



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

Iber de Souza Rebello

**Fórmulas de Zeller e Conway para a Determinação
de Dias da Semana**

São Gonçalo
2024

Iber de Souza Rebello

Fórmulas de Zeller e Conway para a Determinação de Dias da Semana



Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Silva de Souza

São Gonçalo

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/A

FICHA - Biblioteca

O48

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Iber de Souza Rebello

Fórmulas de Zeller e Conway para a Determinação de Dias da Semana

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 12/12/2024

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Fábio Silva de Souza (Orientador)
Faculdade de Formação de Professores – UERJ


Profª. Dra. Adriana Juzga León
Faculdade de Formação de Professores – UERJ


Prof. Dr. Márcio da Silva Passos Telles
Faculdade de Formação de Professores – UERJ


Prof. Dr. Luerbio Faria
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ


Prof. Dr. Eduardo Teles da Silva
Centro-Federal de Educação Tecnológica Celso Suckon da
Fonseca – CEFET/RJ

São Gonçalo
2024

Aos meus pais, que sempre me ensinaram o valor da educação, do esforço e da perseverança.

Agradecimentos

Primeiramente, expresso minha mais profunda gratidão a Deus, cuja infinita bondade me sustentou com fé, saúde e perseverança ao longo desta jornada. Foi Sua presença constante que me fortaleceu nos momentos mais desafiadores, permitindo-me superar os obstáculos e alcançar este importante marco.

Agradeço, com carinho, à minha amada Joyce Souza, cujo apoio incondicional e palavras de incentivo foram um alicerce essencial durante todo o processo. Sua força e presença nos momentos mais difíceis foram fundamentais para que eu pudesse concluir esta etapa tão significativa da minha vida.

Minha sincera gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Fábio Silva de Souza, por sua paciência, dedicação e generosidade ao compartilhar seus conhecimentos. Sua orientação foi indispensável para o desenvolvimento deste trabalho, guiando-me com profundidade acadêmica e rigor científico.

Sou igualmente grato aos professores do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática da Faculdade de Formação de Professores. Seu compromisso com o ensino e a pesquisa foi uma fonte de inspiração que me encorajou a aprofundar meus estudos. As aulas, orientações e o constante incentivo foram pilares fundamentais para meu crescimento acadêmico e profissional.

Aos colegas e amigos da turma PROFMAT 2022, agradeço pelas experiências compartilhadas, pelo apoio mútuo e pelos momentos de descontração que tornaram esta caminhada mais leve e enriquecedora. A troca de ideias e o companheirismo foram essenciais para que eu mantivesse a motivação e perseverasse até o final.

Por fim, estendo minha gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Cada gesto de apoio, palavra de encorajamento e ajuda recebida ao longo deste percurso é refletido nesta conquista. Muito obrigado a todos!

*"Entrega o teu caminho ao teu Deus, confia nele, e o mais ele fará."
(Salmos 37: 5)*

Resumo

DE SOUZA REBELLO, Iber. **Fórmulas de Zeller e Conway para a Determinação de Dias da Semana**. 2024. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Faculdade de Formação de Professores - FFP, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2024.

Esta dissertação estuda a Matemática por trás do Calendário Gregoriano, explorando métodos para determinar o dia da semana de qualquer data, com foco nas fórmulas de Zeller e Conway. O trabalho começa com a apresentação de conceitos matemáticos fundamentais, como divisibilidade, aritmética modular e a função maior inteiro, que fornecem a base teórica para o desenvolvimento das fórmulas estudadas. Em seguida, são introduzidas as fórmulas de Zeller e Conway, com uma explicação detalhada de suas estruturas e aplicações no contexto do calendário. Além disso, o estudo inclui implementações computacionais em Python de ambos os métodos, permitindo sua reprodução e utilização automatizada. A análise comparativa das fórmulas ressalta suas vantagens e limitações, destacando sua aplicabilidade em diferentes contextos. Por fim, é proposta uma abordagem didática para introduzir o Método de Conway no ensino básico. A sequência didática apresenta uma metodologia inovadora e interativa, conectando os conceitos matemáticos do calendário a situações cotidianas, tornando o aprendizado mais prático e envolvente.

Palavras-chave: Fórmula *Doomsday*, Fórmula de Zeller, Fórmula de Conway, Método de Zeller, Método de Conway, Algoritmo de Zeller.

Abstract

DE SOUZA REBELLO, Iber. **Zeller's and Conway's Formulas for Determining Days of the Week.** 2024. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Faculdade de Formação de Professores - FFP, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2024.

This dissertation explores the Mathematics behind the Gregorian calendar, focusing on methods to determine the day of the week for any given date, with an emphasis on Zeller's and Conway's formulas. The study begins with a presentation of fundamental mathematical concepts, such as divisibility, modular arithmetic, and the floor function, which provide the theoretical foundation for the development of the formulas analyzed. Next, Zeller's and Conway's formulas are introduced, accompanied by a detailed explanation of their structures and applications within the context of the calendar. Additionally, the study includes computational implementations of both methods in Python, enabling their reproduction and automated use. The comparative analysis of the formulas highlights their advantages and limitations, emphasizing their applicability in different contexts. Finally, a didactic approach is proposed to introduce Conway's method into basic education. The instructional sequence presents an innovative and interactive methodology, connecting the mathematical concepts of the calendar to everyday situations, making learning more practical and engaging.

Keywords: *Doomsday* Formula, Zeller's Formula, Conway's Formula, Zeller's Method, Conway's Method, Zeller's Algorithm.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Carl Friedrich Gauss	19
Figura 2 – Gráfico das funções $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e $g(x) = x$	25
Figura 3 – Júlio César	31
Figura 4 – Papa Gregório XIII	32
Figura 5 – Pares Ordenados $(m; j(m))$ no Plano Cartesiano	42
Figura 6 – Ajuste para $j(m)$ no Plano Cartesiano	43
Figura 7 – Funções $f(m)$ e $j(m)$	44
Figura 8 – Matemático John Horton Conway	48
Figura 9 – Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2024 - Foto 01	72
Figura 10 – Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2024 - Foto 02	73
Figura 11 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 01	74
Figura 12 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 02	74
Figura 13 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 03	75
Figura 14 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 04	76
Figura 15 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 05	76
Figura 16 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 06	76

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Atribuição de números aos meses do ano	34
Tabela 2	–	Atribuição de números aos dias da semana	34
Tabela 3	–	Dia da semana em que caiu o primeiro dia de cada mês do ano 0000 . .	40
Tabela 4	–	<i>Doomsday</i> dos Anos Seculares	51
Tabela 5	–	Datas memoráveis	54
Tabela 6	–	Datas memoráveis	69
Tabela 7	–	Atribuição de números aos dias da semana	69

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	NOÇÕES PRELIMINARES	15
2.1	Divisibilidade	15
2.2	Aritmética dos Restos	18
2.3	Parte Inteira de um Número Real e Função Maior Inteiro	22
2.4	Representação de um Número em uma Base	26
3	DATAS E DIAS	30
3.1	Breve histórico dos Calendários Juliano e Gregoriano	30
3.2	Fórmula de Zeller	33
3.3	Fórmula de Conway	47
3.4	Implementações em Python dos Métodos de Zeller e Conway	56
3.4.1	Implementação do Método de Zeller	56
3.4.2	Implementação do Método de Conway	57
3.5	Comparação entre as Fórmulas de Zeller e de Conway	58
4	PROPOSTA DIDÁTICA	60
4.1	Introdução	60
4.2	Objetivo da Proposta	60
4.3	Etapas para Desenvolvimento da Proposta	61
4.3.1	Apresentação do método e história dos calendários	62
4.3.2	Fundamentos teóricos básicos	62
4.3.2.1	Divisão	62
4.3.2.2	Múltiplos e Divisores	63
4.3.3	Deduzindo o Método de Conway	65
4.3.4	Algoritmo do Método de Conway	68
4.3.5	Gincana de Perguntas Desafiadoras	69
4.4	Casos de Aplicação da Proposta	71
4.4.0.1	Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2024	71
4.4.0.2	Atividade com Alunos do 7º Ano do Ensino Fundamental - Colégio Estadual Menezes Vieira	73
4.4.0.3	Gincana de Perguntas Desafiadoras com Alunos do 1º Ano do Ensino Médio - Colégio Estadual Menezes Vieira	74
4.5	Resultados e Conclusões	77

5	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação investiga os conceitos matemáticos que fundamentam os calendários e os métodos para calcular o dia da semana, com ênfase nas fórmulas de Zeller e Conway. O estudo aborda os aspectos teóricos e históricos dos calendários Juliano e Gregoriano, explorando suas origens, evolução e aplicabilidade.

No Capítulo 2, são apresentados os conceitos matemáticos essenciais para a compreensão das fórmulas de Zeller e Conway, como divisibilidade, aritmética modular, parte inteira, função piso e representação decimal de números naturais. Esses elementos são fundamentais para os cálculos relacionados à determinação de dias da semana, constituindo a base teórica deste trabalho.

O Capítulo 3 aborda o desenvolvimento histórico dos sistemas de calendário. Inicialmente, são explorados os calendários Juliano e Gregoriano, suas particularidades e a transição para o uso predominante do calendário Gregoriano. Em seguida, são detalhadas as construções das fórmulas de Zeller e Conway, explicando passo a passo suas estruturas e aplicabilidades. O capítulo também inclui implementações computacionais em Python, que automatizam os cálculos, ampliando as possibilidades de uso em contextos educacionais e técnicos. Além disso, é realizada uma comparação entre as fórmulas, destacando suas vantagens e limitações.

O Capítulo 4 apresenta uma proposta didática baseada na aplicação prática da Fórmula de Conway no ensino básico. A sequência didática proposta busca oferecer aos professores uma abordagem interativa e inovadora para o ensino de Matemática, conectando conceitos teóricos a situações do cotidiano por meio de atividades lúdicas. Essa metodologia visa tornar o aprendizado mais envolvente e acessível, incentivando o interesse dos alunos.

Este trabalho não apenas aprofunda o entendimento teórico sobre os calendários e os métodos de cálculo de dias da semana, mas também propõe novas estratégias para o ensino de Matemática, destacando seu potencial prático e interdisciplinar.

2 NOÇÕES PRELIMINARES

Este capítulo tem como objetivo apresentar, de forma acessível, os conceitos matemáticos essenciais para a compreensão deste trabalho, os quais fundamentarão o desenvolvimento das fórmulas de Zeller e de Conway para a determinação do dia da semana de datas arbitrárias. Abordaremos conceitos como divisibilidade, aritmética modular, parte inteira de um número real, função maior inteiro e representação decimal de um número natural, elementos fundamentais para os cálculos de datas e dias da semana, que constituem o foco desta dissertação. Esses conceitos essenciais podem ser encontrados em obras como (1), (2), (4), (5) e (6).

2.1 Divisibilidade

Antes de introduzirmos o Teorema da Divisão Euclidiana, enunciaremos o Princípio da Boa Ordenação (PBO), que será fundamental para a demonstração de algumas proposições subsequentes.

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{Z}$ é dito **limitado inferiormente** se existe um número inteiro $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq x$ para todo $x \in S$. Esse número m é chamado de **cota inferior** de S . Se a cota inferior está em S , dizemos que m é o **menor elemento** de S .

Teorema 2.1.1. (*Princípio da Boa Ordenação*) *Se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.*

A demonstração do Princípio da Boa Ordenação pode ser encontrada em (2).

Com o Princípio da Boa Ordenação, temos uma ferramenta essencial para trabalhar com subconjuntos dos números inteiros, especialmente na garantia da existência de elementos mínimos em conjuntos limitados inferiormente. Utilizando esse princípio, podemos agora enunciar o Teorema da Divisão Euclidiana, que é um conceito fundamental na teoria dos números que estabelece a existência e a unicidade do quociente e do resto ao dividir um número inteiro por outro.

Teorema 2.1.2. (*Divisão Euclidiana*) *Para quaisquer dois inteiros a e b , com $b \neq 0$, existem números inteiros únicos q (quociente) e r (resto) tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < |b|$.*

Demonstração. Será apresentada a demonstração, iniciando pela prova de existência e, em seguida, pela prova de unicidade.

Existência:

Vamos fazer a demonstração da existência dividindo em 3 casos.

(i) $a \geq 0$ e $b > 0$

Considere o conjunto $A = \{a - bx; x \in \mathbb{Z} \text{ e } a - bx \geq 0\}$. O conjunto $A \subset \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente. Note que $a - b \cdot 0 = a \geq 0$, logo $a \in A$. Pelo Princípio da Boa Ordem, todo subconjunto não vazio de números inteiros não negativos tem um menor elemento. Assim, o conjunto A possui um menor elemento. Seja $r = \min A$. Portanto, $r \in A$, então $r = a - bq$ para algum $q \in \mathbb{Z}$, e $r \geq 0$. Dessa forma, temos que $a = bq + r$, com $0 \leq r$. Agora, suponhamos por absurdo que $r \geq b$. Então: $b \leq r = a - bq \implies 0 \leq a - b(q + 1)$. Isso implicaria que $a - b(q + 1) \in A$, o que contraria a escolha de r como o menor elemento de A , pois $a - b(q + 1) < r$. Portanto, essa suposição é falsa, e concluímos que $0 \leq r < b$. Assim, $a = bq + r$, onde $0 \leq r < b$.

(ii) $a < 0$ e $b > 0$

Se $a < 0$, então $-a > 0$. Pelo caso anterior, existem q_1 e $r_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $-a = bq_1 + r_1$, onde $0 \leq r_1 < b$. Portanto: $a = b(-q_1) + (-r_1)$. Se $r_1 = 0$, então $r = 0$ e $q = -q_1$, e obtemos $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. Caso contrário, podemos reescrever: $a = b(-q_1) + (-r_1) = b(-q_1 - 1) + (b - r_1)$. Assim, tomando $q = -q_1 - 1$ e $r = b - r_1$, temos que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$.

(iii) $b < 0 \implies |b| = -b$ e $|b| > 0$

Pelos casos anteriores, existem q_2 e $r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que: $a = |b|q_2 + r_2$, onde $0 \leq r_2 < |b|$. Como $|b| = -b$, obtemos: $a = -bq_2 + r_2$. Logo, $a = b(-q_2) + r_2$. Tomando $q = -q_2$ e $r = r_2$, temos $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$.

Unicidade:

Suponha que existam dois pares de quocientes e restos, q_1, r_1 e q_2, r_2 , tais que: $a = bq_1 + r_1$ com $0 \leq r_1 < |b|$ e $a = bq_2 + r_2$ com $0 \leq r_2 < |b|$. Igualando as duas expressões para a , temos: $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$. Subtraindo ambos os lados da igualdade, obtemos: $bq_1 - bq_2 = r_2 - r_1$, ou, fatorando o termo comum: $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Agora, tomando o valor absoluto de ambos os lados da equação: $|b(q_1 - q_2)| = |r_2 - r_1|$. Como $|b(q_1 - q_2)| = |b||q_1 - q_2|$, temos: $|b||q_1 - q_2| = |r_2 - r_1|$. Por outro lado, como $0 \leq r_1 < |b|$ e $0 \leq r_2 < |b|$, isso implica que: $|r_1 - r_2| < |b|$. Logo, da equação anterior, temos: $|b||q_1 - q_2| = |r_2 - r_1| < |b|$. Dividindo ambos os lados por $|b|$ (lembrando que $|b| > 0$), obtemos: $|q_1 - q_2| < 1$. Como q_1 e q_2 são inteiros, a única possibilidade é que: $|q_1 - q_2| = 0$, ou seja, $q_1 = q_2$. Substituindo $q_1 = q_2$ na equação original, obtemos: $r_1 = r_2$. Portanto, mostramos que $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$, o que prova que os quocientes e restos são únicos.

□

Corolário 2.1.3. *Dados dois números inteiros a e b com $b > 0$, existe um único número inteiro n tal que $nb \leq a < (n+1)b$, onde n é quociente o da divisão de a por b .*

Demonstração. Apresentaremos a seguir a demonstração, começando pela prova de existência e, posteriormente, pela prova de unicidade.

Existência:

Sejam a e b dois inteiros, com $b > 0$. Pela divisão euclidiana, sabemos que existem inteiros q (quociente) e r (resto) tais que: $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. Assim, $bq \leq bq + r \leq a$. Por outro lado, $a = bq + r \leq bq + b < b(q+1)$. Daí $bq \leq a < b(q+1)$. Assim, tome $n = q$, pois $nb \leq a < (n+1)b$ é satisfeito com $n = q$.

Unicidade:

Suponha que existam dois inteiros m e n que satisfazem $nb \leq a < (n+1)b$ e $mb \leq a < (m+1)b$. Isso implica que $nb < (m+1)b$ e $mb < (n+1)b$. Como $b > 0$, podemos dividir cada desigualdade por b e obter: $n < m+1$ e $m < n+1$. Essas desigualdades implicam que $n-1 < m < n+1$, o que significa que o único valor possível para m é $m = n$. Portanto, n é único, o que conclui a demonstração.

□

A seguir, apresentamos alguns exemplos que ilustram a aplicação de alguns resultados apresentados.

Exemplo 2.1.4. Determine o quociente e o resto da divisão de 365 por 7. E o quociente e o resto da divisão de 366 por 7.

Vamos encontrar o quociente e o resto da divisão de 365 por 7. Pela definição de divisão euclidiana, queremos escrever 365 na forma: $365 = 7q + r$, onde $0 \leq r < 7$.

Dividindo 365 por 7, obtemos: $365 \div 7 = 52$ com resto = 1.

Portanto, o quociente é $q = 52$ e o resto é $r = 1$, ou seja: $365 = 7 \times 52 + 1$.

Agora, para o número 366, buscamos escrever: $366 = 7q + r$, onde $0 \leq r < 7$.

Dividindo 366 por 7, obtemos: $366 \div 7 = 52$ com resto = 2.

Assim, o quociente é $q = 52$ e o resto é $r = 2$, o que nos dá: $366 = 7 \times 52 + 2$.

Portanto, os resultados das divisões são:

Para 365: quociente $q = 52$ e resto $r = 1$;

Para 366: quociente $q = 52$ e resto $r = 2$.

Exemplo 2.1.5. Determine os inteiros que, ao serem divididos por 7, deixam um quociente igual ao resto.

Se um número inteiro n deixa o quociente igual ao resto quando dividido por 7, então podemos expressá-lo como: $n = 7q + q$, onde q representa tanto o quociente quanto o resto. Simplificando, temos: $n = 8q$.

Como q é o resto da divisão por 7, ele deve satisfazer a condição $0 \leq q < 7$. Portanto, os possíveis valores de q são: $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Substituindo cada valor de q na equação $n = 8q$, obtemos os possíveis valores de n :

$$n = 8 \cdot 0 = 0, \quad n = 8 \cdot 1 = 8, \quad n = 8 \cdot 2 = 16, \quad n = 8 \cdot 3 = 24,$$

$$n = 8 \cdot 4 = 32, \quad n = 8 \cdot 5 = 40, \quad n = 8 \cdot 6 = 48.$$

Logo, os inteiros que satisfazem a condição são: $n = 0, 8, 16, 24, 32, 40$ e 48 .

Exemplo 2.1.6. Encontre um inteiro que deixa resto 4 na divisão por 5 e resto 7 na divisão por 13.

Um número inteiro n que satisfaz as condições do problema pode ser representado como: $n = 5q_1 + 4$ e $n = 13q_2 + 7$, onde q_1 e q_2 são os quocientes das divisões de n por 5 e 13, respectivamente.

Somando 6 em ambos os lados de cada expressão, obtemos: $n + 6 = 5(q_1 + 2)$ e $n + 6 = 13(q_2 + 1)$.

Isso implica que $n + 6$ é um múltiplo comum de 5 e 13. Como 5 e 13 são números primos entre si, o menor múltiplo comum é dado por $5 \cdot 13 = 65$. Assim, podemos escolher:

$$n + 6 = 65 \quad \Rightarrow \quad n = 65 - 6 = 59.$$

Logo, um número que satisfaz as condições é: $n = 59$.

Dividindo $n = 59$ por 5:

$$59 \div 5 = 11 \text{ com resto } 4.$$

Dividindo $n = 59$ por 13:

$$59 \div 13 = 4 \text{ com resto } 7.$$

Portanto, $n = 59$ atende ambas as condições do problema.

