Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

Pedro Henrique Alves Justino dos Santos

A Calculadora como Recurso Tecnológico Educativo para o Fortalecimento e Consolidação do Pensamento Aritmético

São Gonçalo
2025

Pedro Henrique Alves Justino dos Santos

A Calculadora como Recurso Tecnológico Educativo para o Fortalecimento e Consolidação do Pensamento Aritmético

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Rosa María García Márquez

São Gonçalo

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/A

FICHA - Biblioteca

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura   Data

Pedro Henrique Alves Justino dos Santos

A Calculadora como Recurso Tecnológico Educativo para o Fortalecimento e Consolidação do Pensamento Aritmético

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 07 de agosto de 2025.

Banca Examinadora:

____
Prof[a.] Dr[a.] Rosa Maria García Márquez (Orientadora)
Faculdade de Formação de Professores DMAT – UERJ

____
Prof[a]. Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros
Instituto de Matemática e Estatística IME – UERJ

____
Profa. Dra. Danielle Gonçalves Teixeira
EPGE Escola Brasileira de Economia e Finanças – FGV
Instituto Brasileiro de Mercados e Capitais - IBMEC – RJ

São Gonçalo

2025

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho, primeiramente, a Deus, minha fonte de luz e força. Foi Ele quem me sustentou nos momentos mais difíceis e nunca permitiu que eu desistisse. Sou grato por Sua infinita misericórdia, por guiar meus passos com sabedoria e por renovar minha esperança a cada novo dia.

Dedico, com profundo carinho, à minha família — especialmente à minha mãe, Rozinélia, e à minha tia, Rozângela — por todo amor, incentivo e presença constante em minha vida; aos meus avós, Geraldo Justino e Glória Alves Justino (in memoriam), que me ensinaram o valor do trabalho e me apoiaram com dedicação durante minha trajetória escolar.

Aos meus amigos, agradeço pelo companheirismo, pelas palavras de encorajamento e pelo apoio nos momentos em que mais precisei. Cada um de vocês fez parte essencial desta jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que tem me guiado dia após dia a realizar os meus sonhos.

Agradeço também à minha família, pelo amor, cuidado e palavras de encorajamento.

Registro, com especial carinho, minha gratidão aos meus professores de Matemática, que me fizeram apreciar essa área do conhecimento que outrora não gostava muito, pois tinha dificuldade em operações, mas, por meio de sua dedicação e palavras de incentivo, fizeram-me superar as minhas dificuldades ensinando desde os conceitos mais simples até os conteúdos mais avançados com paciência e sabedoria acreditando no potencial dos seus alunos.

Não poderia de esquecer dos meus alunos e ex-alunos que através das suas perguntas, desafios e experiências, contribuíram de forma significativa para minhas reflexões ao longo deste trabalho. Em especial, agradeço as minhas turmas do 1º ano do Ensino Médio que participaram dessa pesquisa. Vocês foram parte essencial do meu processo de crescimento como educador e como pesquisador.

Não poderia deixar de reconhecer o apoio, a paciência e a dedicação da minha orientadora, Profa. Rosa García Márquez, que me acompanhou ao longo dessa jornada. Sua orientação generosa e sensível foi fundamental para a concretização deste trabalho.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para esta conquista, o meu mais profundo e sincero agradecimento.

"A nossa escrita é atravessada pelas marcas de nossas vivências, de nossos corpos, de nossos lugares. Nós escrevemos a partir da experiência que temos do mundo."

Conceição Evaristo (2011)

RESUMO

SANTOS, P. H. A. J. *A Calculadora como Recurso Tecnológico Educativo para o Fortalecimento e Consolidação do Pensamento Aritmético.* 2025. 220 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2025.

Esta dissertação apresenta uma proposta didática voltada ao ensino de Números e Álgebra para alunos do 1º ano do Ensino Médio com dificuldades oriundas da ausência de aulas presenciais nos anos finais do Ensino Fundamental, em razão da pandemia da COVID-19. A proposta visa incentivar a participação ativa dos estudantes no processo de aprendizagem, desenvolver habilidades no uso da calculadora para resolver problemas em diversos contextos teóricos e aplicados; promover uma reflexão crítica sobre a estruturação do conjunto dos números racionais de forma intuitiva, oportunizando também a compreensão de algumas demonstrações matemáticas. A pesquisa fundamenta-se em anos de experiência docente e na análise de avaliações recentes, com o objetivo de ressignificar o ensino desses conteúdos, em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018; BRASIL, 2022) e com a incorporação de tecnologias educacionais, especialmente a calculadora. Esse recurso é tratado não apenas como instrumento de cálculo, mas como ferramenta pedagógica para a construção e compreensão de conceitos matemáticos. A metodologia utilizada é a Engenharia Didática, que permite diagnosticar o nível de conhecimento prévio dos alunos, retomar conteúdos fundamentais e conduzi-los à resolução e verificação de expressões aritméticas, com e sem o uso da calculadora. Além disso, são propostos exercícios contextualizados que favorecem um aprendizado progressivo e significativo. As atividades desenvolvidas para os alunos foram concebidas de tal forma que eles pudessem explorar os conceitos, revisar a teoria e realizar as tarefas de forma mais independente favorecendo a autonomia, o desenvolvimento do perfil autodidata e uma participação ativa nesse processo de aprendizagem. Parte desse material dos alunos foi impressa e fornecida num formato de caderno de atividades, com espaços para que registrassem as suas respostas otimizando assim o tempo. Os resultados obtidos foram satisfatórios, evidenciando avanços na aprendizagem, no uso pedagógico da tecnologia e no desenvolvimento da autonomia intelectual dos alunos.

Palavras-Chave: Ferramentas tecnológicas no Ensino. Operações aritméticas elementares. Limitações da calculadora. Números racionais.

ABSTRACT

SANTOS, P. H. A. J. The Calculator as an Educational Technological Resource for Strengthening and Consolidating Arithmetic Thinking. 2025. 220 p. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics in the National Network of the Department of Mathematics of the Faculty of Teacher Training) – Faculty of Teacher Training, State University of Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2025.

This dissertation presents a didactic proposal designed to teach numbers and Algebra to first-year high school students who experienced learning gaps due to the absence of in-person classes during the final years of elementary education, resulting from the COVID-19 pandemic. The proposal seeks to encourage students' active participation in the learning process, develop skills in the use of calculators to solve problems in a variety of theoretical and applied contexts, and foster critical reflection on the structuring of the set of rational numbers in an intuitive way, also providing opportunities to understand selected mathematical demonstrations. The research is grounded in years of teaching experience and in the analysis of recent assessments, with the aim of re-signifying the teaching of these contents, in line with the Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018; BRASIL, 2022) and with the incorporation of educational technologies, particularly the calculator. This resource is addressed not only as a computational tool, but also as a pedagogical instrument for the construction and comprehension of mathematical concepts. The methodology adopted is Didactical Engineering, which makes it possible to diagnose students' prior knowledge, revisit fundamental content, and guide them in solving and verifying arithmetic expressions, both with and without the use of calculators. Furthermore, contextualized exercises are proposed to promote progressive and meaningful learning. The activities developed for students were designed in such a way that they could explore concepts, review theory, and carry out tasks more independently, fostering autonomy, the development of a self-directed learning profile, and active participation in the learning process. Part of this material was printed and distributed in the form of a workbook, with spaces for students to record their answers, thus optimizing time. The results obtained were satisfactory, demonstrating progress in learning, in the pedagogical use of technology, and in the development of students' intellectual autonomy.

Keywords: Technological tools in teaching. Elementary arithmetic operations. Calculator limitations. Rational numbers.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação propõe uma abordagem didática para o ensino de dois campos da Matemática divididos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) – Números e Álgebra, voltados a competências e habilidades específicas do Ensino Fundamental II, baseada na experiência prática do autor e na análise de avaliações realizadas no período pós-pandêmico da COVID-19. A pesquisa é direcionada a estudantes do 1º ano do Ensino Médio que enfrentam dificuldades em conteúdo da Matemática Básica, especialmente devido à ausência de aulas presenciais nos 5º e 6º anos — etapas essenciais para a consolidação desses conhecimentos.

O objetivo geral desta dissertação consiste em promover a consolidação das operações elementares com números inteiros e racionais, incluindo suas propriedades operatórias, e incentivar o uso reflexivo da calculadora como ferramenta pedagógica no ensino de Matemática. Tendo como objetivos específicos: (a) Desenvolver um caderno de atividades pedagógicas voltado para estudantes do 1º ano do Ensino Médio, com ênfase nos conteúdos de números inteiros, números racionais e suas propriedades operatórias, alinhado às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular. (b) Integrar a calculadora como recurso pedagógico no processo de ensino e aprendizagem, promovendo sua utilização não apenas para cálculos, mas como instrumento que favoreça a construção, a reflexão e a compreensão de conceitos matemáticos.

O presente trabalho adota uma abordagem qualitativa, de natureza exploratória e interpretativa, fundamentada na Engenharia Didática (Artigue,1980), contemplando as suas quatro fases. Seu foco está em compreender os significados atribuídos pelos sujeitos aos seus contextos e experiências educacionais, conforme os pressupostos teóricos de Bogdan e Biklen (1994). A investigação prioriza interpretações situadas no ambiente da escola pública e na prática docente, sem pretensão de generalização, adotando uma perspectiva investigativo-reflexiva que entrelaça escrevivências[1] e as percepções do autor.

O caderno de atividades[2], composto por quatro propostas — denominadas Atividades 1, 2, 3 e 4 — foi entregue em formato impresso aos alunos. Seu objetivo foi oferecer um material de apoio voltado à recuperação de conteúdos básicos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental II,

---

[1] O termo *escrevivências* foi cunhado por Conceição Evaristo (2007), em sua obra *Poemas da recordação e outros movimentos.*

[2] No Produto Educacional, apresentado em apêndice, constam dez atividades pedagógicas. As quatro primeiras correspondem às atividades impressas, entregues aos alunos e desenvolvidas em sala de aula, as quais serviram de base para a pesquisa desta dissertação.

cuja aprendizagem foi prejudicada pela pandemia da COVID-19. Além disso, buscou estimular o uso da calculadora como recurso pedagógico, favorecer a reflexão crítica sobre a organização dos números racionais e possibilitar o contato com algumas demonstrações matemáticas de maneira acessível e intuitiva.

A avaliação do desempenho dos alunos ocorreu por quatro instrumentos: (i) o registro das respostas no caderno de atividades impresso; (ii) a participação durante as aulas expositivas, nas quais eram discutidas as resoluções das atividades; (iii) uma avaliação formal individual e presencial composta por questões de múltipla escolha; e (iv) um formulário de *feedback* aplicado ao final do curso, utilizado como instrumento avaliativo, com vistas a captar percepções sobre o desenvolvimento do aluno durante essas aulas de revisão desse projeto.

Os resultados obtidos foram satisfatórios evidenciando avanços significativos na compreensão dos conteúdos, na autonomia intelectual dos estudantes, na aprendizagem do uso consciente das calculadoras.

No primeiro capítulo são apresentados os desafios enfrentados por professores de Matemática diante das lacunas de aprendizagem acumuladas por alunos de séries anteriores, intensificadas pelo período pandêmico da COVID-19, que comprometeu significativamente a educação na maioria das escolas. O capítulo também aborda o uso de metodologias para recuperação da aprendizagem, alinhadas às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destacando a relevância de práticas defendidas por pesquisadores, como a integração de tecnologias no ensino da Matemática e a adoção de abordagens personalizadas, adaptadas às especificidades de cada turma.

No segundo capítulo é apresentada uma breve resenha histórica sobre as máquinas de calcular, desde a antiguidade até a era digital, dando ênfase a origem das calculadoras portáteis no Brasil.

No terceiro capítulo é apresentada a metodologia da engenharia didática e como ela foi utilizada em cada fase para a elaboração das aulas.

No quarto capítulo são apresentadas as quatro atividades pedagógicas as quais foram trabalhadas em sala de aula com aprofundamentos teóricos. Cada atividade incorpora definições fundamentais sobre os números naturais, inteiros e racionais, com ênfase nas propriedades de adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros não negativos, além do uso de sinais de associação, como parênteses, colchetes e chaves. O uso da calculadora é intencionalmente requerido em determinadas atividades, de modo a proporcionar ao aluno a oportunidade de exercitar seu manuseio e, pela prática, compreender tanto os benefícios quanto os cuidados necessários à sua utilização. Também é trabalhada a reflexão sobre os erros decorrentes das limitações das calculadoras, em especial na representação de números com infinitas casas decimais, que são exibidos no visor apenas em forma aproximada.

O quinto capítulo é são apresentados o desempenho dos alunos a partir de quatro instrumentos avaliativos: o registro das respostas no caderno de atividades, a participação nas aulas expositivas, uma avaliação formal individual em formato de prova objetiva e o Formulário de *Feedback* e Histórico de Aprendizagem em Matemática (2020–2025). Essa análise geral envolveu as cinco turmas do 1º ano, incluindo a turma piloto, e permitiu compreender tanto o desempenho acadêmico quanto as percepções dos estudantes sobre o projeto pedagógico desenvolvido.

No último capítulo, apresentam-se as conclusões da pesquisa, destacando os principais achados sobre o aprendizado dos alunos, suas dificuldades e os avanços obtidos com a proposta desenvolvida.

2 DESAFIOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA E A INTEGRAÇÃO DA CALCULADORA COMO RECURSO PEDAGÓGICO

Apesar das recomendações expressas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e em outras diretrizes recentes, o uso da calculadora no Ensino Básico ainda é pouco explorado nas salas de aula brasileiras. Embora o recurso esteja presente em diversos livros didáticos como ferramenta auxiliar, seu uso permanece limitado, muitas vezes restrito a momentos pontuais e sem articulação com o desenvolvimento do raciocínio matemático. Entre os fatores que contribuem para esse cenário, destacam-se o tempo reduzido para cumprir o currículo, a escassez de materiais pedagógicos voltados especificamente ao uso de calculadoras, a preocupação com a possível dependência do dispositivo e, não raro, um certo preconceito por parte de professores de Matemática em relação à presença da máquina no processo de ensino-aprendizagem.

Pode-se cogitar aqui que uma pessoa com uma máquina dessas possa ficar preguiçosa em aprender como fazer os cálculos matemáticos sem o uso da máquina; mas será que aprender matemática básica ligada as operações e a teoria dos conjuntos não são mais necessárias? Esse tipo de preocupação é comum, mas muitos autores argumentam que o uso da calculadora, quando bem orientado, não substitui o aprendizado dos conceitos matemáticos — pelo contrário, pode até fortalecê-lo, conforme afirma Lorenzato (2006, p. 96):

"O uso da calculadora não significa o abandono do cálculo mental ou das habilidades operatórias, mas sim um recurso que pode ser utilizado para explorar ideias matemáticas mais complexas, liberando o aluno da execução de algoritmos mecânicos."

Sem a teoria matemática, diversos resultados encontrados na calculadora não fazem sentido. Portanto, o letramento matemático[3] é fundamental para adquirir uma visão crítica do resultado obtido por essas máquinas sejam nas quatro operações aritméticas básicas até as mais avançadas na resolução de problemas teóricos até os aplicados a outras áreas do conhecimento. Até porque essas máquinas possuem limitações e até mesmo erram em determinados cálculos.

> "O uso da calculadora, por exemplo, exige que o aluno tenha um bom domínio das operações e compreenda os significados dos procedimentos realizados, pois a máquina não pensa nem decide pelo usuário. Ela apenas executa comandos." Moura (1996, p. 87).

---

[3]Segundo a Matriz do Pisa 2012, o "letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas

A calculadora gráfica parece ser um instrumento eficaz na prática da educação STEAM[4], bem como para desenvolver o pensamento computacional dos alunos por meio da análise e decomposição de problemas reais, além do engajamento no processo de abstração e elaboração de um algoritmo utilizando codificação (Corrienna, *et al*., 2019).

Complementarmente, é proposto um caderno consumível, elaborado com o objetivo de agilizar o tempo de revisão dos conteúdos abordados, possibilitando ao aluno registrar diretamente suas resoluções, raciocínios e estratégias, como sugerido por Libâneo (2013), ao enfatizar a importância de materiais didáticos adaptados às necessidades pedagógicas do estudante. Este projeto apresenta um material de revisão intensiva para alunos que apresentaram defasagens na aprendizagem desses conteúdos ao longo do Ensino Fundamental. O material foi concebido, prioritariamente, para ser aplicado a turmas do 1º ano do Ensino Médio em 2025. A motivação do autor está relacionada ao fato de que muitos desses estudantes não frequentaram regularmente os anos escolares de 5º e 6º anos durante o período da pandemia da COVID-19, o que comprometeu significativamente sua base de conhecimentos matemáticos. Nesse contexto, a proposta se alinha às diretrizes da recuperação das aprendizagens indicadas por Freitas e Costa (2021), que defendem ações pedagógicas estruturadas e contextualizadas para minimizar os impactos da crise sanitária no desempenho escolar.

As dificuldades dos alunos nas operações aritméticas básicas refletem diretamente na aprendizagem de conteúdos mais complexos da Matemática, como a resolução de expressões, problemas algébricos e funções. Estudos apontam que tais dificuldades têm origem, em grande parte, em falhas na aprendizagem inicial e na ausência de estratégias pedagógicas eficazes (Carvalho *et al.*, 2004). A situação se agravou ainda mais com a pandemia da COVID-19, período em que milhões de estudantes ficaram sem aulas presenciais, acumulando lacunas em conhecimentos fundamentais, especialmente em conteúdos como números e operações aritméticas.

Paralelamente, dados sobre o analfabetismo funcional no Brasil (Noronha, 2025) revelam que muitos estudantes não compreendem plenamente o que leem ou escrevem, e enfrentam obstáculos semelhantes quando lidam com informações numéricas e simbólicas. Esse contexto evidencia a necessidade urgente de propostas pedagógicas que combinem recursos tecnológicos

---

[4] O termo STEAM é um acrônimo em inglês para *Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics* (Ciência, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática), modelo educacional que integra essas áreas de forma interdisciplinar.

e estratégias didáticas inovadoras para favorecer a construção significativa do conhecimento matemático.

Após o barateamento das calculadoras portáteis e atualmente pela sua acessibilidade em dispositivos móveis, ela pode exercer um papel transformador no processo de ensino e aprendizagem. No entanto, seu potencial ainda é pouco utilizado no ambiente escolar. Muitos estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, mesmo inseridos em uma sociedade digital, tem dificuldade em utilizar corretamente as funções básicas da calculadora. Essa constatação reforça a ideia de que o simples acesso à tecnologia não garante a aprendizagem efetiva, sendo necessário criar oportunidades orientadas pelo professor para uso pedagógico.

Ao longo da história, a capacidade de realizar operações aritméticas foi vista como essencial para a autonomia dos cidadãos. Até poucas décadas atrás, era comum que profissionais do comércio realizassem cálculos de cabeça ou com papel e lápis. Com a popularização das calculadoras portáteis a partir da década de 1970, iniciou-se uma transformação profunda nas práticas comerciais e na própria relação da sociedade com o cálculo. Hoje, seu uso é indispensável em muitas profissões e atividades cotidianas, principalmente pela precisão e agilidade que proporciona.

Neste trabalho, a calculadora é utilizada como eixo central para estruturar o ensino-aprendizagem, promovendo engajamento, pensamento computacional, raciocínio lógico e reflexão sobre operações aritméticas, incentivando uma compreensão crítica da lógica por trás das funções da calculadora.

2.1 BNCC e o uso das calculadoras em sala de aula

A BNCC, publicada em 2018, é, basicamente, um guia que estabelece quais competências e habilidades os estudantes brasileiros precisam desenvolver ao longo de sua trajetória escolar. É um documento normativo, que deve ser seguido por todas as escolas do país, servindo como base para garantir um ensino mais uniforme e igualitário em todo o território nacional. Nela, a Matemática está organizada em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

De acordo com a BNCC, a unidade temática **Números** tem como principal objetivo desenvolver o pensamento numérico, relacionado à capacidade de contar, quantificar, julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. Também estão presentes nesse eixo as noções de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem. A unidade temática **Álgebra**, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e de outros símbolos. Essas duas unidades temáticas da BNCC fazem parte do escopo das atividades propostas aos alunos, apresentadas no capítulo 4 desta dissertação.

No que se refere ao uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem, destacam-se a seguir a 5ª competência geral da BNCC e a 5ª competência específica de Matemática:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação [TDIC] de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BNCC, 2018, p.9)
>
> Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnológicas digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados. (BNCC, 2018, p.267)

Cabe ressaltar aqui que as duas competências acima da BNCC não citam a calculadora de forma explícita, mas, ao reconhecer ferramentas digitais e ao recomendar o uso de tecnologias no ensino de Matemática, abre espaço para a utilização das calculadoras eletrônicas como recurso pedagógico de forma crítica, reflexiva e ética.

A Palavra “Calculadora” na BNCC

A palavra “calculadora” é mencionada explicitamente 13 vezes na BNCC. Essas ocorrências estão organizadas e apresentadas na seguinte ordem:

> No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa em relação a essa temática é que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de **calculadoras**. (BNCC, 2018, p. 268).
>
> Merece destaque o uso de tecnologias – como **calculadoras**, para avaliar e comparar resultados, e planilhas eletrônicas, que ajuda na construção de gráficos e nos cálculos das medidas de tendência central. A consulta a páginas de institutos de pesquisa – como a do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) – pode oferecer contextos potencialmente ricos não apenas para aprender conceitos e procedimentos estatísticos, mas também para utilizá-los com o intuito de compreender a realidade.” (BNCC, 2018, p. 274).
>
> Nessa fase, as habilidades matemáticas que os alunos devem desenvolver não podem ficar restritas à aprendizagem dos algoritmos das chamadas “quatro operações”, apesar de sua importância. No que diz respeito ao cálculo, é necessário acrescentar, à realização dos algoritmos das operações, a habilidade de efetuar

> cálculos mentalmente, fazer estimativas, usar **calculadora** e, ainda, para decidir quando é apropriado usar um ou outro procedimento de cálculo. (BNCC, 2018, p. 276).
>
> Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, **calculadoras**, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. (BNCC, 2018, p. 276).
>
> (EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a **calculadora** quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas. (BNCC, 2018, p. 291)
>
> (EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e **calculadora**, em contextos de educação financeira, entre outros. (BNCC, 2018, p. 295)

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, **calculadoras**, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. (BNCC, 2018, p. 298)

> (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de **calculadora**. (BNCC, 2018, p.301)
>
> “(EF06MA09)[5] Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso da **calculadora**.” (BNCC, 2018, p.301)
>
> (EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de **calculadora**. (BNCC, 2018, p.301)
>
> (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e **calculadora**, em contextos de educação financeira, entre outros. (BNCC, 2018, p. 301)
>
> (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias

[5] O código EF06MA09 refere-se a uma habilidade de Matemática na BNCC. Nele, EF indica Ensino Fundamental; 06 corresponde ao 6º ano; MA identifica a área de Matemática; e 09 representa o número sequencial da habilidade dentro desse contexto específico.

> pessoais, cálculo mental e **calculadora**, no contexto de educação financeira, entre outros. (BNCC, 2018, p. 307)

Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como **calculadoras** e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolverem o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. (BNCC, 2018, p. 528)

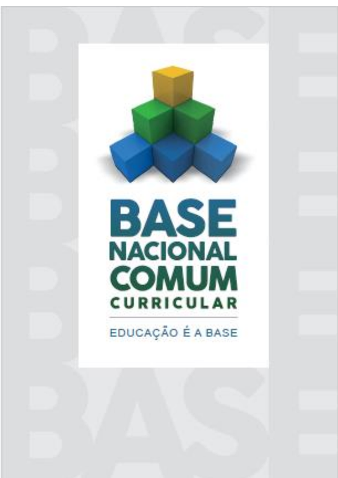
A BNCC reconhece a importância do uso da calculadora como recurso pedagógico no ensino da Matemática; entretanto, não estabelece regras rígidas sobre sua utilização, deixando essa decisão a cargo dos professores e das escolas, conforme os objetivos de aprendizagem.

Os livros distribuídos pelo Ministério da Educação (MEC) através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) seguem regras rígidas para serem aprovados. As obras didáticas submetidas pelos autores só são aprovadas para participar no PNLD se estiverem de acordo com a BNCC. Os livros didáticos de Matemática foram bastante modificados nesse sentido.

A BNCC da Computação e Suas Conexões com os livros Didáticos de Matemática

Em 2022, foi publicado o complemento da BNCC que trata do ensino de computação. Esse documento define as habilidades obrigatórias para todas as etapas da Educação Básica. Segundo a BNCC da Computação (BRASIL, 2022), o ensino de computação deve ser incorporado à Educação Básica de modo a desenvolver competências relacionadas ao pensamento computacional, à cultura digital e à cidadania digital.

Figura 1: a) Capa da BNCC (2018). b) Capa da BNCC da Computação (2022)

(a) 

(b) 

Fonte: (a) BRASIL (2018), (b) BRASIL (2022)

No caso particular da Matemática, por sua proximidade com a área da Computação, observa-se a introdução de alterações significativas nas seções voltadas ao uso de tecnologias educacionais, incorporando práticas como programação em Sketch, exploração no Geogebra, utilização de planilhas em Excel e LibreOffice e a construção de fluxogramas, alinhados ao pensamento computacional. Essas inserções ampliam a perspectiva de ensino, conectando a Matemática a contextos digitais e tecnológicos cada vez mais presentes no cotidiano dos estudantes, e favorecem a integração entre raciocínio lógico, resolução de problemas e alfabetização digital, em consonância com as orientações da BNCC e da BNCC da Computação (BRASIL, 2018; BRASIL, 2022).

Na BNCC (2018, p. 474), retomada e aprofundada no complemento de 2022 referente à Computação, os três eixos temáticos são definidos da seguinte forma:

- **pensamento computacional:** envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- **mundo digital:** envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes, sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- **cultura digital:** envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

2.2 Pesquisadores e argumentos em relação ao uso das calculadoras

A chegada das calculadoras eletrônicas às escolas sempre despertou debates pedagógicos. Para alguns, elas representam um recurso importante para conferir resultados e investigar padrões matemáticos. Para outros, trazem o risco de criar dependência e enfraquecer o raciocínio algébrico. Nesta seção busca-se explicitar mais detalhadamente sobre os benefícios desse uso segundo pesquisadores renomados.

- Segundo a BNCC, é importante destacar que a visão da BNCC não é neutra; ela se insere em um movimento de internacionalização curricular, alinhado a outras pesquisas e propostas ao redor do mundo que também defendem o uso de calculadoras. Portanto, a BNCC reconhece o valor das tecnologias digitais — entre elas, a calculadora — como recursos que contribuem para o desenvolvimento do pensamento matemático e para a promoção do letramento digital.

- O matemático britânico Conrad Wolfram, especialista em tecnologia educacional, responsável pela criação dos softwares *Mathematica* (1988) e *Wolfram Alpha* (2009), ambos voltados à computação matemática, afirma:

> A matemática ensinada atualmente ao redor do mundo não corresponde à forma como é utilizada no mundo real. A tecnologia de computação está mais acessível do que nunca, mas nenhum currículo no mundo parte do pressuposto de que ela existe. Em vez disso, o foco permanece nos mecanismos do cálculo manual, e não na essência da matemática aplicada ao mundo real.[6] (WOLFRAM apud VANDER ARK, 2020, tradução nossa)

- O matemático britânico-americano Keith Devlin, professor emérito da Universidade de Stanford e autor de inúmeros livros e artigos acadêmicos. Suas pesquisas concentram-se em áreas como cognição matemática e teoria da informação. Também atua na área da tecnologia educacional no desenvolvimento de jogos voltados para a aprendizagem da Matemática. No fragmento do seu artigo citado a seguir, ele reflete sobre as suas habilidades adquiridas ao longo de sua formação escolar e universitária e defende uma concepção de currículo no qual valoriza o pensamento matemático, ao invés de focar em cálculos exaustivos que as máquinas podem executar.

> “A habilidade valiosa que adquiri na minha formação escolar e universitária não foi a capacidade de executar uma variedade de procedimentos matemáticos, mas o domínio de uma forma específica de pensar: aquilo que alguns de nós temos chamado de pensamento matemático. Aspectos importantes desse pensamento incluem explorar, questionar, trabalhar de forma sistemática, visualizar, conjecturar, explicar, generalizar, justificar e demonstrar (excluindo, porém, a

---

6 O texto em língua inglesa é: “The maths taught around the world today does not fit how it is used in the real world. Computation technology is more accessible than ever before, but no curriculum in the world assumes it exists. Instead, it is focussed on the mechanics of hand calculation, rather than the essence of real-world maths,”

> execução de procedimentos formais, seja realizada por máquinas ou vista como uma atividade mecânica de 'nível inferior')."[7] (DEVLIN, 2021, p. 1, tradução nossa).

Wolfram e Devlin convergem em uma mesma linha de reflexão: diante dos avanços tecnológicos, o currículo de Matemática precisa ser repensado para que o estudante tenha mais espaço para desenvolver habilidades de pensamento matemático (formulação e resolução de problemas) mais do que o treinamento em cálculos complexos — que podem ser realizados pelas máquinas —, trata-se de direcionar o tempo de aprendizagem para o aprofundamento em aspectos teóricos e práticos que, impulsionados pelo desenvolvimento tecnológico, abriram novos desafios e campos de estudo. Em síntese, ambos defendem a necessidade de uma transformação radical no currículo e no ensino da Matemática com a adoção do uso das tecnologias, e, portanto, o uso da calculadora é essencial. Essas mudanças curriculares, defendidas pelos defensores do uso da calculadora está relacionado ao conceito de Educação 4.0.

Segundo Fonseca *et al.* (2025), entende-se como Educação 4.0 um paradigma educacional influenciado pela Quarta Revolução Industrial (Indústria 4.0), cujo propósito é preparar as pessoas para os desafios do século XXI, integrando, assim, ao processo de ensino-aprendizagem as tecnologias emergentes.

Nesta perspectiva, deseja-se, portanto, que os estudantes de hoje possam conseguir atuar com tecnologias digitais como Inteligência Artificial (IA), Internet das Coisas (IoT)[8], robótica e automação, desenvolvendo também pensamento crítico, autonomia e habilidades de resolução de problemas complexos.

Na sua tese de doutorado em Educação, intitulada "A Visão dos Professores de Matemática do Estado do Paraná em Relação ao Uso de Calculadora nas Aulas de Matemática" (1999), o professor Gomes de Oliveira pesquisou as concepções de 141 docentes do primeiro, segundo e/ou terceiro grau, professores de Matemática de diversos municípios da rede estadual de ensino do Paraná. A pesquisa revelou que 64 professores incorporavam a calculadora em suas práticas pedagógicas de ensino de Matemática, enquanto 76 optavam por não a utilizar e um entrevistado se manteve neutro.

---

7 O texto em língua inglesa é: "The maths taught around the world today does not fit how it is used in the real world. Computation technology is more accessible than ever before, but no curriculum in the world assumes it exists. Instead, it is focussed on the mechanics of hand calculation, rather than the essence of real-world maths,"

8 A sigla para "Internet das Coisas" em português é IoT, que corresponde a expressão inglesa *Internet of Things*.

No Quadro 2, Gomes de Oliveira (1999) apresenta os motivos da não utilização da calculadora, dentro desses dados, 31,9% dos pesquisados responderam “não sei trabalhar com a calculadora”, 11.1% falaram “Ainda não senti necessidade”, 8% deles disseram “A Direção da Escola não permite”. Em geral, os professores que não permitem seus alunos usarem a calculadora em nenhum momento da aula argumentam que o aluno que não sabe realizar as operações básicas ou de realizar outros cálculos matemáticos, teriam grande dificuldade de superar essas dificuldades com a permissão da máquina, já que estes ficariam dependentes. Alegando um prejuízo no desenvolvimento do raciocínio matemático, na agilidade de fazer as operações aritméticas manualmente e mentalmente.

No Quadro 16, Gomes de Oliveira (1999) apresenta as justificativas dos professores que utilizam calculadora em sala de aula e algumas das respostas são: “Para realizar exercícios, efetuar cálculos, o aluno realiza as operações de acordo com o exercício proposto”; “Como recurso para facilitar o trabalho em cálculos ou para comprovar o resultado obtido.”; “Para o auxílio de cálculos, na correção de exercícios, para agilizar alguns conteúdos”.

Em geral os argumentos dos docentes que permitem o uso das calculadoras são para que os alunos possam se beneficiar ao máximo do uso das calculadoras, é fundamental encontrar um equilíbrio distinguindo quando ela pode ser usada na aula. Muitos educadores e matemáticos acreditam que é importante garantir que os estudantes tenham uma base sólida nos cálculos básicos antes de começar a usar essas ferramentas. Por outro lado, muitas vezes, existem contextos, onde o uso da calculadora é necessário. Ressalta-se aqui, por exemplo, alunos com dificuldades de discalculia, ou que estão nesse processo de aprendizagem há anos, e não conseguem aprender alguns conceitos e ideias, pois estes dependem das operações aritméticas básicas.

3 BREVE RESENHA HISTÓRIA SOBRE AS CALCULADORAS

Este capítulo apresenta uma breve história das máquinas de calcular, desde a Antiguidade até os dias atuais, com ênfase na introdução das calculadoras no Brasil. Ao final, é incluída uma cronologia resumida dessas máquinas, destacando marcos significativos de sua evolução.

3.1 A História das Máquinas de Calcular: Da Antiguidade à Era Digital

As máquinas de calcular desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento da ciência, tecnologia e sociedade. Desde os primeiros dispositivos mecânicos até as modernas calculadoras eletrônicas, a evolução desses instrumentos reflete o avanço do conhecimento humano. Nesta seção, destaca-se a trajetória histórica das máquinas de calcular, destacando suas principais inovações e impactos.

A história das máquinas de calcular reflete a evolução da tecnologia e do pensamento humano. De simples instrumentos manuais a sofisticados dispositivos eletrônicos, essas máquinas desempenharam um papel crucial no avanço da ciência e da sociedade. Com a digitalização[9] e a inteligência artificial, o futuro dos cálculos parece cada vez mais integrado aos computadores e à automação.

A necessidade de realizar cálculos precisos e rápidos acompanha a humanidade desde os primórdios da civilização. Com o desenvolvimento do comércio, da engenharia e da astronomia, surgiram dispositivos que facilitavam os cálculos e minimizavam erros. A evolução das máquinas de calcular, desde o ábaco até os sofisticados computadores atuais, representa um marco na história da tecnologia.

3.2 Os Primeiros Dispositivos de Cálculo

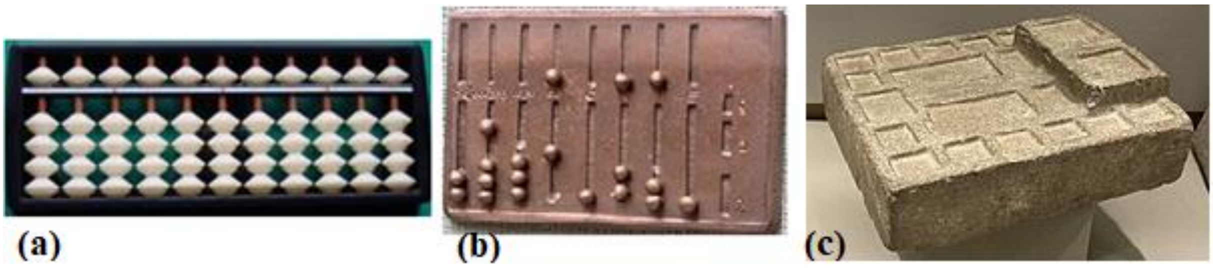
a) O Ábaco: é considerado uma das primeiras ferramentas de cálculo da humanidade e usado até a atualidade em concursos orientais. Segundo García, *et al.* (2009), o ábaco tem origens antigas e incertas, com evidências apontando para múltiplas civilizações. Com a intensificação do comércio, navegação, vida urbana etc., a necessidade de calcular era eminente. A falta de familiaridade com as diferentes simbologias e a dificuldade material atrapalhava a realização

[9] A palavra digitalização refere-se ao processo global de transformar atividades, processos, produtos e serviços que antes eram analógicos ou manuais em formatos e sistemas digitais, permitindo automação, integração com *softwares* e uso de dados em grande escala.

de operações aritméticas simples. A saída para este problema, ao que tudo indica, foi o uso de um instrumento de cálculo rudimentar, chamado ábaco.

O ábaco é considerado a primeira ferramenta de cálculo criada pelo ser humano, entre 2700 e 2300 a.C. na Suméria (Wazalawick, 2016). O ábaco foi amplamente utilizado pelas antigas civilizações, como os chineses, romanos, egípcios e incas, conforme são mostrados na Fig. 1 (García, *et al*. 2009). Os ábacos orientais consistiam em uma estrutura com contas deslizantes (Fig. 1a) que auxiliam na realização de operações matemáticas básicas. A Yupana era feita com cerâmica, madeira ou era desenhada na terra, possui um sistema de cavidades organizadas em caixas geométricas, onde colocavam semente ou pedrinhas (Poma de Ayala, 1993). Seu funcionamento é diferente dos ábacos usados por outras culturas.

Figura 2: a) Ábaco japonês-soroban. b) Ábaco romano-Calculi. c) Ábaco Inca-Yupana.



Fonte: Extraído de García *et al.* (2009)

b) A Régua de Cálculo: No século XVII, John Napier introduziu os logaritmos, facilitando cálculos complexos. Logo depois, em 1622, William Oughtred desenvolveu a régua de cálculo, um instrumento baseado em escalas logarítmicas utilizado até meados do século XX/ década de 1970 para cálculos científicos e de engenharia.

Figura 3: Régua de Cálculo

Fonte: Extraído de Kilhian (2010).

3.3 As Primeiras Máquinas Mecânicas

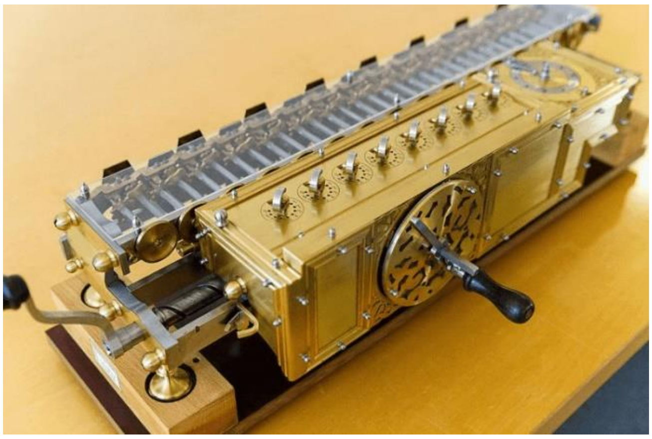
a) **A Máquina de Pascal**: Em 1642, Blaise Pascal inventou a "Pascalina" (Fig. 3), uma calculadora mecânica capaz de somar e subtrair números automaticamente. Esse dispositivo foi um dos primeiros passos rumo à automação dos cálculos.

Figura 4: A calculadora Pascalina, criada por Pascal em 1642.

Fonte: Extraído de Kilhian (2010).

b) **A Máquina de Leibniz:** Gottfried Wilhelm Leibniz aprimorou o conceito da Pascalina ao desenvolver, em 1673, o primeiro protótipo da "Máquina de Leibniz", como pode ser observada na Fig. 4, o modelo definitivo saiu em 1694, e podia realizar as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Figura 5: Máquina de Leibniz



Fonte: Extraído de Kilhian (2010).

c) As Máquinas de Babbage: No século XIX, Charles Babbage projetou a "Máquina Diferencial" e a "Máquina Analítica", consideradas precursoras dos computadores modernos. A Máquina Analítica, em especial, já incluía conceitos como memória, unidade de processamento e programas armazenados.

3.4 A Revolução das Calculadoras Eletrônicas

Entre as décadas de 1960 e 1970, o surgimento de calculadoras eletrônicas transformou a forma como cálculos complexos eram realizados, dentro delas podemos citar:

a) As Calculadoras Eletromecânicas: No início do século XX, surgiram calculadoras baseadas em circuitos elétricos e mecânicos, como as da empresa IBM. Elas foram amplamente utilizadas em escritórios e universidades.

b) **A Era das Calculadoras Eletrônicas:** A partir da década de 1960, com o avanço da eletrônica e dos semicondutores, surgiram as calculadoras eletrônicas portáteis. Empresas como Texas Instruments e Hewlett-Packard lançaram modelos acessíveis e eficientes, tornando as calculadoras indispensáveis no ensino e na engenharia. A calculadora eletrônica portátil é um instrumento tecnológico desenvolvido para realizar operações matemáticas de forma automatizada, rápida e precisa. Seu funcionamento baseia-se em circuitos integrados que processam, por meio de algoritmos programados, os dados numéricos inseridos pelo usuário por meio de um teclado. O resultado das operações é exibido em um visor digital, facilitando a visualização imediata. Existem modelos básicos, que realizam as quatro operações fundamentais, e modelos científicos, que executam funções mais complexas, como raízes, potências, logaritmos e cálculos trigonométricos.

c) **A Digitalização e a Computação:** Com o desenvolvimento dos microprocessadores na década de 1970, os computadores pessoais começaram a substituir as calculadoras especializadas. Hoje, os *software*s de cálculo, como o Excel e os sistemas de álgebra computacional, oferecem capacidades muito além das máquinas tradicionais.

3.5 Origens das calculadoras eletrônicas portáteis no Brasil

A introdução das calculadoras eletrônicas portáteis no Brasil está profundamente relacionada ao contexto da industrialização nacional nas décadas de 1970 e 1980, impulsionada pelos incentivos da Zona Franca de Manaus (ZFM) e pelo modelo de substituição de importações (SUFRAMA, [s.d.]). Esses dispositivos, inicialmente considerados itens de luxo, tornaram-se gradualmente acessíveis graças à produção local e à disseminação de tecnologias digitais. A seguir é apresentada uma cronologia resumida das calculadoras no Brasil.

3.6 Cronologia da Origem e Evolução das Calculadoras no Brasil

- **1972** – O empresário Matias Machline, ao assumir o controle da Sharp do Brasil, inaugurou uma fábrica da marca na Zona Franca de Manaus, com apoio da Superintendência da Zona Franca de Manaus (SUFRAMA). Começa a montagem local de calculadoras eletrônicas portáteis, até então importadas do Japão e dos Estados Unidos (SUFRAMA, [s.d.]).
- **1973** – Surge a Dismac Industrial S.A., fundada por Joseph Martin Feder, também com sede em Manaus. A empresa inicialmente fabrica máquinas de escrever, mas logo passa a produzir calculadoras mecânicas e, posteriormente, eletrônicas (SUFRAMA, [s.d.]).
- **Década de 1970** – Com políticas de incentivo à produção nacional, a Sharp e a Dismac ganham espaço no mercado interno. As calculadoras portáteis se popularizam entre profissionais da contabilidade, engenharia e administração (SUFRAMA, [s.d.]).
- **1979** – A Dismac atinge o pico de exportações e se torna a maior exportadora brasileira de calculadoras de mesa, detendo aproximadamente 60% do mercado nacional.
- **1984** – A Sharp do Brasil lança, com montagem em Manaus, a calculadora científica EL-531, com visor de 10 dígitos e 32 funções. Este modelo se torna amplamente utilizado em escolas técnicas e universidades (SUFRAMA, [s.d.]).
- **Décadas de 1980–1990** – O uso de calculadoras científicas se intensifica no ensino médio e superior. Os debates educacionais sobre o papel das tecnologias no ensino da matemática ganham força (BRASIL, 1998).
- **Década de 1990** – Com a abertura econômica, o mercado nacional passa a competir com produtos importados (Santos, 2014). Ainda assim, a produção em Manaus se mantém relevante, amparada por legislações que incentivam os chamados Processos Produtivos Básicos (PPBs) (FGV Projetos, 2018).

4 ENGENHARIA DIDÁTICA E O ENSINO DE NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo é apresentada a Engenharia Didática, uma metodologia de ensino estruturada em quatro fases, adaptadas à consolidação dos conceitos de números inteiros e racionais, com e sem o uso de calculadora. Cada fase é explorada, destacando sua aplicação no ensino das propriedades das operações fundamentais: adição, subtração multiplicação e divisão (+, -, ×, ÷).

