmo tendo familiaridade com os algoritmos numéricos da multiplicação, muitos não conseguiam reconhecer que, conceitualmente, essa operação envolvia a repetição de uma medida sobre outra.

Obstáculo semelhante foi observado quando os estudantes foram convidados a transformar polígonos e aplicar fórmulas de cálculo de áreas: houve resistência inicial, especialmente em utilizar operações matemáticas em um campo geométrico, até que, com mediação adequada, conseguiram transpor o raciocínio aritmético para o contexto espacial.

Esses episódios reforçam o que argumenta Lorenzato (1995), ao afirmar que a geometria deve ser ensinada de forma integrada ao restante da matemática, pois é justamente essa articulação que favorece a visualização das conexões entre os diferentes campos – aritmética, álgebra e geometria – e amplia a compreensão dos conceitos matemáticos. Ensinar a matemática de maneira compartimentalizada compromete a percepção de sua unidade e limita a autonomia dos estudantes em aplicar seus conhecimentos a situações variadas.

Um ponto importante que queremos destacar é que, em consonância com o que propõe Boaler (2018), buscamos adaptar atividades comumente utilizadas na fase inicial de estudo de um novo conceito, indicando uma abordagem mais aberta e investigativa. O objetivo principal não era a prática direta de algoritmos, mas sim a exploração dos conceitos subjacentes a eles. Segundo nossa interpretação do trabalho da autora, esse deve ser o cerne das práticas que visam ao desenvolvimento de uma mentalidade matemática de crescimento: o ensino deve ser conceitual, conectado, instigante, promovendo a criatividade, o raciocínio lógico e a capacidade de transposição do conhecimento para diferentes situações, inclusive aquelas que envolvem o cotidiano dos estudantes.

Ainda na busca pelo desenvolvimento de uma mentalidade matemática de crescimento, incorporamos as contribuições de Hersh (1999) e Giraldo e Roque (2021), as quais complementam os estudos de Boaler (2018). Esses autores oferecem uma perspectiva relevante ao sustentarem que a resolução de problemas não deve ser encarada como o objetivo final da atividade, mas como um meio para promover reflexões mais profundas sobre os conceitos matemáticos. Segundo eles, a resolução do problema deve deixar de ser tratada como o objetivo final da atividade, passando as reflexões acerca do problema a ganhar maior valorização. Dessa forma, é o problema que conduz à construção matemática – e não o contrário, como ocorre nas apresentações naturalizadas da matemática (conceito–exemplo–exercício).

No mesmo espírito crítico, Hersh (1999) afirma que a matemática parece, muitas vezes, “morta” para os alunos, uma vez que eles são levados a procurar respostas que não os interessam, para perguntas que sequer fizeram. Essa provocação nos levou a refletir sobre o modo como as aulas de matemática são geralmente organizadas. Diante disso, gostaríamos de salientar dois momentos ocorridos no quarto encontro, que ilustram como o envolvimento com a resolução das atividades pode transformar essa percepção, despertando a curiosidade, o interesse e um novo olhar dos alunos sobre a matemática.

No quarto encontro, a primeira atividade tinha como objetivo comparar as áreas dos retângulos, justificando matematicamente o porquê de tais comparações. Nesse contexto, um grupo de alunos demonstrou curiosidade em encontrar uma resposta que contemplasse todos os casos propostos na atividade. Já ao fim desse mesmo encontro, quando a atividade tratava de transformações geométricas, um

estudante expressou o desejo de refazê-la, pois gostaria de ter aplicado a fórmula do cálculo de área praticando a divisão nas bases das figuras geométricas, preservando a medida original das alturas.

Observa-se que uma simples aplicação de fórmula transformou-se em uma atividade aberta. Alguns alunos se mantiveram dentro da aplicação tradicional, mas em um contexto completamente diferente. Outros ignoraram as fórmulas e recorreram à sua própria percepção geométrica, ao notarem que o objetivo era sempre transformar a figura em um retângulo. E houve ainda aqueles que quiseram aplicar a fórmula de maneira menos convencional.

Nesse contexto, o cálculo da área deixou de ser uma pergunta que não haviam feito para tornar-se uma investigação matemática, que não apenas despertou o interesse e a curiosidade dos alunos, como também abriu espaço para o desenvolvimento da criatividade (Hersh, 1999; Giraldo; Roque, 2021). A transformação das áreas a partir da aplicação das fórmulas tornou-se o motor do desenvolvimento e da criação matemática, visto que as soluções não se apresentaram como meras reproduções mecânicas (Giraldo; Roque, 2021).

Acreditamos que todos esses aspectos impactam positivamente a experiência dos alunos nas aulas de Matemática. Os estudantes passam a perceber que não precisam apenas memorizar e reproduzir fórmulas e procedimentos, mas que podem efetivamente participar da (re)construção do conhecimento matemático em sala de aula. Tal mudança é fundamental, pois transforma significativamente sua relação com a disciplina. Em vez de apenas reproduzirem conceitos prontos, como o da multiplicação, por exemplo, os alunos passam a interpretar que foram eles próprios os responsáveis por construí-los. Afinal, para esses estudantes, tais ideias surgem como novidades, construídas a partir das análises, discussões e reflexões realizadas em grupo.

Um conceito que consideramos fundamental, apresentado por Boaler (2018) no contexto do desenvolvimento da mentalidade de crescimento em Matemática, é o das atividades de "piso baixo e teto alto". A ideia central é que todos os alunos possam acessar e iniciar a atividade, independentemente de seus conhecimentos prévios, ao mesmo tempo em que ela oferece abertura para que avancem em diferentes níveis, explorando possibilidades mais complexas. Esse tipo de proposta estimula a criatividade, favorece a experimentação de novas ideias e permite que os

estudantes se envolvam de forma mais autônoma e significativa com os conceitos matemáticos.

Nesse sentido, consideramos que a primeira atividade do quarto encontro se alinha à proposta de Boaler (2018), sendo possível observar, por meio das diferentes contribuições dos alunos, como essa abordagem favorece a ampliação da compreensão matemática. Ao serem questionados sobre quais retângulos possuíam maior área e instigados a apresentar uma justificativa matemática para suas respostas, alguns estudantes ofereceram explicações simples, mas coerentes com os conceitos (re)construídos em sala. Um exemplo foi a resposta de alunos que afirmaram que determinado retângulo era maior que o outro porque, ao realizarem a sobreposição das figuras, perceberam que um deles continha exatamente a mesma área do outro, acrescida de uma porção adicional.

Outros alunos apresentaram abordagens mais elaboradas, compreendendo a área como resultado de uma multiplicação e aplicando, ainda que de forma intuitiva, a propriedade da monotonicidade da multiplicação – mesmo sem terem sido formalmente apresentados a esse conceito. A partir disso, foram capazes de construir justificativas de natureza algébrica. Houve ainda um grupo que desenvolveu um trabalho notável em termos de raciocínio algébrico, chegando a elaborar uma espécie de demonstração matemática, o que revela um nível bastante elevado de elaboração, especialmente considerando que se tratava de estudantes do oitavo ano.

Esse episódio ilustra de maneira contundente como a matemática, quando ensinada de forma conceitual e exploratória – conforme defendem os principais autores que compõem nosso referencial teórico –, pode não apenas favorecer a compreensão dos conceitos, mas também oferecer aos alunos as condições necessárias para desenvolverem matemática com rigor e profundidade, inclusive em níveis mais avançados.

Complementando o que foi apresentado nos parágrafos anteriores, Boaler (2018) afirma que uma abordagem matemática centrada na criatividade e na exploração conceitual também exerce uma influência significativa sobre os aspectos emocionais dos alunos, promovendo autoconfiança e entusiasmo. Essa perspectiva se articula com as ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), ao defenderem que a investigação matemática possibilita aos estudantes assumirem o papel de

verdadeiros matemáticos: formulando questões, testando conjecturas e argumentando sobre os resultados, em diálogo com colegas e professores.

Ainda explorando a investigação matemática, gostaríamos de retomar aspectos da quarta atividade. Embora a proposta de intervenção não tenha se baseado exclusivamente em uma investigação matemática nos moldes definidos por Ponte, Brocardo e Oliveira (2020) – uma vez que buscamos integrar elementos de diferentes tendências para analisar o desenvolvimento de uma mentalidade matemática de crescimento –, muitos traços dessa abordagem puderam ser observados nessa atividade em particular.

Nessa ocasião, os estudantes receberam a proposta de comparar áreas e aplicar fórmulas. Contudo, devido à abordagem adotada, que lhes concedeu maior autonomia, como já mencionado anteriormente, surgiram diversas estratégias e caminhos de resolução: diferentes formas de justificar, diferentes interpretações e até grupos que buscavam soluções distintas entre si. Assim, tal como ressaltam Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), em uma situação investigativa, é o aluno quem assume o protagonismo na condução da tarefa, decidindo como construirá sua resposta ao problema, cabendo ao professor a mediação e a proposição inicial da situação.

Os estudantes mobilizaram diversas características próprias da investigação matemática: exploraram o problema proposto, formularam conjecturas, construíram justificativas matemáticas para defendê-las e, em alguns casos, avançaram para a proposição de novas possibilidades de exploração. Entendemos que essa dinâmica está fortemente alinhada com os pressupostos da investigação matemática delineados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), bem como com a abordagem sugerida por Boaler (2018) para o desenvolvimento de uma mentalidade matemática de crescimento.

Gostaríamos agora de retomar a atividade desenvolvida no terceiro encontro. Embora até este momento ela tenha recebido menos destaque, sua importância foi central para suscitar dúvidas, promover discussões e aprofundar a compreensão dos alunos sobre o conceito de medição.

Assim como nas demais propostas, esta atividade teve início com um diálogo – neste caso, sobre o que significa medir. Esse momento de conversa, seja no início, no decorrer ou ao final das atividades, constituiu-se como a principal ferramenta escolhida pelo professor-pesquisador para a aplicação da matemática

problematizada (Menezes; Quintaneiro, 2023; Giraldo, 2018; Giraldo; Roque, 2021). É por meio desses diálogos que o professor-pesquisador questiona, solicita exemplos, provoca reflexões, sugere caminhos e participa ativamente do processo de (re)construção do conhecimento matemático em sala de aula.

Após esse momento inicial, os estudantes foram convidados a explorar diferentes superfícies a serem medidas, utilizando variados elementos para realizar essa medição. O objetivo central da atividade era que os alunos desenvolvessem uma compreensão significativa sobre os motivos que justificam o uso do quadrado como unidade padrão de medida de área – em contraposição, por exemplo, ao uso de círculos ou outras figuras geométricas.

Importa destacar que a intenção aqui não era fazer com que os alunos apenas recebessem a informação de que se mede área com quadrados, mas sim oferecer uma experiência em que pudessem observar condições, experimentar possibilidades e desenvolver argumentos próprios (Menezes; Quintaneiro, 2023) sobre por que o quadrado se mostra mais apropriado (ou não) para esse fim. Essa abordagem, pautada na problematização, permitiu que os estudantes compartilhassem suas observações, construíssem significados coletivamente e utilizassem a aula de matemática como um espaço genuíno de diálogo e construção de conhecimento.

Observa-se, em diversos registros escritos dos alunos, uma convergência de respostas, pensamentos e percepções. Acreditamos que essa homogeneidade decorre, em parte, da interação entre os grupos, mas também das construções e discussões coletivas realizadas ao longo das atividades.

Aproveitando o gancho da construção coletiva e do viés social da aprendizagem, gostaríamos de trazer à discussão alguns discursos fundamentais apresentados pelos autores que compõem nosso referencial teórico. D'Ambrosio (2020) denuncia que, historicamente, a matemática tem sido utilizada como um instrumento de seleção de elites, classificando os indivíduos como capazes ou incapazes. Nessa mesma direção, Skovsmose e Valero (2012) alertam que, apesar dos discursos democráticos presentes na educação – inclusive no ensino de matemática –, a disciplina frequentemente reforça funções sociais de diferenciação e exclusão, perpetuando desigualdades e proporcionando oportunidades futuras diferenciadas para os estudantes.

Boaler (2018) também se insere nesse debate ao argumentar que rotular estudantes como incapazes e ensiná-los em níveis inferiores pode, num primeiro momento, criar uma falsa sensação de sucesso. No entanto, a longo prazo, tal prática resulta em frustração e abandono definitivo da matemática. Complementando essa crítica, Giraldo (2018) afirma que essa abordagem pragmática e instrumental tem como efeito – e, por vezes, como objetivo – capacitar estudantes apenas para desempenhar funções específicas, ocupando posições sociais e profissionais consideradas adequadas às suas realidades, o que, na prática, limita o desenvolvimento de seus potenciais matemáticos e contribui para a perpetuação das desigualdades.

Diante desse cenário, o que observamos ao longo da abordagem adotada nas atividades – especialmente por se tratar de uma proposta que rompe com o modelo tradicional, no qual se espera que os alunos permaneçam em silêncio apenas absorvendo os conteúdos transmitidos oralmente pelo professor – é que, em nenhum momento, os estudantes usualmente considerados “menos aptos” para a matemática contribuíram negativamente com a atividade.

Muito pelo contrário: alguns deles expressaram que gostaram mais dessa forma de trabalhar, justamente porque envolvia menos cálculos e, segundo relataram, tinham muita dificuldade em realizá-los. No entanto, conseguiram participar ativamente das discussões conceituais, observar propriedades e desenvolver raciocínios geométricos, chegando a conclusões semelhantes às aquelas formuladas pelos colegas considerados “mais inteligentes”.

Pode parecer repetitivo, mas é necessário enfatizar novamente a importância da autoestima dos estudantes e de como ela pode ser favorecida por aulas que valorizem múltiplas formas de pensar e fazer matemática – para além da realização de cálculos e da repetição de procedimentos (Boaler, 2018; Mendick, 2006). Oferecer oportunidades para que todos os alunos se reconheçam como produtores de conhecimento matemático é um passo essencial para transformar a relação entre sujeitos historicamente excluídos e a matemática escolar.

4 PRODUTO EDUCACIONAL

O Produto Educacional desenvolvido (Apêndice E) consiste em uma sequência didática voltada ao ensino de Matemática, fundamentada nos princípios da Matemática Problematizada, da Investigação Matemática e do Laboratório de Ensino de Matemática. A proposta adota uma abordagem dialógica, orientada para a (re)construção colaborativa dos conceitos matemáticos no ambiente escolar. Para tanto, são propostas situações-problema relacionadas ao campo da Geometria, que fazem uso de materiais manipuláveis como recurso didático, favorecendo a visualização, a compreensão e a abstração dos conceitos por parte dos estudantes.

As atividades que compõem essa sequência foram aplicadas em uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental. Entretanto, a proposta apresenta caráter flexível, podendo ser adaptada a outras etapas da Educação Básica, desde que o(a) professor(a) considere as especificidades de sua turma e utilize sua criatividade no processo de adaptação. A organização das atividades segue uma progressão conceitual, iniciando-se pelo conceito de reta, passando pela compreensão de área e pela noção de medida, até chegar ao cálculo de áreas de diferentes polígonos. Essa estrutura permite que as atividades sejam utilizadas de forma articulada, como um conjunto coeso, ou de maneira pontual, conforme a adequação ao conteúdo e ao nível de ensino em questão.

O desenvolvimento dessas atividades visou promover um ambiente de aprendizagem acolhedor, participativo e respeitoso. Buscou-se construir um espaço no qual os erros fossem entendidos como parte essencial do processo de aprendizagem, sendo acolhidos e discutidos coletivamente, e no qual as contribuições dos alunos fossem valorizadas e debatidas em grupo. Mais do que a apropriação de definições e conceitos matemáticos, desejava-se que os estudantes reconhecessem a matemática como um conhecimento significativo, compreendendo sua lógica e estrutura, e, a partir disso, fortalecessem sua autoconfiança em relação à disciplina. O foco esteve voltado à construção de uma relação mais positiva com a matemática, incentivando o desenvolvimento de uma mentalidade de crescimento e o engajamento ativo dos alunos no processo educativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para iniciar a conclusão deste trabalho, é pertinente retomar o objetivo de pesquisa que o fundamenta, bem como o percurso que levou à sua formulação. Conforme exposto na introdução, a motivação do professor-pesquisador emerge de uma inquietação provocada por sua observação cotidiana: a percepção de que muitos de seus alunos demonstravam desinteresse e apresentavam dificuldades significativas no domínio da matemática.

Essa constatação, aliada à preocupação com o impacto que tais lacunas poderiam exercer sobre os projetos de vida futura desses estudantes, impulsionou uma reflexão mais aprofundada sobre os processos de ensino e aprendizagem da disciplina. A pergunta que então se impôs foi: será que esses estudantes, em número tão expressivo, realmente não são capazes de desenvolver um entendimento mais sólido em matemática, ou estariam apenas convencidos de sua suposta incapacidade, sendo a falta de autoconfiança o principal entrave?

A partir desse questionamento e do contato com ideias e tendências contemporâneas no ensino da matemática – proporcionado, em grande parte, pela formação no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Faculdade de Formação de Professores (FFP) –, o professor-pesquisador sentiu-se instigado a experimentar uma abordagem alternativa à tradicional. Essa nova perspectiva buscava justamente evidenciar que é possível transformar a relação dos estudantes com a matemática, promovendo um ambiente em que todos possam reconhecer-se como aprendizes e produtores do saber matemático.

Dessa forma, definiu-se como foco da investigação compreender como os estudantes podem desenvolver uma mentalidade matemática de crescimento a partir de propostas voltadas ao campo da geometria. A escolha por esse eixo temático não foi aleatória: surgiu da constatação de que a geometria, muitas vezes, ocupa um lugar marginal nas práticas pedagógicas, sendo tratada de maneira superficial ou secundária em relação a outros conteúdos matemáticos. Além disso, percebeu-se que, para diversos alunos, a geometria aparece como um campo distante e de difícil compreensão.

Sendo assim, a escolha da geometria como conteúdo a ser trabalhado se deu justamente por seu potencial de impactar positivamente a autoestima dos estudantes. A intenção era que, ao perceberem-se capazes de compreender conceitos e propriedades geométricas – frequentemente apontadas por eles como a parte mais desafiadora da disciplina –, sentissem-se igualmente aptos a desenvolver outras áreas da matemática com mais confiança.

Considerando tudo o que foi apresentado até aqui, bem como as observações e análises prévias do professor-pesquisador – que já atuava regularmente com as turmas envolvidas –, é possível afirmar que uma parcela significativa dos estudantes apresentava uma mentalidade fixa em relação às próprias capacidades de compreender e praticar matemática.

A partir das abordagens adotadas, do planejamento e da execução das atividades, observou-se um impacto positivo na autoconfiança dos estudantes, o que, provavelmente, influenciou a forma como passaram a se relacionar com a matemática e com as aulas. Ficou evidente que, ao longo do processo, os alunos não apenas se tornaram mais participativos nas aulas, mas também começaram a ter a confiança necessária para sustentar suas hipóteses e questionar o professor sobre pontos que despertavam sua curiosidade.

Esse comportamento se torna ainda mais relevante quando se considera que, anteriormente, esses estudantes, não questionavam as respostas do professor, mesmo diante de erros cometidos nas correções de atividades. Tal mudança de postura indica um desenvolvimento significativo de uma mentalidade matemática de crescimento, essencial para o cultivo do senso crítico, da criatividade e da autoconfiança, pilares fundamentais para a aprendizagem matemática.

Além disso, a construção e aplicação de conceitos matemáticos observadas ao longo das atividades são evidências concretas do avanço dessa mentalidade. Por meio dos diálogos, os alunos participaram ativamente da (re)construção de conceitos e de sua aplicação em diferentes contextos.

Foi possível observar, ainda, que os estudantes passaram a buscar não apenas as respostas, mas também as justificativas que as sustentavam. Essa disposição para elaborar conjecturas, colocá-las à prova e discuti-las em aula demonstra um posicionamento mais positivo diante da disciplina.

Verificou-se não apenas a evolução conceitual dos discentes, mas também o interesse genuíno em compreender e justificar os resultados, em vez de apenas

buscá-los de maneira mecânica. Como já apresentado anteriormente, essa postura é característica de uma mentalidade matemática de crescimento.

Constatamos, ainda, que o uso de diferentes metodologias e abordagens contribui significativamente para esse desenvolvimento. Trabalhar os conceitos sob múltiplas perspectivas oferece ao estudante uma variedade de caminhos e amplia sua percepção sobre a matemática.

A liberdade dada aos alunos também se mostrou um fator determinante para o sucesso das atividades propostas. Essa liberdade foi concretizada por meio de atividades abertas, nas quais os educandos puderam explorar a matemática guiados por suas próprias curiosidades e criatividade. Nessas situações, não havia um único caminho certo; cada estudante traçava seu percurso, e a resposta emergia quando lhes parecia satisfatória diante das questões que conseguiam enxergar na proposta.

As discussões em grupo e as problematizações também foram ferramentas essenciais. Em alguns momentos, promoviam reflexões prévias que davam base às explorações; em outros, favoreciam a análise crítica daquilo que fora produzido, permitindo a validação ou refutação das conjecturas desenvolvidas nos pequenos grupos, de forma coletiva.

Todos esses elementos contribuíram para o fortalecimento de uma mentalidade matemática de crescimento. Além disso, chamaram a atenção dos estudantes para a importância de se envolverem ativamente em seus próprios processos de aprendizagem. Eles passaram a perceber que podem – e devem – questionar o professor quando necessário e explorar as atividades não apenas em busca da resposta, mas sobretudo buscando compreender o porquê delas.

É necessário destacar que a mudança de perspectiva por parte dos alunos e o desenvolvimento de uma mentalidade de crescimento também podem ocorrer de forma coletiva. O experimento evidencia que o progresso do grupo sustenta o desenvolvimento individual, assim como o crescimento de cada estudante contribui para o avanço coletivo.

Ademais, à luz de todo o percurso construído e analisado, é possível concluir que o desenvolvimento de uma mentalidade matemática de crescimento tem início, primeiramente, no professor. É crucial que esse profissional planeje suas aulas de forma cuidadosa, antecipe possíveis desdobramentos das interações com os discentes e tenha um domínio sólido dos conceitos que deseja abordar. Embora este trabalho não se concentre prioritariamente na prática docente, entendemos que, sem

a atuação do professor-pesquisador, a intervenção que originou os resultados apresentados não teria ocorrido. Além disso, como detalhado na metodologia, esta pesquisa também envolve uma investigação sobre a própria prática.

Em síntese, este trabalho buscou compreender como os educandos podem desenvolver uma mentalidade matemática de crescimento a partir de propostas pedagógicas que valorizem o raciocínio, a curiosidade, a criatividade e a construção coletiva do conhecimento, com foco na geometria. Os resultados obtidos ao longo da experiência demonstram que, quando os alunos se sentem acolhidos em um ambiente que legitima suas ideias e promove a reflexão, eles se tornam mais confiantes, participativos e abertos a desafios. Nesse sentido, este estudo reforça a importância de práticas pedagógicas que rompam com o modelo tradicional de ensino e assumam uma postura mais dialógica, investigativa e inclusiva. Espera-se, assim, que as reflexões aqui apresentadas possam contribuir para o trabalho de outros professores que, como o professor-pesquisador, desejam transformar a forma como a matemática é percebida, vivida e significada em sala de aula.

Entendemos que este trabalho pode contribuir com o debate sobre o ensino da matemática, sobretudo no que diz respeito à construção de práticas pedagógicas que rompam com lógicas excludentes e favoreçam a inclusão, a participação ativa e o desenvolvimento integral dos sujeitos. Espera-se que esta pesquisa inspire outros educadores a refletirem sobre suas próprias práticas e a apostarem no potencial transformador de uma matemática viva e dialógica.

Sugerimos que futuras pesquisas sejam conduzidas com maior abrangência temporal e em contextos escolares diversos, com o objetivo de aprofundar a compreensão sobre as condições que favorecem o desenvolvimento da mentalidade de crescimento em matemática. Investigar o papel da avaliação, o trabalho colaborativo entre professores e a formação continuada pode proporcionar contribuições significativas para o avanço dessa temática. Além disso, seria relevante realizar uma releitura da pesquisa, direcionada ao professor e à prática docente, visando enriquecer a compreensão sobre o impacto da atuação e da formação docente no desenvolvimento da mentalidade de crescimento.

Por fim, destacamos que o trabalho intitulado *Problematizando os Conceitos de Ordenação, Adição e Subtração em Diferentes Campos Matemáticos* – recorte desta dissertação – será apresentado no XV Encontro Nacional de Educação

Matemática, a ser realizado de 28 de julho a 1º de agosto de 2025, em Manaus, Amazonas, Brasil.

REFERÊNCIAS

- ABIOLA, O.; DHINDSA, H. Improving classroom practices using our knowledge of how the brain works. *Internacional Journal of Environmental & Science Education*, [s.l.], v. 7, n. 1, p. 71-81, 2012. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ972445.pdf>. Acesso em: 13 abr. 2025.
- BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio de matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre, RS: Penso, 2018.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Qualitative Research for Education: an introduction to theory and methods*. 5. ed. Boston: Allyn & Bacon, 2007.
- BORASSI, R. *Reconceiving mathematics intruction: a focus on erros*. Norwood: Ablex Publishing, 1996.
- BORBA, M. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In Reunião anual da Anped, 27., 2004, Caxambu, MG. *Anais da 27ª Reunião Anual da Anped*. Caxambu, MG, 2004, p. 1-18. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmidiaseeducacaomatematica/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf. Acesso em: 13 abr. 2025.
- BORBA, M.; ARAÚJO, J. Pesquisa qualitativa em educação matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M.; ARAÚJO, J. (Orgs.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2020. p. 23-29.
- COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. *Inquiry as stance: practitioner research for the next generation*. New York: Teachers College Press, 2009.
- D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade*. 6. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2020.
- DWECK, C. *Mindset: a nova psicologia do sucesso*. Rio de Janeiro, RJ: Objetiva, 2017.
- FERNANDES, F.; GARNICA, A. Metodologia de pesquisa em Educação Matemática: éticas e políticas na inserção de novos sujeitos, cenários e conhecimentos. *Perspectivas da Educação Matemática*, UFMS, MS, v. 14, n. 34, p. 1-16, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/12785/8943>. Acesso em: 13 abr. 2025.
- FERRAÇO, C.; ALVES, N. As pesquisas com os cotidianos das escolas: pistas para se pensar a potência das *imagensnarrativas* na invenção dos currículos e da formação. *Espaço do Currículo*, [s.l.], v. 8, n. 3, p. 306-316, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufpb.br/index.php/rec/article/view/rec.2015.v8n3.306316/14761>. Acesso em: 13 abr. 2025.

FRANCISCHETT, M. Refletindo sobre pesquisa-ação. *Faz ciência*, Francisco Beltrão, PR, v. 3, n. 1, p. 167-176, 1999. Disponível em: <https://e-revista.unioeste.br/index.php/fazciencia/article/view/7478/5529>. Acesso em: 13 abr. 2025.

FREIRE, P. *Pedagogia da indignação*. 6. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2021.

GARNICA, A. Pesquisa qualitativa e educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. *Mimesis*, Bauru, SP, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001. Disponível em: https://secure.unisagrado.edu.br/static/biblioteca/mimesis/mimesis_v22_n1_2001_art_02.pdf. Acesso em: 13 abr. 2025.

GASER, C.; SCHLAUG, G. Brain structures differ between musicians and non-musicians. *The Journal of Neuroscience*, [s.l.], v. 23, n. 27, p. 9240-9245, 2003. Disponível em: <https://www.jneurosci.org/content/23/27/9240>. Acesso em: 13 abr. 2025.

GIRALDO, V. Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada. *Ciência & Cultura*, São Paulo, SP, v. 70, p. 37-42, 2018. Disponível em: Acesso em: http://cienciaecultura.bvs.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0009-67252018000100012&lng=pt&tlng=pt. 13 abr. 2025.

GIRALDO, V. Que matemática para a formação de professores? Por uma matemática problematizada. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13., 2019, Cuiabá. *Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática* (XIII ENEM). Cuiabá, MT: SBEM, 2019, p. 1-12.

GIRALDO, V.; ROQUE, T. Por uma matemática problematizada: as ordens de (re)invenção. *Perspectivas da Educação Matemática*, UFMS, MS, v. 14, n. 35, p. 1-21, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/13409/9355>. Acesso em: 13 abr. 2025.

GUTSTEIN, E. *Reading and writing the world with mathematics: toward a pedagogy for social justice*. New York: Routledge, 2006.

HERSH, R. *What is mathematics, really?* Oxford, UK: Oxford University Press, 1999.

KARNI, A.; MEYER, G.; REY-HIPOLITO, C.; JEZZARD, P.; ADAMS, M.; TURNER, R.; UNGERLEIDER, L. The acquisition of skilled motor performance: fast and slow experience-driven changes in primary motor cortex. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, [s.l.], v. 95, n. 3, p. 861-868, 1998. Disponível em: <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC33809/>. Acesso em: 13 abr. 2025.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *Educação matemática em revista*, Blumenau, SC, n. 4, p. 3-13, 1995. Disponível em:

<https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/1311/721>.

Acesso em: 13 abr. 2025.

LORENZATO, S. *Para aprender matemática*. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos. In: LORENZATO, S. (Org.) *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. P.3-37.

MENDICK, H. A beautiful myth? The gendering of being/doing 'good at maths'. *Gender and Education*, [s.l.], v. 17, n. 2, p. 203-219, 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/44188388_A_beautiful_myth_The_gendering_of_beingdoing_'good_at_maths'. Acesso em: 13 abr. 2025.

MENEZES, F.; QUINTANEIRO, W. Problematicando saberes de conteúdo matemático do ensino numa perspectiva política. *Ensino da Matemática em Debate*, [s.l.], v. 10, n. 2, p.58-86, 2023. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/61201/43347>. Acesso em: 13 abr. 2025.

MICHALISZYN, S.; TOMASINI, R. *Pesquisa: orientações e normas para elaboração de projetos monográficos e artigos científicos*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2005.

NÓVOA, A. *Professores: imagens do futuro presente*. Lisboa: Educa, 2009.

PENTEADO, H. A relação docência/ciência sob a perspectiva da pesquisa-ação. In PENTEADO, H.; GARRIDO, E. (Orgs.). *Pesquisa-ensino, A comunicação escolar na formação do professor*. São Paulo, Paulinas, 2010. p. 22-31.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigação matemática na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2020.

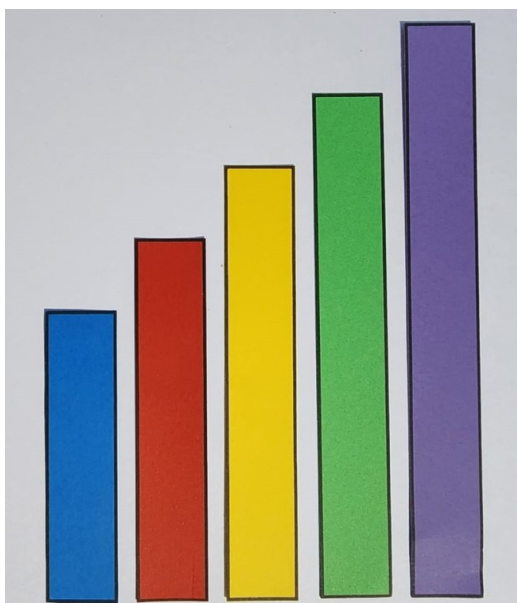
SKOVSMOSE, O.; VALERO, P. Rompimiento de la neutralidad política: el compromiso crítico de la educación matemática con la democracia. In: VALERO, P.; SKOVSMOSE, O. (Ed.). *Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente, 2012. p. 1-23.

THIOLLENT, M. *Metodologia da pesquisa-ação*. 18. ed. São Paulo, SP: Cortez, 2011.

ZEICHNER, K.; DINIZ-PEREIRA, J. Pesquisa dos educadores e formação docente voltada para transformação social. *Cadernos de Pesquisa*, [s.l.], v. 35, n. 125, p. 63-80, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/cp/a/Zx9H96h48wrzY7DsrggHTQq/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 13 abr. 2025.

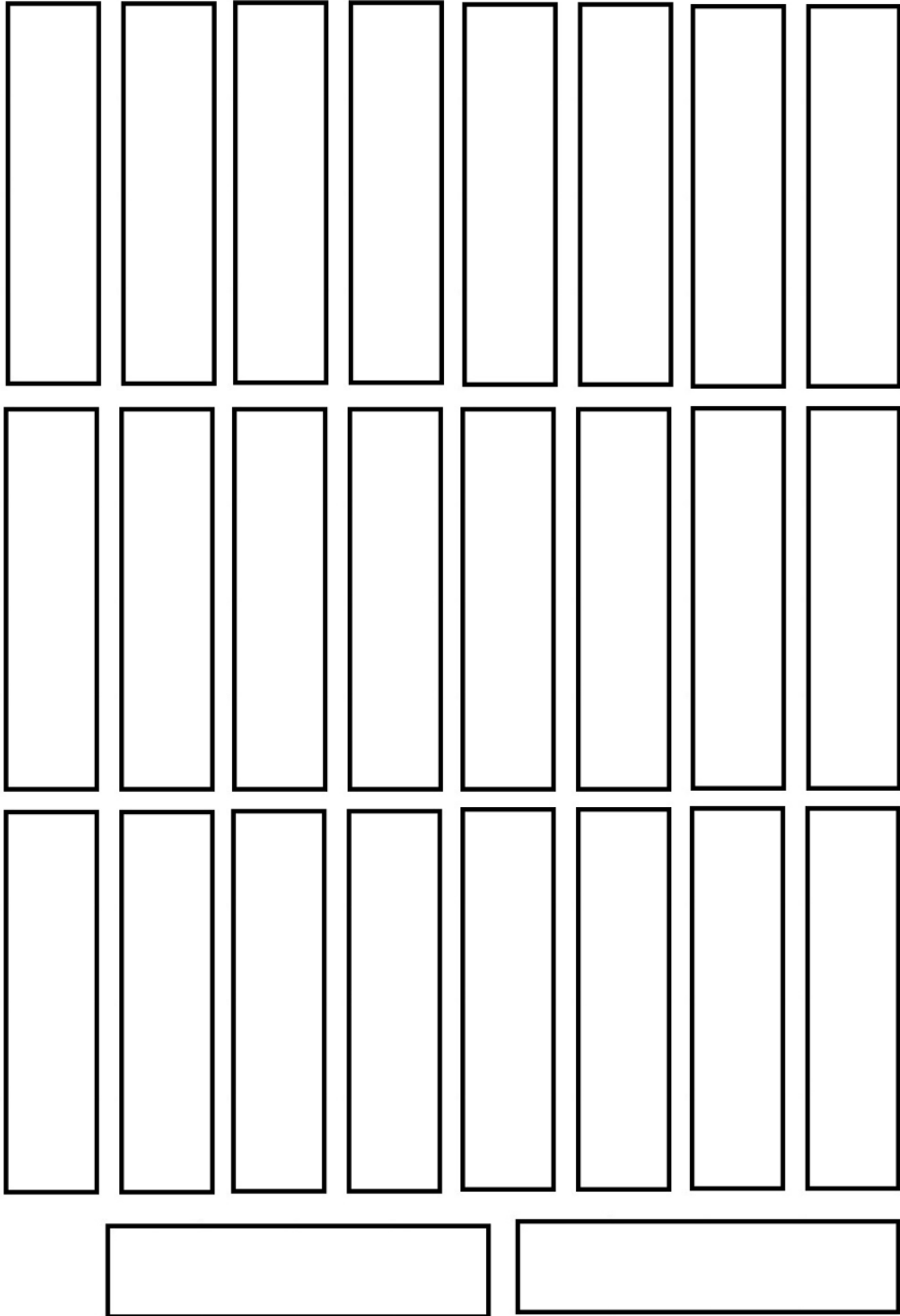
APÊNDICE A – Explorando a adição, a subtração e a ordenação no campo da geometria com segmentos de reta.

Cada grupo de alunos recebe dois segmentos de reta de cores diferentes e é proposto que realizem operações de adição e subtração com esses objetos, além de identificarem qual deles é o maior e justificarem suas conclusões.