2.2 Aritmética dos Restos

Nesta subseção, abordaremos noções fundamentais de congruência modular. Johann Carl Friedrich Gauss, conhecido por suas contribuições significativas no campo da matemática, publicou, em 1801, um livro que foi fundamental para o avanço da aritmética modular.

Em sua obra *Disquisitiones Arithmeticae* de 1796, Gauss introduziu conceitos da realização de uma aritmética com os restos da divisão euclidiana por um número fixado. Assim, ele é reconhecido como o pioneiro na formulação da abordagem moderna da aritmética modular, que continua sendo amplamente utilizada nos dias de hoje.

Figura 1 – Carl Friedrich Gauss



Fonte: Site Wikipédia, vide (17)

Definição 2.2.1. Sejam a e b inteiros quaisquer e seja $m > 1$ um inteiro positivo. Diz-se que a é **congruente** a b módulo m , representado por $a \equiv b \pmod{m}$, quando m divide a diferença $a - b$. Em outros termos, a é congruente a b módulo m se, e somente se, existe um inteiro k tal que $a - b = km$.

Por exemplo:

- $28 \equiv 18 \pmod{5}$, pois $28 - 18 = 10$ e 5 é divisor de 10.
- $2 \equiv 8 \pmod{6}$, pois $2 - 8 = -6$ e 6 é divisor de -6 .
- $23 \equiv 3 \pmod{5}$, pois $23 - 3 = 20$ e 5 divide 20.
- $10 \equiv -4 \pmod{7}$, pois $10 - (-4) = 10 + 4 = 14$ e 7 divide 14.

Da Definição 2.2.1, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.2. *Dois inteiros a e b são congruentes módulo m se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m .*

Demonstração. Para demonstrar essa proposição, vamos considerar as divisões euclidianas de a e b por m . Pelo Teorema da Divisão Euclidiana, existem inteiros q_1 , q_2 , r_1 e r_2 tais que: $a = mq_1 + r_1$ com $0 \leq r_1 < m$, e $b = mq_2 + r_2$ com $0 \leq r_2 < m$.

Subtraindo as duas expressões, obtemos: $b - a = m(q_2 - q_1) + (r_2 - r_1)$.

Agora, para que $m \mid (a - b)$, é necessário que m divida a diferença $b - a$. Note que a expressão $b - a = m(q_2 - q_1) + (r_2 - r_1)$ contém o termo $m(q_2 - q_1)$, que claramente é divisível por m . Logo, a divisibilidade de $b - a$ por m depende apenas do termo $(r_2 - r_1)$.

Portanto, para que $m \mid (a - b)$, é necessário que o resto da divisão euclidiana de a e b por m seja o mesmo, ou seja, que $r_1 = r_2$. Isso implica que:

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{se, e somente se,} \quad r_1 = r_2.$$

Concluimos, assim, que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m \mid (a - b)$, pois, de acordo com a expressão $b - a = m(q_2 - q_1) + (r_2 - r_1)$, a diferença $r_2 - r_1$ deve ser zero, já que $|r_2 - r_1| < m$, garantindo que a parte não divisível por m seja eliminada.

Assim, m divide $a - b$, o que completa a demonstração. $\square$

Proposição 2.2.3. *Sejam a , b , c , d e m números inteiros, com $m > 0$. Valem as seguintes propriedades da congruência modular:*

- (i) *Para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos $a \equiv a \pmod{m}$.*
- (ii) *Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$.*
- (iii) *Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$.*
- (iv) *Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.*
- (v) *Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $ac \equiv bd \pmod{m}$.*
- (vi) *Se $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, então $a \equiv b \pmod{m}$.*

Demonstração.

- (i) Sabemos que a diferença entre um número inteiro e ele mesmo é zero, ou seja, $a - a = 0$. Como zero é divisível por qualquer número, temos que $m \mid 0$, pois $0 = m \cdot 0$. Isso significa que m divide a diferença $a - a$. Portanto, por definição de congruência, segue que $a \equiv a \pmod{m}$. Assim, mostramos que a congruência modular é reflexiva, pois todo número é congruente a si próprio.

- (ii) Pela hipótese, sabemos que $a \equiv b \pmod{m}$. Isso significa que $m \mid (a - b)$, ou seja, existe um inteiro k tal que $a - b = mk$. Multiplicando essa igualdade por -1 , temos: $b - a = m(-k)$. Como $m \mid (b - a)$, segue que $b \equiv a \pmod{m}$. Logo, mostramos que a relação de congruência é simétrica: se a é congruente a b , então b também é congruente a a .
- (iii) Pela hipótese, sabemos que $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$. Isso significa que $m \mid (a - b)$ e $m \mid (b - c)$, ou seja, existem inteiros k_1 e k_2 tais que: $a - b = mk_1$ e $b - c = mk_2$. Somando as duas igualdades, obtemos: $(a - b) + (b - c) = mk_1 + mk_2$. Simplificando a expressão, temos: $a - c = m(k_1 + k_2)$. Como $a - c$ é um múltiplo de m , segue que $m \mid (a - c)$, o que implica que $a \equiv c \pmod{m}$. Portanto, mostramos que a congruência modular é transitiva: se a é congruente a b e b é congruente a c , então a é congruente a c .
- (iv) Sabemos que $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$. Isso significa que existem inteiros k_1 e k_2 tais que: $a - b = mk_1$ e $c - d = mk_2$. Somando essas duas equações, obtemos: $(a - b) + (c - d) = mk_1 + mk_2$. Reescrevendo a equação, temos: $(a + c) - (b + d) = m(k_1 + k_2)$. Como $(a + c) - (b + d)$ é um múltiplo de m , segue que $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
- (v) Sabemos que $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$. Portanto, existem inteiros k_1 e k_2 tais que: $a - b = mk_1$ e $c - d = mk_2$. Multiplicando a primeira equação por c e a segunda por b , obtemos: $(a - b)c = mk_1c$ e $(c - d)b = mk_2b$. Somando as duas equações, temos: $(ac - bc) + (bc - bd) = mk_1c + mk_2b$. Simplificando, obtemos: $ac - bd = m(k_1c + k_2b)$. Como $ac - bd$ é um múltiplo de m , segue que $ac \equiv bd \pmod{m}$.
- (vi) Sabemos que $a + c \equiv b + c \pmod{m}$. Isso significa que existe um inteiro k tal que: $(a + c) - (b + c) = mk$. Simplificando, temos: $a - b = mk$. Como $a - b$ é um múltiplo de m , segue que $a \equiv b \pmod{m}$.

□

As três primeiras propriedades mencionadas correspondem às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, respectivamente. Essas propriedades indicam que a relação de congruência, definida no conjunto dos inteiros, é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$. As propriedades (iv) e (v) evidenciam que essa relação é compatível com as operações de adição e multiplicação nos inteiros.

Exemplo 2.2.4. Encontre o resto na divisão de $100 \times 101 \times 102$ por 7.

O objetivo é determinar o valor de x , com $0 \leq x < 7$, tal que:

$$100 \times 101 \times 102 \equiv x \pmod{7}.$$

Primeiro, analisamos cada número individualmente módulo 7. Sabemos que:

$$100 = 14 \times 7 + 2 \quad \text{portanto, } 100 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Para 101, temos: $101 = 14 \times 7 + 3$ portanto, $101 \equiv 3 \pmod{7}$.

Para 102, temos: $102 = 14 \times 7 + 4$ portanto, $102 \equiv 4 \pmod{7}$.

Assim, multiplicando as três congruências, obtemos: $100 \times 101 \times 102 \equiv 2 \times 3 \times 4 \pmod{7}$.

Daí, $100 \times 101 \times 102 \equiv 24 \pmod{7}$.

Como, $24 \equiv 3 \pmod{7}$.

Concluimos, por transitividade, que o resto da divisão de $100 \times 101 \times 102$ por 7 é 3.

2.3 Parte Inteira de um Número Real e Função Maior Inteiro

Nesta subseção, abordaremos a parte inteira de um número real e a função maior inteiro, conceitos fundamentais que servem como base para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 2.3.1. A **parte inteira de um número real** x é o maior inteiro $\lfloor x \rfloor$ que não é maior que x , isto é, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz a condição $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Definimos a parte fracionária $\{x\}$ de x por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Por exemplo:

- $\lfloor 5,7 \rfloor = 5$ e $\{x\} = 0,7$
- $\lfloor -2,2 \rfloor = -3$ e $\{x\} = 0,8$
- $\lfloor 8 \rfloor = 8$ e $\{x\} = 0$

A seguir, demonstraremos algumas proposições importantes relacionadas à parte inteira de um número real.

Proposição 2.3.2. *Seja x um número real. Então, existem únicos inteiro $\lfloor x \rfloor$ e $0 \leq \{x\} < 1$, tais que $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. O número $\lfloor x \rfloor$ é chamado de parte inteira de x , e $\{x\}$ é chamado de parte fracionária de x .*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Pela definição de parte inteira de um número real, sabemos que $\lfloor x \rfloor$ é o maior número inteiro que não excede x , ou seja, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Definimos $\{x\}$ como a diferença entre x e $\lfloor x \rfloor$:

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$

Por essa definição, temos que:

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}.$$

Agora, precisamos mostrar que $0 \leq \{x\} < 1$. Sabemos que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, e substituindo $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, obtemos:

$$\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \{x\} < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Subtraindo $\lfloor x \rfloor$ de todos os termos na desigualdade, temos:

$$0 \leq \{x\} < 1.$$

Assim, $\{x\}$ satisfaz a condição $0 \leq \{x\} < 1$. A unicidade de $\lfloor x \rfloor$ e $\{x\}$ segue da definição de parte inteira e da construção de $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, que é única para cada número real x . Portanto, $\lfloor x \rfloor$ e $\{x\}$ são únicos e satisfazem a condição da proposição. $\square$

Proposição 2.3.3. *Se x é um número real e k um número inteiro, então $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.*

Demonstração. Seja x um número real e k um número inteiro. Por definição de parte inteira de um número real, temos que $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que é menor ou igual a x . Assim, podemos escrever:

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Agora, somando k a cada termo desta desigualdade, obtemos:

$$\lfloor x \rfloor + k \leq x + k < \lfloor x \rfloor + k + 1.$$

Note que $\lfloor x \rfloor + k$ é o maior inteiro menor ou igual a $x+k$, de acordo com a definição da função parte inteira. Portanto,

$$\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k.$$

$\square$

Proposição 2.3.4. *$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$ se $x \in \mathbb{Z}$ ou $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$ se $x \notin \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Vamos considerar os dois casos para x : quando $x \in \mathbb{Z}$ e quando $x \notin \mathbb{Z}$.

Suponha que $x \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, x é um número inteiro, então $\lfloor x \rfloor = x$ e $\lfloor -x \rfloor = -x$, pois a função parte inteira de um número inteiro é o próprio número. Assim, temos:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = x + (-x) = 0.$$

Suponha agora que $x \notin \mathbb{Z}$. Isso significa que x é um número real não inteiro, e podemos expressá-lo como $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, onde $\{x\}$ é a parte fracionária de x , satisfazendo $0 < \{x\} < 1$.

Nesse caso, temos: - $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor que x , então $\lfloor x \rfloor$ é estritamente menor que x . - $\lfloor -x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a $-x$. Como $-x$ também não é um inteiro (pois x não é um inteiro), então $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.

Portanto, para $x \notin \mathbb{Z}$, temos:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \lfloor x \rfloor + (-\lfloor x \rfloor - 1) = 0 - 1 = -1.$$

Assim, a proposição está demonstrada. $\square$

Proposição 2.3.5. *Sejam a e c inteiros, com $a > 0$. Então, o valor de $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor$ representa o quociente q da divisão euclidiana de c por a .*

Demonstração. Pelo Corolário 2.1.3 existe um único inteiro n tal que:

$$na \leq c < (n+1)a.$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade por a , obtemos:

$$n \leq \frac{c}{a} < n+1.$$

Logo $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor = n$ e pelo visto no Corolário 2.1.3, temos que $n = q$, ou seja,

$$\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor = q.$$

Portanto, $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor$ é o quociente da divisão de c por a . $\square$

Portanto, de modo geral, para a, c inteiros positivos, com $a < c$, a quantidade de múltiplos não nulos de a menores ou iguais a c é igual ao quociente da divisão de c por a , isto é, à parte inteira $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor$ do número racional $\frac{c}{a}$.

Para contar os múltiplos de a em um intervalo diferente, digamos entre b e c , onde $0 < a < b < c$, seguimos o seguinte raciocínio:

O valor $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor$ representa a quantidade de múltiplos de a entre 1 e c . Subtraindo $\left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor$, que é a quantidade de múltiplos de a anteriores a b , obtemos a quantidade de múltiplos de a no intervalo $[b, c]$.

Assim, o número de múltiplos de a entre b e c é dado por: $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor$.

Concluimos, então, o seguinte resultado:

Proposição 2.3.6. *Dados os inteiros a , b e c tais que $0 < a < b < c$, então o número de múltiplos de a entre b e c é dado por:*

(i) $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor$, se b for incluído no intervalo.

(ii) $\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor$, se b for excluído do intervalo.

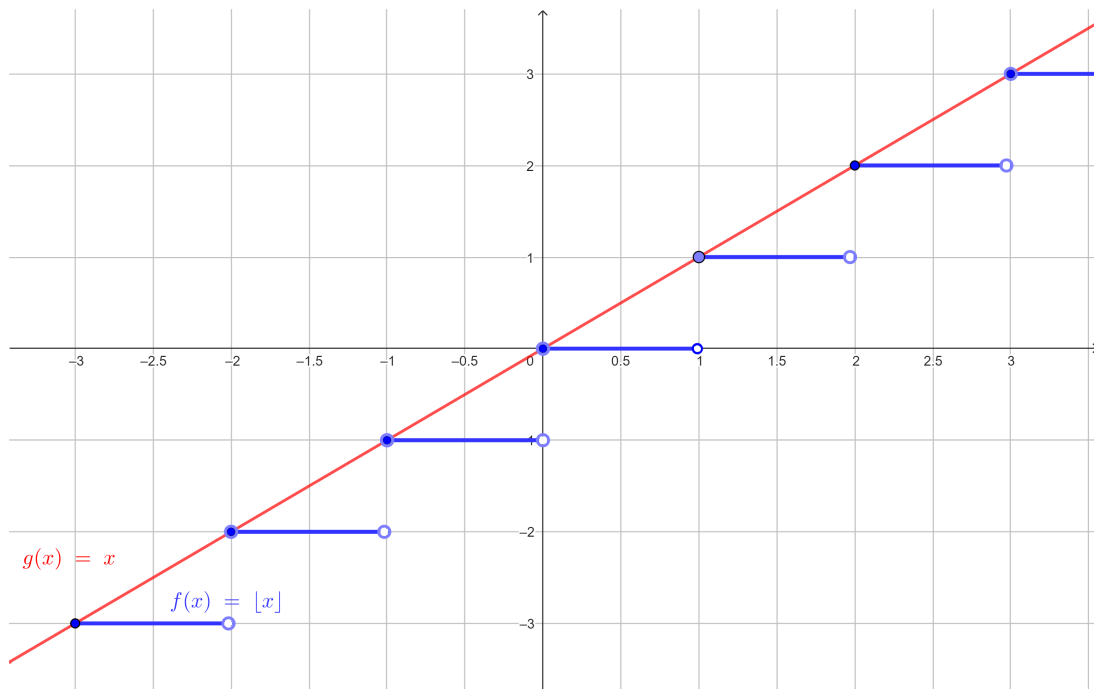
Após definirmos a parte inteira de um número real, podemos estender essa ideia ao conceito de função.

Definição 2.3.7. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é chamada **função maior inteiro** ou **função piso**, e atribui a cada número real x o maior número inteiro que é menor ou igual a x .

Em outras palavras, a função $\lfloor x \rfloor$ “arredonda para baixo”, descartando a parte fracionária de x e retornando o maior inteiro que não excede seu valor.

O gráfico da função maior inteiro $f(x) = \lfloor x \rfloor$ está sempre na interseção ou abaixo do gráfico da função identidade $g(x) = x$, fornecendo um “piso” inteiro para cada valor de x .

Figura 2 – Gráfico das funções $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e $g(x) = x$



Fonte: Autor

A função maior inteiro é amplamente utilizada em matemática discreta, aritmética modular e no contexto de cálculos envolvendo datas, como nas fórmulas de Zeller e de Conway.

Esses conceitos são fundamentais para muitos campos da matemática e ciência da computação, especialmente em algoritmos que lidam com números racionais ou reais, onde a conversão para inteiros é necessária.

Exemplo 2.3.8. Quantos múltiplos de 7 existem entre 343 e 2551?

Utilizando a Proposição 2.3.6, podemos calcular o número de múltiplos de 7 no intervalo $[343, 2551]$.

O menor múltiplo de 7 maior ou igual a 343 é 343, pois 343 já é um múltiplo de 7. O maior múltiplo de 7 menor ou igual a 2551 é 2548.

Como o número 343 é um múltiplo de 7, temos duas possibilidades: incluí-lo ou excluí-lo da contagem.

Incluindo o número 343 na contagem de múltiplos de 7:

Utilizando a Proposição 2.3.6 (i), que considera o intervalo fechado $[343, 2551]$, temos:

$$\left\lfloor \frac{2551}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{343 - 1}{7} \right\rfloor.$$

Assim,

$$364 - 48 = 316.$$

Portanto, existem 316 múltiplos de 7 no intervalo $[343, 2551]$ quando incluímos o número 343 na contagem.

Excluindo o número 343 da contagem de múltiplos de 7.

Pela Proposição 2.3.6 (ii), que considera o intervalo semiaberto $(343, 2551]$, temos:

$$\left\lfloor \frac{2551}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{343}{7} \right\rfloor.$$

Assim,

$$364 - 49 = 315.$$

Portanto, existem 315 múltiplos de 7 no intervalo $(343, 2551]$ quando excluimos o número 343 da contagem.

2.4 Representação de um Número em uma Base

Nesta subseção, exploraremos a representação de um número em uma base, em especial na base decimal. Esses conceitos fundamentais formam a base para o desenvolvimento desse trabalho.

O sistema amplamente adotado pelas pessoas para representar números inteiros é o sistema decimal posicional. Ele recebe o nome de decimal por empregar dez símbolos

distintos, denominados algarismos: nove deles representam os números de 1 a 9, enquanto um símbolo extra corresponde ao número zero ou indica uma posição vazia. Os algarismos utilizados são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

O termo posicional se deve ao fato de que o valor de cada algarismo depende de sua posição no número. À medida que os algarismos se deslocam para a esquerda, seus valores são multiplicados por dez, aumentando de acordo com as potências da base. Cada avanço para a esquerda representa uma multiplicação por 10, aumentando proporcionalmente o valor do número.

A base do sistema refere-se à quantidade de símbolos diferentes utilizados. Por exemplo, os babilônios empregavam um sistema sexagesimal (com base 60). O sistema mais comum na atualidade, no entanto, é o decimal, que possui base 10. O uso da base 10 provavelmente tem origem em uma convenção prática, ligada ao costume de contar usando os dedos das mãos.

O próximo teorema formaliza a existência e unicidade dessa representação para números inteiros em uma base b .

Teorema 2.4.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ com $b > 1$. Então, existe uma única representação de a na base b , isto é, $c = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1b + a_0$, onde $0 \leq a_i < b$ para todos os índices $i = 0, 1, \dots, n$.*

Demonstração. Para $a = 0$, o resultado é trivialmente verdadeiro. Agora, considere $a > 0$ e suponha, por hipótese de indução, que a afirmação é válida para todo número natural c com $0 \leq c < a$. Ou seja, assumimos que c pode ser escrito de maneira única na forma

$$c = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1b + a_0,$$

onde $0 \leq a_i < b$ para todos os índices $i = 0, 1, \dots, n$.

Nosso objetivo é provar que a mesma afirmação vale para o número a .

Pelo Teorema 2.1.2, existem naturais únicos $q \geq 0$ e r , com $0 \leq r < b$, tais que

$$a = qb + r.$$

Se $q = 0$, então $a = r$, e nesse caso a já está em sua representação na base b . Se $q > 0$ e $b \geq 2$, temos que

$$a = qb + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < b.$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, sabemos que q possui uma representação única na base b , de modo que podemos escrever

$$q = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1b + a_0.$$

Assim, substituindo q em termos de b , obtemos

$$a = qb + r = a_n b^{n+1} + a_{n-1} b^n + \cdots + a_1 b^2 + a_0 b + r,$$

onde $0 \leq r < b$.