4.1 A Engenharia Didática

A Engenharia Didática é uma metodologia fundamentada na teoria das Situações Didáticas, desenvolvida inicialmente pelo teórico francês Guy Brousseau (1933-2024), e aprimorada na década de 1980 pela pesquisadora francesa Michèle Artigue (1946 --), laureada com a medalha Felix Klein em 2013. Esta metodologia propõe tratar o ensino como um processo que pode ser sistemático, planejado, testado e analisado, à semelhança de um projeto de "engenharia".

Segundo Carneiro (2005):

A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula.

A Engenharia Didática combina elementos teóricos e práticos para criar situações de aprendizagem que promovam a interação ativa do aluno com o conteúdo matemático. Fundamentada na ideia de que o conhecimento é construído pelo aluno em um ambiente cuidadosamente planejado pelo professor, essa metodologia propõe cenários ou problemas que desafiam o aluno a raciocinar e descobrir soluções. Durante o processo, o professor observa, ajusta e analisa a aprendizagem, promovendo um ensino dinâmico e reflexivo (Almouloud; Coutinho, 2008). Portanto, a engenharia didática pode ser entendida como uma metodologia de pesquisa ou como a criação de uma sequência didática para o ensino de um conteúdo específico, de forma planejada, conforme é apresentado nas teses de doutorado de Oliveira (2015) e Bianchini (2001).

De acordo com Artigue (1996), esta metodologia é composta por quatro fases principais, organizadas de forma cíclica e reflexiva de forma clara e estruturada, elas são:

1. Análise Preliminar (Concepção Inicial)
2. Analise a priori e planejamento da sequência didática (Plano de Aula)
3. Implementação da sequência didática e observações.
4. Análise e possível validação.

4.2 Primeira fase: Análise Preliminar

Nesta fase, o professor estabelece os tópicos e a forma a serem trabalhados e abordagem a ser adotada, avaliando o conhecimento prévio dos discentes, ou seja, o que já dominam ou desconhecem esses temas. Também identifica possíveis dificuldades e variáveis didáticas. É um momento de planejamento detalhado, em que o professor deve estar aberto a ajustes e à melhoria das estratégias didáticas propostas (Oliveira, 2015).

No estudo de caso, o objetivo principal é consolidar os conceitos matemáticos fundamentais relacionados aos números inteiros, racionais e suas propriedades, por meio de exercícios práticos e a calculadora eletrônica como ferramenta complementar. Com isso, busca-se promover a familiaridade do aluno com a calculadora como recurso matemático, reforçar a compreensão das propriedades por meio de experimentação prática e suprir as lacunas aprendizado decorrentes à pandemia (2020-2022).

Análise do público: Identificar o nível dos alunos do 1º ano do Ensino Médio, considerando as possíveis dificuldades no entendimento das propriedades dos números inteiros, na ordem das operações quando as expressões aritméticas envolvem chaves, colchetes ou parênteses. Considerar possíveis dificuldades ou erros ao inserir dados na calculadora (como confundir teclas), interpretação incorreta de resultados (ex.: $6 \div 2 = 3$, mas $2 \div 6 = 0{,}333\ldots$), problemas com os números decimais (ex. confundir 6,2 com 6.2).

Análise da relação entre teoria e experiência: Relacionando as propriedades às operações fundamentais e ao uso da calculadora. Por exemplo, a comutatividade da adição pode ser verificada calculando $8 + 3$ e $3 + 8$, observando resultados iguais.

Análise institucional: Verificar recursos disponíveis, isto é, calculadoras (básicas, científicas ou calculadoras de celulares), tempo de horas-aula disponíveis (4 horas/aula), currículo (A Base Nacional Comum Curricular - BNCC, que enfatiza operações aritméticas e uso de tecnologias). Assim como também analisar as possíveis restrições, como que alunos podem não ter calculadoras próprias, nem celulares; ou a direção escolar não permita o uso de celulares em sala de aula.

Verificar o conhecimento prévio sobre a revolução tecnológica, modelos de calculadoras eletrônicas e sobre o aplicativo nos celulares de calculadoras.

4.3 Segunda Fase: Analise a priori e planejamento da sequência didática

Nesta etapa, são definidas as ações relacionadas ao objetivo a ser atingido e elaborado um plano de ação. Devem ser definidos:

1. Objetivo da Aula
2. Público-Alvo.
Pré-requisitos (se for necessário)
3. Materiais necessários
4. Estrutura da Aula (tempo necessário para realizar cada parte das atividades)

4.4 Terceira fase: Implementação da sequência didática e observações

Nesta etapa, a situação didática planejada é aplicada em sala de aula, conforme descrito na fase anterior. O professor pode utilizar diversos recursos, como vídeos, fotografias, livros, slides, calculadoras de seu uso pessoal, entre outros, para enriquecer a prática.

O professor acompanha as interações dos alunos com as atividades propostas, de forma guiada e intervindo quando necessário. Registra observações sobre o desempenho, erros e estratégias dos alunos, prevendo os erros comuns, como digitação rápida de números ou omissão do ponto decimal.

Nesta pesquisa, cadernos de atividades foram distribuídos para cada aluno, e o professor explica cada uma das atividades, exemplificando e concede um tempo para que eles resolvam as tarefas.

1) A primeira atividade visa explorar os tipos de calculadoras eletrônicas, suas funcionalidades e aplicações educacionais e comerciais, promovendo reflexão sobre seu uso consciente. O autor Borba e Villarreal (2005) destaca que tecnologias, quando bem integradas, ampliam a construção do conhecimento.
2) Na segunda atividade, revisam-se os conjuntos numéricos dos números naturais e inteiros, dentre esses tópicos são abordados os seguintes tópicos: o conceito de variável,

os símbolos de pertinência de conjuntos, conceito de número positivo, negativo e zero. Os símbolos de igualdade e desigualdade utilizados para comparar dois números.

3) Na terceira atividade, exploram-se as operações de adição, subtração e multiplicação, São apresentadas as definições formais dessas operações, bem como suas principais propriedades.
4) Na quarta aditividade é explorada a divisão com e sem o uso da calculadora.

4.5 Quarta fase: Análise e possível validação

Após a implementação, o professor analisa os resultados, comparando as respostas dos alunos com as previsões feitas na fase de planejamento. Analisa o sucesso de situação didática e identifica aspectos a serem melhorados para futuras aplicações. Esses dados podem subsidiar novas pesquisas ou ajustes no processo de ensino.

No estudo de caso, os cadernos de atividades são coletados, e o professor observa o desemprenho e realiza perguntas aos discentes, promovendo uma reflexão sobre as atividades desenvolvidas. Posteriormente, o professor analisar as respostas e dependendo dos resultados, ele deve-se fazer perguntas do tipo: Os alunos conseguiram usar a calculadora corretamente? Quais erros foram mais frequentes? Que pode ser mudado? Faltaram ou foram muitos exercícios propostos? Os alunos conseguiram manipular a calculadora?

No quinto capítulo são apresentados os resultados da implementação das três primeiras atividades pedagógicas em um colégio de São Gonçalo.

4.6 Vantagens e Limitações da Engenharia Didática

Vantagens:

- Esta metodologia promove a autonomia e o pensamento crítico do aluno.
- Corrobora para construir uma base teórica sólida e pode verificar as propriedades dos números inteiros.
- O professor pode melhorar suas estratégias com base em evidências e adaptar a outros conteúdos e níveis de ensino.
- A discussão final permite que os alunos compartilhem suas dúvidas e conquistas, justifiquem suas soluções, promovendo a construção coletiva do conhecimento.

Limitações:

- Requer tempo e esforço para um planejamento intensivo das situações didáticas.

- Alguns alunos podem achar que a calculadora "sempre dá a resposta certa", então o professor deve estar sempre atento.
- Se a turma é numerosa, pode ser desafiador ou com recursos limitados.
- Os novos professores precisam de treinamento para aplicar a metodologia corretamente.

Na literatura encontramos diversos trabalhos que utilizam a engenharia didática como metodologia de ensino da Matemática, dentro deles podemos citar:

Atanazio dos Santos, A., Régis Vieira Alves, F. A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. Acta Scientiae, v.19, n.3, maio/jun., 2017. Disponível em http://posgrad.ulbra.br/periodicos/index.php/acta/article/view/2739

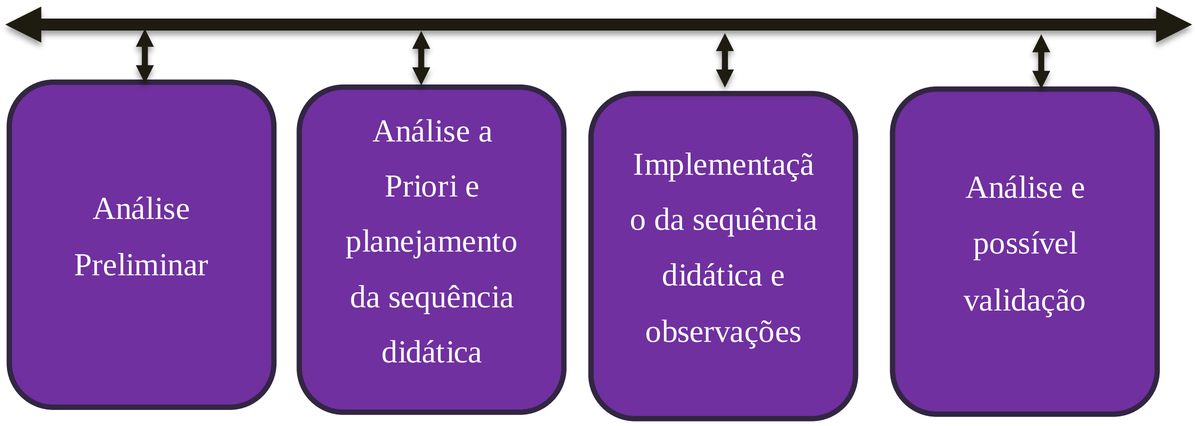
Cabral, N. F., Dias, G. N., Lobato Junior, J. M. D. S. O Ensino de Razão e Proporção Por Meio De Atividades. *Ensino Da Matemática Em Debate*, *6*(3), 174–206 (2019). Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/45062

Rodrigues Alves Santos, A. P., Régis Viera Alves, F. A engenharia didática para o ensino de olimpíadas de matemática: situações olímpicas com o amparo do software Geogebra. Góndola, Enseña Aprendizaje de las Ciencias, 13(1), 141-15, 2018. Doi: http://doi.org/10.14483/23464712.11732

5 ATIVIDADES PEDAGOGICAS

Neste capítulo são apresentadas quatro atividades pedagógicas, centradas em três eixos temáticos da BNCC: números, álgebra e grandezas e medidas. Estes eixos baseados em habilidades para as séries de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental II. As atividades são diferenciadas contextualizadas ao uso da calculadora no dia a dia na resolução de expressões numéricas e na interpretação dos resultados. Seguindo as diretrizes da BNCC (2018), utilizando a engenharia didática e o *Geogebra* como ferramentas pedagógicas.

Figura 6: Fases da Engenharia Didática



A **primeira atividade** foca na familiarização com o uso de calculadoras eletrônicas. A segunda e a terceira atividades exploram o conjunto dos números inteiros, abordando as operações de adição, subtração e multiplicação com números inteiros positivos. A última atividade trata da operação de divisão. Todas as atividades foram desenvolvidas com base na metodologia da engenharia didática.

5.1 Atividade 1: Conhecendo as calculadoras eletrônicas

A atividade visa explorar os tipos de calculadoras eletrônicas, suas funcionalidades e aplicações nos contextos educacional e comercial, promovendo reflexão sobre seu uso consciente. Busca estimular discussão crítica entre alunos sobre prós e contras do uso de calculadoras no ensino de Matemática, incentivando o pensamento reflexivo e a argumentação. Destaca que o uso de calculadoras, conforme Borba e Villarreal (2005), amplia o aprendizado se integrado a uma prática pedagógica intencional. Também investiga a frequência e a contribuição do uso de calculadoras pelos alunos, por meio de questionamentos específicos.

Esta atividade está estruturada para uma aula de 50 minutos:

1. Objetivo: Mostrar os diversos modelos de calculadora **e** habilitar os alunos a reconhecer o tipo de calculadora eletrônica que possui.

2. Público-Alvo: Turmas do Ensino Fundamental II (9º ano) ou 1º ano do Ensino Médio, com noções básicas de aritmética, mas pouca ou nenhuma experiência com calculadoras.

3. Pré-requisito: Conhecimento básico das operações matemáticas $(+, -, \times, \div)$.

4. Materiais:

- Calculadoras básicas: uma por aluno ou uma por dupla (dependendo dos recursos).
- Caderno de atividades e caneta ou lápis para anotações.
- Slides contendo o cronograma da evolução das calculadoras.

5. Estrutura da Aula (50 minutos)

a) Inicialmente se realiza os seguintes questionamentos (10 min):

Questionamentos

- Por que é importante dominar o uso da calculadora?
- O que é uma calculadora e como ela funciona?
- Você sabe quais são as diferenças entre os modelos de calculadora?
- Você costuma consultar as especificações técnicas de uma calculadora para escolhê-la de acordo com as suas necessidades.

b) Comentar sobre a evolução das calculadoras e apresentar uma parte do vídeo disponível em: www.youtube.com/watch?v=22hu1bEsDGw&t=22s&ab_channel=DantasCl%C3%ADstenes (do min 25 ao min 28) o professor resume o restante por meio de slides e mostrando algumas calculadoras de uso pessoal. (10 min).

Exemplos de Calculadoras Portáteis:

Figura 7: Calculadoras Portáteis: (a) Classe CLA-402. (b) Casio Fx-991LAX. (c) HP 50G. (d) HP12C

Fonte: Fotografias do autor, 2025.

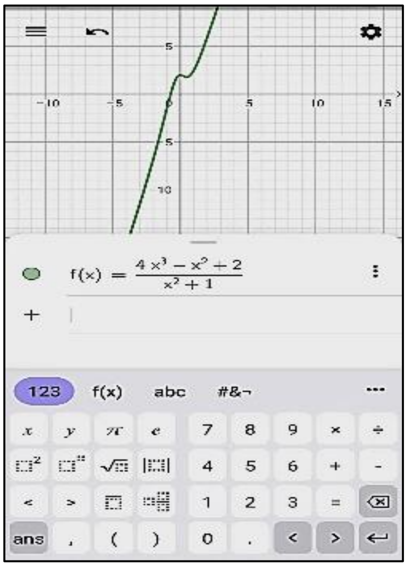
As calculadoras eletrônicas em aplicativos para smartphones:

Com o avanço da tecnologia digital, os smartphones passaram a incorporar diversas funcionalidades que antes estavam restritas a dispositivos eletrônicos específicos (Drubscky, 2025). Um exemplo marcante é a presença de **aplicativos de calculadora**, que transformaram o celular em uma ferramenta multifuncional para realização de cálculos matemáticos, desde os mais simples até os mais complexos.

Os sistemas operacionais móveis, como o **Android**, já vêm com um aplicativo nativo de calculadora, conhecido como **calculadora padrão**. Este aplicativo realiza operações aritméticas básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), mas também oferece recursos adicionais, como cálculo de porcentagem, raiz quadrada, uso de parênteses, operações com frações e funções trigonométricas em modo científico. Em muitos aparelhos, o usuário pode alternar entre o modo simples e o modo científico apenas ao girar a tela do dispositivo.

Além da calculadora padrão, há aplicativos educacionais mais sofisticados, como a **Calculadora Gráfica GeoGebra**, amplamente utilizada em contextos escolares e acadêmicos. Esta ferramenta gratuita permite representar graficamente funções, resolver equações, manipular variáveis e visualizar relações algébricas e geométricas de forma dinâmica e interativa. A GeoGebra é particularmente útil para o ensino e aprendizagem de Matemática, pois integra cálculo simbólico (CAS), gráficos, geometria e estatística em um único ambiente visual.

Figura 8: Calculadora Gráfica Geogebra



Fonte: O autor, 2025

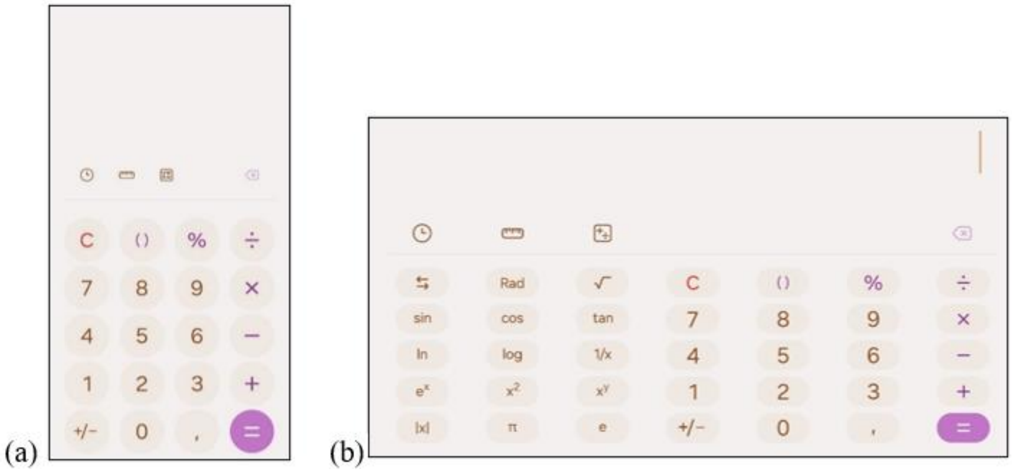
Quando comparadas às **calculadoras portáteis tradicionais**, como a Sharp EL-531, os aplicativos de smartphone oferecem maior flexibilidade, interface mais amigável e recursos visuais mais avançados. No entanto, as calculadoras portáteis ainda mantêm sua relevância, especialmente em avaliações escolares ou concursos que restringem o uso de celulares. Além disso, sua simplicidade e foco exclusivo em cálculos reduzem distrações e garantem maior autonomia de uso em ambientes formais.

Dessa forma, o uso de aplicativos de calculadora em smartphones amplia as possibilidades de ensino, aprendizagem e resolução de problemas matemáticos no cotidiano, sem substituir totalmente os dispositivos portáteis, mas funcionando como uma alternativa poderosa e acessível.

Calculadoras básicas dos smartphones

- Os smartphones possuem uma calculadora científica nativa no seu sistema operacional.
- Elas são gratuitas não precisando pagar por um aplicativo.
- Ao saber trabalhar com elas, você entenderá o funcionamento de outras calculadoras eletrônicas portáteis ou de outros aplicativos.
- Neste caderno as atividades propostas serão baseadas no modelo de calculadora padrão do smartphone Samsung S22.

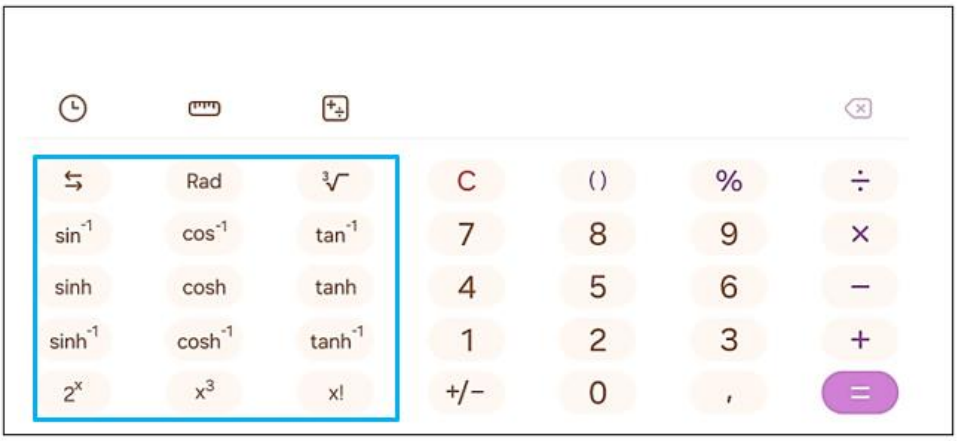
Figura 9: Calculadora padrão de um smartphone. (a) Básica (b) Científica.



Fonte: O Autor, 2025

A Tecla $\boxed{\leftrightarrows}$ **:** Na calculadora de um smartphone Samsung, ela serve para expandir as opções da calculadora científica, como se observe a figura abaixo. Há as teclas das funções inversas das funções trigonométricas sen, cos e tg, as funções hiperbólicas e as suas inversas, a tecla de potências com base 2, a tecla para o cálculo de potências com expoente 3 (o cubo de um número) e a tecla do fatorial de um número. Na calculadora do smartphone Iphone, a tecla que possui essa mesma função é a tecla $\boxed{2^{nd}}$ e, na calculadora nativa do smartphone da Motorola, a tecla é $\boxed{INV}$. Na figura a seguir, está ilustrada em azul as teclas adicionais acionadas pela tecla $\boxed{\leftrightarrows}$ numa calculadora nativa de um smartphone da Samsung.

Figura 10: Calculadora Científica-acionamento da tecla $\boxed{\leftrightarrows}$



Fonte: O autor, 2025

c) Familiarização e identificação de calculadoras eletrônicas ou no celular, mostrando a utilidade de algumas teclas, estabelecendo o **contrato didático** (os alunos sabem que devem usar a calculadora, mas também verificar resultados). Iniciar com exemplos simples, de tal forma que os alunos pratiquem de forma estruturada, como por exemplo, calcular operações simples (ex.: 6 + 2, 12 - 4, 9 × 3, 12 ÷ 4) e uma operação com erro (ex.: 5 ÷ 0). (15 min).

d) Resolver os seguintes exercícios propostos (15 min).

Exercícios Propostos

1) Qual é o número máximo de dígitos que pode aparecer no visor da sua calculadora? ____

2) Quais são as funções das teclas abaixo? Caso a sua calculadora não tenha as teclas com as simbologias abaixo, que são encontradas no smartphone Samsung, procure no modelo da sua calculadora, as teclas que permitem conversão de unidades de medidas e a tecla de exibição do histórico dos cálculos efetuados, o qual está relacionado a capacidade da calculadora de guardar dados na sua memória.

a) A tecla ‘C’: ____
____

b) A tecla ‘Régua’: ____
____

c) A tecla ‘Relógio’: ____
____

d) A tecla ‘Vírgula’: ____
____

Curiosidade: Na notação de números decimais, é comum utilizar a vírgula como símbolo separador entre a parte inteira e a parte decimal de um número que está na sua representação decimal. No entanto, em alguns países, como os Estados Unidos, usa-se o ponto para essa mesma função. Por exemplo, nos EUA, mil dólares são representados como $1,000.00; já no Brasil, mil reais são escritos como R$ 1.000,00. Portanto, ao observar um ponto na sua calculadora, saiba que a configuração do aparelho pode estar interpretando esse ponto como uma vírgula decimal. Nesse contexto de representação de números na forma decimal, é necessário ficar atento que os números inteiros possuem zeros na parte decimal. Os números que possuem parte decimal com algum dígito diferente de zero, são aqueles que possuem parte inteira e a parte decimal corresponde a frações do inteiro.

3) Digite o número decimal que tem 1 na sua parte inteira e números 2 na sua parte decimal. Digite o número 2 após a vírgula até onde a sua calculadora permitir. Escreva aqui quantos números "2" você conseguiu colocar na parte decimal desse número. _________________
____

4) Digite os valores $R\$ \, 1.237{,}50 + R\$ \, 2.954{,}00$ na calculadora do seu smartphone. Qual é o resultado dessa adição? ____________________________________

5) Se tirarmos os zeros finais das partes decimais dos números acima, teremos a expressão $1.237{,}5 + 2.954$. Você acha que o resultado será o mesmo da adição do exercício anterior? Justifique a sua resposta. ____________________________________.

6) Digite os números abaixo na calculadora do seu smartphone, tecle "=" e anote os resultados encontrados no visor da calculadora. A calculadora retirou zero de algum desses números? Crie uma argumentação para o seu professor explicando se os valores exibidos no visor da calculadora são iguais aos números digitados.

   a) 15,000 b) 15,200 c) 15,20 d) 15,02 e) 15,020 f) 15,002

e) Conclusões e discussões (10 min).

- Devem ser registrados os erros específicos. Como por exemplo os erros de entrada, quantos inverteram a ordem em $5 - 4$?

Devem ser registrados os comentários dos alunos.

5.2 Atividade 2: Conjunto dos Números Inteiros

Nesta atividade será realizada uma breve revisão dos conjuntos numéricos dos números naturais e inteiros, que são subconjuntos dos números racionais. Dentre esses tópicos são abordados os seguintes tópicos: o conceito de variável, os símbolos de pertinência de conjuntos, conceito de número positivo, negativo e zero. Os símbolos de igualdade e desigualdade utilizados para comparar dois números.

Esta atividade está estruturada para uma aula de 50 minutos:

1. Objetivo: Habilitar os alunos a realizar operações elementares com segurança e precisão, compreendendo a ordem das operações, as propriedades fundamentais das expressões aritméticas e a verificação de resultados, com e sem o uso da calculadora.

2. Público-Alvo: Turmas do 1º ano do Ensino Médio, com noções básicas de aritmética, mas pouca ou nenhuma experiência com calculadoras.

3. Pré-requisito: Conhecimento básico das operações matemáticas $(+, -, \times, \div)$.

4. Materiais:

- Calculadoras básicas: uma por aluno ou uma por dupla (dependendo dos recursos).
- Caderno de atividades e caneta ou lápis para anotações.
- Quadro branco.

5. Estrutura da Aula (50 minutos)

a) Inicialmente se realiza uma recordação do conjunto dos números naturais (10 min):

Primeiro Conjunto Numérico: Números naturais

Símbolo do Conjunto	Nome do Conjunto	Representação	Observações
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais	$\{0,1,2,3, \ldots\}$	Seus primeiros[10] elementos são: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. Estes dígitos são a base das teclas nas calculadoras para inserir outros números.

[10] O conjunto dos números naturais pode ser definido começando por zero ou pelo um. As atividades desta dissertação estão fundamentadas no conjunto dos números naturais começando pelo zero. Esta forma de definição é usual nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio utilizadas atualmente nos colégios brasileiros.

A expressão “número inteiro” nos remete, à primeira vista, à ideia de números que não possuem parte decimal; na verdade existe parte decimal e seus dígitos são todos zeros. Na Matemática existe um conjunto numérico chamado de conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), que inclui o zero, números inteiros positivos e os números inteiros negativos.

O Segundo Conjunto Numérico: Números Inteiros

Símbolo do Conjunto	Nome do Conjunto	Representação	Observações
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números **Inteiros**	$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	Nesse conjunto aparecem os números inteiros positivos e negativos.

Neste trabalho, salvo indicação em contrário, o termo "número inteiro" refere-se a um número pertencente ao conjunto $\mathbb{Z}$.

Subconjuntos do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$

Símbolo do Conjunto	Nome do Conjunto	Representação	Observações
$\mathbb{Z}^*$	Conjunto dos Números **Inteiros não nulos**	$\{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$	Nesse conjunto aparecem todos os números inteiros, exceto o zero.
$\mathbb{Z}_+^*$	Conjunto dos Números **Inteiros positivos**	$\{1, 2, 3, \dots\}$	Nesse conjunto aparecem os números inteiros maiores do que zero.
$\mathbb{Z}_-^*$	Conjunto dos Números **Inteiros negativos**	$\{\dots, -3, -2, -1\}$	Nesse conjunto aparecem os números inteiros menores do que zero.
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto dos Números Inteiros Não Negativos	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Nesse conjunto aparecem o zero e os números inteiros positivos.
$\mathbb{Z}_-$	Conjunto dos Números Inteiros Não Positivos	$\{\dots, -3, -2, -1, 0\}$	Nesse conjunto aparecem o zero e os números inteiros negativos.

b) Resolver os seguintes exercícios propostos (20 min).

Exercícios Propostos

7) Responda:
   a) Quais são os dez primeiros números naturais?
   b) Apresente a sequência dos 10 primeiros números naturais
   c) Liste a sequência dos 10 primeiros números naturais.
   d) Enumere uma sequência de 10 números inteiros, começando do -4 e seguindo em ordem crescente.
   e) Represente o conjunto dos números naturais usando a representação por enumeração.
   f) Represente o conjunto dos números inteiros usando a representação por enumeração.
   g) Qual é o símbolo do conjunto dos *números naturais*?
   h) Qual é o símbolo do conjunto dos *números inteiros*?
   i) Represente o conjunto dos *números naturais* usando a reta numérica.
   j) Represente o conjunto dos *números inteiros* usando a reta numérica.

8) O número 5 é um *número natural e um número inteiro*. Sabemos que podemos representar esse fato simbolicamente usando o símbolo $\in$ (pertence à) e os símbolos de conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.
   a) 5 é um número inteiro   Notação: ______________
   b) 5 é um número natural   Notação: ______________

9) Para representar um número natural ou inteiro, podemos usar uma letra do alfabeto, chamada **variável**, que simboliza um valor numérico. Para especificar que essa variável pertence a um conjunto, como os números naturais ($\mathbb{N}$) ou inteiros ($\mathbb{Z}$), usamos o símbolo de pertinência ($\in$). O valor exato da variável pode ser determinado por meio de equações, inequações ou contexto matemático.
   a) x é um número inteiro   Notação: ______________
   b) x é um número natural   Notação: ______________

Observação: Para dizermos que um número não pertence a um dado conjunto numérico, escrevemos ao lado desse número o símbolo " $\notin$ " (não pertence à) e o símbolo desse conjunto numérico.

10) Complete as lacunas abaixo usando as palavras: ‘negativo’, ‘positivo’ ou ‘zero’.

Considerando x como um *número inteiro* ($x \in \mathbb{Z}$) podemos afirmar que: Ou x é um número ______________ ou x é um número _________________ ou x é o ____.

11) Analise as sentenças abaixo e, considerando $x \in \mathbb{N}$, determine um valor possível para x caso existir. Caso contrário, risque o campo “$x =$ ” e escreva na linha da resposta “não há números naturais que satisfaçam essa propriedade.”

a) $x > 0$ Lê-se: x é maior do que zero. Exemplo: $x = 14$

b) $x = 0$ Lê-se: __________________________ Exemplo: $x =$ ______

c) $x < 0$ Lê-se: ___________________________ Exemplo: $x =$ ______

12) Faça a leitura das sentenças abaixo e, considerando $y \in \mathbb{Z}$, obtenha um valor possível para y.

a) $y > 5$ Lê-se: ____________________________ Exemplo: $y =$ ______

b) $y = 5$ Lê-se: ____________________________ Exemplo: $y =$ ______

c) $y < 5$ Lê-se: ____________________________ Exemplo: $y =$ ______

13) Escreva se as sentenças são verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) (V) $5 > 0$

b) ( ) $5 = 0$

c) ( ) $5 < 0$

d) ( ) $5 \in \mathbb{N}$

e) ( ) $5 \notin \mathbb{Z}$

f) ( ) $-5 > 0$

g) ( ) $-5 = 0$

h) ( ) $-5 < 0$

i) ( ) $-5 \in \mathbb{N}$

j) ( ) $-5 \notin \mathbb{Z}$.

f) O professor resolve os exercícios no quadro branco ou com ajuda de slides. Os alunos devem realizar uma autocorreção colocando a resposta correta com caneta vermelha. (20 min).

5.3 Atividade 3: Operações com os Números Inteiros

Nesta atividade serão apresentadas as definições formais dessas operações, bem como suas principais propriedades. Busca-se, neste primeiro momento, proporcionar ao aluno uma reflexão sobre os caminhos lógicos utilizados por programadores no desenvolvimento das funções básicas das calculadoras eletrônicas, por meio do estudo da teoria dos conjuntos numéricos que fundamenta o funcionamento das teclas operacionais. Nesse contexto, o aluno aprenderá mais sobre o uso das variáveis em expressões algébricas envolvendo as operações elementares: adição, subtração e multiplicação. Os operandos inteiros utilizados nos exercícios dessa atividade pertencem ao conjunto $\mathbb{Z}_+$. Quando os números inteiros negativos aparecerem nessa lição aparecerão nos resultados da operação de subtração. As operações com inteiros abrangendo os inteiros negativos como operandos será abordada na atividade 5 deste trabalho.

Esta atividade está estruturada para duas aulas de 50 minutos:

1. Objetivo: Introduzir as operações de adição, subtração e multiplicação no conjunto dos números inteiros.
2. Público-Alvo: Turmas do Ensino Fundamental II ou 1º ano do Ensino Médio, com noções básicas de aritmética, mas pouca ou nenhuma experiência com calculadoras.
Pré-requisito: Conhecimento básico das operações matemáticas $(+, -, \times, \div)$.

3. **Materiais:**

- Calculadoras básicas: uma por aluno ou uma por dupla (dependendo dos recursos).
- Caderno de atividades e caneta ou lápis para anotações.
- Quadro branco.

4. **Estrutura da Aula (100 minutos)**

a) De forma estratégica, nesta atividade os operandos estarão restritos aos números inteiros não negativos ($\mathbb{Z}^+$), que correspondem ao conjunto dos números naturais. Nessa etapa, as operações serão abordadas no contexto dos números naturais, em que o uso do sinal de número positivo (+) é desnecessário.

b) O professor explica como funciona o Bloco da operação de adição (Fig. 12) nas calculadoras (5 min)

c) Resolver os seguintes exercícios referentes a adição e subtração (15 min)

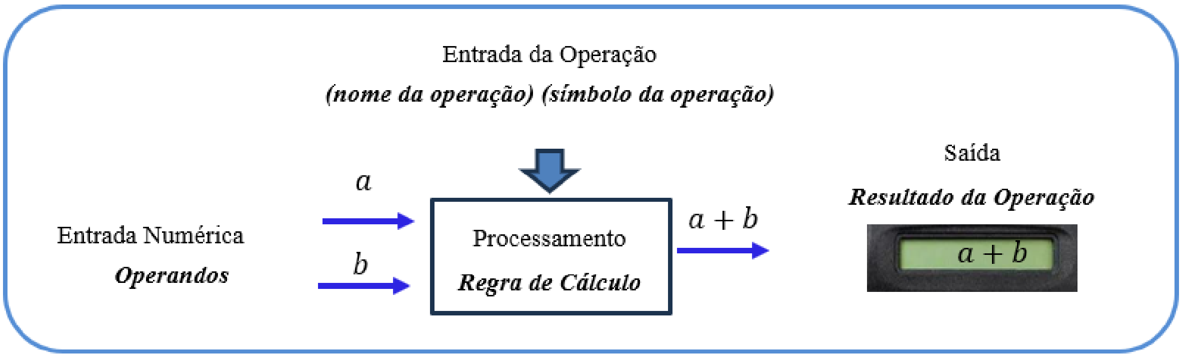
d) O professor faz uma recordação e pede para os alunos resolverem os exercícios referentes a definição e da tabuada da multiplicação na forma de tabela e propõe os demais exercícios “para casa”.

e) Na seguinte aula, o professor revisa os exercícios e cada aluno faz uma autocorreção.

A calculadora como ferramenta de Ensino: A calculadora é um dispositivo eletrônico desenvolvido para realizar cálculos matemáticos. Para isso, ela utiliza um chip eletrônico que contém uma programação específica capaz de executar essas operações, aliada a uma interface composta por teclado e visor. O teclado permite inserir números, operadores e funções, enquanto a tela exibe os resultados calculados pela calculadora, enquanto o visor exibe os resultados processados internamente pela calculadora. Para realizar, por exemplo, a adição de dois números, o usuário deve digitar o primeiro valor, pressionar a tecla correspondente à operação de adição, inserir o segundo valor e, por fim, pressionar a tecla “=” para visualizar o resultado no visor.

Cada tecla do teclado possui um símbolo padronizado que representa uma função específica. A escolha da operação desejada é feita por meio desse símbolo convencional.

Figura 11: Representação Esquemática do Processo de Calcular

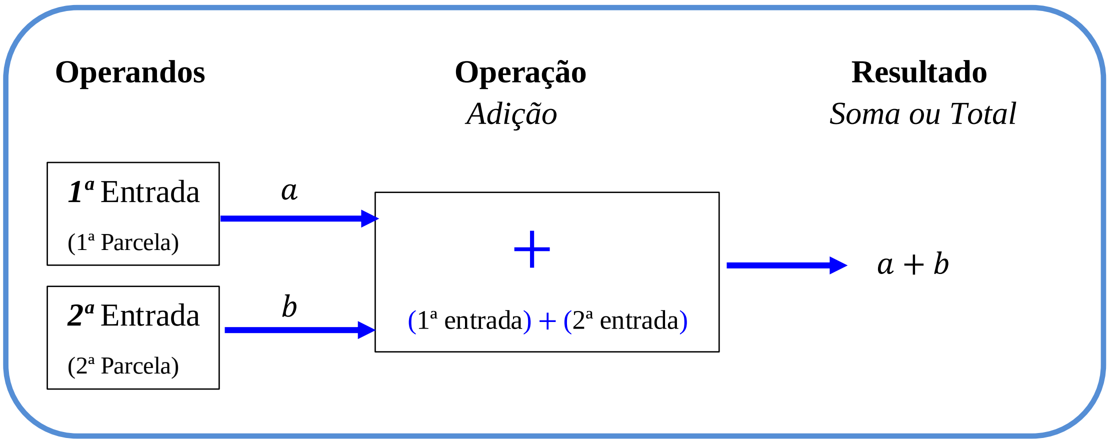


A caixa retangular (Fig. 11), chamada de bloco, representa uma operação matemática que associa números segundo regras definidas para gerar um resultado. Esse bloco corresponde ao processamento dos dados inseridos pelo usuário no teclado da calculadora.

As calculadoras contêm um microprocessador realiza o processamento dos cálculos. Ele contém um algoritmo, ou seja, uma sequência finita de instruções que define a execução das operações. Esse algoritmo está implementado por meio de um código de programação, permitindo que os dados inseridos pelo usuário sejam interpretados e processados corretamente, gerando o resultado da operação desejada.

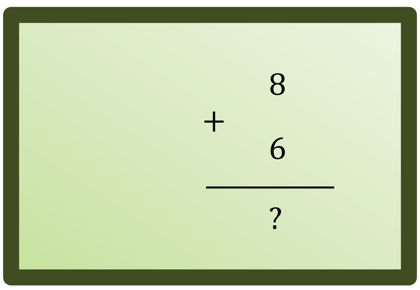
Adição: Na Fig. 13, é apresentado um diagrama de blocos da operação de adição, mostrando os termos na operação de adição.

Figura 12: Diagrama de Blocos da operação de Adição

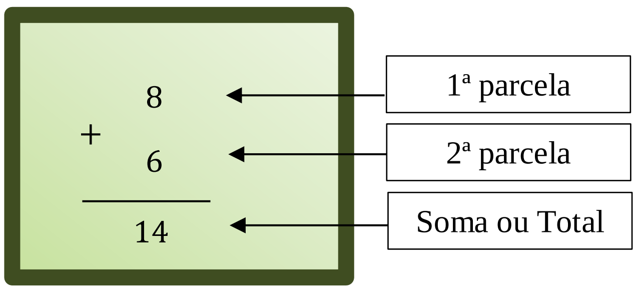


Exemplo: Represente e efetue a adição: 8 + 6.

1º Passo: Armar



2º Passo: Efetuar



❖As leituras da expressão: **8 + 6**. Leitura principal: “Oito mais seis”. Outras formas possíveis: “a soma de oito com seis”, “o total de oito e seis” e “oito somado com seis”.

Observações:

1) Os termos de uma operação matemática referem-se aos nomes dados aos números e resultados em diferentes operações.

2) No diagrama acima foram apresentados dois valores na entrada, mas poder-se-ia 3 ou mais números sendo somados.

14) Calcule o valor de $5 + \blacksquare$ substituindo o valor de $\blacksquare$ por 0,1,2,3,4,5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

$\boxed{5 + \blacksquare}$

FORMA 1	FORMA 2
$5 + \boxed{0} = 5$	$5 + \boxed{0} = 5$
$5 + \boxed{1} = 6$	$5 + \boxed{1} = (5) + 1$
$5 + \boxed{2} = 6 + 1 = 7$	$5 + \boxed{2} = (5 + 1) + 1$
$5 + \square = $ _____	$5 + \square = $ _____
$5 + \square = $ _____	$5 + \square = $ _____
$5 + \square = $ _____	$5 + \square = $ _____
$5 + \square = $ _____	$5 + \square = $ _____

15) Calcule $5 + 8$ com o auxílio de uma calculadora usando apenas as teclas '5', '+' e '1'?

Observação: Incrementar um número significa aumentá-lo em uma unidade, ou seja, *somar 1* ao valor inicial. Essa ideia de incrementar é extremamente importante na programação da tecla da adição nas calculadoras.

$$5 + 3 = \left(\left((5) + 1\right) + 1\right) + 1$$

16) Complete a tabela[11] considerando o cálculo $(Entrada\ 1) + (Entrada\ 2)$.

Tabela 1: Tabela da Operação de Adição

+		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**					4						
	1					5						
	2					6						
	3					7						
	4					8						
	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	6					10						
	7					11						
	8					12						
	9					13						
	10					14						

17) Mostrar que dados dois números inteiros quaisquer x e y, considerando que $x = y$, logo $x + y$ é um número par.

Verificando as Propriedades da Adição

Sejam a, b e c números inteiros quaisquer, valem as seguintes propriedades.

- Propriedade Comutativa da Adição: $a + b = b + a$
- Propriedade do Elemento Neutro Aditivo: $a + 0 = a$
- Propriedade Associativa da Adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$

[11] Para aprofundar o estudo sobre a organização das tabuadas da adição, subtração e multiplicação em tabelas, recomenda-se a obra *Álgebra Moderna* (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p.124-131), na qual os autores apresentam o conceito de "tábua de uma operação" e demonstram como se podem visualizar propriedades operatórias, tais como a associatividade, a comutatividade, a presença do elemento neutro, bem como a identificação de elementos simetrizáveis e regulares.

18) Identifique quais são as propriedades da adição envolvidas abaixo e verifique a veracidade dessas igualdades.

a) $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

b) $2 + 3 = 3 + 2$

19) Complete a tabela abaixo.

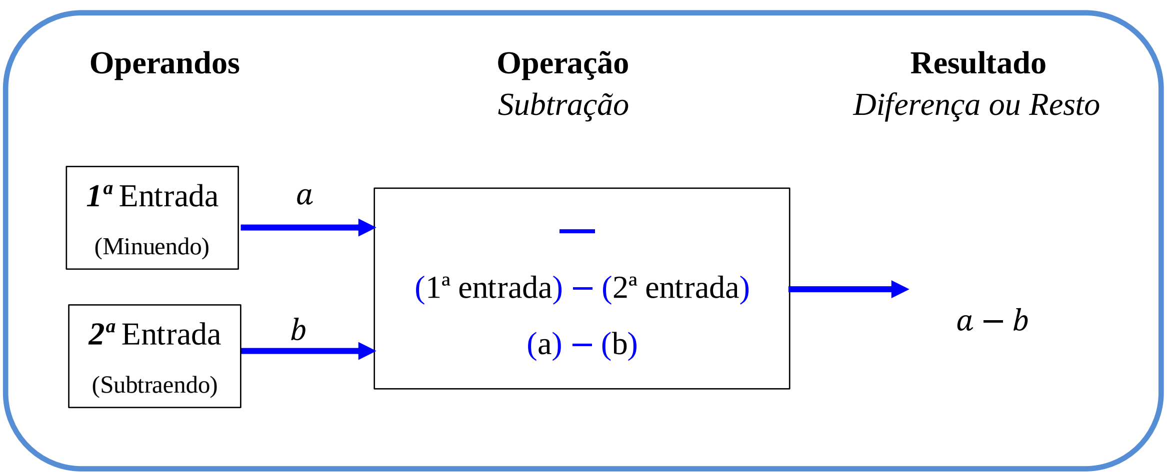
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} + 0$	Resultado
0		
1	$1 + 0$	1
2		
3		
$\boldsymbol{k}$		

Comentário: Expressão Algébrica e Expressão Numérica

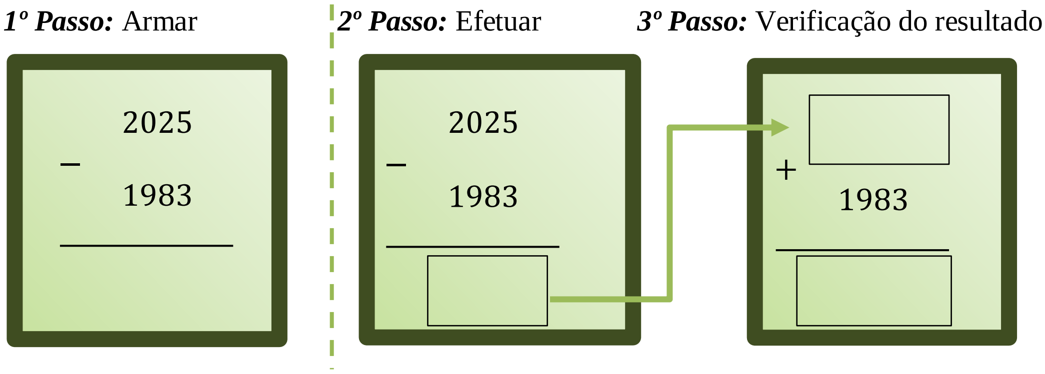
> $a + 0$ é uma **expressão algébrica**, pois existe uma variável. Ao substituirmos a variável a pelo seu valor numérico correspondente; neste exemplo, $a = 1$, obtivemos uma **expressão numérica** (sem variáveis), que é $1 + 0$. Como não há mais "letras" podemos usar as operações básicas e calcular o valor final (resultado dessa expressão numérica).