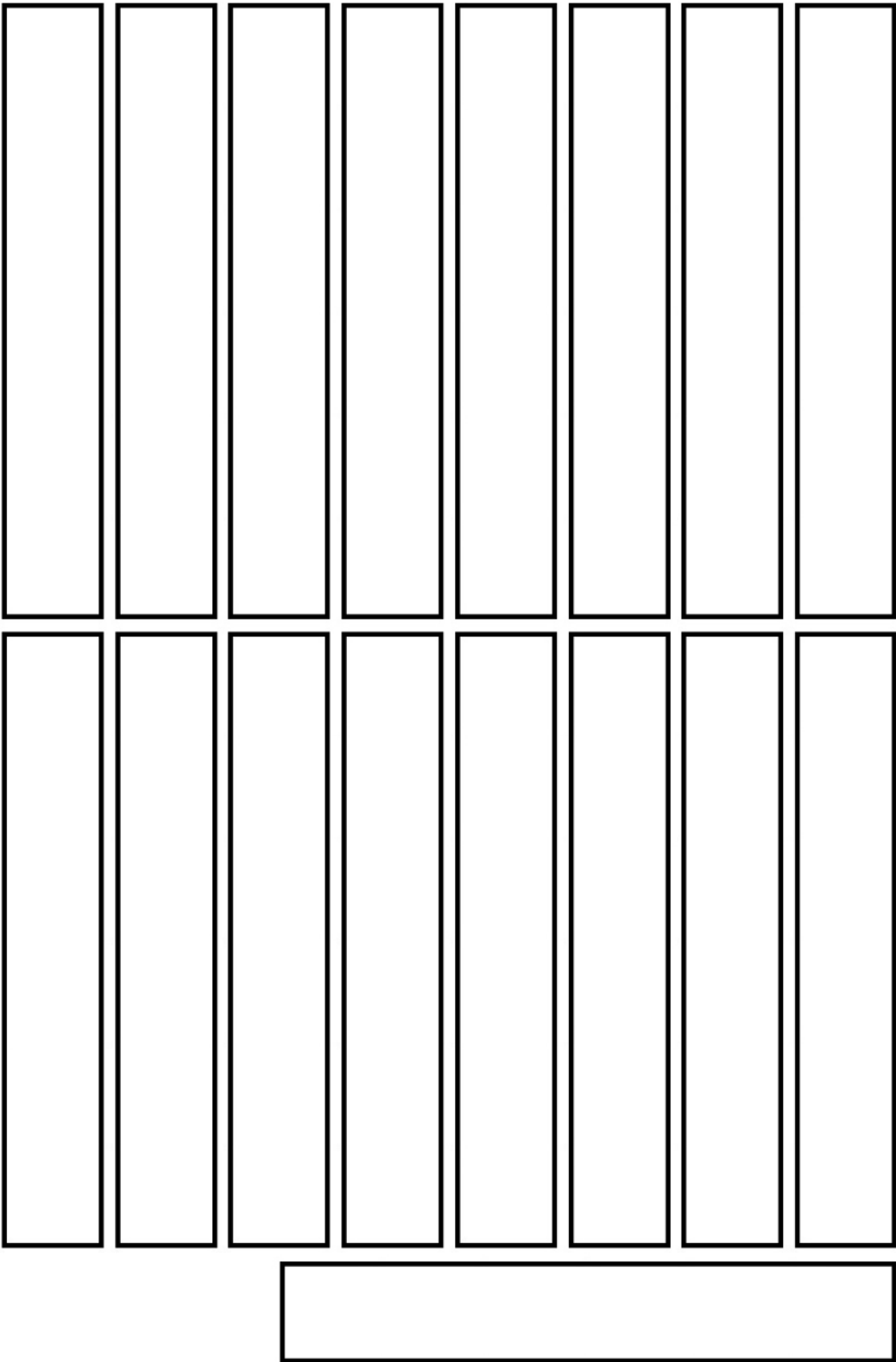
Os segmentos de reta foram confeccionados em papel cartão colorido e cortados com o auxílio de uma guilhotina, garantindo uniformidade nas medidas e acabamento preciso.

Segmento de reta azul:



Segmento de reta vermelho:

Segmento de reta amarelo:



Segmento de reta verde:

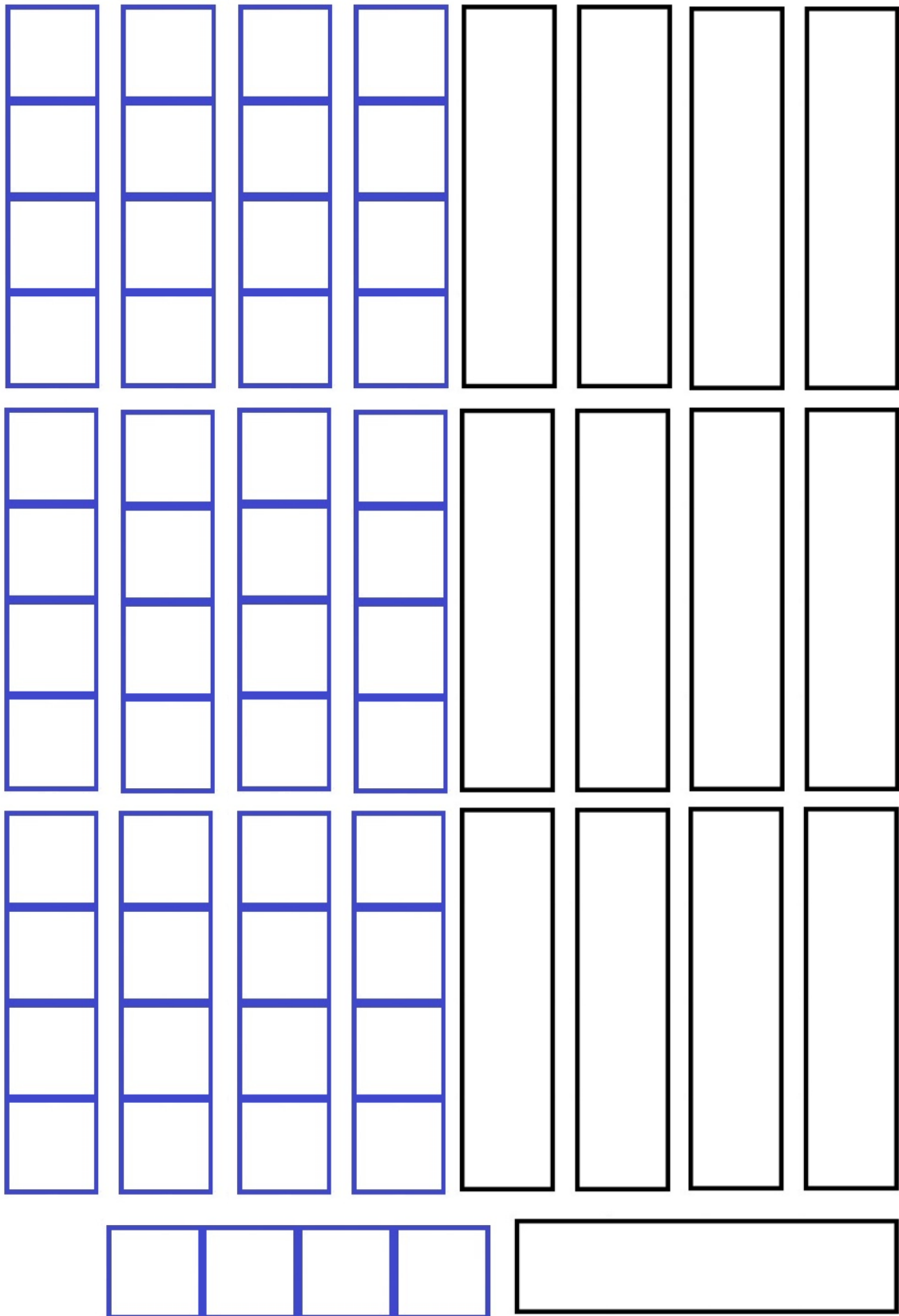
APÊNDICE B – Explorando a multiplicação no campo da geometria com segmentos de reta.

Cada grupo de alunos recebeu dois segmentos de reta de cores distintas, sendo proposta, a partir desses objetos, a realização da operação de multiplicação.

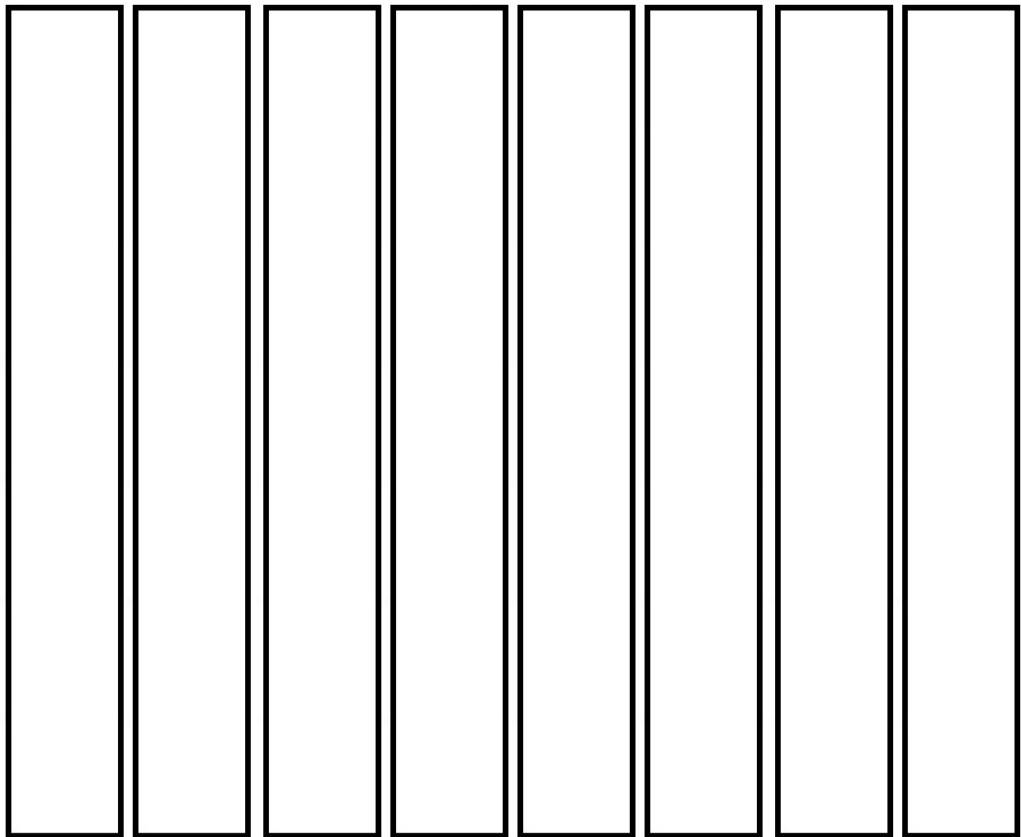
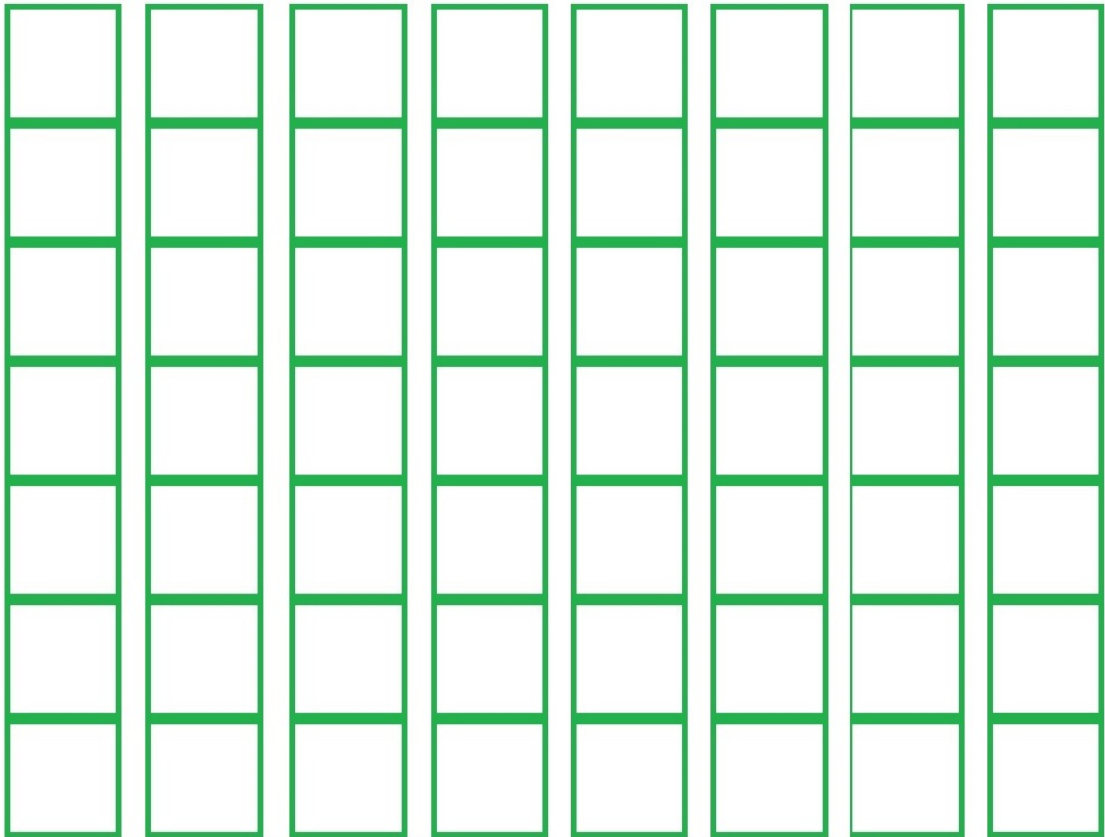


Os segmentos de reta lineares foram confeccionados em papel cartão colorido, enquanto os segmentos particionados utilizaram papel cartão branco. Todos os segmentos foram cortados com o auxílio de uma guilhotina, a fim de garantir precisão no acabamento.

Segmento de reta linear e particionado azul:

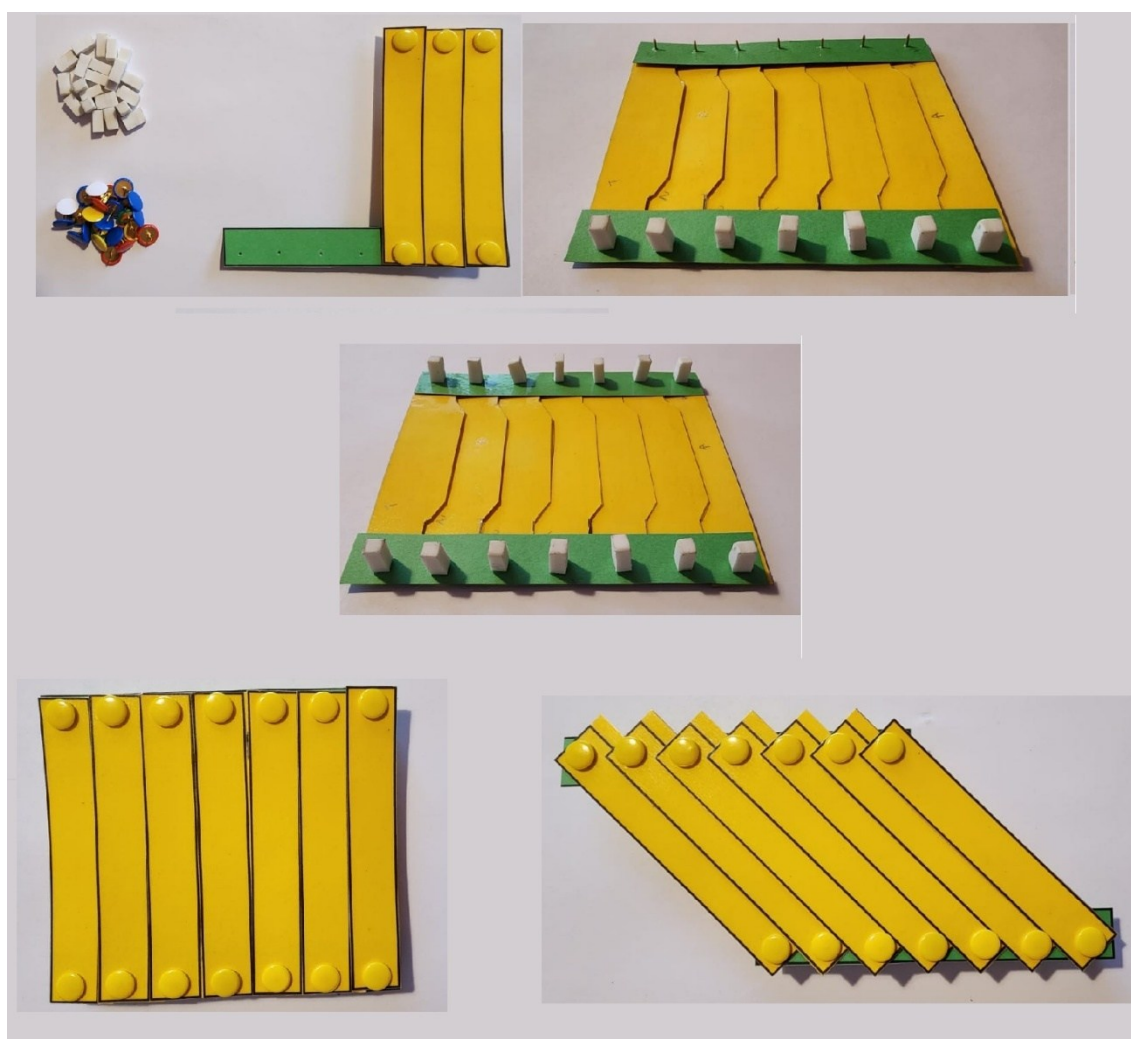


Segmento de reta linear e particionado verde:



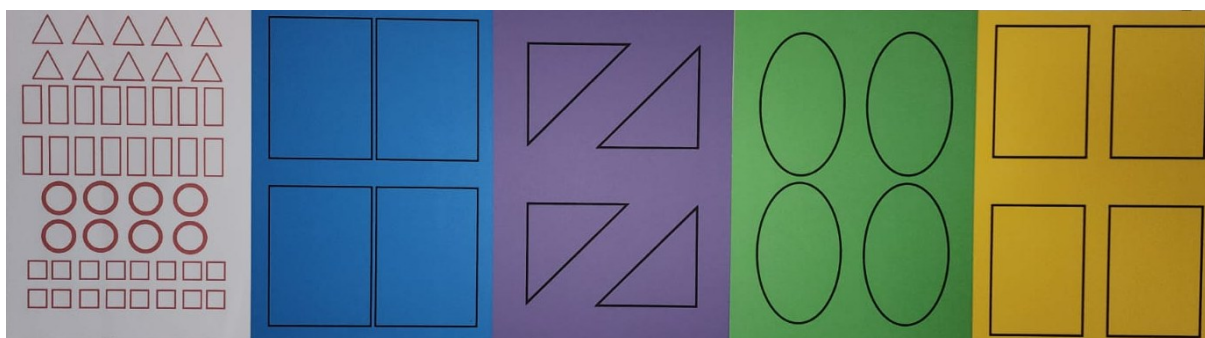
O retângulo articulado foi montado a partir de segmentos de reta (lineares e particionados). As peças foram encapadas com papel Contact, com o objetivo de aumentar a durabilidade do material. Além disso, utilizamos percevejos coloridos e pequenos pedaços de borracha como parte do processo de montagem.

A construção ocorreu da seguinte maneira: inicialmente, selecionamos um segmento para servir como base; em seguida, posicionamos peças de outro segmento perpendicularmente sobre essa base, formando ângulos de 90 graus, e fixamos as conexões com percevejos. Posteriormente, utilizamos um segmento semelhante ao da base para fechar a parte superior da estrutura. Por fim, os pedaços de borracha foram utilizados para cobrir as pontas dos percevejos, com a intenção de evitar acidentes.



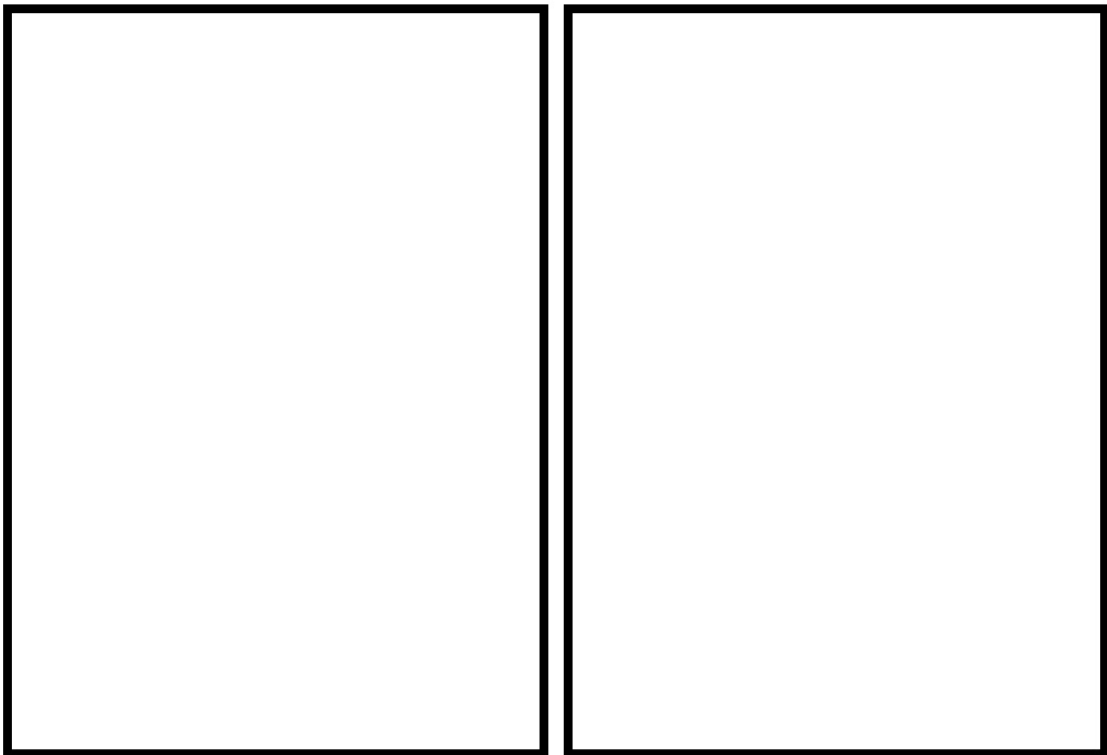
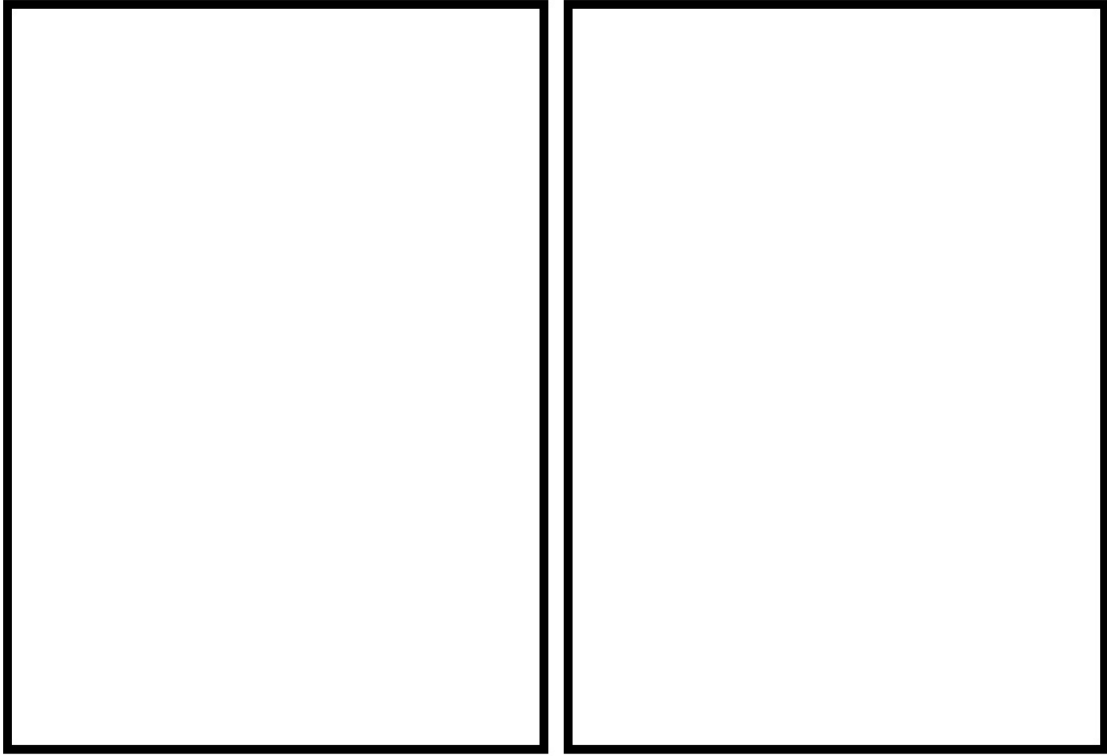
APÊNDICE C – Explorando a ideia de medir áreas com diferentes formatos

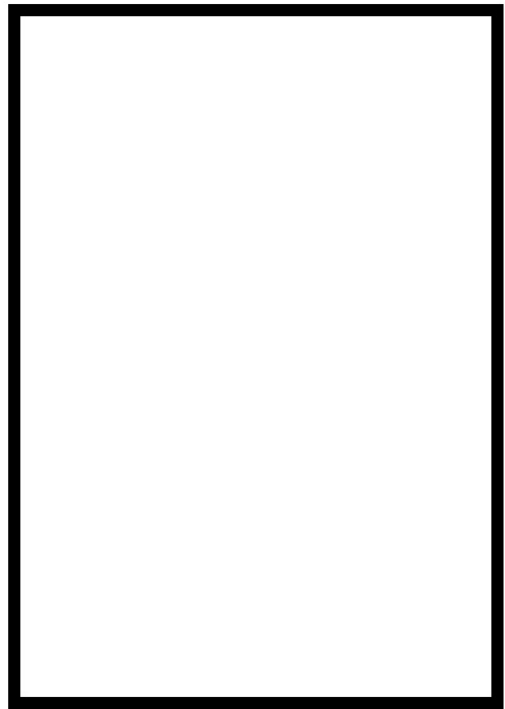
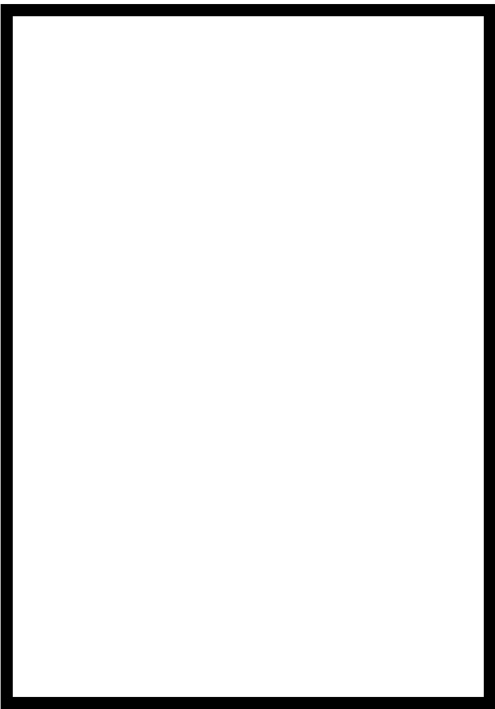
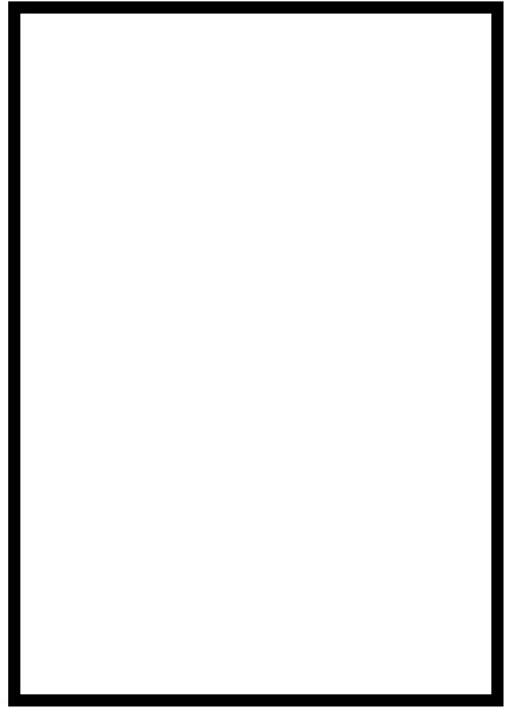
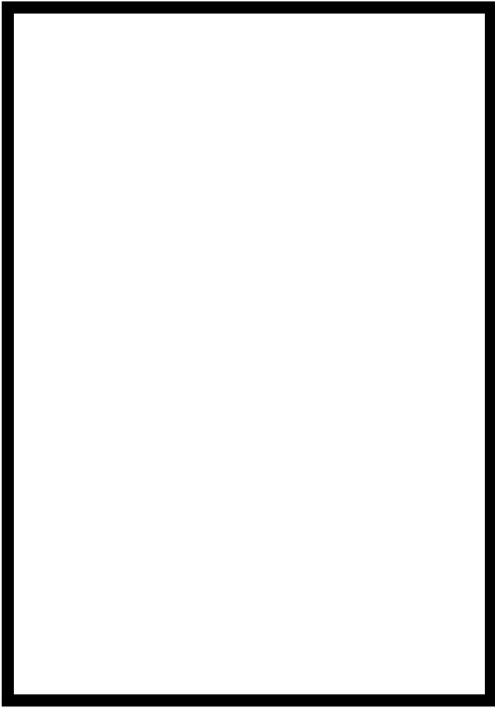
Cada grupo de alunos recebeu diferentes formatos de áreas maiores, que deveriam ser mensuradas, bem como distintos formatos de áreas menores, que deveriam ser utilizados como unidades de medida.



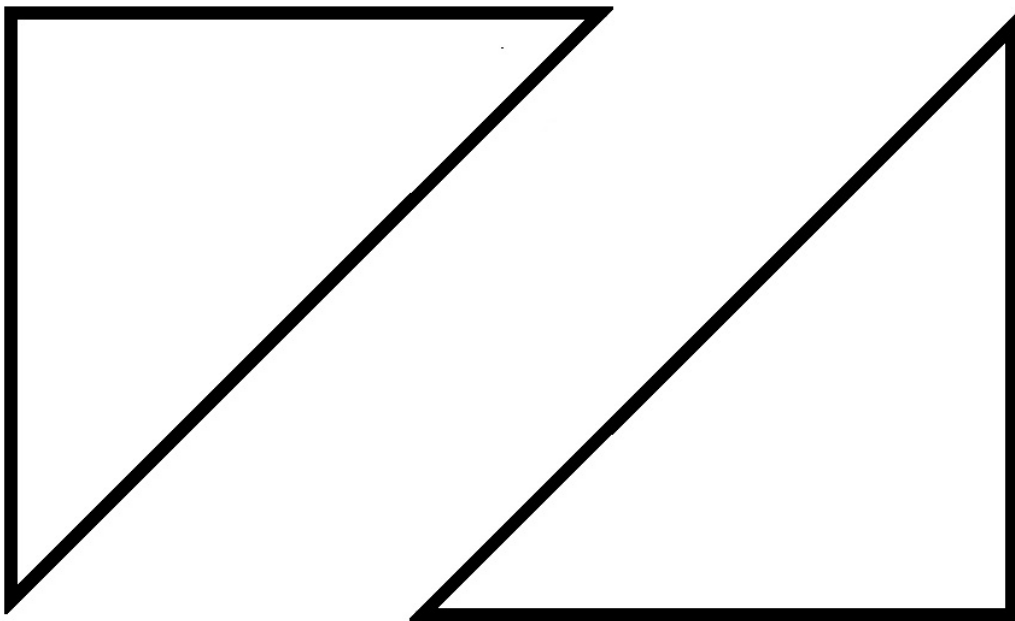
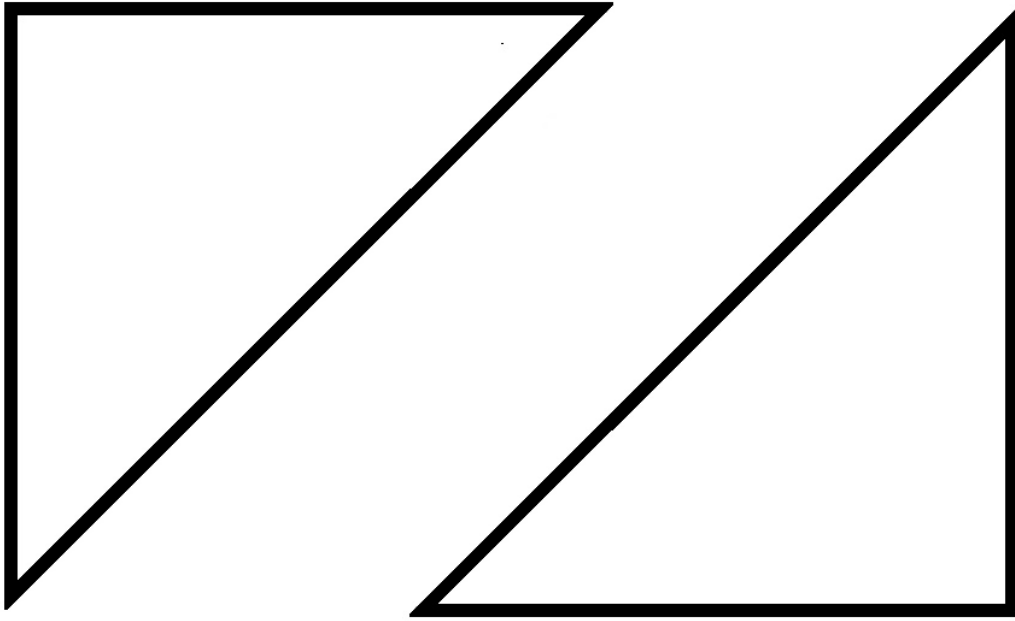
As figuras correspondentes às áreas maiores foram confeccionadas em papel cartão colorido, enquanto as menores foram produzidas em papel cartão branco.