Portanto, construímos uma representação de a na base b . A unicidade dessa representação decorre da unicidade dos quocientes e restos garantida pelo Teorema 2.1.2, junto com a unicidade da representação de q na base b (hipótese de indução). $\square$

A representação apresentada no Teorema 2.4.1 é conhecida como expansão em relação à base b . Quando $b = 10$, essa representação é denominada expansão decimal.

Apresentamos a seguir um algoritmo para obter a expansão de um número qualquer na base b (6).

Seja $b \geq 2$ um número inteiro. Para obtermos a representação geral de um número na base b , consideremos um número $a \geq 0$. Queremos determinar os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ tais que:

$$a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0,$$

onde $0 \leq a_i < b$ para todo $i = 0, \dots, n$. Colocando b em evidência, obtemos:

$$a = (a_n b^{n-2} + \cdots + a_2 b + a_1) b + a_0.$$

Pela unicidade do quociente e do resto na divisão euclidiana, temos que a_0 e $q_0 = a_n b^{n-1} + \cdots + a_2 b + a_1$ são, respectivamente, o resto e o quociente da divisão de a por b . Como:

$$q_0 = (a_n b^{n-1} + \cdots + a_2 b) b + a_1,$$

temos, que a_1 e $q_1 = a_n b^{n-2} + \cdots + a_2$ são, respectivamente, o resto e o quociente da divisão de q_0 por b . Repetindo esse processo, determinamos todos os coeficientes a_i :

$$\begin{aligned} a &= q_0 b + a_0, & 0 \leq a_0 < b, \\ q_0 &= q_1 b + a_1, & 0 \leq a_1 < b, \\ &\vdots \\ q_{n-1} &= 0 \cdot b + a_n, & 0 \leq a_n < b. \end{aligned}$$

Supondo que q_{n-1} seja o último quociente não nulo, concluímos que, como os quocientes vão decrescendo, em algum momento teremos $q_n = 0$.

Assim, a representação de a na base b é dada por $(a_n a_{n-1} \dots a_0)_b$.

O algoritmo descrito permite obter a representação de qualquer número natural em uma base arbitrária. Embora existam várias bases de numeração, neste trabalho focaremos no sistema decimal (base 10).

Para a base 10, essa representação assume a forma de uma sequência de algarismos de 0 a 9, multiplicados por potências de 10. Por exemplo, para representar o número $a = 12019$ na base 10, temos:

$$a = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0,$$

onde cada coeficiente c_i corresponde a um algarismo decimal do número, e as potências de 10 refletem a posição de cada algarismo.

Exemplo 2.4.2. Mostre que o algarismo das unidades de um quadrado perfeito, isto é, um número da forma n^2 , onde n é um número natural, só pode ser 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

Consideremos que qualquer número natural n pode ser escrito na forma $10B + A$, onde B é um número natural e A é o algarismo das unidades de n . Se n é um quadrado perfeito, então ele é o quadrado de algum número natural, ou seja, $m = n^2$.

Calculando n^2 , temos:

$$n^2 = (10B + A)^2 = 100B^2 + 20AB + A^2.$$

Note que os dois primeiros termos da soma, $100B^2 + 20AB$, são múltiplos de 10, o que significa que eles não influenciam no algarismo das unidades de n^2 . Assim, o algarismo das unidades de n^2 será igual ao algarismo das unidades de A^2 .

Como A é o algarismo das unidades de n , ele pode assumir apenas os valores 0, 1, 2, ..., 9. Calculamos agora os quadrados de cada um desses valores:

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16 \text{ (unidade 6)},$$

$$5^2 = 25 \text{ (unidade 5)}, \quad 6^2 = 36 \text{ (unidade 6)}, \quad 7^2 = 49 \text{ (unidade 9)},$$

$$8^2 = 64 \text{ (unidade 4)}, \quad 9^2 = 81 \text{ (unidade 1)}.$$

Assim, os possíveis algarismos das unidades de n^2 são: 0, 1, 4, 5, 6 ou 9. Esses são os únicos valores possíveis para o algarismo das unidades de um quadrado perfeito.

3 DATAS E DIAS

3.1 Breve histórico dos Calendários Juliano e Gregoriano

O objetivo desta seção é apresentar um breve histórico dos Calendários Juliano e Gregoriano. O aprofundamento desse histórico pode ser encontrada em (1), (2), (12), (13), (15) e (16).

O calendário é um instrumento fundamental para estruturar e organizar o tempo, fragmentando-o em unidades, como dias, semanas, meses e anos. Tem um papel essencial no planejamento e na coordenação das atividades, tanto no contexto pessoal quanto profissional. Além disso, é utilizado para registrar e destacar datas importantes, incluindo feriados, eventos e prazos. Através do calendário, é possível observar e acompanhar o cronograma de tarefas e compromissos, facilitando a gestão do tempo e a organização da rotina. Dessa forma, o calendário representa uma maneira eficaz de supervisionar e planejar as atividades ao longo do ano, contribuindo para a otimização do tempo e o cumprimento de prazos e objetivos.

Existem diversos tipos de calendários, cada um com suas características e propósitos específicos. O Calendário Lunar, por exemplo, é fundamentado nas fases da Lua e compreende doze meses lunares, totalizando aproximadamente 354 dias anualmente. Os calendários islâmico e hebraico são exemplos de calendários lunares. Por outro lado, o Calendário Solar baseia-se nas estações do ano e no ciclo solar, sendo o calendário Gregoriano um exemplo desse tipo de calendário. O Calendário Lunar-Solar, por sua vez, integra elementos tanto do calendário lunar quanto do calendário solar, procurando ajustar os ciclos lunares com as estações do ano. Como exemplo, temos o calendário chinês. Diversas religiões têm seus próprios calendários, que podem ser lunares, solares ou uma combinação de ambos. Como exemplo, temos o calendário islâmico, o calendário judaico e o calendário hindu, que se enquadram nessa categoria. Além dos calendários religiosos, muitos países adotam calendários civis distintos do calendário Gregoriano, variando em termos de nomenclatura de meses, início do ano e outros aspectos. O calendário chinês e o calendário islâmico são exemplos disso. Esses exemplos destacam a diversidade de sistemas de medição do tempo ao redor do mundo, cada um refletindo as necessidades culturais, religiosas e práticas das comunidades que os utilizam.

O Calendário Juliano foi instituído por Júlio César em 45 a.C., como uma reforma do calendário romano anterior. Ele substituiu o calendário romano lunar, que estava fora de sincronia com as estações do ano e criava confusão na marcação dos dias e meses. O calendário juliano era baseado no ano solar, dividido em doze meses, com um total de 365

dias e um dia extra a cada quatro anos, o que se tornou conhecido como o ano bissexto.

Figura 3 – Júlio César (100 a.C - 44 a.C)



Fonte: Site Gestão Educacional, vide (16)

A reforma de Júlio César foi realizada com a ajuda do astrônomo egípcio Sosígenes e entrou em vigor no ano seguinte, conhecido como o ano 709 na contagem romana. Este calendário tinha um ano médio de 365,25 dias, o qual é muito próximo da duração real do ano tropical (o tempo que a Terra leva para completar uma órbita ao redor do sol), que é de cerca de 365,2425 dias.

Embora o calendário Juliano tenha sido uma melhoria significativa em relação ao calendário romano anterior, ainda tinha uma pequena discrepância em relação ao ano solar real, pois a diferença de cerca de 11 minutos e 14 segundos por ano acabou causando uma defasagem ao longo do tempo. Isso levou à introdução de um sistema de anos bissextos regulares, no qual um dia extra seria adicionado ao mês de fevereiro a cada quatro anos.

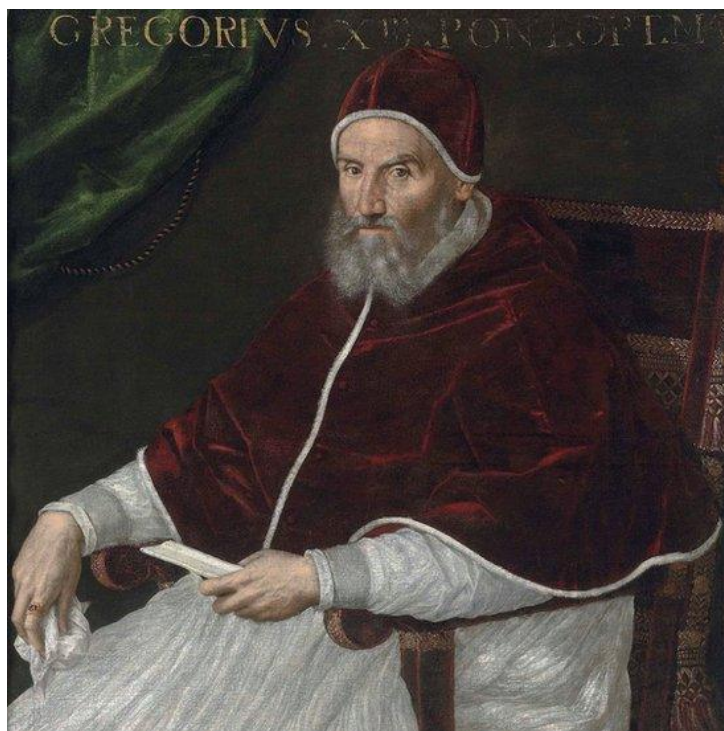
No entanto, essa correção não era completamente precisa. A diferença de aproximadamente 0,0078 dias por ano entre o ano juliano e o ano tropical significava que o calendário Juliano estava ficando gradualmente desalinhado com as estações. Ao longo

dos séculos, essa diferença acumulou-se, levando a um descompasso significativo entre o calendário e as estações do ano.

Essa discrepância entre o calendário Juliano e o ano solar foi finalmente abordada em 1582, quando o Papa Gregório XIII introduziu o Calendário Gregoriano. Esta reforma eliminou a acumulação de dias extras e introduziu um sistema mais preciso para ajustar o calendário aos ciclos solares. Assim, o Calendário Gregoriano ficou sendo o calendário atualmente utilizado pela maioria dos países do mundo.

Uma das principais mudanças feitas pelo Calendário Gregoriano, em relação ao Calendário Juliano, foi a maneira como os anos bissextos eram calculados. Enquanto o Calendário Juliano adicionava um dia extra a cada quatro anos, o Calendário Gregoriano mantinha esse padrão na maioria dos casos, mas com uma exceção: os anos múltiplos de 100 (como 1700, 1800, 1900, etc.) não são bissextos, a menos que sejam divisíveis por 400 (como 1600, 2000, 2400, etc.). Essa correção ajudou a ajustar o calendário para compensar a diferença entre o ano solar e o ano civil, garantindo maior precisão.

Figura 4 – Papa Gregório XIII (1502 - 1585)



Fonte: Site BBC Brasil, vide [\(12\)](#)

Além disso, o Calendário Gregoriano introduziu um ajuste no calendário para compensar o acúmulo de dias extras que haviam se acumulado ao longo dos séculos com o uso do Calendário Juliano. Para corrigir essa discrepância, dez dias foram omitidos do calendário após 4 de outubro de 1582, fazendo com que o dia seguinte fosse 15 de outubro de 1582.

Essas mudanças fizeram do Calendário Gregoriano um sistema muito mais preciso para acompanhar as estações do ano e os eventos astronômicos. Ele é amplamente adotado em todo o mundo para fins civis, comerciais e religiosos. No entanto, em alguns contextos religiosos ou culturais específicos, outros calendários ainda são usados em paralelo com o Calendário Gregoriano.

Os britânicos, por exemplo, não aceitaram o sistema Gregoriano até 1752, quando 11 dias foram apagados, e os russos não o aceitaram até 1918, quando 13 dias foram apagados (assim, os russos chamaram a sua revolução de 1917 de Revolução de Outubro, embora tenha ocorrido em novembro do calendário Gregoriano).

Fazendo uma comparação, pelo Calendário Gregoriano, o número verdadeiro de dias em 400 anos é de $400 \times 365,2422 = 146.096,88$ dias (eliminaram-se 3 anos bissextos deste período). Enquanto nesse período, o Calendário Juliano teve $400 \times 365 + 100 = 146.100$ dias. Assim, o calendário Juliano ganha cerca de 3,12 dias a cada 400 anos, enquanto o calendário Gregoriano ganha apenas 0,12 dias (cerca de 2 horas e 53 minutos).

O calendário Juliano acumula aproximadamente um dia extra a cada 128 anos, pois contam-se a mais 13 dias nesse período (para $13 \times 128 = 1662$), mas o ajuste de 13 dias não foi feito diretamente por causa dessa acumulação. A razão para a correção de 13 dias no calendário Juliano para o calendário Gregoriano está relacionada à tentativa de realinhar o calendário com os eventos astronômicos, como o equinócio vernal.

3.2 Fórmula de Zeller

Nesta seção, iremos apresentar passo a passo a construção da fórmula de Zeller para determinar o dia da semana associado a uma data específica do calendário Gregoriano, seja ela no passado ou no futuro. Julius Christian Johannes Zeller (1822 – 1899), matemático alemão conhecido por suas contribuições à teoria dos calendários, desenvolveu uma fórmula que permite calcular o dia da semana para qualquer data. A formulação e os fundamentos matemáticos dessa abordagem podem ser encontrados em (1), (2), (3) e (7).

Com o intuito de simplificar a elaboração da fórmula, proporemos algumas convenções que serão fundamentais.

Vamos utilizar 0000 como ano inicial de referência, embora não exista o ano zero. Assim, representaremos uma data por (d, m, A) , onde d representa o dia, m o mês e A o ano.

Definição 3.2.1. Um ano é chamado **comum** se possui 365 dias. Quando contém um dia extra, totalizando 366 dias, é chamado de **bissexto**.

O mês será representado por um número inteiro entre 1 e 12, correspondendo aos meses do ano. Devido à irregularidade dos anos bissextos, que têm 366 dias, um dia a mais

que os anos comuns de 365 dias, fevereiro pode ter 28 ou 29 dias. Portanto, colocaremos fevereiro no final da contagem dos meses: março será o mês 1, abril será o mês 2, e assim por diante, até janeiro e fevereiro, que serão os meses 11 e 12 do ano anterior (Tabela 1).

Tabela 1 – Atribuição de números aos meses do ano

Mês	Número	Mês	Número
Março	1	Setembro	7
Abril	2	Outubro	8
Maior	3	Novembro	9
Junho	4	Dezembro	10
Julho	5	Janeiro	11
Agosto	6	Fevereiro	12

Dessa maneira, a data 18 de janeiro de 1932 será representada por (18, 11, 1931) e 11 de fevereiro de 2012 por (11, 12, 2011).

Atribuiremos um número a cada dia da semana. Os dias da semana serão representados por números de 0 a 6, sendo 0 para domingo, 1 para segunda-feira, 2 para terça-feira, e assim sucessivamente até 6 para sábado. (Tabela 2).

Tabela 2 – Atribuição de números aos dias da semana

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
0	1	2	3	4	5	6

Como os dias da semana se repetem em ciclos de 7 dias, vamos considerar o número a atribuído aos dias da semana módulo 7. Isso significa que, se um determinado dia é representado pelo número a , então, somando um número de dias n , o dia resultante pode ser calculado por $a + n \pmod{7}$.

Por exemplo, suponha que $a = 3$, que representa quarta-feira, se desejamos saber o dia da semana 10 dias após, calculamos: $3 + 10 = 13 \equiv 6 \pmod{7}$, o que nos leva ao número 6, representando sábado. Assim, concluímos que 10 dias após uma quarta-feira será um sábado.

Um outro ponto essencial é compreendermos o que caracteriza um ano bissexto. Um ano é bissexto se for divisível por 4, exceto no caso dos anos centenários (divisíveis por 100). Para que um ano centenário seja bissexto, ele também deve ser divisível por 400. Por exemplo, o ano 2000 é bissexto porque é divisível por 4, por 100 e por 400. Em contraste, o ano 1700, embora divisível por 4 e por 100, não é divisível por 400 e, portanto, não é bissexto.

Para determinar o avanço do dia da semana entre anos consecutivos, precisamos compreender como a passagem de um ano comum ou bissexto afeta o dia da semana

correspondente a uma data fixa. Esse comportamento é formalizado no Lema 3.2.2 a seguir, que estabelece a relação entre o dia da semana de uma data em um ano e a mesma data no ano subsequente.

Lema 3.2.2. *Seja a o dia da semana em que caiu a data (d, m, A) . Se A é um ano comum, então a mesma data $(d, m, A + 1)$ cairá no dia da semana $a + 1$. Se A é um ano bissexto, a data $(d, m, A + 1)$ cairá no dia da semana $a + 2$.*

Demonstração. Se A for comum, entre as datas (d, m, A) e $(d, m, A + 1)$, há 365 dias, o que corresponde a 52 semanas completas e 1 dia adicional, resultando no avanço do dia da semana em uma unidade.

Se A for um ano bissexto, o mês de fevereiro possui um dia a mais. Assim, entre as datas (d, m, A) e $(d, m, A + 1)$, há 366 dias, o que corresponde a 52 semanas completas e 2 dias extras, resultando em um avanço de dois dias na semana.

□

Em termos de congruência, se A é um ano comum, então há um avanço de exatamente um dia da semana entre (d, m, A) e $(d, m, A + 1)$. Logo, o dia da semana de $(d, m, A + 1)$ será dado por $a + 1 \pmod{7}$.

Por outro lado, se A é um ano bissexto, há um avanço de dois dias da semana, o que implica que $(d, m, A + 1)$ ocorrerá no dia $a + 2 \pmod{7}$.

Esse Lema nos permite entender como a contagem de dias se ajusta entre anos comuns e bissextos, sendo uma etapa fundamental para a construção da fórmula.

Exemplo 3.2.3. Explique por que todo ano possui pelo menos uma sexta-feira 13 e não mais do que três sextas-feiras 13.

Seja a o dia da semana que cairá o dia 13 de janeiro de um determinado ano. Os valores possíveis para a são $0, 1, 2, \dots, 6$, onde 0 representa domingo, 1 segunda, e assim por diante.

Primeiro, suponhamos que o ano não seja bissexto. Nesse caso, janeiro possui 31 dias, ou seja, $31 = 7 \times 4 + 3$, o que faz o dia da semana avançar 3 unidades. Assim, o dia da semana que cairá o dia 13 de fevereiro será $a + 3$. Como fevereiro possui exatamente 28 dias ($28 = 7 \times 4$), o dia 13 de março cairá no mesmo dia de 13 de fevereiro, ou seja, $a + 3$. Continuando dessa forma para os meses subsequentes, obtemos o dia da semana que caiu o dia 13 de cada mês em função de a .

$$a, a + 3, a + 3, a + 6, a + 1, a + 4, a + 6, a + 2, a + 5, a + 3, a + 5, a.$$

Independentemente do valor de a , algum número nessa lista deixará resto 5 quando dividido por 7, ou seja, será uma sexta-feira 13. Isso ocorre porque a lista cobre todas as

possibilidades de restos módulo 7 ao longo do ano.

Por outro lado, como o termo $a + 3$ aparece três vezes na lista acima, se $a = 2$, o ano terá três sextas-feiras 13. Esse caso específico ocorre quando o dia 13 de janeiro é uma terça-feira (pois $a = 2$).

Agora, consideremos um ano bissexto. Nesse caso, fevereiro possui 29 dias, o que altera o dia da semana que caiu o dia 13 de cada mês. A lista dos códigos ao longo do ano será:

$$a, a + 3, a + 4, a, a + 2, a + 5, a, a + 3, a + 6, a + 1, a + 4, a + 6.$$

Novamente, para qualquer valor de a , um dos números nessa lista deixará resto 5 quando dividido por 7, garantindo pelo menos uma sexta-feira 13 no ano.

Por fim, se o dia 13 de janeiro for uma sexta-feira ($a = 5$), o ano terá três sextas-feiras 13, que ocorrerão em janeiro, abril e julho. Isso conclui que todo ano tem ao menos uma sexta-feira 13 e, no máximo, três.

Vamos encontrar uma fórmula para calcular a quantidade de anos bissextos desde o ano 0000 até um determinado ano A . Assim, seja A um ano, onde $A > 0000$. Denotaremos por B o número de anos bissextos no intervalo do ano 0000 até o ano A . Para calcular o número de anos bissextos até um ano específico, consideramos anos múltiplos de 4, excluimos os múltiplos de 100, e incluímos os múltiplos de 400.