Subtração: Os termos na operação de subtração são explicados na Fig. 10.

Figura 13: Diagrama de Blocos da operação de Subtração



20) A seguir encontra-se a ilustração do *passo a passo* para a operação de subtração até a verificação do seu resultado. Faça os cálculos preenchendo os retângulos abaixo.



$2025 - 1983 = 42$ Lê-se: A *diferença* entre 2025 e 1983 é igual a 42.

❖ As leituras da expressão: $\mathbf{8 - 3}$. Leitura principal: "oito menos três". Outras formas possíveis: "a diferença entre oito e três", "subtração de três de oito" e "oito subtraído de três".

Comentário: Sua idade no ano de 2025.

Uma pessoa que nasceu em 1983 fará 42 anos em 2025. A relação entre a idade de uma pessoa em determinado ano a partir da sua data de nascimento é dada pela fórmula:

$$(Ano\ atual) - (Data\ de\ nascimento)$$

21) Calcule o valor de $5 - \blacksquare$ substituindo o valor de $\blacksquare$ por 0, 1 ,2, 3, 4, 5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

$5 - \blacksquare$

FORMA 1

$5 - \boxed{0} = 5$

$5 - \boxed{1} = (5) - 1 = 4$

$5 - \boxed{2} = (4) - 1 = 3 = 3$

$5 - \square =$ ______

$5 - \square =$ ______

$5 - \square =$ ______

$5 - \square =$ ______

FORMA 2

$5 - \boxed{0} = 5$

$5 - \boxed{1} = (5) - 1$

$5 - \boxed{2} = (5 - 1) - 1$

$5 - \square =$ ______

$5 - \square =$ ______

$5 - \square =$ ______

$5 - \square =$ ______

22) Complete a tabela considerando o cálculo $(Entrada\ 1) - (Entrada\ 2)$.

Tabela 2: Tabela da Operação de Subtração

−		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**					-4						
	1					-3						
	2					-2						
	3					-1						
	4					0						
	5	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
	6					2						
	7					2						
	8					4						
	9					5						
	10					6						

23) Calcule $8 - 5$ com o auxílio de uma calculadora usando apenas as teclas ‘8’, ‘−’ e ‘1’?

____

Observação: Decrementar um número significa diminui-lo em uma unidade, ou seja, *subtrair 1* do valor inicial. Essa ideia de decrementar é extremamente importante na programação da tecla de subtração nas calculadoras.

$$5 - 3 = \Big(\big((5) - 1\big) - 1\Big) - 1$$

A Propriedade do Elemento Neutro da Subtração

Seja a um número inteiro qualquer, vale a propriedade.

$$a - 0 = a$$

24) Complete as lacunas a partir das palavras abaixo:

MENOR – MAIOR – ZERO – POSITIVO -

a) Um número inteiro *positivo* é _____________ do que zero.
b) Um número inteiro *negativo* é ____________ do que zero.
c) O número inteiro __________não é um número positivo e nem negativo.
d) Se tirarmos uma *quantidade* de uma outra *maior* do que ela, o resultado será um número inteiro ______________.
e) Se tirarmos uma *quantidade* de uma outra *menor* do que ela, o resultado será um número inteiro ______________.
f) Se tirarmos uma *quantidade de* uma outra *igual a* ela, o resultado será o número inteiro ______________.

25) Considere $a = 4$, $b = 3$ e $c = 1$ nas igualdades abaixo. Indique quais delas são verdadeiras ou falsas para esses valores das variáveis fornecidos.

a) ( ) $(a - b) - c = a - (b - c)$
b) ( ) $a - b = b - a$
c) ( ) $a - b = -(b - a)$

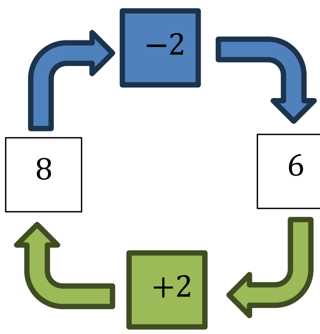
Comentário: O fato de que a substituição de determinados valores para as variáveis a, b e c resulte em uma igualdade verdadeira não implica que essa relação seja válida em todos os casos. Para afirmar sua validade geral, é necessária uma demonstração matemática rigorosa. Por outro lado, se for possível encontrar ao menos um conjunto de valores numéricos para a, b e c que torne a igualdade falsa, esse único exemplo já é suficiente para provar que a igualdade não é verdadeira de forma geral. Tais exemplos, nos quais se escolhem valores específicos das variáveis a fim de evidenciar a falsidade de uma proposição, recebem o nome de contraexemplos.

Operações Inversas: Adição e Subtração

Enunciado: Sejam a, b, e c números inteiros quaisquer, então

$$a - \mathbf{b} = c \quad \Leftrightarrow \quad c + \mathbf{b} = a$$

Subtrair **2 unidades**



Adicionar **2 unidades**

Exemplo: $\boxed{8} - \boxed{2} = \boxed{6} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{6} + \boxed{2} = \boxed{8}$

26) Uma pessoa tem 8 moedas de um real num cofre. Ela retira duas moedas, logo ficam _____ moedas no cofre. No dia seguinte, ela ganha e moedas e adiciona nesse cofre, portanto ela terá _________ moedas no cofre.

27) Complete os espaços vazios:

Dica: Utilize o raciocínio da operação inversa quando tiver dificuldade de encontrar o número desconhecido.

a) $\boxed{10} - \boxed{6} = \boxed{}$ c) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{10}$ e) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{-10}$

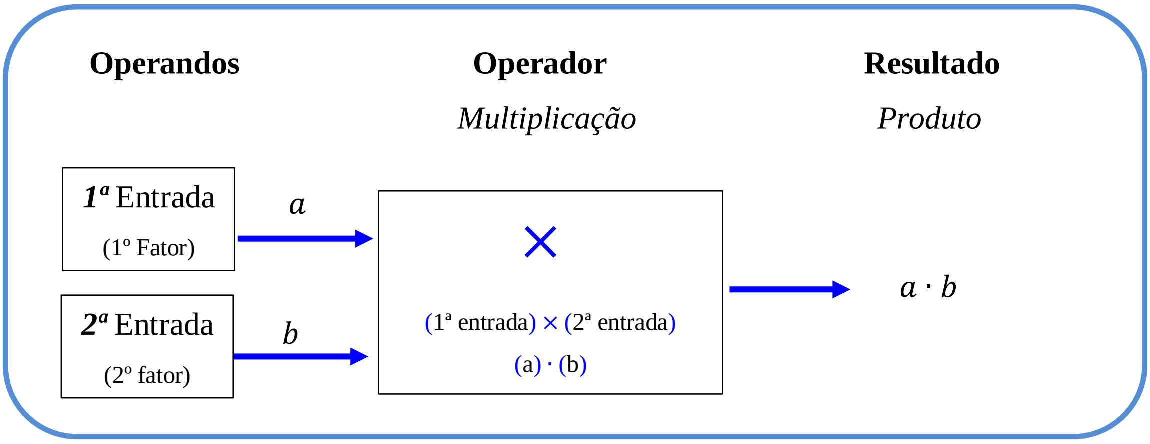
b) $\boxed{10} - \boxed{} = \boxed{6}$ d) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{0}$ f) $\boxed{6} - \boxed{} = \boxed{10}$

28) Complete os quadrados com os valores corretos, considere que cada bloco representa a operação que deve ser realizada com o número que está na entrada do bloco.

a) $8 \longrightarrow \boxed{+1} \longrightarrow \boxed{+1} \longrightarrow \boxed{?}$ b) $8 \longrightarrow \boxed{-1} \longrightarrow \boxed{+1} \longrightarrow \boxed{?}$

A Multiplicação: Na Fig. 14 é apresentado um diagrama de blocos da operação de multiplicação e os termos envolvidos.

Figura 14: Diagrama de Blocos da operação de Multiplicação



Observações:

1) No diagrama acima foram apresentados dois valores na entrada, mas poder-se-ia ter 3 ou mais números sendo multiplicados.

2) Além do símbolo “× ", a multiplicação pode ser representada pelo símbolo de ponto “ · ".

3) É muito comum nas expressões com variáveis ser usado o símbolo "$\cdot$" para que não se confunda o símbolo "$\times$" com a variável x.

Exemplo: Realize o produto de: 3×4.

1º Passo: Armar a operação

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times \quad 4 \\ \hline ? \end{array}$$

2º Passo: Efetuar a operação

$$\begin{array}{rl} 3 & \leftarrow \text{1º Fator} \\ \times \quad 4 & \leftarrow \text{2º Fator} \\ \hline 12 & \leftarrow \text{Produto} \end{array}$$

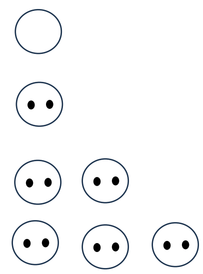
- As leituras da expressão: $\mathbf{3 \times 4}$. Leitura principal: "três vezes quatro". Outras formas possíveis: "três multiplicado por quatro" e "o produto de três por quatro".

29) Calcule o valor de $2 \cdot ■$ substituindo o valor de ■ por 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

$2 \cdot ■$

FORMA 1	FORMA 2
$2 \cdot \boxed{0} = 0$	$2 \cdot \boxed{0} = 0$
$2 \cdot \boxed{1} = 2$	$2 \cdot \boxed{1} = 2$
$2 \cdot \boxed{2} = (2) + 2 = 4$	$2 \cdot \boxed{2} = (2) + 2$
$2 \cdot \boxed{3} = (4) + 2 = 6$	$2 \cdot \boxed{3} = (2 + 2) + 2$
$2 \cdot \square =$ ______	$2 \cdot \square =$ ______
$2 \cdot \square =$ ______	$2 \cdot \square =$ ______
$2 \cdot \boxed{6} =$ ______	$2 \cdot \square =$ ______

FORMA 3



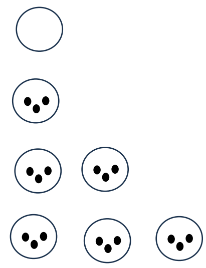
O Pensamento Matemático: Somar parcelas iguais

A soma de parcelas iguais pode ser representada através da operação de multiplicação entre dois números, o *primeiro fator* é o número que se repete e o *segundo fator* indica quantas vezes esse número se repete.

30) Calcule o valor de $3 \cdot ■$ substituindo o valor de ■ por 0,1,2,3,4,5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões.

FORMA 1 FORMA 2 FORMA 3

	$3 \cdot \boxed{0} = 0$	$3 \cdot \boxed{0} = 0$	
	$3 \cdot \boxed{1} = 3$	$3 \cdot \boxed{1} = 3$	
	$3 \cdot \boxed{2} = (3) + 3 = 6$	$3 \cdot \boxed{2} = (3) + 3$	
$3 \cdot ■$	$3 \cdot \boxed{3} = (6) + 3 = 9$	$3 \cdot \boxed{3}$	
	$3 \cdot \square =$ ______	$3 \cdot \square =$ ______	
	$3 \cdot \square =$ ______	$3 \cdot \square =$ ______	
	$3 \cdot \square =$ ______	$3 \cdot \square =$ ______	



❖ **Tabuada Pictórica**. O número correspondente ao *segundo fator* indicará a quantidade de círculos. O *primeiro fator* indicará quantos elementos teremos em cada um desses círculos. Macete: $2 \cdot 3$ (2 pontos 3), ("2 pontos em 3 círculos").

31) Como se realiza a operação $2 \cdot 8$ na calculadora usando apenas as teclas '2' e '+' ?

____

Observações:

1) Quando temos uma certa quantidade de pessoas e as organizamos em grupos com o mesmo número de integrantes, isso facilita a contagem total. Por exemplo, um professor de Educação Física separou seus alunos em grupos de 4 pessoas. Para saber a quantidade total de alunos, basta que ele conheça o número de grupos e a quantidade de pessoas em cada um. Se, por outro lado, houvesse 8 grupos com 4 alunos e 1 grupo com apenas 3, o raciocínio da multiplicação (número de grupos × número de pessoas por grupo) não poderia ser aplicado diretamente, já que os grupos não teriam todos a mesma quantidade de integrantes.

2) Da mesma forma, quando um confeiteiro prepara docinhos para uma festa e os organiza em uma bandeja, formando uma distribuição retangular — com fileiras contendo a mesma quantidade de docinhos — ele está facilitando a contagem. Caso esqueça o total de docinhos preparados, basta multiplicar o número de fileiras pela quantidade de docinhos em cada uma.

32) Complete a tabela considerando o cálculo $(Entrada\ 1) \cdot\ (Entrada\ 2)$.

Tabela 3: Tabela da Operação de Multiplicação

·		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**					0						
	1					4						
	2					8						
	3					12						
	4					16						
	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	6					24						
	7					28						
	8					32						
	9					36						
	10					40						

33) Quantas operações de multiplicação você realizou na tabela acima? ______________.

34) Comente se você consegue enxergar algum padrão de repetição nessa tabela, se sim, qual ou quais? Coloque as suas respostas no seu caderno.

35) Qual é o valor da expressão abaixo? Qual número se repetiu? Quantas vezes o nº se repetiu? É possível usar a tecla de multiplicação para encontrar o valor dessa expressão?

$$\mathbf{2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025}$$

O Conjunto dos Múltiplos de um Número Inteiro:

Você sabia que ...

•...Todo número inteiro multiplicado por 2 gera um *múltiplo de 2*?

•...Todos os *múltiplos de 2* terminam em 0,2,4,6 ou 8?

•...Todos os *múltiplos de 2* são números pares?

•...O conjunto $\{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ é o conjunto dos *múltiplos de 2* incluindo aqueles que são inteiros negativos?

36) Complete a tabela abaixo:

Se ➔	■ = 0	■ = 1	■ = 2	■ = 3	■ = 4	■ = 5
2 · ■	0		4			

Observação: Os múltiplos de 2 apresentados na tabela acima foram obtidos ao multiplicar o número 2 pelos números naturais, a partir do zero. Observa-se que esses valores correspondem aos seis primeiros resultados da tabuada da multiplicação do 2.

O Conjunto dos múltiplos de um número natural:

Para representar o conjunto dos múltiplos de 2, procedemos da seguinte forma: escrevemos $M(2)$, abrimos chaves e listamos os primeiros elementos desse conjunto, que são obtidos ao multiplicar 2 pelos números naturais. Em seguida, acrescentamos reticências para indicar a continuidade e fechamos as chaves. Assim, temos: $M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$. O último múltiplo de 2 indicado é o 10, mas, como se trata de um conjunto infinito, as reticências são necessárias para representar que a sequência continua indefinidamente.

37) Determine os conjuntos de múltiplos abaixo iniciando cada um deles com os seus 5 primeiros múltiplos. Considere $a \in \mathbb{N}$.

a) $M(0)$ = ____________________

b) $M(1)$ = ____________________

c) $M(2)$ = ____________________

d) $M(3)$ = ____________________

e) $M(4)$ = ____________________

f) $M(a)$ = ____________________

38) Complete a tabela para encontrar os valores y sabendo-se que $y = 6 \cdot x$ e $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$?

x	$y = 6 \cdot x$	y
0		
1	$y = 6 \cdot 1$	6
2		
3		
4		

Observações:

1) A igualdade $y = 6 \cdot x$ pode ser vista como uma fórmula matemática para encontrar o valor de y a partir do valor de x.

2) Observe que o enunciado da questão forneceu os valores de x que serão usados para descobrir os valores de y.

3) Na tabela, a primeira coluna apresenta os valores de x que serão usados para descobrir os valores de y, a segunda coluna, é a que temos a fórmula para descobrir os valores de y e a terceira coluna está reservada a indicação dos respectivos valores de y.

39) Siga o modelo e escreva uma leitura para as expressões abaixo.

a) $2 \cdot x$ Leitura: O dobro de x ou o dobro de um número.

b) $3 \cdot x$ Leitura: ____

c) $4 \cdot x$ Leitura: ____

d) $5 \cdot x$ Leitura: ____

e) $6 \cdot x$ Leitura: ____

Verificando as Propriedades da Multiplicação:

Sejam a, b e c números inteiros quaisquer, valem as seguintes propriedades.

Propriedade Associativa da Multiplicação:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ **Exemplo:** $2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$

Propriedade Comutativa da Multiplicação

40) Prove que $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$ usando a definição de multiplicação.

___

___

___

41) Escreva o enunciado da *propriedade comutativa* da multiplicação?

___

___

___

42) Como podemos generalizar a *propriedade comutativa* da multiplicação de inteiros usando variáveis?

___

___

___

43) Como podemos visualizar a propriedade comutativa da multiplicação pela tabela das tabuadas da multiplicação do exercício 32?

___

___

___

A Propriedade do Elemento Neutro Multiplicativo

44) Complete o quadro abaixo.

$0 \cdot 1 =$ ____
$1 \cdot 1 =$ ____
$2 \cdot 1 =$ ____
$3 \cdot 1 =$ ____
$4 \cdot 1 =$ ____
$5 \cdot 1 =$ ___
$x \cdot 1 =$ ___, onde $x \in \mathbb{N}$.

Escreva o enunciado da propriedade do elemento neutro da multiplicação?

___

___

___

___

___

Propriedade Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição

Enunciado: Sejam a, b e c números inteiros quaisquer, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição estabelece que:

$$\boldsymbol{a} \cdot (b + c) = \boldsymbol{a} \cdot b + \boldsymbol{a} \cdot c$$

Exemplo: $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$

45) Use a calculadora e verifique qual é o valor da expressão:

a) $3 \cdot (4 + 5)$ b) $3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$ c) $3 \cdot 4 + 5$

Observações:

1) Numa expressão numérica onde há parênteses, primeiro resolvemos o que se encontra dentro dos parênteses.

2) Numa expressão numérica sem parênteses, contendo somente as operações de adição e multiplicação, primeiro efetua-se a multiplicação e depois, a operação de adição.

46) A igualdade $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 5$ é verdadeira? Justifique a sua resposta.

____

____

47) Siga o modelo colocando os produtos na forma de soma.

	O Produto de um número inteiro por x	Resultado	A relação entre o produto e o resultado em função de x
a)	$1 \cdot x$	x	$1 \cdot x = x$
b)	$2 \cdot x$	$x + x$	$2 \cdot x = x + x$
c)	$3 \cdot x$		
d)	$2025 \cdot x$	$x + x + \cdots + x$ *(2025 parcelas)*	
e)	$n \cdot x$		

Observe que, ao multiplicarmos um número inteiro por x, esse produto pode ser representado como uma soma, na qual o termo x se repete tantas vezes quanto o valor do número inteiro utilizado na multiplicação. Quando esse número inteiro é muito grande para ser escrito explicitamente, ou mesmo quando se trata de um valor desconhecido, costuma-se recorrer a uma forma abreviada de notação: escrevem-se os primeiros e os últimos termos da soma, separados por reticências entre sinais de adição, de modo a indicar a continuidade da repetição. Além disso, é comum explicitar, abaixo ou ao lado da expressão, o número de parcelas, isto é, a quantidade de vezes que o termo x se repete, correspondendo ao valor do número inteiro considerado.

48) Demonstre que a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição é verdadeira para os valores numéricos de a indicados em cada item abaixo e considerando b e c números naturais quaisquer.

$$\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

a) $a = \mathbf{0}$ ==> $0 \cdot (b + c) = 0 = 0 \cdot b + 0 \cdot c$

b) $a = \mathbf{1}$ ==>

c) $a = \mathbf{2}$ ==> $2 \cdot (b + c) = (b + c) + (b + c) = b + b + c + c = 2b + 2c$

d) $a = \mathbf{3}$ ==>

e) Considerando $a = \boldsymbol{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, mostre que vale a igualdade: $\mathrm{n} \cdot (b + c) = \mathrm{n} \cdot b + \mathrm{n} \cdot c$.

O Sistema de Numeração Decimal

O ***sistema de numeração decimal*** organiza as quantidades em agrupamentos de 10, onde 10 unidades formam 1 dezena, 10 dezenas formam 1 centena, 10 centenas formam 1 milhar, e assim sucessivamente. Usando a base 10, cada ordem é 10 vezes maior que a anterior.

Classe dos bilhões			**Classe dos milhões**			**Classe dos milhares**			**Classe das unidades simples**		
12ª ordem	11ª ordem	10ª ordem	9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas de bilhão	Dezenas de bilhão	Unidades de bilhão	Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades

49) Considere o número 3459. Complete a tabela abaixo.

	Dígito	Nome da Ordem	Nº de unidades em cada grupo	Valor Absoluto	Valor Relativo
a)	6				
b)	5	dezenas	10 unidades	5	50
c)	4				
d)	3				

O ***valor relativo*** de um dígito em um número é obtido multiplicando-se seu valor absoluto (ou seja, o próprio algarismo) pelo valor da ordem posicional que ele ocupa. Em outras palavras, o valor relativo de um dígito depende tanto do número que ele representa quanto da posição que ocupa dentro do número.

50) Ao decompor o numeral 3456 em uma adição que considera o *valor relativo* de cada dígito, obtemos: $3456 = 3000 + 400 + 50 + 6$. Cada parcela dessa adição representa o produto entre o valor absoluto do dígito e o valor posicional correspondente à sua ordem. Assim, podemos reescrever a decomposição evidenciando esse produto. Complete os quadradinhos abaixo levando em consideração as instruções acima.

$$3456 = 3 \cdot \boxed{} + 4 \cdot \boxed{} + 5 \cdot \boxed{} + 6$$

Observação: Essa forma de decomposição expressa *a estrutura do número* de acordo com o sistema de numeração decimal, no qual cada dígito ocupa uma ordem (unidade, dezena, centena, milhar etc.) e seu valor relativo depende dessa posição.

51) A partir de um total de 3.456 pessoas, quantos grupos de 10 pessoas podem ser formados? Existe algum grupo com menos de 10 pessoas? Justifique suas respostas com cálculos detalhados.

5.4 Atividade 4: A operação de divisão

A operação de divisão ocupa um papel central neste trabalho. Nesta atividade, propõem-se exercícios que visam consolidar o pensamento aritmético envolvendo as quatro operações elementares. Para isso, apresentam-se nesta seção atividades graduais que possibilitam ao estudante revisar conteúdos relacionados à definição da operação de divisão, às suas propriedades operatórias e a conceitos fundamentais, como a divisibilidade. Além disso, busca-se enfatizar a compreensão de que o quociente entre dois inteiros, sendo o divisor diferente de zero, nem sempre resulta em um número inteiro.

Os alunos serão incentivados a realizar divisões tanto manualmente quanto com o auxílio da calculadora, a fim de comparar os resultados encontrados no visor da máquina com aqueles obtidos usando os algoritmos tradicionais "no papel". Esse processo tem como objetivo criar um espaço de descobertas acerca das limitações computacionais das calculadoras eletrônicas, estimulando o desenvolvimento do senso crítico dos estudantes para que sejam capazes de compreender e interpretar tais resultados em diferentes contextos do cotidiano. É introduzida a partir da atividade 4 o conceito de tecla de fração da calculadora, para que ele relacione a fração como um número, obtido pelo quociente; mas também, a verificar que números decimais exatos e dízimas periódicas podem ser gerados através do quociente entre dois inteiros.

Por fim, propõem-se exercícios que incluem pequenas demonstrações matemáticas, nas quais os estudantes utilizam a relação fundamental da divisão para investigar e comprovar em quais situações a divisão de certos números inteiros resulta em decimais exatos.

Esta atividade está estruturada para quatro aulas de 50 minutos: mudando os tempos

1. Objetivo: Apresentar e explorar a operação de divisão com números inteiros, abordando suas propriedades, como divisibilidade, quociente e resto, iniciando com a definição de divisão e sua relação fundamental, investigando os resultados de divisões por meio de calculadoras ou cálculos manuais, e definindo a fração como o quociente de dois números inteiros, para promover a compreensão dessa relação pelos alunos.

2. Público-Alvo: Turmas do Ensino Fundamental II(9º ano) ou 1º ano do Ensino Médio, com noções básicas de aritmética, mas pouca ou nenhuma experiência com calculadoras.

Pré-requisito: Conhecimento básico das operações matemáticas $(+, -, \times, \div)$.

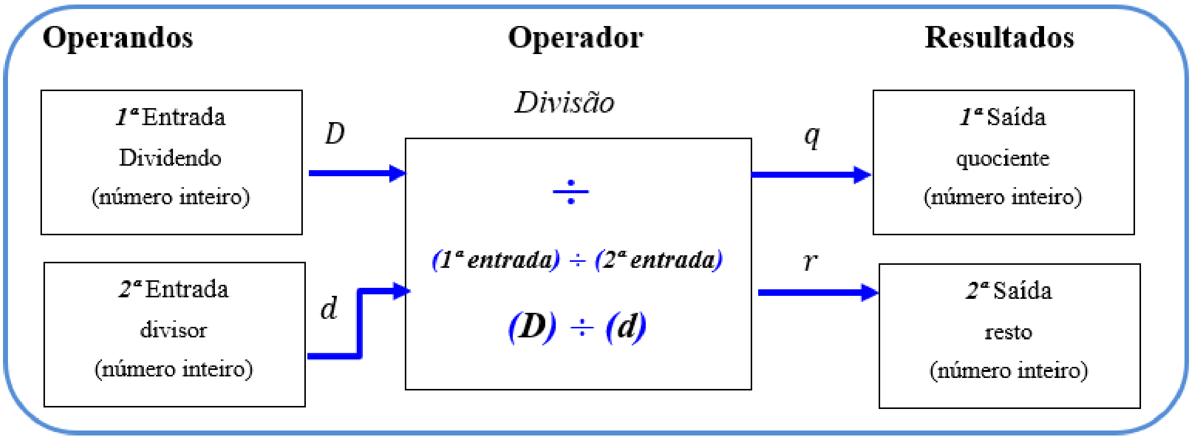
3. Materiais:

- Calculadoras básicas: uma por aluno ou uma por dupla (dependendo dos recursos).
- Caderno de atividades e caneta ou lápis para anotações.
- Quadro branco.

4. **Estrutura da Aula (100 minutos)**

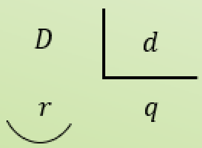
A atividade começa com a definição de divisão e sua relação fundamental. Em seguida, exploram-se os resultados de divisões, obtidos por calculadoras ou cálculos manuais. Por fim, define-se a fração como o quociente de dois números inteiros, ajudando o aluno a compreender essa relação. Os termos na operação da divisão são apresentados na Fig. 15.

Figura 15: Diagrama de Blocos da operação de Divisão para quociente inteiro



A Relação Fundamental da Divisão (Divisão Euclidiana)

Enunciado: Dados inteiros d e D com $d \neq 0$, existem inteiros q e r tais que $D = d \cdot q + \boldsymbol{r}$ e $0 \leq \boldsymbol{r} < |d|$. Além disso, q e r são unicamente determinados pelas condições acima.



A Relação Fundamental da Divisão

Conecta os quatro (4) termos envolvidos da divisão por meio da fórmula:

$$D = d \cdot q + r$$

$$dividendo = divisor \cdot quociente + resto$$

52) Leia o enunciado da Relação Fundamental da Divisão e extraia as seguintes informações:

a) A sentença matemática que relaciona os quatro termos da divisão.

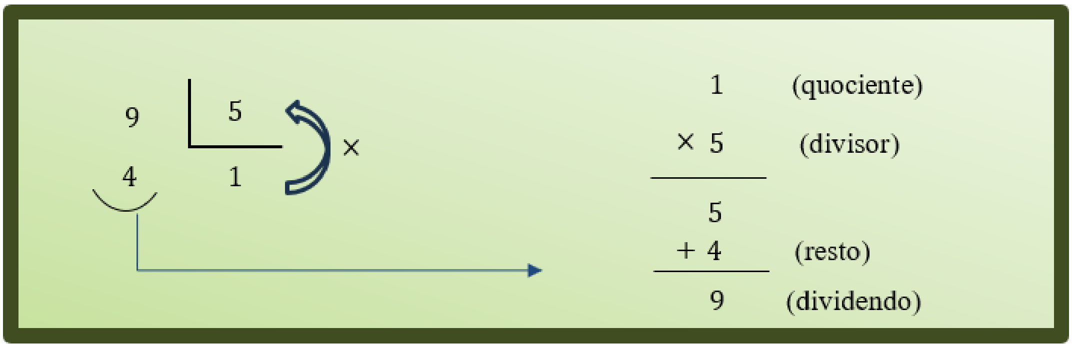
b) Como se lê: $0 \leq \boldsymbol{r} < |d|$?

c) O enunciado acima restringe o valor do divisor?

d) Ao dividirmos dois números inteiros, onde o segundo é diferente de zero sempre haverá resultados para a divisão do primeiro número pelo segundo número?

Exemplo: Organize e efetue: 9 ÷ 5 e verifique, pela Relação Fundamental da Divisão, se os resultados encontrados (quociente e resto) realmente satisfazem a essa relação.

"A Prova Real da Divisão": Processo de verificação dos resultados encontrados pela divisão.



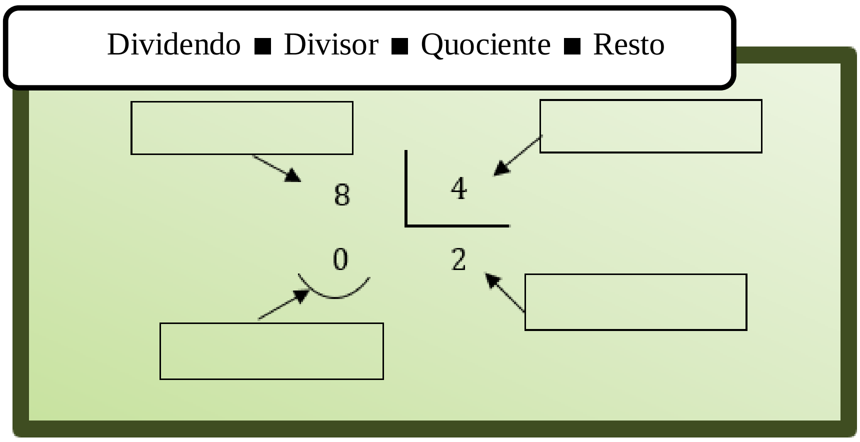
Observações:

1) A operação de divisão possui dois resultados: quociente e resto. Já as operações de adição, subtração e multiplicação possuem apenas um resultado respectivamente denominados de soma, diferença e produto.

2) Neste trabalho de dissertação convencionou-se usar letras minúsculas do nosso alfabeto para representar as variáveis; no caso da denotação do dividendo e do divisor, escolheu-se usar a mesma letra para facilitar o entendimento diferenciando-as em maiúscula e minúscula conforme ilustrado no quadro acima.

3) Nas linguagens de programação o símbolo usado para "dividir" é uma barra inclinada "/".

53) Insira nos espaços abaixo os nomes que se encontram no quadro abaixo.



❖ As leituras da expressão: **8 ÷ 4**. Leitura principal: “oito dividido por quatro”. Outras formas possíveis: “Oito por quatro”, “o quociente entre 8 e 4”, e “divisão de oito por quatro”.

Operações de Divisão: Exatas e Não Exatas

54) Observe as operações de divisão abaixo. Identifique as que são divisões exatas (DE) e as que são divisões não exatas (DNE).

(a)
$$\begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r|l} 18 & 5 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{r|l} 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

55) Utilize a Relação Fundamental da Divisão e verifique se os resultados encontrados na questão anterior estão corretos. Faça esse exercício mentalmente.

56) Quais são os ***restos*** possíveis quando dividimos um nº inteiro diferente de zero por 5? Comente a sua resposta. ____

____

57) Realize as seguintes operações utilizando com e sem o auxílio de uma calculadora. Anote os resultados encontrados no visor nos campos abaixo.

a) 8 ÷ 2

Visor da calculadora

b) 18 ÷ 4

Visor da calculadora

c) 8 ÷ 6

Visor da calculadora

58) Os resultados das divisões que apareceram no visor da calculadora sempre correspondem aos quocientes que você encontrou no exercício 57? Destaque as operações de divisão em que o resultado do divisor na calculadora coincide com o quociente da divisão.

59) Obtenha os mesmos resultados que apareceram no visor da calculadora através dos cálculos no papel.

a) $8 \div 5$

Visor da calculadora

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

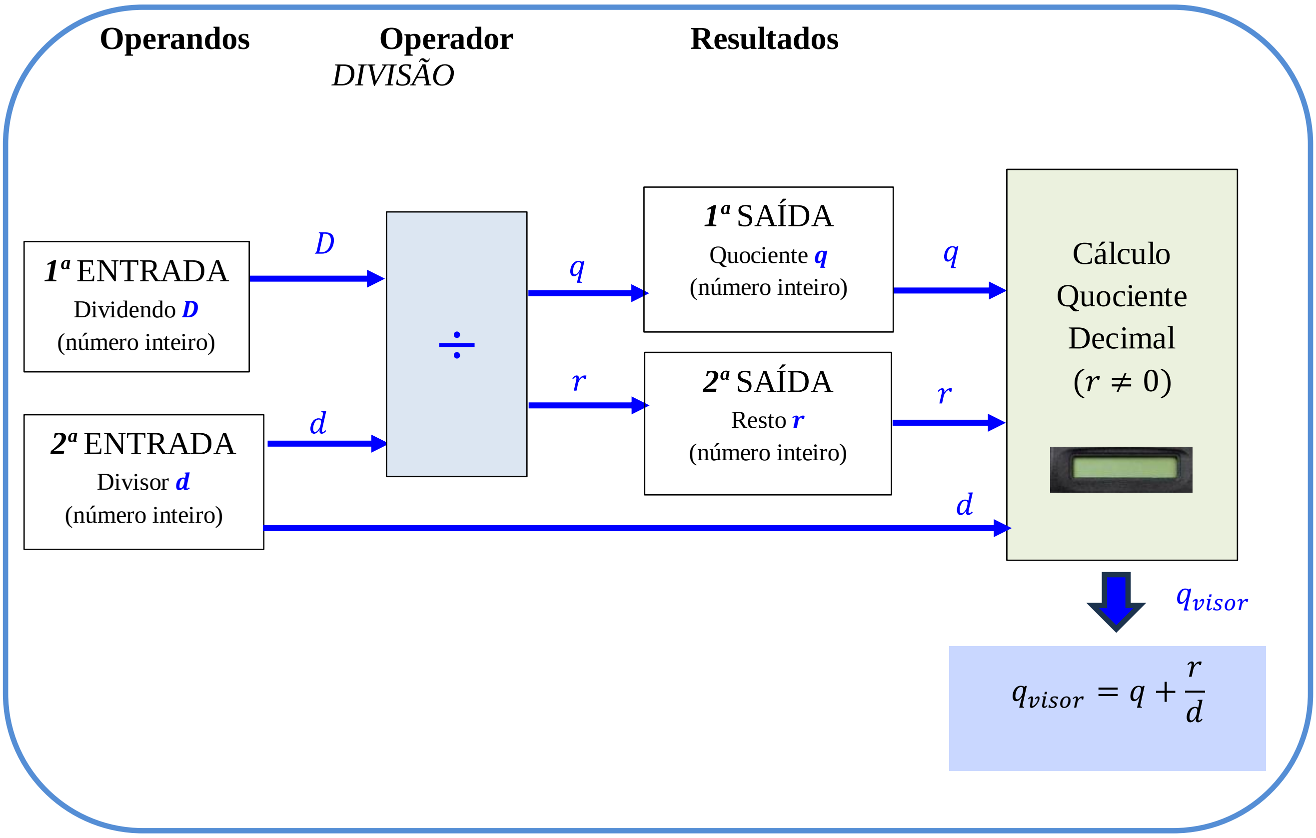
b) $8 \div 6$

Visor da calculadora

$$\begin{array}{r|l} 8 & 6 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

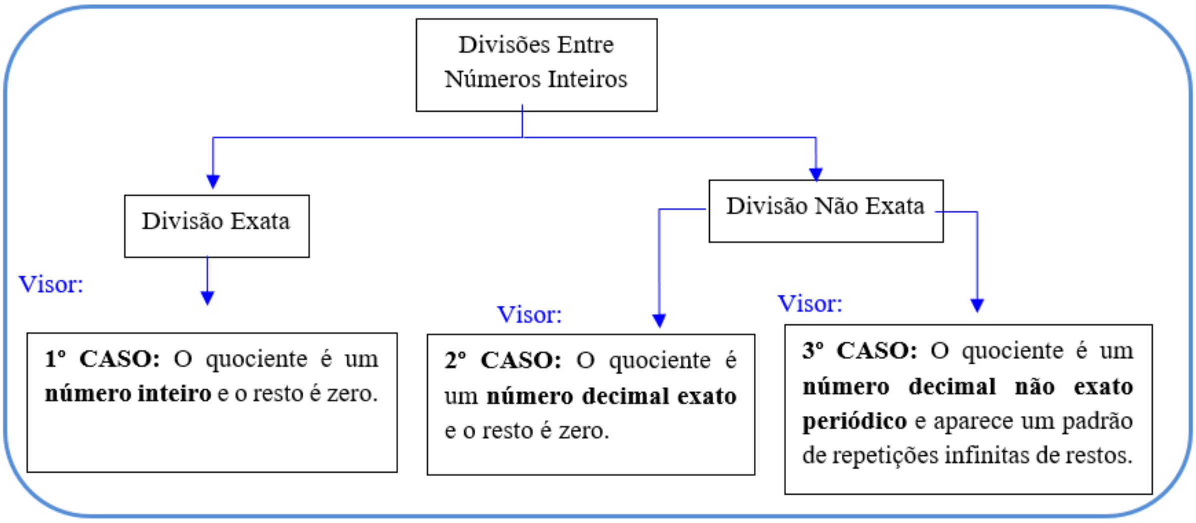
O cálculo do quociente decimal em uma divisão não exata.

Figura 16: Diagrama de Blocos na Operação de Divisão, Quocientes Inteiros e Decimais



Observação: Para diferenciar o quociente inteiro do quociente decimal, usa-se a notação de variável com um subscrito nominal (q_{visor}). Num texto matemático, mais formal, essa diferenciação poderia ser visualizada como q para um quociente inteiro e q' para o quociente decimal, por exemplo.

Figura 17: Classificação das divisões com inteiros



Quociente no Visor da Calculadora:

Exercício: Quando dividimos um número inteiro D por outro número inteiro d $(d \neq 0)$, a calculadora mostra no visor o quociente $\frac{D}{d}$. Sabemos que, pela relação fundamental da divisão, todo número inteiro D pode ser escrito assim:

$$D = d \cdot q + r,$$

Onde q é o quociente inteiro e r é o resto da divisão, com $0 \leq r < |d|$.

Usando essa relação para escrever a fórmula que mostra o valor do quociente $\frac{D}{d}$ exibido na calculadora em função de q, r e d.

Resolução:

Desejamos encontrar o valor de $\mathrm{D} \div \mathrm{d}$, isto é $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}}$ a partir da relação abaixo.

$$D = d \cdot q + r$$

1º PASSO: Para encontrar o valor de $\frac{D}{d}$, como $d \neq 0$, dividimos ambos os membros da igualdade acima pelo divisor d, prosseguindo assim, teremos:

$$\frac{D}{d} = \frac{d \cdot q + r}{d}$$

Observação: Neste primeiro passo, utilizamos uma propriedade da igualdade que diz que ao dividir ambos os membros de uma igualdade por um valor inteiro diferente de zero essa igualdade não se altera.

2º PASSO: Observe que o numerador da fração do 2º membro possui um sinal de $+$. Usando uma propriedade das frações, podemos transformar uma fração que possui uma soma no seu numerador em duas frações, de tal forma que ambas as frações resultantes possuam o mesmo denominador e que os seus numeradores sejam as parcelas no numerador o qual separamos.

$$\frac{D}{d} = \frac{d \cdot q}{d} + \frac{r}{d}$$

3º PASSO: Pelas propriedades das frações, podemos colocar o valor do quociente (q) na frente do quociente $\frac{d}{d}$. Desta forma, teremos:

$$\frac{D}{d} = q \cdot \frac{d}{d} + \frac{r}{d}$$

Como $\frac{d}{d} = 1$, teremos:

$$\frac{D}{d} = q \cdot 1 + \frac{r}{d}$$

Como $q \cdot 1 = q$, teremos:

$$\frac{D}{d} = \boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}}$$

Observações: A variável q é a **parte inteira** do número representado no visor da calculadora e o quociente $\frac{r}{d}$ corresponde ao valor da **parte decimal** que aparecerá no visor da calculadora ao lado da parte inteira q.

Propriedades usadas no exercício de demonstração:

$a = b \Longrightarrow \frac{a}{k} = \frac{b}{k}$	$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$	$\frac{k \cdot a}{b} = k \cdot \frac{a}{b}$

As Palavras: Divisor, Divisível e Múltiplo de um Número Inteiro

60) Complete as lacunas a partir das palavras abaixo:

É múltiplo / não é múltiplo
É divisível / não é divisível
É divisor / não é divisor

10	5	9	5
0	2	4	1

a) 10 ______________ de 5.

b) 10 é divisível ______ por 5.

c) 5 ________________ de 10.

d) 9 ______________ de 5.

e) 9 ______________ por 5.

f) 5 ______________ de 9.

Os tipos de números decimais e as suas representações em uma calculadora.

O quociente entre dois números inteiros em divisões não exatas resulta em decimais exatos ou dízimas periódicas. As calculadoras possuem limitações para lidar, por exemplo, com números com infinitas casas decimais.

Nesse percurso, serão introduzidos brevemente conceitos como número exato, número aproximado e erro de aproximação decorrente do uso da calculadora na divisão de inteiros. Além disso, em consonância com as orientações da BNCC, também serão propostas atividades que envolvem o cálculo mental envolvendo a divisão.

61) Complete cada tabuada da divisão abaixo com o auxílio das dicas de cálculo mental de divisões por 2, 4, 5, 8, 9 e 10. Utilize também uma calculadora para conferir os seus resultados quando você julgar necessário; em seguida, faça o preenchimento do quadro à direita interpretando qual é a representação correta de cada número. Identifique os resultados como INT (números inteiros), DE (decimais exatos) e DP (dízimas periódicas).