Áreas retangulares:

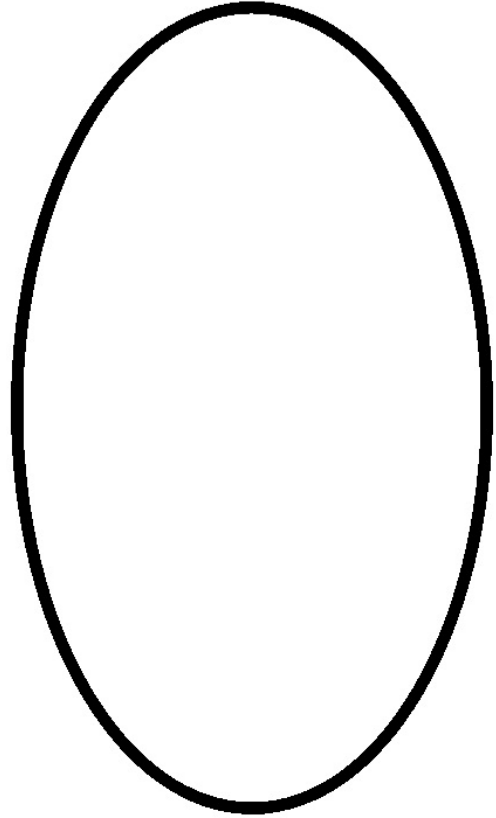
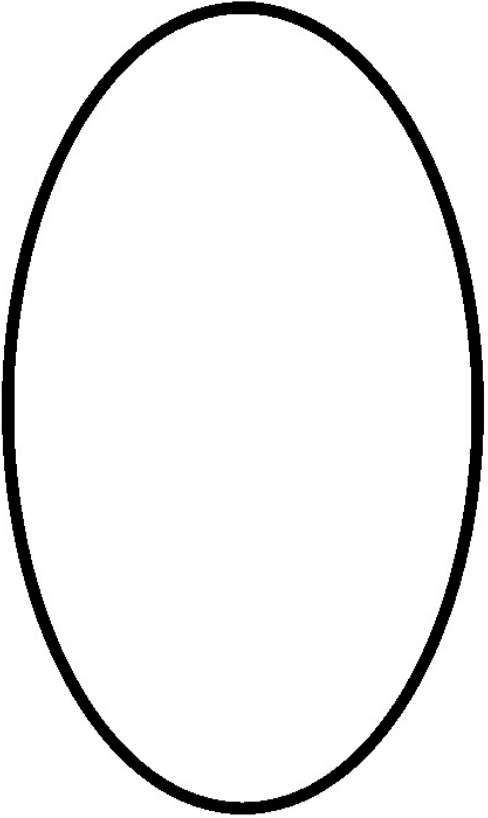
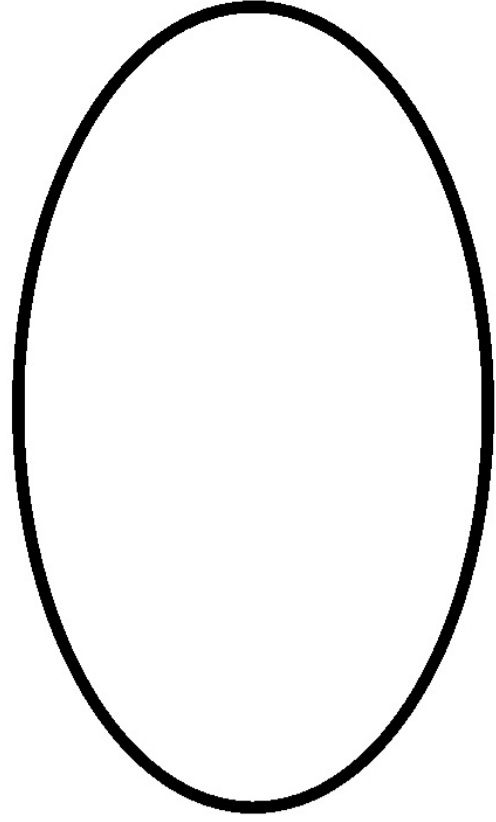
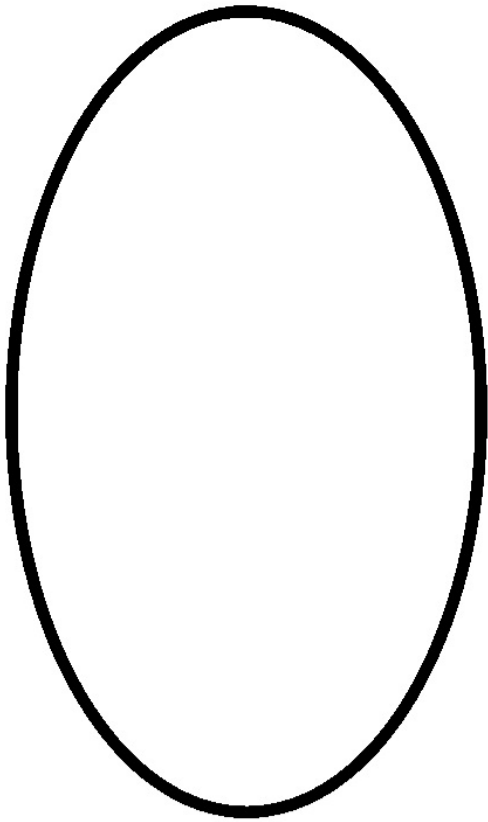




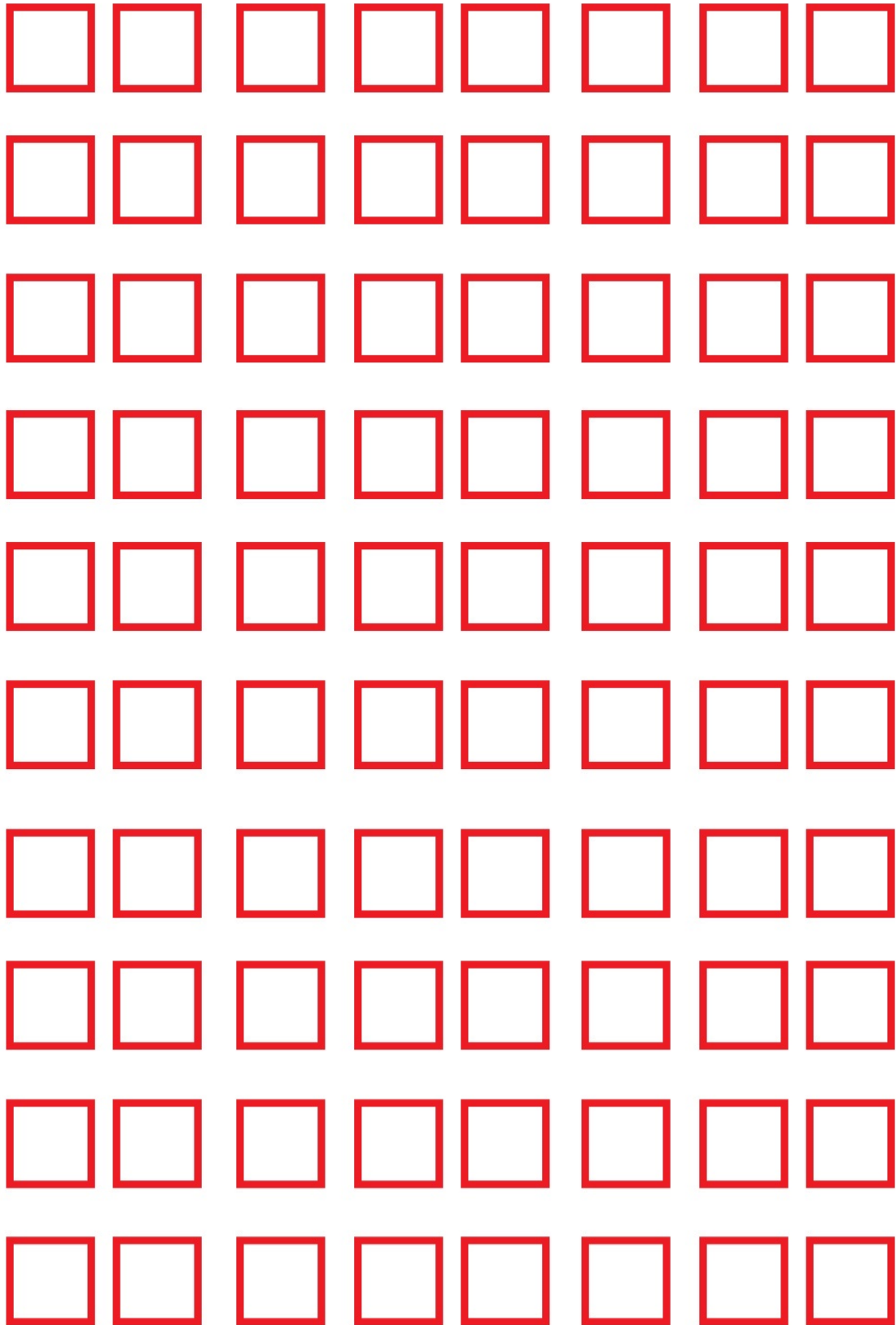
Áreas triangulares:



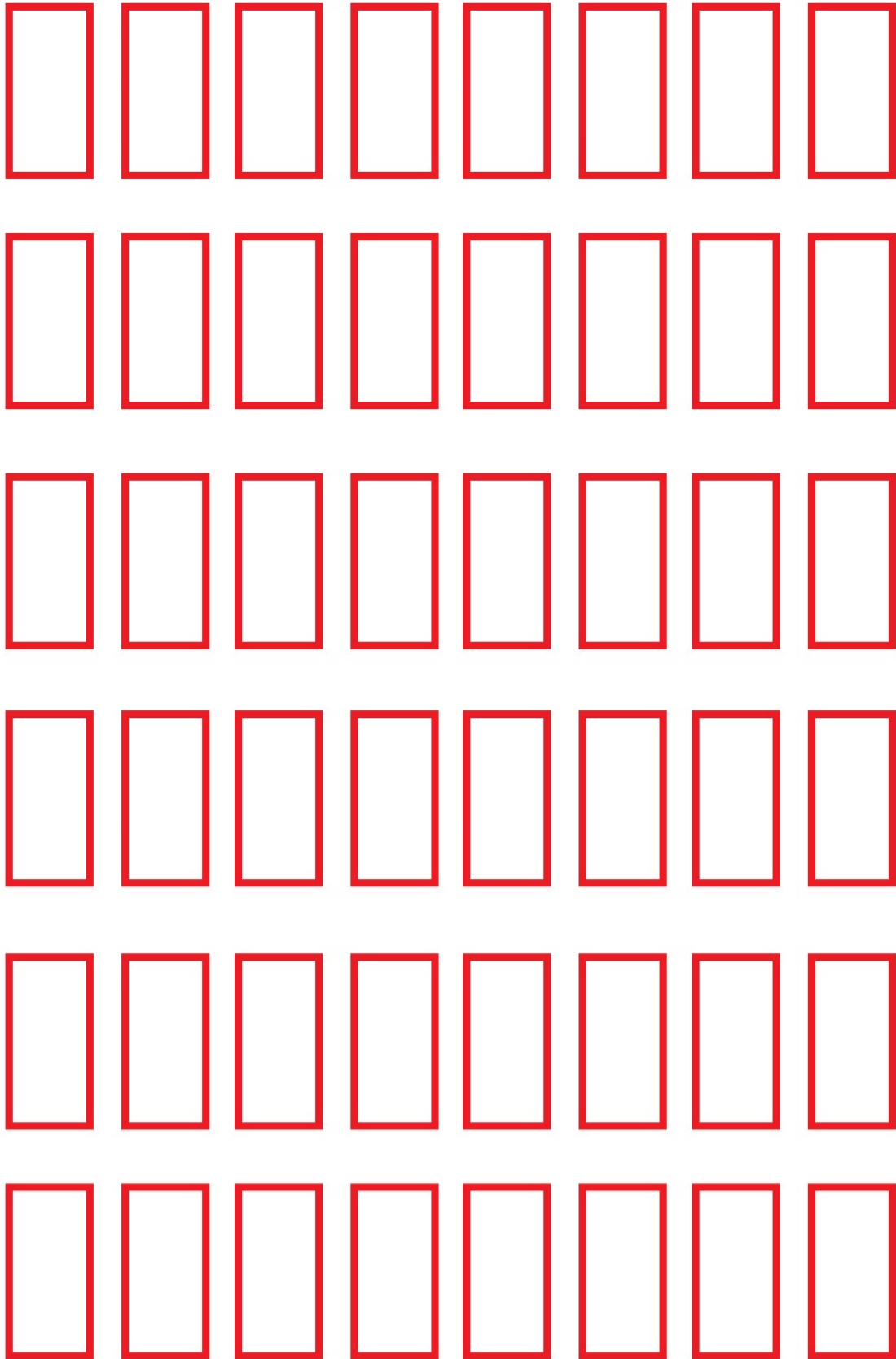
Áreas elípticas:



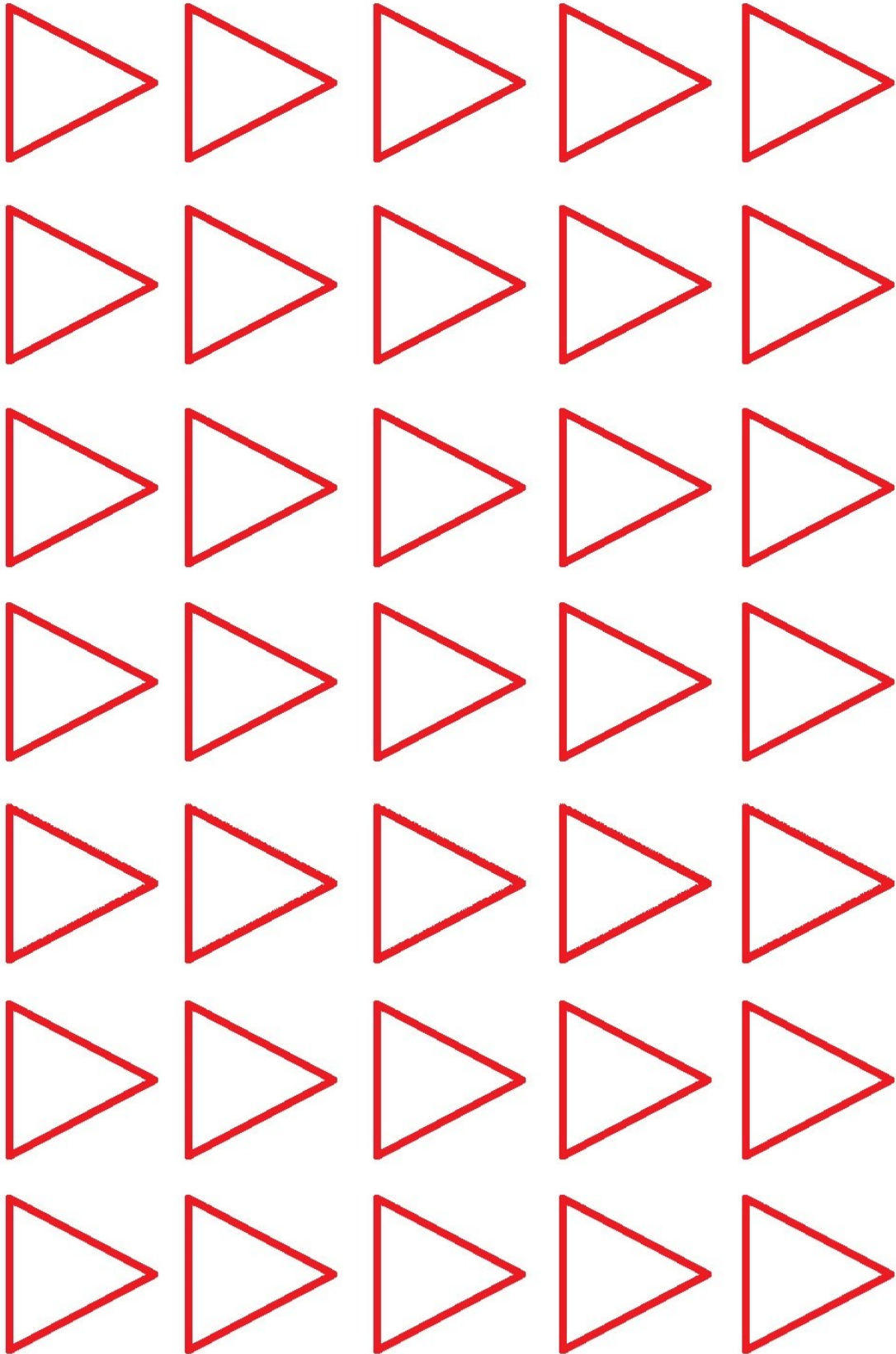
Pequenos quadrados para medição:



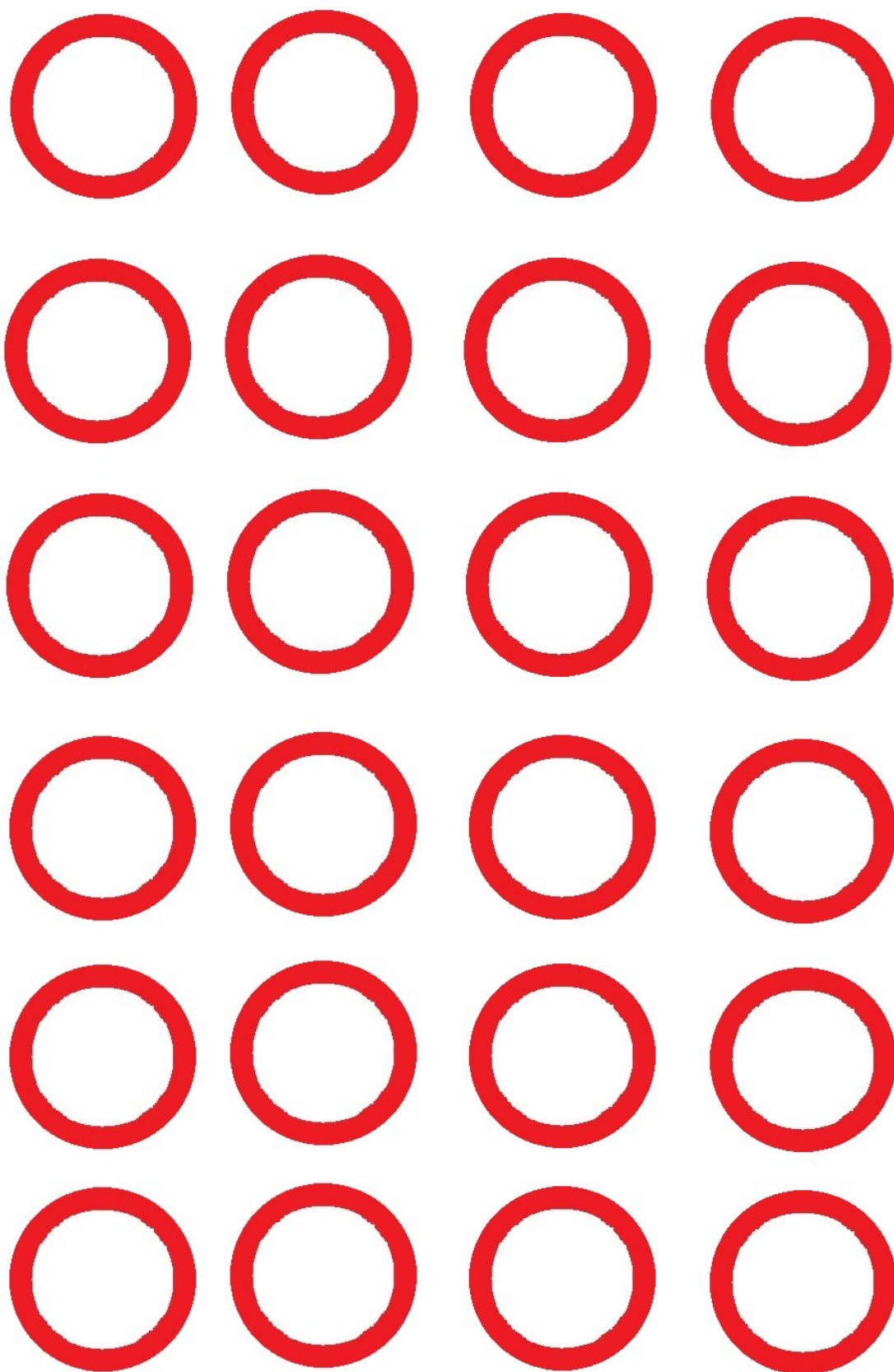
Pequenos retângulos para medição:



Pequenos triângulos para medição:

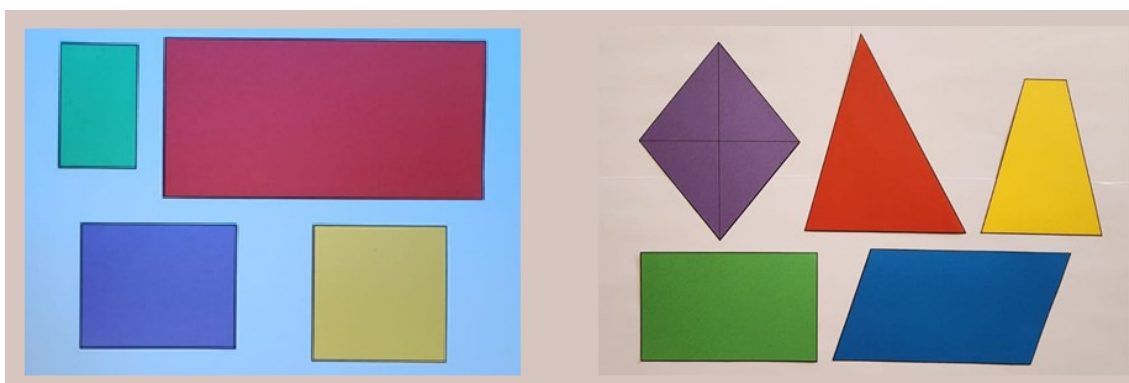


Pequenos círculos para medição:



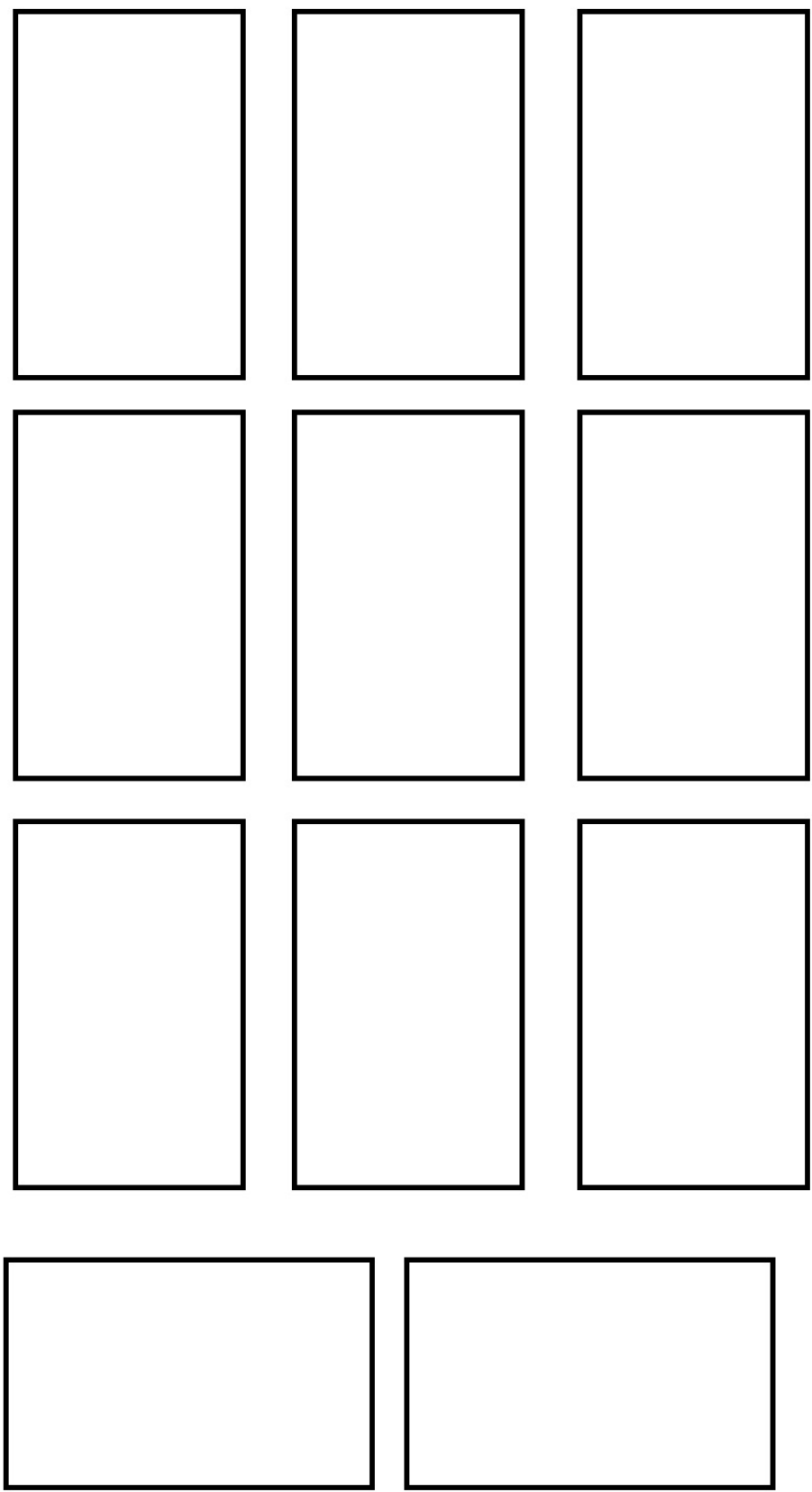
APÊNDICE D – Comparados áreas de polígonos

Inicialmente, cada grupo recebeu quatro retângulos e foi solicitado que os organizassem em ordem crescente de área, justificando o critério adotado para o ordenamento. Em um segundo momento, os estudantes receberam diferentes polígonos, nos quais deveriam aplicar as fórmulas de cálculo de área e explorar as transformações decorrentes dessas aplicações.

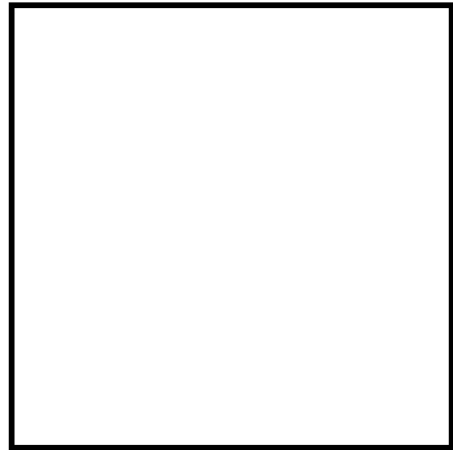
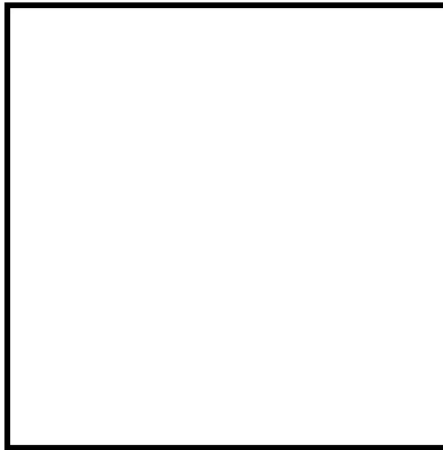
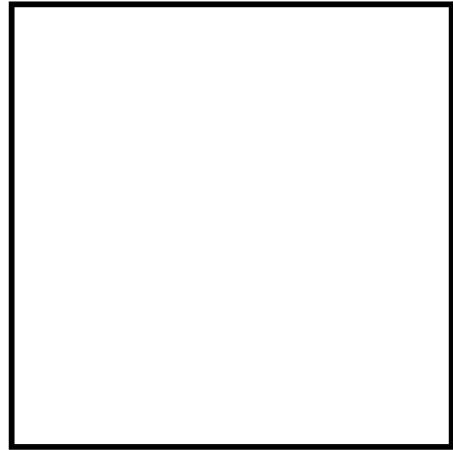
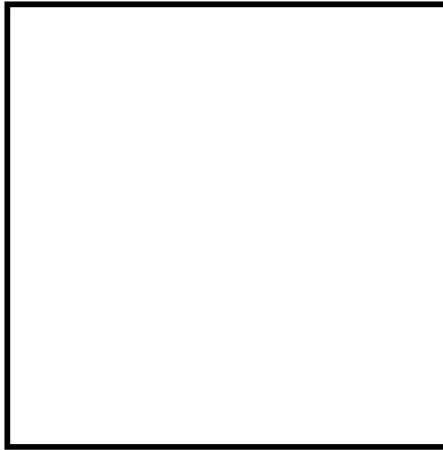
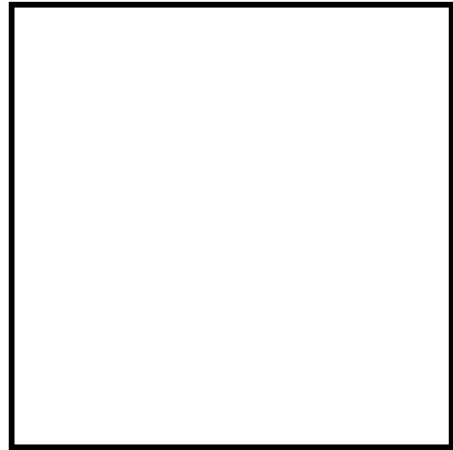
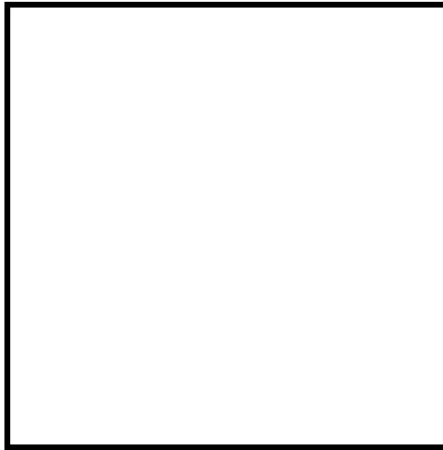


Os polígonos foram confeccionados em papel cartão colorido.

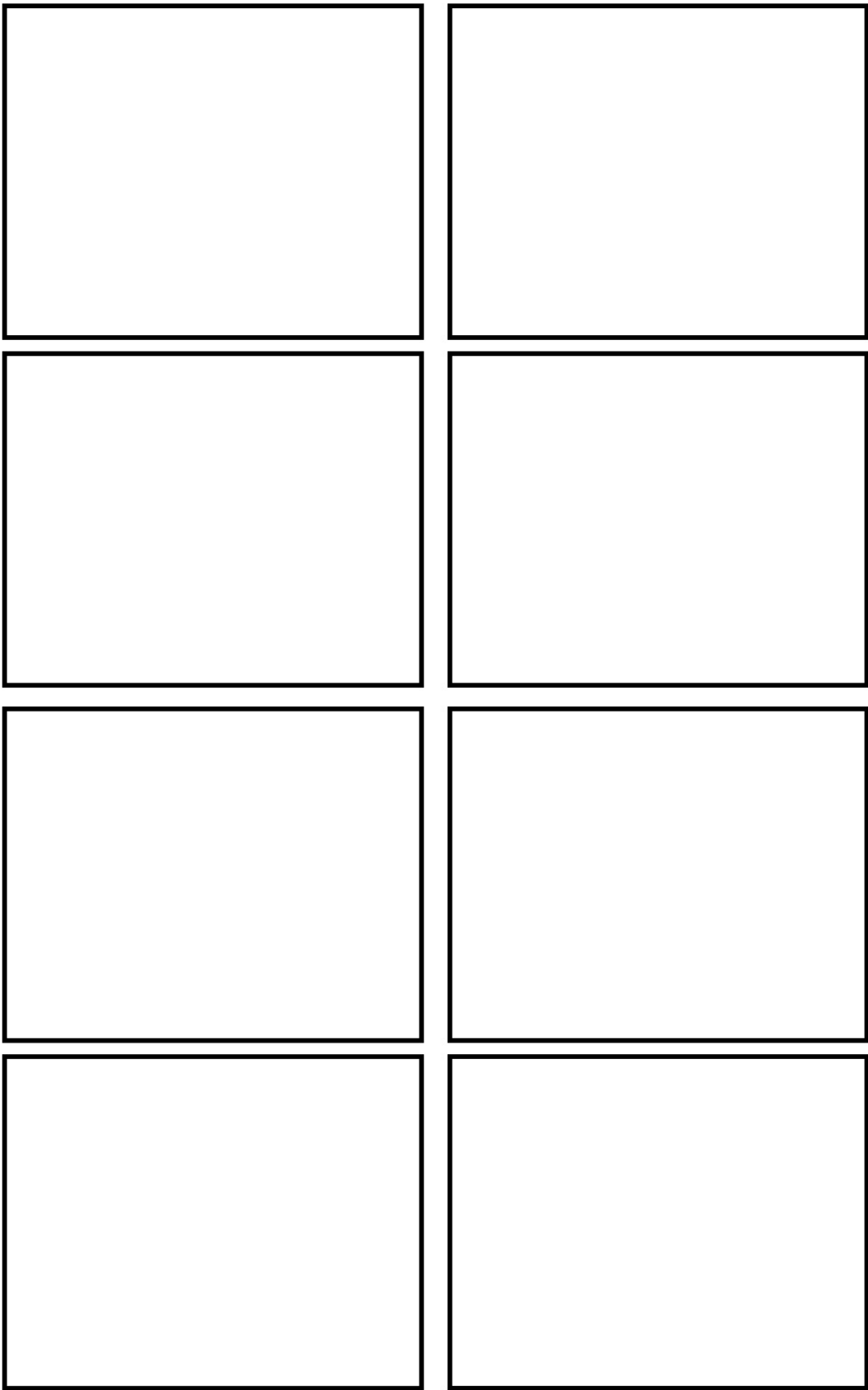
Retângulo verde:



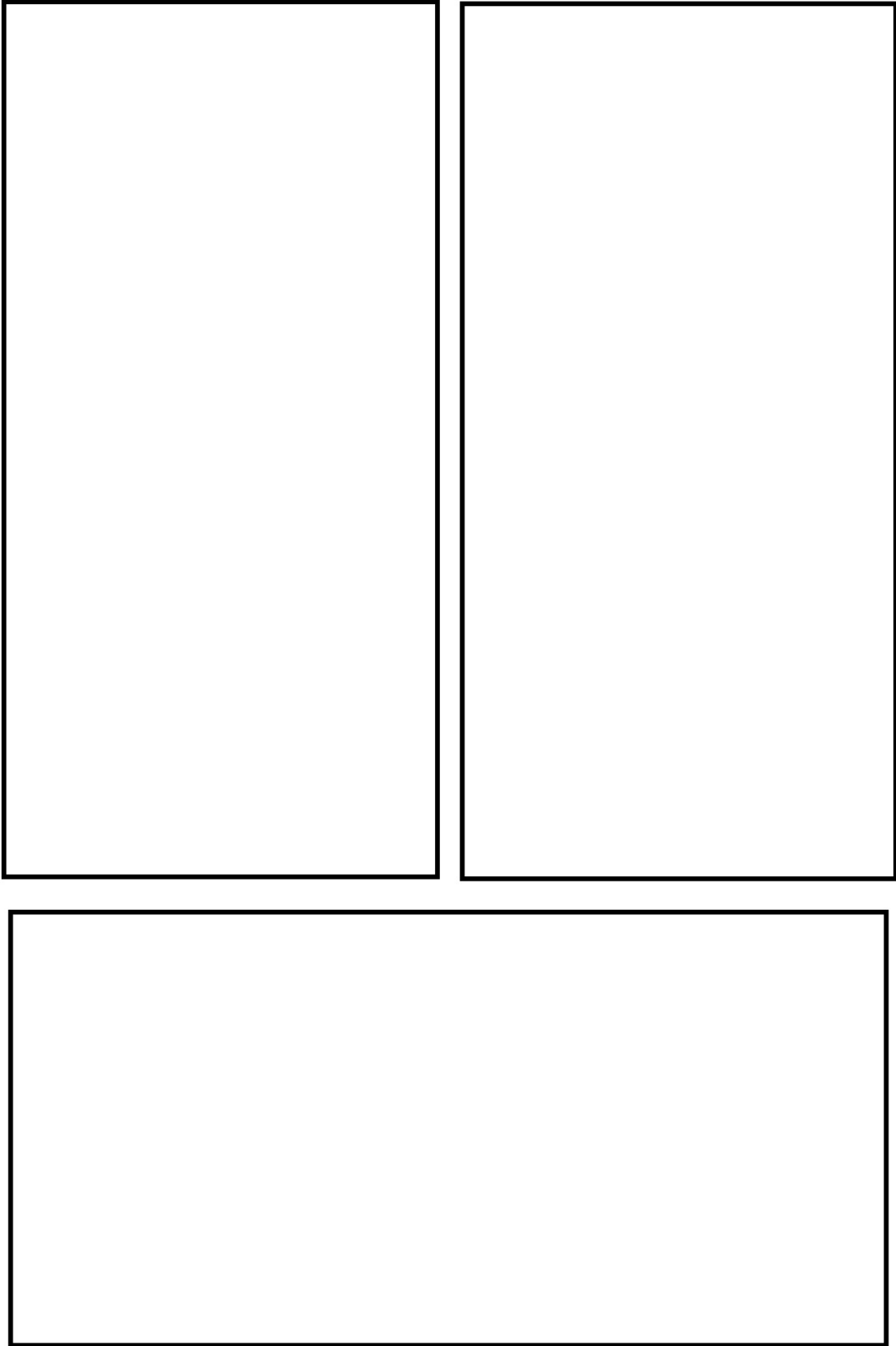
Retângulo amarelo:



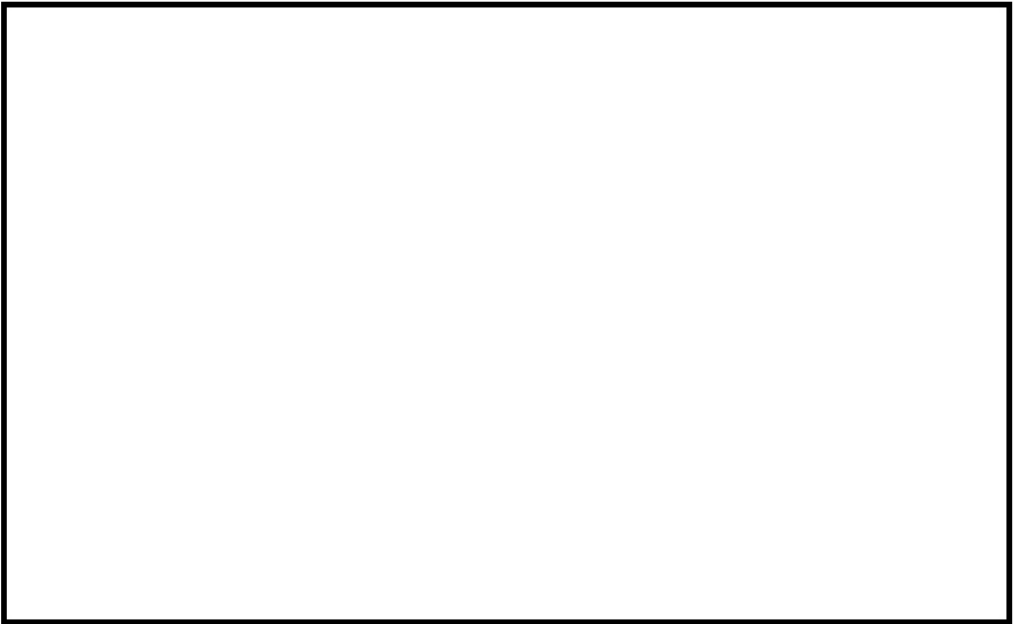
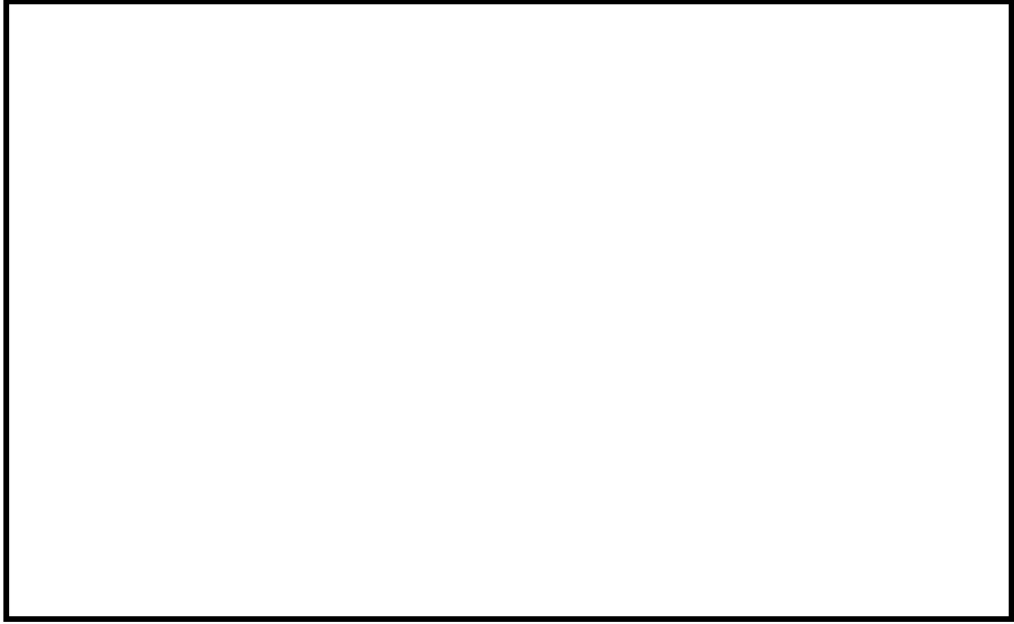
Retângulo roxo:



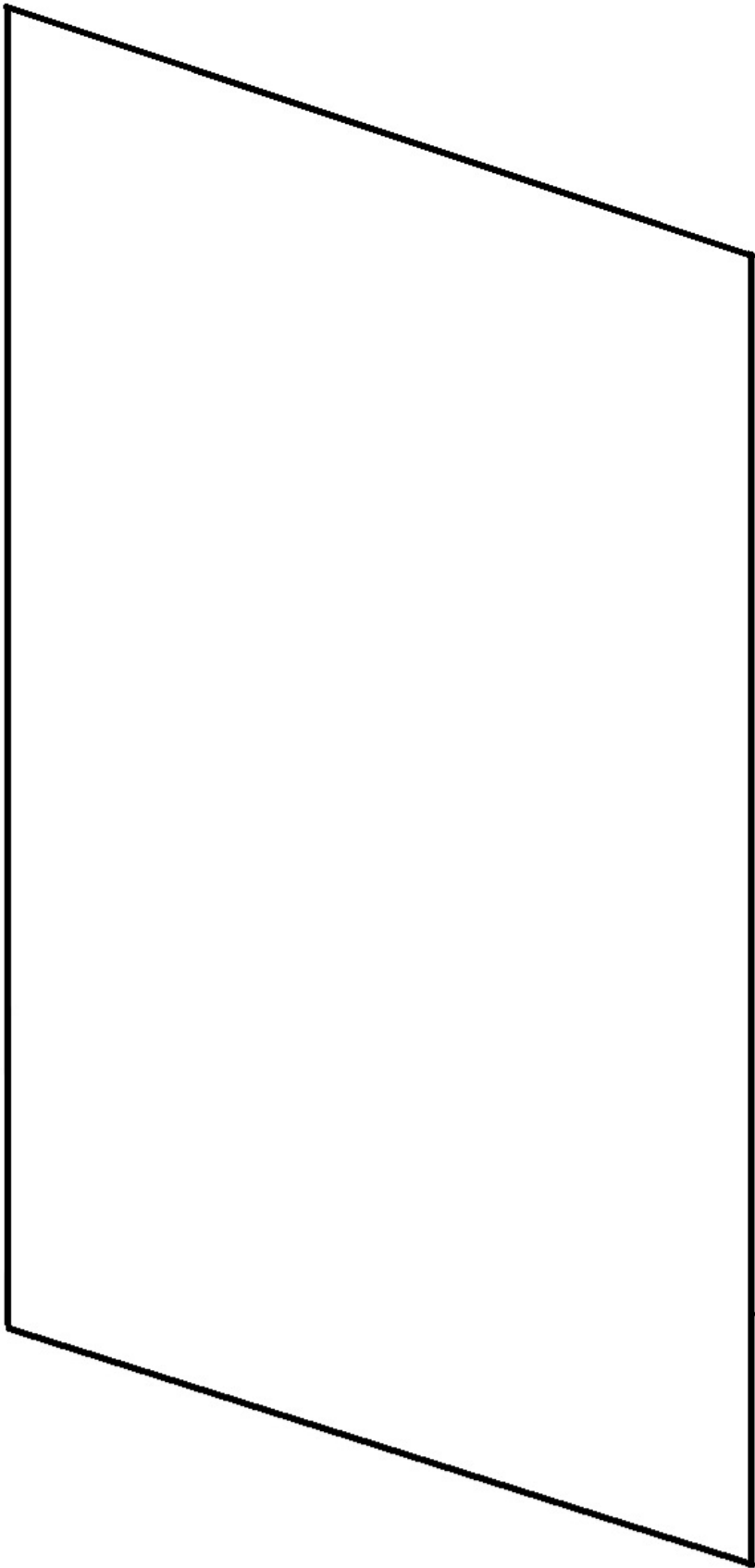
Retângulo vermelho:



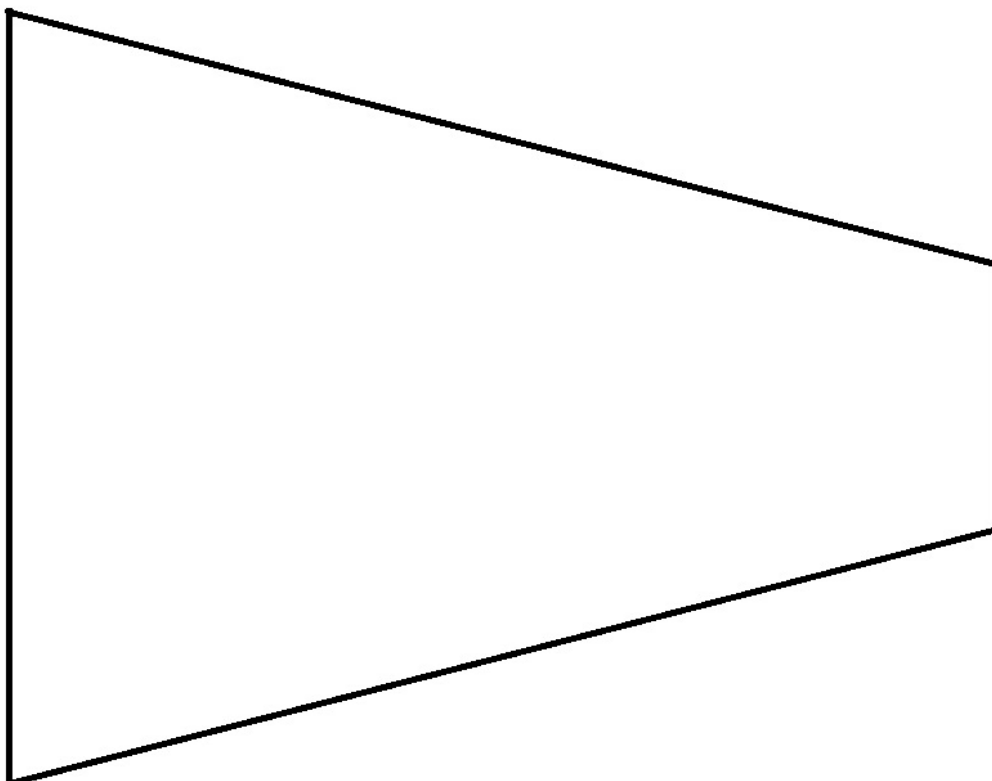
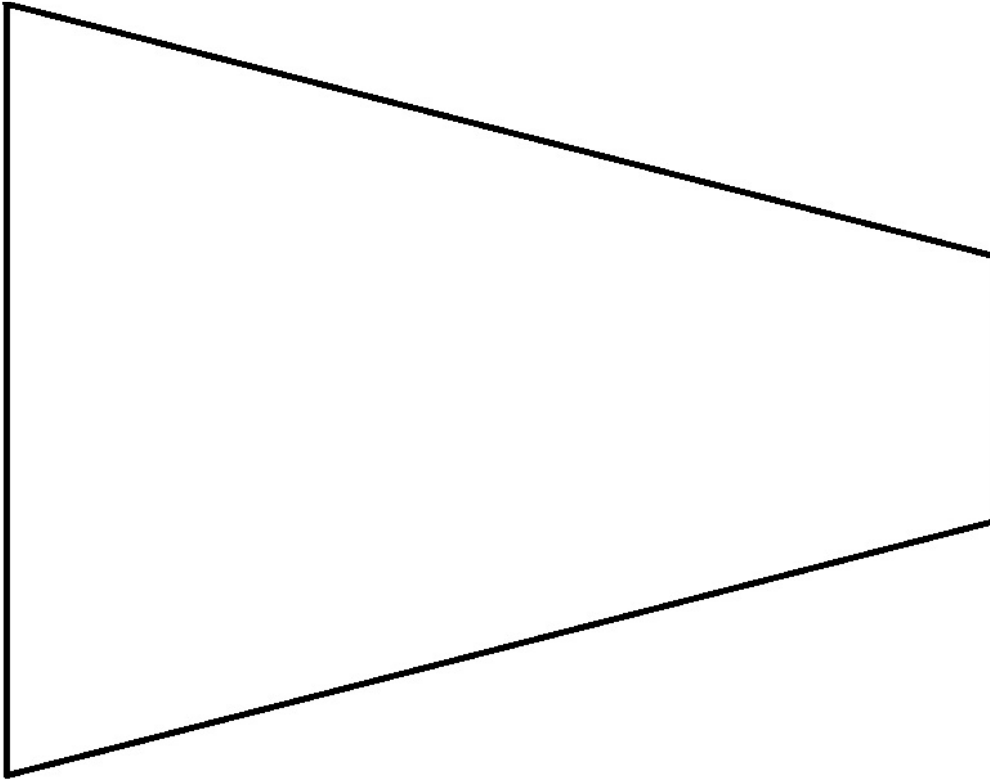
Retângulo verde:



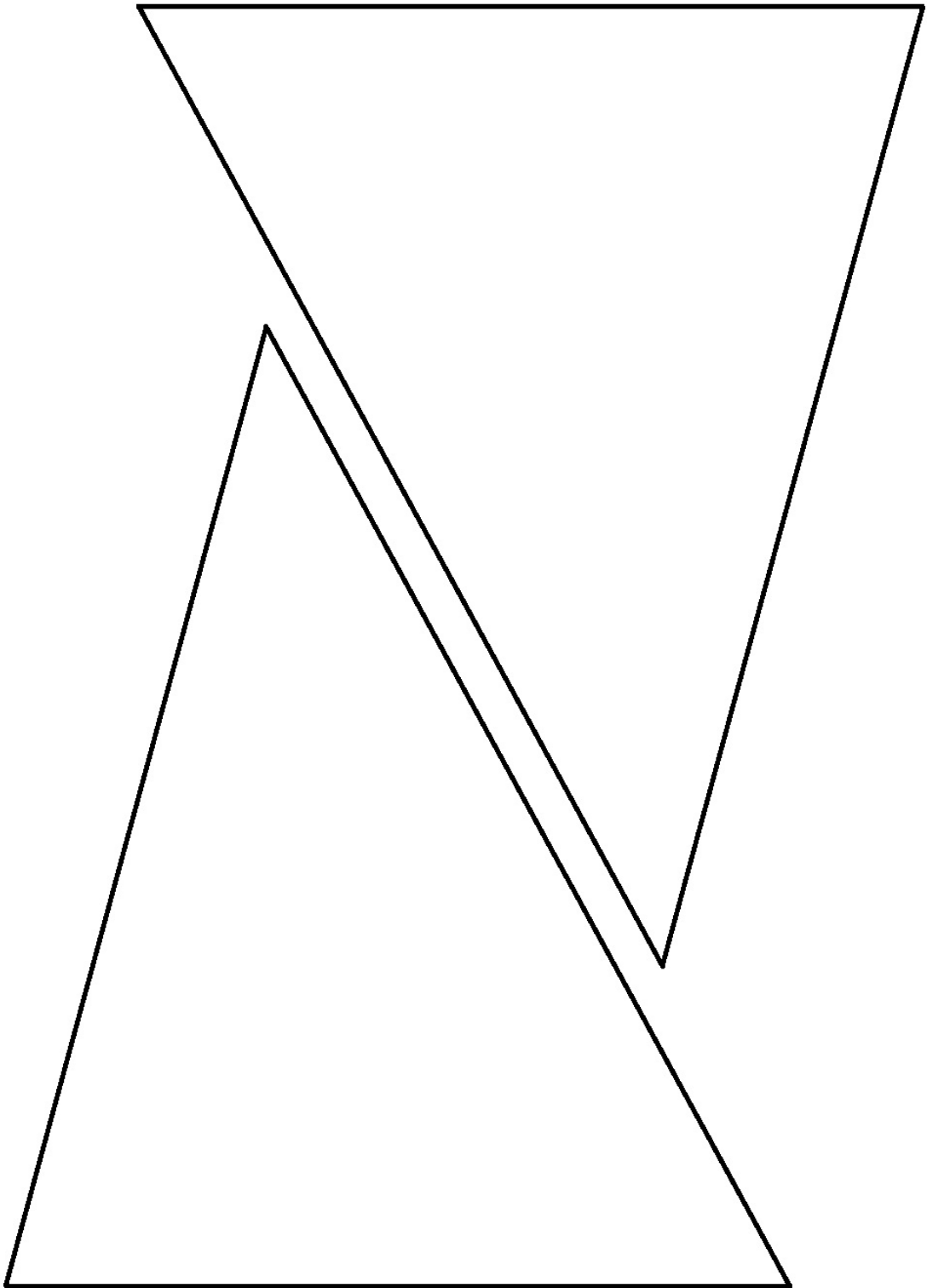
Paralelogramo azul:



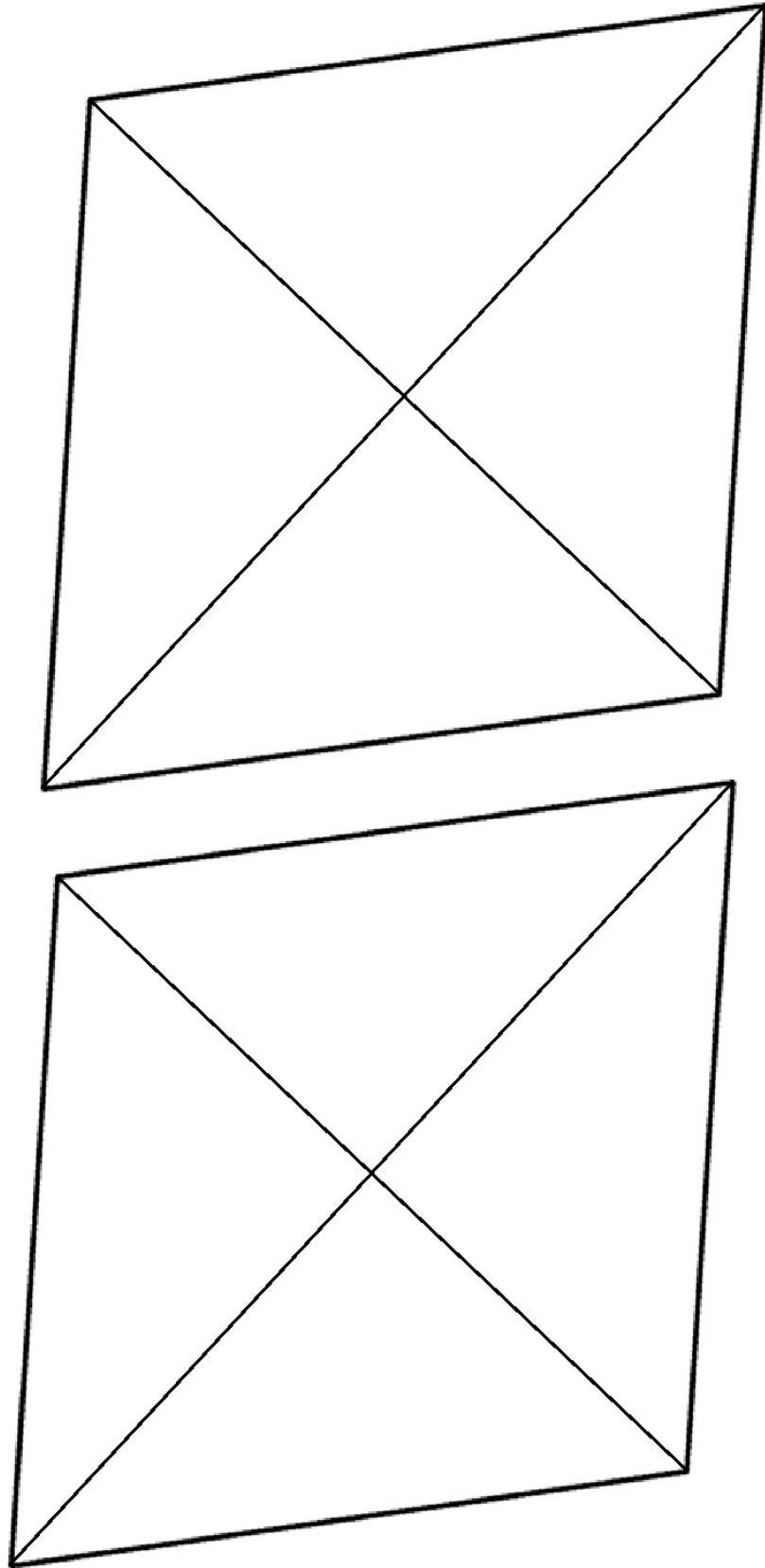
Trapézio amarelo:



Triângulo vermelho:



Losango roxo:



APÊNDICE E – Produto Educacional



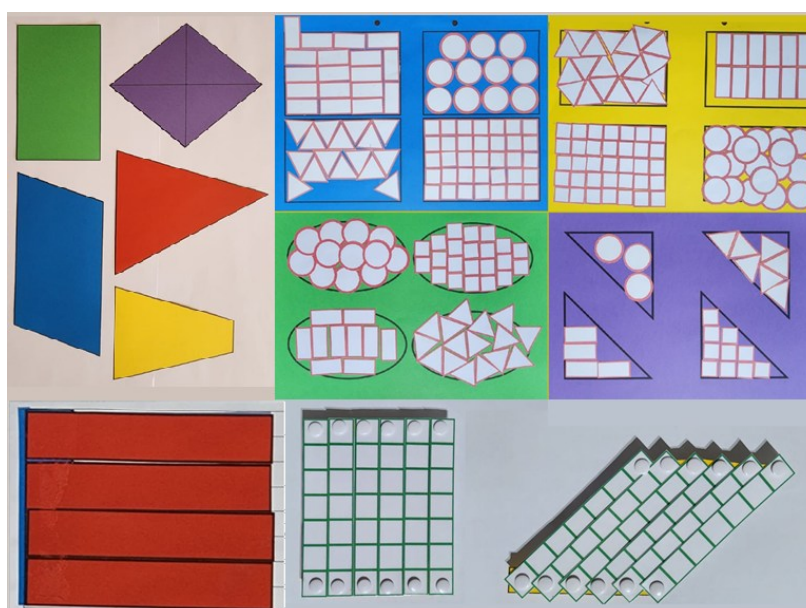
PRODUTO EDUCACIONAL

Sequência Didática: Problematizando o ensino de áreas – criando sentidos e conexões entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria.

Orientadora: Prof^a Dr^a Priscila Cardoso Petito

Coorientador: Prof. Dr. Fábio Menezes da Silva

Discente: Fábio Vinicius Gouvêa Moura



Rio de Janeiro
2025

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	149
Atividade 1: O que é reta, semirreta e segmento de reta?	151
Atividade 2: Adição, Subtração e Comparação com segmentos de reta – (Apêndice A).....	154
Atividade 3: Multiplicação com segmentos de reta – (Apêndice B).....	158
Atividade 4: Medida – (Apêndice C)	162
Atividade 5: Comparando áreas retangulares – (Apêndice D)	165
Atividade 6: Aplicando a fórmula de cálculo de área no polígono – (Apêndice E). 168	
Considerações	179
Referências	180
APÊNDICE A – Explorando a adição, a subtração e a ordenação no campo da geometria com segmentos de reta.	181
APÊNDICE B – Explorando a multiplicação no campo da geometria com segmentos de reta.	187
APÊNDICE C – Explorando a ideia de medir áreas com diferentes formatos.	194
APÊNDICE D – Comparados áreas de polígonos.	203
APÊNDICE E – Transformação geométrica de polígonos.	208

INTRODUÇÃO

O presente Produto Educacional atua como uma proposta didática de atividades e é referente à dissertação de mestrado intitulada *“Desenvolvendo uma Mentalidade Matemática por meio de uma Abordagem Problematizada no ensino de Áreas Geométricas”*. Tal produto é resultado da pesquisa associada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado a Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ).

Nosso Produto Educacional consiste em uma sequência didática voltada para aulas de Matemática, inspirada nos princípios da Matemática Problematizada, da Investigação Matemática e do Laboratório de Ensino de Matemática. Essa proposta adota uma abordagem dialógica, que busca (re)construir os conceitos matemáticos de forma colaborativa no ambiente escolar. Para isso, são exploradas situações-problema relacionadas à Geometria, utilizando materiais manipuláveis como recurso didático, com o objetivo de favorecer a visualização, a compreensão e a abstração dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

As atividades que compõem essa sequência didática foram aplicadas em uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental. No entanto, a proposta apresenta flexibilidade e pode ser adaptada a diferentes etapas da Educação Básica, desde que o(a) professor(a) exercite sua criatividade e considere as especificidades de sua turma. A sequência foi elaborada de forma progressiva, iniciando pelo conceito de reta, passando pela compreensão de área, explorando a noção de medida e culminando no cálculo de áreas de diferentes polígonos. Dessa forma, é possível utilizar as atividades de maneira integrada ou isolada, conforme a pertinência do conteúdo à etapa escolar em que se pretende aplicá-las.

Essas atividades foram desenvolvidas com o intuito de envolver os alunos em um ambiente de ensino acolhedor, participativo e respeitoso. Procurou-se criar um espaço em que os erros fossem compreendidos como parte fundamental do processo de aprendizagem, sendo acolhidos e explorados coletivamente, e onde as sugestões dos estudantes fossem sempre bem-vindas e debatidas em grupo. O objetivo não se restringia à apropriação de conceitos e definições matemáticas; desejava-se, sobretudo, que os alunos fossem capazes de perceber a matemática como algo significativo, compreendê-la em sua lógica e estrutura, e, a partir disso, fortalecer sua autoconfiança diante da disciplina. O foco esteve na construção de

uma relação mais positiva com a matemática, promovendo o desenvolvimento de uma mentalidade de crescimento e o engajamento ativo dos estudantes no processo de aprendizagem.

Atividade 1: O que é reta, semirreta e segmento de reta?

Esta primeira atividade configura-se muito mais como uma conversa com os alunos do que como uma tarefa convencional, mas isso de modo algum diminui sua relevância no processo de ensino e aprendizagem. Conforme já destacado, esta sequência didática pauta-se em uma abordagem dialógica, inspirada pelos fundamentos da Matemática Problematizada. Essa escolha metodológica se justifica, pois, segundo Giraldo (2019), a Matemática Problematizada propõe uma visão plural e dinâmica da matemática, reconhecendo a existência de saberes situados em diferentes contextos históricos, sociais e culturais, nos quais a produção e a mobilização do conhecimento matemático se fazem presentes de maneira significativa.

Essa perspectiva valoriza a construção de significados e de vínculos afetivos no processo educativo, destacando-se por priorizar a reflexão crítica e o engajamento ativo dos estudantes, em detrimento da simples transmissão de conteúdos, regras e procedimentos. Assim, ao iniciar a sequência com uma atividade dialógica, busca-se criar um espaço de escuta e troca, no qual os alunos possam expressar suas percepções, experiências e conhecimentos prévios, contribuindo para o desenvolvimento de uma aprendizagem mais contextualizada, colaborativa e transformadora.

Dito isso, passemos à proposta de desenvolvimento da primeira atividade. Como o próprio título sugere, trataremos dos conceitos de reta, semirreta e segmento de reta. Cabe destacar que a semirreta e o segmento de reta são construções derivadas a partir do conceito de reta, sendo esta, por sua vez, um elemento primitivo da geometria. Por se tratar de um elemento primitivo, a reta não possui uma definição formal baseada em propriedades mais fundamentais – ela é aceita como um conceito intuitivo, cuja compreensão é construída a partir da observação, da experiência e da convenção matemática.

Dessa forma, é fundamental que o professor tenha domínio sobre esse conteúdo, tanto em sua dimensão conceitual quanto em suas possíveis abordagens didáticas. Isso permitirá que ele conduza a discussão com segurança, acolhendo e explorando as ideias dos alunos, mesmo que estas surjam de forma espontânea, incompleta ou ainda em construção. O objetivo, aqui, não é apresentar definições prontas, mas promover um espaço de diálogo e investigação, em que os estudantes

possam construir significados próprios e conectá-los ao saber matemático historicamente sistematizado.

Sugerimos que o primeiro tema a ser abordado com os alunos seja o conceito de reta. Inicie a atividade com uma conversa aberta, fazendo a seguinte pergunta:

- O que é uma reta?

Estimule os estudantes a trazerem exemplos concretos e próximos de sua realidade – inclusive objetos presentes na própria sala de aula podem ser utilizados para ilustrar suas ideias. A partir das respostas, avance com perguntas que ampliem a reflexão, como:

- Se algo não for uma reta, será o quê?

Nesse momento, é provável que surjam respostas variadas. Em nossa experiência, por exemplo, alguns alunos responderam que o oposto de uma reta seria um círculo ou uma bola. Esse tipo de resposta oferece uma excelente oportunidade para explorar noções iniciais sobre curvas e formas não lineares, enriquecendo a compreensão geométrica dos estudantes.

Outra questão relevante a ser proposta é:

- A reta possui largura?

Esse questionamento convida os alunos a refletirem sobre a aparência da reta. Desenhe uma no quadro ou utilize uma linha de barbante, régua ou fita para representá-la visualmente. Em seguida, provoque a turma com perguntas como: "Conseguimos medir a largura de uma reta?", ou "Se ela não tem largura, o que isso nos diz sobre ela?". Esse exercício ajuda a consolidar a ideia de que a reta, apesar de representada visualmente com alguma espessura, é um ente abstrato que não possui largura nem espessura reais.

Outro caminho de exploração consiste em relacionar a reta com os números, especialmente por meio da reta numérica, recurso comum no Ensino Fundamental. Podemos destacar semelhanças entre os dois elementos, como o fato de ambos serem infinitos. Os alunos, especialmente a partir do sexto ano, geralmente já compreendem a infinitude dos números naturais, o que pode servir de ponte para a ideia de que a reta também se estende infinitamente – e, neste caso, em ambas as direções.

No contexto da pesquisa vinculada a este produto educacional, as atividades foram aplicadas com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, os quais já tinham familiaridade com os números negativos e, portanto, com a representação

bidirecional da reta numérica. No entanto, caso essa abordagem seja desenvolvida com turmas do sexto ano, sugerimos conduzir a conversa utilizando os números naturais como ponto de partida, destacando que esses são infinitos apenas em uma direção, enquanto a reta é infinita para os dois lados.

Após a construção coletiva do conceito de reta – entendida como um elemento que não possui curvas, é sempre reto, apresenta apenas uma dimensão (o comprimento) e se estende infinitamente em ambas as direções, sem um ponto inicial ou final definido –, o(a) professor(a) pode conduzir a discussão para os conceitos de semirreta e segmento de reta.

É importante que essa transição ocorra mantendo a abordagem problematizadora que tem guiado toda a atividade, incentivando os alunos a refletirem criticamente e a justificarem suas ideias por meio de perguntas que despertem o raciocínio. Uma estratégia eficaz é iniciar essa nova etapa do diálogo questionando diretamente os estudantes sobre os próprios termos: *semirreta* e *segmento de reta*. Pergunte-lhes: "O que vocês entendem por esses nomes?" ou "O que será que significa 'semi' na palavra semirreta?"

Como os alunos já discutiram coletivamente as principais características da reta – sua infinitude, sua ausência de início e fim definidos e sua unicidade dimensional –, esse conhecimento prévio pode ser mobilizado para que eles formulem hipóteses sobre o que seriam, então, a semirreta e o segmento de reta.

A partir desse ponto, a criatividade dos alunos e do(a) professor(a) será fundamental para conduzir e finalizar a atividade. A proposta metodológica está centrada no diálogo: conversar, colher ideias, explorá-las, refletir coletivamente, chegar a conclusões provisórias e retomar a conversa, seja sobre o mesmo tema ou avançando para conceitos subsequentes. Esse ciclo reflexivo, próprio de uma abordagem problematizadora, favorece a construção ativa do conhecimento, respeitando o tempo e o percurso intelectual de cada grupo.

Consideramos que essa primeira etapa da sequência didática pode ser concluída no momento em que os conceitos de reta, semirreta e segmento de reta forem construídos de forma compartilhada, com sentido e significado para os estudantes. O objetivo não é apenas que os alunos memorizem definições, mas que compreendam profundamente os conceitos e consigam articulá-los a partir das discussões, dos exemplos e das inferências surgidas ao longo da atividade.

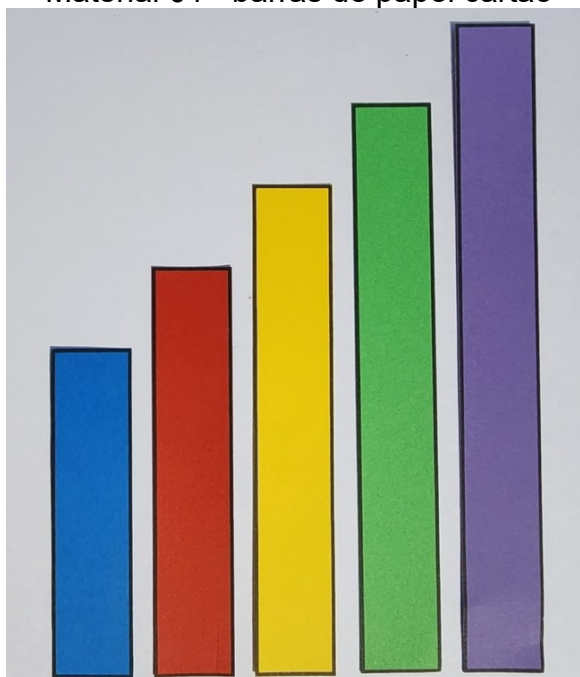
Atividade 2: Adição, Subtração e Comparação com segmentos de reta – (Apêndice A)

Para esta segunda exploração, sugerimos que o(a) professor(a) elabore um material manipulável que possibilite aos alunos interagirem diretamente com os conceitos matemáticos abordados. Em nossa experiência, confeccionamos barras retangulares utilizando papel cartão em cinco tamanhos e cores distinta. Cada uma dessas barras representa um segmento de reta e serve como recurso didático para a realização de diversas operações matemáticas. Os alunos foram organizados em grupos de quatro integrantes, e cada grupo recebeu dois "segmentos de reta" distintos entre si.

A proposta é que os alunos utilizem esses segmentos para realizar operações de adição e subtração, bem como para comparar comprimentos, identificando quais são maiores ou menores. Mais do que apenas chegar às respostas corretas, espera-se que os estudantes sejam incentivados a justificar suas conclusões, verbalizando o raciocínio utilizado em cada situação.

Essa atividade busca fortalecer o pensamento lógico e a argumentação matemática, ao mesmo tempo em que promove a articulação entre diferentes campos do saber matemático. Ao serem instigados a realizar operações de adição e subtração – com as quais já estão familiarizados no campo da aritmética – em um contexto geométrico, os alunos são convidados a transpor conhecimentos entre domínios distintos da matemática. Pelo nosso entendimento do trabalho de Boaler (2018), esse movimento favorece uma compreensão mais ampla e integrada da disciplina, evidenciando que os conceitos não estão isolados, mas inter-relacionados, e que seu significado pode ser expandido quando aplicados em diferentes contextos. Ao manusear os segmentos de reta, portanto, os estudantes desenvolvem não apenas habilidades geométricas, mas também ampliam sua capacidade de mobilizar saberes prévios de forma significativa.

Material 01 - barras de papel cartão

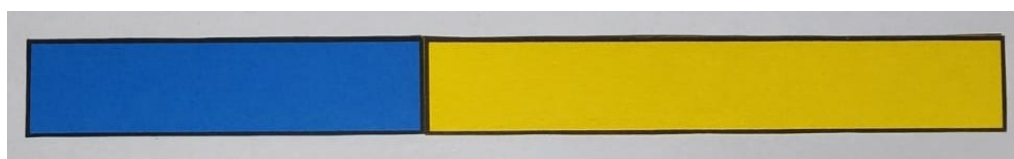


Fonte: Acervo do autor, 2024.

Uma vez que se trabalha com atividades abertas, sugestão de Boaler (2018) para desenvolver uma Mentalidade Matemática de Crescimento, nas quais as respostas dos alunos podem ser as mais variadas possíveis, é fundamental que o(a) professor(a) se planeje previamente, refletindo sobre os possíveis caminhos que os estudantes podem seguir em suas respostas e como explorá-los de maneira proveitosa. Antecipar diferentes interpretações permite ao docente conduzir o diálogo de forma mais eficaz, promovendo questionamentos que aprofundem o raciocínio dos alunos e favorecendo uma construção coletiva e significativa do conhecimento.

Abaixo apresentamos as construções que recebemos como respostas dos alunos ao desenvolverem a atividade, bem como uma justificativa dada pelos estudantes.

- Adição



“A imagem representa a soma porque, ao juntar as extremidades das duas retas, criamos uma nova reta com o comprimento aumentado”.

- Subtração



“Para subtrair, temos que tirar a medida do azul do amarelo e ver o que sobra do amarelo, que é o resultado”.

- Comparação



“O amarelo é maior porque conseguimos encaixar o azul dentro dele, mas não o contrário”.

Ainda no contexto da atividade, propusemos uma problematização com o objetivo de levar os educandos a analisar, definir e justificar se determinada situação configurava ou não uma soma. A seguir, apresentamos a construção elaborada, acompanhada da justificativa apresentada pelos alunos.



“Desse jeito, estamos juntando a largura, que é sempre zero, pois a reta não tem largura. E se for medir o comprimento, continua dando só o do amarelo, que é maior”.

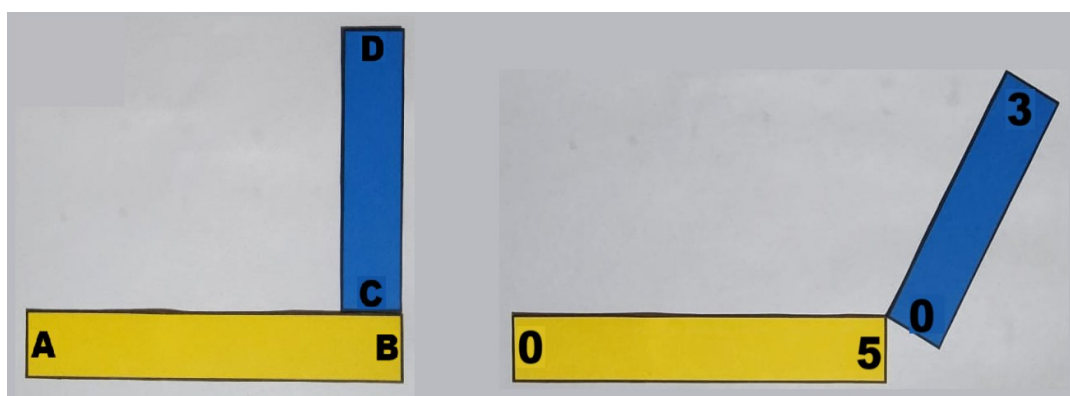
Após analisar as produções dos alunos, observamos que todos realizaram a operação de adição mantendo a representação do resultado como um único segmento de reta contínuo. Essa constatação nos levou a elaborar uma nova

problematização, que não foi aplicada, mas pode ser utilizada por você, colega professor(a), com o intuito de ampliar as possibilidades de interpretação e aprofundar as discussões em sala de aula.

A sugestão consiste em dispor os segmentos de reta de modo que não resultem, visualmente, em um único segmento contínuo – por exemplo, organizando-os de forma a determinar um ângulo reto ou outra figura que impeça essa continuidade. Essa mudança na disposição estimula os alunos a refletirem sobre o conceito de adição na geometria, promovendo questionamentos sobre o que caracteriza, de fato, uma soma nesse contexto.

Outra observação importante refere-se à nomeação das extremidades dos segmentos de reta. Percebemos que atribuir letras ou números a essas extremidades pode facilitar significativamente a visualização e a argumentação dos estudantes. Essa nomeação pode ser adaptada conforme a intenção do docente, podendo assumir um caráter mais geométrico, com letras maiúsculas (como A, B, C...), ou mais aritmético, com números, conforme o foco desejado para a atividade.

A seguir, apresenta-se a imagem da problematização proposta, acompanhada da sugestão de identificação das extremidades dos segmentos de reta.



Percebe-se que as produções dos estudantes, assim como suas justificativas, deixam explícito o quanto a Atividade 1 foi importante e como eles assimilaram os conceitos desenvolvidos naquele momento.

Atividade 3: Multiplicação com segmentos de reta – (Apêndice B)

Nesta exploração, utilizaremos os segmentos de reta confeccionados com papel cartão para realizar, de forma geométrica, a operação da multiplicação. Além disso, solicita-se que os estudantes justifiquem suas produções. Sugerimos que o(a) professor(a) também produza segmentos de reta particionados. Acreditamos que os quadradinhos facilitarão aos estudantes a associação entre a multiplicação na forma com que já estão habituados (no campo da aritmética) e a nova abordagem (no campo da geometria).

Lorenzato (1995) demonstrava discordância em relação ao modo como a geometria escolar, com frequência, é apresentada como uma disciplina isolada, sem que se valorizem as conexões e semelhanças entre ela, a aritmética e a álgebra. Assim, com esta sequência didática, buscamos propor tarefas que possibilitem a exploração desses diferentes campos de maneira articulada. Acreditamos que essa integração contribui significativamente para o desenvolvimento de uma mentalidade matemática nos estudantes.