Portanto, o primeiro passo é contar todos os anos divisíveis por 4 desde o ano 0000 até o ano A , o que é dado pela expressão $\left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor$. Contudo, anos múltiplos de 100, como 1700 e 1800, não são bissextos, a menos que também sejam múltiplos de 400. Para corrigir isso, subtraímos os anos múltiplos de 100, que são contados por $\left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor$. Finalmente, anos que são múltiplos de 400, como 1600 e 2000, são exceções: mesmo sendo múltiplos de 100, eles ainda são bissextos. Para reincluir esses anos, somamos novamente $\left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor$, garantindo que esses anos sejam contados corretamente como bissextos.

Assim, a fórmula:

$$B = \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor, \quad (3.1)$$

representa o número total de anos bissextos desde o ano 0000 até o ano A , levando em conta todas essas condições.

Para ilustrar o uso da fórmula 3.1, consideremos o exemplo de encontrar o número de anos bissextos entre os anos 0000 e 1982.

Exemplo 3.2.4. Quantos anos bissextos há entre os anos 0000 e 1982?

De fato, para encontrarmos o número de anos bissextos entre os anos 0000 e 1982, podemos contar quantos anos são divisíveis por 4, excluindo os anos que são divisíveis por

100, a menos que sejam divisíveis por 400. Isso nos dará o número de anos bissextos nesse intervalo.

$$B = \left\lfloor \frac{1982}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1982}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1982}{400} \right\rfloor = 495 - 19 + 4 = 480$$

Para encontrar uma fórmula que determine o dia da semana que caiu qualquer data (d, m, A) , vamos dividir o processo em etapas. Primeiro, vamos desenvolver uma fórmula para identificar o dia da semana de 1º de março em um ano A qualquer. Em seguida, criaremos uma fórmula para encontrar o dia da semana do primeiro dia de qualquer mês m no ano A . Por fim, estabeleceremos uma fórmula geral que permita calcular o dia da semana para qualquer data (d, m, A) .

Agora iremos deduzir uma fórmula que fornece o dia da semana em que caiu o dia primeiro de março de um ano A qualquer.

Seja a o dia da semana de primeiro de março de 0000, o qual iremos determinar posteriormente. Assim, como atribuímos um número para cada dia da semana, primeiro de março de 0000 $(1, 1, 0000)$, é algum número entre $0 \leq a \leq 6$.

Pelo Lema 3.2.2, o dia da semana de uma data específica avança um dia para anos comuns e dois dias para anos bissextos. Assim, no próximo ano 0001, primeiro de março ocorrerá após 365 dias, e um ano comum tem 52 semanas completas mais um dia adicional. Assim, como $365 \equiv 52 \times 7 + 1 \equiv 1 \pmod{7}$, segue que o dia primeiro de março de 0001 ocorrerá em um dia da semana posterior ao dia que ocorreu a , ou seja, $a + 1 \pmod{7}$. Analogamente, o mesmo argumento nos mostra que o dia primeiro de março do ano 0002, ocorrerá no dia $a + 2 \pmod{7}$, e que o dia primeiro de março do ano 0003 ocorrerá no dia $a + 3 \pmod{7}$.

Para calcular o dia da semana que caiu o dia primeiro de março do ano 0004, devemos observar que o mês de fevereiro do ano 0004, contado como mês 12 do ano anterior, tem 29 dias, logo a passagem de primeiro de março de 0003 para primeiro de março de 0004 ocorrerá após 366 dias, e um ano bissexto tem 52 semanas completas mais dois dias adicionais. Assim, $366 \equiv 52 \times 7 + 2 \equiv 2 \pmod{7}$, temos que a data $(1, 1, 0004)$ ocorrerá no dia $a + 3 + 2 \equiv a + 5 \pmod{7}$.

Denotaremos por $S_{(d,m,A)}$ o dia da semana que caiu o dia d , mês m , no ano A .

Assim, para determinarmos o dia da semana $S_{(1,1,A)}$ que caiu a data $(1, 1, A)$, devemos somar ao dia da semana da data $(1, 1, 0000)$, que denotamos por a , os anos A passados mais a quantidade de anos bissextos entre os anos 0000 e A .

$$S_{(1, 1, A)} \equiv a + A + B \pmod{7}. \quad (3.2)$$

Substituindo B (3.1) em (3.2), chegamos a uma relação entre o dia da semana em que ocorreu a data $(1, 1, 000)$ e o dia da semana que ocorreu a data $(1, 1, A)$.

$$S_{(1, 1, A)} \equiv a + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \pmod{7}. \quad (3.3)$$

Para determinar em que dia da semana a , que caiu a data (1,1,0000), utilizaremos como referência o dia da semana de uma data conhecida em (3.3). Verificamos que o primeiro dia de março de 2024 foi numa sexta-feira, logo $S_{(1, 1, 2024)} = 5$.

Por (3.3), temos que:

$$S_{(1, 1, 2024)} \equiv a + 2024 + \left\lfloor \frac{2024}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2024}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{400} \right\rfloor \pmod{7}.$$

Como $S_{(1, 1, 2024)} = 5$, temos:

$$5 \equiv a + 2515 \pmod{7}.$$

Sendo $2515 \equiv 2 \pmod{7}$, obtemos:

$$a + 2 \equiv 5 \pmod{7}.$$

Logo,

$$a \equiv 3 \pmod{7}. \quad (3.4)$$

Portanto, 1º de março de 0000 foi uma quarta-feira (3).

A congruência (3.4) diz que $a = 3$. Então, usando a fórmula (3.3), temos a proposição a seguir:

Proposição 3.2.5. *Tem-se que o dia da semana de primeiro de março de um ano A é dado por:*

$$S_{(1, 1, A)} \equiv 3 + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \pmod{7}.$$

Com essa proposição, conseguimos determinar o dia da semana de primeiro de março para qualquer ano A , um elemento chave para desenvolver a fórmula completa para qualquer data.

Para ilustrar a aplicação da fórmula deduzida na Proposição 3.2.5, vamos calcular o dia da semana correspondente ao 1º de março em uma data histórica e na mesma data em um ano futuro. Isso nos permitirá observar como a fórmula se comporta ao longo do tempo, demonstrando sua precisão tanto para datas passadas quanto futuras.

Exemplo 3.2.6. Fundada em 1565, o aniversário da Cidade do Rio de Janeiro é comemorado no dia 1º de março.

- (a) Descubra em qual dia da semana foi comemorado o aniversário da Cidade do Rio de Janeiro no ano de 2001.

O aniversário da Cidade do Rio de Janeiro foi comemorado no dia (1/3/2001). Logo, queremos determinar $S_{(1, 1, 2001)}$. Pela Proposição 3.2.5, segue que:

$$\begin{aligned} S_{(1, 1, 2001)} &\equiv 3 + 2001 + \left\lfloor \frac{2001}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2001}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{400} \right\rfloor \\ &\equiv 3 + 2001 + 500 - 20 + 5 \\ &\equiv 2489 \\ &\equiv 355 \times 7 + 4 \\ &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned}$$

Portanto, 1º de março de 2001 foi uma quinta-feira (4).

- (b) Em que dia da semana será comemorado o aniversário da Cidade do Rio de Janeiro em 2030?

Queremos descobrir em que dia da semana cairá a data (1/3/2030). Logo, determinaremos $S_{(1, 1, 2030)}$. Pela Proposição 3.2.5, segue que:

$$\begin{aligned} S_{(1, 1, 2030)} &\equiv 3 + 2030 + \left\lfloor \frac{2030}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2030}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2030}{400} \right\rfloor \\ &\equiv 3 + 2030 + 507 - 20 + 5 \\ &\equiv 2525 \\ &\equiv 360 \times 7 + 5 \\ &\equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

Portanto, 1º de março de 2030 será numa sexta-feira (5).

Nós vimos como determinar o dia da semana em que caiu o dia primeiro de março de um ano A qualquer. Agora vamos calcular o dia da semana para o primeiro dia de cada mês. Lembre-se de que todos os meses, exceto fevereiro, têm 30 ou 31 dias. Isso significa que esses meses consistem em 4 semanas completas mais 2 dias adicionais (para meses de 30 dias) ou 4 semanas completas mais 3 dias adicionais (para meses de 31 dias). Assim, como $30 \equiv 2 \pmod{7}$ e $31 \equiv 3 \pmod{7}$, isto quer dizer que, para passarmos de um mês para o seguinte teremos que adicionar 2 ou 3 ao dia da semana de primeiro de março do ano 0000 determinado em (3.4), quarta-feira (3).

Como estabelecido antes, que quarta-feira (3) foi o dia da semana de primeiro de março do ano 0000, e sabendo que de março para abril há uma diferença de 31 dias, adicionamos 3, ou seja, $3 + 31 \equiv 3 + 3 \equiv 6 \pmod{7}$. Em seguida, de abril para maio, com uma diferença de 30 dias, adicionamos 2, isto é, $6 + 30 \equiv 6 + 2 \equiv 1 \pmod{7}$. Raciocinando assim, podemos determinar os dias da semana em que caiu o primeiro dia de cada mês do ano 0000. Na tabela (3), indicamos o dia da semana que caiu o primeiro dia de cada mês do ano 0000.

Tabela 3 – Dia da semana em que caiu o primeiro dia de cada mês do ano 0000

m	Meses	Dias Acrescidos (mod 7)	mod 7
1	1º Março	0	3
2	1º Março para 1º Abril	+3	6
3	1º Abril para 1º Maio	+2	1
4	1º Maio para 1º Junho	+3	4
5	1º Junho para 1º Julho	+2	6
6	1º Julho para 1º Agosto	+3	2
7	1º Agosto para 1º Setembro	+3	5
8	1º Setembro para 1º Outubro	+2	0
9	1º Outubro para 1º Novembro	+3	3
10	1º Novembro para 1º Dezembro	+2	5
11	1º Dezembro para 1º Janeiro	+3	1
12	1º Janeiro para 1º Fevereiro	+3	4

Vamos denotar por G a expressão:

$$G = A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor. \quad (3.5)$$

Ao utilizar essa notação, vamos evitar a repetição da fórmula completa ao longo do texto.

Na Tabela 3, vimos como obter o dia da semana de $(1, m, 0000)$ a partir do dia da semana em que caiu $(1, 1, 0000)$. Agora se raciocinarmos do mesmo modo que fizemos para obter a Proposição 3.2.5, podemos deduzir uma fórmula para determinar $S_{(1,m,A)}$.

Se denotarmos por $j(m) + 1$ o dia da semana em que caiu o dia $(1, m, A)$, temos que:

$$S_{(1,m,A)} \equiv 1 + j(m) + G \pmod{7}. \quad (3.6)$$

onde $j(m) = 2, 5, 0, 3, 5, 1, 4, 6, 2, 4, 0, 3$ para $m = 1, 2, \dots, 12$ respectivamente.

Para ilustrar, vamos calcular o dia da semana correspondente ao 1º de julho de 1984.

Exemplo 3.2.7. Determinar o dia da semana de 1º de julho de 1984, que representamos por $S_{(1,5,1984)}$.

Queremos descobrir em que dia da semana caiu a data $(1/7/1984)$. Logo, queremos determinar $S_{(1, 5, 1984)}$. Como $j(5) = 5$, por 3.6, segue que:

$$\begin{aligned}
S_{(1,5,1984)} &\equiv 1 + 5 + 1984 + \left\lfloor \frac{1984}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1984}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1984}{400} \right\rfloor \\
&\equiv 6 + 1984 + 496 - 19 + 4 \\
&\equiv 1984 + 496 - 19 + 4 \\
&\equiv 2471 \\
&\equiv 353 \times 7 \\
&\equiv 0 \pmod{7}
\end{aligned}$$

Portanto, 1º de julho de 1984 foi um domingo (0).

Assim, a congruência 3.7 permite calcular o dia da semana correspondente ao primeiro dia do mês m do ano A .

$$S_{(1, m, A)} \equiv 1 + j(m) + G \pmod{7}. \quad (3.7)$$

Para calcular o dia da semana correspondente ao segundo dia de um mês, adicionamos 1 ao resultado obtido pela congruência 3.7.

$$S_{(2, m, A)} \equiv S_{(1, m, A)} + 1 \pmod{7}$$

Utilizando um raciocínio análogo, segue que:

$$\begin{aligned}
S_{(3, m, A)} &\equiv S_{(2, m, A)} + 1 \pmod{7}, & \text{(para o 3º dia)} \\
S_{(4, m, A)} &\equiv S_{(3, m, A)} + 1 \pmod{7}, & \text{(para o 4º dia)} \\
S_{(5, m, A)} &\equiv S_{(4, m, A)} + 1 \pmod{7}, & \text{(para o 5º dia)}
\end{aligned}$$

De forma recursiva, podemos generalizar para o dia d :

$$S_{(d, m, A)} \equiv S_{(d-1, m, A)} + 1 \pmod{7} \quad (3.8)$$

Concluimos que:

$$S_{(d, m, A)} \equiv (d - 1) + j(m) + G + 1 \equiv d + j(m) + G \pmod{7} \quad (3.9)$$

Provamos, assim, a Proposição 3.2.8 a seguir.

Proposição 3.2.8. *O dia da semana $S_{(d,m,A)}$, correspondente ao dia d , do mês m , ano A é dado por:*

$$S_{(d, m, A)} \equiv d + j(m) + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \pmod{7}, \quad (3.10)$$

onde $j(m) = 2, 5, 0, 3, 5, 1, 4, 6, 2, 4, 0, 3$ para $m = 1, 2, \dots, 12$ respectivamente.

Uma forma de memorizar é utilizar uma frase com palavras que contenham o mesmo número de letras $j(m)$.

Para facilitar a memorização dos valores, existe uma frase em inglês que ajuda a lembrar a sequência desejada:

My Uncle Charles has eaten a cold supper; he eats nothing hot.
 2 5 7 $\equiv$ 0 3 5 1 4 6 2 4 7 $\equiv$ 0 3

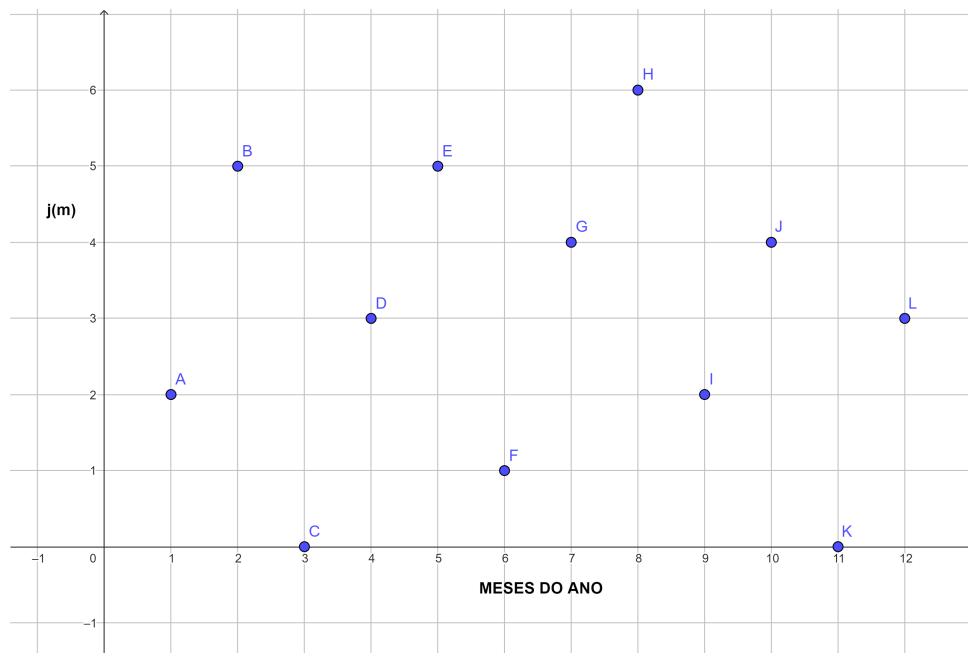
Para quem prefere uma frase em português, propomos a seguinte alternativa:

Na feira comprei uma manga e dois caquis. Eu comi cerejas deliciosas.
 2 5 7 $\equiv$ 0 3 5 1 4 6 2 4 7 $\equiv$ 0 3 $\equiv$ 10

Porém, a maneira como $j(m)$ é apresentada pode ser difícil de lembrar. Portanto, vamos buscar uma forma mais intuitiva para entender o significado de $j(m)$. E, para isso, desenvolveremos um método para encontrar uma função que represente $j(m)$ em termos dos meses do ano. Existe uma fórmula prática em termos de $m = 1, 2, 3, \dots, 12$ que produz esses valores em módulo 7.

Com esse objetivo, representamos no plano cartesiano os pares ordenados $A(1, 2)$, $B(2, 5)$, $C(3, 0)$, $D(4, 3)$, $E(5, 5)$, $F(6, 1)$, $G(7, 4)$, $H(8, 6)$, $I(9, 2)$, $J(10, 4)$, $K(11, 0)$, $L(12, 3)$, nos quais os meses m são as abscissas e $j(m)$ são as ordenadas. (Figura 5).

Figura 5 – Pares Ordenados $(m; j(m))$ no Plano Cartesiano

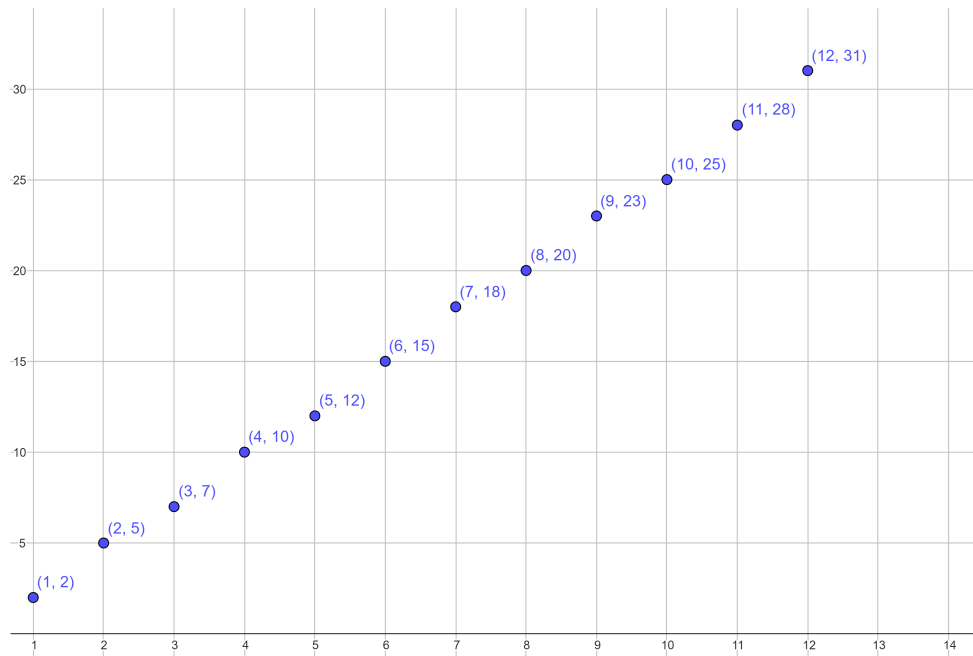


Na Proposição (3.2.8), $j(m)$ é calculado utilizando o módulo 7. Isso significa que adicionar ou subtrair múltiplos de 7 a qualquer valor não alterará o resultado em termos

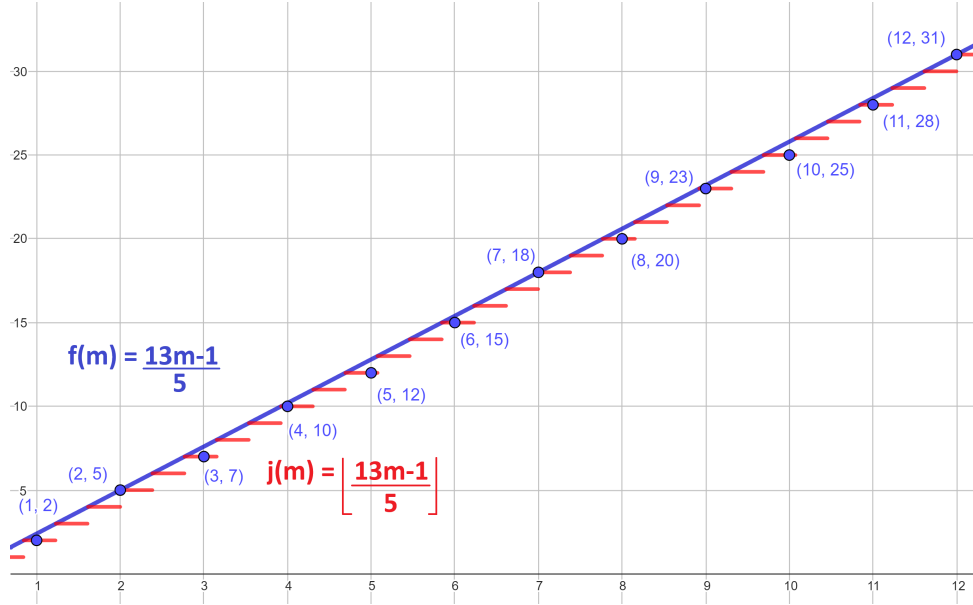
do dia da semana. Por exemplo, os números 7, 14, 21 e 28 são todos congruentes a 0 módulo 7, ou seja, $7 \equiv 0 \pmod{7}$, $14 \equiv 0 \pmod{7}$, e assim por diante. Compreendendo essa propriedade, podemos ajustar as ordenadas dos pontos para obter um alinhamento conveniente, que nos permitirá encontrar uma função afim, cujo gráfico está “próximo” desses pontos. Este ajuste facilitará o cálculo e a manipulação dos valores, mantendo a consistência dos dias da semana.