Dicas de Cálculo Mental nas divisões por 2, 4, 5, 8 e 10.		**Sequência das operações**
$\boldsymbol{x \div 2}$	A metade de x.	$x \div 2$
$\boldsymbol{x \div 4}$	A metade da metade de x	$x \div 4 = (x \div 2) \div 2$
$\boldsymbol{x \div 8}$	A metade da metade da metade de x	$x \div 8 = ((x \div 2) \div 2) \div 2$

$\boldsymbol{x \div 10}$	Anda a vírgula uma casa para a esquerda.	$x \div 10$
$\boldsymbol{x \div 5}$	Dobra o valor de x e divide o resultado por 10.	$x \div 5 = (x \cdot 2) \div 10$

Resultados encontrados no visor da calculadora

Valores reais dessas operações

Tabuada do 10

Resultados encontrados no visor da calculadora	Valores reais dessas operações	
$10 \div 1 =$	$10 \div 1 =$	
$10 \div 2 = 5$	$10 \div 2 = 5$	INT
$10 \div 3 = 3{,}3333333333$	$10 \div 3 = 3{,}333\ldots$ ou $3{,}\overline{3}$	DP
$10 \div 4 = 2{,}5$	$10 \div 4 = 2{,}5$	DE
$10 \div 5 =$	$10 \div 5 =$	
$10 \div 6 = 1{,}6666666667$	$10 \div 6 = 1{,}666\ldots$ ou $1{,}\overline{6}$	DP
$10 \div 7 =$	$10 \div 7 =$	
$10 \div 8 =$	$10 \div 8 =$	
$10 \div 9 = 1{,}1111111111$	$10 \div 9 = 1{,}111\ldots$ ou $1{,}\overline{1}$	DP
$10 \div 10 =$	$10 \div 10 =$	

Tabuada do 9

Resultados encontrados no visor da calculadora	Valores reais dessas operações
$9 \div 1 =$	$9 \div 1 =$
$9 \div 2 =$	$9 \div 2 =$
$9 \div 3 =$	$9 \div 3 =$
$9 \div 4 =$	$9 \div 4 =$
$9 \div 5 =$	$9 \div 5 =$
$9 \div 6 =$	$9 \div 6 =$
$9 \div 7 = 1{,}2857142857$	$9 \div 7 =$
$9 \div 8 =$	$9 \div 8 =$
$9 \div 9 =$	$9 \div 9 =$
$9 \div 10 =$	$9 \div 10 =$

Tabuada do 8

8 ÷ 1 =	8 ÷ 1 =
8 ÷ 2 =	8 ÷ 2 =
8 ÷ 3 = 2,6666666667	8 ÷ 3 =
8 ÷ 4 =	8 ÷ 4 =
8 ÷ 5 =	8 ÷ 5 =
8 ÷ 6 = 1,3333333333	8 ÷ 6 =
8 ÷ 7 = 1,1428571429	8 ÷ 7 =
8 ÷ 8 =	8 ÷ 8 =
8 ÷ 9 = 0,8888888889	8 ÷ 9 =
8 ÷ 10 =	8 ÷ 10 =

Tabuada do 7

7 ÷ 1 =	7 ÷ 1 =
7 ÷ 2 =	7 ÷ 2 =
7 ÷ 3 = 2,3333333333	7 ÷ 3 =
7 ÷ 4 =	7 ÷ 4 =
7 ÷ 5 =	7 ÷ 5 =
7 ÷ 6 = 1,1666666667	7 ÷ 6 =
7 ÷ 7 =	7 ÷ 7 =
7 ÷ 8 =	7 ÷ 8 =
7 ÷ 9 = 0,7777777778	7 ÷ 9 =
7 ÷ 10 =	7 ÷ 10 =

Tabuada do 6

6 ÷ 1 =	6 ÷ 1 =
6 ÷ 2 =	6 ÷ 2 =
6 ÷ 3 =	6 ÷ 3 =
6 ÷ 4 =	6 ÷ 4 =
6 ÷ 5 =	6 ÷ 5 =
6 ÷ 6 =	6 ÷ 6 =
6 ÷ 7 = 0,851428571	6 ÷ 7 =
6 ÷ 8 =	6 ÷ 8 =
6 ÷ 9 = 0,6666666667	6 ÷ 9 =
6 ÷ 10 =	6 ÷ 10 =

Tabuada do 5

5 ÷ 1 =	5 ÷ 1 =
5 ÷ 2 =	5 ÷ 2 =
5 ÷ 3 = 1,6666666667	5 ÷ 3 =
5 ÷ 4 =	5 ÷ 4 =
5 ÷ 5 =	5 ÷ 5 =
5 ÷ 6 = 0,8333333333	5 ÷ 6 =
5 ÷ 7 = 0,7142857143	5 ÷ 7 =
5 ÷ 8 =	5 ÷ 8 =
5 ÷ 9 = 0,5555555556	5 ÷ 9 =
5 ÷ 10 =	5 ÷ 10 =

Tabuada do 4

4 ÷ 1 =	4 ÷ 1 =
4 ÷ 2 =	4 ÷ 2 =
4 ÷ 3 = 1,3333333333	4 ÷ 3 =
4 ÷ 4 =	4 ÷ 4 =
4 ÷ 5 =	4 ÷ 5 =
4 ÷ 6 = 0,6666666667	4 ÷ 6 =
4 ÷ 7 = 0,5714285714	4 ÷ 7 =
4 ÷ 8 =	4 ÷ 8 =
4 ÷ 9 = 0,4444444444	4 ÷ 9 =
4 ÷ 10 =	4 ÷ 10 =

Tabuada do 3

3 ÷ 1 =	3 ÷ 1 =
3 ÷ 2 =	3 ÷ 2 =
3 ÷ 3 =	3 ÷ 3 =
3 ÷ 4 =	3 ÷ 4 =
3 ÷ 5 =	3 ÷ 5 =
3 ÷ 6 =	3 ÷ 6 =
3 ÷ 7 = 0,4285714286	3 ÷ 7 =
3 ÷ 8 =	3 ÷ 8 =
3 ÷ 9 = 0,3333333333	3 ÷ 9 =
3 ÷ 10 =	3 ÷ 10 =

Tabuada do 2

2 ÷ 1 =	2 ÷ 1 =
2 ÷ 2 =	2 ÷ 2 =
2 ÷ 3 = 0,6666666667	2 ÷ 3 =
2 ÷ 4 =	2 ÷ 4 =
2 ÷ 5 =	2 ÷ 5 =
2 ÷ 6 = 0,3333333333	2 ÷ 6 =
2 ÷ 7 = 0,2857142857	2 ÷ 7 =
2 ÷ 8 =	2 ÷ 8 =
2 ÷ 9 = 0,2222222222	2 ÷ 9 =
2 ÷ 10 =	2 ÷ 10 =

Tabuada do 1

1 ÷ 1 =	1 ÷ 1 =
1 ÷ 2 =	1 ÷ 2 =
1 ÷ 3 = 0,3333333333	1 ÷ 3 =
1 ÷ 4 =	1 ÷ 4 =
1 ÷ 5 =	1 ÷ 5 =
1 ÷ 6 = 0,1666666667	1 ÷ 6 =
1 ÷ 7 = 0,1428571429	1 ÷ 7 =
1 ÷ 8 =	1 ÷ 8 =
1 ÷ 9 = 0,1111111111	1 ÷ 9 =
1 ÷ 10 =	1 ÷ 10 =

Tabuada do 0

0 ÷ 0 =	0 ÷ 0 =
0 ÷ 1 =	0 ÷ 1 =
0 ÷ 2 =	0 ÷ 2 =
0 ÷ 3 =	0 ÷ 3 =
0 ÷ 4 =	0 ÷ 4 =
0 ÷ 5 =	0 ÷ 5 =
0 ÷ 6 =	0 ÷ 6 =
0 ÷ 7 =	0 ÷ 7 =
0 ÷ 8 =	0 ÷ 8 =
0 ÷ 9 =	0 ÷ 9 =
0 ÷ 10 =	0 ÷ 10 =

62) Responda as questões a seguir baseado nas tabuadas da divisão do exercício anterior.

a) As divisões por quais números inteiros resultaram em *números decimais exatos*?

Resposta: ____.

b) As divisões por quais números inteiros resultaram em *dízimas periódicas*?

Resposta: ____.

c) Quais operações resultaram em *dízimas periódicas compostas*?

Resposta: ____.

d) Ao dividir um número inteiro não nulo por outro número inteiro não nulo de valor absoluto menor, o resultado da divisão é sempre maior que 1 ou menor que 1? Justifique sua resposta.

Resposta: ____.

Comentários sobre as discrepâncias nos resultados obtidos nas calculadoras:

- A calculadora nativa no smartphone Samsung Galaxy S22 apresentou todos os números decimais exatas com no máximo 10 casas decimais.
- A maioria das calculadoras exibe até 12 dígitos em suas telas. Assim, resultados de expressões matemáticas com números decimais que excedem esse limite são ajustados pelo algoritmo da calculadora, exibindo um valor aproximado em vez do valor exato.
- Quando o resultado exato de uma operação, como uma divisão entre números inteiros positivos, é um decimal que excede a capacidade de exibição da calculadora, obtemos um valor aproximado. O erro absoluto é calculado por

$$E_{\text{absoluto}} = |\text{VALOR}_{\text{exato}} - \text{VALOR}_{\text{aproximado}}|$$

- Embora as calculadoras gerem erros de aproximação, esses são geralmente muito pequenos e desprezíveis em operações matemáticas do dia a dia
- No preenchimento das tabelas acima ficou claro que certas operações cujos resultados exatos são dízimas periódicas, apareceram nas calculadoras um número decimal exato e o último dígito não corresponde a um valor do período.

Por que as calculadoras erram?

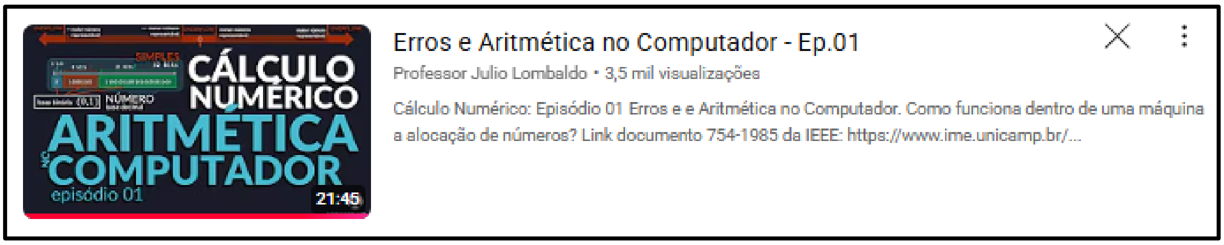
Sandra Renz Pacheco(2007) discute em seu artigo os tipos de erros que podem ocorrer no uso de calculadoras; dentre eles estão os erros de truncamento e arredondamento.

> Para a resolução dos modelos matemáticos é necessário fazer aproximações. Tais aproximações podem gerar os chamados erros de truncamento e os erros de arredondamento. Os erros de truncamento são aqueles cometidos quando se substitui qualquer processo infinito por um processo finito. [...]. Já os erros de arredondamento surgem quando se trabalha com calculadoras digitais ou computadores para representar números pertencentes ao campo dos reais, [...]. (RENZ PACHECO,2007)

A calculadora trabalha com um sistema de representação de números no seu visor denominado de **Aritmética de Ponto Flutuante**. E essa representação possui limitações. Por exemplo, ao efetuar $2 \div 3$ em uma calculadora, que é um número real cuja representação decimal é $0{,}666\ldots$, temos que o visor da calculadora aparecerá um número limitado de casas decimais. Conforme visto no exercício anterior, $2 \div 3 = 0{,}6666666667$. Faça a leitura do emprego deste símbolo em $2 \div 3 = 0{,}6666666667$ como o resultado obtido pela calculadora após teclar "=". Matematicamente falando, ao saber que esse número é uma aproximação do *valor exato*, a simbologia correta seria $2 \div 3 \approx 0{,}6666666667$; a leitura desta sentença é: $2 \div 3$ é $aproximadamente\ igual\ a\ 0{,}6666666667$. Para usar o símbolo de igualdade, neste caso, é necessário apresentar o valor exato; isto é: $2 \div 3 = 0{,}666\ldots$

No caso das dízimas periódicas, cabe ressaltar que esse processo de arredondamento, às vezes deixará o último dígito exibido no visor da calculadora igual ao período da dízima, mas isso não significa que o valor do visor é uma dízima periódica. Por exemplo, ao digitar a expressão '$2 \div 9$' na calculadora e, em seguida, teclar "=", o resultado que aparece no visor é $0{,}6666666666$; portanto, deduz-se, pelo visor que: $2 \div 9 = 0{,}6666666666$, que sabe-se que também é uma aproximação de $0{,}666\ldots$.

No vídeo *Erros e Aritmética no Computador – Ep.01* (PROFESSOR JÚLIO LOMBALDO,2022), *o* professor Júlio cita no seu vídeo o documento IEEE Std 754-1985, conhecido como Norma IEEE 754, que tem como finalidade estabelecer um padrão internacional para a aritmética em ponto flutuante em computadores e calculadoras digitais. Este documento define regras para representar e manipular números reais em formato binário e decimal de forma uniforme em todas as máquinas de calcular, e traz informações sobre arredondamentos, erros de aproximação, situações de *overflow* (estouro superior), *underflow* (valores muito próximos de zero), divisão por zero e resultados indefinidos (NaN – Not a Number) envolvendo essas máquinas.



Fonte: (PROFESSOR JÚLIO LOMBALDO,2022)

A Tecla "Fração"

Visando ampliar o conhecimento dos estudantes sobre a calculadora científica, será apresentada a "tecla de fração", que possibilita obter o quociente entre dois inteiros colocando-os na forma de fração. A partir dessa exploração, pretende-se que os alunos associem os números decimais exatos e as dízimas periódicas às frações, compreendendo-os como expressões do quociente entre inteiros — ideia que se articula diretamente à definição de número racional.

Você sabia que a fração pode ser vista como uma divisão?

Em algumas calculadoras existe a tecla fração. Verificaremos o que aparecerá no visor da calculadora após usarmos essa tecla.

Figura 18: A tecla de fração numa calculadora científica portátil. Casio

Algumas calculadoras não possuem essa tecla disponível. Na Matemática a fração pode ser interpretada de várias formas diferentes.

Quiz: Qual é a ideia de fração associada a tecla de fração da calculadora?

( ) 1ª ideia: fração como parte/todo **( ) 3ª ideia:** fração de uma quantidade

( ) 2ª ideia: fração como razão **(X) 4ª ideia:** fração como quociente

Para trabalhar com frações na calculadora, usaremos a ***4ª ideia de fração***: fração como quociente.

A tecla de fração está relacionada ao que chamamos de ***número fracionário***.

Definição: Sejam a e b dois números inteiros, com $b \neq 0$. Define-se a fração a por b, denotada por:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a \div b$$

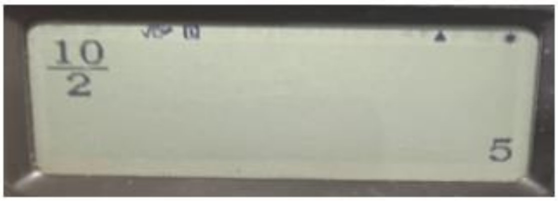
Isto é, como a representação da divisão de a por b, onde a é o numerador e b é o denominador.

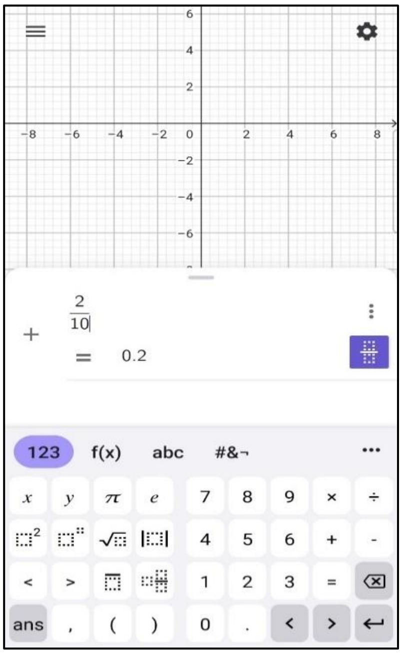
Leitura de um Número Fracionário:

Exemplo 1: $\frac{10}{2} = 5$ Lê-se: O quociente entre 10 e 2 é igual a 5. (Fig. 18).

Exemplo 2: $\frac{2}{10} = 0{,}2$ Lê-se: O quociente entre 2 e 10 é igual a 0,2.

Figura 19: Visor com as respostas





Comentários:

1) Algumas calculadoras como o Geogebra, se você digitar $8 \div 5$, aparecerá no seu visor, $\frac{8}{5}$. Isto é, a notação na forma de fração.

2) Não existe a tecla de fração nas calculadoras portáteis mais simples.

3) O Geogebra não possui a tecla "DEL" ou "AC"; usa-se, ao invés disso, o recurso *touchscreen* dos smartphones; e o ícone dos "três pontinhos" para deletar resultados.

4) O Geogebra possui uma tecla de número misto.

Como o número fracionário representa o quociente entre dois números inteiros, logo podemos ter como resultados: números inteiros, decimais exatos ou dízimas periódicas; conforme observamos nas tabuadas da divisão de inteiros.

Divisão com Resultados Iguais

Você sabia que... existem operações de divisão em que o quociente e o resto são iguais?

63) Determine as divisões que produzem os resultados indicados em cada item abaixo. Dica: Consulte as tabuadas de divisão que você preencheu. Caso sobrem retângulos, crie outras operações de divisão que gerem o mesmo resultado.

a) $\boxed{?} \div \boxed{?} = \mathbf{2}$

$2 \div 1$					

b) $\boxed{?} \div \boxed{?} = \mathbf{1,5}$

$3 \div 2$					

c) $\boxed{?} \div \boxed{?} = \mathbf{0,5}$

$1 \div 2$					

d) $\boxed{?} \div \boxed{?} = \mathbf{0{,}333}\ ...$

$3 \div 9$					

Você sabia que .... para obter operações de divisão que possuem o mesmo resultado basta escolhermos um número inteiro diferente de zero para multiplicar pelo dividendo e o divisor?

64) Siga os seguintes passos:

a) Encontre o valor de $6 \div 2 \;=$ ______.

b) Multiplique o dividendo e o divisor por 5.

c) Como fica a nova expressão? $\boxed{} \div \boxed{}$

d) Em seguida, divida os valores na ordem que aparecem. Qual é o resultado da divisão após essas multiplicações? _____.

e) ***Conclusão:*** $6 \div 2 \;= \boxed{} \div \boxed{}$. Escrevendo na forma de números fracionários, temos: $\frac{6}{2} \;= \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$.

65) As operações $5 \div 4$ e $10 \div 8$ geram o mesmo resultado no visor da calculadora? Justifique a sua resposta.

____

____

____

Propriedade: Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois ***números fracionários,*** eles são iguais, se e somente se, vale a sentença abaixo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Exercícios:

66) Verifique se as igualdades abaixo são verdadeiras ou falsas.

$a)$ ( ) $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ $\qquad$ $c)$ ( ) $\frac{5}{10} = \frac{10}{5}$

$b)$ ( ) $\frac{2}{10} = \frac{6}{10}$ $d)$ ( ) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}$

Você sabia que .... para obter operações de divisão que possuem o mesmo resultado podemos <u>dividir</u> o dividendo e o divisor por um mesmo número desde que esse número escolhido seja diferente de zero?

67) Siga os seguintes ***passos***:

a) Encontre o valor de $4 \div 8 =$ _____.

b) Divida o dividendo e o divisor por 2.

c) Como fica a nova expressão? $\square \div \square$

d) Em seguida, divida os valores na ordem que aparecem. Qual é o resultado da divisão após essas multiplicações? _____.

e) ***Conclusão:*** $4 \div 8 = \square \div \square$. Escrevendo na forma de números fracionários, temos: $\frac{4}{8} = \frac{\square}{\square}$.

Observações:

1) Embora possamos dividir o 4 e 8 por qualquer número inteiro, diferente de zero (aqui estamos admitindo que a divisão pode resultar em decimal), vamos escolher aquele ou aqueles números que são divisores comuns de 4 e 8 (para que a divisão possa ser um resultado inteiro.) Por exemplo, 2 e o 4.

2) Ao *multiplicar* ou *dividir* ambos os termos do número fracionário $\left(\frac{4}{8}\right)$ pelo número 1 teremos que $\frac{4}{8} = \frac{4}{8}$.

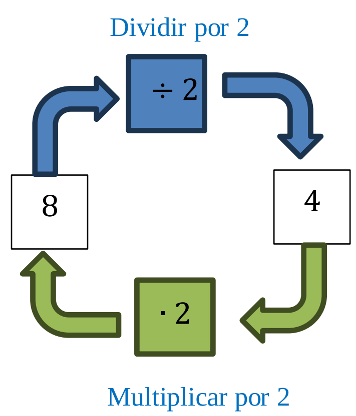
3) Há infinitos pares de números inteiros cujos quocientes são iguais a $\frac{4}{8}$.

Operações Inversas: Multiplicação e Divisão

Enunciado: Sejam a e b números inteiros, onde b é diferente de zero e tal que $a \div b$ é uma divisão exata. É possível relacionar os valores de a, b e c conforme a equivalência abaixo.

$$a \div b = c \iff c \cdot b = a$$

Exemplo: $\boxed{8} \div \boxed{2} = \boxed{4} \iff \boxed{4} \cdot \boxed{2} = \boxed{8}$



Observação: Para verificar se o resultado de uma operação de divisão está correto, pode-se usar o raciocínio da operação inversa.

68) Qual é o número desconhecido?

a) $\boxed{40} \div \boxed{10} = \boxed{?}$

b) $\boxed{40} \div \boxed{4} = \boxed{10}$

c) $\boxed{?} \div \boxed{40} = \boxed{10}$

d) $\boxed{?} \div \boxed{40} = \boxed{5}$

e) $\boxed{40} \div \boxed{?} = \boxed{1}$

f) $\boxed{?} \div \boxed{40} = \boxed{0}$

g) $\boxed{40} \div \boxed{?} = \boxed{5}$

69) Como encontrar o resto de uma divisão de inteiros utilizando o resultado do visor?

____

____

Exemplo: Por que os números decimais obtidos pela divisão de um número inteiro diferente de zero por 5 sempre serão decimais exatos?

Solução: Ao dividirmos qualquer número inteiro por 5, os resultados possíveis para os seus restos são: 0,1,2,3 e 4. Utilizando a fórmula, $q_{decimal} = q_{inteiro} + \frac{r}{d}$, podemos determinar se as divisões não exatas por 5 sempre serão números decimais exatos bastando calcular o resultado de $\frac{r}{d}$. De fato, tomando todas as possibilidades de $\frac{r}{d}$, verificamos que $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\ e\ \frac{4}{5}$ são números decimais exatos. Logo, $q_{decimal} = q_{inteiro} + deimal\ exato$, que não pode resultar em dízima periódica.

70) Por que os números decimais obtidos pelas divisões de um número inteiro diferente de zero por 2,4,5,8 e 10 são sempre decimais exatos?

____

____

____

Observação: O método utilizado para resolver esse tipo de problema é relativamente simples, mas quando os divisores são números elevados, como 83, esse jeito de pensar, apesar de correto, se torna inviável. Na atividade 10 (ver Produto Educacional no apêndice) há uma sugestão de resolução desse problema utilizando uma técnica mais simples e rápida.

71) Resolva as divisões abaixo utilizando a tecla de subtração da calculadora. Anote o quociente inteiro e o resto de cada operação.

a) $12 \div 3$ b) $20 \div 4$ c) $15 \div 4$ d) $9 \div 2$

72) Considerando a divisão de inteiros, é possível garantir que divisões não exatas por 3, 6, 7 e 9 sempre resultarão em dízimas periódicas? Comente a sua resposta.

____

____

____

73) Complete os quadros 1 e 2 abaixo. Em seguida, responda as questões.

Quadro 1: Propriedade do Elemento Neutro

$0 \div 1 =$ ____

$1 \div 1 =$ ____

$2 \div 1 =$ ____

$3 \div 1 =$ ____

$4 \div 1 =$ ____

Considerando x um número inteiro qualquer, podemos afirmar que:

$x \div 1 =$ ____

Usando a notação de número fracionário, temos:

$\frac{x}{1} =$ _____

Quadro 2: Um número dividido por ele mesmo

$0 \div 0 =$ ____

$1 \div 1 =$ ____

$2 \div 2 =$ ____

$3 \div 3 =$ ____

$4 \div 4 =$ ____

Considerando x um número inteiro qualquer diferente de zero, podemos afirmar que:

$x \div x =$ ____

Usando a notação de número fracionário, temos:

$\frac{x}{x} =$ _____

a) A propriedade comutativa é válida para a operação de divisão? ____________

b) O elemento neutro da divisão é 1? ____________________________________

c) Use a Relação Fundamental da Divisão e verifique se os valores encontrados para $\frac{x}{1}$ e $\frac{x}{x}$ estão corretos.

O valor de uma expressão numérica

Uma expressão numérica é uma combinação de números e operações matemáticas, podendo aparecer com ou sem os sinais de associação: parênteses, colchetes e chaves. A sequência com que as operações aritméticas aparecem na expressão numérica, bem como os sinais de associação, interferem no resultado. Segue a seguir a regra geral para determinação do valor numérico de uma expressão numérica.

A regra geral para calcular o valor de uma expressão segue a seguinte ordem de resolução:

1º Passo
- **Multiplicação e divisão**, efetuamos as operações na ordem em que aparecem da esquerda para a direita.

2º Passo
- **Adição e subtração** , efetuamos as operações na ordem em que aparecem da esquerda para a direita.

❖ A hierarquia de agrupamento dos ***sinais de associação***: 1º lugar: ( );2º lugar: [ ] e, em 3º lugar, { }.

É importante destacar que **multiplicação não tem prioridade sobre a divisão**, assim como **adição não tem prioridade sobre a subtração**. O critério é sempre a leitura da esquerda para a direita dentro do mesmo nível de operação.

Expressões numéricas com DUAS operações aritméticas

74) Realize os cálculos abaixo manualmente e, em seguida, use uma calculadora para verificar a correção dos resultados, inserindo os dados no teclado e observando o resultado na tela.

a) $8 + 4 + 2 =$ ______.

b) $8 - 4 - 2 =$ ______.

c) $8 \times 4 \times 2 =$ ______.

d) $8 \div 4 \div 2 =$ ______.

e) $10 \times 5 \div 2 =$ ______.

f) $10 \div 5 \times 2 =$ ______.

g) $10 + 5 - 2 =$ ______.

h) $10 - 5 + 2 =$ ______.

Expressões numéricas com as 4 operações aritméticas, sem sinais de associação:

Exemplo 1: Qual é o valor da expressão?

$$\begin{aligned} & 8 + 12 \div 4 \times 2 - 3 \\ &= 8 + 12 \div 4 \times 2 - 3 \\ &= 8 + 3 \times 2 - 3 \\ &= 8 + 3 \times 2 - 3 \\ &= 8 + 6 - 3 \\ &= 8 + 6 - 3 \\ &= 14 - 3 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Exemplo 2: Coloque os sinais de associação na expressão abaixo indicando a ordem correta dos cálculos.

$$\begin{aligned} & 8 + 12 \div 4 \times 2 - 3 \\ &= 8 + (12 \div 4) \times 2 - 3 \\ &= 8 + [(12 \div 4) \times 2] - 3 \\ &= \{8 + [(12 \div 4) \times 2]\} - 3 \end{aligned}$$

Observação: Na calculadora padrão do smartphone não há teclas de colchetes e chaves. Esse não é um problema, pois pode-se utilizar as teclas parênteses no lugar delas. Num código de programação é muito comum o programador usar só os parênteses. Para estabelecimento da ordem de resolução dos cálculos na ausência dos colchetes e chaves, a regra é começa-se a determinar o valor da expressão resolvendo as expressões dentro dos parênteses mais interno da expressão até chegar aos parênteses externos.

Exemplo: Resolva a expressão numérica abaixo com o auxílio de uma calculadora.

$$\{8 + [(12 \div 4) \times 2]\} - 3$$

Solução: Inserimos a expressão correspondente a de cima substituindo os símbolos de colchetes e chaves por parênteses.

$$\left(8 + \left((12 \div 4) \times 2\right)\right) - 3$$

75) Verdadeiro ou Falso? Considere a, b e c inteiros positivos.

i. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + c$ ( )

ii. $(a \div b) \div c = a \div (b \div c)$ ( )

iii. $a \div (b + c) = a \div b + a \div c$ ( )

iv. $(b + c) \div a = b \div a + c \div a$ ( )

v. $a \div (b \cdot c) = (a \div b) \div c$ ( )

vi. $a \div (b \cdot c) = a \div b \cdot c$ ( ).

Comentários e avaliação:

- O professor deve estar atento aos erros na definição ao interpretar e comparar $1 \div 3$ na calculadora $(0{,}333\ldots)$ com a fração $\frac{1}{3}$ no quadro. Esquecer de limpar a calculadora (tecla C/AC).
- Anotar reações: Quantos alunos tentaram 5 ÷ 0? Alunos ficam surpresos com o erro de divisão por zero? Tentam repetir a operação na calculadora?
- Mostrar o erro no visor e perguntar: "Por que a calculadora não dá um número como resposta? "

6 RESULTADOS DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS EM SALA DE AULA

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação dos exercícios propostos, cujos detalhes metodológicos estão descritos no capítulo anterior. Os resultados das avaliações formais que os alunos fizeram ao final do desenvolvimento do projeto referente a aplicação em sala de aula das atividades 1, 2 e 3 serão apresentados aqui e comentados. A atividade 1 não foi entregue na forma impressa, mas sim trabalhada em slides e as interações com os alunos foram registradas e serão comentadas. Devido a limitação de tempo, a atividade 4 não foi totalmente finalizada, portanto, a atividade 4, contará apenas com registros das reações deles na aplicação das aulas, não há registros através do visto nas atividades impressas.

Dados gerais sobre a pesquisa

População estatística: 167 alunos (5 turmas de 1º ano em dois colégios estaduais do município de São Gonçalo – RJ)

Materiais coletados: Essa pesquisa coletou três tipos de materiais:

	Tipo de Material	Nº de alunos avaliados
1ª Coleta	Caderno Impresso com as atividades 2 e 3 respondidas pelos alunos.	28 alunos (amostra da população)
2ª Coleta	Prova Objetiva	167 alunos (Todos os alunos.)
3ª Coleta	Amostral	56 alunos (amostra da população)

Fases da Pesquisa

1ª Fase: Sondagem dos alunos e planejamento do caderno de atividades.

Análise do Público: Considerando que todos os alunos não estudaram regularmente o 5º (2020) e 6º (2021) anos do Ensino Fundamental II devido a Pandemia (COVID-19), constatou-se através de entrevistas a esses alunos e aos seus professores, que eles apresentavam grande dificuldades em Matemática. Aliado a Pandemia, consideram-se também pesquisas referentes ao baixo desempenho dos alunos da Rede Pública de Educação Brasileira em exames internos (SAEB, Prova Brasil) e internacionais (PISA). No ano de 2022, quando esses alunos estavam no 7º ano, as Redes Públicas de Ensino propuseram a esses alunos planos de recuperação de aprendizagens – e isso impactou que praticamente os conteúdos do 8º ao 9º ano previstos na BNCC não foram ensinados para esses alunos. Outro agravante que impactou o Ensino foram que muitos alunos foram promovidos de série sem as condições devidas, seja pela "aprovação automática".

Análise a Priori e planejamento da sequência didática.

Tendo em vista o histórico desses alunos de praticamente não terem tido aulas no 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, ficaram lacunas pertinentes aos currículos desses anos. ao longo desse ano foram sendo produzidas aulas voltadas a temática de Números Racionais e operações de forma que se oportunizasse um projeto pedagógico personalizado a eles de tal forma que pudesse alcançá-los em suas dificuldades. Ressalta-se que a Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro (SEEDUC) tem aplicado projetos voltados ao Reforço das aprendizagens para fortalecer os alunos evitando as reprovações e, até mesmo a evasão escolar.

2ª Fase: Implementação das Atividades 1,2,3 e 4 com os alunos em sala de aula

Na 1ª aula, que foram distribuídos os cadernos impressos para cada aluno e foi informado como a participação deles no preenchimento dessas atividades faria parte da nota deles trimestral. A dinâmica das aulas era que os alunos tentassem fazer as questões em casa e em aula. Quanto as correções das atividades, os próprios alunos faziam as correções de acordo com as ministrações das aulas, as quais eu explicava cada questão, dava um tempo para eles fazerem os exercícios, corrigia os exercícios, e eles faziam a autocorreção à caneta sinalizando as questões que acertaram; e, as que erraram, colocando a resposta correta ao lado do erro, sem apagá-lo. Se o aluno viesse as aulas e fizesse a autoavaliação corretamente seria pontuado com 3,0 pontos, nota máxima atribuída a esse primeiro instrumento avaliativo. Independente do número de acertos o aluno receberia nota máxima desde que fizesse a autocorreção sem apagar os seus erros. Essa estratégia visa o aluno focar que ele sai ganhando quando tenta fazer a atividade, independente dos erros, e que ao reconhecer os seus erros e escrever as respostas corretas – isto é, saber onde errou e corrigir os seus erros faz parte da aprendizagem.

A atividade 1, referente a história das calculadoras e sobre as calculadoras dos smartphones foi feita em uma sala multimídia num formato de oficina, as quais os alunos manipulavam as suas calculadoras e faziam alguns exercícios.

A atividade 4, não contou na análise estatística de erros e acertos correspondentes a 1ª coleta (28 alunos), mas alguns relatos sobre a sua aplicação são citados e levados em consideração na avaliação global quanto a aplicação das atividades.

3ª Fase: Recolho os cadernos da turma amostral (28 alunos) para uma análise minuciosa dos erros e acertos destes.

As demais fases estão comentadas no quadro abaixo.

Quadro Resumo das Fases da implementação dessse projeto.

		Ações	Observações:
Fase 1		Sondagem de notas dos alunos e dificuldades em Matemática através dos históricos deles. Elaboração das Atividades de Revisão a serem aplicadas com os alunos.	No caso, foi considerado o tempo da PANDEMIA (5º e 6º ano sem ter estudado matemática regularmente) e as minhas últimas experiências em 2024 com duas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental.
Fase 2	Início da aplicação das atividades 2 e 3 em sala de aula.	Alunos recebem material de estudo referentes as atividades 2, 3 e 4 do produto educacional impressas e grampeadas. E iniciam-se as aulas expositivas (explicação da teoria com exemplos) quanto aos assuntos tradados nessas atividades. E resolução das atividades.	Duração: 300 min. 3 dias (2aulas de 50min / dia). Os alunos recebem instruções do correto preenchimento do formulário e são informados de como serão avaliados.
Fase 3		O professor recebe esse material para fazer uma primeira análise dos acertos e erros das questões sem fazer anotações na apostila dos alunos. O professor prepara as aulas de correção munido de informações de quais exercícios os alunos apresentaram maior dificuldade.	O professor lança erros e acertos numa planilha eletrônica e obtém dados estatísticos e faz análises a partir desses dados. Neste momento, começa-se o planejamento da avaliação formal que

			será feita presencialmente com 9 questões de múltipla escolha.
Fase 4	Atividade 1	A atividade 1 não foi impressa para os alunos. Ela foi ministrada num formato de oficina na sala maker com apresentação em slides.	Foram propostos alguns exercícios da atividade 4 para serem feito com calculadora de forma que o aluno pudesse perceber as limitações das calculadoras quanto as divisões.
Fase 5	Aula de Revisão	Preparação para a avaliação objetiva (9 questões).	São preparadas videoaulas para os alunos com exercícios de revisão.
Fase 6	Aplicação da Prova Objetiva	Os alunos participam presencialmente de uma avaliação objetiva contendo 9 questões conceituais referentes as atividades 2 e 3, que não exigem o uso da calculadora.	Valor: 2,0 pontos da média trimestral, que vale 10,0 pontos. Individual. Sem consulta a materiais. Sem o uso da calculadora.
Fase 7	Análise dos resultados dos alunos.	O professor lança erros e acertos numa planilha eletrônica e obtém dados estatísticos e faz análises a partir desses dados.	Neste mesmo dia, é divulgado o gabarito comentado desta avaliação no formato de videoaula e enviado para as turmas.
Fase 8		Os alunos preenchem um formulário do Google Forms enviado pelo professor para escutá-los nesse processo de revisão de contéudos do 6º ano e 7º ano.	Esperar pelo menos 1 dia após a aplicação da avaliação, para entrega do link do Google Forms. Isso se deve pelo fato que o aluno precisa processar esse momento de revisão, e por esperar que alguns ainda possuam muita dificuldade, uma vez que esse momento de revisão está sendo breve.
Fase 9		O professor dá um Feedback para os alunos das suas notas na avaliação objetiva e dá as notas da apostila.	Os alunos com rendimento insuficiente, é oportunizada uma nova chance para melhorar a sua nota.
Fase 10	Planejamento do professor	Análise global dos rendimentos dos alunos até o momento.	

Sequência Didática da Aplicação das Atividades 1 até 4.

Os exercícios da atividade 4(Divisão) foram aplicados em dois momentos. Devido ao tempo foram selecionados os exercícios mais importantes até a prova objetiva. Como constatou-se muita dificuldade dos alunos, preferiu-se cobrar apenas as atividades 1 a 3 na prova com exercícios envolvendo a temática adição, subtração e multiplicação com inteiros.

Quadro Resumo das Fases da implementação dessse projeto.

	Dia	Duração:	Conteúdos:	Observações:
1ª Semana	**Aula 1**	100 min (2x50min)	**Atividade 2**: números: 1 até 7. **Atividade 3**: números: 11,17 e 24 (tabelas das tabuadas da adição, subtração e multiplicação).	É agendada a avaliação objetiva ao final da aplicação das atividades 2 e 3.
	Aula 2	100 min (2x50min)	**Atividade 3**: números: 9,15 e 21(definições das operações); número 10 até 27.	
2ª Semana	**Aula 3**	100 min (2x50min)	**Atividade 3**: números: 27 até 38. **Atividade 4**: Entrega para os alunos e explicação do exercício 50. (Atividade 4 não será pontuada por autocorreção, já que os alunos recebem em sala de aula, e fazem os deveres em sala de aula, é contada como ponto de caderno.)	Recebimento do material impresso dos alunos correspondentes as atividades 2 e 3 para correção e lançamento de acertos e erros numa planilha eletrônica. Avaliação Diagnóstica (início do projeto)
	Aula 4	100 min (2x50min)	**Atividade 1**: Oficina na Sala Maker – História da Calculadora e tutoriais de como usar a calculadora do smartphone. **Atividade 4**: Correção de alguns exercícios da Atividade 4 envolvendo a operação de divisão.	
3ª Semana	**Semana de Provas**	100 min (2x50min)	**Aplicação da Prova Objetiva**	Essa avaliação objetiva (final do projeto – atividade 1,2 e 3) será feita num horário que os alunos tiverem tempo livre na sua grade horária.

Apresentação dos dados coletados

Tratamento das informações: Quanto a 1ª coleta (resolução de atividades pelos alunos) foram analisados os erros e acertos de uma amostra de 28 alunos da população com o intuito de acompanhar o aproveitamento destes ao longo das aulas através das suas produções escritas. As numerações às quais serão consideradas para a apresentação dos resultados, estão referenciadas na lista de exercícios fornecidas no ANEXO 1, a qual possui a versão simplificada do caderno de atividades a qual foi entregue para os alunos, contendo apenas os exercícios que efetivamente foram corrigidos pelo professor. Esses dados da 1ª coleta (acertos e erros) foram lançados numa planilha Excel, a qual gerou as porcentagens de acertos e erros por questão, bem como o gráfico do rendimento global desses 28 alunos (amostra). cabe ressaltar, que todos os alunos do 1º ano receberam o mesmo material dos 28 alunos e as aulas foram ministradas de igual forma para os 167 alunos. Quanto a 2ª coleta (Prova objetiva), também foram lançados os acertos e erros numa planilha Excel e geradas informações estatísticas. Já, a 3ª coleta, utilizou-se uma planilha eletrônica Google *Forms*, elaboradas personalizadamente para os alunos contendo 23 perguntas objetivas e discursivas. Cada pergunta desse questionário possui o código PFX, onde PF representa “pergunta do formulário” e X corresponde ao número da pergunta do formulário, que varia de 1 a 23). Os 56 alunos participantes dessa pesquisa preencheram anonimamente os formulários, estes serão identificados pelo código AY, onde A significa aluno e Y significa a identificação do aluno de 1 a 44. Embora tenha 56 alunos, registrou-se apenas 44 respostas das questões textuais. Esta codificação AY aparecerá nas questões discursivas do formulário.

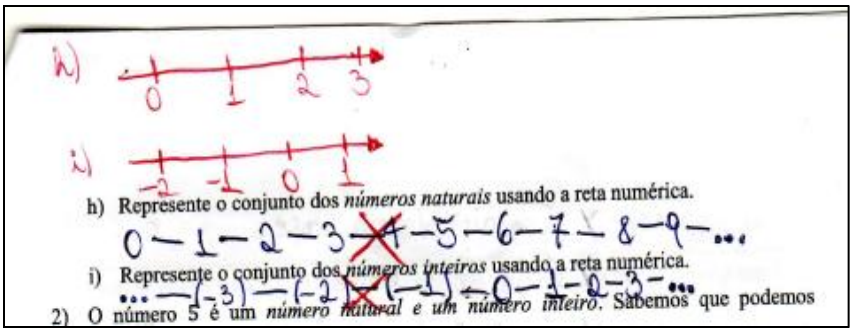
1ª COLETA & RESULTADOS – CADERNOS IMPRESSOS

Resultados dos Alunos - Atividade 2

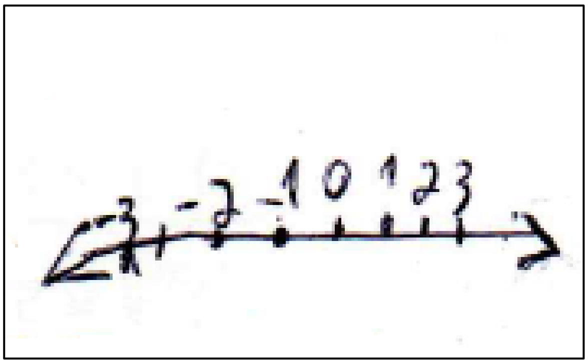
Questão 1:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
a) Quais são os dez primeiros números naturais?	21 alunos (75%)	alunos (25%)
b) Liste a sequência dos números naturais.	18 alunos (74%)	alunos (26%)
c) Liste a sequência dos números inteiros.	19 alunos (68%)	alunos (32%)
d) Represente o conjunto dos números naturais usando a representação por enumeração.	23 alunos (82%)	alunos (18%)
e) Represente o conjunto dos números inteiros usando a representação por enumeração.	21 alunos (75%)	alunos (25%)
f) Qual é o símbolo do conjunto dos números naturais?	21 alunos (75%)	alunos (25%)
g) Qual é o símbolo do conjunto dos números inteiros?	27 alunos (96%)	aluno (4%)
h) Represente o conjunto dos números naturais usando a reta numérica.	12 alunos (43%)	Alunos (57%)
i) Represente o conjunto dos números inteiros usando a reta numérica.	9 alunos (32%)	19 alunos (68%)

Nesta questão notou-se claramente que os discentes apresentavam dificuldades na representação da reta numérica e na localização precisa dos números sobre ela, como pode ser observado na Fig. 20.

Figura 20: Erros conceituais envolvendo a representação de conjuntos em retas numéricas



Erro de entendimento do que é uma reta e de marcação de pontos



Erro conceitual de marcar duas setas

Questão 2: Relações de pertinência. Uso de $\in$ e $\notin$.	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
5 é um número inteiro.	25 alunos (89%)	3 alunos (11%)
5 é um número natural.	26 alunos (93%)	2 alunos (7%)

Questão 3: Relações de pertinência. Uso de $\in$ e $\notin$.	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
$\boldsymbol{x}$ é um número inteiro.	25 alunos (89%)	3 alunos (11%)
$\boldsymbol{x}$ é um número natural.	26 alunos (93%)	2 alunos (7%)

Nas questões 2 e 3, observou-se que poucos alunos cometeram erros.