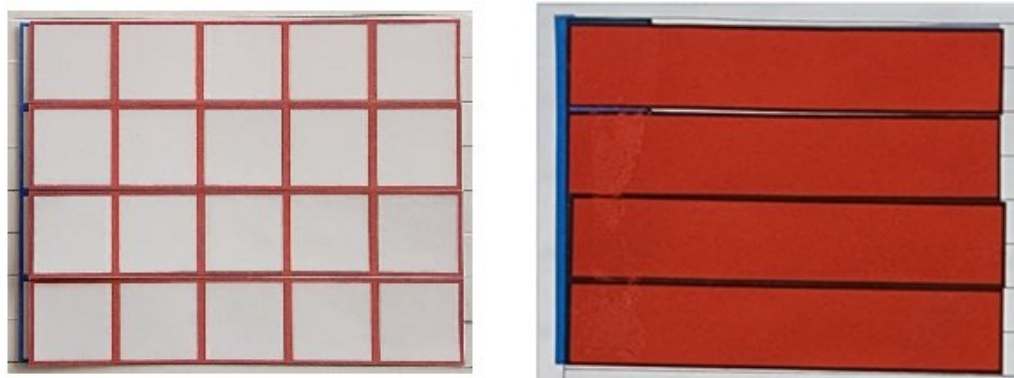
Material 02 – Barras de papel cartão lineares e particionadas



Fonte: Acervo do autor, 2024

Antes de efetivamente entregar o material aos estudantes e permitir que realizassem a multiplicação em sua forma geométrica, promovemos um diálogo sobre o conceito de multiplicação. Essa conversa foi conduzida por meio de uma Abordagem Problematicadora, assim como na Atividade 1, com o objetivo de ampliar a compreensão dos educandos acerca desse conceito.

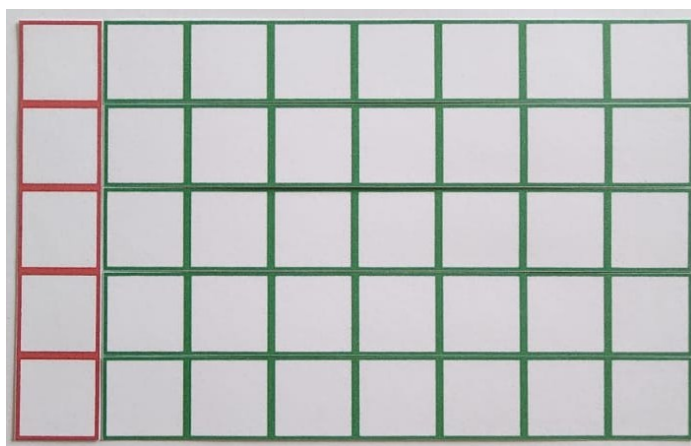
Abaixo, apresentamos a produção de um grupo de estudantes durante a exploração desta atividade, acompanhada da justificativa por eles apresentada.



“Na multiplicação com duas retas, uma delas percorre a outra até cobri-la completamente”.

Além da reinterpretação da definição de multiplicação, nesta atividade problematizamos as figuras que emergem como resultado das operações. Os estudantes responderam com confiança que a soma de segmentos resulta em um novo segmento e que a multiplicação origina um retângulo. A partir dessa percepção, conseguiram atribuir sentido à área do retângulo, compreendendo que ela é resultado da multiplicação entre dois segmentos de reta.

Ainda no contexto da abordagem proposta por esta sequência didática e da intervenção realizada na pesquisa a ela vinculada, foram planejadas algumas problematizações. A seguir, apresentamos a imagem mostrada aos alunos, acompanhada de uma das respostas recebidas, a fim de ilustrar os possíveis retornos que o(a) professor(a) pode obter ao aplicar a atividade.



Os discentes foram questionados sobre se a imagem representava o produto de uma multiplicação, sendo também solicitado que explicassem suas respostas. Abaixo, apresentamos uma das contribuições a esse respeito.

“O verde é 7 e o vermelho é 5. Então, a multiplicação tem que dar 35, e na imagem temos um total de 40 quadradinhos. Se contarmos assim, dá errado. Isso porque não devemos contar o vermelho, ele só mostra quantas vezes o verde tem que aparecer. Quando fazemos com números, não fica assim:

$$5 \cdot 7 = 5 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

Então, sim, representa o produto, mas temos que contar só os quadradinhos verdes. São eles que têm que aparecer 5 vezes”.

Outra problematização que planejamos e aplicamos abordou a unicidade do produto. Para isso, utilizamos o retângulo – resultado da multiplicação – e inclinamos levemente sua altura, transformando-o em um paralelogramo. Construímos, nesse caso, um retângulo articulado, que permitia a variação dos ângulos, facilitando a visualização e a análise do problema proposto.



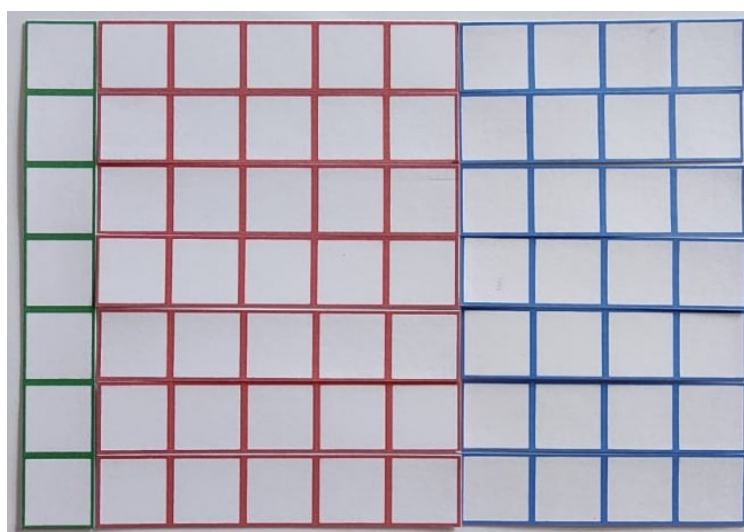
Os questionamentos propostos aos estudantes nesta exploração foram os seguintes: a multiplicação de dois segmentos de reta resultará sempre em um retângulo? E se inclinarmos um dos segmentos, sem alterar suas medidas, ainda estaríamos realizando uma multiplicação? Seria possível obter produtos diferentes ao multiplicar os mesmos elementos? Abaixo, apresentamos uma das respostas obtidas.

“Se inclinarmos um dos segmentos, a área do retângulo diminui. Por isso, acredito que a multiplicação ocorra apenas quando a área é a máxima possível, pois

não faz sentido que a operação tenha diferentes resultados. Se observarmos atentamente, ao inclinar um dos segmentos, ele começa a se sobrepor ao outro. Ao mesmo tempo, na base, começa a aparecer a parte do segmento que está por baixo. Eu interpreto isso como uma multiplicação incompleta, pois uma parte da base e uma parte dos segmentos ficam ocultas. Por isso, a área resultante é menor.”

Essas foram duas problematizações planejadas previamente para a aplicação da atividade, mas o(a) colega professor(a) pode elaborar várias outras. Por exemplo, seria possível abordar, com poucas adaptações no material, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Também é viável explorar o produto notável da soma. A criatividade dos(as) professores(as) – e também dos(as) estudantes – pode originar diversas problematizações a serem analisadas com o uso do material.

A seguir, apresentamos um exemplo da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, no qual o segmento verde multiplica o segmento resultante da soma dos segmentos vermelho e azul.



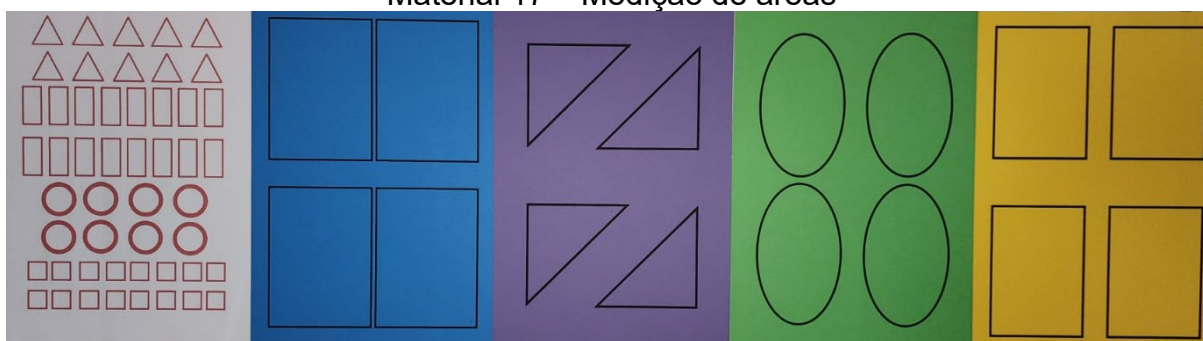
Nossa sequência didática teve início com a ideia de reta e a exploração de suas características. Em seguida, avançamos para a soma de segmentos de reta. Posteriormente, chegamos à multiplicação desses segmentos e, nesse ponto, percebemos que, diferentemente da adição, o resultado dessa operação dá origem a um novo tipo de figura: uma figura bidimensional. Seguindo essa sequência lógica, a próxima atividade propõe explorar as propriedades dessa nova figura.

Atividade 4: Medida – (Apêndice C)

Nesta quarta atividade, buscamos explorar o conceito de medida. Como em momentos anteriores, promoveu-se uma discussão coletiva sobre esse conceito, com o professor conduzindo a conversa por meio de perguntas que instigaram os alunos a verbalizar suas percepções, contribuindo tanto para a compreensão dos colegas quanto para uma reflexão em grupo sobre o que significa medir e como esse processo pode ser realizado.

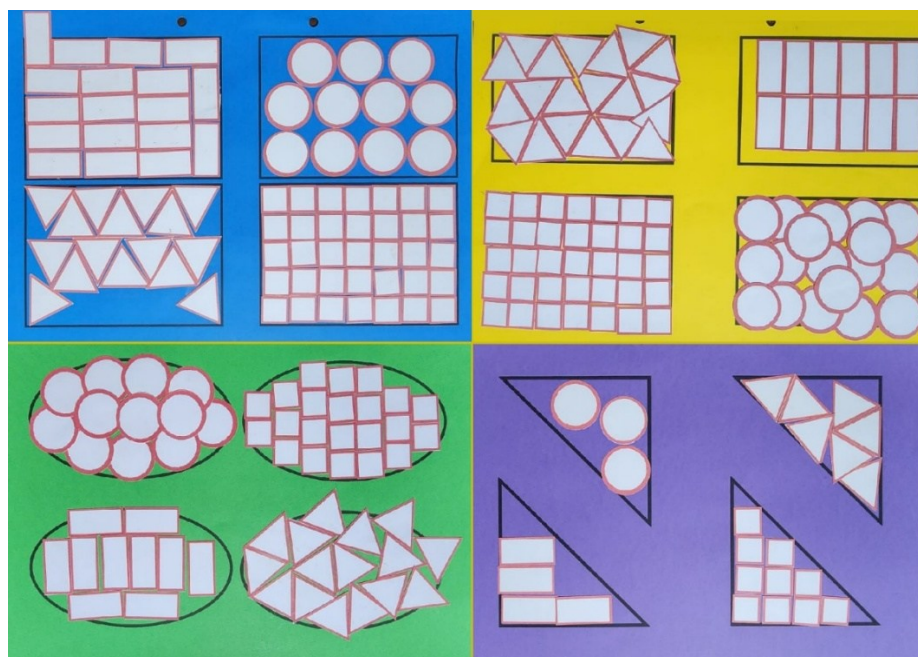
Foi preparado um material com áreas maiores, em diferentes formatos, para serem medidas, e formas geométricas menores, também variadas, para servirem como unidades de medida durante o processo de medição.

Material 17 – Medição de áreas



Fonte: Acervo do autor, 2024

Este material foi entregue aos estudantes, e foi solicitado que medissem cada área maior quatro vezes, utilizando, a cada vez, um tipo diferente de figura menor. Após essa exploração, os alunos foram questionados sobre suas percepções em relação à medição das áreas. A seguir, destacamos uma construção elaborada pelos estudantes, acompanhada de uma resposta que ilustra suas percepções sobre a atividade proposta e exemplifica o tipo de retorno que o(a) professor(a) pode obter ao replicá-la.



“Medir é quando usamos um objeto para cobrir outro. Para medir um comprimento, colocamos outro sobre ele, cobrindo-o por inteiro. Para medir uma área, colocamos outra área sobre ela, cobrindo-a completamente. A melhor forma de medir uma área é com o quadrado, pois ele se ajusta bem, sem deixar espaços sobrando. A pior forma foi o triângulo, que é difícil de encaixar e deixa muitos buracos. O círculo também foi ruim, pois deixa muito espaço sobrando”.

Na reprodução desta atividade, o(a) colega professor(a) pode utilizar a imaginação e propor diferentes formas. Durante a conversa que precedeu a prática, os estudantes levantaram a hipótese de que uma forma circular seria mais adequada para medir áreas também circulares. Por meio de uma abordagem problematizadora, acolhemos a percepção de um estudante e a transformamos em atividade, valorizando sua contribuição para a aula e oferecendo aos alunos a oportunidade de testar suas próprias teorias e, a partir da exploração, formular conclusões.

Segundo Menezes e Quintaneiro (2023), problematizar não se configura como um método, mas sim como a possibilidade de considerar questionamentos como: 'Mas por que isso funciona?', 'O que está na origem desse procedimento?', 'Por que não é de outro jeito?', 'O que ele significa?', 'Que sentidos de mundo produz ou é produzido por esse procedimento?'. Tais indagações, certamente, podem impactar significativamente o ensino desse conteúdo.

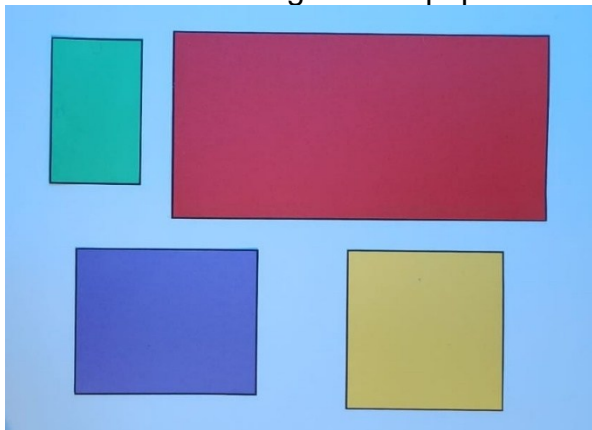
Foi justamente com essa perspectiva que planejamos e aplicamos as atividades propostas. Em alguns momentos, partimos das conversas e dos questionamentos trazidos pelos próprios alunos, os quais devolvíamos para serem explorados em grupo; em outros, elaboramos propositalmente problematizações a serem levadas à sala, como no caso da atividade que acabamos de realizar. Será que algum aluno se questionou sobre o motivo de utilizarmos quadrados para medir áreas? Será que, ao menos, algum deles buscou uma justificativa para o uso dessa figura? Foi exatamente esse tipo de reflexão que buscamos provocar.

Atividade 5: Comparando áreas retangulares – (Apêndice D)

Para a quinta atividade, foram preparados quatro retângulos, em papel cartão, com áreas distintas. O desafio proposto aos alunos consistia em organizá-los em ordem crescente de área e apresentar uma justificativa matemática para essa ordenação.

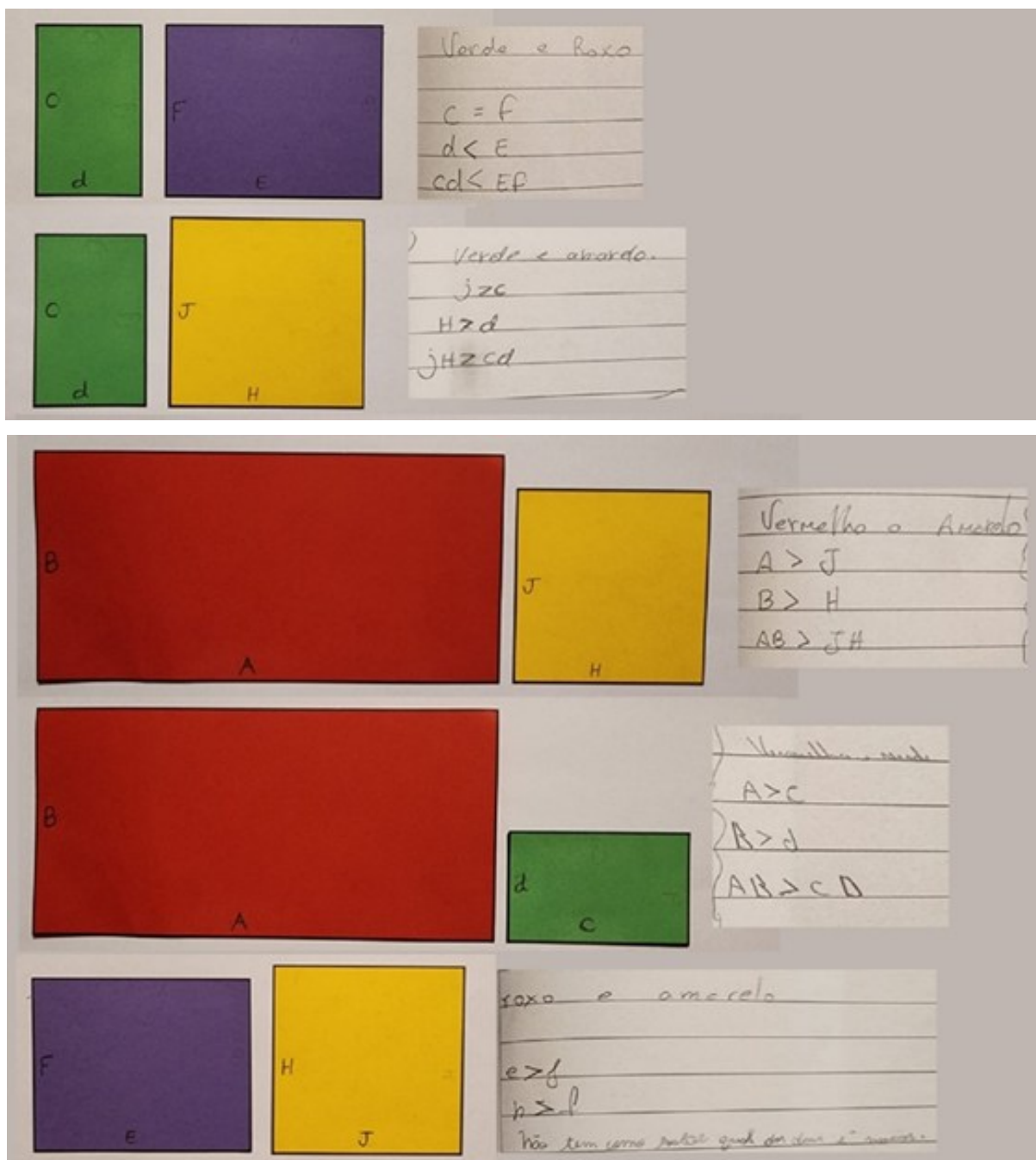
Durante a conversa que antecedeu a realização da tarefa – como de costume nesta sequência didática –, os estudantes foram lembrados de que a área de um retângulo é obtida pela multiplicação de dois segmentos de reta. Também foram incentivados a revisar suas próprias anotações e a retomar a definição que haviam construído sobre os conceitos de 'maior' e 'menor' na atividade com segmentos de reta, uma vez que esses conceitos seriam novamente mobilizados nesta proposta.

Material 04 – Retângulos em papel cartão



Fonte: Acervo do autor, 2024

Como de costume, apresentamos a seguir o trabalho desenvolvido por um grupo de alunos. Nosso objetivo é exemplificar ao(à) professor(a) o tipo de retorno que pode surgir durante a aplicação da atividade, além de oferecer um ponto de partida para que sua imaginação antecipe possíveis respostas ou dificuldades que os estudantes possam apresentar.



Nesta atividade, além do objetivo evidente de comparar os retângulos, também propusemos uma problematização. Os retângulos roxo e amarelo apresentavam áreas muito próximas, e as medidas de seus lados, por si só, não permitiam estabelecer uma ordenação com base apenas na comparação direta. Essa escolha foi intencional, pois buscávamos incentivar os educandos a pensar em alternativas para resolver a situação.

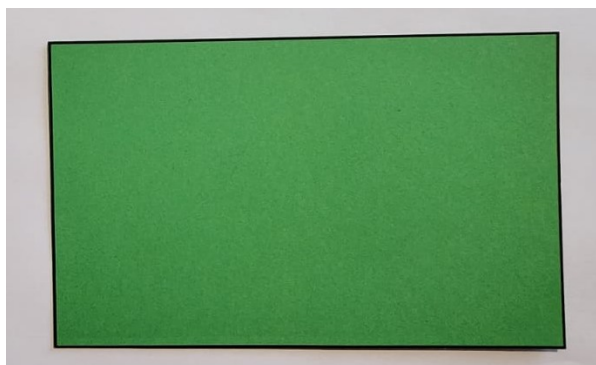
Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), a investigação matemática promove exatamente esse tipo de envolvimento. Ela estimula a formulação de conjecturas, a identificação de padrões, a criação de hipóteses e a busca por justificativas. Inspirados nessa perspectiva, planejamos a atividade de forma a provocar esse tipo de engajamento. Como resultado, diversos grupos de alunos encontraram uma solução criativa: realizaram uma transformação geométrica em um dos retângulos, o que permitiu a comparação com o outro.

Atividade 6: Aplicando a fórmula de cálculo de área no polígono – (Apêndice E)

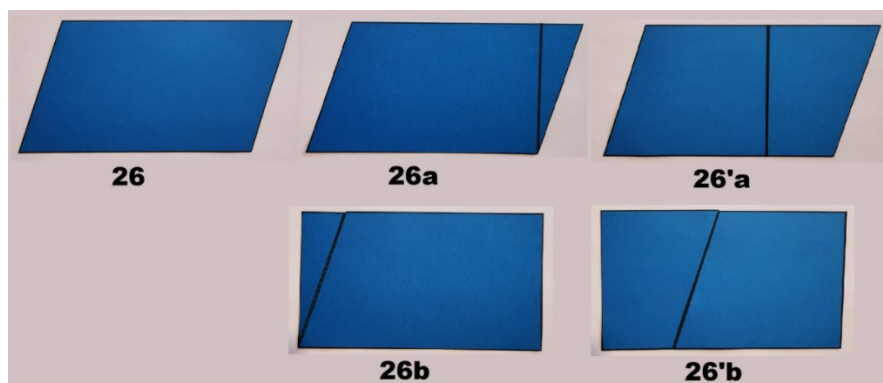
Para esta última atividade, preparamos, em papel cartão, cinco polígonos diferentes para que os estudantes pudessem explorar a aplicação da fórmula de cálculo da área diretamente sobre as figuras. Nesta proposta, os alunos são convidados a empregar e visualizar conhecimentos a partir de diferentes perspectivas. Por exemplo, eles aplicam operações matemáticas em figuras geométricas e observam transformações espaciais, o que lhes permite construir sentido sobre o que realmente ocorre ao utilizar essas ferramentas.

Para o desenvolvimento da atividade, cada grupo de alunos recebeu várias unidades de cada um dos cinco polígonos confeccionados. A proposta consistia em aplicar a fórmula do cálculo da área diretamente sobre as figuras, podendo, para isso, traçar retas, realizar cortes e remontar os polígonos conforme julgassem necessário. Além dessas ações, os estudantes deveriam interpretar a fórmula algébrica e estabelecer conexões que possibilitassem sua transposição para a aplicação geométrica.

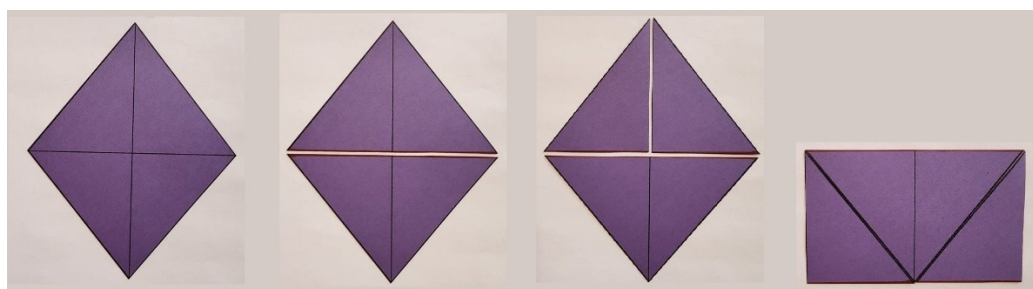
A seguir, apresentamos algumas produções realizadas pelos estudantes no decorrer desta atividade.



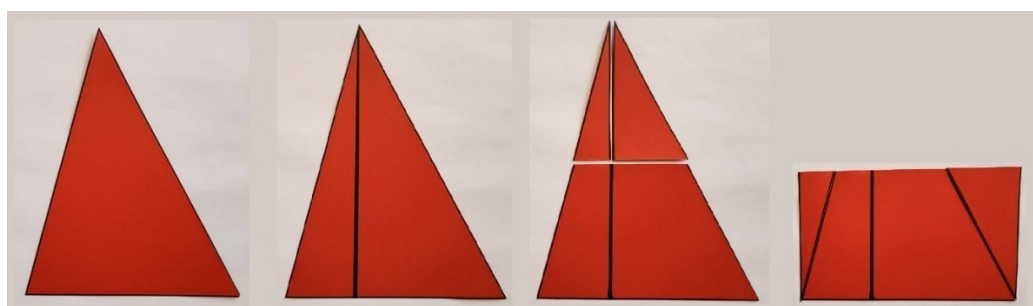
No caso do retângulo, não houve necessidade de adaptações. Os estudantes retomaram a ideia de que o retângulo é o resultado geométrico da multiplicação, concluindo, portanto, que sua área é calculada pelo produto entre base e altura.



Ao trabalhar com o paralelogramo, alguns grupos traçaram a altura a partir de um dos vértices e realizaram o corte; outros perceberam que era possível traçar a altura em qualquer ponto, desde que ligasse uma base à outra.

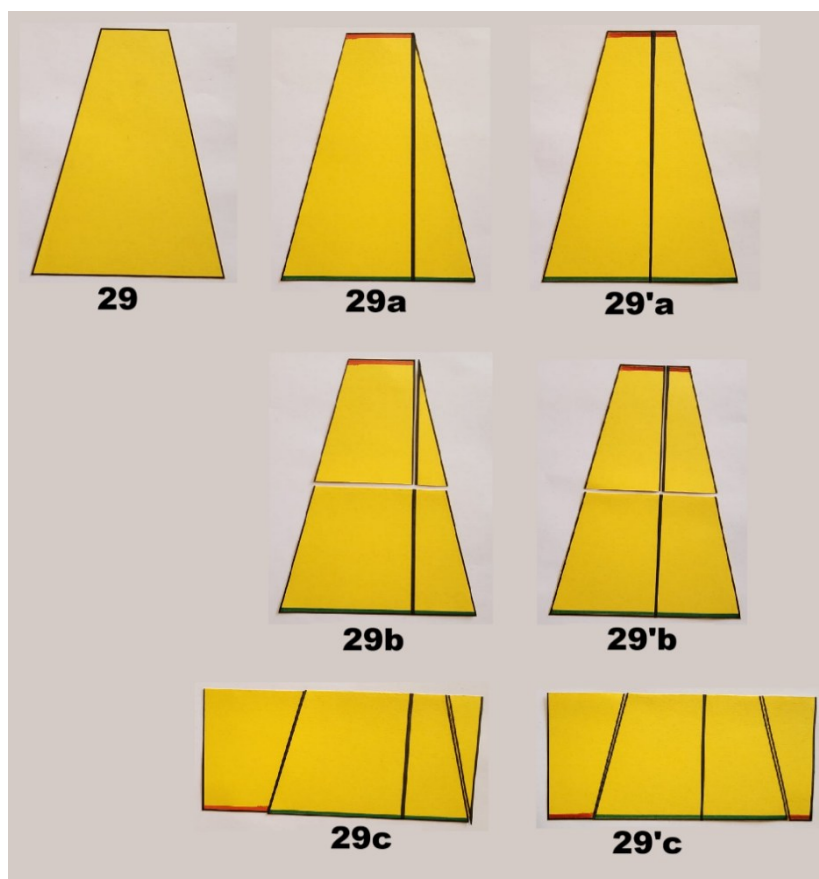


Ao trabalhar com o losango, não houve muita variação entre os grupos: cortaram ao longo de uma das diagonais e, em seguida, dividiram o triângulo superior ao meio, ajustando-o para formar um retângulo.



O triângulo apresentou um pouco mais de desafio. Após traçarem a altura, alguns grupos de alunos tiveram dificuldade em perceber que era necessário cortá-

la ao meio, de forma paralela à base. No entanto, após algumas tentativas, conseguiram avançar na atividade.



O trapézio foi interpretado pelos alunos como uma combinação entre triângulo e paralelogramo. Isso porque, assim como no paralelogramo, eles perceberam que era possível traçar a altura de diferentes maneiras, desde que conectasse uma base à outra. E, de forma semelhante ao triângulo, identificaram a necessidade de dividir a parte superior da figura para encaixá-la nas laterais da base resultante.

Ao final desta atividade, como de costume, promovemos uma conversa com os alunos sobre suas observações e curiosidades. Durante esse momento, tivemos uma contribuição bastante interessante: um dos estudantes argumentou que, nos casos em que a fórmula da área envolvia uma divisão, ele gostaria de refazer a atividade dividindo as bases, e não as alturas. Segundo sua justificativa, como havia uma fração na fórmula, seria possível dividir tanto o primeiro quanto o segundo fator da multiplicação. No entanto, ao tentar aplicar essa ideia geometricamente, ele não

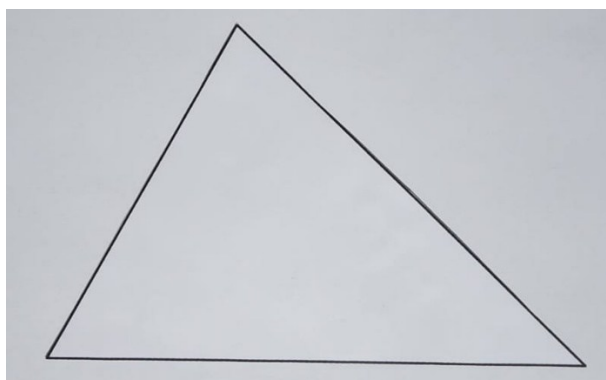
obteve sucesso. Constatou que só conseguiu visualizar a construção correta dividindo a altura, e não a base.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), ao nos dedicarmos à resolução de um problema, nosso foco inicial geralmente é encontrar a solução desejada. No entanto, para além da resolução em si, o processo frequentemente nos conduz a descobertas adicionais, que podem se revelar tão ou mais significativas do que a própria resposta. Em outras situações, mesmo quando a solução não é alcançada, o esforço envolvido pode ser extremamente enriquecedor, em virtude das novas ideias e percepções que surgem ao longo do caminho.

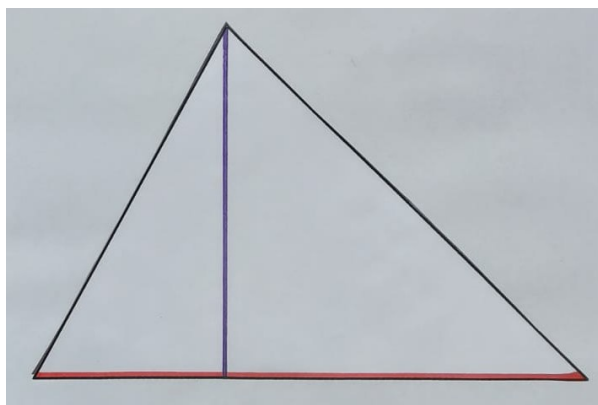
A postura do estudante mencionado está alinhada a essa perspectiva. Ainda que já soubesse a resposta, ele demonstrou interesse em explorá-la sob um novo ponto de vista. Tal atitude ilustra o que destacam Giraldo e Roque (2021), ao afirmarem que os problemas matemáticos não desaparecem após serem resolvidos. Pelo contrário, eles permanecem como elementos constitutivos do próprio conhecimento, atuando como alicerces para novas investigações e criações.

Sendo assim, a seguir, apresentamos como ficaria a transformação do triângulo e do trapézio ao se aplicar a divisão nas bases, e não nas alturas. Consideramos que, ainda que essa curiosidade não surja espontaneamente, ela pode se constituir em uma nova tarefa a ser desenvolvida com os estudantes.

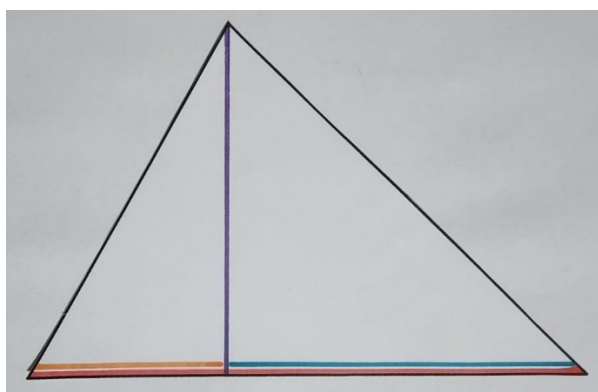
Iniciaremos pela análise do triângulo. Para isso, tomemos o triângulo apresentado a seguir:



Primeiramente, definiremos qual será o lado considerado como base (em vermelho) e, em seguida, traçaremos a altura (em roxo) correspondente a essa base.



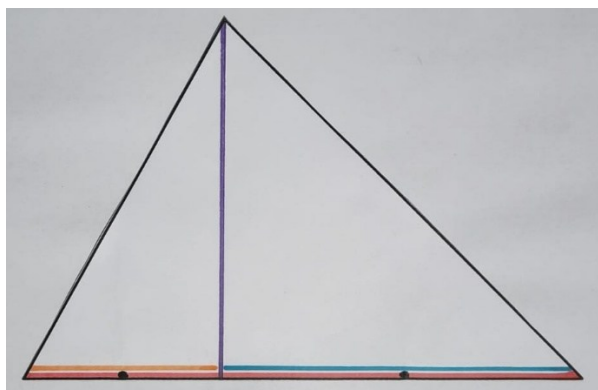
Observe que podemos considerar este triângulo escaleno como composto por dois triângulos retângulos que compartilham o lado de cor roxa. Assim, representaremos a base de um dos triângulos com a cor laranja e a base do outro triângulo com a cor azul.



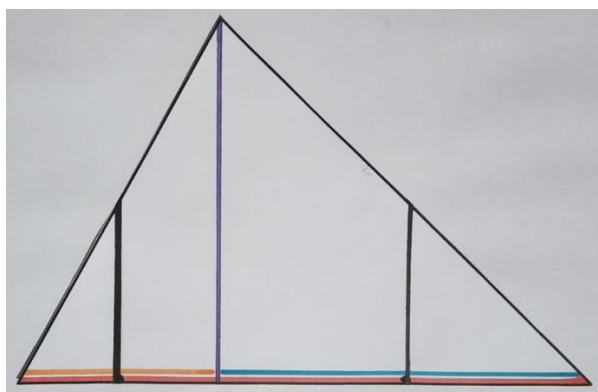
Observe que a base vermelha é igual à soma da base laranja com a base azul. Assim, dividir a base vermelha ao meio equivale a dividir igualmente a base laranja e a base azul.

$$\frac{V}{2} = \left(\frac{L}{2} + \frac{A}{2} \right)$$

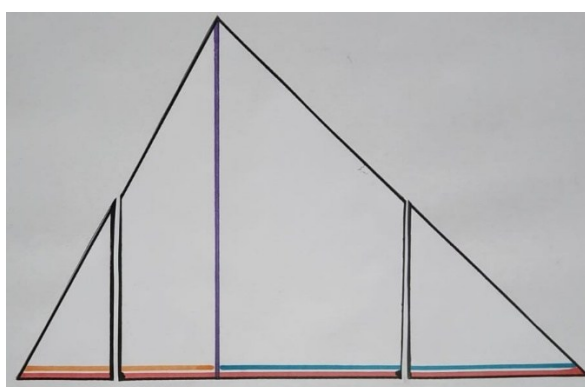
Portanto, procederemos dividindo cada uma das bases ao meio e marcaremos os pontos de divisão com um pontinho preto.



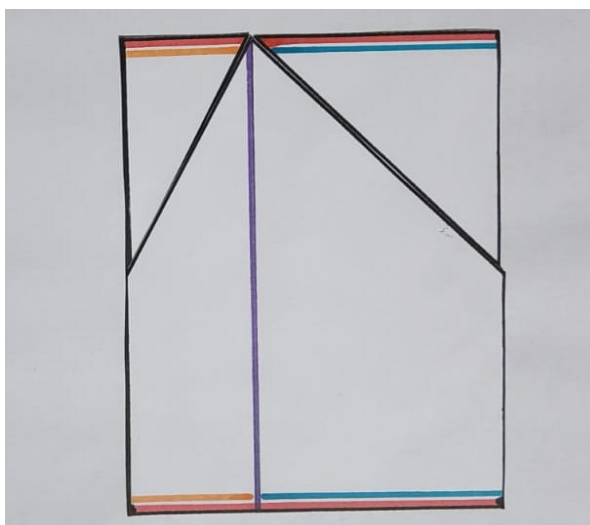
Agora, a partir dos pontos pretos, traçaremos retas perpendiculares à base.