Fazendo algumas contas obtemos os pontos (1, 2), (2, 5), (3, 7), (4, 10), (5, 12), (6, 15), (7, 18), (8, 20), (9, 23), (10, 25), (11, 28), (12, 31), que correspondem as novas coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L. (Figura 6)

Figura 6 – Ajuste para $j(m)$ no Plano Cartesiano



Apesar dos ajustes nas ordenadas, não existe uma função afim que passe exatamente por todos os pontos dados. Em vez disso, utilizaremos a função maior inteiro, garantindo que, para cada m o valor da função pertença ao intervalo $[j(m), j(m) + 1)$. Isso nos permitirá aproximar os valores de maneira consistente, assegurando que o cálculo do dia da semana se mantenha dentro dos limites apropriados para cada mês.

Figura 7 – Funções $f(m)$ e $j(m)$ 

Observe a reta que passa pelos pontos (2,5) e (7,18) na Figura 7. Considere a função afim cujo gráfico é essa reta. Essa função é $f(m) = \frac{13m-1}{5}$. Agora observe que $j(m) = \left\lfloor \frac{13m-1}{5} \right\rfloor$ assegura uma aproximação prática e funcional, isto é, permite o cálculo preciso dos dias da semana para qualquer mês, mesmo quando não é possível ajustar perfeitamente todos os pontos com uma simples função afim.

Tomando $j(m) = \left\lfloor \frac{13m-1}{5} \right\rfloor$, obtemos a partir da Proposição 3.2.8, o Teorema a seguir:

Teorema 3.2.9. (*Fórmula de Zeller*) *O dia da semana que caiu a data (d, m, A) é dado por:*

$$S_{(d, m, A)} \equiv d + \left\lfloor \frac{13m-1}{5} \right\rfloor + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \pmod{7},$$

A fórmula apresentada no teorema acima é conhecida como o Algoritmo de Zeller, em homenagem ao reverendo Christian Zeller, que a publicou em 1882.

O Teorema 3.2.9 nos permite determinar o dia da semana que em caiu uma data específica (d, m, A) . No entanto, podemos simplificar ainda mais esse cálculo. Seja A um ano qualquer. Pela Divisão Euclidiana, existem inteiros não negativos C e N tais que $A = 100C + N$, onde $0 \leq N \leq 99$. Nesse contexto, $100C$ corresponde ao que chamaremos de **ano secular**, ou seja, o último ano do século, e N representa os anos que se passam dentro do século $C + 1$. Por exemplo, o ano de 1985 pode ser escrito na forma: $1985 = 100 \times 19 + 85$, ou seja, $C = 19$ e $N = 85$.

O Corolário 3.2.10, a seguir, reformula o Teorema 3.2.9 de modo a simplificar o cálculo do dia da semana em termos de século e ano dentro do século.

Corolário 3.2.10. Se A é um ano tal que $A = 100C + N$, com C, N inteiros não negativos, $0 \leq N \leq 99$, então a fórmula para o dia da semana $S_{(d, m, A)}$ é dado por:

$$S_{(d, m, A)} \equiv d + j(m) + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor - 2C \pmod{7} \quad (3.11)$$

Demonstração. Substituindo $A = 100C + N$, onde $0 \leq N \leq 99$ na Proposição 3.2.8, tem-se:

$$\begin{aligned} S_{(d, m, A)} &\equiv d + j(m) + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \\ &\equiv d + j(m) + 100C + N + \left\lfloor \frac{100C+N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100C+N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100C+N}{400} \right\rfloor \\ &\equiv d + j(m) + 100C + N + 25C + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - C - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7} \end{aligned}$$

Como $0 \leq N \leq 99$, temos que $0 \leq \frac{N}{100} < 1$, então $\left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor = 0$ e $\left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor = 0$. Segue que:

$$\begin{aligned} S_{(d, m, A)} &\equiv d + j(m) + 124C + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \\ &\equiv d + j(m) + 5C + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \pmod{7} \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_{(d, m, A)} \equiv d + j(m) + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor - 2C \pmod{7} \quad (3.12)$$

□

Essa reformulação nos oferece uma forma simplificada para calcular o dia da semana, considerando a estrutura secular do ano. Com isso, podemos facilmente aplicar a fórmula a eventos históricos ou futuros em qualquer século.

Para ilustrar a aplicação prática da fórmula, vamos calcular o dia da semana de algumas datas históricas. Iniciaremos com o seguinte exemplo:

Exemplo 3.2.11. Descubra qual foi o dia da semana

(a) em que foi declarada a Independência do Brasil.

A Independência do Brasil foi declarada em 7 de setembro de 1822. Convencionamos que setembro é o mês $m=7$. Representamos o dia da semana por $S_{(7,7,1822)}$.

Tem-se que: $1822 = 100 \times 18 + 22$, onde $C = 18$ e $N = 22$.

$$\begin{aligned} S_{(d, m, A)} &\equiv d + j(m) + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor - 2C \pmod{7} \\ S_{(7,7,1822)} &\equiv 7 + 18 + 22 + \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{18}{4} \right\rfloor - 2 \times 18 \\ &\equiv 7 + 18 + 22 + 5 + 4 - 36 \\ &\equiv 20 \\ &\equiv 6 \pmod{7} \end{aligned}$$

Portanto, dia 7 de setembro de 1822 foi um sábado (6).

(b) em que foi proclamada a República.

A República foi proclamada em 15 de novembro de 1889. Definimos que o mês de novembro é representado pelo número 9, ou seja, $m=9$. Representamos o dia da semana por $S_{(15,9,1889)}$.

Tem-se que: $1889 = 100 \times 18 + 89$, onde $C = 18$ e $N = 89$.

$$\begin{aligned} S_{(15,9,1889)} &\equiv 15 + 23 + 89 + \left\lfloor \frac{89}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{18}{4} \right\rfloor - 2 \times 18 \\ &\equiv 15 + 23 + 89 + 22 + 4 - 36 \\ &\equiv 117 \\ &\equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

Portanto, dia 15 de novembro de 1889 foi uma sexta-feira (5).

(c) em que foi abolida a escravidão no Brasil.

A abolição da escravidão ocorreu em 13 de maio de 1888, com a assinatura da Lei Áurea pela Princesa Isabel. Estabelecemos que maio corresponde ao terceiro mês do ano, $m=3$. Representamos o dia da semana por $S_{(13,3,1888)}$.

Tem-se que: $1888 = 100 \times 18 + 88$, onde $C = 18$ e $N = 88$.

$$\begin{aligned} S_{(13,3,1888)} &\equiv 13 + 7 + 88 + \left\lfloor \frac{88}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{18}{4} \right\rfloor - 2 \times 18 \\ &\equiv 13 + 7 + 88 + 22 + 4 - 36 \\ &\equiv 98 \\ &\equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

Portanto, dia 13 de maio de 1888 foi um domingo (0).

Além das datas históricas, a fórmula também pode ser usada para prever dias da semana em datas futuras. Vamos descobrir, por exemplo, qual dia da semana será 29 de fevereiro de 2064.

Exemplo 3.2.12. Descubra qual será o dia da semana de 29 de fevereiro de 2064.

Convencionamos que fevereiro de 2064 é o mês $m = 12$ do ano 2063. Representamos o dia da semana por $S_{(29,12,2063)}$.

Tem-se que: $2063 = 100 \times 20 + 63$, onde $C = 20$ e $N = 63$.

$$\begin{aligned} S_{(29,12,2063)} &\equiv 29 + 31 + 63 + \left\lfloor \frac{63}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor - 2 \times 20 \\ &\equiv 29 + 31 + 63 + 15 + 5 - 40 \\ &\equiv 103 \\ &\equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

Portanto, dia 29 de fevereiro de 2063 será numa sexta-feira (5).

Exemplo 3.2.13. Dada uma data no formato $(d, 8, 2000)$ que caiu em uma sexta-feira (5), determine todos os possíveis valores de d para os quais isso ocorre.

Definimos o mês de agosto como o mês 6. Assim, tomando $S_{(d,6,2000)} = 5$, pelo Teorema 3.2.9 temos que:

$$S_{(d, 6, 2000)} \equiv d + 1 + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor - 2 \times 20 \pmod{7}$$

Como $S_{(d,6,2000)} = 5$, temos:

$$5 \equiv d - 34 \pmod{7}.$$

Sendo $-34 \equiv 1 \pmod{7}$.

Obtemos $d + 1 \equiv 5 \pmod{7}$, o que implica que $d \equiv 4 \pmod{7}$.

Portanto, os dias de agosto de 2000 que caíram em uma sexta-feira são aqueles que deixam resto 4 na divisão por 7, ou seja, 4, 11, 18 e 25.

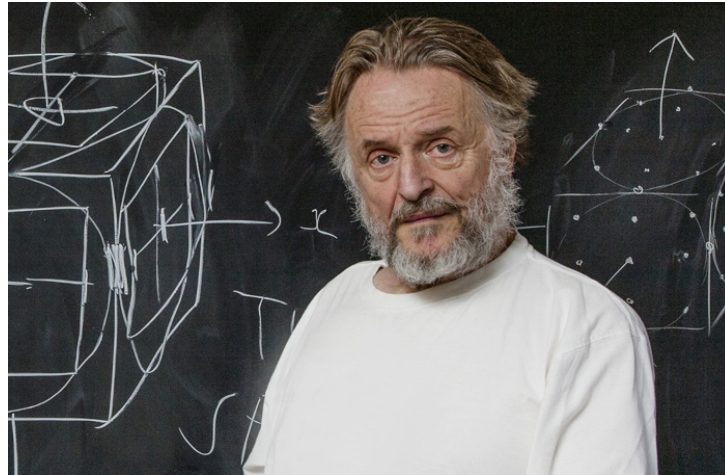
Com a fórmula, podemos determinar o dia da semana de qualquer data usando apenas cálculos modulares, um avanço importante para a compreensão e a aplicação do calendário. Esta abordagem proporciona precisão e simplificação ao trabalho com datas no calendário gregoriano. No entanto, essa fórmula pode ser difícil de memorizar.

A seguir, apresentaremos uma alternativa que torna o cálculo mais prático e fácil de lembrar, facilitando sua aplicação em diversas situações.

3.3 Fórmula de Conway

A capacidade de determinar o dia da semana para qualquer data sempre foi uma questão intrigante, com aplicações práticas que vão desde a organização de eventos a cálculos astronômicos. John Horton Conway, conhecido por suas contribuições inovadoras à Matemática, desenvolveu uma fórmula simples e poderosa, que permite calcular o dia da semana de qualquer data do calendário gregoriano. Nesta seção, exploraremos em detalhe o desenvolvimento da fórmula conhecida como fórmula *Doomsday* ou fórmula de Conway. Além de ser um método matematicamente elegante, a fórmula *Doomsday* é amplamente utilizada em aplicações computacionais, como sistemas de calendários e processamento de datas, devido à sua simplicidade e eficiência. Essa fórmula notável permite determinar o dia da semana de qualquer data específica em um calendário perpétuo, seja ela no passado ou no futuro. Os fundamentos matemáticos e a formulação dessa abordagem estão apresentados em (1), (2), (3), (11) e (7).

Figura 8 – Matemático John Horton Conway (1958-2020)



Fonte: Site IMPA, vide (14)

Na fórmula de Conway, o *doomsday* é o ponto de partida para calcular o dia da semana de qualquer data no calendário. Com o conhecimento do *doomsday* de um ano específico, podemos determinar o dia da semana de outras datas ao longo desse ano. Em síntese, o *doomsday* serve como ponto de referência inicial essencial para encontrar em que dia da semana caiu uma determinada data do calendário.

Definição 3.3.1. Seja A um ano qualquer. O *doomsday* de A é o dia da semana em que caiu o último dia do mês de fevereiro do ano A .

O *doomsday* refere-se ao dia da semana em que caiu o último dia de fevereiro de um ano, o qual funciona como uma âncora para calcular os dias da semana subsequentes. Denotaremos por $D_{(A)}$ o dia da semana em que caiu o *doomsday* de A . Em anos comuns, o último dia de fevereiro é o dia 28, enquanto em anos bissextos, é o dia 29.

Este método baseia-se na observação de que certas datas, fáceis de memorizar, sempre caem no mesmo dia da semana que o *doomsday* do ano. Dessa forma, ao conhecer o dia da semana correspondente ao *doomsday*, é possível determinar facilmente o dia da semana de qualquer data no ano, utilizando essas datas memoráveis. Mais à frente nesta seção, discutiremos essas datas memoráveis com mais detalhes.

Adotaremos o formato de data comumente utilizado, composto por dia, mês e ano. Diferente da Seção 3.2, onde a contagem dos meses começava com março o primeiro mês, abril o segundo e assim por diante, agora seguiremos a ordem usual: janeiro como o primeiro mês, fevereiro o segundo, e assim sucessivamente.

Utilizaremos as mesmas atribuições de números para cada dia da semana conforme a Tabela (2). Domingo 0, segunda 1, terça 2, quarta 3, quinta 4, sexta 5 e sábado 6.

Seja A um ano qualquer. Pela Divisão Euclidiana, existem inteiros não negativos C e N tais que $A = 100C + N$, onde $0 \leq N \leq 99$. Nesse contexto, $100C$ corresponde ao

que chamaremos de **ano secular**, ou seja, o último ano do século, e N indica os anos decorridos dentro do século $C + 1$. Por exemplo, o ano 1970 pode ser escrito na forma: $1970 = 100 \times 19 + 70$, ou seja, $C = 19$ e $N = 70$.

Para demonstrar a fórmula *Doomsday*, começaremos estabelecendo uma fórmula geral para um ano A na forma $A = 100C + N$. Essa fórmula permitirá calcular o *doomsday* dos anos seculares e servirá como base para demonstrar a fórmula de Conway.

De acordo com a Seção 3.2, a congruência (3.4) indica que o dia 1º de março do ano 0000 foi uma quarta-feira (3). Como consequência, o último dia de fevereiro desse ano foi uma terça-feira (2). Com base nisso, podemos determinar o *doomsday* de um ano A contando o número total de anos decorridos desde 0000 até A , mais o número de anos bissextos nesse intervalo. Lembre-se que, em anos comuns, o dia da semana avança 1 unidade, enquanto em anos bissextos avança 2 unidades.

Assim, de forma análoga à Seção 3.2, o número de anos bissextos no intervalo entre o ano 0000 e o ano A é dado pela expressão:

$$\left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor. \quad (3.13)$$

Considerando que o *doomsday* do ano 0000 foi $D_{(0000)} = 2$, ou seja, uma terça-feira, e que o número de anos bissextos no intervalo entre 0000 e A é dado pela expressão (3.13), aplicando o Lema 3.2.2, temos:

$$D_{(A)} \equiv 2 + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \pmod{7}. \quad (3.14)$$

Essa fórmula, que permite calcular o *doomsday* de um ano A qualquer, já foi discutida em maior detalhe na Seção 3.2, onde foi utilizada como base para a demonstração da Fórmula de Zeller. A demonstração dessa fórmula é análoga à Proposição 3.2.5, com a diferença de que aqui estamos utilizando o último dia de fevereiro do ano 0000 como referência.

Teorema 3.3.2. *Se A é um ano tal que $A = 100C + N$, com C, N inteiros não negativos, $0 \leq N \leq 99$, então o *doomsday* de A é dado por:*

$$D_{(A)} \equiv 2 + 5C + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \pmod{7}.$$

Demonstração. Substituindo $A = 100C + N$ em (3.14), tem-se:

$$\begin{aligned} D_{(A)} & \equiv 2 + A + \left\lfloor \frac{A}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{A}{400} \right\rfloor \\ & \equiv 2 + 100C + N + \left\lfloor \frac{100C+N}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100C+N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100C+N}{400} \right\rfloor \\ & \equiv 2 + 100C + N + 25C + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor - C - \left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor \pmod{7} \end{aligned}$$

Como $0 \leq N \leq 99$, temos que $0 \leq \frac{N}{100} < 1$, o que implica que $\left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor = 0$ e $\left\lfloor \frac{N}{400} \right\rfloor = 0$. Portanto, segue que:

$$D_{(A)} \equiv 2 + 124C + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \pmod{7}$$

Como 124 é congruente a 5 módulo 7, podemos simplificar para:

$$D_{(A)} \equiv 2 + 5C + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \pmod{7}$$

□

Se $A = 100C + N$ for um ano secular, então $N = 0$. Aplicando o Teorema 3.3.2 nesse caso, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.3.3. *O doomsday de um ano secular $A = 100C$ é dado por:*

$$D_{(100C)} \equiv 2 + 5C + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \pmod{7}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.3.2, podemos calcular o *doomsday* de um ano $A = 100C + N$ por:

$$D_{(A)} \equiv 2 + 5C + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \pmod{7}.$$

Se $A = 100C + N$ for um ano secular, então $N = 0$, assim, temos que:

$$\begin{aligned} D_{(100C)} &\equiv 2 + 5C + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \\ &\equiv 2 + 5C + 0 + \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \\ &\equiv 2 + 5C + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \pmod{7}. \end{aligned}$$

□

Agora vamos aplicar a fórmula ao ano 1900 para exemplificar o processo de cálculo do *doomsday* em um ano secular. Este exemplo mostrará como os passos discutidos anteriormente se conectam para fornecer o dia da semana correspondente.

Exemplo 3.3.4. Determine o *doomsday* do ano secular 1900.

Representamos o *doomsday* do ano secular 1900 por $D_{(1900)}$. Pela construção, se o ano $A = 1900$, então podemos escrever $A = 100 \times 19$, o que nos dá $C = 19$. Aplicando o Corolário 3.3.3, obtemos:

$$D_{(1900)} \equiv 2 + 5 \times 19 + \left\lfloor \frac{19}{4} \right\rfloor \equiv 2 + 95 + 4 \equiv 101 \equiv 3 \pmod{7} \quad (3.15)$$

Portanto, o *doomsday* do ano secular 1900, $D_{(1900)}$ é quarta-feira (3).

Podemos, então, utilizar o Corolário 3.3.3 para determinar o dia da semana em que caiu o *doomsday* dos anos da forma $100C$, com C inteiro não negativo. Na Tabela 4, apresentamos os dias da semana correspondentes ao *doomsday* para alguns desses anos.

Tabela 4 – *Doomsday* dos Anos Seculares

Ano	Valor	Ano	Valor
1700	0	2100	0
1800	5	2200	5
1900	3	2300	3
2000	2	2400	2

As considerações anteriores, em conjunto com o Corolário 3.3.3, nos levam ao seguinte resultado:

Lema 3.3.5. *O doomsday dos anos seculares sempre ocorre em um dos seguintes dias da semana: domingo, sexta-feira, quarta-feira ou terça-feira. Esses dias seguem um padrão cíclico que se repete a cada 400 anos.*

Demonstração. Para justificar essa afirmação, vamos demonstrar que em 400 anos há um número inteiro de semanas. De fato, um ano bissexto possui 52 semanas e 2 dias, enquanto um ano não bissexto possui 52 semanas e 1 dia.