Questão 4:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Aplicar a Lei da Tricotomia para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}$.	21 alunos (75%)	7 alunos (25%)

Questão 5:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Dado $\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}$. Ler as sentenças: $\boldsymbol{x > 0}$, $\boldsymbol{x < 0}$ e $\boldsymbol{x = 0}$, e exemplificar números naturais que satisfaçam a essas sentenças caso eles existam.	24 alunos (86%)	4 alunos (14%)

Questão 6:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Dado $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}$. Ler as sentenças: $\boldsymbol{y > 5}$, $\boldsymbol{y < 5}$ e $\boldsymbol{y = 5}$, e exemplificar números inteiros que satisfaçam a essas sentenças caso eles existam.	26 alunos (93%)	2 alunos (7%)

Questão 7:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Julgar as sentenças fechadas em verdadeiras ou falsas, que envolvem a simbologia de relações de pertinência com o conjunto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$; e as relações de igualdade e desigualdade entre inteiros.	27 alunos (96%)	1 aluno (4%)

Nas questões 5, 6 e 7, observou-se que poucos alunos cometeram erros.

6.1 Análise das Questões da Atividade 3

Nesta seção são analisados os erros envolvendo operações com números naturais, considerando Habilidades da BNCC: EF06MA03, EF07MA14.

> (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
> (EF07MA14) Classificar sequencias em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.)

Questão 8: Tabuada da Adição do número 5	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Forma 1 – Padrão de recursividade, onde o valor da expressão anterior é adicionado a 1 unidade.	21 alunos (75%)	7 alunos (25%)
Forma 2 – Padrão de recursividade, onde o valor da expressão anterior é adicionado a 1 unidade e o resultado não é calculado, mas deixado em forma de somas.	2 alunos (7%)	26 alunos (93%)

Questão 9:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Tabuadas da Adição dos números 0 a 10 com preenchimento na forma de tabela.	22 alunos (79%)	6 alunos (21%)

Questão 10:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram

Calcular $\mathbf{5 + 8}$ com o uso da calculadora utilizando as teclas '$\mathbf{5}$', '$\mathbf{+}$' e '$\mathbf{1}$'.	15 alunos (54%)	13 alunos (46%)

Questão 11: Verificar igualdades com valores numéricos conhecidos para as propriedades operatórias da Adição.	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Propriedade Associativa da Adição	18 alunos (74%)	10 alunos (36%)
Propriedade Comutativa da Adição	18 alunos (74%)	10 alunos (36%)

Questão 12:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Completar uma tabela envolvendo o cálculo de $\boldsymbol{a} + \mathbf{0}$ para certos valores numéricos de $\boldsymbol{a}$	28 alunos (100%)	0 alunos (0%)

Questão 13: Tabuada da Subtração do número 5	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Forma 1 – Padrão de recursividade, onde o valor da expressão anterior é subtraído de 1.	23 alunos (82%)	5 alunos (18%)
Forma 2 – Padrão de recursividade, onde o valor da expressão anterior é subtraído de 1 e o resultado não é calculado, mas deixado em forma de diferenças.	7 alunos (25%)	21 alunos (75%)

Questão 14:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Tabuadas da Subtração dos números 0 a 10 com preenchimento na forma de tabela.	20 alunos (71%)	8 alunos (29%)

Questão 15:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Calcular $\mathbf{8 - 5}$ com o uso da calculadora utilizando as teclas '$\mathbf{5}$', '$\mathbf{-}$' e '$\mathbf{1}$'.	21 alunos (75%)	7 alunos (25%)

Questão 16:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Comparar números inteiros negativos e positivos com o zero. Determinar a diferença entre dois números,	28 alunos (100%)	0 alunos (0%)

sabendo quando ela será positiva, negativa ou nula de acordo com a variação do subtraendo em relação ao minuendo.		

Questão 17:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Verificar igualdades com variáveis, dados seus respectivos valores numéricos.	22 alunos (79%)	6 alunos (21%)

Questão 18:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Identificar o termo desconhecido em uma igualdade envolvendo uma diferença entre números inteiros.	26 alunos (93%)	2 alunos (7%)

Questão 19: Tabuada da Multiplicação do número 2	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Forma 1 – Padrão de recursividade, onde o valor da expressão anterior é adicionado a 2 unidades.	26 alunos (93%)	2 alunos (7%)
Forma 2 – Padrão de recursividade, onde o valor da expressão anterior é adicionado a 2 unidades, e a expressão resultante é uma soma de números dois.	13 alunos (46%)	15 alunos (54%)
Forma 3 – Padrão de recursividade envolvendo tabuada pictórica	17 alunos (61%)	11 alunos (39%)

Questão 20: Tabuada da Multiplicação do número 3	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Forma 1 – Padrão de recursividade, onde o valor da expressão anterior é adicionado a 3 unidades.	25 alunos (89%)	3 alunos (11%)
Forma 2 – Padrão de recursividade, onde o valor da expressão anterior é adicionado a 3 unidades, e a expressão resultante é uma soma de números três.	19 alunos (68%)	9 alunos (32%)
Forma 3 – Padrão de recursividade envolvendo tabuada pictórica	15 alunos (54%)	13 alunos (46%)

Questão 21:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Calcular $\mathbf{2 \cdot 8}$ com o uso da calculadora utilizando as teclas ‘**2**’, ‘·’ e ‘+’.	23 alunos (82%)	5 alunos (18%)

Questão 22:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Tabuadas da Multiplicação dos números 0 a 10 com preenchimento na forma de tabela.	23 alunos (82%)	5 alunos (18%)

Questões 23 e 24 foram resolvidas no quadro como exemplos, portanto não foram contabilizadas nos resultados.

Questão 25:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Obter o valor numérico de $2x$, dado alguns valores numéricos para x.	24 alunos (86%)	4 alunos (14%)

Questão 26:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Determinar os conjuntos de múltiplos de determinados números naturais.	12 alunos (43%)	16 alunos (57%)

Questão 27:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Obter o valor numérico de y a partir da relação $y = 6x$ com valores numéricos de x fornecidos. Exercícios envolvendo duas variáveis.	28 alunos (100%)	0 alunos (0%)

Questão 28:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Leitura de expressões envolvendo fatores multiplicativos: o dobro, o triplo, o quádruplo etc.	28 alunos (100%)	0 alunos (0%)

Questão 29:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Provar usando a definição de multiplicação que $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$	23 alunos (82%)	5 alunos (18%)

Questão 30:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Enunciar a propriedade comutativa da multiplicação.	24 alunos (86%)	4 alunos (14%)

Questão 31:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Generalizar a propriedade comutativa da multiplicação de inteiros usando variáveis.	21 alunos (75%)	7 alunos (25%)

Questão 32:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Identificar a propriedade comutativa da multiplicação por meio de uma "tábua da operação de multiplicação" com as tabuadas de 0 até 10 devidamente preenchida.	8 alunos (29%)	20 alunos (71%)

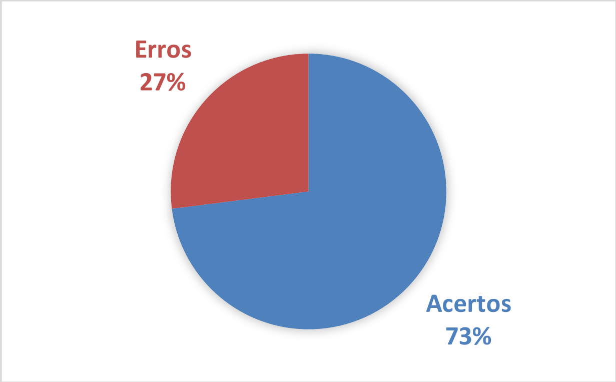
Questão 33: Compreender a propriedade do elemento neutro da multiplicação e entender qual é o elemento neutro multiplicativo.	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Seguir um padrão que leva a generalização da propriedade do elemento neutro da multiplicação para qualquer número natural.	21 alunos (75%)	7 alunos (25%)
Enunciar a propriedade do elemento neutro da multiplicação.	8 alunos (29%)	20 alunos (71%)

Questão 34:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Calcular os valores numéricos de expressões numéricas envolvendo as operações de adição e multiplicação com e sem o uso de parênteses usando a calculadora.	20 alunos (71%)	8 alunos (29%)

Questão 35:	Número de alunos que acertaram	Número de alunos que erraram
Demonstrar que a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição é dada pela igualdade $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ é válida para $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$ e $\boldsymbol{a} = \mathbf{3}$, fixando-se o segundo fator $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.	18 alunos (64%)	10 alunos (36%)

Observação: A Questão 36 foi resolvida no quadro como exemplo, portanto não foi contabilizada nos resultados.

Figura 21: Rendimento da turma amostral nos exercícios do caderno impresso



2ª COLETA & RESULTADOS – PROVA OBJETIVA

Enunciados das questões da prova objetiva

Questão 1: Qual dos conjuntos abaixo é o conjunto dos *números inteiros não negativos*?

(A) $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$ (B) $\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ (C) $\mathbb{Z}_+^* = \{1,2,3,\dots\}$

(D) $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,3,\dots\}$ (E) $\mathbb{Z}_-^* = \{\dots,-3,-2,-1\}$

	Turma Piloto (28)	Turma Global (167)
Acertos	46,4%(13 alunos)	61,7%(103 alunos))
Erros	53,6%(15 alunos)	38,3%(64 alunos)

Questão 2: Leia o quadro abaixo, nele está escrito dois resultados que estudamos nas nossas aulas.

> Dados dois números inteiros quaisquer, os quais denotaremos por x e y, podemos afirmar que a diferença entre x e y não é igual a diferença entre y e x, mas, a soma de x com y é igual a soma de y com x.

A partir da leitura do quadro acima (do seu contexto), assinale a alternativa correta.

(A) A propriedade comutativa é válida para a adição, mas não é válida para a subtração.

(B) A propriedade associativa é válida para a adição, mas não é válida para a subtração.

(C) A propriedade do elemento neutro é válida para a adição, mas não é válida para a subtração.

(D) A propriedade distributiva é válida para a adição, mas não é válida para a subtração.

(E) O oposto ou simétrico de $x + y$ é igual a $x - y$.

	Turma Piloto (28)	Turma Global (167)
Acertos	25%(7 alunos)	29,3%(49 alunos)
Erros	75%(21 alunos)	70,7%(118 alunos)

Questão 3: Considerando que $x \in \mathbb{Z}$, assinale a alternativa FALSA.

(A) x pode ser zero. (B) O oposto de x é $-x$.

(C) Como os números naturais pertencem ao conjunto dos números inteiros, logo x é um número natural.

(D) O sucessor de x é $x + 1$. (E) O antecessor de x é $x - 1$.

	Turma Piloto (28)	Turma Global (167)
Acertos	35,7%(10 alunos)	52,1%(87 alunos)
Erros	64,3%(18 alunos)	47,9%(80 alunos)

Questão 4: Leia o texto abaixo e responda a questão:

O conceito de *mínimo múltiplo comum* de dois números inteiros a e b está associado ao conceito de ***múltiplo comum de dois números inteiros***. Dizer que um número inteiro c é um múltiplo comum de a e b significa dizer que c é um múltiplo de a e que c é um múltiplo de b. Usando a notação de operações de conjuntos, podemos denotar **o conjunto dos múltiplos comuns** usando a operação de interseção entre conjuntos; portanto, o conjunto dos *múltiplos comuns* de a e b é denotado por $M(a) \cap M(b)$.

Assinale a alternativa que possui os cinco primeiros múltiplos ***positivos*** do conjunto: $M(2) \cap M(5)$?

(A) $2,4,6,8\ e\ 10$. (B) $5,10,15,20\ e\ 25$ (C) $10,20,30,40\ e\ 50$

(D) $0,10,20,30\ e\ 40$. (E) $2,5,4,10\ e\ 6$

	Turma Piloto (28)	Turma Global (167)
Acertos	21,4%(6 alunos)	25,7%(43 alunos)
Erros	78,6%(22 alunos)	74,3%(124 alunos)

Questão 5: Considerando que x, y e z são três números inteiros ***consecutivos*** qual das afirmações abaixo é FALSA?

(A) $y = x + 1 \; e \; z = x + 2$ (B) $x < y < z$ (C) y é $sucessor \; de \; z$

(D) Se $x = 0$, logo $y = 1 \; e \; z = 2$ (E) $x < z$

	Turma Piloto (28)	Turma Global (167)
Acertos	42,9%(12 alunos)	49,1%(82 alunos)
Erros	57,1%(16 alunos)	50,9%(85 alunos)

Questão 6: Quanto a definição das operações de adição, subtração e multiplicação com números inteiros é correto afirmar que:

(A) $2 + 3 = \left((\mathbf{5}) + 1\right) + 1$(B) $3 + 2 = \left((\mathbf{3}) + 2\right) + 2$(C) $3 \cdot 2 = \left((\mathbf{3}) \cdot 1\right) \cdot 1$

(D) $3 \cdot 2 = \left((\mathbf{3}) + 2\right) + 2$(E) $3 \cdot 2 = (3) + 3$

	Turma Piloto (28)	Turma Global (167)
Acertos	57,1%(16 alunos)	63,5%(106 alunos)
Erros	42,9%(12 alunos)	36,5%(61 alunos)

Questão 7: Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) Existe número inteiro entre dois números inteiros consecutivos.
(B) Dados $a \; e \; b$ dois números inteiros, temos que $a - b < 0$, quando $a < b$.
(C) Dados $a \; e \; b$ dois números inteiros, temos que $a - b < 0$, quando $b < a$.
(D) A operação inversa da adição é a subtração. Isso significa que dados a, b e c número inteiros quaisquer $a - b = c$, se e somente se, $b - c = a$.
(E) Se a e b são dois números inteiros localizados na reta numérica, podemos afirmar que $a > b$.

	Turma Piloto (28)	Turma Global (167)
Acertos	17,9% (5 alunos)	24,0% (40 alunos)
Erros	82,1%(23 alunos)	76,0% (127 alunos)

Questão 8: Quanto a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, qual das alternativas é verdadeira?

(A)$x(x+y) = x^2 + xy$ (B) $y(x+y) = y + x + y$

(B)$x(x+y) = x^2 \cdot y$ (D) $x(y+z) = x \cdot y + z$

	Turma Piloto (28)	Turma Global (167)
Acertos	21,4%(6 alunos)	32,9%(55 alunos)
Erros	78,6%(22 alunos)	67,1%(112 alunos)

Questão 9: Considerando as ideias associadas as tabuadas da adição, subtração e multiplicação representadas em tabelas (conforme os exercícios da apostila, considerando que as linhas e colunas estão indicadas pelas posições de 0 até 10. Assinale a alternativa que possui a operação que respeita o seguinte padrão: para completar a linha correspondente ao número 2, subtraímos de 1 em 1; e, para completar a coluna do 2, somamos de 1 em 1.

(A)Tabuada da Adição (B) Tabuada da Subtração(C) Tabuada da Multiplicação

	Turma Piloto (28)	Turma Global (167)
Acertos	25%(7alunos)	33,5%(56 alunos)
Erros	75%(21alunos)	66,5%(111 alunos)

Figura 22: Rendimento Global dos Alunos por questão

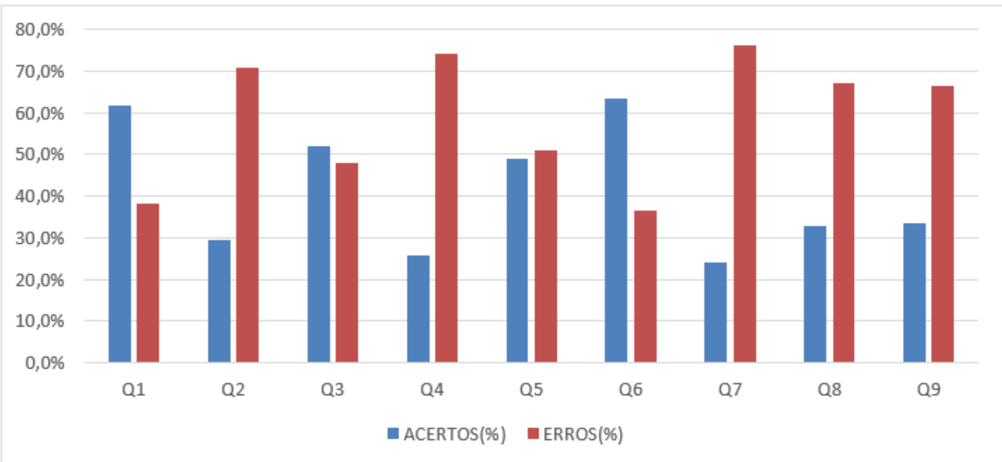


Figura 23: Rendimento Global dos alunos na prova objetiva

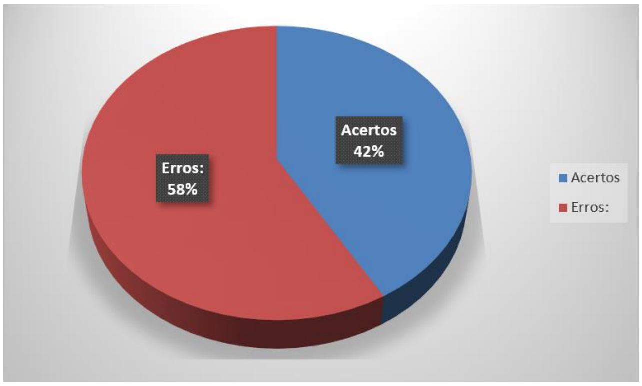


Tabela: Rendimento da Turma Amostral(28 alunos) por questão

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
Acertos (%)	46,4%↓	25,0%↓	35,7%↓	21,4%↓	42,9%↓
Erros (%)	53,6%	75%	64,3%	78,6%	57,1%

	Questão 6	Questão 7	Questão 8	Questão 9
Acertos (%)	57,1% ↑	17,9%↓	21,4%↓	25%↓
Erros (%)	42,9%	82,1%	78,6%	75,0%

Tabela: Rendimento Global dos Alunos por questão.

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
Acertos (%)	61,7% ↑	29,3% ↓	52,1%	25,7% ↓	49,1% ↓
Erros (%)	38,3%	70,7%	47,9%	74,3%	50,9%

	Questão 6	Questão 7	Questão 8	Questão 9
Acertos (%)	63,5% ↑	24,0% ↓	32,9% ↓	33,5% ↓
Erros (%)	36,5%	76,0%	67,1%	66,5%

3ª COLETA & RESULTADOS – FORMULÁRIO DE PESQUISA

Formulário de Avaliação (Google Forms)

Universo Estatístico: 167 alunos do 1º ano de 2 colégios públicos estaduais de São Gonçalo.
Amostra: 56 alunos.

Obs.: Nem todos entregaram os formulários preenchidos, já que era opcional e anônimo. Com o intuito de manter o relato deles de forma original, não foram realizadas correções gramaticais nas respostas dos alunos.

O formulário eletrônico enviado para os alunos:

Olá, estudante!

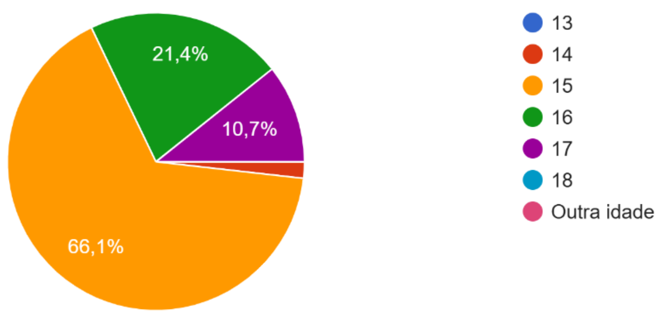
Este questionário faz parte de uma pesquisa para um trabalho de conclusão de mestrado em Matemática que investiga o **uso da calculadora como recurso tecnológico no Ensino Médio**, em especial no 1º ano, e busca compreender também as **dificuldades em Matemática trazidas de séries anteriores**, bem como os **impactos da pandemia (2020–2021)** no processo de aprendizagem.

A sua participação é muito importante, pois suas respostas vão ajudar a identificar quais conteúdos apresentam maiores desafios, de que forma a calculadora e outros recursos tecnológicos (como aplicativos e inteligência artificial) são utilizados, e quais estratégias podem contribuir para melhorar a aprendizagem em Matemática.

O questionário é **anônimo** e as informações coletadas serão utilizadas apenas para fins de pesquisa acadêmica. Responda com sinceridade, não há respostas certas ou erradas. O importante é registrar sua experiência.

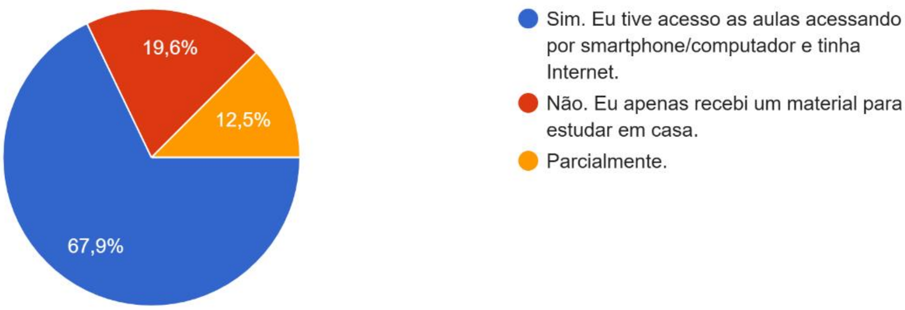
Agradeço desde já pela sua colaboração! Professor Pedro Henrique A. J. dos Santos

FP1 - Qual é a sua idade?

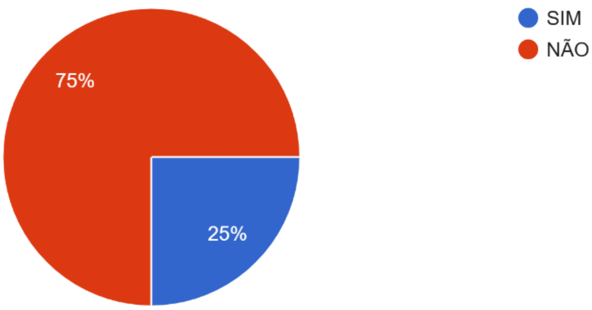


FP2 e **FP3** são perguntas internas relativas a nome do colégio e turma de 1º ano - estas informações não são relevantes para os resultados globais.

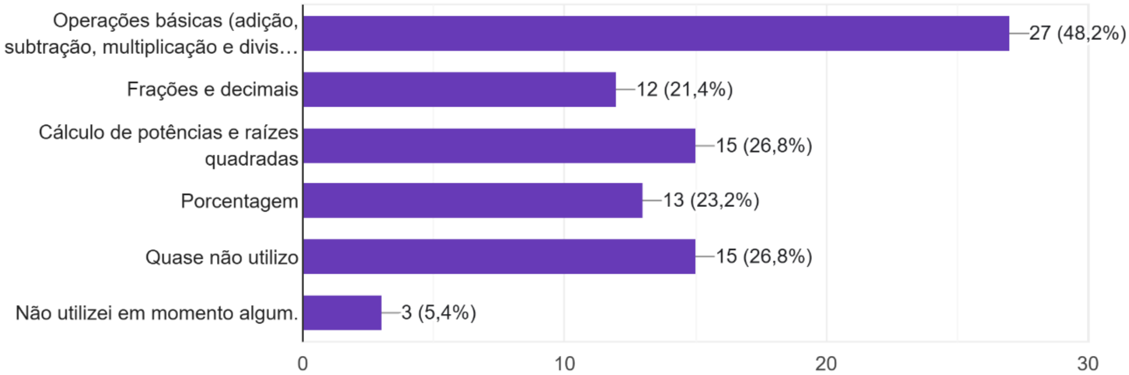
FP4 -Você teve acesso a aulas remotas durante os anos de 2020 e 2021?



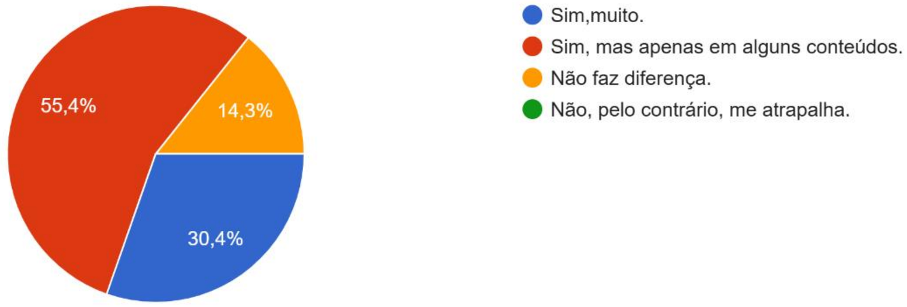
FP5 - Do 6º ao 9º ano algum professor de Matemática ensinou como usar uma calculadora?



FP6 - Atualmente para quais tipos de atividades você mais utiliza a calculadora?



FP7 - Na sua opinião, o uso da calculadora ajuda na sua aprendizagem de Matemática?



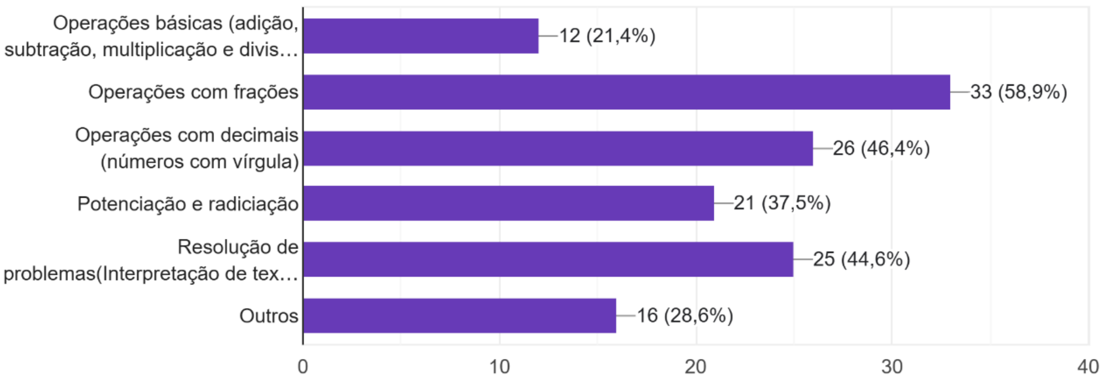
FP8 - Explique de que forma a calculadora pode facilitar ou dificultar sua aprendizagem em Matemática?

	Respostas
A1	Não sei responder
A2	facilita para os cálculos, mas também me atrapalha de fazer na pratica
A3	Ela ajuda a facilitar o processo de tal conta deixando menos estressante o processo de resolução como contas de divisão com números quebrados.
A4	Pode servir como uma auto correção. Você faz um cálculo e confere na calculadora para ver se está certo.
A5	Pode dificultar,fazendo a gente depender apenas da calculadora.
A6	Ela ajuda a não perder muito tempo em certas questões que tem operações básicas, porém muito grandes. Atrapalha porque só mostra o resultado então se eu tiver dúvida em algo não vou saber como resolver aquele cálculo, somente a resposta dele
A7	Pode ajudar em cálculos complexos
A8	Alguns tipos de equações que não sei fazer, por exemplo com números decimais
A9	Caso tenha dificuldade em dividir contas maiores que seja complicado fazer de cabeça podemos utilizar a calculadora.
A10	A calculadora pode facilitar quando preciso fazer cálculos grandes ou mais complexos, pois economiza tempo e me ajuda a conferir se os resultados estão corretos. Porém, pode dificultar se eu usá-la em excesso, porque acabo não treinando o raciocínio e as contas básicas.
A11	Pode facilitar com a verificação dos resultados, podendo ser responsável por uma "prova real", além de mecanismos didáticos sobre como funciona uma conta matemática
A12	Eu não sei dizer, mais sempre uso a calculadora quando quero saber se faço contas básicas corretamente. Ou seja quando faço uma conta de adição ou divisão e quero saber se o meu resultado tá certo ou não.

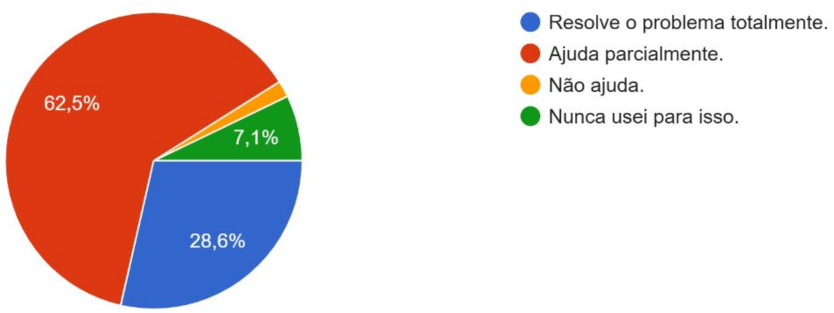
A13	Não vejo necessidade em aprender fazer a conta
A14	Ela pode facilitar o tempo ne, pq perdemos tempo fazendo contas longas e as vezes n da certo, mas ele também pode errar e a gnt perder o costume de fazer contas e acaba esquecendo
A15	Facilita bastante para mim.
A16	em quase tudo da vida
A17	Quando estou com alguma dúvida na conta
A18	Ajuda achar o resultado em contas complexas
A19	Conferir resultados, servindo como um recurso para verificar se o procedimento feito manualmente está correto.
A20	Pode me ajudar quando preciso de uma resposta, quando eu não sei fazer a conta de cabeça. E pode dificultar a aprendizagem quando a pessoa acaba usando para fazer contas simples, fazendo o cérebro não se exercer com contas pequenas.
A21	A calculadora ajuda com a questão de tempo em contas onde são utilizados muitos números
A22	Pode facilitar em cálculos complexos, como cálculos com números grandes, e necessária de concentração e sem erro. Porém isso pode fazer um vício, sendo uma dependência das pessoas que usam muito como de costume.
A23	Ajudar em alguns deveres
A24	ela pode facilitar simplificando diversos processos, já que diminui o tempo de algumas questões que exigem contas pequenas, mas lentas ou em grandes quantidades
A25	É bom para não ficar rabiscando a folha com contas, mas atrapalha pois as vezes dá um resultado diferente por nn sabermos usar
A26	pode facilitar em agilidade, porém acaba nos deixando dependente dela.
A27	Me ajuda a tirar minha duvidas caso eu não consiga resolver certos tipos de calculos
A28	Facilita a fazer os cálculos q não conseguimos fazer de cabeça
A29	Pode ajudar a resolver contas demoradas e complicadas
A30	Mostrando o resultado final quando não conseguimos finalizar as contas
A31	ela ajuda em alguns calculos complicados, mas, querendo ou nao atrapalha em fazer na pratica
A32	Pode facilitar no resultado das contas
A33	Pode ajudar a desenvolver mais rápido as questões
A34	fazer contas mais rápido
A35	A calculadora facilita quando os cálculos são grandes, mas pode dificultar porque faz a gente depender dela e não treinar o raciocínio.
A36	Científica
A37	Por mais que ela possa ajudar na realização de cálculos de forma rápida e precisa, contribui para que pessoas façam menos cálculos manuais e aprendam com seus erros.

A38	Ela é útil para agilizar, principalmente em cálculos grandes ou na hora de testar se fiz o cálculo certo em uma equação
A39	Pode facilitar em certas contas, mas pode dificultar também por você não saber qual sinal usar como por a conta organizada na calculadora
A40	Pode facilitar contas que são muitos grandes que podem desorientar o aluno, principalmente aqueles que tem dificuldade de aprendizado.
A41	A calculadora me ajuda para fazer contas mais rápido, geralmente prefiro usar quando é contas básicas. Também faço o uso dela para verificar e ter certeza de minhas respostas.
A42	Ajuda a fazer contas simples
A43	A calculadora pode facilitar a aprendizagem em Matemática ao agilizar cálculos, reduzir erros de conta, e também pode dificultar se usada em excesso, pois o estudante pode deixar de praticar o raciocínio lógico e perder autonomia para resolver operações básicas sem auxílio

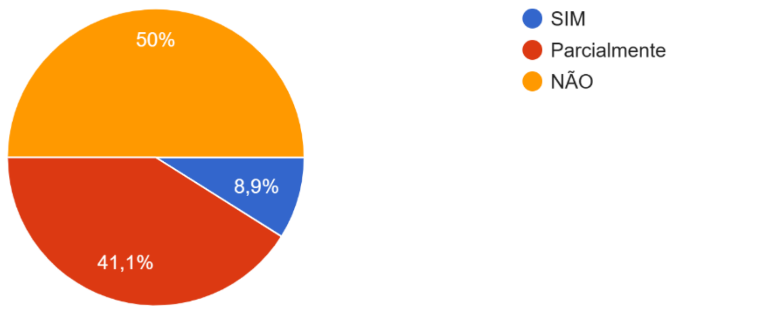
FP9 - Quais conteúdos Matemática você sente mais dificuldade atualmente?



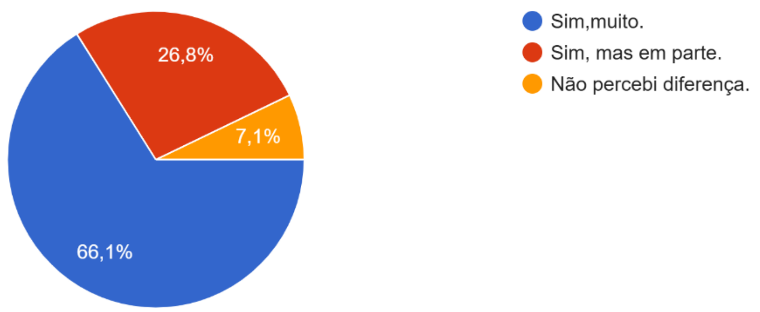
FP10 - Quando você encontra uma dificuldade em Matemática, o uso da calculadora:



FP11 - Durante a Pandemia, você conseguiu acompanhar as aulas de Matemática de forma satisfatória?



FP12 - Você acredita que a falta de aulas presencial em 2020-221 prejudicou sua aprendizagem em Matemática?



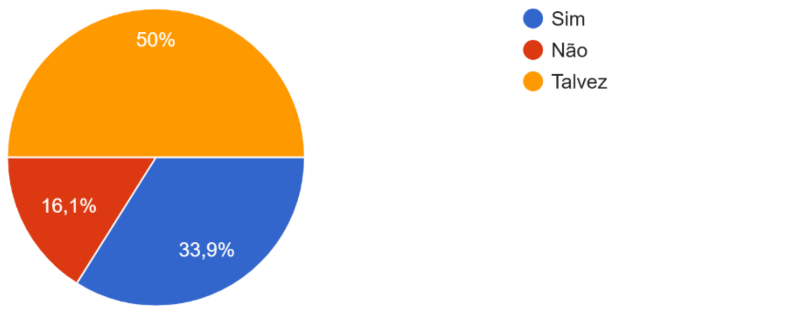
FP13 - De que forma a pandemia afetou sua aprendizagem em Matemática?

	Respostas
A1	afetou nas execução dos cálculos, pois hoje em dia eu nao sei fazer
A2	Boa parte do conteúdo do quinto e sexto ano de matemática não foram fixados por conta da pandemia e acarretam problemas em alguns aspectos até hoje.
A3	.
A4	De forma parcial
A5	Não aprendi algumas regras básicas da matemática
A6	Afetou de uma maneira que eu não aprendi as coisas básicas por exemplo mmc
A7	Distrações fáceis
A8	Não muito.

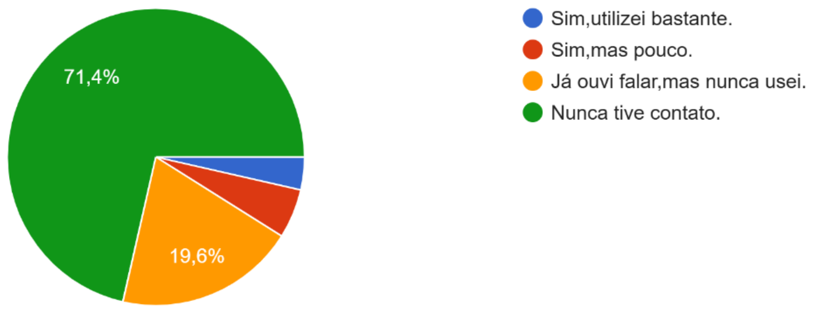
A9	pandemia afetou porque tive menos contato direto com os professores e colegas, o que dificultou tirar dúvidas. As aulas online às vezes não eram tão claras, e acabei acumulando dificuldades em alguns conteúdos.
A10	Sempre tive certa dificuldade com a matéria, e com as aulas praticamente onlines, não pude entender de forma total o conteúdo que era passado, (seja por conta de problemas na internet de casa ou coisas relacionadas), me fazendo ter mais dificuldades (principalmente com frações, números decimais ou contas de divisão), quando as aulas se tornaram presenciais novamente
A11	Só jogava a conta na calculadora
A12	Muitas coisas e eu também tenho culpa em não ter aprendido muitas coisas. Tenho dificuldade até hoje em tudo em matemática, por conta de ser muito humilhada por professores por conta de minhas notas baixíssimas em matemática eu me acomodei em não tirar dúvidas em coisas que quero saber em todas as aulas de matemática até hoje.
A13	Não aprendi coisas basicas
A14	Afeito em que eu podia ter aprendido o básico, para hoje em dia eu ja esta avançada, mas tenho que voltar e aprender um pouco do básico ainda
A15	Não muita coisa.
A16	eu não sei fazer conta de divisão
A17	Em tudo, não tive aprendizagem nenhuma
A18	Não é a mesma forma que estar presencialmente aprendendo
A19	A pandemia dificultou minha aprendizagem em Matemática porque reduziu o contato com o professor, trouxe distrações em casa e dificultou a prática dos conteúdos.
A20	Me fez precisar ver vídeos aulas, e no meu caso, eu tenho preguiça de assistir, o que me fez infelizmente, ter que pegar respostas no Google ou Braily (app que dá para ver as respostas das atividades).
A21	A pandemia acabou atrasando se alguma forma o meu aprendizado.
A22	No 8°, eu tive dificuldade em expressões e conjuntos, no 9° melhorei, mas continuo com dificuldades bem leves.
A23	Muito
A24	As aulas on-line geraram diversos prejuízos, já que elas dificultavam o acesso e o processo de aprendizagem
A25	Afetou em tudo pq oq passam hj muitas coisas nn entendo por falta dessas aulas
A26	tudo.
A27	A falta de ter um professor presencial afeta a confiança de tira uma duvida e de entender a materia por completo
A28	Muita coisa, mas atualmente não vejo erro nenhum
A29	Afetou o aprendizado, não dava para prestar atenção direito
A30	Não tendo aula, atrasou o aprendizado com professores parar que possamos perguntar sobre a matéria

A31	nao conseguia entender oq a professora falava, tenho dificuldade de entender videos ou materias por tela
A32	Em tudo
A33	Ela prejudicou o meu raciocínio, com as modernidades que estavam a minha disposição, sendo assim, não consegui exercitar minha mente com resoluções matemáticas, já copiava direto as respostas sem entender o porque a resposta era aquela.
A34	muito
A35	A pandemia atrapalhou porque tivemos menos contato direto com os professores e mais dificuldade para aprender sozinhos em casa.
A36	Tudo
A37	A maioria dos assuntos tratados em aula não eram aprofundados adequadamente, a revisão de tópicos de séries anteriores era constante e exaustiva e a teoria não era explicada corretamente.
A38	Só ir na calculadora para perda as respostas
A39	Ficamos muito tempo sem fazer quase nada e a matéria passada era algo que eu já tinha conhecimento.
A40	Bom, afetou pelo fato de que hoje em dia, algumas coisas que alguns conseguem fácil, pelo menos eu não consigo entender ou fazer facilmente.
A41	Não obtive aulas com explicações de professores.
A42	Como eu não tinha que mostrar os deveres, fiquei relapso. Isso de certa forma me afetou em certas partes da matemática, devido ao fato de ser uma matéria que eu sempre tive dificuldades e não gostava
A43	Dificultou um pouco
A44	A pandemia afetou a aprendizagem em Matemática porque as aulas online dificultaram a interação com os professores, geraram dúvidas sem esclarecimento imediato e reduziram a prática dos exercícios. Além disso, a falta de rotina e concentração prejudicou o aprendizado de conteúdos mais complexos

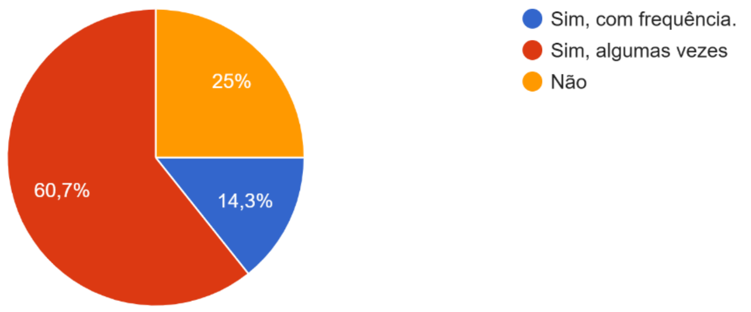
FP14 - Você acredita que o uso da calculadora pode compensar parte das dificuldades trazidas pela pandemia?



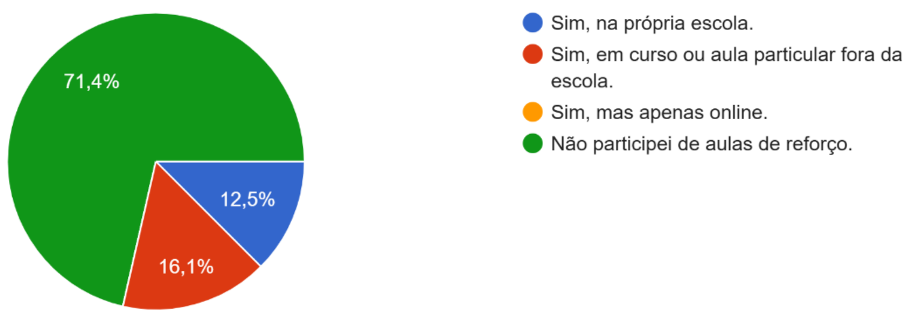
FP15 - Você já teve contato com o Geogebra(aplicativo de Matemática)?



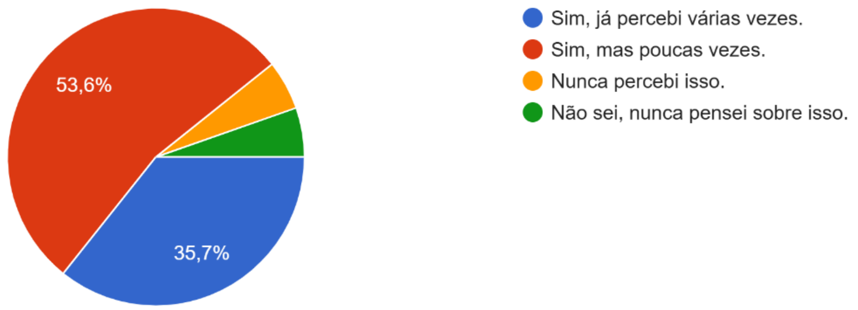
FP16 - Você já utilizou ferramentas de Inteligência Artificial(como ChatGPT ou similares) para resolver exercícios de matemática?



FP17 - Você participou de aulas de reforço em Matemática após a pandemia(2020-2021)?



FP18 - Você já percebeu que, ao realizar certos cálculos, a **calculadora mostra resultados que não correspondem exatamente ao valor exato** (por exemplo, aparecer um número decimal aproximado em vez do valor correto)?