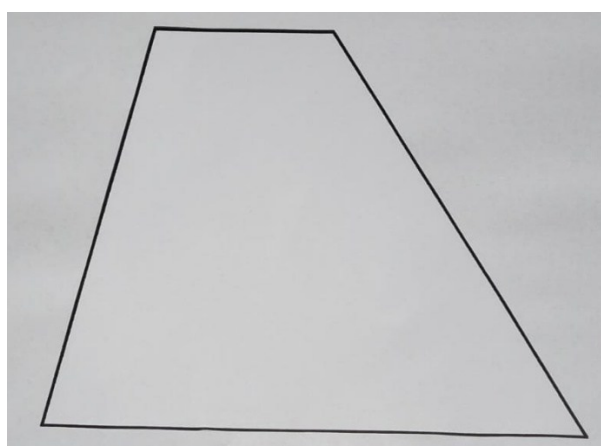
No próximo passo, cortamos os triângulos nas retas pretas perpendiculares às bases. Perceba que, ao fazer isso, estamos mantendo a altura original, enquanto a base está sendo dividida ao meio.



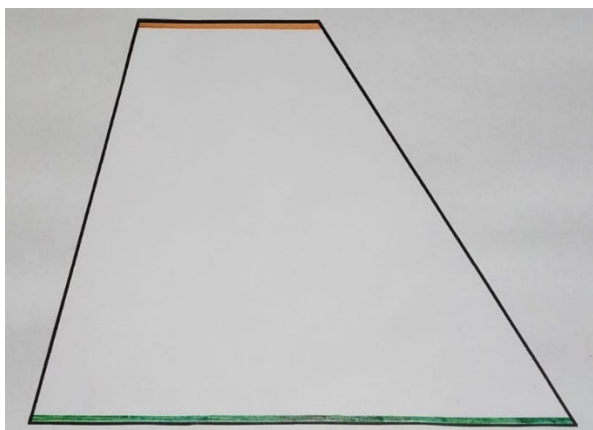
Por fim, basta reposicionar as peças, e teremos o retângulo, mantendo a medida da altura e efetuando a divisão na base. Assim, conseguimos visualizar a área do triângulo a partir dessa nova abordagem de divisão.



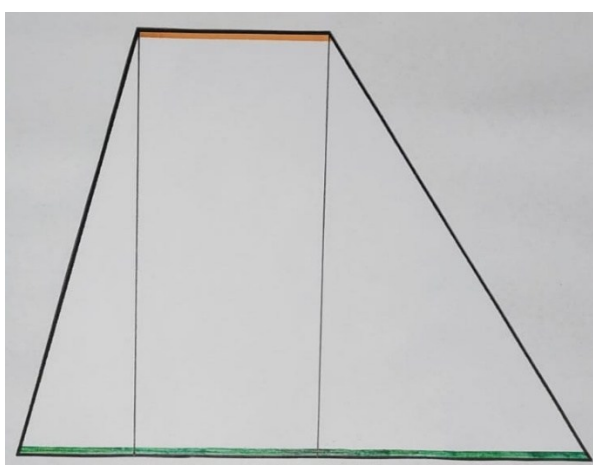
Vamos agora aplicar o mesmo processo ao trapézio. O desenvolvimento será bem semelhante ao do triângulo. Inclusive, se traçarmos uma diagonal no trapézio, obteremos dois triângulos. A partir daí, podemos repetir o processo anterior. Deixamos essa abordagem como sugestão para o(a) professor(a) que queira seguir esse caminho. Agora, vamos à resolução. Observe o trapézio escaleno abaixo:



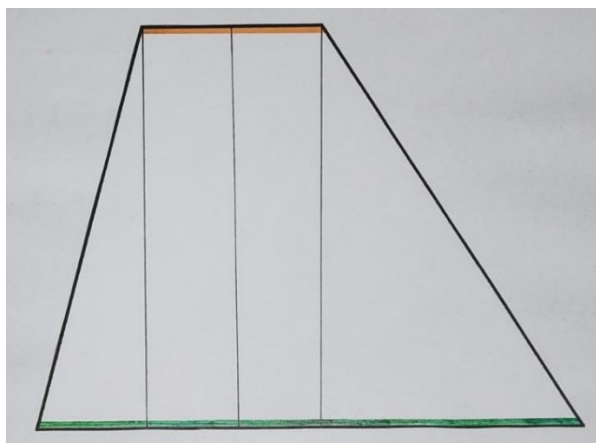
Primeiramente, vamos sinalizar as bases do trapézio: a base maior será representada pela cor verde e a base menor pela cor laranja.



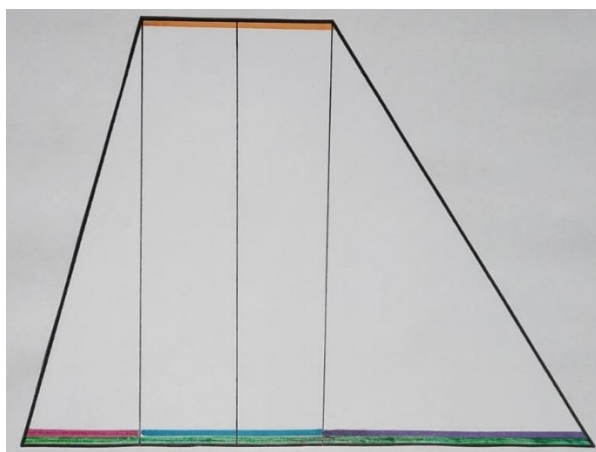
Perceba que, assim como no caso do triângulo, o trapézio também pode ser dividido em diferentes polígonos. Partindo dos vértices da base menor, traçaremos retas transversais até a base maior, formando assim duas regiões triangulares nas extremidades e uma região retangular central.



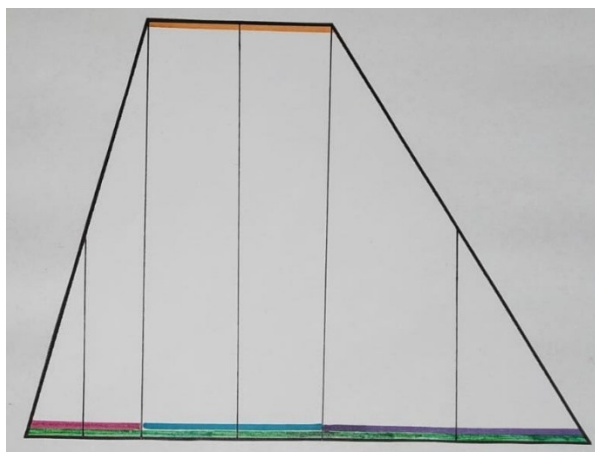
Agora podemos dividir ao meio a base menor (laranja) e, a partir do ponto médio, traçar uma reta perpendicular a essa base. Essa reta dividirá a região retangular central do trapézio em duas partes iguais.



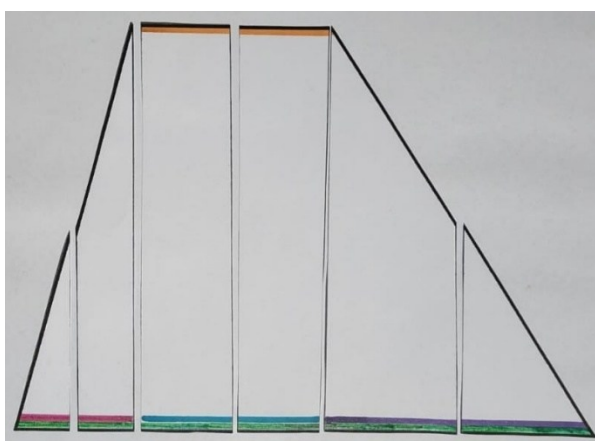
Vamos agora nos ocupar da base maior, representada pela cor verde. Podemos dividi-la em três partes: uma porção à esquerda (que chamaremos de base rosa), uma porção central (base azul) e uma porção à direita (base roxa).



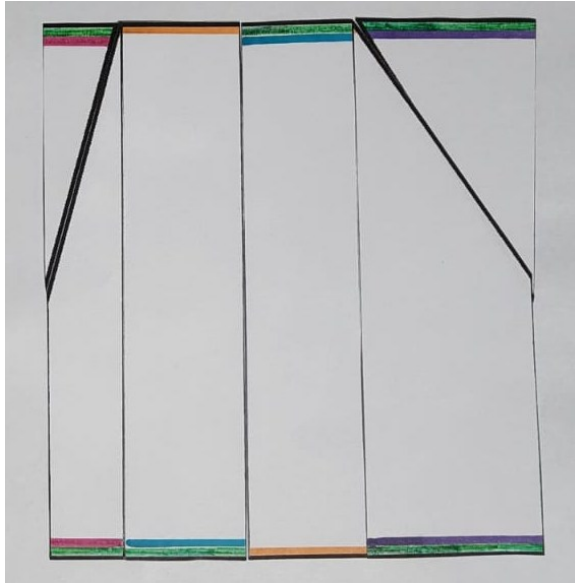
Veja que a área central, correspondente ao retângulo, já teve sua base dividida ao meio quando realizamos a divisão da base laranja. Agora, para completar o processo, precisamos dividir ao meio as bases rosa e roxa, que pertencem aos triângulos laterais. Em seguida, traçaremos retas perpendiculares a essas bases a partir dos pontos médios.



Agora vamos realizar os cortes ao longo das retas perpendiculares traçadas previamente nas bases do trapézio.



Por fim, basta reorganizar os pedaços recortados do trapézio, ajustando-os conforme as divisões feitas, e obteremos um retângulo. Essa reorganização mantém a medida da altura e permite visualizar, de forma concreta, como a fórmula da área do trapézio pode ser interpretada a partir da divisão das bases.



Considerações

Aqui encerramos nossa sequência didática. Iniciamos com o elemento primitivo – a reta –, avançamos para as operações com segmentos de reta, passamos pela multiplicação desses segmentos e pelo surgimento da noção de área. Em seguida, abordamos a medição dessa nova entidade geométrica e, por fim, exploramos a comparação e manipulação de áreas de diferentes polígonos.

Esperamos que tenha apreciado este percurso e que as atividades aqui apresentadas possam inspirar a criação de novas investigações, manipulações e problematizações. Aliás, ao finalizar este trabalho, surgiu mais uma ideia que também gostaríamos de compartilhar:

Se trabalharmos com a circunferência, seria possível realizar uma manipulação semelhante? A circunferência determinaria sempre um retângulo, ou haveria casos em que o resultado seria um quadrado? E a razão entre a base e a altura desse retângulo obtido a partir da circunferência – ela é constante ou varia?

Quando nos engajamos em problematizações que possibilitam a exploração pelos alunos, novas ideias emergem continuamente – vira quase uma mania. E a aprendizagem que brota desse tipo de investigação é profundamente significativa: os estudantes investigam, manipulam e observam a matemática em ação, reinterpretam e aprimoram conceitos, e vivenciam, de fato, o fazer matemático.

A seguir, nos apêndices, você encontrará o modelo de todos os materiais utilizados nas atividades aqui descritas, com o objetivo de facilitar sua replicação em sala de aula. Esses materiais foram organizados de forma prática, visando apoiar o trabalho docente e promover experiências valiosas de aprendizagem para os estudantes.

Referências

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio de matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre, RS: Penso, 2018.

GIRALDO, V. Que matemática para a formação de professores? Por uma matemática problematizada. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13., 2019, Cuiabá. *Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática* (XIII ENEM). Cuiabá, MT: SBEM, 2019, p. 1-12.

GIRALDO, V.; ROQUE, T. Por uma matemática problematizada: as ordens de (re)invenção. *Perspectivas da Educação Matemática*, UFMS, MS, v. 14, n. 35, p. 1-21, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/13409/9355>. Acesso em: 13 abr. 2025.

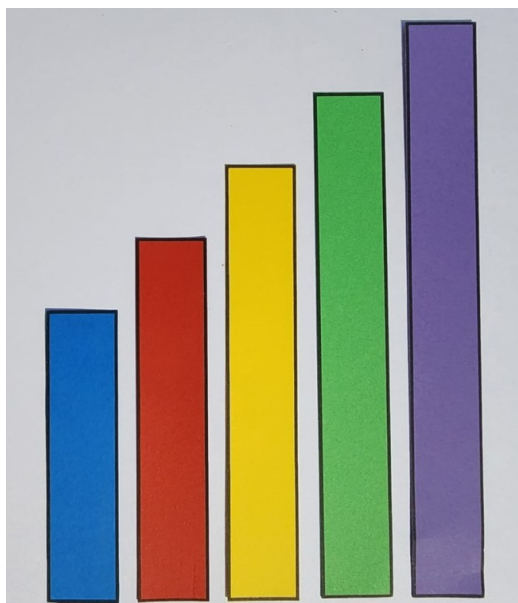
LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *Educação matemática em revista*, Blumenau, SC, n. 4, p. 3-13, 1995. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/1311/721>. Acesso em: 13 abr. 2025.

MENEZES, F.; QUINTANEIRO, W. Problematizando saberes de conteúdo matemático do ensino numa perspectiva política. *Ensino da Matemática em Debate*, [s.l.], v. 10, n. 2, p.58-86, 2023. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/61201/43347>. Acesso em: 13 abr. 2025.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigação matemática na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2020.

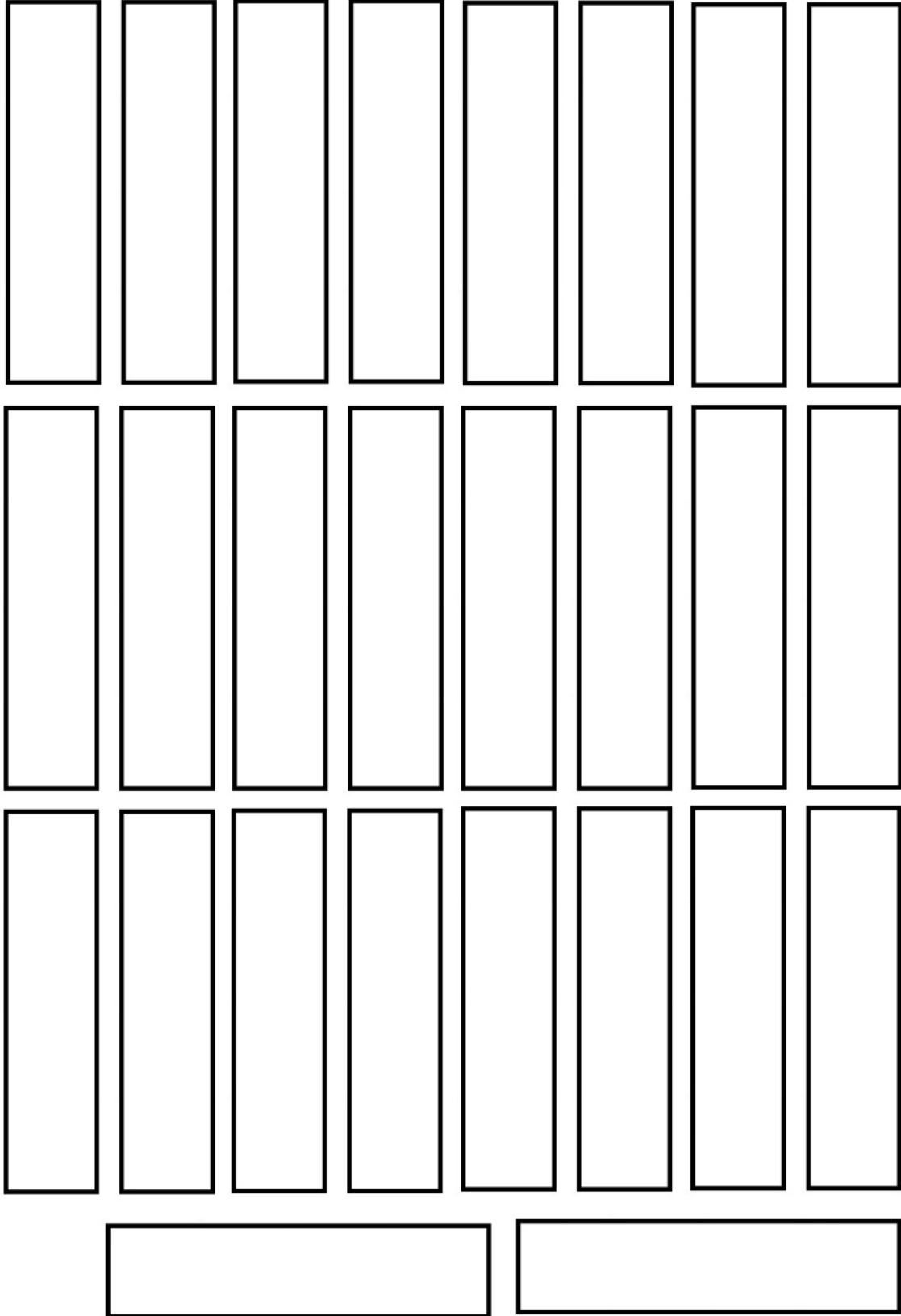
APÊNDICE A – Explorando a adição, a subtração e a ordenação no campo da geometria com segmentos de reta.

Cada grupo de alunos recebe dois segmentos de reta de cores diferentes e é proposto que realizem operações de adição e subtração com esses objetos, além de identificarem qual deles é o maior e justificarem suas conclusões.



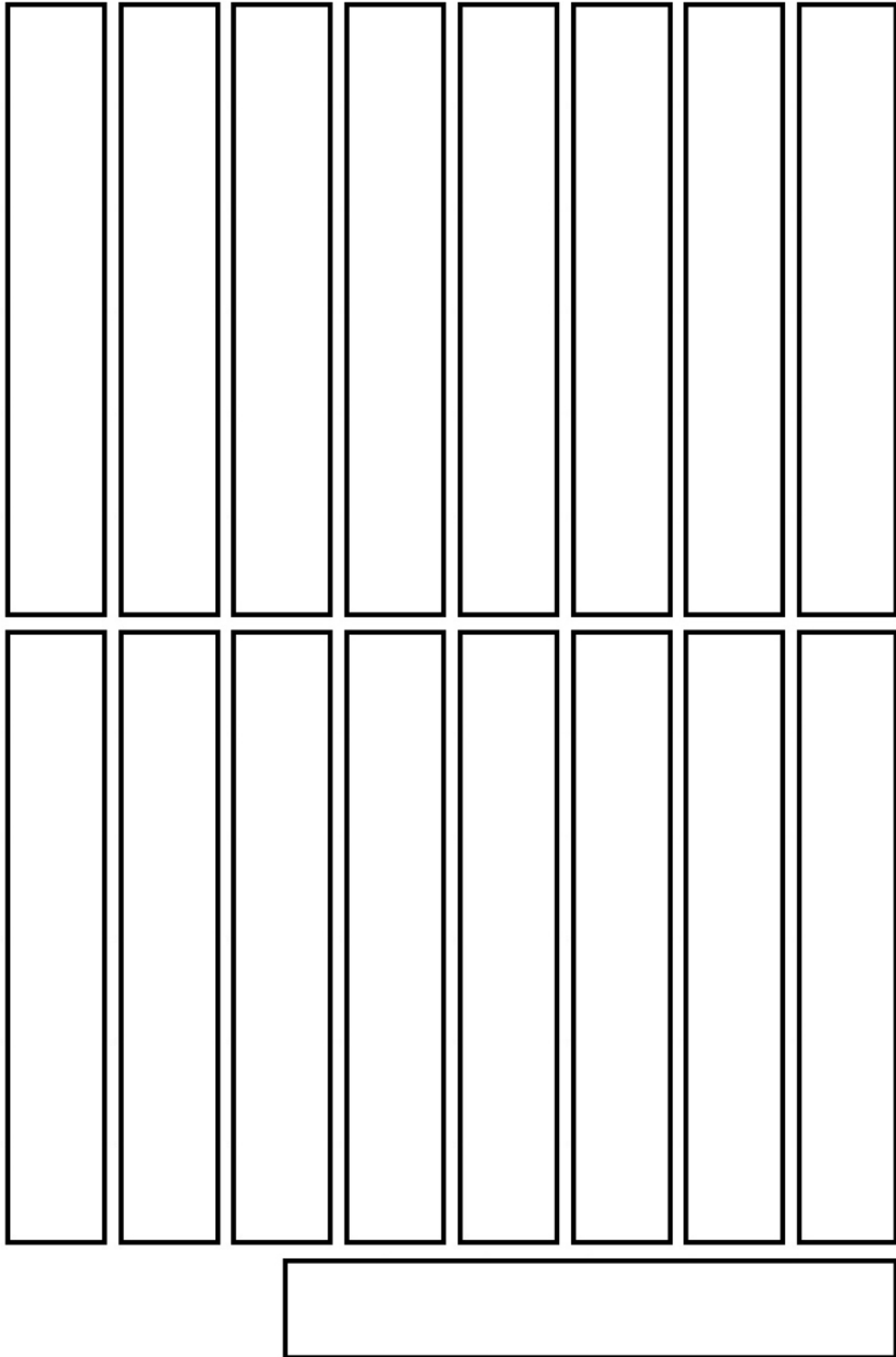
Os segmentos de reta foram confeccionados em papel cartão colorido e cortados com o auxílio de uma guilhotina, garantindo uniformidade nas medidas e acabamento preciso.

Segmento de reta azul:



Segmento de reta vermelho:

Segmento de reta amarelo:



Segmento de reta verde:

Segmento de reta roxo:

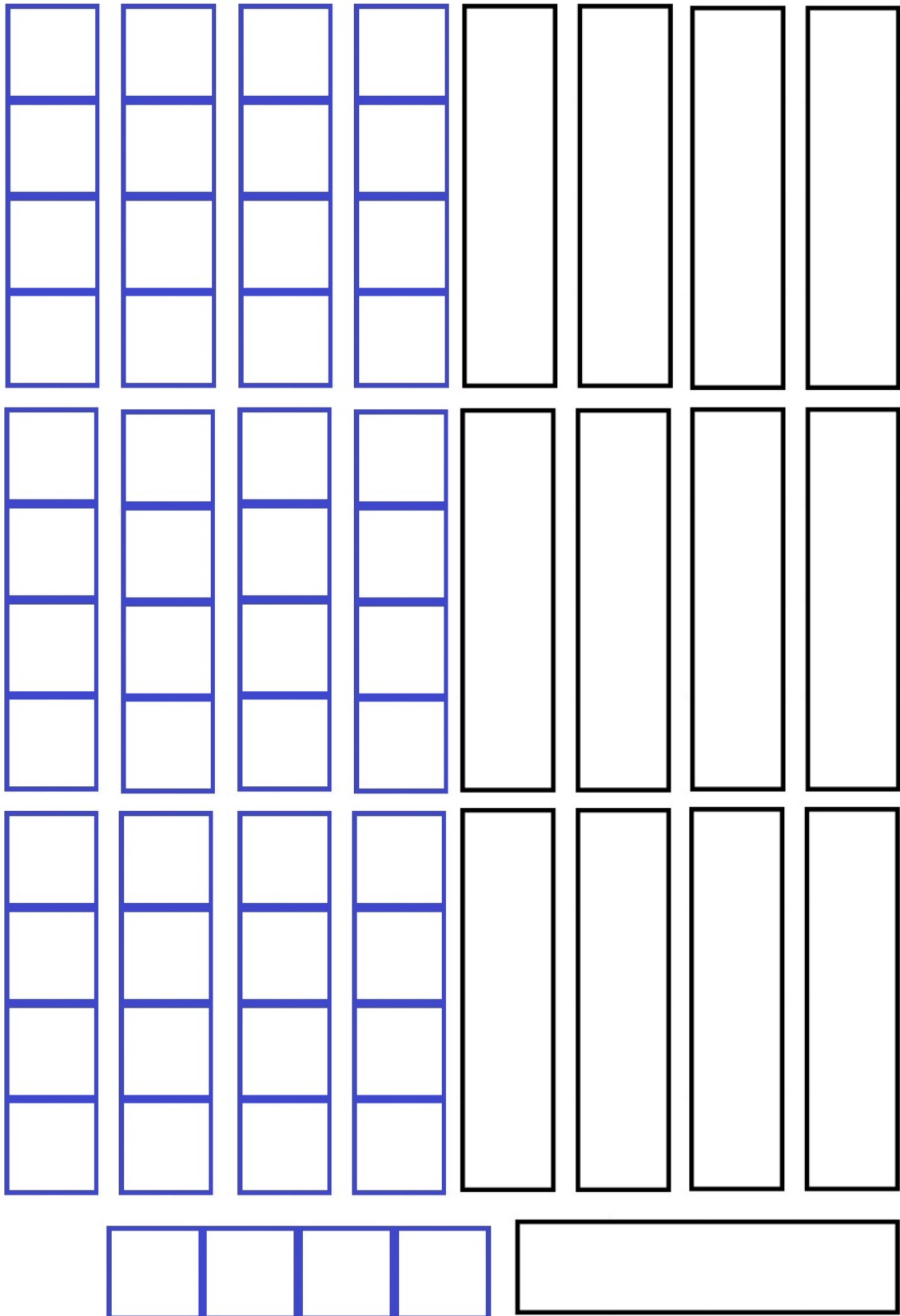
APÊNDICE B – Explorando a multiplicação no campo da geometria com segmentos de reta.

Cada grupo de alunos recebeu dois segmentos de reta de cores distintas, sendo proposta, a partir desses objetos, a realização da operação de multiplicação.

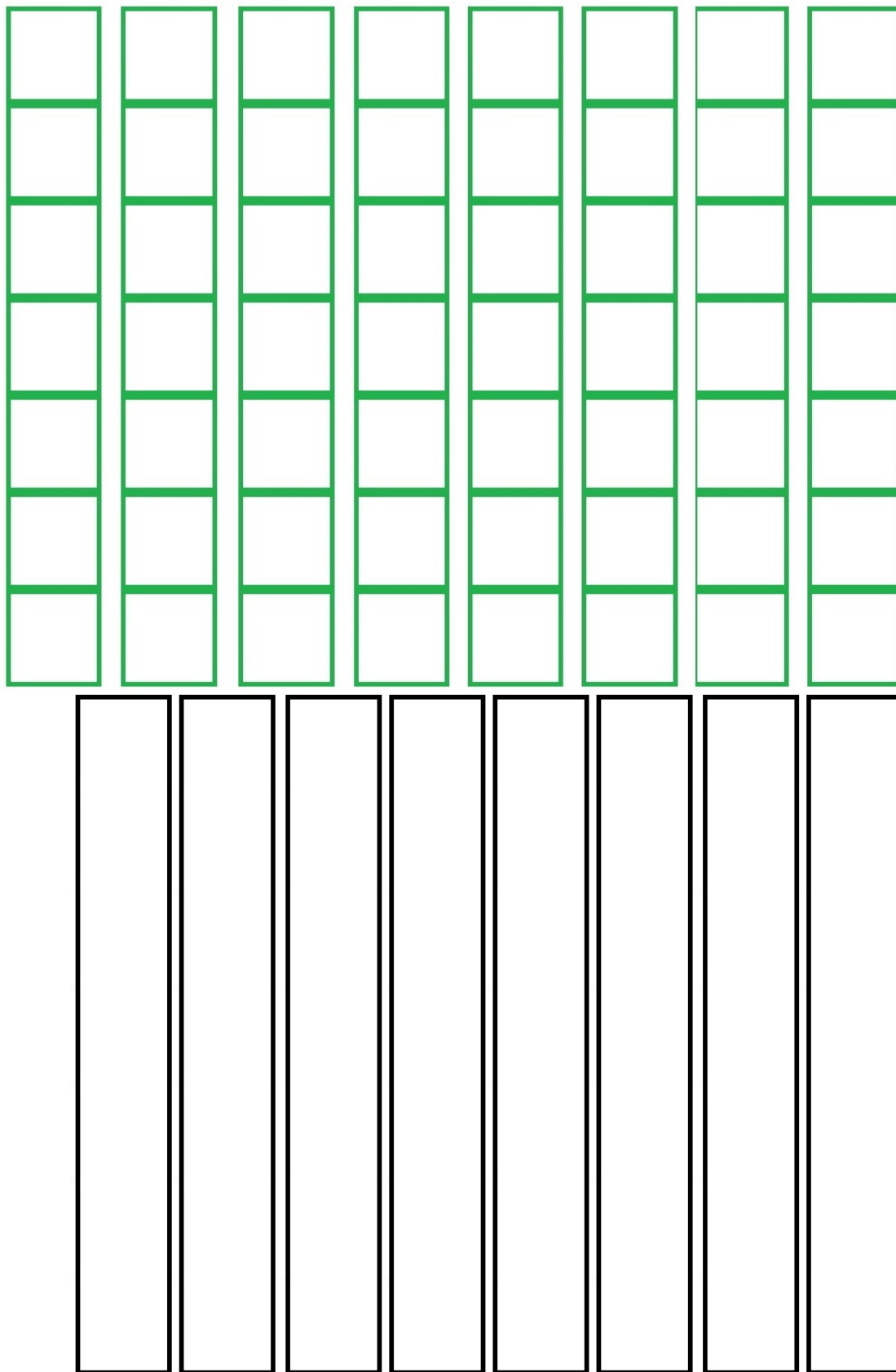


Os segmentos de reta lineares foram confeccionados em papel cartão colorido, enquanto os segmentos particionados utilizaram papel cartão branco. Todos os segmentos foram cortados com o auxílio de uma guilhotina, a fim de garantir precisão no acabamento.

Segmento de reta linear e particionado azul:

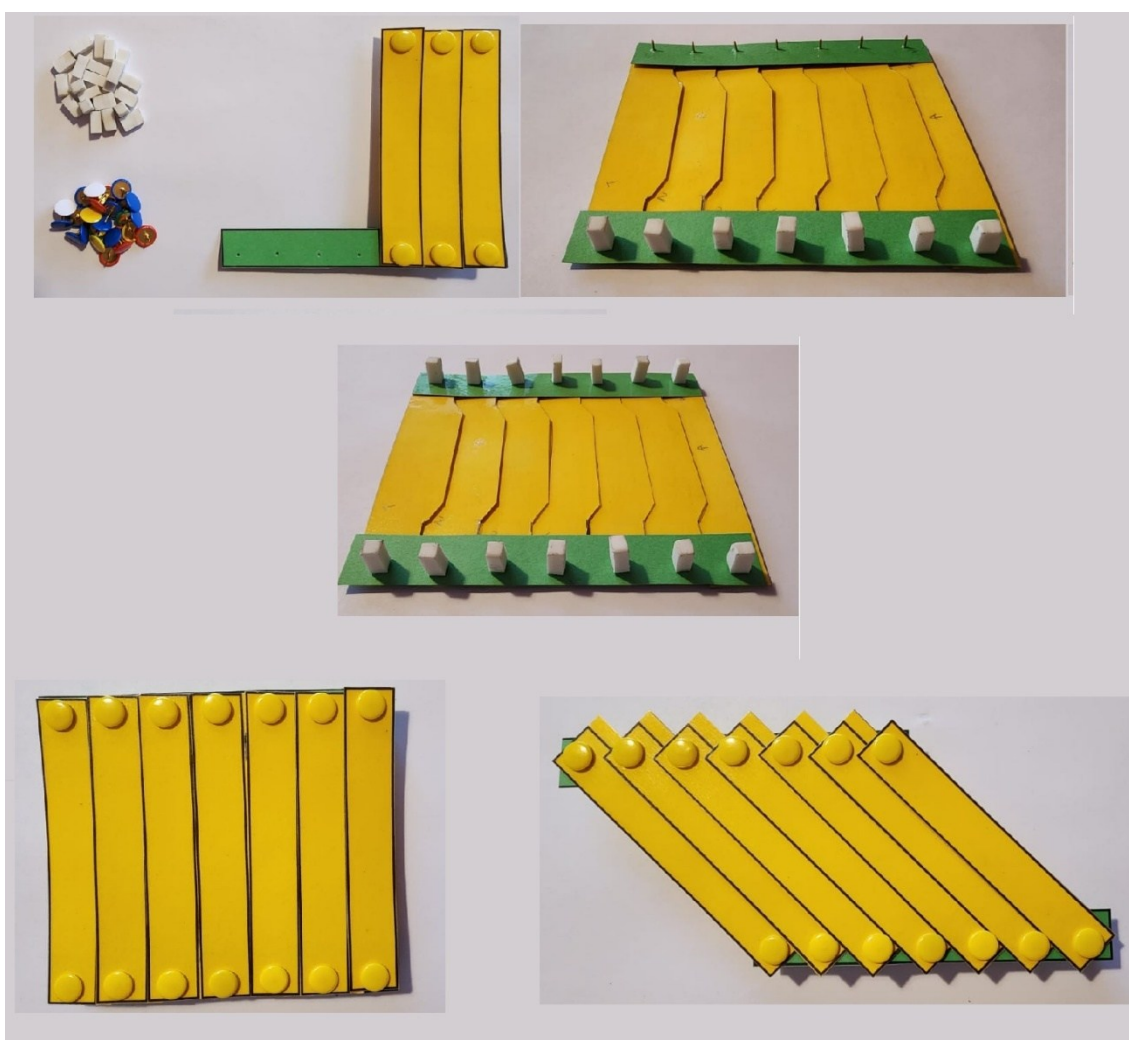


Segmento de reta linear e particionado verde:



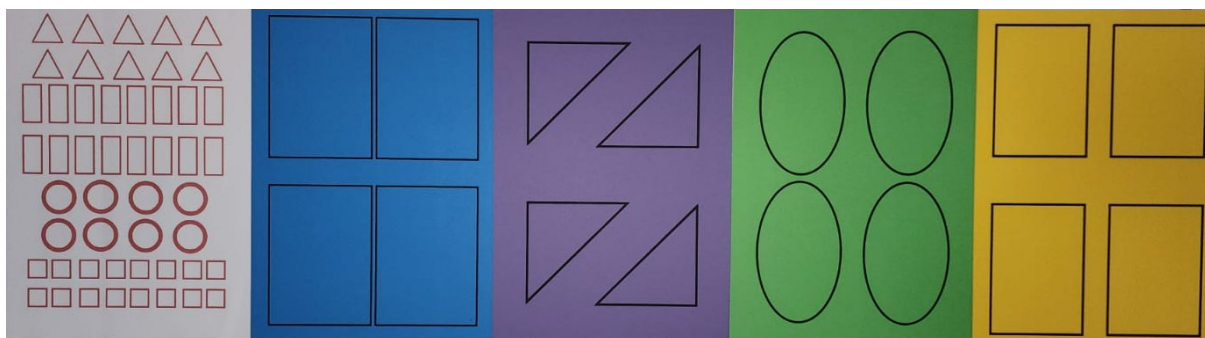
O retângulo articulado foi montado a partir de segmentos de reta (lineares e particionados). As peças foram encapadas com papel Contact, com o objetivo de aumentar a durabilidade do material. Além disso, utilizamos percevejos coloridos e pequenos pedaços de borracha como parte do processo de montagem.

A construção ocorreu da seguinte maneira: inicialmente, selecionamos um segmento para servir como base; em seguida, posicionamos peças de outro segmento perpendicularmente sobre essa base, formando ângulos de 90 graus, e fixamos as conexões com percevejos. Posteriormente, utilizamos um segmento semelhante ao da base para fechar a parte superior da estrutura. Por fim, os pedaços de borracha foram utilizados para cobrir as pontas dos percevejos, com a intenção de evitar acidentes.