Em um período de 4 anos, que inclui 1 ano bissexto e 3 anos não bissextos, temos:

$$4 \times 52 \text{ semanas e } 5 \text{ dias adicionais.}$$

Ao longo de 400 anos, temos 100 períodos de 4 anos, o que gera um total de:

$$5 \times 100 = 500 \text{ dias adicionais.}$$

Entretanto, dentro desses 400 anos, existem 3 anos divisíveis por 100, mas não por 400 (anos seculares que não são bissextos). Assim, precisamos subtrair 3 dias dos 500 dias adicionais, resultando em:

$$500 - 3 = 497 \text{ dias adicionais.}$$

Como 497 é divisível por 7, esses dias adicionais correspondem exatamente a um número inteiro de semanas.

Assim, a cada ciclo de 400 anos, o *doomsday* dos anos seculares segue um padrão específico e regular de avanço, recorrendo nos mesmos dias da semana: domingo, sexta-feira, quarta-feira e terça-feira.

□

A partir do conhecimento do *doomsday* dos anos seculares, podemos seguir para determinar o *doomsday* para qualquer ano específico, comum ou bissexto.

No calendário gregoriano, o *doomsday* avança um dia da semana a cada 12 anos. Essa regularidade é crucial para compreender o funcionamento da fórmula de Conway. Por exemplo, se o *doomsday* de 1900 é uma quarta-feira, representada pelo número 3, então em 1912 será uma quinta-feira (4), em 1924 uma sexta-feira (5), e assim sucessivamente.

A proposição a seguir formaliza essa observação, servindo de base para o cálculo do *doomsday* ao longo dos anos.

Proposição 3.3.6. *Em um período de 12 anos consecutivos, o doomsday avança exatamente 1 dia da semana.*

Demonstração. Podemos calcular o *doomsday* do ano $A + n$ utilizando como referência o *doomsday* do ano A . Aplicando a congruência 3.14, temos:

$$D_{(A+n)} \equiv D_{(A)} + n + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{400} \right\rfloor \pmod{7}.$$

Para um período de 12 anos, tomando $n = 12$, temos:

$$D_{(A+12)} \equiv D_{(A)} + 12 + \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{12}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12}{400} \right\rfloor \pmod{7}.$$

Assim,

$$D_{(A+12)} \equiv D_{(A)} + 12 + 3 - 0 + 0 \pmod{7}.$$

Daí,

$$D_{(A+12)} \equiv D_{(A)} + 15 \pmod{7}.$$

Como $15 \equiv 1 \pmod{7}$, concluímos:

$$D_{(A+12)} \equiv D_{(A)} + 1 \pmod{7}.$$

Portanto, o *doomsday* avança exatamente 1 dia da semana após 12 anos. $\square$

No teorema a seguir, será apresentada uma demonstração detalhada da Fórmula *Doomsday* de Conway, explicando os cálculos fundamentais que permitem determinar o *doomsday* de qualquer ano A .

Teorema 3.3.7. *(Fórmula de Conway). Seja $A = 100C + N$, com $0 \leq N \leq 99$. Se $N = 12q + r$, onde $0 \leq r < 12$, então:*

$$D_{(A)} \equiv D_{(100C)} + q + r + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor \pmod{7} \quad (3.16)$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.3.2, podemos calcular o *doomsday* de qualquer ano A por:

$$D_{(A)} \equiv 2 + 5C + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \pmod{7} \quad (3.17)$$

Pela Corolário 3.3.3, $D_{(100C)}$ é tal que:

$$D_{(100C)} \equiv 2 + 5C + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor \pmod{7} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.17), obtemos:

$$D_{(A)} \equiv D_{(100C)} + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor \pmod{7} \quad (3.19)$$

Como $N = 12q + r$, onde $0 \leq r < 12$, segue que:

$$\begin{aligned} D_{(A)} &\equiv D_{(100C)} + N + \left\lfloor \frac{N}{4} \right\rfloor \\ &\equiv D_{(100C)} + 12q + r + \left\lfloor \frac{12q+r}{4} \right\rfloor \\ &\equiv D_{(100C)} + 15q + r + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor \\ &\equiv D_{(100C)} + q + r + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor \pmod{7} \end{aligned} \quad (3.20)$$

□

Exemplo 3.3.8. O Dia Mundial das Doenças Raras é celebrado anualmente em 29 de fevereiro (ou em anos não bissextos, em 28 de fevereiro), com o objetivo de aumentar a conscientização sobre doenças raras e os desafios enfrentados pelas pessoas afetadas por essas condições. Determine em que dia da semana será celebrado o Dia Mundial das Doenças Raras em 2030.

Como o ano de 2030 é comum, o Dia Mundial das Doenças Raras em 2030 será celebrado em 28 de fevereiro. Assim, temos que calcular o *doomsday* de 2030. Podemos verificar na Tabela (4), que o *doomsday* do ano secular 2000 é $D_{(2000)} = 2$. Se $A = 2030$ então $N = 30$. E como $30 = 12 \times 2 + 6$, ao aplicarmos o Teorema 3.3.7, temos:

$$\begin{aligned} D_{(2030)} &\equiv D_{(2000)} + q + r + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor \\ &\equiv 2 + 2 + 6 + 1 \\ &\equiv 4 \pmod{7} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Portanto, o Dia Mundial das Doenças Raras será celebrado em 28 de fevereiro de 2030, caindo em uma quinta-feira (4).

A fórmula apresentada no Teorema 3.3.7 permite identificar o dia da semana em que caiu o último dia de fevereiro do ano A , conforme visto no Exemplo 3.3.8. No entanto, para determinar o dia da semana que caiu uma outra data (d, m, A) qualquer, é necessário

calcular a quantidade de dias que se passaram entre o *doomsday* de A e a data (d, m, A) desejada. Como mencionado, há algumas datas que sempre caem no mesmo dia da semana que o *doomsday*, e são fáceis de memorizar.

Essas datas memoráveis, para os meses pares, são 4 de abril (4/4), 6 de junho (6/6), 8 de agosto (8/8), 10 de outubro (10/10) e 12 de dezembro (12/12). Nos meses ímpares, exceto janeiro, as datas 7 de março (7/3), 9 de maio (9/5), 11 de julho (11/7), 5 de setembro (5/9) e 7 de novembro (7/11) também compartilham essa característica. Além disso, em anos bissextos, a data de referência em janeiro é 4 de janeiro (4/1), enquanto em anos comuns é 3 de janeiro (3/1). Essas datas caem no mesmo dia da semana porque, ao contar os dias a partir do último dia de fevereiro, os intervalos resultantes são sempre múltiplos de 7.

Por exemplo, em qualquer ano, os intervalos entre certas datas específicas no calendário mantêm essa regularidade. Nos anos bissextos, o intervalo entre 4 de janeiro e 29 de fevereiro, e nos anos comuns, entre 3 de janeiro e 28 de fevereiro, ambos somam 56 dias. Da mesma forma, os intervalos entre o último dia de fevereiro e outras datas importantes ao longo do ano, como 7 de março (7 dias), 4 de abril (35 dias), 9 de maio (70 dias), 6 de junho (98 dias), 11 de julho (133 dias), 8 de agosto (161 dias), 5 de setembro (189 dias), 10 de outubro (224 dias), 7 de novembro (252 dias) e 12 de dezembro (287 dias), são todos múltiplos de 7. Isso significa que essas datas sempre caem no mesmo dia da semana que o último dia de fevereiro, independentemente do ano.

Denotaremos por $\mu_{(d/m)}$ a quantidade de dias entre d/m e a data memorável do mês m (no mesmo ano). Assim, $\mu_{(d/m)} = d - (\text{data memorável de } m)$.

Tabela 5 – Datas memoráveis

Data memorável de cada mês			
Janeiro	3/1 (comum) ou 4/1 (bissesto)	Julho	11/7
Fevereiro	28/2 ou 29/2 (<i>Doomsday</i>)	Agosto	8/8
Março	7/3	Setembro	5/9
Abril	4/4	Outubro	10/10
Maio	9/5	Novembro	7/11
Junho	6/6	Dezembro	12/12

As datas memoráveis, escolhidas por serem fáceis de lembrar, permitem que se faça ajustes rápidos e precisos para calcular o dia da semana de qualquer data no ano, sem a necessidade de cálculos complexos.

Denotaremos por $S_{(d,m,A)}$ o dia da semana em que caiu o dia d do mês m do ano A . Utilizando o método do *doomsday* de Conway, podemos determinar o dia da semana de qualquer data de forma prática e direta, por meio da seguinte equação:

$$S_{(d,m,A)} \equiv D_{(100C)} + q + r + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor + \mu_{(d/m)} \pmod{7}$$

Essa fórmula nos permite determinar o dia da semana da data (d, m, A) com base no *doomsday* do ano secular $(100C)$ e em cálculos simples que envolvem o número de anos transcorridos dentro do século, além da diferença entre o dia desejado d e a data memorável $\mu_{(d/m)}$ para o mês m correspondente, permitindo um cálculo rápido e preciso para qualquer data dentro do calendário gregoriano.

Assim, pelo Teorema 3.3.7 e pelas considerações anteriores, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3.9. *Seja $S_{(d,m,A)}$ o dia da semana da semana em que caiu a data (d, m, A) , onde $A = 100C + N$ e $0 \leq S_{(d,m,A)} \leq 6$, tem-se que:*

$$S_{(d,m,A)} \equiv D_{(100C)} + q + r + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor + \mu_{(d/m)} \pmod{7} \quad (3.22)$$

Essa proposição sintetiza o método do *doomsday* de Conway, facilitando o cálculo do dia da semana de uma data qualquer ao conectar os conceitos de *doomsday* secular e datas memoráveis, além de incorporar a correção por anos transcorridos dentro de cada século.

Exemplo 3.3.10. O Dia Nacional da Matemática é celebrado em 6 de maio. Esta data foi escolhida em homenagem ao nascimento do matemático brasileiro Júlio César de Mello e Souza (1895-1974), mais conhecido como Malba Tahan. Determine em que dia da semana será celebrado o Dia Nacional da Matemática em 2035.

Temos que o *doomsday* do ano secular 2000 é $D_{(2000)} = 2$ (Tabela 4), a data memorável do mês de maio é 9/5 (Tabela 5), isto é, $\mu_{(6/5)} = 6 - 9 = -3$, e ainda, $35 = 12 \times 2 + 11$, isto é, $q = 2$ e $r = 11$. Aplicando na fórmula (3.22) obtemos:

$$\begin{aligned} S_{(6,5,2035)} &\equiv 2 + 2 + 11 + 2 - 3 \\ &\equiv 14 \\ &\equiv 0 \pmod{7} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Portanto, o Dia Nacional da Matemática, em 6 de maio de 2035, será um domingo (0).

Assim, ao longo desta seção, vimos como o método de Conway, pode ser aplicado de maneira simples para calcular o dia da semana de qualquer data. Este resultado final reafirma a eficácia do método e a elegância da matemática envolvida, demonstrando a precisão e praticidade do calendário gregoriano. Em relação à fórmula de Zeller, que abordamos na seção anterior, a fórmula *doomsday* de Conway oferece algumas vantagens notáveis. Enquanto a fórmula de Zeller é eficaz, ela pode ser mais complexa e menos intuitiva para cálculos mentais. A fórmula de Conway, por outro lado, destaca-se por sua

simplicidade e eficiência, facilitando o cálculo do dia da semana de qualquer data com apenas alguns passos mentais, uma vez que o padrão de datas memoráveis é memorizado. Além disso, o método do *doomsday* pode ser utilizado para exercícios de lógica e memória, o que o torna não apenas uma ferramenta prática, mas também uma maneira divertida de treinar o raciocínio mental.

3.4 Implementações em Python dos Métodos de Zeller e Conway

A implementação computacional de métodos matemáticos, como os de Zeller e Conway, é amplamente utilizada em aplicações práticas, incluindo sistemas de agendamento, bancos de dados e planejamento. A precisão e a eficiência desses algoritmos tornam-nos indispensáveis para cálculos temporais, como a determinação de dias da semana e a validação de datas. Nesta seção, abordaremos as implementações em Python de ambos os métodos, destacando suas características e comparando suas vantagens.

Para testar os códigos, sugerimos o uso do Google Colab, uma plataforma online que facilita a execução de códigos Python sem necessidade de instalação.

Instruções para execução no Google Colab:

1. Acesse o Google Colab: <https://colab.research.google.com>.
2. Crie um novo notebook e cole o código.
3. Pressione **Shift + Enter** para ver o resultado.

3.4.1 Implementação do Método de Zeller

O método de Zeller, devido à sua simplicidade algorítmica, é frequentemente a escolha preferida para sistemas que exigem cálculos rápidos e precisos de dias da semana. Abaixo, apresentamos uma implementação em Python, acompanhada de explicações:

```
1 # Função principal para calcular o dia da semana de uma data pela
   Método de Zeller
2 def calcular_dia_da_semana(dia, mes, ano):
3     # Ajuste para janeiro e fevereiro
4     if mes < 3:
5         mes += 12
6         ano -= 1
7
8     N = ano % 100 # Últimos dois dígitos do ano
9     C = ano // 100 # Primeiros dois dígitos do ano
```

```

11 # Aplicação da fórmula de Zeller
12 f = (dia + ((13 * (mes + 1)) // 5) + N + (N // 4) + (C // 4) - (2
    * C)) % 7
13 f = (f - 1 + 7) % 7 # Ajuste para que domingo corresponda ao índice 0
14
15 # Mapeamento dos resultados para os dias da semana (começando com
    domingo como 0)
16 dias_da_semana = ["Domingo", "Segunda-feira", "Terça-feira", "
    Quarta-feira", "Quinta-feira", "Sexta-feira", "Sábado"]
17 return dias_da_semana[f]
18
19 # Exemplo de teste
20 if __name__ == "__main__":
21 print(calcular_dia_da_semana(1, 7, 1984)) # Deve retornar "
    Domingo"

```

Essa função retorna o dia da semana como um número de 0 (domingo) a 6 (sábado). A abordagem de Zeller destaca-se por sua aplicabilidade universal e facilidade de implementação.

3.4.2 Implementação do Método de Conway

O método de Conway, conhecido como *Doomsday Algorithm*, é uma alternativa interessante, especialmente devido à sua capacidade de ser calculado mentalmente e à conexão intuitiva com o calendário. Sua implementação em Python é ligeiramente mais elaborada, mas mantém sua eficácia:

```

1 # Função principal para calcular o dia da semana de uma data pela
    Método de Conway
2 def calcular_dia_da_semana(dia, mes, ano):
3 # Definição das datas memoráveis para cada mês
4 datas_memoraveis = [0, 3, 28, 14, 4, 9, 6, 11, 8, 5, 10, 7, 12]
5
6 # Função auxiliar para verificar se o ano é bissexto
7 def eh_bissexto(ano):
8 return (ano % 4 == 0 and ano % 100 != 0) or (ano % 400 == 0)
9
10 # Parte 1: Cálculo do "doomsday" do século
11 secular = ano // 100 # C
12 doomsday_secular = (2 + 5 * (secular % 4)) % 7
13
14 # Parte 2: Cálculo do "doomsday" do ano

```

```
15 ultimos_dois_digitos = ano % 100 # N
16 anchor = (ultimos_dois_digitos // 12) + (ultimos_dois_digitos %
    12) + ((ultimos_dois_digitos % 12) // 4)
17 doomsday_ano = (doomsday_secular + anchor) % 7
18
19 # Parte 3: Ajuste para meses diferentes
20 if eh_bissesto(ano) and (mes == 1 or mes == 2):
21     referencia = 4 if mes == 1 else 29
22 else:
23     referencia = datas_memoraveis[mes]
24
25 # Parte 4: Cálculo final do dia da semana
26 diferenca = (dia - referencia) % 7
27 dia_da_semana = (doomsday_ano + diferenca) % 7
28
29 # Dias da semana começando em domingo
30 dias_da_semana = ["Domingo", "Segunda-feira", "Terça-feira", "
    Quarta-feira", "Quinta-feira", "Sexta-feira", "Sábado"]
31
32 return dias_da_semana[dia_da_semana]
33 # Exemplo de teste
34 print(calcular_dia_da_semana(1, 7, 1984)) # Deve retornar "
    Domingo"
```

Os métodos de Zeller e Conway, além de sua relevância teórica, demonstram grande utilidade prática quando implementados computacionalmente. Suas aplicações em linguagens como Python permite resolver problemas relacionados a datas com rapidez e precisão, sendo ferramentas essenciais para sistemas que dependem de cálculos temporais.

3.5 Comparação entre as Fórmulas de Zeller e de Conway

As fórmulas de Zeller e Conway são métodos amplamente utilizados para determinar o dia da semana de uma data específica. Embora ambas as abordagens tenham como objetivo principal oferecer uma solução eficiente para o cálculo, apresentam diferenças significativas quanto à estrutura, aplicabilidade e complexidade.

A fórmula de Zeller destaca-se por sua precisão e pela simplicidade em termos de algoritmos computacionais. Contudo, sua aplicação apresenta desafios importantes para uso pedagógico e em contextos não técnicos. Uma de suas características é a necessidade de adaptar os meses do ano: janeiro e fevereiro são tratados como os meses 11 e 12 do ano anterior, com o ano iniciando oficialmente em março. Essa particularidade pode gerar

confusão, especialmente para estudantes ou pessoas menos familiarizadas com cálculos envolvendo datas.

Essas etapas podem dificultar a compreensão de sua lógica, tornando-a mais suscetível a erros durante a aplicação manual.

Por outro lado, a Fórmula *Doomsday* de Conway apresenta-se como uma abordagem mais acessível e prática, sendo especialmente útil em contextos educacionais. Ela baseia-se em datas âncoras fixas para séculos, em datas memoráveis para os meses, o que facilita a memorização e permite cálculos mentais rápidos. Entretanto, o método também apresenta desafios em sua aplicação prática. Uma de suas limitações está na necessidade de realizar operações envolvendo quociente e resto de uma divisão por 12, o que pode tornar o processo mais complexo e suscetível a erros.

Na fórmula de Zeller, $S_{(1,1,2024)}$ corresponde ao dia da semana em que caiu 1º de março de 2024, devido à adaptação do calendário utilizada pelo método. Em contraste, a fórmula de Conway mantém o formato convencional de data, de modo que $S_{(1,1,2024)}$ se refere diretamente ao dia da semana de 1º de janeiro de 2024.

Portanto, enquanto a fórmula de Zeller é frequentemente indicada para contextos técnicos e computacionais devido à sua precisão e eficiência, o método de Conway destaca-se como uma ferramenta didática poderosa, ideal para engajar os estudantes e tornar a matemática mais tangível e significativa. Apesar das dificuldades inerentes a cada método, ambas as abordagens demonstram a versatilidade da matemática na resolução de problemas do cotidiano, reforçando sua importância em diferentes contextos de ensino e aplicação prática.

4 PROPOSTA DIDÁTICA

4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos uma sequência didática para introduzir o *Método Doomsday de Conway* no ensino básico, oferecendo aos professores uma abordagem inovadora e interativa para o ensino de Matemática. A escolha pela aplicação da fórmula de Conway se deve à sua facilidade de memorização e à possibilidade de realização de cálculos mentais rápidos, tornando-a uma ferramenta acessível e prática para os alunos. Para elaboração dessa sequência didática, foram usadas como referências (8), (9), (10) e (20).

4.2 Objetivo da Proposta

A proposta tem como objetivo transformar a percepção dos alunos sobre a disciplina, mostrando que ela não é apenas um conjunto de conceitos abstratos e isolados, mas sim uma poderosa ferramenta prática aplicável a situações do cotidiano, como a previsão de datas e dias da semana. Dessa forma, busca-se demonstrar que a Matemática pode ser interessante, dinâmica e divertida, despertando a curiosidade e o interesse por temas que, à primeira vista, podem parecer distantes da realidade dos estudantes.

O público-alvo desta sequência são os alunos das séries finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e do Ensino Médio, considerando suas capacidades de abstração e o contato prévio com conteúdos fundamentais para a aplicação do método.