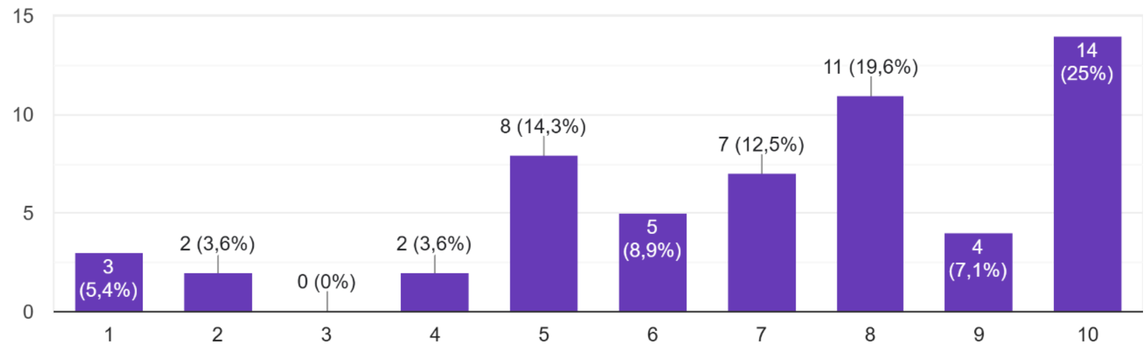
FP19 - Essas aulas que você teve comigo de revisão de conteúdos tem alguma coisa que você não tinha conhecimento? Você acha que é válido revisar conteúdos de séries anteriores?

	Respostas
A1	Sim
A2	sim
A3	Todas as coisas dadas em aula eu já estava até que familiarizado
A4	Talvez
A5	Tinha coisas que eu não sabia e gostei da revisão desses conteúdos básicos
A6	Sim.Sim é válido pois sem os conteúdos das séries anteriores não dá para avançar
A7	Sim, acho valido
A8	Não, provavelmente.

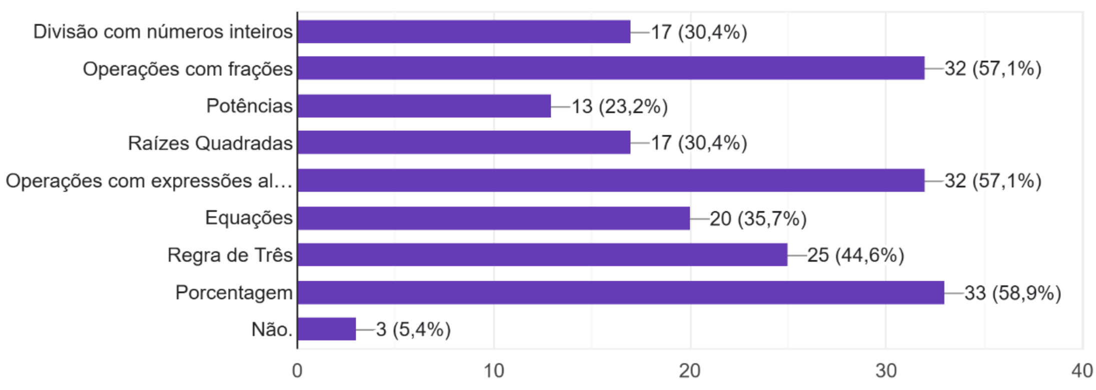
A9	Acho muito válido e fundamental, pois com essas revisões consegui desenvolver muito melhor os conteúdos que tinha pouco entendimento sobre, além de entender conceitos básicos que são muito importantes para o aprofundamento na matemática
A10	Não sei responder
A11	Sim acho, já sim.
A12	Não
A13	Simm
A14	Talvez.
A15	sim eu acho bem válido retocar quinto ano e o sexto
A16	Sim, acho válido, pois ajuda a ter o conhecimento q faltava em dia
A17	Sim, algumas coisas eu não lembrava ou não tinha entendido totalmente, então as aulas de revisão me ajudaram a reforçar e esclarecer melhor. Acho válido revisar conteúdos de séries anteriores, porque eles servem de base para aprender os novos assuntos e facilitam a compreensão.
A18	Todos os conteúdos. Sim, até porque alguns alunos teve dificuldade de aprender Matemática não só na pandemia, mas também teve dificuldades por conta própria, o nível de aprendizagem de cada pessoa, nem todo mundo consegui entender rápido, etc.
A19	Não.Sim.
A20	Eu tinha conhecimento de algumas coisas, mas ajudou me relembrar.
A21	Sim, é de grande importância a revisão de certos conteúdos e conceitos, já que com o passar do tempo e aquisição de novas informações, as mais básicas ou antigas podem acabar sendo esquecidas
A22	Muitas coisas da aula eu nn fazia ideia, vale muito apena revisar as aulas q nn tivemos
A23	não, eu já tinha aprendido tudo.
A24	Sim, muitas coisas eu tive que aprender no youtube com videos aulas
A25	Não entendia muito mas dps comecei a aprender e saber da matéria
A26	Não conhecia algumas maneiras de como explicou os exercícios
A27	Sim!!!!!
A28	Tudo. Talvez
A29	Sim, mas acredito que isso pode ser feitos em tempos separados, como por exemplo em tempos de reforço.
A30	Sim, algumas coisas eu não lembrava. Acho válido revisar porque ajuda a reforçar o que já aprendemos e corrigir falhas.
A31	Acho, sim. Os cálculos para se chegar ao resultado exibido na calculadora são novos para mim.
A32	Não sei
A33	Nessa revisão vi muitas coisas novas, e relembrei muito antigas, é fundamental revisar conteúdos porque tem alunos com muitas dificuldades nas matérias atuais.
A34	Não tinha conhecimento, e sim acho válido revisar conteúdos de séries anteriores !

A35	Acho válido revisar, porém só o básico, pois é dever do aluno saber o mínimo da matéria que foi dado nos últimos anos.
A36	Sim, pois ajuda na compreensão das matérias que serão ensinadas ao longo do Ensino Médio, uma vez que relapso em uma matéria, a resolução dos problemas matemáticos pode se tornar mais complicada
A37	Sim, pois tem alguns conteúdos

FP20 - Qual nota você daria para seu comprometimento com as minhas aulas revisando os conteúdos de séries anteriores?



FP21 - Você gostaria que eu continuasse a revisar algum tipo de conteúdo que você não aprendeu muito bem? Qual ou quais?



FP22 - Aqui fica uma parte para você escrever refletindo o por quê de muitos alunos atualmente terem dificuldade em realizar as operações aritméticas básicas mesmo os professores terem feito muitas revisões até aqui.

Respostas dos alunos.	
A1	.
A2	Não sei responder
A3	a pandemia atrasou diversos alunos e isso atrapalhou o desempenho deles, e muitos deles tem TDAH ou TDA, para isso melhorar é preciso revisar os conteúdos diversas vezes.
A4	A falta de interesse na minha opinião é o principal fator para a dificuldade dos alunos em matemática, claro que existem outros problemas como não conseguir se concentrar ou até mesmos problemas familiares que acabam afetando o desempenho do aluno em sala de aula e fora de sala.
A5	Dependendo da pessoa pode ser por falta de interesse do aluno ou por não ter aprendido o básico na escola
A6	A falta de aulas básicas
A7	Por conta das aulas online que diferente das presenciais nao prendem a atenção e dificultou muito no aprendizado e tirou a valorização das aulas
A8	As vezes muitos tem dificuldade porque não teve a matéria, já outros podem ter tido mais tem falta de atenção (assim como eu as vezes).
A9	Muitos alunos têm dificuldade porque durante a pandemia perderam o ritmo de estudo e não conseguiram praticar o suficiente. Além disso, o uso excessivo da calculadora ou da tecnologia pode fazer com que algumas pessoas deixem de treinar as contas básicas. Outro motivo é que cada aluno aprende em um ritmo diferente, e às vezes as revisões não são suficientes para fixar bem o conteúdo.
A10	Talvez pela falta de interesse da maior parte dos estudantes ou até mesmo um ensino de baixa qualidade, como a questão das aulas na pandemia que eram remotas, não oferencendo a assistência necessária para os alunos
A11	Eu acho que porque temos medo, mais no meu caso é acomodação. Porque quando vemos que não somos bons em algo em matemática apenas empurramos com barriga outros não no meu caso tenho muita vergonha de perguntar e deixo essa dívida não acumular e me prejudica muito..Eu gostaria de ter a força de vontade de não desistir como você professor..gosto das suas aulas porque você as deixa mais divertidas.Mais eu odeio a matemática em si porque, não sou boa nela acredite se quiser eu me esforço e estudo para tentar entender mais tenho muita dificuldade em aprender todas as matérias que estão em Matemática em geral. Acredito que eu tenho jeito mais eu me acomodei pelo fato de eu sempre tentar e não aprender ou não entender. E desistir sempre.
A12	Preguiça
A13	Acho que leva tempo vc aprender algo, o tempo que a gnt perdeu n estudando na pandemia foi mto, cada ano tem suas matérias, o ensino médio tem matérias mais complexas, mas a maioria n sabe o básico, ent fica difícil
A14	Pandemia pra mim é o precursor dessa dificuldade.
A15	não tenho opinião sobre isso
A16	As vezes por falta de atenção, ou até mesmo não quererem ouvir

A17	Se empenhar até conseguir realizar se forma pratica e fácil
A18	Muitos alunos ainda têm dificuldade em operações aritméticas básicas porque não praticam o suficiente, dependem de calculadoras e celulares, além de perderem a concentração facilmente. Mesmo com revisões, a falta de treino contínuo e de atenção faz com que esses conteúdos não fiquem bem fixados.
A19	A Matemática é uma matéria muito difícil para alunos, fazendo muito deles perderem o interesse em querer aprender, a Matemática exige algumas fórmulas, formas geométricas, calculamanto do perímetro, divisão com vírgula e etc, isso faz uma embolação na cabeça de nós estudantes. Tem muita coisa na Matemática, e muitas coisas nessa vida vem da Matemática, fazendo a gente querer desistir do progresso, pois é muito cansativo, são anos e anos de estudos, aprendendo coisas que dificilmente entram na nossa cabeça !! Muitos de nós alunos, queremos apenas a resposta na palma da mão, com isso fazendo a nós alunos querer pegar a resposta na Internet, por isso não sabemos fazer muitas contas, porque a IA e o Google já facilitam isso para a nós, por isso não sabemos quase nada, poia nós alunoa adaptamos pelo lado mais simples.
A20	Talvez a falta de comprometimento do aluno em relação aos conteúdos seja um fator muito importante para causa das dificuldades.
A21	Falta de comprometimento com as aulas, falta de interesses, deixar o estudo em segundo lugar e primeiro namorar etc..., ou simplesmente não quer passar.
A22	Não entendi
A23	Ao meu ver, como aluna, isso se dá além da pandemia, pelo fato de muitos dos professores não estarem 100% aptos a tirar dúvidas ou coisas do tipo.
A24	Eu acho q temos dificuldades por conta de falta de interesse e pq as vezes nos embolamos
A25	Às vezes é que os alunos não entendem a explicação e tem vergonha de pedir pra repetir.
A26	Por conta da distração de muitos alunos nas aulas tanto online quanto presencial
A27	Alguns foi por causa da pandemia e outros q não conseguem prestar atenção na aula e ir bem nas provas
A28	Tem muitas dificuldades pois não conseguem prestar a atenção na aula
A29	Muita das vezes n conseguimos realizar tarefas por n ter costume e não ter tido contato com as matérias escolares na pandemia
A30	a parte da pandemia q realmente atrapalhou muito, e alunos com tdah tem aumentado demais
A31	Porque era muito facil se distrair naquela época com o uso do celular
A32	Muitos as vezes nem se esforçam, pois já pensam que a matemática é difícil, e nem se dão a chance, mas também há o fato de que as novas tecnologias tem feito o cérebro se acostumar a não se exercitar
A33	não ter foco
A34	Muitos alunos têm dificuldade porque não praticam bastante, ficam dependentes da calculadora e acabam esquecendo as operações básicas.
A35	Por os alunos também não se esforção

A36	Nada além da falta de comprometimento dos próprios alunos. É frustrante tentar prestar atenção em uma aula em que os outros não prestam a devida atenção, além de não realmente tentarem fazer antes de decidirem partir para a calculadora.
A37	Não só pela pandemia, mas os alunos com dificuldades atualmente não só estão desmotivados, mas indisciplinados e desinteressados, numa era de informações rápidas pela internet onde a matemática parece confusa.
A38	Professor, sendo bem sincera com o senhor, nem eu sei isso, e vou falar por mim, mesmo eu prestando atenção e estudando muito ainda não faz o menor sentido em minha cabeça, números e letras, etc, realmente não consigo entender
A39	Simplesmente o aluno não foi responsável e pagará pelos seus atos, ao qual deu e apresentou a matéria, o professor (a) fez sua parte. (a não ser que o aluno tenha dificuldade com a matéria, com isso, o aluno deve se dirigir ao professor (a) e tirar todas suas dúvidas)
A40	Por causa da falta de explicação do conceito e por muitas vezes ele poder ser desinteressante e até desgastante para alguns alunos. Além disso, a falta de interesse contribui para isso
A41	Por causa da pandemia e o atraso
A42	algumas pessoas tem um pouco a mais de dificuldade de entender e interpretar

FP23 - Como você pode se empenhar, para aprender melhor Matemática e conseguir superar as suas dificuldades na matéria?

A1	.
A2	Ter mais interesse
A3	sim
A4	estudando e revisando na pratica
A5	Estudar, admito que não tenho estudado muito para matemática e reconheço que meus possíveis fracassos na matéria tem haver com isso e tenho que mudar meus hábitos o mais rápido possível!
A6	.
A7	Tentando estudar mais.
A8	Fazendo muitos exercícios para fixar os conteúdos e também resolver exercícios de raciocínio lógico
A9	Estudando
A10	Treinando cálculos na Internet sobre a matéria
A11	Prestando mais atenção, vendo vídeo aula e revisando o conteúdo em casa, assim consigo passar de ano.
A12	Posso me empenhar praticando mais exercícios diariamente, tirando dúvidas com o professor sempre que precisar, revisando os conteúdos que tenho dificuldade e usando ferramentas de apoio apenas como complemento. Também posso organizar um tempo fixo para estudar Matemática e não deixar acumular as dúvidas.

A13	Estudando e revisando o conteúdo através de exercícios (principalmente em relação à frações e números decimais) e sempre consultar ao professor no caso de dúvidas
A14	Tentando entender ao máximo a matéria e me dedicando mais nos estudos.
A15	Procurando explicação ou prestando atenção em partes específicas da aula
A16	Bom eu tenho mta dificuldade em aprender em sala de aula, eu aprendo bastante assistindo vídeos e fazendo exercícios, para eu aprender pessoalmente eu preciso que a pessoa que sabe fazer ou explicar esteja do meu lado, então no primeiro trimestre, toda matéria nova que tinha eu já pegava e estudava, mas esse trimestre eu infelizmente n tive esse tempo
A17	Estudando e praticando.
A18	eu vou estudar muito mais
A19	Revisando cada dia
A20	Treinar exercícios q tenho duvida e sempre tirar duvida com o professor!
A21	Posso me empenhar estudando com mais regularidade, fazendo exercícios para treinar, prestando atenção nas explicações em sala e tirando dúvidas sempre que precisar. Além disso, buscar outras formas de aprender, como videoaulas e resumos, também pode me ajudar a superar as dificuldades em Matemática.
A22	Quando o professor faz a Matéria parecer ser algo interessante e divertido, pois os professores sabem MUITO bem, o quanto é chato para nós alunos, então se eles ensinarem o conteúdo deles de forma interessante, bacana, de forma simples, e usando exemplos simples e fáceis de entender, pode ajudar bastante !! E a assistir bastante vídeos aulas que exlicam de forma resumida, rápida, interessante e inteligente, para que fique na nossa cabeça e que faça a nós alunos entendermos o conteúdo, sem haver dor de cabeça !!
A23	Talvez revisando profundamente os conteúdos
A24	Assistir resumo, treinar em casa os deveres, e consulta um pouco chat gpt ou outras IA que podem ajudar a e entender.
A25	Sim
A26	Estudando mais e realizando mais exercícios
A27	Através de aulas presenciais e vídeos na Internet
A28	prestando mais atenção nas aulas
A29	Na maioria das vezes eu tirop dúvida com o professor e também vejo aulas no YouTube
A30	Tentar conseguir entender mais a matéria
A31	Estudando mais por livros e videoaulas
A32	Posso praticar fórmulas até aprender
A33	estudando e revisando na pratica
A34	Vendo video aulas e revisando os conteudos
A35	Praticando exercícios e prestando mais atenção nas aulas, e tentar rever todos os conceitos básicos que devo saber no ensino médio
A36	Posso me empenhar prestando mais atenção nas aulas, fazendo exercícios em casa e tirando dúvidas sempre que não entender.

A37	Aulas dinâmicas
A38	Assistindo vídeo aulas, revendo a resolução de exercícios e revisando conteúdos anteriores.
A39	Focando mais nos estudos.
A40	Acho que tentar estudar bastante e tals
A41	Estudar e tirar dúvida com o professor (a)
A41	Melhorar meus estudos e revisar, além de tentar melhorar minhas habilidades no cálculo e participar mais da aula de matemática, buscando compreender ao menos como resolver equações e problemas propostos
A42	Estudando e me dedicando

Análise e Discussão dos Resultados

Antes de serem apresentados os resultados com os devidos comentários, gostaria de relatar que os alunos receberam muito bem a proposta de revisão de conteúdo. Apesar de muitos acharem que a revisão das operações elementares poderia ser enfadonha, ao longo do projeto percebeu-se a receptividade dos alunos, através das suas participações em sala de aula por meio do preenchimento das atividades, mas também da participação tirando as suas dúvidas.

Figura 24: Turma Piloto de 1º ano do Ensino Médio de um colégio estadual do RJ

Autocorreção e Validação das Respostas: Embora os alunos tenham realizado a autocorreção dos cadernos de atividades, foi efetuada uma revisão minuciosa por parte do pesquisador, ao registrar as pontuações em planilha eletrônica. Durante essa etapa, constatou-se que diversos estudantes assinalaram como corretas questões cuja resolução estava incorreta. Para garantir a fidedignidade dos dados, tais questões não foram consideradas corretas nesta análise.

Figura 25: Aluna do 1º ano do Ensino Médio realizando a sua autocorreção.

Os alunos demonstraram entusiasmo ao explorar a evolução das calculadoras e ficaram encantados ao descobrir as funcionalidades da calculadora científica disponível em seus smartphones, baseados nas habilidades da BNCC.

6.2 Discussão dos resultados da Atividade 2 do caderno impresso

Nesta seção são analisados os erros envolvendo os conceitos de números naturais e inteiros e suas representações, baseados nas habilidades da BNCC: EF06MA01 e EF07MA03. Existem duas abordagens para definir o conjunto dos números naturais: uma inicia no 1 e outra, predominante nos livros didáticos brasileiros atuais (BNCC, Dante, 2017 e Iezzi *et al.*, 2020), inclui o zero. Em aula, foi adotada a convenção que começa no zero.

Durante a correção das atividades, observaram-se diversos erros conceituais dos alunos sobre sequências, conjuntos e representação dos inteiros. Entre eles: confusão entre ordem (sequência) e agrupamento (conjunto), uso inadequado de notações ( ), [ ] e { }, ausência de reticências para indicar a infinitude dos inteiros, uso incorreto de símbolos (como representar conjuntos com parênteses) e representação equivocada de números negativos (como “$5\,-$” para -5). Na reta numérica, muitos não inseriram setas ou utilizaram setas em ambas as extremidades. Embora esta última forma represente corretamente o infinito, caiu em desuso, sendo padronizada, atualmente, a reta com seta apenas à direita, como adotam livros de Ensino Fundamental e Médio.

Esses equívocos evidenciam a necessidade de reforçar a distinção entre sequência e conjunto, o uso padronizado das notações e a compreensão da infinitude e progressão numérica, com base nos padrões didáticos atuais.

6.3 Discussão dos resultados da Atividade 3 do caderno impresso

Os alunos demonstraram grande dificuldade na resolução de problemas que envolviam as definições das operações de adição, subtração e multiplicação com números inteiros não negativos, bem como na interpretação de diferentes formas de completar as tabuadas dessas operações, seja por meio de padrões de repetição pré-definidos ou pela organização em tabelas. Observou-se uma significativa deficiência em reconhecer e seguir padrões, reconhecer as sequências recursivas e em compreender os processos de incremento e decremento — conceitos essenciais não apenas para o domínio das operações aritméticas, mas também para o desenvolvimento do pensamento computacional, fundamental em atividades de programação e lógica matemática.

Os alunos demonstraram grande dificuldade na resolução de problemas relacionados ao conceito de múltiplo de um número natural e ao conjunto dos múltiplos. Entre os principais equívocos observados, destacaram-se a percepção incorreta de que um número inteiro possui um conjunto limitado de múltiplos — em vez de infinitos — e a confusão frequente entre os conceitos de múltiplo e divisor de um número natural.

Principais erros observados nas atividades de propriedades e operações

(I) Propriedades Associativa e Comutativa (Adição e Multiplicação)

- Muitos alunos deixaram questões em branco ou não seguiram corretamente as etapas para verificar a igualdade, especialmente ao resolver expressões dentro de parênteses.
- Não argumentaram adequadamente porque certas igualdades eram falsas (ex.: $a - b \neq b - a - \ b$ para $a = 4$, $b = 3$), limitando-se a substituir valores sem justificar.
- Ao generalizar a propriedade comutativa da multiplicação com variáveis, esqueceram de explicitar que as variáveis representam números inteiros.

(II) Elemento Neutro da Multiplicação

- Muitos confundiram o conceito, afirmando que o zero seria o elemento neutro, em vez do 1.
- Um aluno utilizou o símbolo de infinito (∞), indicando confusão entre a noção de "infinidade" do conjunto dos naturais e a ideia de número.

- Apesar de completarem corretamente padrões como $x \cdot 1 = x$, não conseguiram enunciar formalmente a propriedade.

(III)Uso de Ferramentas e Resolução de Expressões

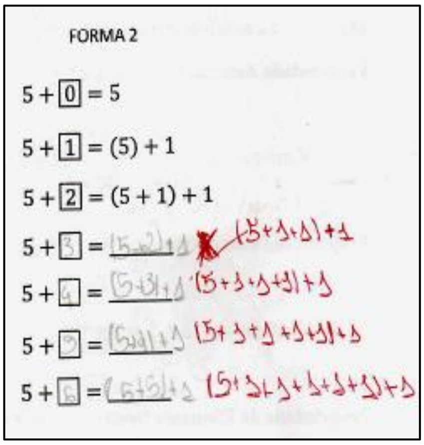
- Em questões que exigiam o uso da calculadora, muitos alunos optaram por resolver no papel, contrariando a orientação. O que ocasionou em muitos erros na não verificação dos seus resultados.
- Mostraram dificuldade em validar igualdades e em identificar propriedades, como a distributiva ($3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$), demonstrando lacunas na argumentação lógica e na aplicação das propriedades básicas.

6.4 Registros de algumas atividades com erros conceituais dos alunos.

Esta seção apresenta os registros das resoluções elaboradas pelos alunos, exibidas nas Figuras 48, 49 e 50.

Figura 26: Erros conceituais: (a) definição de adição (b) múltiplos de um número natural

(a)



(b)

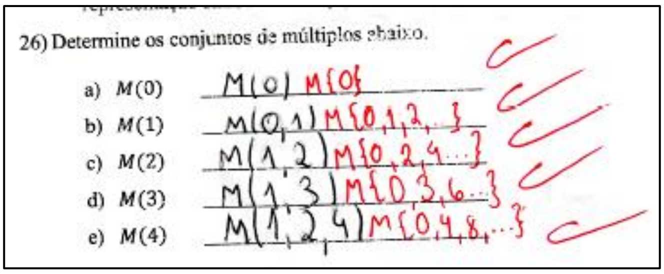


Figura 27: Erro de uso inadequado do sinal de igualdade em encadeamento de operações

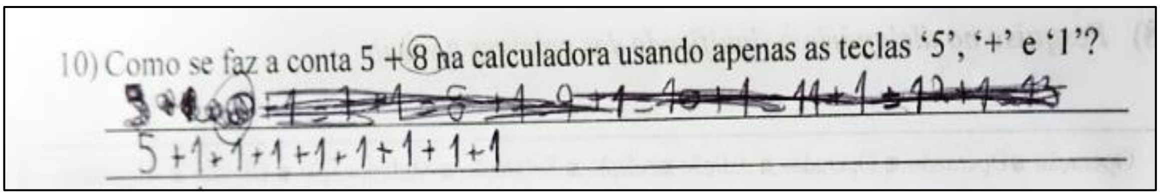
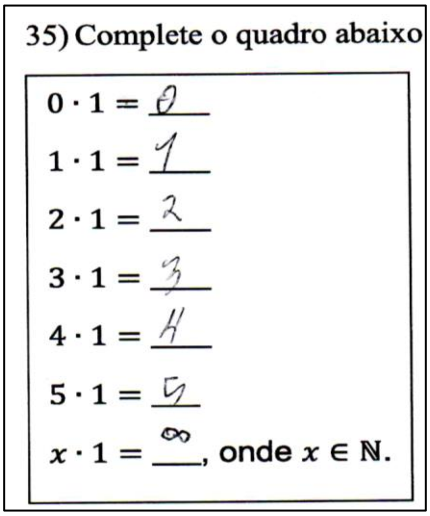


Figura 28: Erros conceituais no conceito do elemento neutro multiplicativo



35) Complete o quadro abaixo

$0 \cdot 1 =$ 0

$1 \cdot 1 =$ 1

$2 \cdot 1 =$ 2

$3 \cdot 1 =$ 3

$4 \cdot 1 =$ 4

$5 \cdot 1 =$ 5

$x \cdot 1 =$ ∞, onde $x \in \mathbb{N}$.

6.5 Discussão Global dos Desempenhos e Direcionamentos Pedagógicos

Neste capítulo, apresenta-se a discussão dos resultados obtidos a partir da análise das atividades, bem como as ações pedagógicas propostas para aprimorar o desempenho dos alunos nas habilidades que não foram plenamente desenvolvidas.

A análise dos dados confirma que as dificuldades em Matemática derivam de lacunas acumuladas no Ensino Fundamental, agravadas pelo ensino remoto durante a pandemia. Os resultados revelam um baixo domínio das operações básicas e de suas propriedades, o que repercute na aprendizagem de conteúdos mais avançados, previstos na BNCC para o 1º ano do Ensino Médio.

O uso da calculadora se mostrou ambivalente: enquanto promoveu motivação, autocorreção e agilidade, alguns estudantes declararam que passaram a “não ver necessidade em aprender a fazer a conta”, sinalizando riscos de dependência. Contudo, episódios observados em sala, como o entusiasmo dos alunos ao descobrir o modo científico do smartphone, a realização de cálculos trigonométricos simples (seno inverso) e o interesse histórico pelas primeiras calculadoras, evidenciam o potencial pedagógico do recurso quando mediado criticamente.

A introdução de conceitos estruturantes também foi marcante. Na Atividade 2, a explicação sobre sentenças abertas e fechadas foi essencial para o avanço dos alunos. Na Atividade 4, a dificuldade em compreender a Relação Fundamental da Divisão e a surpresa diante da demonstração da propriedade distributiva mostraram que o contato com ideias de demonstração e estrutura axiomática, mesmo em caráter introdutório, amplia a visão dos alunos sobre a Matemática como ciência estruturada.

No formulário eletrônico, emergiram aspectos afetivos e sociais. Muitos alunos relataram baixa autoestima, medo de perguntar em sala e desmotivação, fatores agravados por experiências negativas com professores. Outros, no entanto, destacaram que as aulas de revisão foram fundamentais para relembrar conteúdos esquecidos e consolidar bases essenciais para o Ensino Médio. O rendimento da turma dos alunos (1ª coleta) teve um acerto de 73% e 27% de erros considerando as 33 questões avaliadas. Contudo, o rendimento na prova objetiva global foi próximo aos 45%. Que é uma porcentagem relevante, frente as dificuldades iniciais desses estudantes no início do ano e, também, um rendimento global acima da média quando comparado ao rendimento de alunos em pesquisas externas.

A análise dos resultados obtidos nas atividades evidencia que as maiores dificuldades dos alunos estão relacionadas à compreensão de conceitos estruturantes da Matemática, como a distinção entre sequência e conjunto, a leitura e interpretação de representações (tabelas, retas numéricas e notações formais) e a aplicação de propriedades operatórias. O elevado índice de erros em questões que exigiam argumentação ou reconhecimento de padrões revela fragilidades no raciocínio lógico e algorítmico dos estudantes.

Diante desse cenário, é essencial que o ensino desses conteúdos seja acompanhado de estratégias que priorizem a prática sistemática e o uso de representações visuais aliadas ao desenvolvimento do pensamento algorítmico e ao uso consciente de recursos tecnológicos, como a calculadora. Além disso, a valorização da etapa de verificação dos resultados deve ser incorporada às rotinas de estudo para promover maior autonomia e precisão na resolução de problemas.

Como encaminhamento pedagógico, recomenda-se que os próximos cadernos de atividades, reforcem os pontos críticos os quais os alunos revelaram nos formulários, como operações com frações, porcentagem, regra de três e Álgebra Básica; por meio de exercícios progressivos, incentivando a reflexão sobre processos e resultados, e promovendo o uso articulado de ferramentas digitais e métodos formais. A análise dos dados confirma que as dificuldades em Matemática derivam de lacunas acumuladas no Ensino Fundamental, agravadas pelo ensino remoto durante a pandemia. Os resultados revelam um baixo domínio das operações básicas e de suas propriedades, o que repercute na aprendizagem de conteúdos mais avançados, previstos na BNCC para o 1º ano do Ensino Médio.

O uso da calculadora se mostrou ambivalente: enquanto promoveu motivação, autocorreção e agilidade, alguns estudantes declararam que passaram a “não ver necessidade em aprender a fazer a conta” sinalizando riscos de dependência. Contudo, episódios observados em sala, como o entusiasmo dos alunos ao descobrir o modo científico do smartphone, a realização de cálculos trigonométricos simples (seno inverso) e o interesse histórico pelas primeiras calculadoras, evidenciam o potencial pedagógico do recurso quando mediado criticamente.

A introdução de conceitos estruturantes também foi marcante. Na Atividade 2, a explicação sobre sentenças abertas e fechadas foi essencial para o avanço dos alunos. Na Atividade 4, a dificuldade em compreender a Relação Fundamental da Divisão e a surpresa diante da demonstração da propriedade distributiva mostraram que o contato com ideias de demonstração e estrutura axiomática, mesmo em caráter introdutório, amplia a visão dos alunos sobre a Matemática como ciência estruturada.

No formulário eletrônico, emergiram aspectos afetivos e sociais. Muitos alunos relataram baixa autoestima, medo de perguntar em sala e desmotivação, fatores agravados por experiências negativas com professores. Outros, no entanto, destacaram que as aulas de revisão foram fundamentais para relembrar conteúdos esquecidos e consolidar bases essenciais para o Ensino Médio.

7 CONCLUSÕES

Esta pesquisa evidenciou que a pandemia deixou marcas profundas na aprendizagem matemática, de modo que muitos alunos do 1º ano do Ensino Médio ainda não dominam conceitos elementares que deveriam ter sido consolidados no Ensino Fundamental. Mesmo após três anos de retorno às aulas presenciais, persistem lacunas significativas, refletidas em baixos índices de acerto em conteúdos básicos e operatórios.

Apesar desse cenário, a aplicação do projeto pedagógico, fundamentado na Engenharia Didática, promoveu avanços relevantes:

Redução de erros conceituais e maior clareza na distinção entre propriedades e representações matemáticas;

Participação ativa e engajamento discente, favorecidos pelas estratégias de autocorreção e pelas atividades dialogadas;

Uso da calculadora como recurso reflexivo, que fortaleceu o pensamento matemático ao permitir a conferência de resultados, a exploração de funções pouco conhecidas e a integração entre teoria e prática;

Introdução de demonstrações intuitivas, que despertaram a curiosidade e aproximaram os alunos de uma visão mais abstrata e estruturada da Matemática.

Conclui-se que a recuperação das aprendizagens deve ser conduzida de forma sistemática, contínua e contextualizada, mediada por tecnologias educacionais e alinhada às competências da BNCC. Recomenda-se a ampliação de práticas pedagógicas que combinem recursos digitais (calculadoras, Geogebra, aplicativos de IA) com metodologias ativas, capazes de estimular a autonomia, a reflexão e o protagonismo dos estudantes.

Por fim, este estudo reforça a necessidade de formação docente específica para o uso pedagógico das tecnologias e a revisão de preconceitos ainda existentes quanto ao emprego da calculadora. Mais do que um risco à aprendizagem, esse recurso se mostrou uma ferramenta estratégica de reflexão e consolidação conceitual, capaz de contribuir para a superação das lacunas históricas que caracterizam o ensino da Matemática no Brasil.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / Apênd. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC: 2008.

ARTIGUE, M. in: Didáctica das Matemáticas editado por J. Brun (Horizontes Pedagógicos Instituto Piaget), Lisboa, 1996.

ATANAZIO DOS SANTOS, A., RÉGIS VIEIRA ALVES, F. A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. Acta Scientiae, v.19, n.3, maio/jun., 2017. Disponível em http://posgrad.ulbra.br/periodicos/index.php/acta/article/view/2739

BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70, 2016.

BIANCHINI, B. L. Estudo sobre a aplicação de uma sequência didática para o ensino de números decimais. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2001.

BORBA, Marcelo C.; VILLARREAL, Mônica. *Tecnologias digitais e reconfiguração do conhecimento em matemática*. Campinas, SP: Papirus, 2005.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 22 jun. 2025.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Computação na Educação Básica*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2022. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/bncc-de-computacao-na-educacao-basica. Acesso em: 25 ago. 2025.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Matriz de avaliação de matemática – PISA 2012*. Brasília: INEP, 2013. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 20 jul. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 24 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. L9795. Lei No 9.795, de 27 de abril de 1999. Dispõe sobre a educação ambiental, institui a Política Nacional de Educação Ambiental e dá outras providências.

CABRAL, N. F., DIAS, G. N., LOBATO JUNIOR, J. M. D. S. O Ensino de Razão e Proporção Por Meio De Atividades. *Ensino Da Matemática Em Debate*, *6*(3), 174–206 (2019). Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/45062

CARVALHO, J. A. et al. Dificuldades na aprendizagem de matemática: um olhar psicopedagógico. São Paulo: Avercamp, 2004.

CORRIENNA, Abdul Talib; Hassan Aliyu; Rainer Zawadzki; Marlina Ali. Developing student's computational thinking through graphic calculator in STEAM education. AIP Conference Proceedings 2184, 030003 (2019).

DANTE, Luiz Roberto. *Teláris Essencial* – Matemática – 9º ano, São Paulo. Editora Ática, 2019.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto & Aplicações*. 7. ed. São Paulo: Ática, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*. Volume 7. São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*. Volume 6. São Paulo: Ática, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto e Aplicações* – Volume 1. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, contexto e aplicações: 1º ano Ensino Médio. 3ª edição. São Paulo. Editora Ática, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, contexto e aplicações: 2º ano Ensino Médio. 3ª edição. São Paulo. Editora Ática, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, contexto e aplicações: 3º ano Ensino Médio. 2ª edição. São Paulo. Editora Ática, 2016.

DEVLIN, K. Teaching mathematics as a way of thinking – not calculating. Estonian Journal of Education, [S. l.], v. 9, n. 1, p. 33–59, maio 2021. Disponível em: https://doi.org/10.12697/eha.2021.9.1.02b. Acesso em: 27 jul. 2025.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação matemática: da teoria à prática*. 4. ed. Campinas: Papirus, 1996.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. *Álgebra moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

DRUBSCKY, Luiza. Mobile UX: guia definitivo 2025. UXCam, 26 fev. 2025. Disponível em: https://uxcam.com/br/blog/mobile-ux/. Acesso em: 25 jun. 2025.

FGV Projetos. Estudo de avaliação da política industrial da Zona Franca de Manaus. Rio de Janeiro: FGV Projetos, 2018. Disponível em: https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/handle/10438/24694. Acesso em: 24 jun. 2025.

FONSECA, Alessandra da Cunha Aguiar; ANDRADE, Mônica dos Anjos Ribeiro; PIRES, Letícia Diva Alarcon; ALBUQUERQUE, Maria Analice de Araujo; DAMASCENO, Valdirene Aparecida Pereira. *Educação 4.0: o futuro começa hoje*. Revista Aracê, São José dos Pinhais, v. 7, n. 2, p. 8413–8428, fev. 2025. Disponível em: https://periodicos.newsciencepubl.com/arace/article/download/3443/4392/13085. Acesso em: 26 ago. 2025.

FREITAS, Luiz Carlos de; COSTA, Luiz Cláudio. *Recuperar aprendizagens e recompor trajetórias: uma urgência da educação brasileira*. São Paulo: CNTE, 2021. Disponível em: https://www.cnte.org.br/images/pdf/2021/Recuperar_aprendizagens.pdf. Acesso em: 22 jun. 2025.

GARCÍA MÁRQUEZ, Rosa; ZANDER VAIANO, Andréa; SILVA DE MELLO, Elizabeth. Um Enfoque Pedagógico da Matemática para o Ensino Fundamental. Editora: Clube de autores. Joinville, 2009.

GARCÍA MÁRQUEZ, Rosa - Uma introdução ao Cálculo Numérico – notas de aula. RJ-2016

HEFEZ, Abramo. Curso de Álgebra, Volume 1. 6ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2024.

IFRAN, Georges. *Os Números: A História de uma Grande Invenção*. Rio de Janeiro: Record, 2001.

KLINE, Morris. O Pensamento Matemático: Do Antigo ao Moderno. São Paulo: Blucher, 1995.

KILHIAN, Kleber. A História do Computador e alguns Matemáticos que contribuíram para seu desenvolvimento. O Baricentro da Mente, 12 maio 2010. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2010/05/historia-do-computador-e-alguns-matematicos-que-contribuiram-para-seu-desenvolvimento.html. Acesso em: 27 jul. 2025.

LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LOPES, T. B.;COSTA ,A. B. ;COSTA,D. E. . A Engenharia Didática no Ensino de Matemática: integração entre teoria e prática. https://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao/article/view/88

LORENZATO, Sérgio. Calculadora na sala de aula: proposta para o ensino de matemática no ensino fundamental e médio. Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, Sérgio. *Calculadora na sala de aula: e agora?* Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Didática da Matemática).

MIGHTON, John. The Myth of Ability: Nurturing Mathematical Talent in Every Child. Canadá: House of Anansi Press, 2003. 224 p. ISBN 0-8027-7707-4

MOURA, Ronaldo Rogério de Freitas. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.

OLIVEIRA, A.S. dos Santos. Uma engenharia didática para o ensino das operações com números racionais por meio de calculadora para o 5º ano do Ensino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2015.

PACHECO RENZ, Sandra. A SUA CALCULADORA ERRA?. Educação Matemática em Revista - RS, *[S. l.]*, v. 1, n. 8, 2020. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/2216. Acesso em: 30 ago. 2025.

POMA DE AYALA, Gusman. *Nueva crónica y buen gobierno Lima.* Editora: Fondo de Cultura Económica (FCE). Lima, 1993.

PROFESSOR JÚLIO LOMBALDO. *Erros e Aritmética no Computador – Ep.01*. [recurso eletrônico]. YouTube, 20 mai,2022. Disponível em: https://youtu.be/8e0hB8Tpdys. Acesso em: 30 ago.2025.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; PORTO DA SILVEIRA, José Francisco. *Números racionais, reais e complexos*. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

RODRIGUES ALVES SANTOS, A. P., RÉGIS VIERA ALVES, F. A engenharia didática para o ensino de olimpíadas de matemática: situações olímpicas com o amparo do software geogebra. Góndola, Enseña Aprendizaje de las Ciencias, 13(1), 141-15, 2018. Doi: http://doi.org/10.14483/23464712.11732

SANTOS, Leidiane da Silva. *A Zona Franca de Manaus e o Polo Industrial de Manaus: os limites do modelo de desenvolvimento regional*. 2014. 103 f. Dissertação (Mestrado em Sociedade e Cultura na Amazônia) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2014. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5216. Acesso em: 24 jun. 2025.

SELVA, A.C.V.; BORBA, R.E.S.R. O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental. Revista Bolema 28 (50), 2014. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50r03

SUFRAMA. História da Zona Franca de Manaus. Manaus: Superintendência da Zona Franca de Manaus, [s.d.]. Disponível em: https://www.gov.br/suframa. Acesso em: 24 jun. 2025.

VANDER ARK, Tom. *Stop calculating and start teaching computational thinking*. *Forbes*, 29 jun. 2020. Disponível em: https://www.forbes.com/sites/tomvanderark/2020/06/29/stop-calculating-and-start-teaching-computational-thinking/. Acesso em: 26 ago. 2025.
Contato: E-mail: phajsantos@gmail.com

ANEXO A: Exercícios da Lista das atividades 2 e 3

Exercícios Propostos - Atividade 2

1- Responda:

a) Quais são os dez primeiros números naturais? (7 alunos) 25%
b) Represente a sequência dos números naturais. (10 alunos) 26%
c) Represente a sequência dos números inteiros. (9 alunos) 32%
d) Represente o conjunto dos números naturais usando a representação por enumeração. (5 alunos) 18%
e) Represente o conjunto dos números inteiros usando a representação por enumeração. (7 alunos) 25%
f) Qual é o símbolo do conjunto dos *números naturais*? (7 alunos) 25%
g) Qual é o símbolo do conjunto dos *números inteiros*? (1 aluno) 4%
h) Represente o conjunto dos *números naturais* usando a reta numérica. (16 alunos) 57%
i) Represente o conjunto dos *números inteiros* usando a reta numérica. (19 alunos) 68%

2- O número 5 é um *número natural e um número inteiro*. Sabemos que podemos representar esse fato simbolicamente usando o símbolo $\in$ (pertence à) e os símbolos de conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

a) 5 é um número inteiro Notação: _______________ (3 alunos) 11%
b) 5 é um número natural Notação: _______________ (2 alunos) 7%

3- Ao desejarmos nos referir a um número natural ou inteiro, podemos usar uma letra do nosso alfabeto. Chamamos de **variável** a essa letra que representa um número. Para saber qual número poderemos substituir por essa letra, é necessário usarmos o símbolo " $\in$ " (pertence à) e os símbolos de conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

a) x é um número inteiro Notação: _______________ (2 alunos) 7%
b) x é um número natural Notação: _______________ (7 alunos) 25%

4- Complete as lacunas abaixo usando as palavras: ‘negativo’, ‘positivo’ ou ‘zero’. (17 alunos) 25%

Considerando x como um *número inteiro* ($x \in \mathbb{Z}$) podemos afirmar que: ***Ou*** x é um número _______________ ***ou*** x é um número _________________ ***ou*** x é o ____.

5- Analise as sentenças abaixo e, considerando $x \in \mathbb{N}$, determine um valor possível para x caso este exista. Se não existir, risque o campo “$x =$ ” e escreva na linha da resposta “não há números naturais que satisfaçam essa propriedade.” (4 alunos) 14%

a) $x > 0$ Lê-se: x é maior do que zero $x = 14$

b) $x = 0$ Lê-se: ______________________________________ $x =$ ______

c) $x < 0$ Lê-se: ______________________________________ $x =$ ______

6- Faça a leitura das sentenças abaixo e, considerando $y \in \mathbb{Z}$, obtenha um valor possível para y. (2 alunos) 7%

a) $y > 5$ *Lê-se:* _____________________________ $y =$ _____

b) $y = 5$ *Lê-se:* _____________________________ $y =$ _____

c) $y < 5$ *Lê-se:* _____________________________ $y =$ _____

7- Escreva se as sentenças são verdadeiras (V) ou falsas (F): (1 aluno) 4%

a) (V) $5 > 0$ f) ( ) $-5 > 0$

b) ( ) $5 = 0$ g) ( ) $-5 = 0$

c) ( ) $5 < 0$ h) ( ) $-5 < 0$

d) ( ) $5 \in \mathbb{N}$ i) ( ) $-5 \in \mathbb{N}$

e) ( ) $5 \notin \mathbb{Z}$ j) ( ) $-5 \notin \mathbb{Z}$.