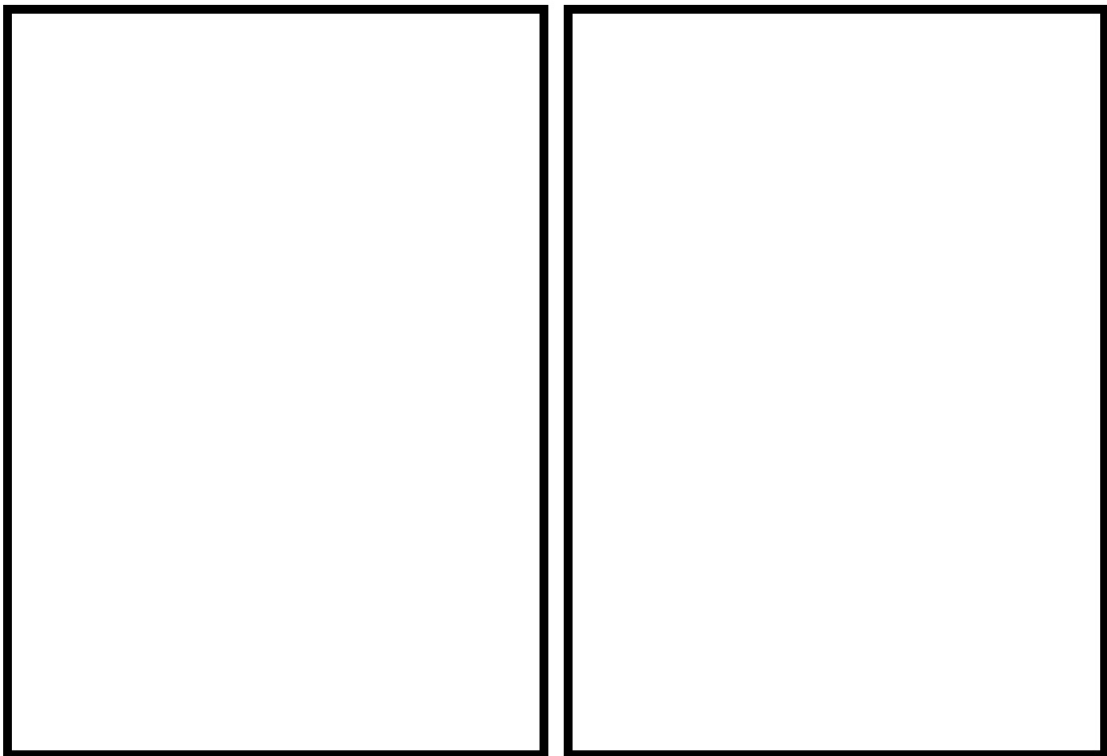
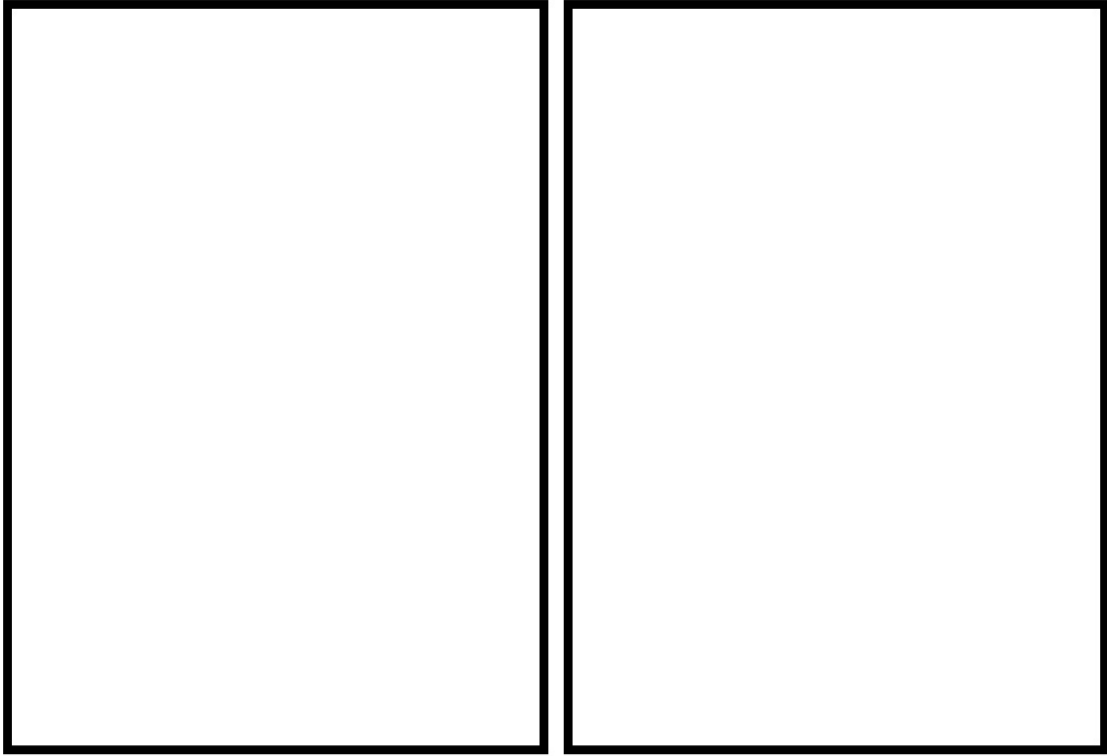
APÊNDICE C – Explorando a ideia de medir áreas com diferentes formatos.

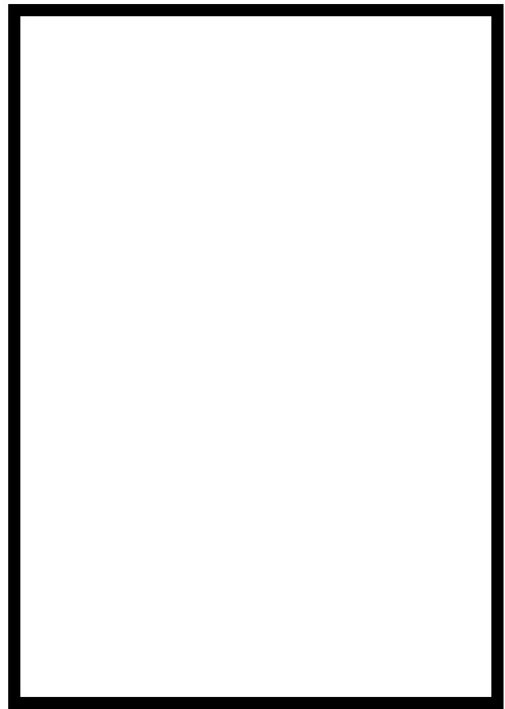
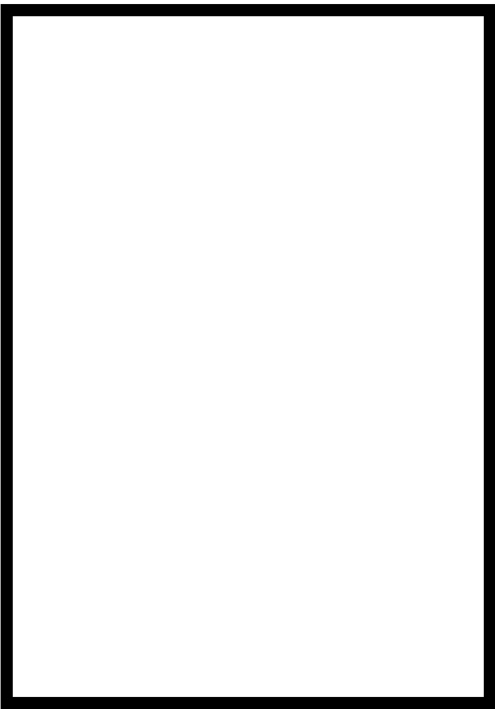
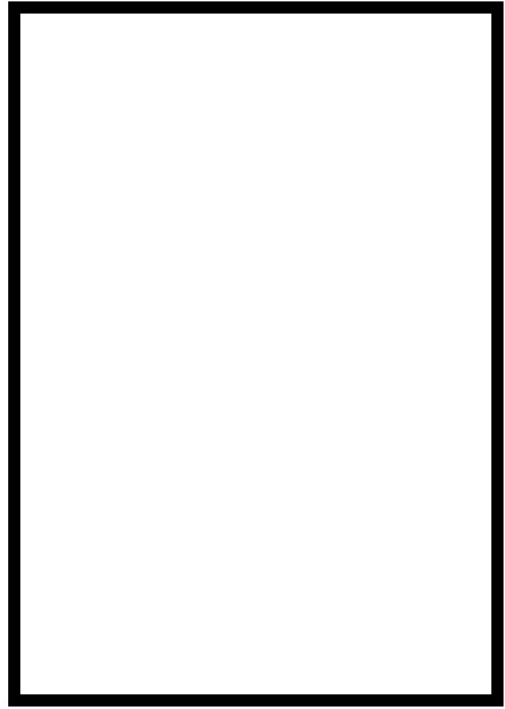
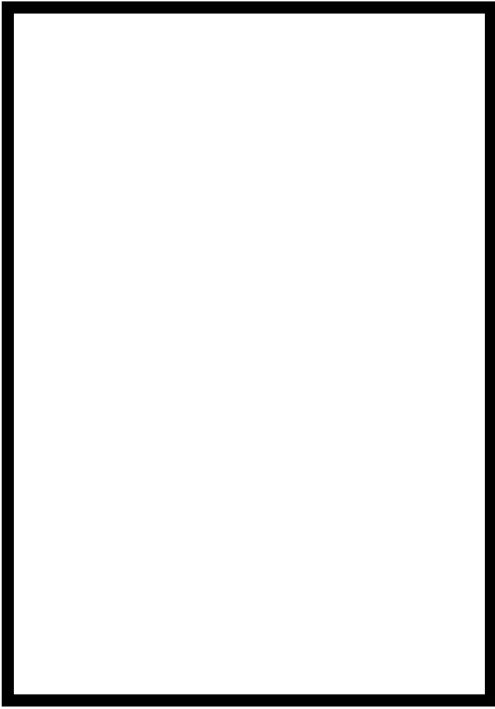
Cada grupo de alunos recebeu diferentes formatos de áreas maiores, que deveriam ser mensuradas, bem como distintos formatos de áreas menores, que deveriam ser utilizados como unidades de medida.



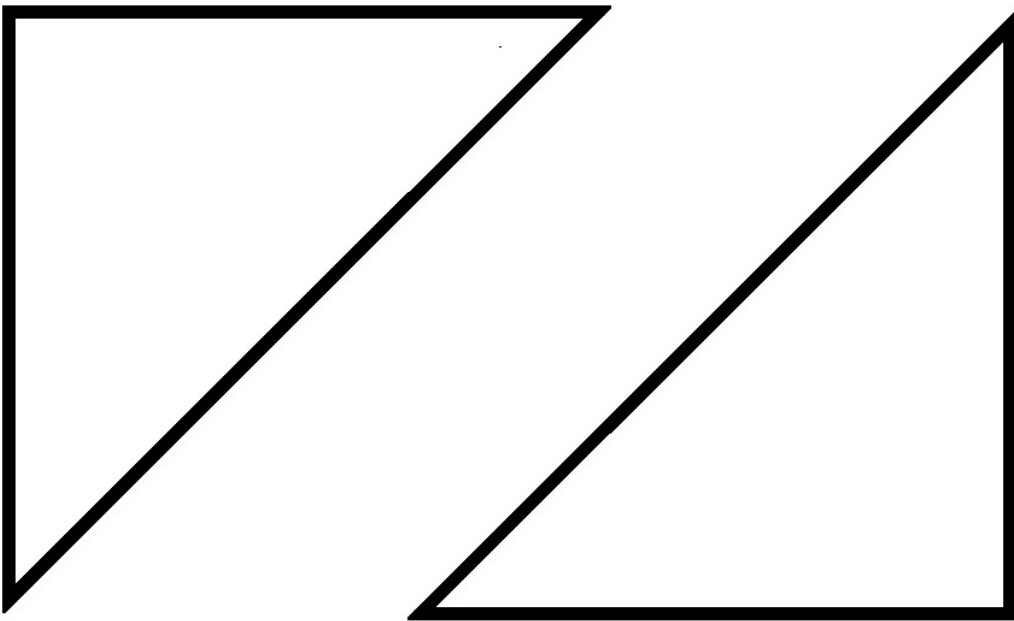
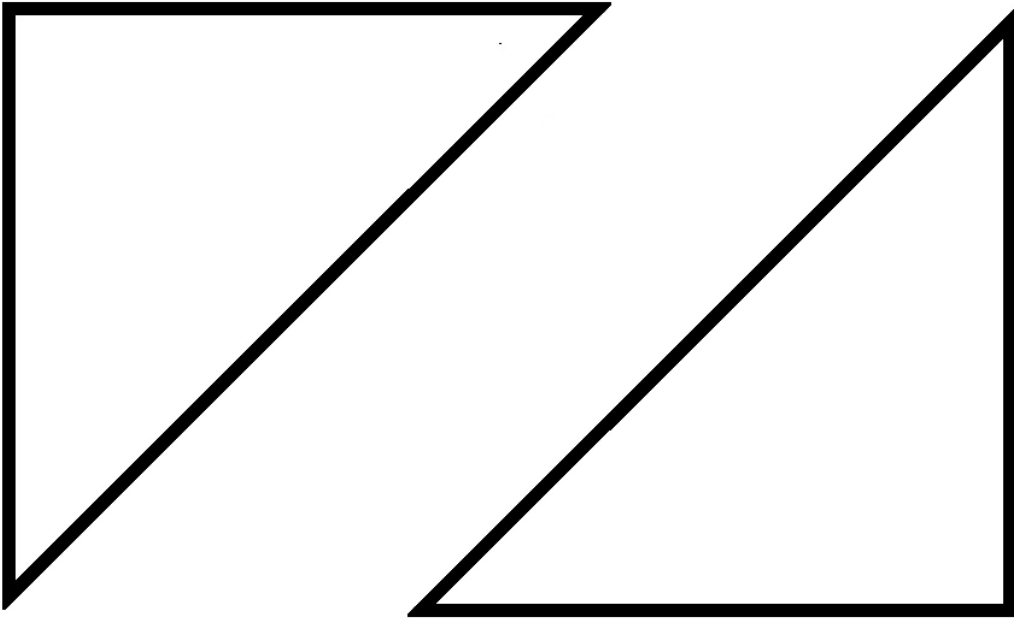
As figuras correspondentes às áreas maiores foram confeccionadas em papel cartão colorido, enquanto as menores foram produzidas em papel cartão branco.

Áreas retangulares:

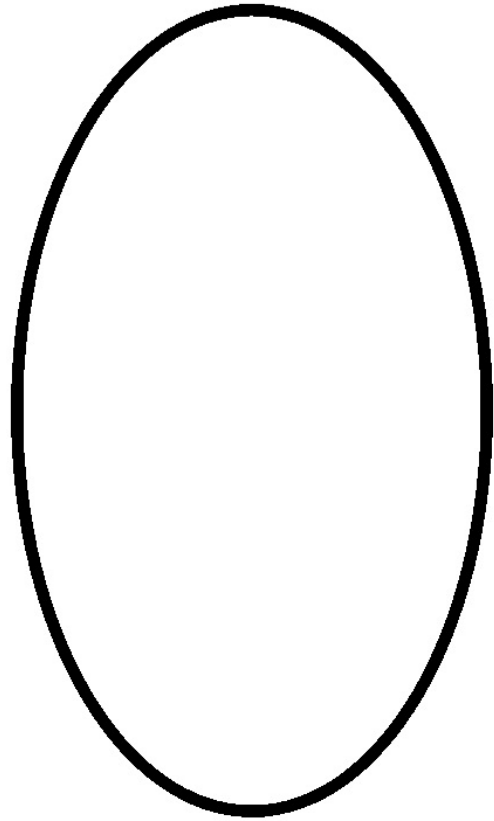
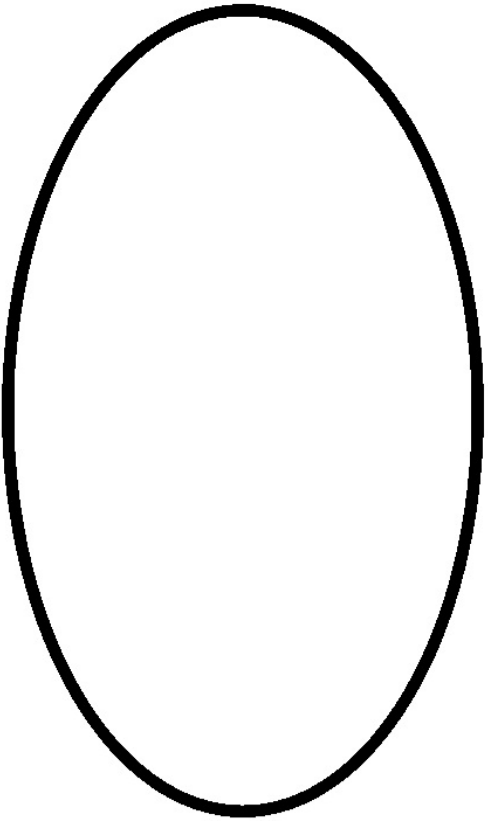
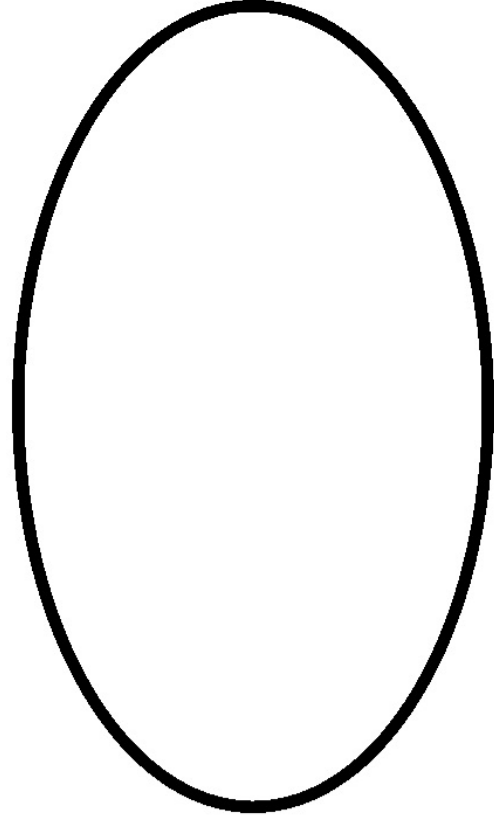
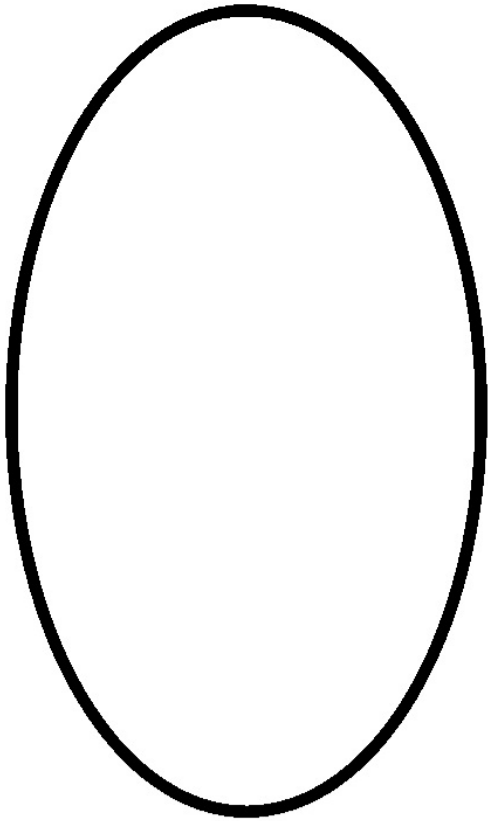




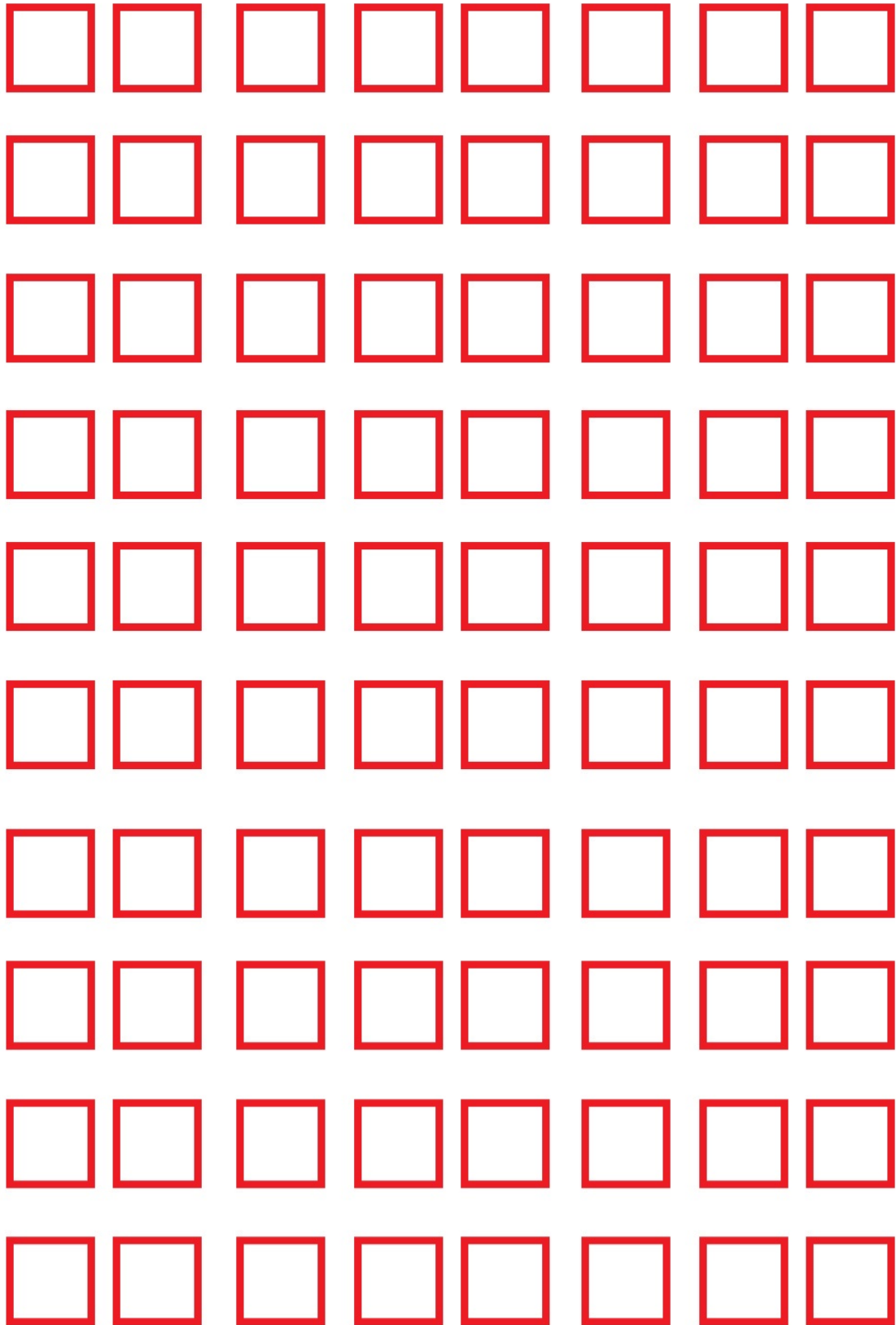
Áreas triangulares:



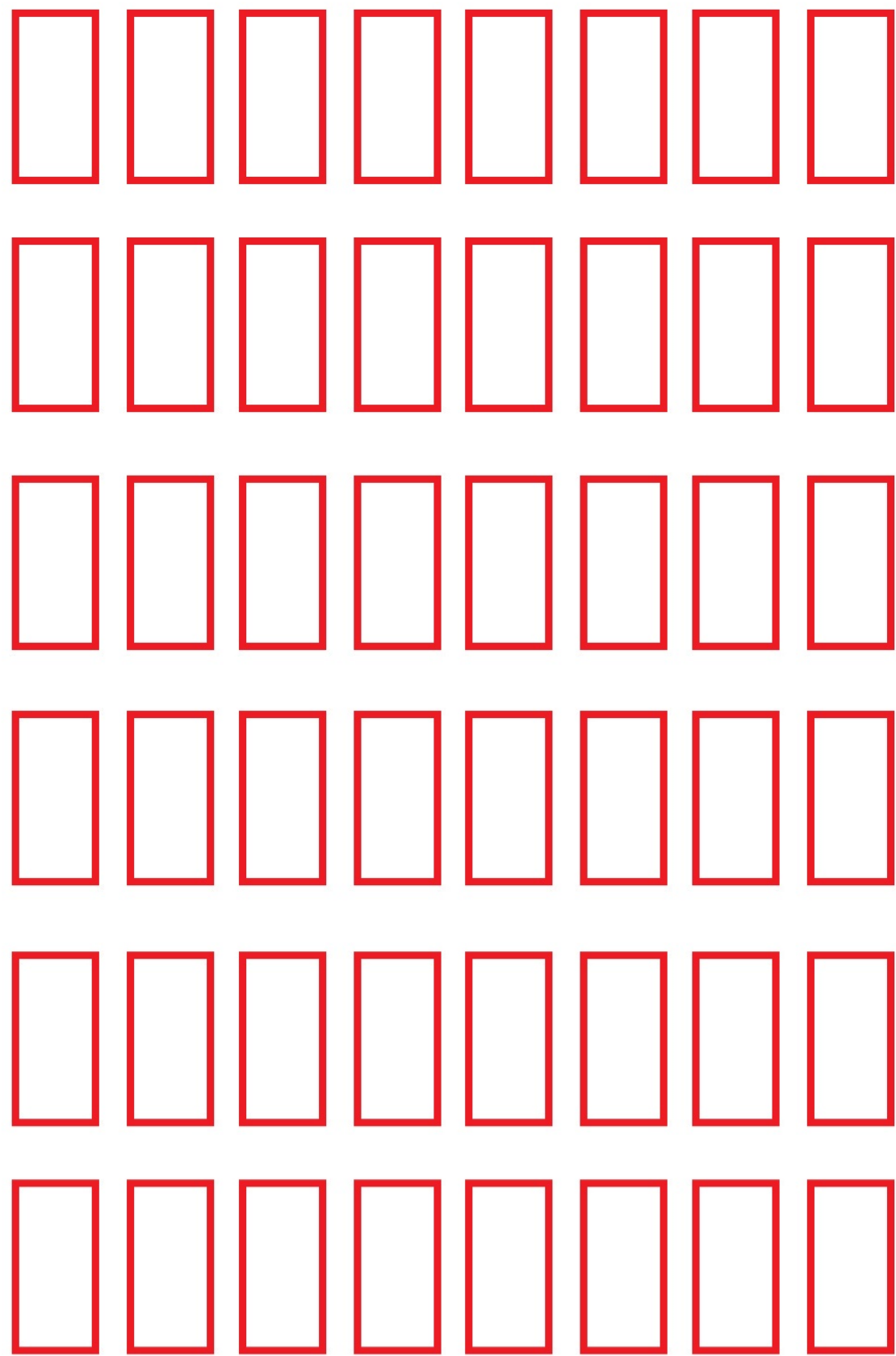
Áreas elípticas:



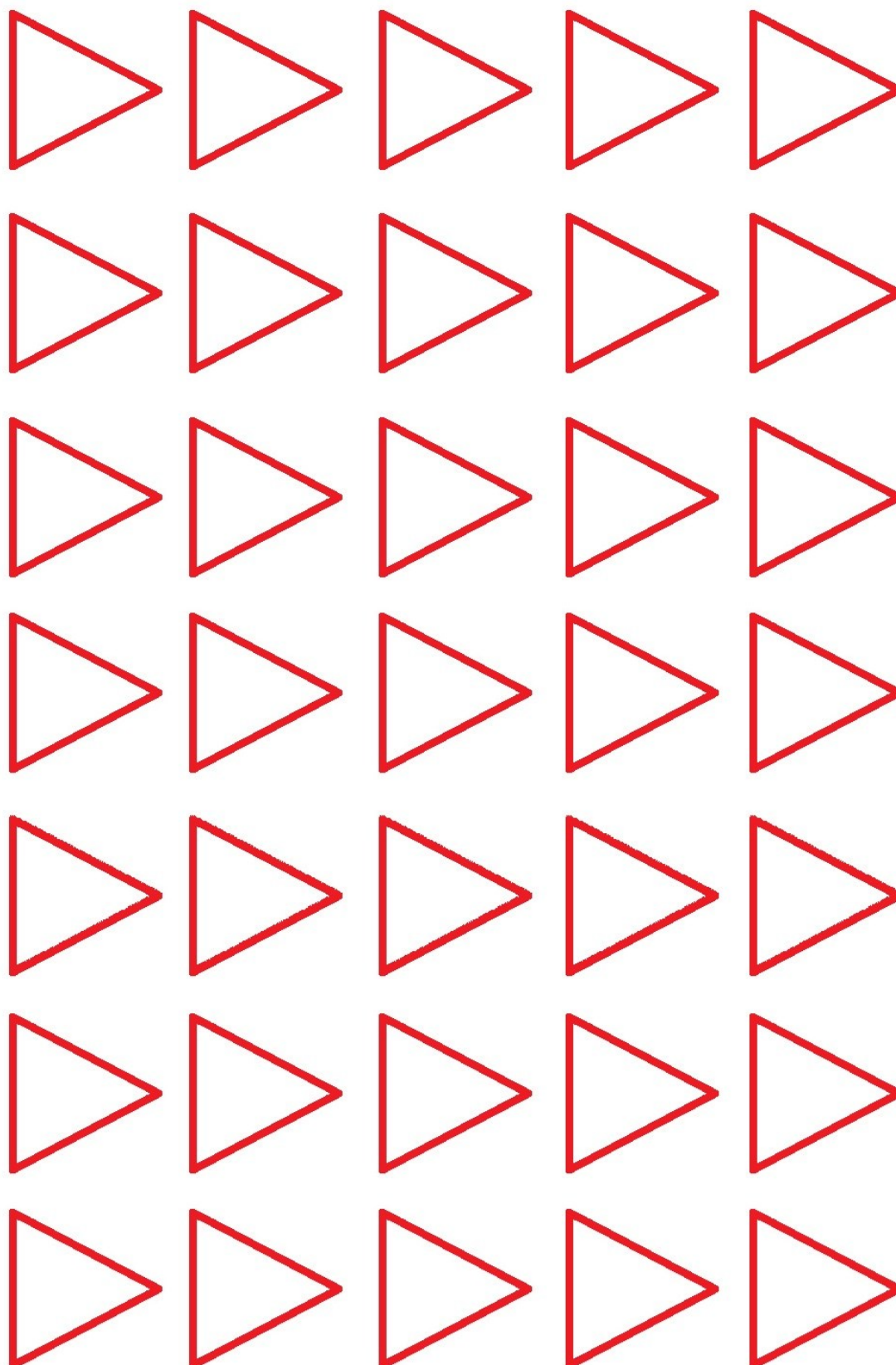
Pequenos quadrados para medição:



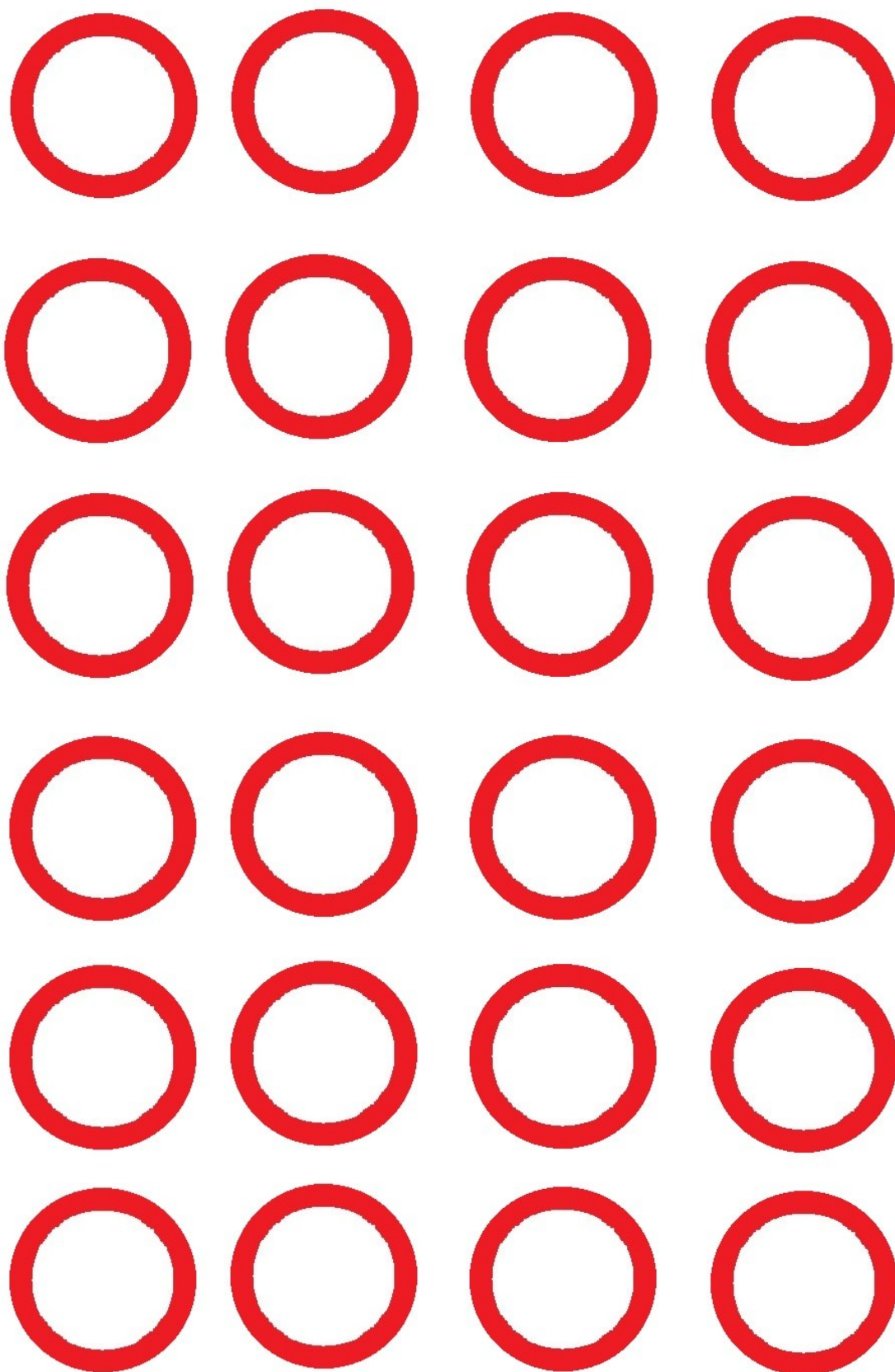
Pequenos retângulos para medição:



Pequenos triângulos para medição:



Pequenos círculos para medição:



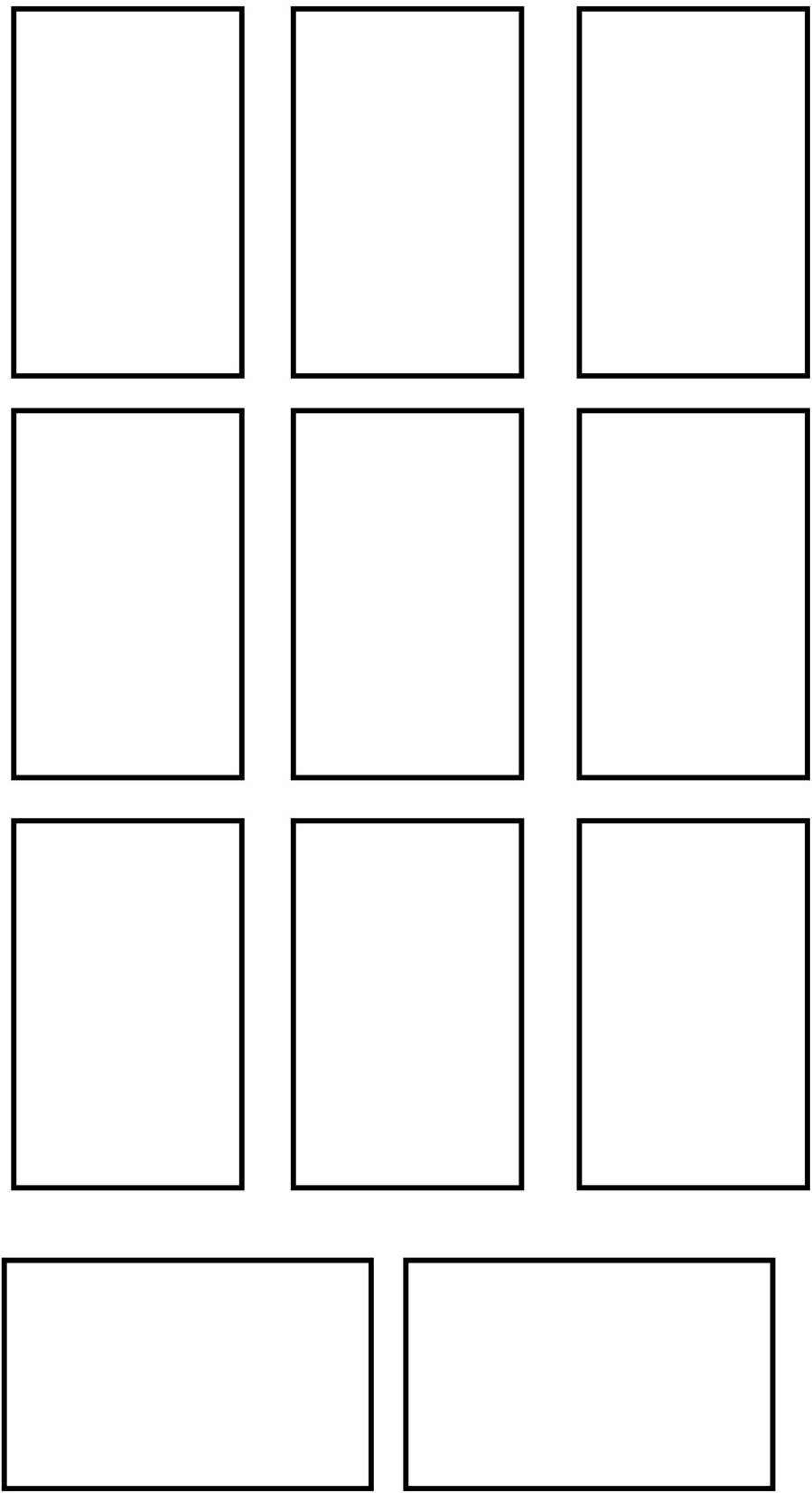
APÊNDICE D – Comparados áreas de polígonos.

Inicialmente, cada grupo recebeu quatro retângulos e foi solicitado que os organizassem em ordem crescente de área, justificando o critério adotado para o ordenamento. Em um segundo momento, os estudantes receberam diferentes polígonos, nos quais deveriam aplicar as fórmulas de cálculo de área e explorar as transformações decorrentes dessas aplicações.