A atividade está estruturada em cinco etapas principais:

1. **Apresentação do método e história dos calendários:** Introduzindo o contexto histórico e a relevância dos sistemas de calendário.
2. **Estudo dos fundamentos teóricos:** Explorando os fundamentos matemáticos que sustentam o método.
3. **Dedução da matemática envolvida no método:** Guiar os alunos na compreensão dos conceitos matemáticos que fundamentam o método, utilizando exercícios direcionados que os ajudem na dedução de um algoritmo.
4. **Apresentação da fórmula e do algoritmo *Doomsday*:** Apresentar a fórmula de maneira clara e organizada, explicando detalhadamente cada etapa do cálculo e sua aplicação. Relacionar a fórmula com o algoritmo correspondente.

5. **Gincana de perguntas desafiadoras:** Encerrando com uma atividade prática e colaborativa, onde os estudantes aplicam o que aprenderam de forma lúdica.

Essa abordagem integra teoria e prática, promovendo conexões entre a Matemática e o cotidiano, enquanto estimula o raciocínio lógico, a criatividade e o engajamento dos alunos. Essa proposta está alinhada às habilidades estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (20) para o ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, tais como:

- **EF06MA03:** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
- **EF06MA06:** Elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
- **EF07MA04:** Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
- **EF07MA05:** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
- **EF07MA08:** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

Além disso, a proposta visa despertar o interesse dos estudantes pela matemática, tornando o aprendizado mais dinâmico, interativo e prazeroso, enquanto fortalece habilidades essenciais como o raciocínio lógico, o trabalho em equipe e a criatividade.

4.3 Etapas para Desenvolvimento da Proposta

O desenvolvimento desta proposta de atividade será realizado em quatro etapas interativas e progressivas. Na primeira etapa, será feita a apresentação do método acompanhado de um breve histórico sobre o calendário, destacando sua evolução e importância. A segunda etapa será dedicada ao estudo dos fundamentos teóricos que sustentam o método, proporcionando aos alunos a compreensão necessária para sua dedução. Na terceira etapa, será apresentada a explicação detalhada da fórmula, seguida de sua aplicação prática por meio de um algoritmo. Por fim, na quarta etapa, propomos uma gincana com perguntas desafiadoras, incentivando a prática colaborativa e o uso do raciocínio lógico de forma lúdica e dinâmica.

4.3.1 Apresentação do método e história dos calendários

Inicie esta etapa com uma discussão instigante sobre a possibilidade de determinar o dia da semana correspondente a qualquer data do passado ou do futuro, sem o uso de calendários ou dispositivos eletrônicos. Essa abordagem inicial visa gerar curiosidade e engajamento entre os alunos. Para aumentar o interesse, utilize exemplos práticos, como as datas de aniversário dos próprios estudantes, incentivando a participação ativa e tornando o conteúdo mais pessoal e relevante.

Após despertar a curiosidade, apresente a história da construção do calendário Gregoriano, nosso objeto de estudo. Destaque os problemas enfrentados ao longo do tempo na tentativa de organizar o calendário e as soluções propostas, com ênfase na reforma promovida pelo Papa Gregório XIII. Esse momento poderá ser enriquecido com a colaboração de um professor de História, possibilitando uma abordagem interdisciplinar. O objetivo principal desta etapa é motivar os alunos, explorando o contexto histórico do calendário e as dificuldades enfrentadas para ajustá-lo, conectando o aprendizado matemático a uma narrativa envolvente e significativa.

4.3.2 Fundamentos teóricos básicos

4.3.2.1 Divisão

A introdução desta etapa pode ser realizada com a apresentação de problemas relacionados a datas, demonstrando como a divisão é uma ferramenta prática para calcular ciclos de dias da semana e diferenças entre datas específicas. A divisão, uma das operações fundamentais da Matemática, é definida como o processo de repartir um valor em partes iguais, sendo também a operação inversa da multiplicação. Essa abordagem permite que os alunos compreendam a conexão entre os elementos principais da divisão: dividendo, divisor, quociente e resto.

Proponha exercícios no quadro, desafiando os estudantes a resolver diferentes divisões e a identificar cada um dos seus componentes. Utilize esses exemplos para revisar os conceitos de divisão exata (quando não há sobra) e divisão não exata (quando há um resto que é sempre menor que o divisor). Destaque que a relação fundamental da divisão pode ser expressa por:

$$\text{Dividendo} = \text{Quociente} \times \text{Divisor} + \text{Resto}$$

Durante as atividades, enfatize as propriedades da divisão e reforce sua importância em situações práticas, como o cálculo do número de semanas completas em um conjunto de dias ou a determinação dos dias restantes após divisões sucessivas. Reforce esses conceitos continuamente ao longo do estudo, de forma que os alunos desenvolvam uma compreensão

sólida e possam aplicá-los em contextos reais, especialmente na resolução de problemas relacionados ao método de cálculo de dias da semana.

Destaque a importância do resto e sua interpretação no contexto do problema. Ressalte que, em uma divisão entre dois números naturais, o resto é sempre menor que o divisor, garantindo que a operação seja consistente com as propriedades fundamentais da aritmética.

Exemplo 4.3.1. Quantas semanas completas há em 28 dias?

$$28 \div 7 = 4 \quad \text{ou em chave:} \quad \begin{array}{r|l} 28 & 7 \\ 0 & 4 \end{array}$$

Logo:

$$\text{Dividendo} = 28, \quad \text{divisor} = 7, \quad \text{quociente} = 4, \quad \text{resto} = 0.$$

Neste exemplo, o resto da divisão é igual a 0, enfatize que chamamos o resultado de **divisão exata**. Podemos escrever assim: $28 = 7 \times 4 + 0$.

Exemplo 4.3.2. Quantas semanas completas há em um mês de 31 dias?

$$31 \div 7 = 4 + 3 \quad \text{ou em chave:} \quad \begin{array}{r|l} 31 & 7 \\ 3 & 4 \end{array}$$

Logo:

$$\text{Dividendo} = 31, \quad \text{divisor} = 7, \quad \text{quociente} = 4, \quad \text{resto} = 3.$$

Podemos escrever assim: $31 = 7 \times 4 + 3$.

Esses conceitos de divisão, quociente e resto são fundamentais para trabalhar com a aritmética modular, que será utilizada nas etapas seguintes para calcular dias da semana com base em ciclos de 7 dias. Apresente exercícios simples para fixação e, em seguida, relacione a divisão com problemas envolvendo datas, como “Quantas semanas completas há em 365 dias? Qual o dia restante?”.

4.3.2.2 Múltiplos e Divisores

Nesta aula, explore os conceitos de múltiplos e divisores de números naturais utilizando sequências numéricas como ferramenta pedagógica.

Aproveite esta oportunidade para apresentar curiosidades sobre o calendário gregoriano, como a lógica dos anos bissextos. Explique, por exemplo, que um ano é bissexto se for divisível por 4, mas os anos múltiplos de 100 não são bissextos, a menos que também sejam divisíveis por 400. Essa discussão contextualiza o aprendizado e ilustra a importância dos múltiplos e divisores na organização do tempo.

Relação entre Múltiplos e Multiplicação: Introduza a relação entre a noção de múltiplo e a operação de multiplicação, destacando que múltiplos são resultados da adição repetida de parcelas iguais. Incentive os alunos a identificar que o produto de uma multiplicação é múltiplo de todos os fatores envolvidos. Por exemplo: 50 é múltiplo de 5, pois $10 \times 5 = 50$; 50 também é múltiplo de 10, pois $5 \times 10 = 50$.

Relação entre Múltiplos e Divisão Exata: Evidencie a conexão entre múltiplos e divisão exata. Se 50 é múltiplo de 5, a divisão $50 \div 5$ é exata (resto zero). O mesmo ocorre com $50 \div 10$, reforçando que um número é múltiplo de outro quando a divisão entre eles é exata.

Exemplo 4.3.3. Escreva a sequência dos números naturais

(i) múltiplos de 4:

$$M(4) : 4, 8, 12, 16, 20, \dots$$

(ii) múltiplos de 7:

$$M(7) : 7, 14, 21, 28, 35, \dots$$

(iii) múltiplos de 12:

$$M(12) : 12, 24, 36, 48, 60, \dots$$

A sequência dos múltiplos de um número natural é infinita.

Sequência de Divisores: Após explorar os múltiplos, aborde a sequência dos divisores de um número natural. Destaque propriedades fundamentais para aprofundar o aprendizado:

- O 0 não é divisor de nenhum número natural diferente de zero.
- O número 1 é divisor de qualquer número natural.
- Todo número natural diferente de zero tem o 1 e ele próprio como divisores.
- O maior divisor de um número natural não nulo é ele mesmo, ou seja, a sequência de divisores é finita.

Ajude os alunos a identificar que a sequência de divisores de um número natural sempre começa no 1 e termina no próprio número. Os demais divisores, quando existem, devem ser determinados.

Exemplo 4.3.4. Dê a sequência dos números naturais

(i) divisores de 4:

$$D(4) : 1, 2, \text{ e } 4.$$

(ii) divisores de 10:

$$D(10) : 1, 2, 5 \text{ e } 10.$$

(iii) divisores de 11:

$$D(11) : 1 \text{ e } 11.$$

Os divisores de 11 são apenas 1 e 11, pois não há outros números naturais entre 1 e 11 que dividam 11 de forma exata.

A sequência de divisores de um número natural diferente de zero é finita.

A **Parte Inteira** pode ser apresentada aos alunos como a quantidade de múltiplos de um número dentro de um intervalo especificado. Em termos matemáticos, ela corresponde ao quociente obtido na divisão, representando o número de vezes que o divisor cabe integralmente no dividendo.

Exemplo 4.3.5. Quantos múltiplos de 12 há entre 1 e 82?

$$\begin{array}{r|l} 82 & 12 \\ \hline 10 & 6 \end{array}$$

Como o quociente é 6, temos 6 múltiplos de 12 no intervalo entre 1 e 82.

Exemplo 4.3.6. Quantos anos bissextos há entre os anos 2001 e 2030?

Calcule os múltiplos de 4 entre 2001 e 2030.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

Como o quociente é 7, conclui-se que existem exatamente 7 anos bissextos no intervalo entre 2001 e 2030.

Essa abordagem conecta múltiplos e divisores ao raciocínio matemático prático, promovendo a compreensão de conceitos fundamentais e sua aplicação em problemas do cotidiano, incluindo a lógica dos ciclos de dias da semana no calendário.

4.3.3 Deduzindo o Método de Conway

Nesta etapa, serão apresentadas questões introdutórias ao Método Doomsday de Conway, utilizando como base o conteúdo abordado na Seção 3.3. O foco será introduzir o método no contexto do ensino básico, empregando uma linguagem acessível e adequada aos alunos do ensino fundamental e médio. A proposta pode ser desenvolvida ao longo de duas aulas.

Inicialmente, propõe-se trabalhar exercícios baseados no calendário, com o objetivo de orientar os alunos na dedução do Método Doomsday. Essas questões podem ser

adaptadas de acordo com o nível de compreensão das séries envolvidas. Por meio desses exercícios, os alunos terão a oportunidade de explorar o avanço dos dias da semana em ciclos específicos, bem como compreender a diferença entre anos comuns e bissextos.

Após essa exploração inicial, o professor poderá introduzir o método propriamente dito, explicando passo a passo como utilizá-lo para calcular o dia da semana correspondente a qualquer data. Para tornar o conteúdo mais acessível e atrativo, recomenda-se a utilização de exemplos práticos, como datas históricas ou os aniversários dos próprios alunos. Essa abordagem não apenas facilita o entendimento, mas também promove maior engajamento e interesse no aprendizado.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de questões que podem ser exploradas com os alunos:

Exemplo 4.3.7. Se hoje é terça-feira, que dia da semana será daqui a 21 dias?

Dividindo 21 por 7, temos resto 0. Isso indica que 21 dias equivalem a 3 semanas completas, sem avançar para outro dia da semana. Assim, daqui a 21 dias também será **terça-feira**.

Exemplo 4.3.8. Se hoje é terça-feira, que dia da semana será daqui a 19 dias?

Dividindo 19 por 7, temos resto 5. Isso significa que devemos avançar 5 dias na sequência dos dias da semana:

Terça-feira → Quarta-feira → Quinta-feira → Sexta-feira → Sábado → Domingo.

Portanto, daqui a 19 dias será **domingo**.

Exemplo 4.3.9. Se 1º de janeiro de 2024 foi uma segunda-feira, que dia da semana foi 15/01/2024?

Entre 1º de janeiro e 15 de janeiro de 2024, há uma diferença de 14 dias. Dividindo 14 por 7, o resto é 0, indicando que a mesma correspondência de dia da semana se mantém. Assim, 15 de janeiro de 2024 também será uma **segunda-feira**.

Exemplo 4.3.10. Quantas semanas completas existem em um ano comum?

Dividindo 365 por 7, temos quociente 52 e resto 1. Isso significa que um ano comum contém **52 semanas completas e 1 dia extra**.

Exemplo 4.3.11. Como saber se o ano é bissexto?

Um ano é bissexto se for múltiplo de 4, exceto quando também for múltiplo de 100; nesse caso, ele só será bissexto se for múltiplo de 400.

Por exemplo:

- 2024: Bissexto ($2024 \div 4 = 506$, 2024 não é divisível por 100).
- 1900: Não bissexto ($1900 \div 4 = 475$, mas $1900 \div 100 = 19$ e não é divisível por 400).
- 2000: Bissexto ($2000 \div 4 = 500$, $2000 \div 100 = 20$, $2000 \div 400 = 5$).

Exemplo 4.3.12. Quantas semanas completas existem em um ano bissexto?

Dividindo 366 por 7, temos quociente 52 e resto 2. Isso significa que um ano bissexto contém **52 semanas completas e 2 dias extra**.

Exemplo 4.3.13. O ano de 2024 iniciou-se em uma segunda-feira. Qual o dia da semana que 2025 se inicia?

Um ano bissexto adiciona 2 dias ao ciclo semanal. Assim, se o ano de 2024 começou em uma segunda-feira:

Segunda-feira $\rightarrow$ Terça-feira $\rightarrow$ Quarta-feira.

Portanto, o ano de 2025 iniciará em uma **quarta-feira**.

Exemplo 4.3.14. Se o dia 29 de fevereiro de 2024 foi uma quinta-feira, que dia da semana foi:

- 07/03/2024: Avançando 7 dias a partir de quinta-feira, teremos outra **quinta-feira**.
- 08/08/2024: Entre 29/02 e 08/08, há 161 dias. Dividindo $161 \div 7$, temos resto 0. Assim, será novamente **quinta-feira**.
- 10/10/2024: Entre 29/02 e 10/10, há 224 dias. Dividindo $224 \div 7$, temos resto 0. Assim, será **quinta-feira**.

Exemplo 4.3.15. Se o dia 29 de fevereiro caiu numa quinta-feira, em que dia da semana cairá o dia 4 de abril?

Entre 29/02 e 04/04, há 35 dias. Dividindo $35 \div 7$, temos resto 0. Assim, 4 de abril também será uma **quinta-feira**.

Exemplo 4.3.16. Se o dia 25 de dezembro de 2023 caiu numa segunda-feira, em que dia da semana cairá em 2024?

O ano de 2024 é bissexto e adiciona 2 dias ao ciclo semanal. Assim:

Segunda-feira $\rightarrow$ Terça-feira $\rightarrow$ Quarta-feira.

Portanto, 25 de dezembro de 2024 cairá em uma **quarta-feira**.

Exemplo 4.3.17. Se o dia 25 de dezembro de 2023 caiu numa segunda-feira, em que dia da semana cairá em 2030?

Entre 2023 e 2030, há 7 anos, incluindo 2 anos bissextos (2024 e 2028). O avanço total é:

$$(5 \text{ anos comuns} \times 1) + (2 \text{ anos bissextos} \times 2) = 9 \text{ dias.}$$

Dividindo $9 \div 7$, temos resto 2. Assim:

Segunda-feira $\rightarrow$ Terça-feira $\rightarrow$ Quarta-feira.

Portanto, 25 de dezembro de 2030 cairá em uma **quarta-feira**.

4.3.4 Algoritmo do Método de Conway

Dando continuidade à sequência didática, o foco será a aplicação prática do Método *Doomsday* de Conway. Nesta etapa, o algoritmo do método será apresentado, utilizando as questões trabalhadas anteriormente como base para contextualizar e consolidar o aprendizado. Recomenda-se dedicar duas aulas para abordar o tema de maneira eficaz.

Na primeira aula, o professor deverá introduzir o algoritmo de maneira gradual, começando com exemplos de situações cotidianas em que o cálculo do dia da semana seja útil e relevante. Em seguida, o método será apresentado de forma intuitiva, destacando a lógica por trás de cada etapa para facilitar a compreensão inicial. Essa abordagem tem como objetivo despertar a curiosidade dos alunos antes de aprofundar os conceitos matemáticos. A explicação deve ser adaptada ao nível de entendimento da turma, utilizando exemplos práticos que tornem a aplicação do método clara e objetiva. Para a apresentação da fórmula, o professor pode utilizar a Seção 3.3 como referência para fundamentar a explicação e enriquecer a abordagem didática.

Na segunda aula, será introduzido um passo a passo detalhado para a execução do algoritmo. Para estimular o trabalho em equipe, o professor pode dividir a turma em grupos e atribuir a cada um deles a responsabilidade por uma etapa específica do processo. Essa abordagem colaborativa ajuda a fixar o conteúdo e incentiva a interação entre os estudantes. O algoritmo pode ser estruturado em etapas claras e organizadas para facilitar a compreensão.

Se necessário, os passos específicos podem ser detalhados em atividades práticas para reforçar o aprendizado e promover maior engajamento dos alunos.

Algoritmo do Método *Doomsday* de Conway: Ao receber a data no formato (d,m,A), siga as etapas abaixo para determinar o dia da semana correspondente.

1. Encontre o valor referente ao *doomsday* do ano secular. Para os anos seculares recentes, os *doomsdays* são: 1600s: Terça-feira (2), 1700s: Domingo (0), 1800s: Sexta-feira (5), 1900s: Quarta-feira (3), 2000s: Terça-feira (2).

2. Pegue os últimos dois dígitos do ano e divida por 12.
3. Anote o quociente.
4. Anote o resto da divisão por 12.
5. Divida o resto por 4 (desprezando a parte fracionária).
6. Some o quociente do passo 3, o resto do passo 4 e o resultado do passo 5.
7. Some o total ao *doomsday* do ano secular (passo 1).
8. Identifique a data memorável do mês m correspondente. Use a tabela abaixo para encontrar a data memorável mais próxima para o mês desejado.

Tabela 6 – Datas memoráveis

Data memorável de cada mês			
Janeiro	3/1 (comum) ou 4/1 (bissexto)	Julho	11/7
Fevereiro	28/2 ou 29/2 (<i>Doomsday</i>)	Agosto	8/8
Março	7/3	Setembro	5/9
Abril	4/4	Outubro	10/10
Maior	9/5	Novembro	7/11
Junho	6/6	Dezembro	12/12

9. Subtraia o dia da data memorável do dia desejado para obter a diferença em dias. Anote esse valor.
10. Some o os resultados obtidos nos passos 8 e 9. Anote esse número.
11. Divida o total obtido no passo anterior por 7 e anote o resto.
12. Consulte a tabela abaixo para converter o número obtido no passo anterior no dia da semana correspondente.

Tabela 7 – Atribuição de números aos dias da semana

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
0	1	2	3	4	5	6

4.3.5 Gincana de Perguntas Desafiadoras

A gincana de perguntas desafiadoras consiste em utilizar o Método *Doomsday* de John Conway como base para a resolução de questões envolvendo o cálculo do dia da semana para datas históricas e curiosas. Essa atividade é uma proposta pedagógica ideal para ser realizada em grupos, permitindo que os alunos colaborem entre si para resolver os desafios apresentados.

Dinâmica do Jogo: Cada equipe indicará um representante para sortear as perguntas desafiadoras em cada rodada. O professor fará a leitura da pergunta sorteada, contextualizando-a de forma interdisciplinar com temas como história, ciência, esporte, cultura ou religião. Após a contextualização, os alunos receberão a data do ocorrido e deverão calcular manualmente o dia da semana correspondente, utilizando os seguintes passos descritos em 4.3.4.

As equipes terão um tempo limite de 10 minutos para resolver cada pergunta desafiadora. O representante da equipe apresentará a resposta ao professor, que fará a correção no quadro, explicando o processo para toda a turma.