Exercícios Propostos - Atividade 3

8- Calcule o valor de $5 + ■$ substituindo o valor de ■ por 0,1,2,3,4,5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

$5 + ■$

FORMA 1 (7 alunos) 25%	FORMA 2 (26 alunos) 93%
$5 + \boxed{0} = 5$	$5 + \boxed{0} = 5$
$5 + \boxed{1} = 6$	$5 + \boxed{1} = (5) + 1$
$5 + \boxed{2} = 6 + 1 = 7$	$5 + \boxed{2} = (5 + 1) + 1$
$5 + \square =$ ______	$5 + \square =$ ______
$5 + \square =$ ______	$5 + \square =$ ______
$5 + \square =$ ______	$5 + \square =$ ______
$5 + \square =$ ______	$5 + \square =$ ______

9- Complete a tabela considerando o cálculo $(Entrada\ 1) + (Entrada\ 2)$. (6 alunos) 21%

Tabela 1: Complete as Tabuadas da Adição de 0 a 10

+		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**											
	1											
	2											
	3											
	4											
	5											
	6											
	7											
	8											
	9											
	10											

10- Como se faz a conta $5 + 8$ na calculadora usando apenas as teclas ‘5’, ‘+’ e ‘1’?

(13alunos) 46%

11- Identifique quais são as propriedades da adição envolvidas abaixo e verifique a veracidade dessas igualdades.

a) $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$ b) $2 + 3 = 3 + 2$

12- Complete a tabela abaixo. (0 alunos) 0%

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} + 0$	Resultado
0		
1	$1 + 0$	1
2		
3		
$\boldsymbol{k}$		

13- Calcule o valor de $5 - \blacksquare$ substituindo o valor de $\blacksquare$ por 0,1,2,3,4,5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

$5 - \blacksquare$

FORMA 1 (5 alunos) 18%

$5 - \boxed{0} = 5$

$5 - \boxed{1} = (5) - 1 = 4$

$5 - \boxed{2} = (4) - 1 = 3 = 3$

$5 - \square = $ ______

$5 - \square = $ ______

$5 - \square = $ ______

$5 - \square = $ ______

FORMA 2 (21 alunos) 75%

$5 - \boxed{0} = 5$

$5 - \boxed{1} = (5) - 1$

$5 - \boxed{2} = (5 - 1) - 1$

$5 - \square = $ ______

$5 - \square = $ ______

$5 - \square = $ ______

$5 - \square = $ ______

14- Complete a tabela considerando o cálculo $(Entrada\ 1) - (Entrada\ 2)$.
(8 alunos) 29%

Tabela 2: Tabuadas da Subtração de 0 a 10

−		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**											
	1											
	2											
	3											
	4											
	5											
	6											
	7											
	8											
	9											
	10											

15- Como se faz a conta $8 - 5$ na calculadora usando apenas as teclas '8', '-' e '1'?
(7 alunos) 25%

____

16- Complete as lacunas a partir das palavras abaixo: (0 alunos) 0%

MENOR – MAIOR – ZERO – POSITIVO -

a) Um número inteiro *positivo* é _____________ do que zero.
b) Um número inteiro *negativo* é ____________ do que zero.
c) O número inteiro __________não é um número positivo e nem negativo.
d) Se tirarmos uma *quantidade* de uma outra *maior* do que ela, o resultado será um número inteiro ______________.
e) Se tirarmos uma *quantidade* de uma outra *menor* do que ela, o resultado será um número inteiro ______________.

f)Se tirarmos uma *quantidade de* uma outra *igual a* ela, o resultado será o número inteiro ______________.

17- Considere $a = 4$, $b = 3$ e $c = 1$ nas igualdades abaixo. Indique quais delas são verdadeiras ou falsas para esses valores das variáveis fornecidos. (6 alunos) 21%

a) ( ) $(a - b) - c = a - (b - c)$

b) ( ) $a - b = b - a$

c) ( ) $a - b = -(b - a)$

18- Complete os espaços vazios: (2 alunos) 7%

a) $\boxed{10} - \boxed{6} = \boxed{}$ c) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{10}$ e) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{-10}$

b) $\boxed{10} - \boxed{} = \boxed{6}$ d) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{0}$ f) $\boxed{6} - \boxed{} = \boxed{10}$

19- Calcule o valor de 2 · ■ substituindo o valor de ■ por 0,1,2,3,4,5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

FORMA 1(2 alunos) 7% FORMA 2(15 alunos) 54%FORMA 3(11 alunos) 39%

$\boxed{2 \cdot ■}$

FORMA 1:

$2 \cdot \boxed{0} = 0$

$2 \cdot \boxed{1} = 2$

$2 \cdot \boxed{2} = (2) + 2 = 4$

$2 \cdot \boxed{3} = (4) + 2 = 6$

$2 \cdot \boxed{} =$ ______

$2 \cdot \boxed{} =$ ______

$2 \cdot \boxed{6} =$ ______

FORMA 2:

$2 \cdot \boxed{0} = 0$

$2 \cdot \boxed{1} = 2$

$2 \cdot \boxed{2} = (2) + 2$

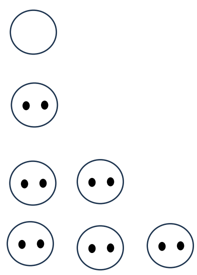
$2 \cdot \boxed{3} = (2 + 2) + 2$

$2 \cdot \boxed{} =$ ______

$2 \cdot \boxed{} =$ ______

$2 \cdot \boxed{} =$ ______

FORMA 3:



20- Calcule o valor de 3 · ■ substituindo o valor de ■ por 0,1,2,3,4,5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões.

FORMA 1(3 alunos) 11% FORMA 2(9 alunos) 32%FORMA 3(13 alunos) 46%

$3 \cdot \blacksquare$

$3 \cdot \boxed{0} = 0$

$3 \cdot \boxed{1} = 3$

$3 \cdot \boxed{2} = (3) + 3 = 6$

$3 \cdot \boxed{3} = (6) + 3 = 9$

$3 \cdot \square =$ ______

$3 \cdot \square =$ ______

$3 \cdot \square =$ ______

$3 \cdot \boxed{0} = 0$

$3 \cdot \boxed{1} = 3$

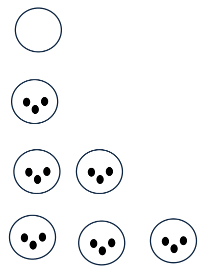
$3 \cdot \boxed{2} = (3) + 3$

$3 \cdot \boxed{3} = (3 + 3) + 3$

$3 \cdot \square =$ ______

$3 \cdot \square =$ ______

$3 \cdot \square =$ ______



21- Como se faz a conta $2 \cdot 8$ na calculadora usando apenas as teclas ‘2’ e ‘+’ ?

(5alunos) 18%____

22- Complete a tabela considerando o cálculo $(Entrada\ 1) \cdot (Entrada\ 2)$. (5 alunos) 18%

Tabela 3: Complete as Tabuadas da Multiplicação de 0 a 10

·		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**											
	1											
	2											
	3											
	4											
	5											
	6											
	7											
	8											
	9											
	10											

23- Quantos contas de multiplicação você fez na tabela acima? _____________.

24- Comente se você consegue enxergar algum padrão de repetição nessa tabela, se sim, qual ou quais? Coloque as suas respostas no seu caderno.

25- Complete a tabela abaixo: (4 alunos) 14%

	$\blacksquare = 0$	$\blacksquare = 1$	$\blacksquare = 2$	$\blacksquare = 3$	$\blacksquare = 4$	$\blacksquare = 5$
$2 \cdot \blacksquare$						

26- Determine os conjuntos de múltiplos abaixo iniciando cada um deles com os seus 5 primeiros múltiplos. Considere $a \in \mathbb{N}$. (14 alunos) 50% ; item (f) (16 alunos) 57%

d) $M(0)$ = ______________________ d) $M(3)$ = ______________________

e) $M(1)$ = ______________________ e) $M(4)$ = ______________________

f) $M(2)$ = ______________________ f) $M(a)$ = ______________________

27- Complete a tabela para encontrar os valores y sabendo-se que $y = 6 \cdot x$ e $x \in \{0,1,2,3,4\}$? (0 alunos) 0%

x	$y = 6 \cdot x$	y
0		
1	$y = 6 \cdot 1$	6
2		
3		
4		

28- Siga o modelo e escreva uma leitura para as expressões abaixo. (0 alunos) 0%

a) $2 \cdot x$ Leitura: O dobro de x ou o dobro de um número.

b) $3 \cdot x$ Leitura: ______________________________________

c) $4 \cdot x$ Leitura: ______________________________________

d) $5 \cdot x$ Leitura: ______________________________________

e) $6 \cdot x$ Leitura: ______________________________________

29- Prove que $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$ usando a definição de multiplicação. (5 alunos) 18%

____
____
____

30- Escreva o enunciado da *propriedade comutativa* da multiplicação? (4 alunos) 14%

____
____
____

31- Como podemos generalizar a *propriedade comutativa* da multiplicação de inteiros usando variáveis? (7 alunos) 25%

____
____
____

32- Como podemos visualizar a propriedade comutativa da multiplicação pela tabela das tabuadas da multiplicação do exercício 22? (20 alunos) 71%

____
____
____

33- Complete o quadro abaixo.

(7 alunos) 25% (20 alunos) 71%

$0 \cdot 1 =$ ____ $1 \cdot 1 =$ ____ $2 \cdot 1 =$ ____ $3 \cdot 1 =$ ____ $4 \cdot 1 =$ ____ $5 \cdot 1 =$ ___ $x \cdot 1 =$ ____, onde $x \in \mathbb{N}$.	Escreva o enunciado da propriedade do elemento neutro da multiplicação? ______________________________ _________________________________ _________________________________ _________________________________ _________________________________ _________________________________

34- Use a calculadora e verifique qual é o valor da expressão: (8 alunos) 29%

a)$3 \cdot (4+5)$ b) $3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$ c) $3 \cdot 4 + 5$

35- Verifique a igualdade $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ para $a \in \{0,1,2,3\}$, e considere $b \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{N}$. (10 alunos) 36%

a) $\boldsymbol{a = 0}$ ==> $0 \cdot (b+c) = 0 = 0 \cdot b + 0 \cdot c$

b) $\boldsymbol{a = 1}$ ==>

c) $\boldsymbol{a = 2}$ ==> $2 \cdot (b+c) = (b+c) + (b+c) = b + b + c + c = 2b + 2c$

d) $\boldsymbol{a = 3}$ ==>

36- Questão de Desafio. Mostrar que dados dois números inteiros x e y, onde $x = y$, tem-se que $x + y$ é um número par.

ANEXO B: Códigos da BNCC relacionados as atividades desse TCC

Unidade Temática da BNCC: Números

Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.

(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.

(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais. Divisão euclidiana.

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

Aproximação de números para múltiplos de potências de 10.

(EF06MA12) Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.

MÚLTIPLOS E DIVISORES

- Fluxograma para determinar a paridade de um número natural.

(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).

- Múltiplos e divisores de um número natural

(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1 000.

- números primos e compostos.

(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

NÚMEROS INTEIROS

Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações.

(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

FRAÇÕES

Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.

(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros

e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade

e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

Operações com números racionais

(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.

Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que tem a mesma estrutura pode ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas as ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes dela ou três partes de outra grandeza.

Números racionais na representação fracionaria e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.
(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.
(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Unidade Temática da BNCC: Álgebra

IGUALDADES E DESIGUALDADES

Propriedades das igualdades
(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
Linguagem algébrica: variável e incógnita.
(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA14) Classificar sequencias em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.
(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.
(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

Equações polinomiais do 1° grau.
(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1°grau, redutíveis a forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Unidade Temática da BNCC: Grandezas e medidas
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.
(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Problemas envolvendo medidas de diversas grandezas.

(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica e aproximada.

Unidade Temática da BNCC: Números

Dízimas periódicas: fração geratriz

(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Unidade Temática da BNCC: Álgebra

Sequências recursivas e não recursivas.

(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Valor numérico de expressões algébricas

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Unidade Temática da BNCC: Álgebra

Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

ANEXO C: Tabuadas da adição, subtração e multiplicação.

+		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

–		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
	1	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
	2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
	3	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	4	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
	5	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
	6	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
	7	7	6	5	4	2	2	1	0	-1	-2	-3
	8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
	10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

×		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
	7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
	8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
	9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
	10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

PRODUTO EDUCACIONAL

A Calculadora como Recurso Tecnológico Educativo para o Fortalecimento e Consolidação do Pensamento Aritmético

Discente: Pedro Henrique Alves Justino dos Santos

Orientadora: Prof[a.] Dr[a.] Rosa García Márquez

Rio de Janeiro
2025

RESUMO

Este produto educacional apresenta um conjunto de dez atividades pedagógicas cuidadosamente elaboradas, voltadas para alunos do Ensino Fundamental II e do 1º ano do Ensino Médio, com foco na revisão de números inteiros, racionais e suas propriedades. O principal objetivo é apoiar os estudantes na consolidação das operações elementares e suas propriedades, combinando abordagens tradicionais com o uso da calculadora, além de revisar cálculos, fundamentos axiomáticos, e explorar limitações e possíveis erros associados a essa tecnologia. A proposta didática promove o aprendizado de conceitos matemáticos essenciais por meio de exercícios práticos, problemas contextualizados e a calculadora como ferramenta complementar. Apesar da percepção comum de que o uso da calculadora é intuitivo, observa-se que muitos estudantes enfrentam dificuldades tanto no manuseio adequado quanto na interpretação dos resultados, frequentemente devido a lacunas nos conceitos básicos, agravadas, sobretudo, durante a pandemia.

Palavras-Chave: Ferramentas tecnológicas no Ensino. Operações aritméticas elementares. Limitações da calculadora. Números racionais.

SUMÁRIO

APÊNDICE A: PRODUTO EDUCACIONAL – INTRODUÇÃO

Muitos alunos do Ensino Básico enfrentam dificuldades com operações aritméticas básicas, o que compromete sua compreensão de conteúdos mais avançados. Segundo Carvalho *et al*. (2004), essas dificuldades estão frequentemente relacionadas a falhas na aprendizagem inicial e à ausência de estratégias pedagógicas adequadas.

Durante séculos, esses conteúdos foram ensinados nas escolas para capacitar os indivíduos a resolverem problemas do dia a dia. Quem poderia imaginar que o surgimento de calculadoras capazes de realizar cálculos complexos em frações de segundo tornaria possível que uma pessoa sem escolaridade realizasse cálculos ensinados durante anos no ensino primário? Por volta dos anos de 1970, atendentes brasileiros de uma loja de vestuário, por exemplo, faziam os cálculos mentalmente ou rapidamente escrevendo-os em um pedaço de papel. As calculadoras portáteis estavam surgindo no mercado, mas eram muito caras. Era necessário memorizar tabuadas e dominar os algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão – uma aptidão necessária para vender e para comprar algo sem ser enganado por pessoas mal-intencionadas. Atualmente, o uso da calculadora eletrônica tornou-se uma prática cotidiana, especialmente entre profissionais do comércio, como os vendedores. Esse recurso tecnológico é amplamente utilizado para a realização de cálculos básicos, contribuindo significativamente para a agilidade no atendimento ao cliente e para o aumento da produtividade no ambiente de trabalho.

A introdução dessa máquina no cotidiano comercial representou uma verdadeira revolução, ao permitir maior eficiência nos processos operacionais e ao reduzir consideravelmente o tempo necessário para executar tarefas numéricas. Além disso, a eficácia do uso da calculadora eletrônica está na precisão dos resultados obtidos, minimizando erros e proporcionando maior confiabilidade nas transações. Sem dúvida, trata-se de uma ferramenta que transformou a dinâmica do trabalho comercial, otimizando recursos e elevando a qualidade dos serviços prestados.

Este caderno de atividades tem como propósito apresentar uma proposta pedagógica composta por 10 lições voltadas à revisão de conteúdo do Ensino Fundamental II, especialmente elaboradas para alunos do 1º ano do Ensino Médio. A temática abordada está alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), inserindo-se no eixo de Números e Álgebra — com ênfase no estudo do conjunto dos números racionais.

O objetivo central é reforçar os conhecimentos essenciais que servirão de base para o prosseguimento dos estudos no Ensino Médio, promovendo a consolidação do pensamento aritmético, uma etapa em que muitos alunos ainda apresentam lacunas, intensificadas pelo período da pandemia.

Para tornar a revisão mais eficiente e próxima da realidade dos estudantes, as atividades propõem o uso da calculadora como ferramenta pedagógica. Além de otimizar o tempo, essa prática busca aproximar os alunos do uso consciente e produtivo da tecnologia no processo de aprendizagem matemática.

Ao final das 10 atividades, espera-se que os estudantes estejam mais seguros em relação aos conteúdos revistos, com os pré-requisitos necessários para avançar nos estudos da matemática de forma mais sólida e autônoma.

O trabalho enfatiza a importância da compreensão das definições e propriedades das operações, promovendo uma introdução gradual às suas generalizações. Essa abordagem visa proporcionar ao aluno subsídios para a compreensão de algumas demonstrações matemáticas — aspecto ainda pouco explorado no Ensino Básico. Pretende-se, ainda, estabelecer uma relação entre as atividades desenvolvidas e o entendimento do funcionamento das teclas de uma calculadora, favorecendo o uso consciente e pedagógico desse recurso tecnológico, conforme defendem autores como Lorenzato (2006), que destaca o valor didático dos instrumentos tecnológicos no processo de aprendizagem matemática.

Este produto educacional está estruturado em dez atividades. A primeira atividade apresenta um vídeo sobre a história das calculadoras eletrônicas, exibindo diferentes modelos, no qual cada aluno deve identificar sua calculadora ou smartphone. Na segunda atividade, revisam-se os conjuntos numéricos dos números naturais e inteiros. Na terceira atividade, exploram-se as operações de adição, subtração e multiplicação. Na quarta atividade, aborda-se a divisão entre números inteiros. Na quinta, os inteiros negativos são incorporados nas explicações teóricas e são introduzidas as regras operatórias adaptadas aos inteiros negativos, que nas atividades de 1 a 4, não foram usados como operandos, apareceram apenas como resultados de certas operações. Na 6ª atividade o conjunto dos números racionais é definido e estruturado de tal forma que o aluno possa compreender as operações e suas propriedades. Nesse momento, é enfatizada a visão geométrica da representação dos números na reta. Da atividade 6 em diante, utiliza-se uma abordagem voltada as aplicações dos números racionais em diversos contextos, e aborda-se conceitos como aproximação de números, o cálculo do erro absoluto e relativo, uma ideia intuitiva que entre dois números inteiros consecutivos há infinitos números, uma ideia de limite da função do inverso de um número, quando este se aproxima de zero. Relaciona-se também ao inverso de um número inteiro à técnicas de resolução de equações. Por fim, na atividade 10, investiga-se como determinar se um número obtido pela divisão não exata de inteiros é um número decimal exato ou dízima periódica. As investigações utilizam o aplicativo de calculadora nativa de um smartphone e o Geogebra. Gera-se também uma reflexão sobre o uso da inteligência artificial e que ela não é totalmente confiável na resolução de problemas matemáticos. Como máquina de cálculos, a IA possui também limitações. Tal reflexão visa despertar o aluno para estudar Matemática, que seu estudo é mais do que realizar cálculos no papel, mas sim saber o porque dos resultados desses cálculos estarem corretos ou não para resolver os seus problemas.

APÊNDICE B: PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADE 1

Conhecendo as calculadoras eletrônicas

A atividade visa explorar os tipos de calculadoras eletrônicas, suas funcionalidades e aplicações nos contextos educacional e comercial, promovendo reflexão sobre seu uso consciente. Busca estimular discussão sobre prós e contras do uso de calculadoras no ensino de Matemática, incentivando o pensamento reflexivo e a argumentação. Destaca que o uso de calculadoras amplia o aprendizado se integrado a uma prática pedagógica intencional.

Questionamentos

- Por que é importante dominar o uso da calculadora?
- O que é uma calculadora e como ela funciona?
- Você sabe quais são as diferenças entre os modelos de calculadora?
- Você costuma consultar as especificações técnicas de uma calculadora para escolhê-la de acordo com as suas necessidades.

Documentário: A revolução tecnológica do Japão – Guerra das calculadoras. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=22hu1bEsDGw&t=22s&ab_channel=DantasCl%C3%ADstenes

Exemplos de Calculadoras Portáteis:

Figura 29: Calculadoras Portáteis: (a) Classe CLA-402. (b) Casio Fx-991LAX. (c) HP 50G. (d) HP12C

Fonte: Fotografias do autor, 2025.

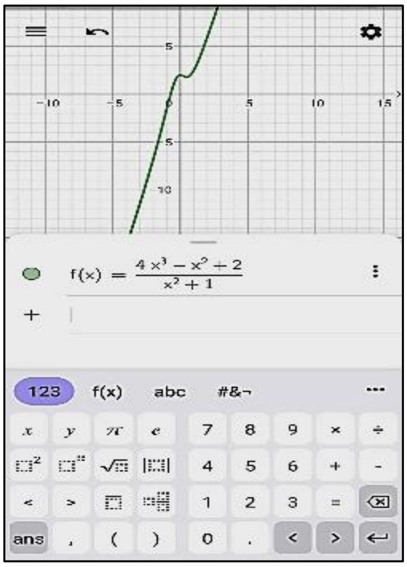
1.1. As calculadoras eletrônicas em aplicativos para smartphones:

Com o avanço da tecnologia digital, os smartphones passaram a incorporar diversas funcionalidades que antes estavam restritas a dispositivos eletrônicos específicos (Drubscky, 2025). Um exemplo marcante é a presença de **aplicativos de calculadora**, que transformaram o celular em uma ferramenta multifuncional para realização de cálculos matemáticos, desde os mais simples até os mais complexos.

Os sistemas operacionais móveis, como o **Android**, já vêm com um aplicativo nativo de calculadora, conhecido como **calculadora padrão**. Este aplicativo realiza operações aritméticas básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), mas também oferece recursos adicionais, como cálculo de porcentagem, raiz quadrada, uso de parênteses, operações com frações e funções trigonométricas em modo científico. Em muitos aparelhos, o usuário pode alternar entre o modo simples e o modo científico apenas ao girar a tela do dispositivo.

Além da calculadora padrão, há aplicativos educacionais mais sofisticados, como a **Calculadora Gráfica GeoGebra**, amplamente utilizada em contextos escolares e acadêmicos. Esta ferramenta gratuita permite representar graficamente funções, resolver equações, manipular variáveis e visualizar relações algébricas e geométricas de forma dinâmica e interativa. A GeoGebra é particularmente útil para o ensino e aprendizagem de Matemática, pois integra cálculo simbólico (CAS), gráficos, geometria e estatística em um único ambiente visual.

Figura 30: Calculadora Gráfica Geogebra



Fonte: O autor, 2025

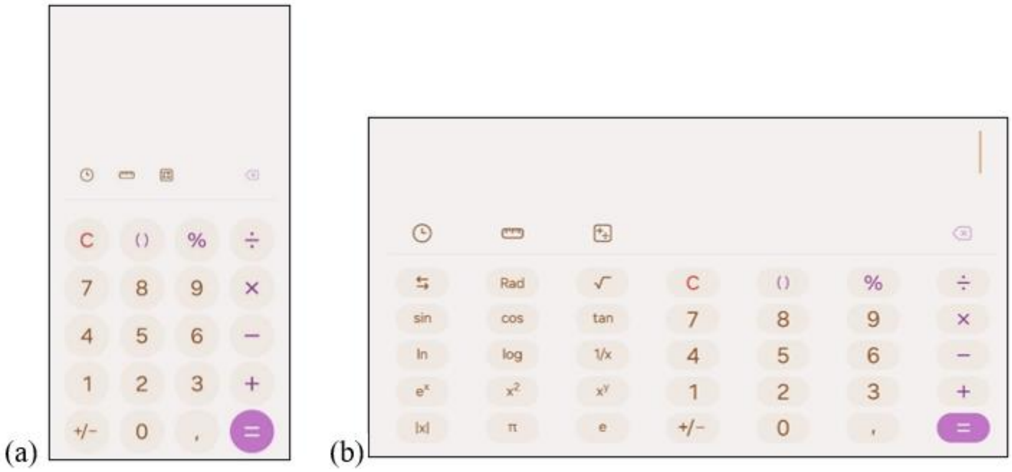
Quando comparadas às **calculadoras portáteis tradicionais**, como a Sharp EL-531, os aplicativos de smartphone oferecem maior flexibilidade, interface mais amigável e recursos visuais mais avançados. No entanto, as calculadoras portáteis ainda mantêm sua relevância, especialmente em avaliações escolares ou concursos que restringem o uso de celulares. Além disso, sua simplicidade e foco exclusivo em cálculos reduzem distrações e garantem maior autonomia de uso em ambientes formais.

Dessa forma, o uso de aplicativos de calculadora em smartphones amplia as possibilidades de ensino, aprendizagem e resolução de problemas matemáticos no cotidiano, sem substituir totalmente os dispositivos portáteis, mas funcionando como uma alternativa poderosa e acessível.

Calculadoras básicas dos smartphones

- Os smartphones possuem uma calculadora científica nativa no seu sistema operacional.
- Elas são gratuitas não precisando pagar por um aplicativo.
- Ao saber trabalhar com elas, você entenderá o funcionamento de outras calculadoras eletrônicas portáteis ou de outros aplicativos.
- Neste caderno as atividades propostas serão baseadas no modelo de calculadora padrão do smartphone Samsung S22.

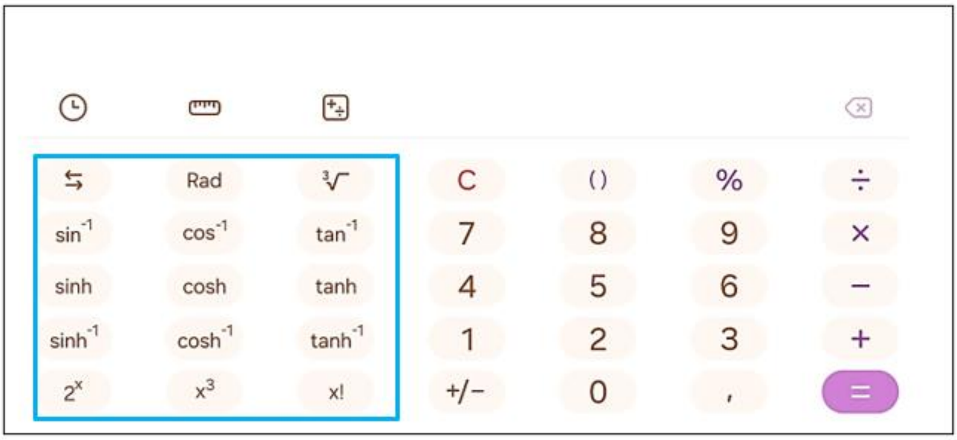
Figura 31: Calculadora padrão de um smartphone. (a) Básica (b) Científica.



Fonte: O Autor, 2025

A Tecla $\boxed{\leftrightarrows}$ **:** Na calculadora de um smartphone Samsung, ela serve para expandir as opções da calculadora científica, como se observe a figura abaixo. Há as teclas das funções inversas das funções trigonométricas sen, cos e tg, as funções hiperbólicas e as suas inversas, a tecla de potências com base 2, a tecla para o cálculo de potências com expoente 3 (o cubo de um número) e a tecla do fatorial de um número. Na calculadora do smartphone Iphone, a tecla que possui essa mesma função é a tecla $\boxed{2^{nd}}$ e, na calculadora nativa do smartphone da Motorola, a tecla é $\boxed{INV}$. Na figura a seguir, está ilustrada em azul as teclas adicionais acionadas pela tecla $\boxed{\leftrightarrows}$ numa calculadora nativa de um smartphone da Samsung.

Figura 32: Calculadora Científica-acionamento da tecla $\boxed{\leftrightarrows}$



Fonte: O autor, 2025

Exercícios Propostos

1) Qual é o número máximo de dígitos que pode aparecer no visor da sua calculadora? ____

2) Quais são as funções das teclas abaixo? Caso a sua calculadora não tenha as teclas com as simbologias abaixo, que são encontradas no smartphone Samsung, procure no modelo da sua calculadora, as teclas que permitem conversão de unidades de medidas e a tecla de exibição do histórico dos cálculos efetuados, o qual está relacionado a capacidade da calculadora de guardar dados na sua memória.

a) A tecla ‘C’: ____
____

b) A tecla ‘Régua’: ____
____

c) A tecla ‘Relógio’: ____
____

d) A tecla ‘Vírgula’: ____
____

Curiosidade: Na notação de números decimais, é comum utilizar a vírgula como símbolo separador entre a parte inteira e a parte decimal de um número que está na sua representação decimal. No entanto, em alguns países, como os Estados Unidos, usa-se o ponto para essa mesma função. Por exemplo, nos EUA, mil dólares são representados como $1,000.00; já no Brasil, mil reais são escritos como R$ 1.000,00. Portanto, ao observar um ponto na sua calculadora, saiba que a configuração do aparelho pode estar interpretando esse ponto como uma vírgula decimal. Nesse contexto de representação de números na forma decimal, é necessário ficar atento que os números inteiros possuem zeros na parte decimal. Os números que possuem parte decimal com algum dígito diferente de zero, são aqueles que possuem parte inteira e a parte decimal corresponde a frações do inteiro.

3) Digite o número decimal que tem 1 na sua parte inteira e números 2 na sua parte decimal. Digite o número 2 após a vírgula até onde a sua calculadora permitir. Escreva aqui quantos números "2" você conseguiu colocar na parte decimal desse número. ____________________
____

4) Digite os valores $R\$\ 1.237{,}50 + R\$\ 2.954{,}00$ na calculadora do seu smartphone. Qual é o resultado dessa adição? ______________________________________

5) Se tirarmos os zeros finais das partes decimais dos números acima, teremos a expressão $1.237{,}5 + 2.954$. Você acha que o resultado será o mesmo da adição do exercício anterior? Justifique a sua resposta. ______________________________________.

6) Digite os números abaixo na calculadora do seu smartphone, tecle "=" e anote os resultados encontrados no visor da calculadora. A calculadora retirou zero de algum desses números? Crie uma argumentação para o seu professor explicando se os valores exibidos no visor da calculadora são iguais aos números digitados.

   b) 15,000   b) 15,200   c) 15,20   d) 15,02   e) 15,020   f) 15,002

APÊNDICE C: PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADE 2

Nesta atividade será realizada uma breve revisão dos conjuntos numéricos dos números naturais e inteiros, que são subconjuntos dos números racionais. Dentre esses tópicos são abordados os seguintes tópicos: o conceito de variável, os símbolos de pertinência de conjuntos, conceito de número positivo, negativo e zero. Os símbolos de igualdade e desigualdade utilizados para comparar dois números.

2.1. Primeiro Conjunto Numérico: Números naturais

Símbolo do Conjunto	Nome do Conjunto	Representação	Observações
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais	$\{0,1,2,3,...\}$	Seus primeiros[12] elementos são: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. Estes dígitos são a base das teclas nas calculadoras para inserir outros números.

A expressão "número inteiro" nos remete, à primeira vista, à ideia de números que não possuem parte decimal; na verdade existe parte decimal e seus dígitos são todos zeros. Na

[12] O conjunto dos números naturais pode ser definido começando por zero ou pelo um. As atividades desta dissertação estão fundamentadas no conjunto dos números naturais começando pelo zero. Esta forma de definição é usual nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio utilizadas atualmente nos colégios brasileiros.

Matemática existe um conjunto numérico chamado de conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), que inclui o zero, números inteiros positivos e os números inteiros negativos.

2.2. O Segundo Conjunto Numérico: Números Inteiros

Símbolo do Conjunto	Nome do Conjunto	Representação	Observações
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números **Inteiros**	$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$	Nesse conjunto aparecem os números inteiros positivos e negativos.

Neste trabalho, salvo indicação em contrário, o termo "número inteiro" refere-se a um número pertencente ao conjunto $\mathbb{Z}$.

Subconjuntos do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$

Símbolo do Conjunto	Nome do Conjunto	Representação	Observações
$\mathbb{Z}^*$	Conjunto dos Números **Inteiros não nulos**	$\{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$	Nesse conjunto aparecem todos os números inteiros, exceto o zero.
$\mathbb{Z}_+^*$	Conjunto dos Números **Inteiros positivos**	$\{1, 2, 3, \ldots\}$	Nesse conjunto aparecem os números inteiros maiores do que zero.
$\mathbb{Z}_-^*$	Conjunto dos Números **Inteiros negativos**	$\{\ldots, -3, -2, -1\}$	Nesse conjunto aparecem os números inteiros menores do que zero.
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto dos Números Inteiros Não Negativos	$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	Nesse conjunto aparecem o zero e os números inteiros positivos.
$\mathbb{Z}_-$	Conjunto dos Números Inteiros Não Positivos	$\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$	Nesse conjunto aparecem o zero e os números inteiros negativos.

Exercícios Propostos

7) Responda:

a) Quais são os dez primeiros números naturais?
b) Apresente a sequência dos 10 primeiros números naturais
c) Liste a sequência dos 10 primeiros números naturais.
d) Enumere uma sequência de 10 números inteiros, começando do -4 e seguindo em ordem crescente.
e) Represente o conjunto dos números naturais usando a representação por enumeração.
f) Represente o conjunto dos números inteiros usando a representação por enumeração.
g) Qual é o símbolo do conjunto dos *números naturais*?
h) Qual é o símbolo do conjunto dos *números inteiros*?
i) Represente o conjunto dos *números naturais* usando a reta numérica.
j) Represente o conjunto dos *números inteiros* usando a reta numérica.

8) O número 5 é um *número natural e um número inteiro*. Sabemos que podemos representar esse fato simbolicamente usando o símbolo $\in$ (pertence à) e os símbolos de conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

k) 5 é um número inteiro Notação: ______________
l) 5 é um número natural Notação: ______________

9) Para representar um número natural ou inteiro, podemos usar uma letra do alfabeto, chamada **variável**, que simboliza um valor numérico. Para especificar que essa variável pertence a um conjunto, como os números naturais ($\mathbb{N}$) ou inteiros ($\mathbb{Z}$), usamos o símbolo de pertinência ($\in$). O valor exato da variável pode ser determinado por meio de equações, inequações ou contexto matemático.

c) x é um número inteiro Notação: ______________
d) x é um número natural Notação: ______________

Observação: Para dizermos que um número não pertence a um dado conjunto numérico, escrevemos ao lado desse número o símbolo " $\notin$ " (não pertence à) e o símbolo desse conjunto numérico.

10) Complete as lacunas abaixo usando as palavras: ‘negativo’, ‘positivo’ ou ‘zero’.

Considerando x como um *número inteiro* ($x \in \mathbb{Z}$) podemos afirmar que:
Ou x é um número _______________ ou x é um número __________________ ou x é o ____.

11) Analise as sentenças abaixo e, considerando $x \in \mathbb{N}$, determine um valor possível para x caso existir. Caso contrário, risque o campo "$x =$" e escreva na linha da resposta "não há números naturais que satisfaçam essa propriedade."

a) $x > 0$ Lê-se: x é maior do que zero. Exemplo: $x = 14$

b) $x = 0$ Lê-se: ____________________________ Exemplo: $x =$ ______

c) $x < 0$ Lê-se: _____________________________ Exemplo: $x =$ ______

12) Faça a leitura das sentenças abaixo e, considerando $y \in \mathbb{Z}$, obtenha um valor possível para y.

a) $y > 5$ Lê-se: ______________________________ Exemplo: $y =$ ______

b) $y = 5$ Lê-se: ______________________________ Exemplo: $y =$ ______

c) $y < 5$ Lê-se: ______________________________ Exemplo: $y =$ ______

13) Escreva se as sentenças são verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) (V) $5 > 0$

b) ( ) $5 = 0$

c) ( ) $5 < 0$

d) ( ) $5 \in \mathbb{N}$

e) ( ) $5 \notin \mathbb{Z}$

f) ( ) $-5 > 0$

g) ( ) $-5 = 0$

h) ( ) $-5 < 0$

i) ( ) $-5 \in \mathbb{N}$

j) ( ) $-5 \notin \mathbb{Z}$.

APÊNDICE D: PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADE 3

Operações com os Números Inteiros

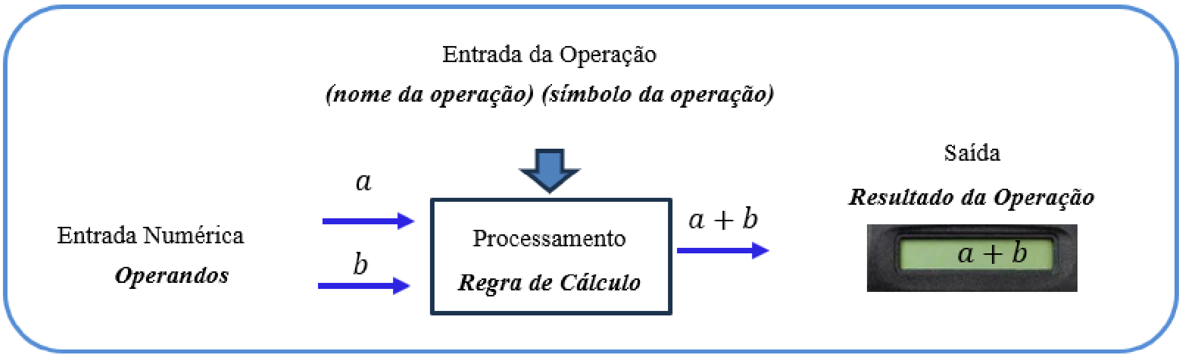
Nesta atividade serão apresentadas as definições formais dessas operações, bem como suas principais propriedades. Busca-se, neste primeiro momento, proporcionar ao aluno uma reflexão sobre os caminhos lógicos utilizados por programadores no desenvolvimento das funções básicas das calculadoras eletrônicas, por meio do estudo da teoria dos conjuntos numéricos que fundamenta o funcionamento das teclas operacionais. Nesse contexto, o aluno aprenderá mais sobre o uso das variáveis em expressões algébricas envolvendo as operações elementares: adição, subtração e multiplicação. Os operandos inteiros utilizados nos exercícios dessa atividade pertencem ao conjunto $\mathbb{Z}_+$. Quando os números inteiros negativos aparecerem nessa lição aparecerão nos resultados da operação de subtração. As operações com inteiros abrangendo os inteiros negativos como operandos será abordada na atividade 5 deste trabalho.

3.1. A calculadora como ferramenta de Ensino:

A calculadora é um dispositivo eletrônico desenvolvido para realizar cálculos matemáticos. Para isso, ela utiliza um chip eletrônico que contém uma programação específica capaz de executar essas operações, aliada a uma interface composta por teclado e visor. O teclado permite inserir números, operadores e funções, enquanto a tela exibe os resultados calculados pela calculadora, enquanto o visor exibe os resultados processados internamente pela calculadora. Para realizar, por exemplo, a adição de dois números, o usuário deve digitar o primeiro valor, pressionar a tecla correspondente à operação de adição, inserir o segundo valor e, por fim, pressionar a tecla “=” para visualizar o resultado no visor.

Cada tecla do teclado possui um símbolo padronizado que representa uma função específica. A escolha da operação desejada é feita por meio desse símbolo convencional.

Figura 33: Representação Esquemática do Processo de Calcular



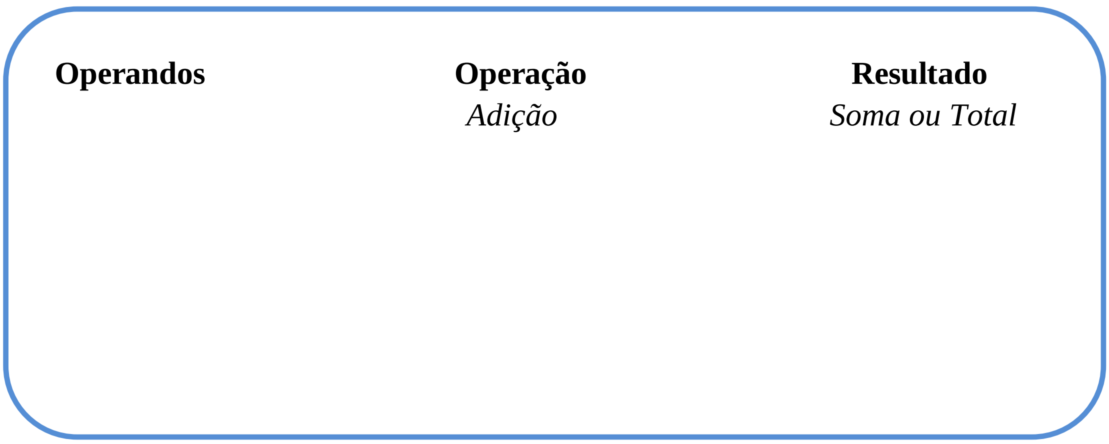
A caixa retangular (Fig. 11), chamada de bloco, representa uma operação matemática que associa números segundo regras definidas para gerar um resultado. Esse bloco corresponde ao processamento dos dados inseridos pelo usuário no teclado da calculadora.

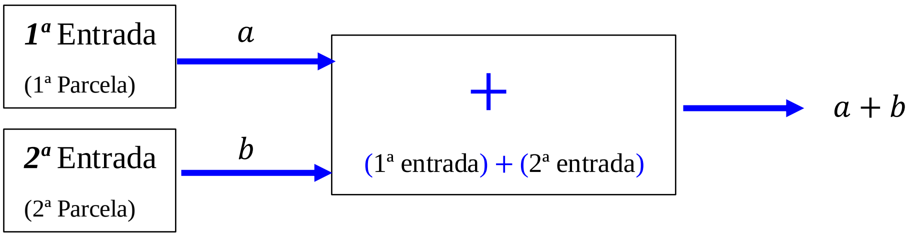
As calculadoras contêm um microprocessador realiza o processamento dos cálculos. Ele contém um algoritmo, ou seja, uma sequência finita de instruções que define a execução das operações. Esse algoritmo está implementado por meio de um código de programação, permitindo que os dados inseridos pelo usuário sejam interpretados e processados corretamente, gerando o resultado da operação desejada.

3.2. Adição

Na Fig. 13, é apresentado um diagrama de blocos da operação de adição, mostrando os termos na operação de adição.

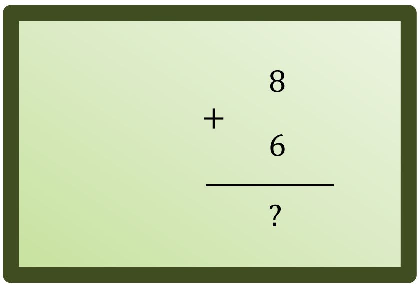
Figura 34: Diagrama de Blocos da operação de Adição



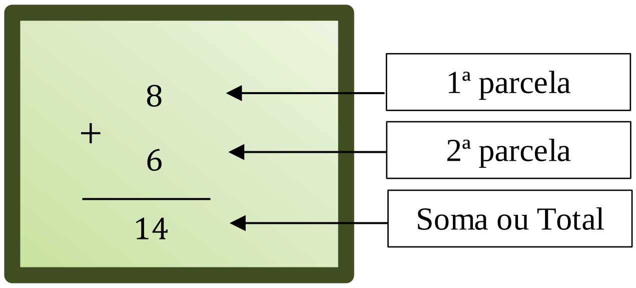


Exemplo: Represente e efetue a adição: 8 + 6.

1º Passo: Armar



2º Passo: Efetuar



❖As leituras da expressão: **8 + 6**. Leitura principal: "Oito mais seis". Outras formas possíveis: "a soma de oito com seis", "o total de oito e seis" e "oito somado com seis".

Observações:

1) Os termos de uma operação matemática referem-se aos nomes dados aos números e resultados em diferentes operações.

2) No diagrama acima foram apresentados dois valores na entrada, mas poder-se-ia 3 ou mais números sendo somados.