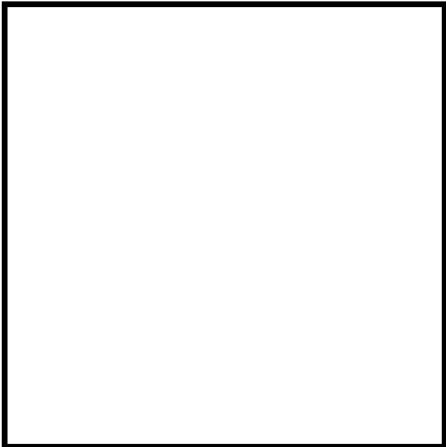
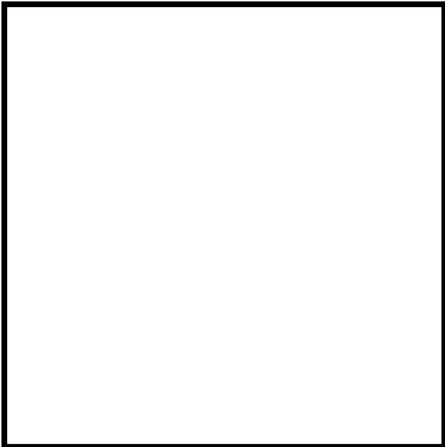
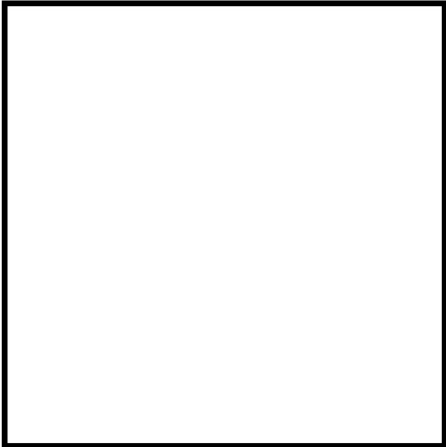
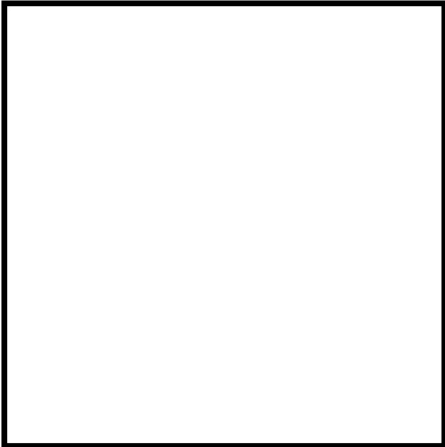
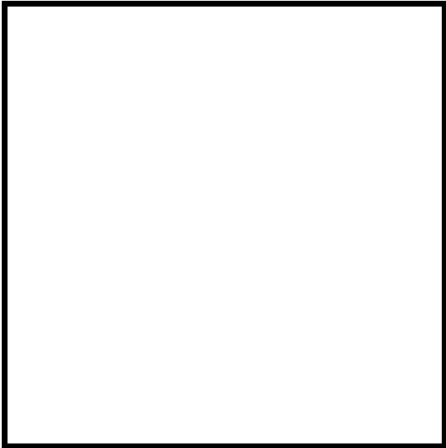
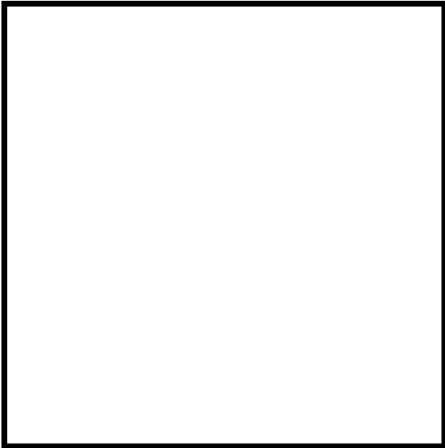


Os polígonos foram confeccionados em papel cartão colorido.

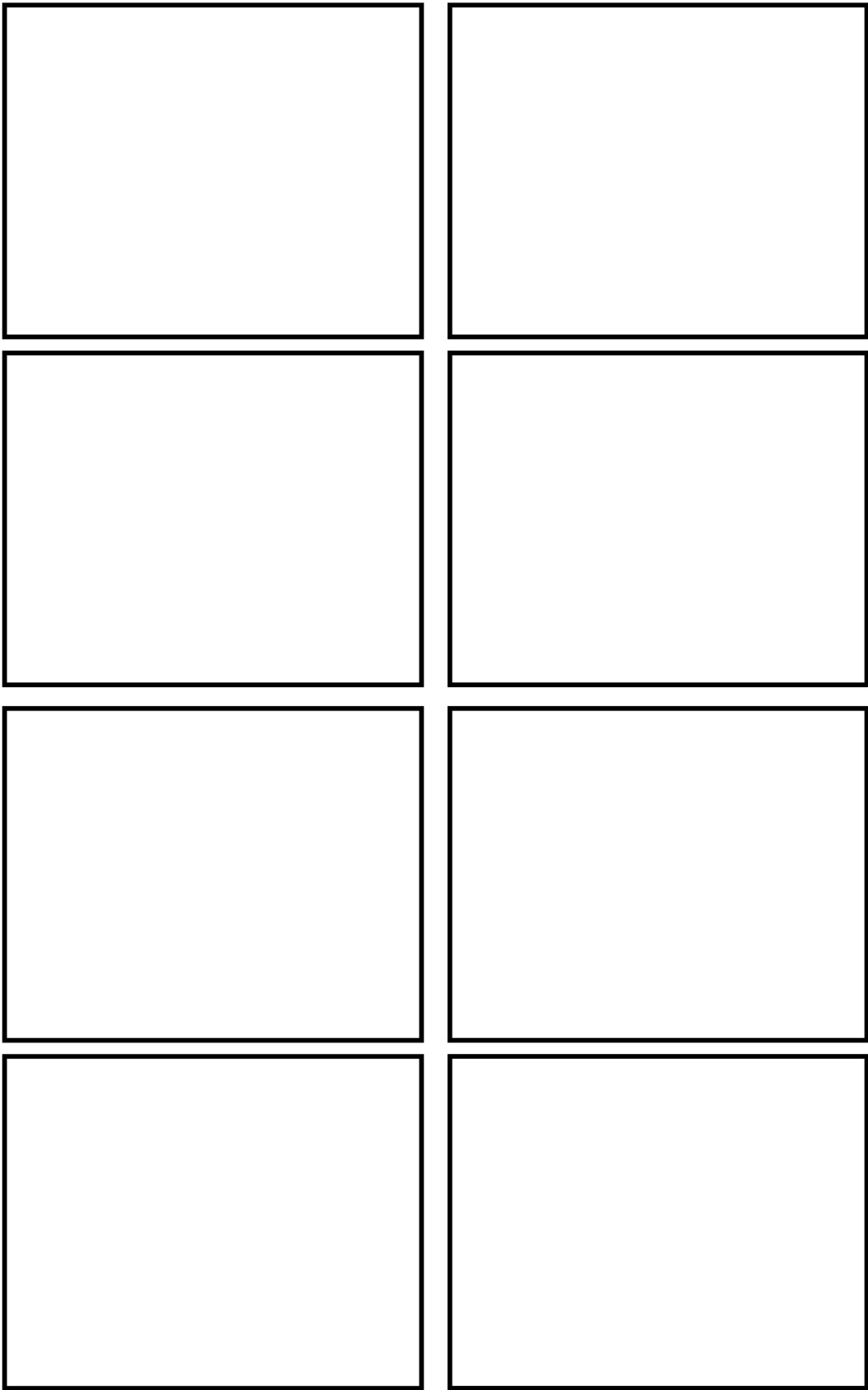
Retângulo verde:



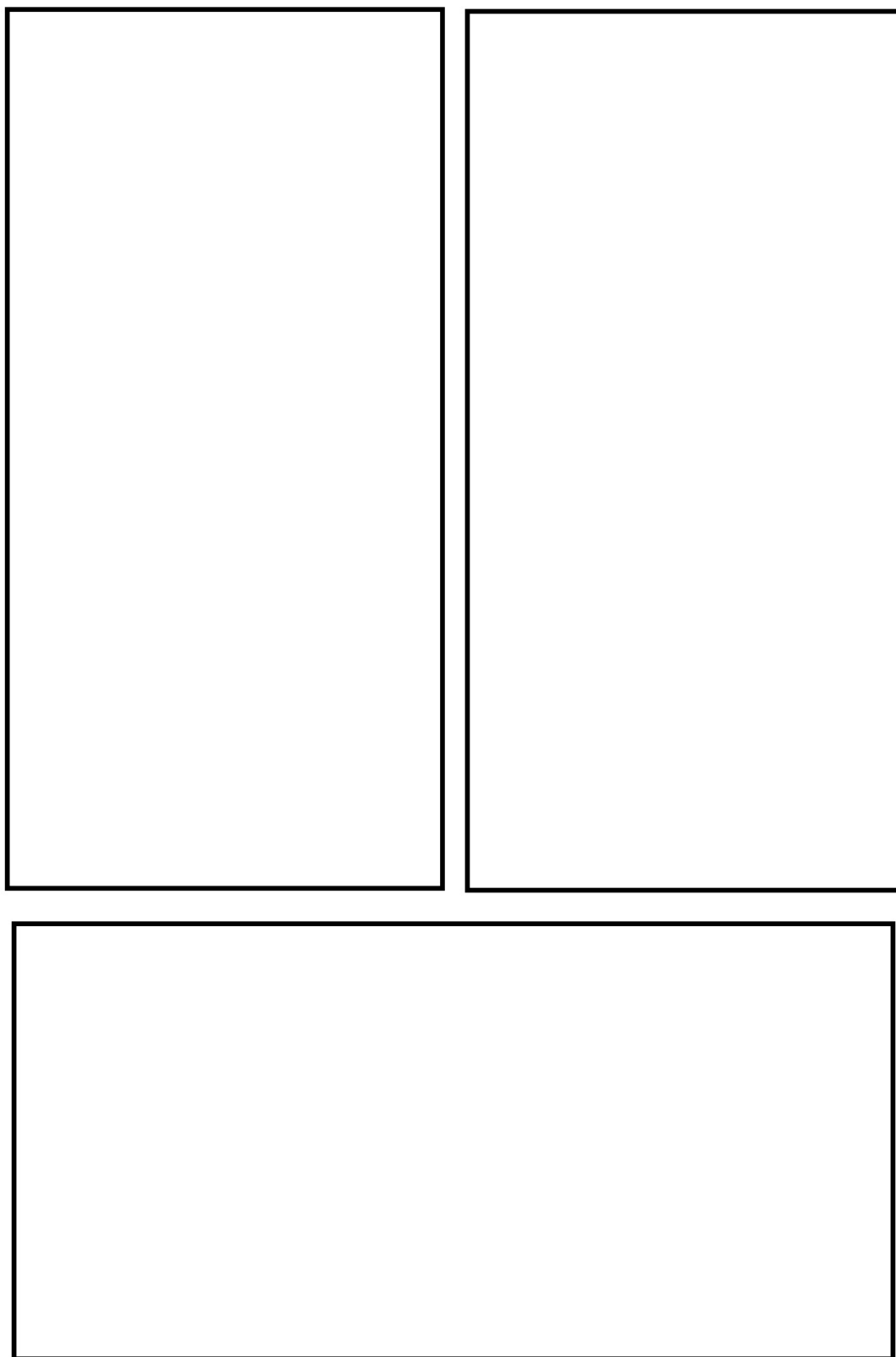
Retângulo amarelo:



Retângulo roxo:

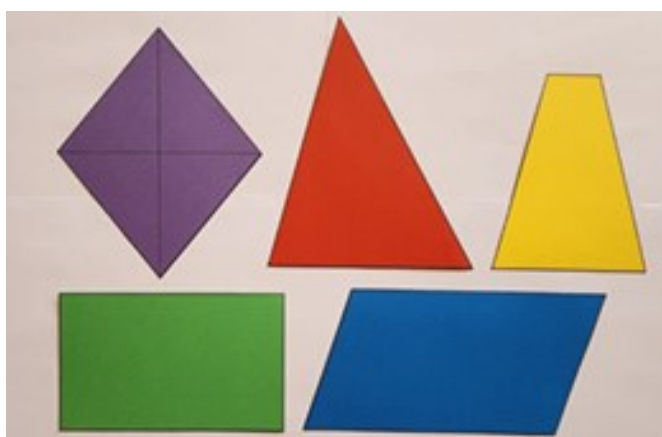


Retângulo vermelho:



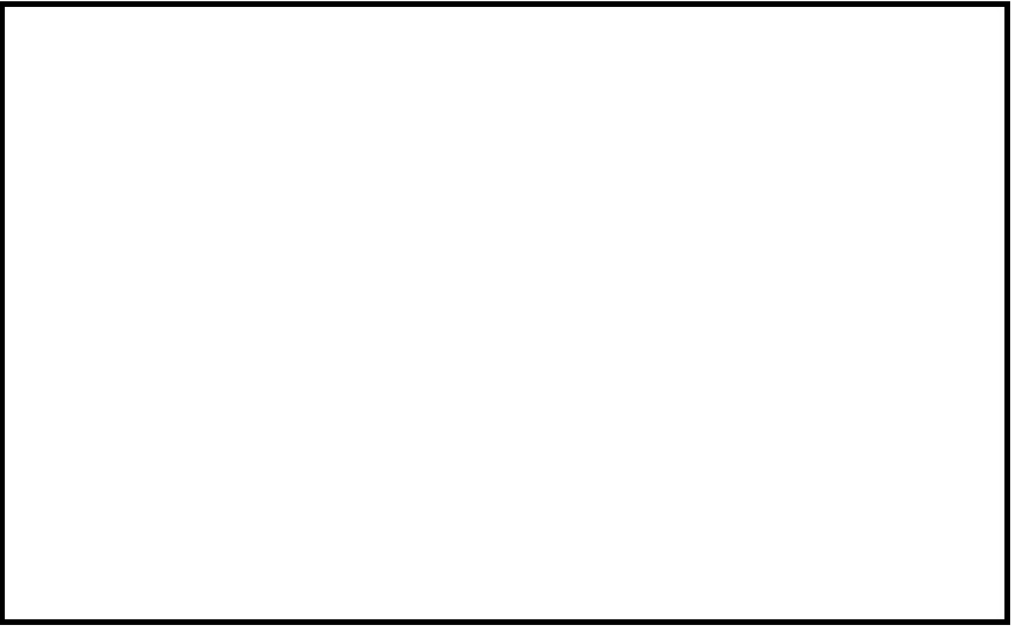
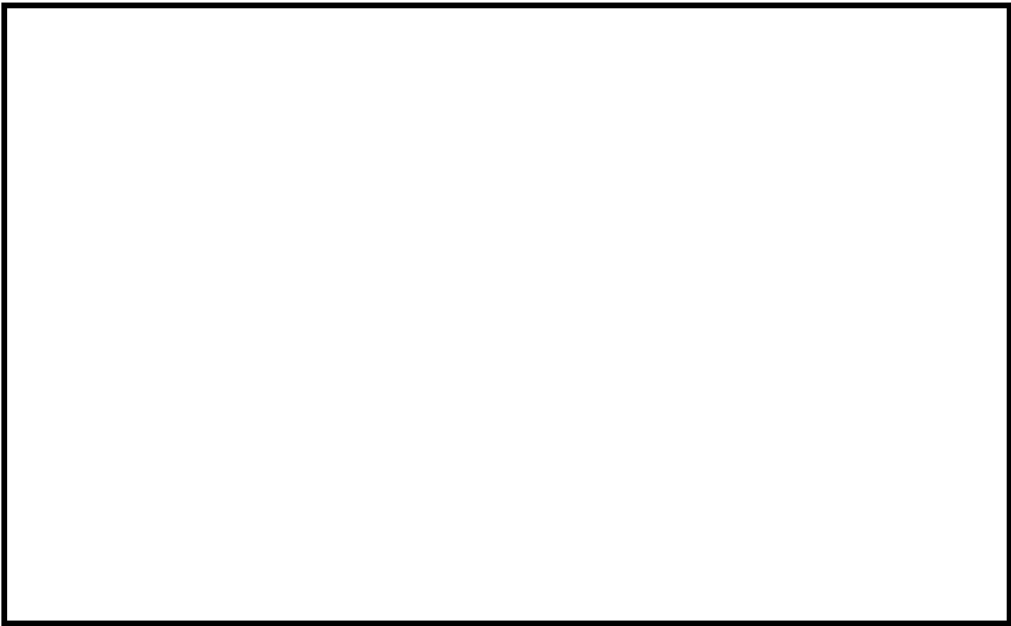
APÊNDICE E – Transformação geométrica de polígonos.

Cada grupo recebeu várias unidades de cada polígono, justamente para que pudessem explorar, observar, cortar, remontar e, se desejassem, repetir o processo sempre que julgassem necessário.

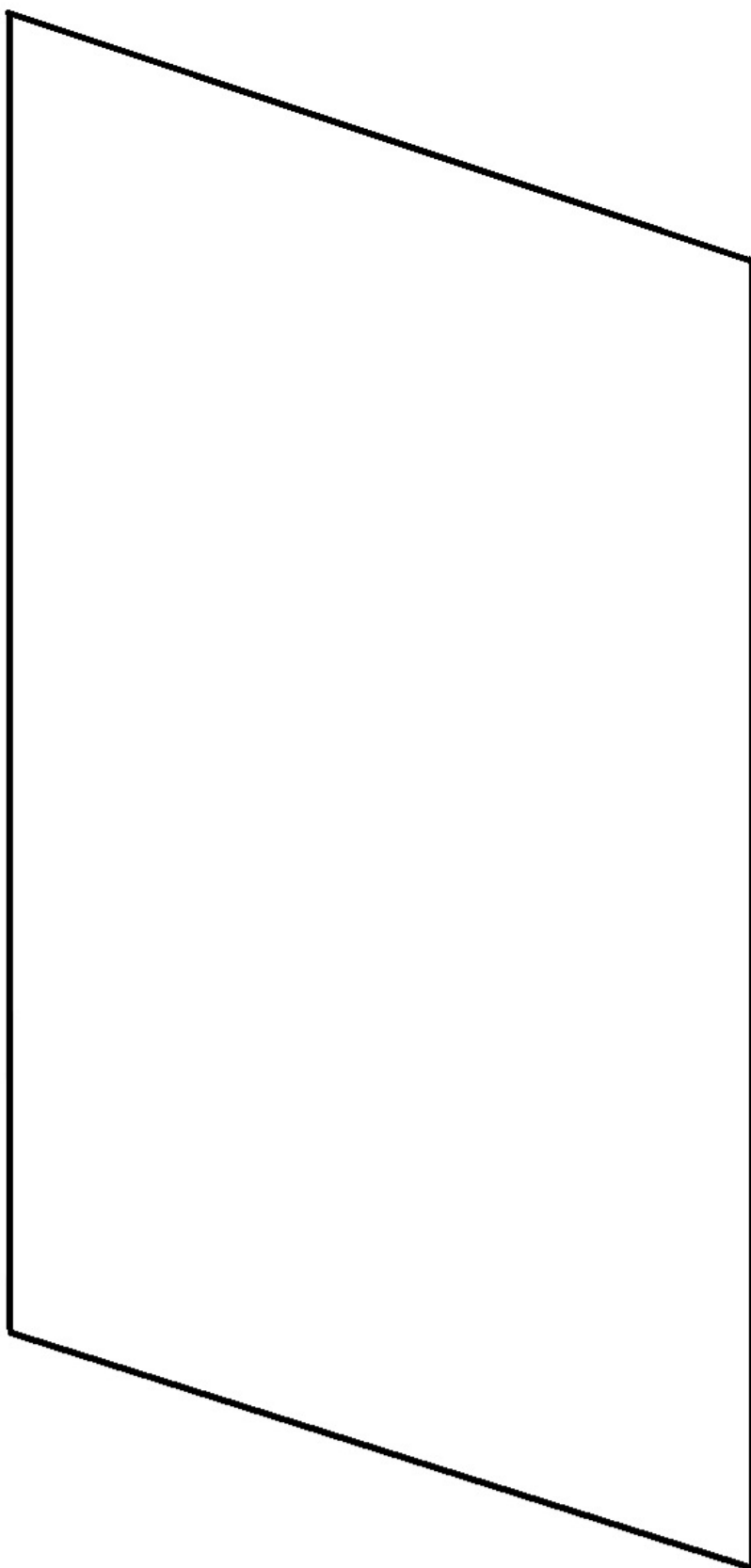


Os polígonos foram confeccionados em papel cartão colorido.

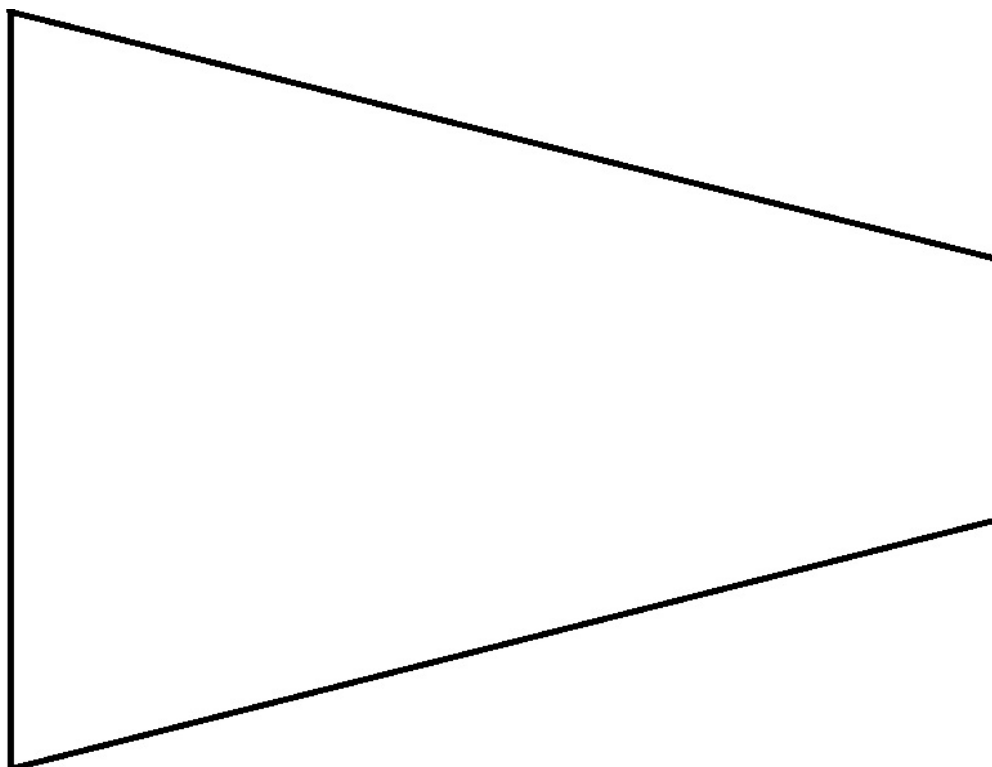
Retângulo verde:



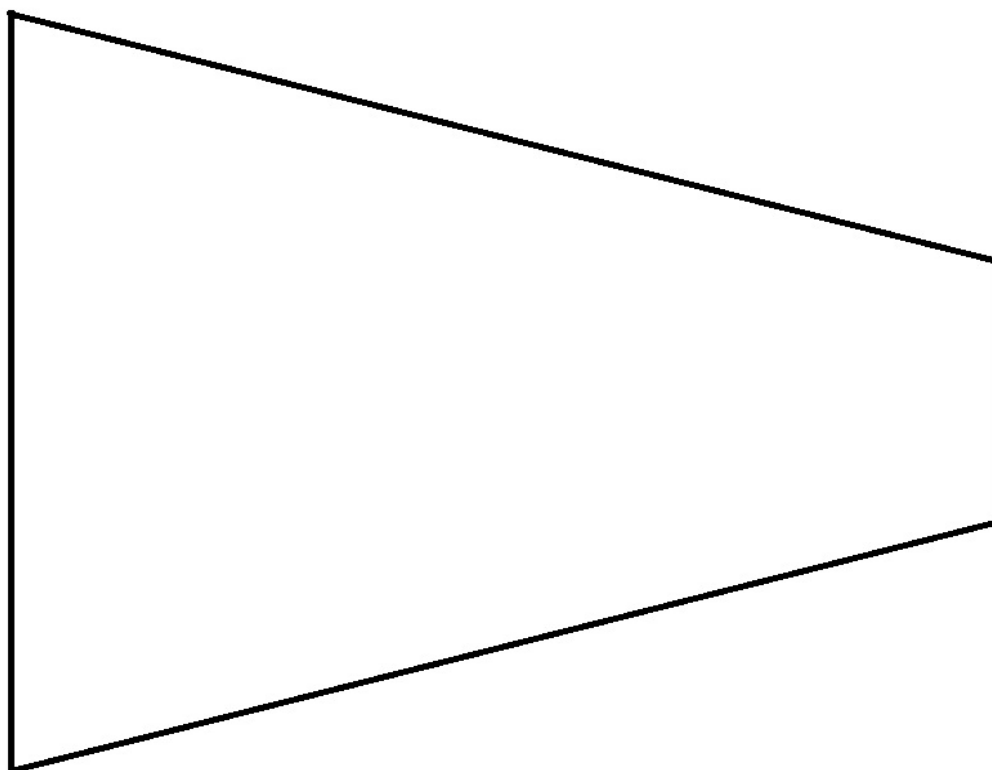
Paralelogramo azul:

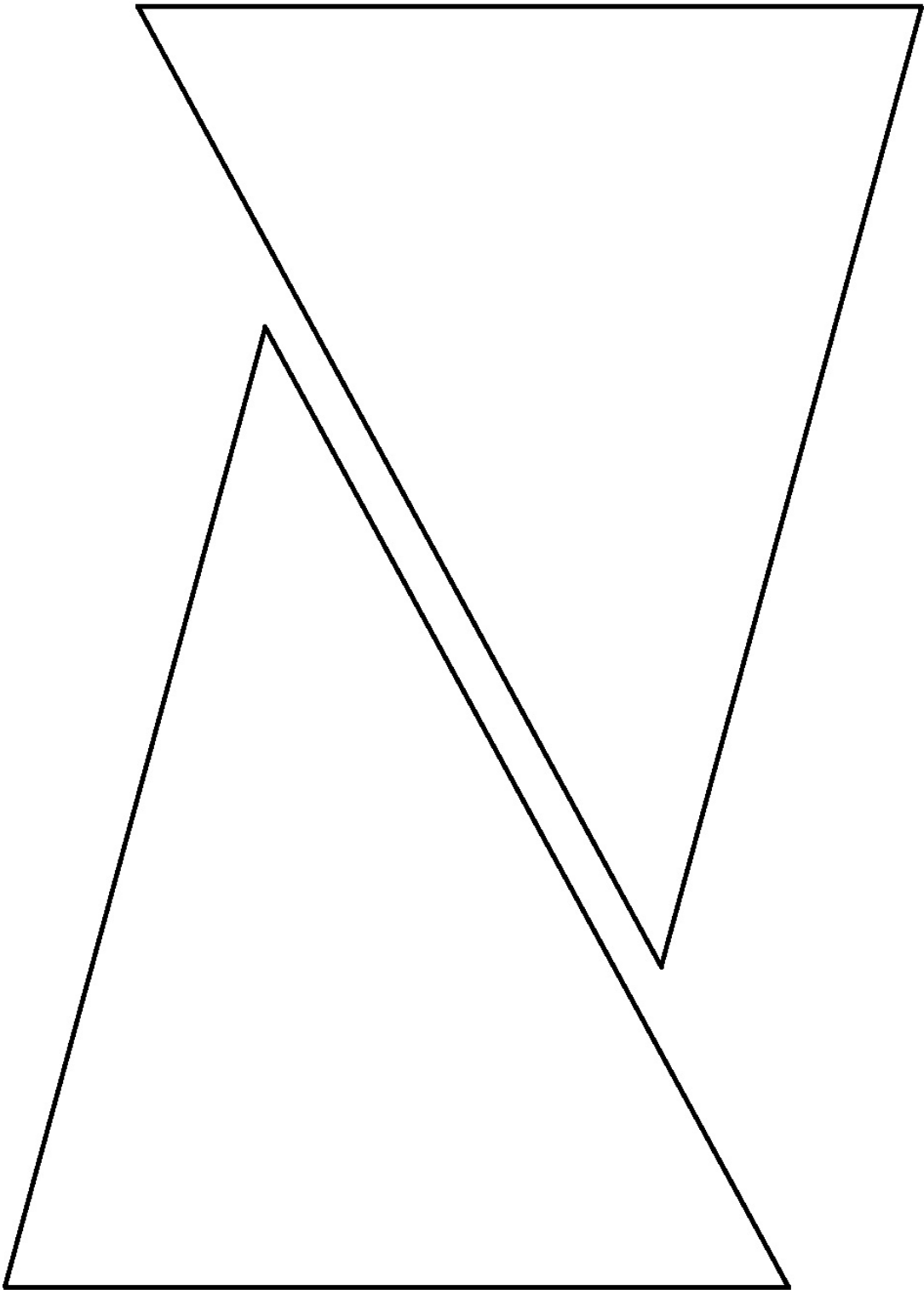


Trapézio amarelo:

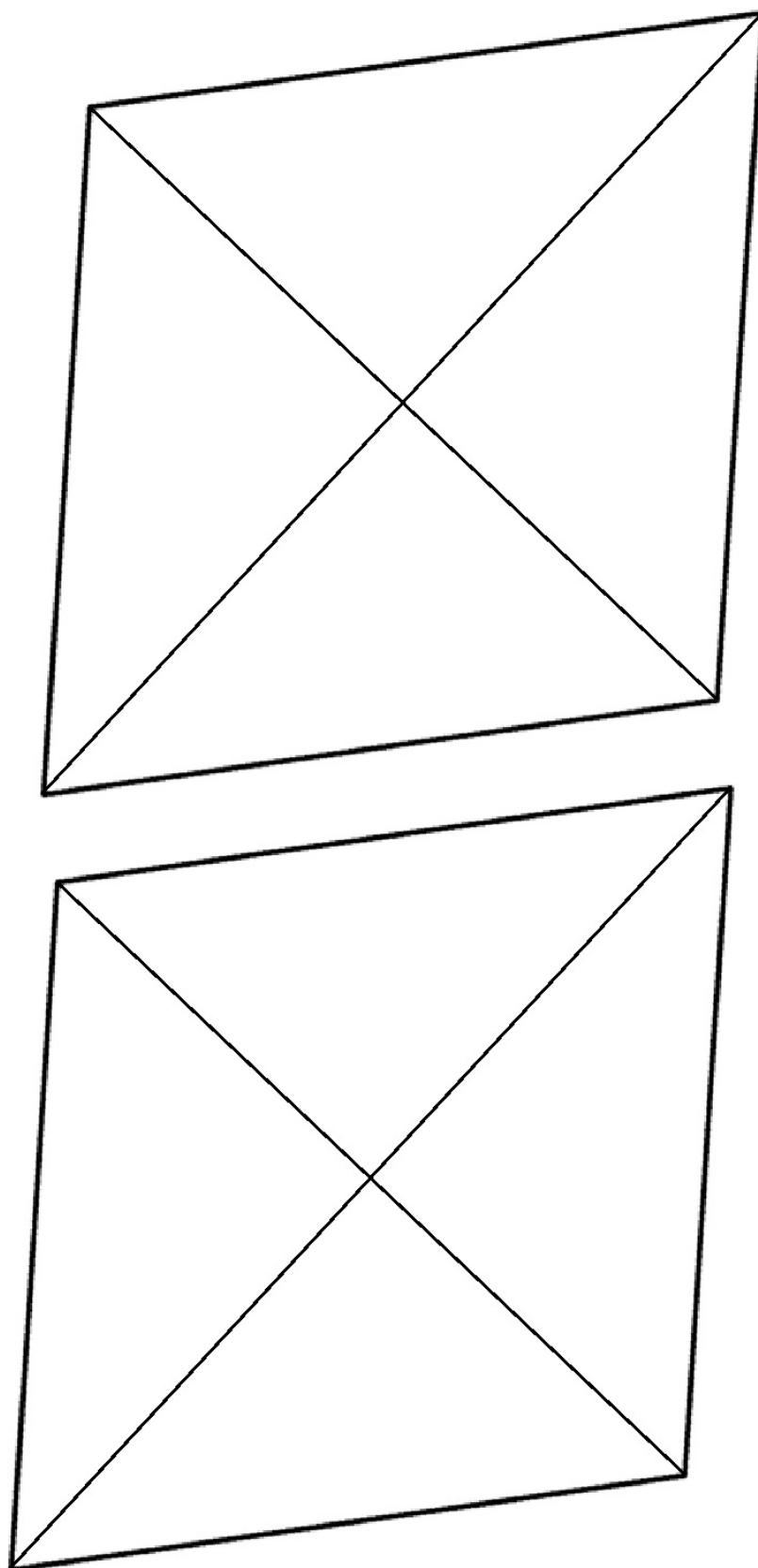


Triângulo vermelho:





Losango roxo:



ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA O RESPONSÁVEL LEGAL DE PARTICIPANTE MENOR DE 18 ANOS

O menor sob sua responsabilidade está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada **“Explorando o cálculo de áreas: mentalidades matemáticas e problematização”**, conduzida por Fábio Vinicius Gouvêa Moura. Este estudo tem por objetivo **observar como os alunos constituem uma mentalidade matemática de crescimento tendo como objeto de estudo a geometria**. Ele/Ela foi selecionado(a) por ser aluno de uma turma da Escola Municipal Marlene Salgado de Oliveira, onde o pesquisador leciona. A participação não é obrigatória. A qualquer momento, ele/ela poderá desistir de participar e retirar seu consentimento. No entanto, por se tratar de conteúdo pertinente a uma disciplina regular, o estudante ainda realizará as tarefas propostas, mesmo que seus dados não sejam coletados para a pesquisa. A recusa, desistência ou retirada de consentimento não acarretará prejuízo.

Pode ser que os estudantes sintam-se constrangidos por estarem sendo gravados áudios deles; eles também poderão sentir medo de não saber responder alguma questão ao longo da investigação, ou mesmo medo de serem identificados ao final dela; Todos os riscos serão minimizados pelo pesquisador que garantirá que os educandos sempre serão respeitados; os estudantes também terão assegurados sua confidencialidade e a privacidade, além da liberdade para se retirar da pesquisa a qualquer momento, sem prejuízo para o mesmo. A participação na pesquisa não é remunerada nem implicará em gastos para os participantes.

A participação nesta pesquisa ocorrerá ao longo de quatro encontros, sendo um encontro por semana, com duração de 150 minutos (três tempos de aula) cada, realizados na própria escola, durante o horário regular das aulas de Orientação de Estudo, ministradas pelo professor-pesquisador.

Quanto aos procedimentos, pretendemos iniciar a intervenção com atividades que utilizem materiais manipuláveis, enquadrando-se no conceito de laboratório de ensino de matemática. Trabalharemos com conceitos de reta, bem como com operações com figuras geométricas, incluindo adição, subtração e multiplicação. No segundo encontro, também utilizando materiais manipuláveis,

os alunos serão incentivados a expandir ou mesmo desenvolver seu entendimento sobre medidas, com foco em medidas de áreas. No terceiro encontro, abordaremos a comparação de áreas de retângulos, buscando estabelecer uma ordenação e uma justificativa matemática para tal. Por fim, no quarto encontro, ampliaremos a ideia discutida no terceiro encontro, explorando as áreas de diferentes polígonos.

Todas as aulas da pesquisa terão seus áudios gravados para posterior transcrição, sendo necessário o uso dessas transcrições na divulgação dos resultados. É importante que você concorde com esse procedimento, sabendo que nenhum nome ou voz será divulgado. Ressaltamos que os dados obtidos por meio desta pesquisa serão tratados de forma confidencial e não serão divulgados individualmente, assegurando o sigilo dos participantes. Além disso, o pesquisador responsável se compromete a tornar públicos nos meios acadêmicos e científicos os resultados obtidos de forma consolidada sem qualquer identificação de indivíduos ou instituições participantes.

Caso você autorize o menor sob sua responsabilidade a participar desta pesquisa, assine ao final deste documento. Seguem os telefones e o endereço institucional do pesquisador responsável e do Comitê de Ética em Pesquisa – CEP, onde você poderá tirar suas dúvidas sobre o projeto, agora ou a qualquer momento.

Contatos do pesquisador responsável: Fábio Vinicius Gouvêa Moura, Professor de Matemática da Rede Municipal de São Gonçalo/RJ. E-mail: gouvea.fabio@posgraduacao.uerj.br.

Caso você tenha dificuldade em entrar em contato com o pesquisador responsável, comunique o fato à Comissão de Ética em Pesquisa da UERJ: Rua São Francisco Xavier, 524, sala 3018, bloco E, 3º andar, - Maracanã - Rio de Janeiro, RJ, E-mail: coep@sr2.uerj.br — Telefone: (021) 2334-2180. O CEP COEP é responsável por garantir a proteção dos participantes de pesquisa e funciona as segundas, quartas e sextas-feiras, de 10h às 12h e 14h às 16h.

Declaro que entendi os objetivos, riscos e benefícios da participação do menor sob minha responsabilidade nesta pesquisa e autorizo sua participação.

São Gonçalo, 30 de julho de 2024.

Nome do participante menor: _____

Nome do(a) Responsável: _____

Assinatura: _____

Nome do(a) pesquisador: Fábio Vinicius Gouvêa Moura

Assinatura: _____