Uso Opcional de Tabuleiro: O professor pode optar por incluir um tabuleiro para tornar a gincana mais lúdica e visual. Esse tabuleiro pode ser no formato de trilha ou similar a um jogo de *Ludo*, com cores atribuídas a cada equipe. Caso o professor decida não utilizar o tabuleiro, a pontuação das equipes pode ser registrada em um quadro ou tabela, mantendo a mesma dinâmica de jogo.

Pontuação e Avanço no Jogo: Equipes que acertarem as respostas avançam uma casa no tabuleiro. Ao final da gincana, ganha a equipe que avançar o maior número de casas.

Materiais Necessários: As perguntas desafiadoras devem ser previamente preparadas pelo professor, impressas em cartas com suas respectivas soluções. Além disso, é importante disponibilizar tabelas auxiliares com os dias âncoras dos séculos e meses para suporte durante os cálculos. O professor pode também fornecer uma folha contendo os passos do algoritmo para auxiliar os alunos durante a atividade. Caso disponha de recursos audiovisuais, é possível projetar os passos do algoritmo em uma tela ou quadro digital, tornando o processo mais visual e acessível para a turma.

Ao longo deste trabalho, apresentamos diversos exemplos de datas que podem ser utilizadas como base para a formulação dessas perguntas. As datas selecionadas abrangem eventos históricos relevantes em nível nacional e internacional, envolvendo política, ciência, esporte, cultura e religião. Essa abordagem interdisciplinar permite conectar o aprendizado matemático a diferentes áreas do conhecimento, promovendo maior engajamento dos alunos.

Colaboração Interdisciplinar: Para enriquecer ainda mais a atividade, o professor pode colaborar com docentes de outras disciplinas, como história, ciências ou artes, ampliando as conexões e despertando o interesse dos alunos.

Exemplos de Perguntas: A seguir, apresentamos algumas perguntas desafiadoras que podem ser utilizadas durante a gincana, baseadas em eventos históricos e outras curiosidades relacionadas ao calendário.

Exemplo 4.3.18. A Proclamação da República em 15 de novembro 1889 marcou o fim do período imperial no Brasil, liderada pelo Marechal Deodoro da Fonseca. A família

imperial foi destituída e Deodoro assumiu como chefe de governo provisório, trazendo mudanças significativas ao sistema político e de governo do país. Em que dia da semana ocorreu a Proclamação da República?

Exemplo 4.3.19. No Brasil, o Dia do Professor é celebrado em 15 de outubro. Essa data é uma homenagem aos profissionais da educação, reconhecendo sua importância e dedicação no processo de ensino e aprendizagem. Em que dia da semana será celebrado o Dia do Professor em 2050?

Exemplo 4.3.20. O Dia Internacional da Matemática é comemorado em 14 de março e é uma iniciativa da *International Mathematical Union (IMU)*. A escolha dessa data se deve ao fato de que, em muitos países, 14 de março também é celebrado como o Dia do Pi (π). Em que dia da semana será comemorado o Dia Internacional da Matemática em 2025?

4.4 Casos de Aplicação da Proposta

4.4.0.1 Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2024

Durante a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia de 2024, realizada na Faculdade de Formação de Professores - UERJ/FFP, foi aplicada a oficina intitulada *Calendário, Data e Dias da Semana*. Essa atividade prática e interativa foi voltada para alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Walter Orlandine, com o objetivo de demonstrar como conceitos matemáticos podem ser aplicados a situações cotidianas por meio do estudo de calendários e datas.

A oficina iniciou-se com uma discussão que instigou a curiosidade dos alunos: seria possível determinar o dia da semana de qualquer data passada ou futura sem o uso de calendários ou dispositivos eletrônicos? Para engajar o público, os cálculos começaram utilizando as datas de aniversário dos próprios alunos, o que aumentou significativamente o interesse e a participação.

Em seguida, foi apresentada uma breve história sobre os calendários, destacando o papel da Matemática na construção do calendário Gregoriano, o sistema em uso atualmente. Os alunos também realizaram exercícios práticos para compreender como o dia da semana avança entre anos comuns e bissextos, e como esses padrões são essenciais para o cálculo baseado na fórmula do *Doomsday*.

Na etapa seguinte, o método foi aplicado em exercícios voltados para calcular o dia da semana de datas históricas e significativas. Por exemplo, os alunos utilizaram o algoritmo para determinar o dia da semana de seus aniversários e de eventos importantes. A atividade destacou a utilidade prática da Matemática aplicada, tornando o aprendizado dinâmico e envolvente.

A oficina foi marcada por um alto nível de engajamento. Os alunos demonstraram

interesse em explorar mais profundamente os conceitos matemáticos apresentados, além de perceberem a aplicação da matemática em problemas do dia a dia. A experiência reforçou que atividades interativas e contextualizadas, como o uso do método *Doomsday*, são eficazes para despertar o interesse e promover um aprendizado significativo.

Figura 9 – Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2024 - Foto 01



Fonte: O autor, 2024

Figura 10 – Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2024 - Foto 02



Fonte: O autor, 2024

4.4.0.2 Atividade com Alunos do 7º Ano do Ensino Fundamental - Colégio Estadual Menezes Vieira

Uma atividade voltada para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental foi realizada no Colégio Estadual Menezes Vieira, com o objetivo de introduzir a matemática por trás do calendário e reforçar operações fundamentais de maneira prática e interativa.

A dinâmica teve início com uma “adivinhação” do dia da semana correspondente às datas de aniversário dos alunos, o que gerou curiosidade e motivação imediatas. Após essa introdução lúdica, os estudantes participaram de exercícios práticos que exploraram conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão, tais como:

- “Se hoje é segunda-feira, que dia da semana será daqui a 14 dias?”
- “Qual será o dia da semana 30 dias após uma quarta-feira?”
- “Quantas semanas completas existem em um mês de 28, 30 e 31 dias?”

Essas atividades permitiram que os alunos observassem os padrões cíclicos dos dias da semana e reforçassem suas habilidades operacionais ao mesmo tempo. Para estimular ainda mais a participação, alunos que se dispuseram a resolver os exercícios no quadro e explicar suas respostas aos colegas foram premiados com pequenos brindes, incentivando a colaboração e a troca de ideias.

Na etapa final, foi realizada uma discussão sobre como a matemática facilita a compreensão de calendários e datas. Os alunos compartilharam suas experiências durante a atividade, refletindo sobre como esses conceitos poderiam ser aplicados no dia a dia, como ao planejar eventos ou lembrar datas importantes.

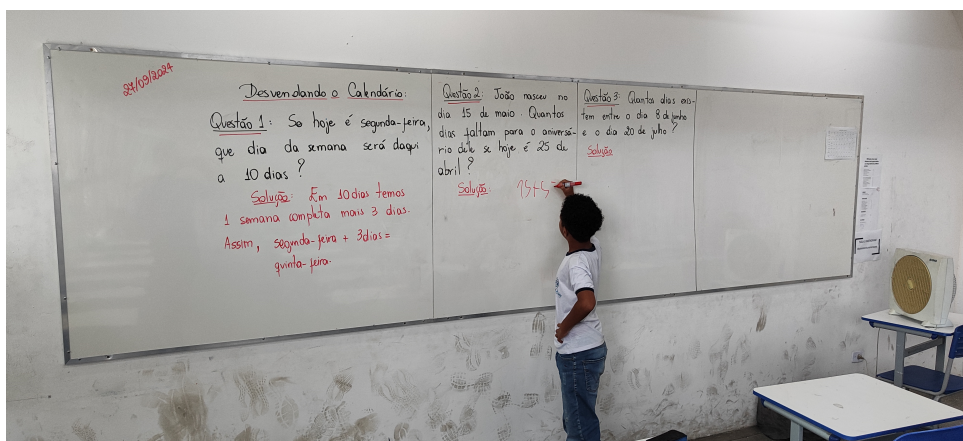
A atividade despertou grande engajamento e interesse, ajudando os alunos a perceberem a matemática como uma ferramenta útil e prática. O uso de exemplos reais e a interação com o calendário proporcionaram um aprendizado significativo, tornando os conceitos matemáticos mais tangíveis e aplicáveis.

Figura 11 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 01



Fonte: O autor, 2024

Figura 12 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 02



Fonte: O autor, 2024

4.4.0.3 Gincana de Perguntas Desafiadoras com Alunos do 1º Ano do Ensino Médio - Colégio Estadual Menezes Vieira

Uma atividade envolvendo a **Gincana de Perguntas Desafiadoras** foi realizada com uma turma do 1º ano do Ensino Médio no Colégio Estadual Menezes Vieira. O

objetivo foi aplicar o Método *Doomsday* de forma prática e dinâmica, estimulando a colaboração e o raciocínio lógico dos alunos.

A turma foi organizada em 4 grupos, cada um com 5 alunos. Para garantir a compreensão do método, cada grupo recebeu uma folha contendo os passos detalhados do algoritmo *Doomsday*, que serviu como guia para os cálculos. A gincana foi estruturada em rodadas, nas quais perguntas desafiadoras eram apresentadas, e os grupos tinham até 10 minutos para realizar os cálculos necessários.

Além das instruções gerais, cada grupo recebeu uma folha específica para cada rodada, com espaços numerados para que pudessem registrar cada etapa do cálculo. Após o tempo destinado à resolução, as perguntas eram resolvidas no quadro pelo professor, com a participação da turma, o que permitiu corrigir eventuais erros e reforçar o entendimento do método.

A competição foi marcada por grande engajamento, com os alunos aplicando o método para calcular o dia da semana de diversas datas históricas e curiosas. Ao final da atividade, houve um empate triplo na pontuação entre os grupos, levando a uma rodada final de desempate. O grupo que entregou primeiro a resposta correta na última rodada foi declarado vencedor da gincana.

Essa experiência destacou a eficácia do uso de atividades interativas para o ensino da Matemática, promovendo a participação ativa e o trabalho em equipe. Além de consolidar o entendimento do Método *Doomsday*, a gincana despertou o interesse dos alunos, que relataram ter se sentido mais motivados a explorar a matemática em situações práticas e cotidianas.

No final da atividade, um aluno comentou: “Professor, bem que o senhor podia dar mais aulas assim.” Esse *feedback* positivo reforça o impacto da abordagem interativa na aprendizagem e no engajamento dos estudantes.

Figura 13 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 03



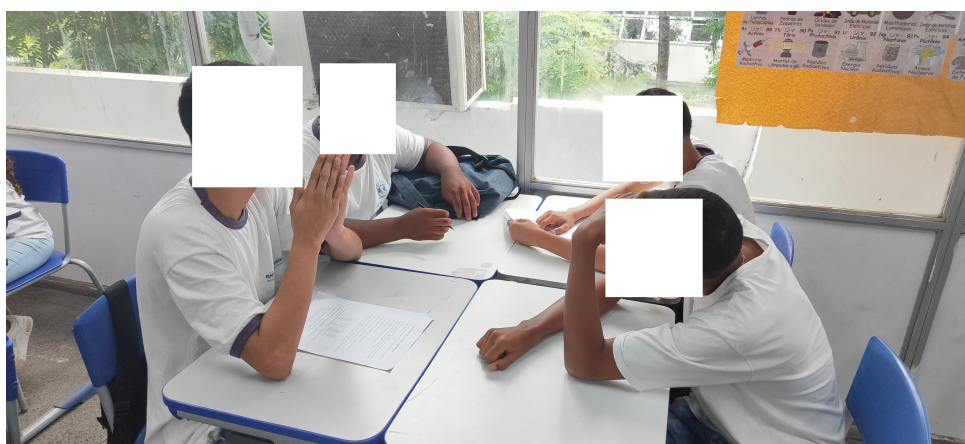
Fonte: O autor, 2024

Figura 14 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 04



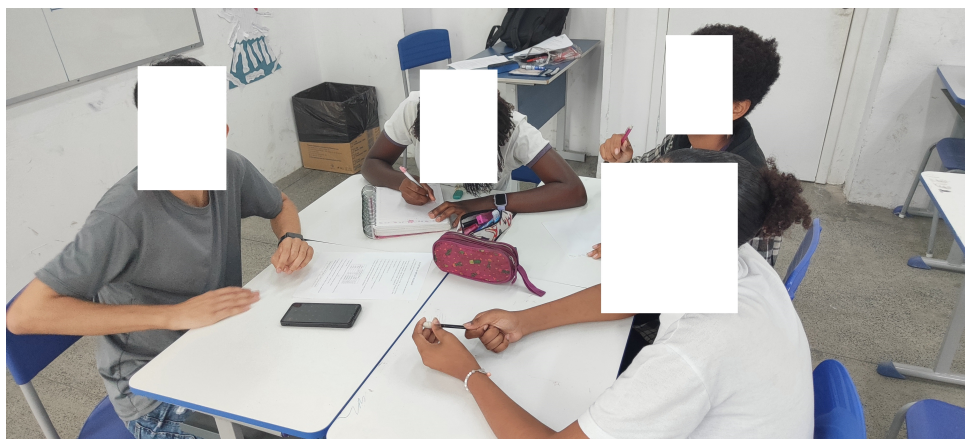
Fonte: O autor, 2024

Figura 15 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 05



Fonte: O autor, 2024

Figura 16 – Colégio Estadual Menezes Vieira - Foto 06



Fonte: O autor, 2024

4.5 Resultados e Conclusões

Tanto na oficina realizada durante a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia quanto nas atividades desenvolvidas com os alunos do 7º ano e do 1º ano do Ensino Médio, os estudantes demonstraram crescente interesse e uma compreensão ampliada da Matemática, especialmente em sua aplicação a problemas cotidianos. A gincana realizada com a turma do 1º ano destacou a importância do trabalho colaborativo e da aplicação prática do Método *Doomsday*, tornando o aprendizado mais envolvente e dinâmico.

Essas atividades mostraram que a Matemática pode ser apresentada de forma interessante, interativa e divertida, conectando conceitos teóricos a aplicações práticas que despertam a curiosidade dos alunos. Além de promover o engajamento, essas experiências proporcionaram o desenvolvimento de habilidades essenciais, como a capacidade de resolver problemas que envolvem múltiplos e divisores, operar com números inteiros e aplicar algoritmos para solucionar questões matemáticas.

A inclusão de elementos interdisciplinares, como História e eventos culturais, tornou a experiência ainda mais enriquecedora, ampliando as conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Essa abordagem contribuiu para tornar as atividades mais relevantes e demonstrou como a matemática pode ser uma ferramenta poderosa e versátil. Essas experiências reforçam o método *Doomsday* como uma estratégia didática inovadora, capaz de proporcionar um aprendizado significativo e engajante, ao mesmo tempo em que estimula o raciocínio lógico, a criatividade e o interesse dos estudantes.

5 CONCLUSÃO

A presente dissertação investigou os fundamentos matemáticos que sustentam os métodos de cálculo para determinar o dia da semana no calendário Gregoriano, com ênfase nas Fórmulas de Zeller e Conway. O estudo iniciou com a introdução de conceitos teóricos essenciais, como divisibilidade, aritmética modular e a função maior inteiro, que constituem a base para a compreensão das fórmulas demonstradas.

Em seguida, as fórmulas de Zeller e Conway foram examinadas em detalhe, com explicações sobre suas estruturas, aplicações e limitações. A Fórmula de Zeller foi destacada por sua precisão e eficiência em contextos computacionais, enquanto o Método *Doomsday* de Conway mostrou-se mais acessível e adequado para fins pedagógicos, devido à sua simplicidade e aplicabilidade em cálculos mentais. Ambas as fórmulas foram implementadas em Python, demonstrando sua viabilidade para automação de cálculos e usos práticos.

Além disso, o trabalho apresentou propostas pedagógicas inovadoras, utilizando o Método *Doomsday* em atividades lúdicas e interativas no ensino da Matemática. Essas atividades conectaram os conceitos matemáticos a situações do cotidiano, despertando o interesse dos alunos e promovendo um aprendizado mais dinâmico e significativo. As aplicações realizadas demonstraram como a matemática pode ser ensinada de forma prática, incentivando o raciocínio lógico e a curiosidade dos estudantes.

Conclui-se que esta pesquisa contribui para o aprofundamento teórico sobre os métodos de cálculo de dias da semana e para a introdução de abordagens didáticas que integram teoria e prática de maneira envolvente. Espera-se que este trabalho sirva de inspiração para novas metodologias no ensino da Matemática, enfatizando sua relevância e aplicabilidade em contextos educacionais e cotidianos.

Como perspectiva futura para a continuidade deste trabalho, os artigos (18) e (19) exploram dois métodos que buscam otimizar a fórmula de Conway, tornando seus cálculos mais eficientes. O aprofundamento nesses estudos possibilitará não apenas uma compreensão mais detalhada das melhorias propostas, mas também a adaptação dessas otimizações para o ensino da Matemática, tornando-o mais dinâmico, interativo e acessível.

Referências

- 1 ROTMAN, Joseph J. *A First Course in Abstract Algebra: With Applications*, 3.ed., New Jersey, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 15, 30, 33 e 47.
- 2 HEFEZ, Abramo. *Aritmética*, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 15, 30, 33 e 47.
- 3 HEFEZ, Abramo. *Exercícios Resolvidos de Aritmética*, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 47.
- 4 SANTOS, José Plínio de Oliveira. *Introdução a Teoria dos Números*, 3. ed., IMPA: Rio de Janeiro, 2020. Citado na página 15.
- 5 MOREIRA, Carlos Gustavo; MARTÍNEZ, Fabio E. Brochero; SALDANHA, Nicolau C. *Tópicos de teoria dos números*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2021. Citado na página 15.
- 6 VIDIGAL, Angela et al. *Fundamentos de álgebra*. UFMG, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 28.
- 7 DUTENHEFNER, Francisco; CADAR, Luciana. *Encontros de Aritmética*. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 47.
- 8 BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática Bianchini*, 6. ano. 9. ed., Moderna, São Paulo: 2018. Citado na página 60.
- 9 MENEGOLLA, Maximiliano; SANT'ANNA, Ilza Martins. *Por que planejar? Como planejar?: currículo, área, aula.*, 21. ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2012. Citado na página 60.
- 10 MORICONI, Marcos. *Qual o problema?*, Rio de Janeiro: Instituto Ciência Hoje, 2009. Citado na página 60.
- 11 CONWAY, John Horton. Tomorrow is the day after Doomsday. *Eureka*, v. 36, p. 28-31, 1973. Citado na página 47.
- 12 BBC BRASIL. *Calendário gregoriano: como papa Gregório 13 mudou contagem dos dias há 440 anos*. BBC News Brasil. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-60496904>. Acesso em: 27 de março de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.

- 13 BBC BRASIL. *Por que precisamos de anos bissextos?*. BBC News Brasil. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/articles/cyjkmzv8jvo>. Acesso em: 27 de março de 2024. Citado na página 30.
- 14 IMPA. *Matemático John Conway morre de Covid-19 aos 82 anos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. Disponível em: <https://impa.br/noticias/matematico-john-conway-morre-de-covid-19-aos-82-anos/>. Acesso em: 10 de agosto de 2024. Citado na página 48.
- 15 SCIENTIFIC AMERICAN. *What Day Is Doomsday? How to Mentally Calculate the Day of the Week for Any Date*. Scientific American. Disponível em: <https://www.scientificamerican.com/article/calendar-algorithm/>. Acesso em: 27 de março de 2024. Citado na página 30.
- 16 GESTÃO EDUCACIONAL. *Júlio César – Quem foi? Biografia, Importância e Obras*. Gestão Educacional. Disponível em: <https://www.gestaoeducacional.com.br/julio-cesar-quem-foi/>. Acesso em: 27 de março de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- 17 WIKIPEDIA. *Carl Friedrich Gauss*. Wikipedia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss. Acesso em: 10 de agosto de 2024. Citado na página 19.
- 18 FONG, Chamberlain. *Methods for Accelerating Conway's Doomsday Algorithm (part 1)*. Disponível em: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1006/1006.3913.pdf>. Acesso em: 20 de março de 2024. Citado na página 78.
- 19 FONG, Chamberlain. *Methods for Accelerating Conway's Doomsday Algorithm (part 2)*. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1010.0765>. Acesso em: 20 de março de 2024. Citado na página 78.
- 20 Brasil. Ministério da Educação. Base Nacional Curricular. Brasília: MEC, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.