14) Calcule o valor de 5 + ■ substituindo o valor de ■ por 0,1,2,3,4,5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

FORMA 1 FORMA 2

$5 + \blacksquare$

$5+\boxed{0}=5$	$5+\boxed{0}=5$
$5+\boxed{1}=6$	$5+\boxed{1}=(5)+1$
$5+\boxed{2}=6+1=7$	$5+\boxed{2}=(5+1)+1$
$5+\square=$ ______	$5+\square=$ ______
$5+\square=$ ______	$5+\square=$ ______
$5+\square=$ ______	$5+\square=$ ______
$5+\square=$ ______	$5+\square=$ ______

15) Calcule $5+8$ com o auxílio de uma calculadora usando apenas as teclas ‘5’, ‘+’ e ‘1’?

Observação: Incrementar um número significa aumentá-lo em uma unidade, ou seja, *somar 1* ao valor inicial. Essa ideia de incrementar é extremamente importante na programação da tecla da adição nas calculadoras.

$$5+3=\Big(\big((5)+1\big)+1\Big)+1$$

16) Complete a tabela[13] considerando o cálculo $(Entrada\ 1)+(Entrada\ 2)$.

Tabela 1: Tabela da Operação de Adição

[13] Para aprofundar o estudo sobre a organização das tabuadas da adição, subtração e multiplicação em tabelas, recomenda-se a obra *Álgebra Moderna* (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p.124-131), na qual os autores apresentam o conceito de “tábua de uma operação” e demonstram como se podem visualizar propriedades operatórias, tais como a associatividade, a comutatividade, a presença do elemento neutro, bem como a identificação de elementos simetrizáveis e regulares.

+		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**					4						
	1					5						
	2					6						
	3					7						
	4					8						
	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	6					10						
	7					11						
	8					12						
	9					13						
	10					14						

17) Mostrar que dados dois números inteiros quaisquer x e y, considerando que $x = y$, logo $x + y$ é um número par.

Verificando as Propriedades da Adição

Sejam a, b e c números inteiros quaisquer, valem as seguintes propriedades.

- Propriedade Comutativa da Adição: $a + b = b + a$
- Propriedade do Elemento Neutro Aditivo: $a + 0 = a$
- Propriedade Associativa da Adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$

18) Identifique quais são as propriedades da adição envolvidas abaixo e verifique a veracidade dessas igualdades.

a) $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

b) $2 + 3 = 3 + 2$

19) Complete a tabela abaixo.

a	$a + 0$	Resultado
0		
1	$1 + 0$	1
2		
3		
k		

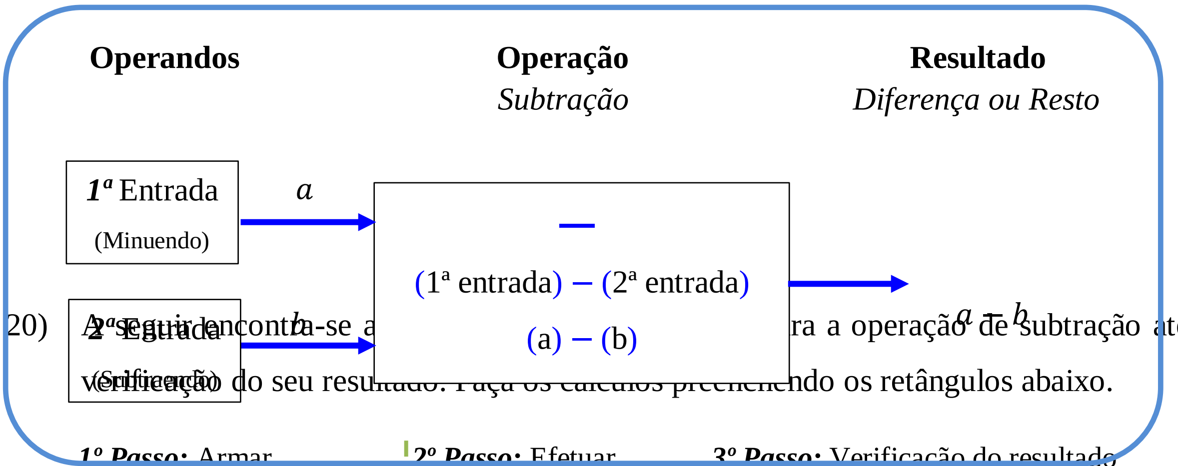
Comentário: Expressão Algébrica e Expressão Numérica

> $a + 0$ é uma **expressão algébrica**, pois existe uma variável. Ao substituirmos a variável a pelo seu valor numérico correspondente; neste exemplo, $a = 1$, obtivemos uma **expressão numérica** (sem variáveis), que é $1 + 0$. Como não há mais "letras" podemos usar as operações básicas e calcular o valor final (resultado dessa expressão numérica).

3.3. Subtração:

Os termos na operação de subtração são explicados na Fig. 10.

Figura 35: Diagrama de Blocos da operação de Subtração

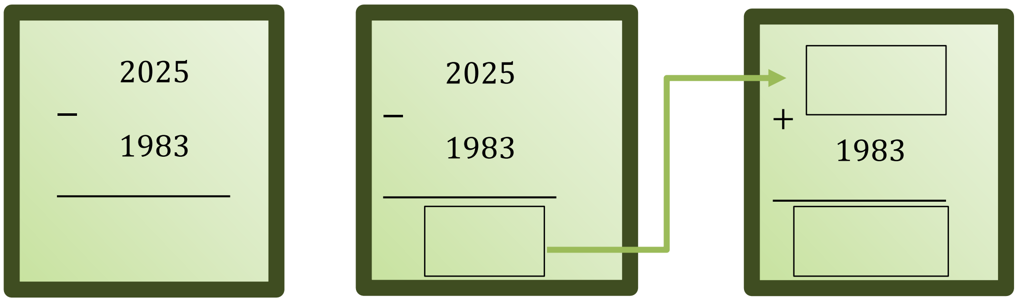


20) A seguir encontra-se a ... ra a operação de subtração até a verificação do seu resultado. Faça os cálculos preenchendo os retângulos abaixo.

1º Passo: Armar

2º Passo: Efetuar

3º Passo: Verificação do resultado



$2025 - 1983 = 42$ Lê-se: A *diferença* entre 2025 e 1983 é igual a 42.

- As leituras da expressão: $\mathbf{8-3}$. Leitura principal: “oito menos três”. Outras formas possíveis: “a diferença entre oito e três”, “subtração de três de oito” e “oito subtraído de três”.

Comentário: Sua idade no ano de 2025.

> Uma pessoa que nasceu em 1983 fará 42 anos em 2025. A relação entre a idade de uma pessoa em determinado ano a partir da sua data de nascimento é dada pela fórmula:
>
> $$(Ano\ atual) - (Data\ de\ nascimento)$$

21) Calcule o valor de $5 - \blacksquare$ substituindo o valor de $\blacksquare$ por 0, 1 ,2, 3, 4, 5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

$5 - \blacksquare$

	FORMA 1	FORMA 2
	$5 - \boxed{0} = 5$	$5 - \boxed{0} = 5$
	$5 - \boxed{1} = (5) - 1 = 4$	$5 - \boxed{1} = (5) - 1$
	$5 - \boxed{2} = (4) - 1 = 3 = 3$	$5 - \boxed{2} = (5 - 1) - 1$
$5 - \blacksquare$	$5 - \square = $ ______	$5 - \square = $ ______
	$5 - \square = $ ______	$5 - \square = $ ______
	$5 - \square = $ ______	$5 - \square = $ ______
	$5 - \square = $ ______	$5 - \square = $ ______

22) Complete a tabela considerando o cálculo $(Entrada\ 1) - (Entrada\ 2)$.

Tabela 2: Tabela da Operação de Subtração

−		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**					-4						
	1					-3						
	2					-2						
	3					-1						
	4					0						
	5	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
	6					2						
	7					2						
	8					4						
	9					5						
	10					6						

23) Calcule $8 - 5$ com o auxílio de uma calculadora usando apenas as teclas ‘8’, ‘−’ e ‘1’?

____

Observação: Decrementar um número significa diminui-lo em uma unidade, ou seja, *subtrair 1* do valor inicial. Essa ideia de decrementar é extremamente importante na programação da tecla de subtração nas calculadoras.

$$5 - 3 = \big(\big((5) - 1\big) - 1\big) - 1$$

A Propriedade do Elemento Neutro da Subtração

Seja a um número inteiro qualquer, vale a propriedade.

$$a - 0 = a$$

24) Complete as lacunas a partir das palavras abaixo:

MENOR – MAIOR – ZERO – POSITIVO -

a) Um número inteiro *positivo* é _______________ do que zero.

b) Um número inteiro *negativo* é ______________ do que zero.

c) O número inteiro ___________não é um número positivo e nem negativo.

d) Se tirarmos uma *quantidade* de uma outra *maior* do que ela, o resultado será um número inteiro ________________.

e) Se tirarmos uma *quantidade* de uma outra *menor* do que ela, o resultado será um número inteiro ________________.

f) Se tirarmos uma *quantidade de* uma outra *igual a* ela, o resultado será o número inteiro ________________.

25) Considere $a = 4$, $b = 3$ e $c = 1$ nas igualdades abaixo. Indique quais delas são verdadeiras ou falsas para esses valores das variáveis fornecidos.

a) ( ) $(a - b) - c = a - (b - c)$

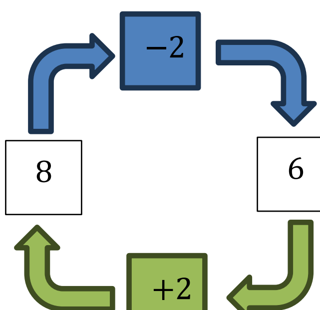
b) ( ) $a - b = b - a$

c) ( ) $a - b = -(b - a)$

Comentário: O fato de que a substituição de determinados valores para as variáveis a, b e c resulte em uma igualdade verdadeira não implica que essa relação seja válida em todos os casos. Para afirmar sua validade geral, é necessária uma demonstração matemática rigorosa. Por outro lado, se for possível encontrar ao menos um conjunto de valores numéricos para a, b e c que torne a igualdade falsa, esse único exemplo já é suficiente para provar que a igualdade não é verdadeira de forma geral. Tais exemplos, nos quais se escolhem valores específicos das variáveis a fim de evidenciar a falsidade de uma proposição, recebem o nome de contraexemplos.

Subtrair **2 unidades**

3.4. Operações Inversas: Adição e Subtração



Enunciado: Sejam *a*, *b*, e *c* números inteiros quaisquer, então

$$a - \boldsymbol{b} = c \quad \Leftrightarrow \quad c + \boldsymbol{b} = a$$

Exemplo: $\boxed{8} - \boxed{2} = \boxed{6} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{6} + \boxed{2} = \boxed{8}$

Adicionar **2 unidades**

26) Uma pessoa tem 8 moedas de um real num cofre. Ela retira duas moedas, logo ficam ____ moedas no cofre. No dia seguinte, ela ganha e moedas e adiciona nesse cofre, portanto ela terá ________ moedas no cofre.

27) Complete os espaços vazios:

Dica: Utilize o raciocínio da operação inversa quando tiver dificuldade de encontrar o número desconhecido.

a) $\boxed{10} - \boxed{6} = \boxed{}$ c) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{10}$ e) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{-10}$

b) $\boxed{10} - \boxed{} = \boxed{6}$ d) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{0}$ f) $\boxed{6} - \boxed{} = \boxed{10}$

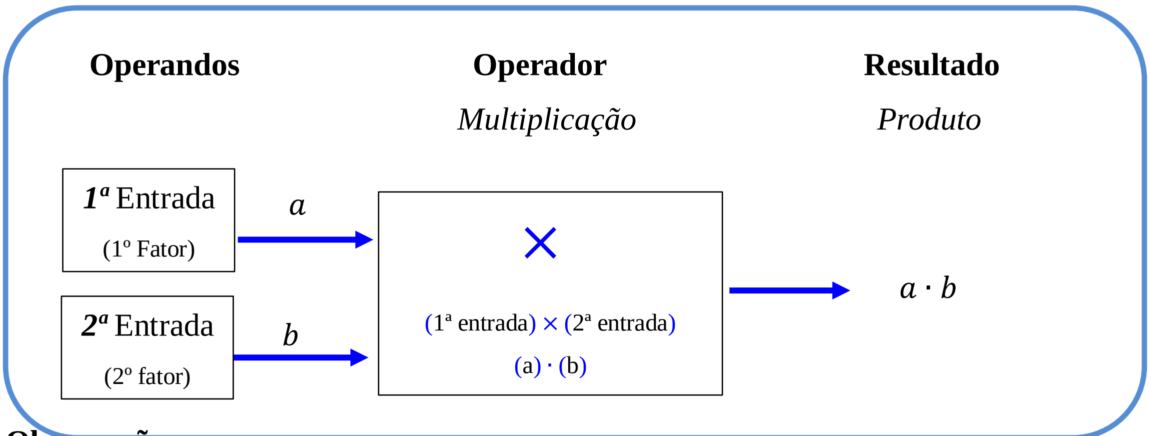
28) Complete os quadrados com os valores corretos, considere que cada bloco representa a operação que deve ser realizada com o número que está na entrada do bloco.

a) $8 \longrightarrow \boxed{+1} \longrightarrow \boxed{+1} \longrightarrow \boxed{?}$ b) $8 \longrightarrow \boxed{-1} \longrightarrow \boxed{+1} \longrightarrow \boxed{?}$

3.5. A Multiplicação:

Na Fig. 14 é apresentado um diagrama de blocos da operação de multiplicação e os termos envolvidos.

Figura 36: Diagrama de Blocos da operação de Multiplicação



Observações:

1) No diagrama acima foram apresentados dois valores na entrada, mas poder-se-ia ter 3 ou mais números sendo multiplicados.

2) Além do símbolo "$\times$ ", a multiplicação pode ser representada pelo símbolo de ponto " $\cdot$ ".

3) É muito comum nas expressões com variáveis ser usado o símbolo "$\cdot$ " para que não se confunda o símbolo " $\times$ " com a variável x.

Exemplo: Realize o produto de: 3×4.

1º Passo: Armar a operação

$$\begin{array}{cr} & 3 \\ \times & 4 \\ \hline & ? \end{array}$$

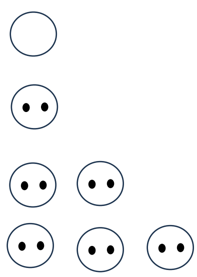
2º Passo: Efetuar a operação

$$\begin{array}{crl} & 3 & \leftarrow \text{1º Fator} \\ \times & 4 & \leftarrow \text{2º Fator} \\ \hline & 12 & \leftarrow \text{Produto} \end{array}$$

❖ As leituras da expressão: $\mathbf{3} \times \mathbf{4}$. Leitura principal: "três vezes quatro". Outras formas possíveis: "três multiplicado por quatro" e "o produto de três por quatro".

29) Calcule o valor de $2 \cdot ■$ substituindo o valor de ■ por 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

$2 \cdot ■$

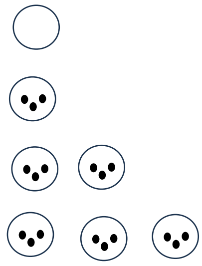
FORMA 1	FORMA 2	FORMA 3
$2 \cdot \boxed{0} = 0$	$2 \cdot \boxed{0} = 0$	
$2 \cdot \boxed{1} = 2$	$2 \cdot \boxed{1} = 2$	
$2 \cdot \boxed{2} = (2) + 2 = 4$	$2 \cdot \boxed{2} = (2) + 2$	
$2 \cdot \boxed{3} = (4) + 2 = 6$	$2 \cdot \boxed{3} = (2 + 2) + 2$	
$2 \cdot \square =$ ______	$2 \cdot \square =$ ______	
$2 \cdot \square =$ ______	$2 \cdot \square =$ ______	
$2 \cdot \boxed{6} =$ ______	$2 \cdot \square =$ ______	

O Pensamento Matemático: Somar parcelas iguais

A soma de parcelas iguais pode ser representada através da operação de multiplicação entre dois números, o *primeiro fator* é o número que se repete e o *segundo fator* indica quantas vezes esse número se repete.

30) Calcule o valor de $3 \cdot \blacksquare$ substituindo o valor de $\blacksquare$ por 0,1,2,3,4,5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões.

$3 \cdot \blacksquare$

	FORMA 1	FORMA 2	FORMA 3
	$3 \cdot \boxed{0} = 0$	$3 \cdot \boxed{0} = 0$	
	$3 \cdot \boxed{1} = 3$	$3 \cdot \boxed{1} = 3$	
	$3 \cdot \boxed{2} = (3) + 3 = 6$	$3 \cdot \boxed{2} = (3) + 3$	
	$3 \cdot \boxed{3} = (6) + 3 = 9$	$3 \cdot \boxed{3}$	
	$3 \cdot \square =$ ______	$3 \cdot \square =$ ______	
	$3 \cdot \square =$ ______	$3 \cdot \square =$ ______	
	$3 \cdot \square =$ ______	$3 \cdot \square =$ ______	

- **Tabuada Pictórica**. O número correspondente ao *segundo fator* indicará a quantidade de círculos. O *primeiro fator* indicará quantos elementos teremos em cada um desses círculos. Macete: $2 \cdot 3$ (2 pontos 3), (“2 pontos em 3 círculos”).

31) Como se realiza a operação $2 \cdot 8$ na calculadora usando apenas as teclas ‘2’ e ‘+’ ?

____

Observações:

1) Quando temos uma certa quantidade de pessoas e as organizamos em grupos com o mesmo número de integrantes, isso facilita a contagem total. Por exemplo, um professor de Educação Física separou seus alunos em grupos de 4 pessoas. Para saber a quantidade total de alunos, basta que ele conheça o número de grupos e a quantidade de pessoas em cada um. Se, por outro lado, houvesse 8 grupos com 4 alunos e 1 grupo com apenas 3, o raciocínio da multiplicação (número de grupos × número de pessoas por grupo) não poderia ser aplicado diretamente, já que os grupos não teriam todos a mesma quantidade de integrantes.

2) Da mesma forma, quando um confeiteiro prepara docinhos para uma festa e os organiza em uma bandeja, formando uma distribuição retangular — com fileiras contendo a mesma quantidade de docinhos — ele está facilitando a contagem. Caso esqueça o total de docinhos preparados, basta multiplicar o número de fileiras pela quantidade de docinhos em cada uma.

32) Complete a tabela considerando o cálculo $(Entrada\ 1) \cdot\ (Entrada\ 2)$.

Tabela 3: Tabela da Operação de Multiplicação

$\cdot$		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**					0						
	1					4						
	2					8						
	3					12						
	4					16						
	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	6					24						
	7					28						
	8					32						
	9					36						
	10					40						

33) Quantas operações de multiplicação você realizou na tabela acima? ______________.

34) Comente se você consegue enxergar algum padrão de repetição nessa tabela, se sim, qual ou quais? Coloque as suas respostas no seu caderno.

35) Qual é o valor da expressão abaixo? Qual número se repetiu? Quantas vezes o nº se repetiu? É possível usar a tecla de multiplicação para encontrar o valor dessa expressão?

$$\mathbf{2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025}$$

3.6. O Conjunto dos Múltiplos de um Número Inteiro:

Você sabia que ...

•...Todo número inteiro multiplicado por 2 gera um *múltiplo de 2*?

•...Todos os *múltiplos de 2* terminam em 0,2,4,6 ou 8?

•...Todos os *múltiplos de 2* são números pares?

•...O conjunto $\{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ é o conjunto dos *múltiplos de 2* incluindo aqueles que são inteiros negativos?

36) Complete a tabela abaixo:

Se →	■ = 0	■ = 1	■ = 2	■ = 3	■ = 4	■ = 5
$2 \cdot$ ■	0		4			

Observação: Os múltiplos de 2 apresentados na tabela acima foram obtidos ao multiplicar o número 2 pelos números naturais, a partir do zero. Observa-se que esses valores correspondem aos seis primeiros resultados da tabuada da multiplicação do 2.

O Conjunto dos múltiplos de um número natural:

Para representar o conjunto dos múltiplos de 2, procedemos da seguinte forma: escrevemos $M(2)$, abrimos chaves e listamos os primeiros elementos desse conjunto, que são obtidos ao multiplicar 2 pelos números naturais. Em seguida, acrescentamos reticências para indicar a continuidade e fechamos as chaves. Assim, temos: $M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$. O último múltiplo de 2 indicado é o 10, mas, como se trata de um conjunto infinito, as reticências são necessárias para representar que a sequência continua indefinidamente.

37) Determine os conjuntos de múltiplos abaixo iniciando cada um deles com os seus 5 primeiros múltiplos. Considere $a \in \mathbb{N}$.

a) $M(0)$ = ____________________
b) $M(1)$ = ____________________
c) $M(2)$ = ____________________
d) $M(3)$ = ____________________
e) $M(4)$ = ____________________
f) $M(a)$ = ____________________

38) Complete a tabela para encontrar os valores y sabendo-se que $y = 6 \cdot x$ e $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$?

x	$y = 6 \cdot x$	y
0		
1	$y = 6 \cdot 1$	6
2		
3		
4		

Observações:

1) A igualdade $y = 6 \cdot x$ pode ser vista como uma fórmula matemática para encontrar o valor de y a partir do valor de x.

2) Observe que o enunciado da questão forneceu os valores de x que serão usados para descobrir os valores de y.

3) Na tabela, a primeira coluna apresenta os valores de x que serão usados para descobrir os valores de y, a segunda coluna, é a que temos a fórmula para descobrir os valores de y e a terceira coluna está reservada a indicação dos respectivos valores de y.

39) Siga o modelo e escreva uma leitura para as expressões abaixo.

a) $2 \cdot x$ Leitura: O dobro de x ou o dobro de um número.

b) $3 \cdot x$ Leitura: ____

c) $4 \cdot x$ Leitura: ____

d) $5 \cdot x$ Leitura: ____

e) $6 \cdot x$ Leitura: ____

3.7. Verificando as Propriedades da Multiplicação:

Sejam a, b e c números inteiros quaisquer, valem as seguintes propriedades.

- Propriedade Associativa da Multiplicação:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ **Exemplo:** $2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$

- Propriedade Comutativa da Multiplicação

40) Prove que $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$ usando a definição de multiplicação.

41) Escreva o enunciado da *propriedade comutativa* da multiplicação?

42) Como podemos generalizar a *propriedade comutativa* da multiplicação de inteiros usando variáveis?

43) Como podemos visualizar a propriedade comutativa da multiplicação pela tabela das tabuadas da multiplicação do exercício 32?

A Propriedade do Elemento Neutro Multiplicativo

44) Complete o quadro abaixo.

$0 \cdot 1 =$ ____

$1 \cdot 1 =$ ____

$2 \cdot 1 =$ ____

$3 \cdot 1 =$ ____

$4 \cdot 1 =$ ____

$5 \cdot 1 =$ ___

$x \cdot 1 =$ ___, onde $x \in \mathbb{N}$.

Escreva o enunciado da propriedade do elemento neutro da multiplicação?

____

____

____

____

____

Propriedade Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição

Enunciado: Sejam a, b e c números inteiros quaisquer, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição estabelece que:

$$\boldsymbol{a} \cdot (b + c) = \boldsymbol{a} \cdot b + \boldsymbol{a} \cdot c$$

Exemplo: $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$

45) Use a calculadora e verifique qual é o valor da expressão:

a) $3 \cdot (4 + 5)$ b) $3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$ c) $3 \cdot 4 + 5$

Observações:

1) Numa expressão numérica onde há parênteses, primeiro resolvemos o que se encontra dentro dos parênteses.

2) Numa expressão numérica sem parênteses, contendo somente as operações de adição e multiplicação, primeiro efetua-se a multiplicação e depois, a operação de adição.

46) A igualdade $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 5$ é verdadeira? Justifique a sua resposta.

____

____

47) Siga o modelo colocando os produtos na forma de soma.

	O Produto de um número inteiro por x	Resultado	A relação entre o produto e o resultado em função de x
a)	$1 \cdot x$	x	$1 \cdot x = x$
b)	$2 \cdot x$	$x + x$	$2 \cdot x = x + x$
c)	$3 \cdot x$		
d)	$2025 \cdot x$	$x + x + \cdots + x$ *(2025 parcelas)*	
e)	$n \cdot x$		

Observe que, ao multiplicarmos um número inteiro por x , esse produto pode ser representado como uma soma, na qual o termo x se repete tantas vezes quanto o valor do número inteiro utilizado na multiplicação. Quando esse número inteiro é muito grande para ser escrito explicitamente, ou mesmo quando se trata de um valor desconhecido, costuma-se recorrer a uma forma abreviada de notação: escrevem-se os primeiros e os últimos termos da soma, separados por reticências entre sinais de adição, de modo a indicar a continuidade da repetição. Além disso, é comum explicitar, abaixo ou ao lado da expressão, o número de parcelas, isto é, a quantidade de vezes que o termo x se repete, correspondendo ao valor do número inteiro considerado.

48) Demonstre que a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição é verdadeira para os valores numéricos de a indicados em cada item abaixo e considerando b e c números naturais quaisquer.

$$\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

a) $a = \mathbf{0}$ ==> $0 \cdot (b + c) = 0 = 0 \cdot b + 0 \cdot c$

b) $a = \mathbf{1}$ ==>

c) $a = \mathbf{2}$ ==> $2 \cdot (b + c) = (b + c) + (b + c) = b + b + c + c = 2b + 2c$

d) $a = \mathbf{3}$ ==>

e) Considerando $a = \boldsymbol{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, mostre que vale a igualdade: $\mathrm{n} \cdot (b + c) = \mathrm{n} \cdot b + \mathrm{n} \cdot c$.

3.8. O Sistema de Numeração Decimal

O ***sistema de numeração decimal*** organiza as quantidades em agrupamentos de 10, onde 10 unidades formam 1 dezena, 10 dezenas formam 1 centena, 10 centenas formam 1 milhar, e assim sucessivamente. Usando a base 10, cada ordem é 10 vezes maior que a anterior.

Classe dos bilhões			Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades simples		
12ª ordem	11ª ordem	10ª ordem	9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas de bilhão	Dezenas de bilhão	Unidades de bilhão	Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades

49) Considere o número 3459. Complete a tabela abaixo.

	Dígito	Nome da Ordem	Nº de unidades em cada grupo	Valor Absoluto	Valor Relativo
a)	6				
b)	5	dezenas	10 unidades	5	50
c)	4				
d)	3				

O ***valor relativo*** de um dígito em um número é obtido multiplicando-se seu valor absoluto (ou seja, o próprio algarismo) pelo valor da ordem posicional que ele ocupa. Em outras palavras, o valor relativo de um dígito depende tanto do número que ele representa quanto da posição que ocupa dentro do número.

50) Ao decompor o numeral 3456 em uma adição que considera o *valor relativo* de cada dígito, obtemos: $3456 = 3000 + 400 + 50 + 6$. Cada parcela dessa adição representa o produto entre o valor absoluto do dígito e o valor posicional correspondente à sua ordem. Assim, podemos reescrever a decomposição evidenciando esse produto. Complete os quadradinhos abaixo levando em consideração as instruções acima.

$$3456 = 3 \cdot \boxed{} + 4 \cdot \boxed{} + 5 \cdot \boxed{} + 6$$

Observação: Essa forma de decomposição expressa *a estrutura do número* de acordo com o sistema de numeração decimal, no qual cada dígito ocupa uma ordem (unidade, dezena, centena, milhar etc.) e seu valor relativo depende dessa posição.

51) A partir de um total de 3.456 pessoas, quantos grupos de 10 pessoas podem ser formados? Existe algum grupo com menos de 10 pessoas? Justifique suas respostas com cálculos detalhados.

APÊNDICE E: PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADE 4

A operação de divisão

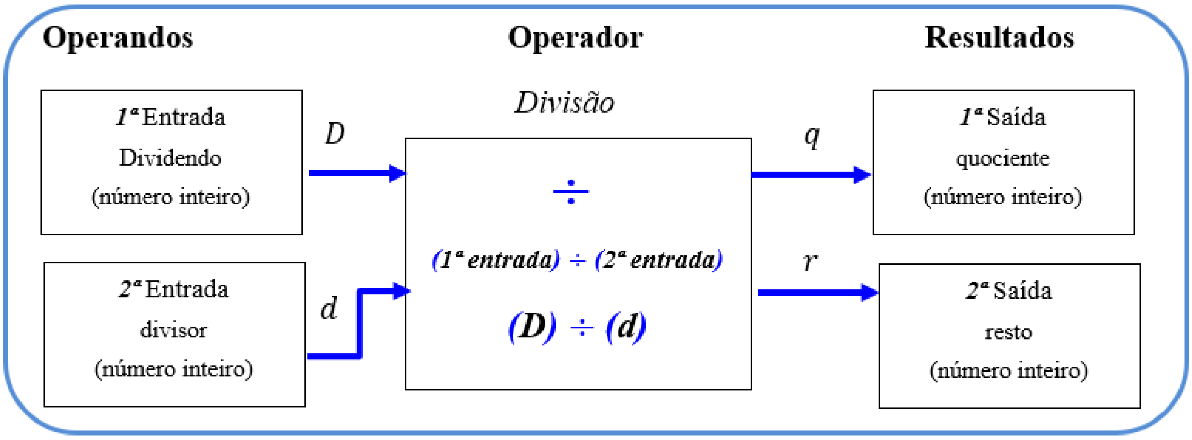
A operação de divisão ocupa um papel central neste trabalho. Nesta atividade, propõem-se exercícios que visam consolidar o pensamento aritmético envolvendo as quatro operações elementares. Para isso, apresentam-se nesta seção atividades graduais que possibilitam ao estudante revisar conteúdos relacionados à definição da operação de divisão, às suas propriedades operatórias e a conceitos fundamentais, como a divisibilidade. Além disso, busca-se enfatizar a compreensão de que o quociente entre dois inteiros, sendo o divisor diferente de zero, nem sempre resulta em um número inteiro.

Os alunos serão incentivados a realizar divisões tanto manualmente quanto com o auxílio da calculadora, a fim de comparar os resultados encontrados no visor da máquina com aqueles obtidos usando os algoritmos tradicionais "no papel". Esse processo tem como objetivo criar um espaço de descobertas acerca das limitações computacionais das calculadoras eletrônicas, estimulando o desenvolvimento do senso crítico dos estudantes para que sejam capazes de compreender e interpretar tais resultados em diferentes contextos do cotidiano. É introduzida a partir da atividade 4 o conceito de tecla de fração da calculadora, para que ele relacione a fração como um número, obtido pelo quociente; mas também, a verificar que números decimais exatos e dízimas periódicas podem ser gerados através do quociente entre dois inteiros.

Por fim, propõem-se exercícios que incluem pequenas demonstrações matemáticas, nas quais os estudantes utilizam a relação fundamental da divisão para investigar e comprovar em quais situações a divisão de certos números inteiros resulta em decimais exatos.

A atividade começa com a definição de divisão e sua relação fundamental. Em seguida, exploram-se os resultados de divisões, obtidos por calculadoras ou cálculos manuais. Por fim, define-se a fração como o quociente de dois números inteiros, ajudando o aluno a compreender essa relação. Os termos na operação da divisão são apresentados na Fig. 15.

Figura 37: Diagrama de Blocos da operação de Divisão para quociente inteiro



4.1.A Relação Fundamental da Divisão (Divisão Euclidiana)

Enunciado: Dados inteiros d e D com $d \neq 0$, existem inteiros q e r tais que $D = d \cdot q + \boldsymbol{r}$ e $0 \leq \boldsymbol{r} < |d|$. Além disso, q e r são unicamente determinados pelas condições acima.

A Relação Fundamental da Divisão

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

Conecta os quatro (4) termos envolvidos da divisão por meio da fórmula:

$$D = d \cdot q + r$$

$$dividendo = divisor \cdot quociente + resto$$

52) Leia o enunciado da Relação Fundamental da Divisão e extraia as seguintes informações:

a) A sentença matemática que relaciona os quatro termos da divisão.

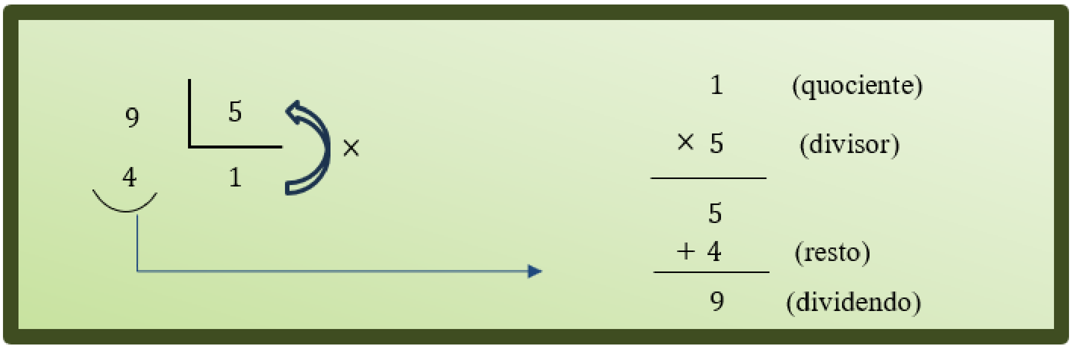
b) Como se lê: $0 \leq \boldsymbol{r} < |d|$?

c) O enunciado acima restringe o valor do divisor?

d) Ao dividirmos dois números inteiros, onde o segundo é diferente de zero sempre haverá resultados para a divisão do primeiro número pelo segundo número?

Exemplo: Organize e efetue: 9 ÷ 5 e verifique, pela Relação Fundamental da Divisão, se os resultados encontrados (quociente e resto) realmente satisfazem a essa relação.

"A Prova Real da Divisão": Processo de verificação dos resultados encontrados pela divisão.



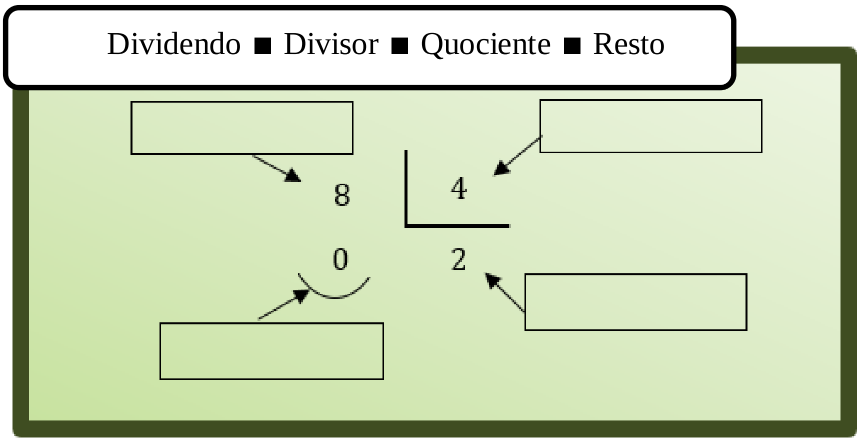
Observações:

1) A operação de divisão possui dois resultados: quociente e resto. Já as operações de adição, subtração e multiplicação possuem apenas um resultado respectivamente denominados de soma, diferença e produto.

2) Neste trabalho de dissertação convencionou-se usar letras minúsculas do nosso alfabeto para representar as variáveis; no caso da denotação do dividendo e do divisor, escolheu-se usar a mesma letra para facilitar o entendimento diferenciando-as em maiúscula e minúscula conforme ilustrado no quadro acima.

3) Nas linguagens de programação o símbolo usado para "dividir" é uma barra inclinada "/".

53) Insira nos espaços abaixo os nomes que se encontram no quadro abaixo.



- ❖ As leituras da expressão: **8 ÷ 4**. Leitura principal: “oito dividido por quatro”. Outras formas possíveis: “Oito por quatro”, “o quociente entre 8 e 4”, e “divisão de oito por quatro”.

4.2. Operações de Divisão: Exatas e Não Exatas

54) Observe as operações de divisão abaixo. Identifique as que são divisões exatas (DE) e as que são divisões não exatas (DNE).

(a)

$$\begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{r|l} 18 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 3 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{r|l} 0 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 0 \end{array}$$

55) Utilize a Relação Fundamental da Divisão e verifique se os resultados encontrados na questão anterior estão corretos. Faça esse exercício mentalmente.

56) Quais são os ***restos*** possíveis quando dividimos um nº inteiro diferente de zero por 5? Comente a sua resposta. ____

____

57) Realize as seguintes operações utilizando com e sem o auxílio de uma calculadora. Anote os resultados encontrados no visor nos campos abaixo.

a) 8 ÷ 2

Visor da calculadora

b) 18 ÷ 4

Visor da calculadora

c) 8 ÷ 6

Visor da calculadora

58) Os resultados das divisões que apareceram no visor da calculadora sempre correspondem aos quocientes que você encontrou no exercício 57? Destaque as operações de divisão em que o resultado do divisor na calculadora coincide com o quociente da divisão.

59) Obtenha os mesmos resultados que apareceram no visor da calculadora através dos cálculos no papel.

a) $8 \div 5$

Visor da calculadora

8	5
3	1

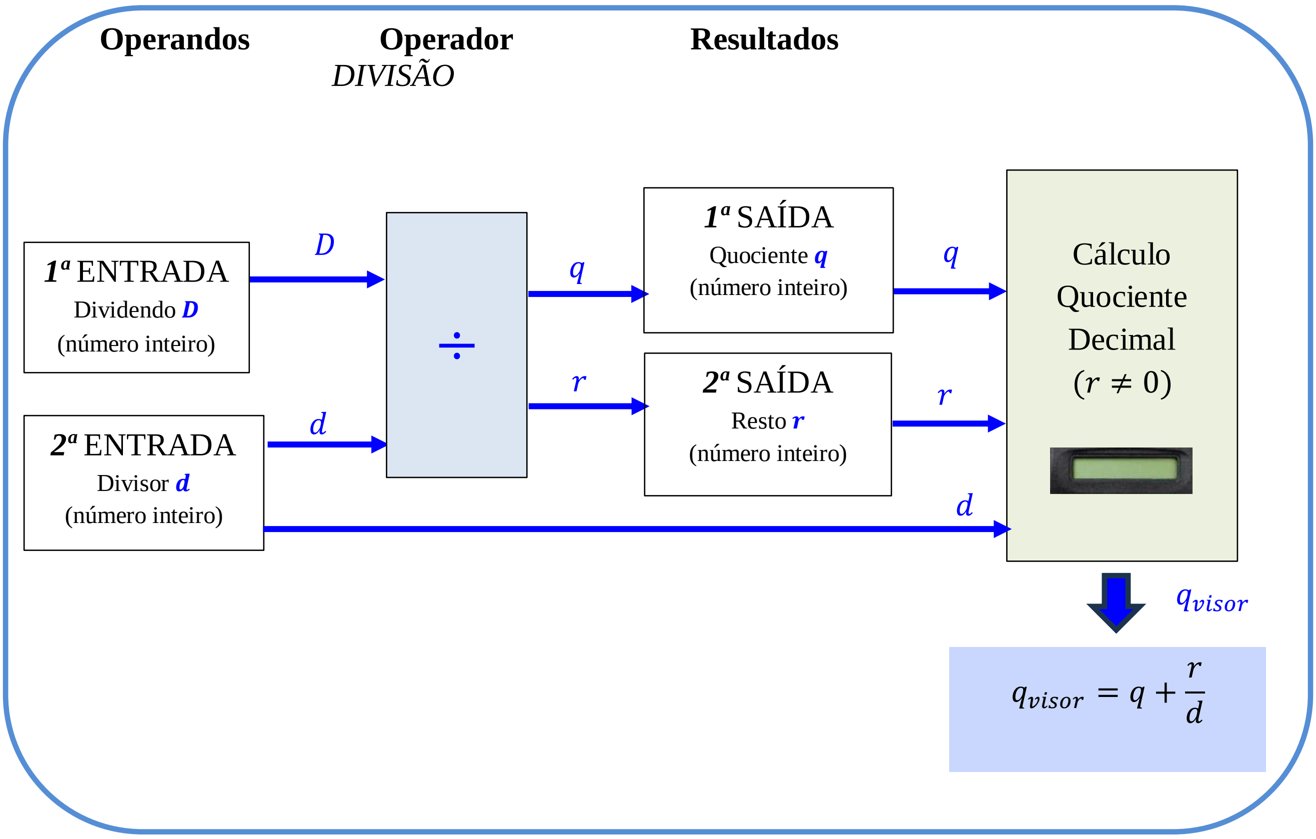
b) $8 \div 6$

Visor da calculadora

8	6
2	1

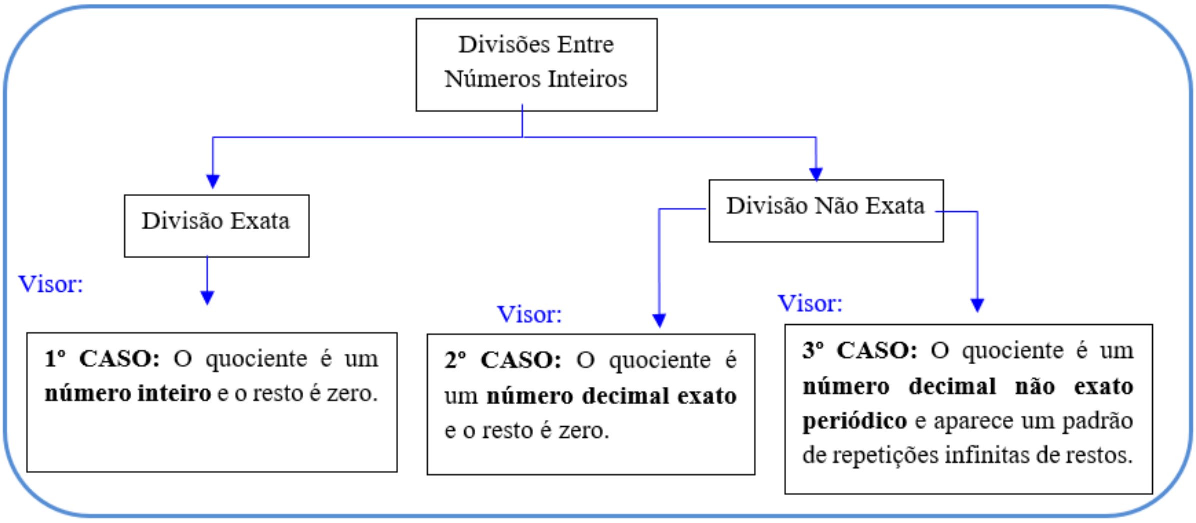
4.3. O cálculo do quociente decimal em uma divisão não exata.

Figura 38: Diagrama de Blocos na Operação de Divisão, Quocientes Inteiros e Decimais



Observação: Para diferenciar o quociente inteiro do quociente decimal, usa-se a notação de variável com um subscrito nominal (q_{visor}). Num texto matemático, mais formal, essa diferenciação poderia ser visualizada como q para um quociente inteiro e q' para o quociente decimal, por exemplo.

Figura 39: Classificação das divisões com inteiros



4.4. Quociente no Visor da Calculadora:

Exercício: Quando dividimos um número inteiro D por outro número inteiro d $(d \neq 0)$, a calculadora mostra no visor o quociente $\frac{D}{d}$. Sabemos que, pela relação fundamental da divisão, todo número inteiro D pode ser escrito assim:

$$D = d \cdot q + r,$$

Onde q é o quociente inteiro e r é o resto da divisão, com $0 \leq r < |d|$.

Usando essa relação para escrever a fórmula que mostra o valor do quociente $\frac{D}{d}$ exibido na calculadora em função de q, r e d.

Resolução:

Desejamos encontrar o valor de $\mathrm{D} \div \mathrm{d}$, isto é $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}}$ a partir da relação abaixo.

$$D = d \cdot q + r$$

1º PASSO: Para encontrar o valor de $\frac{D}{d}$, como $d \neq 0$, dividimos ambos os membros da igualdade acima pelo divisor d, prosseguindo assim, teremos:

$$\frac{D}{d} = \frac{d \cdot q + r}{d}$$

Observação: Neste primeiro passo, utilizamos uma propriedade da igualdade que diz que ao dividir ambos os membros de uma igualdade por um valor inteiro diferente de zero essa igualdade não se altera.

2º PASSO: Observe que o numerador da fração do 2º membro possui um sinal de $+$. Usando uma propriedade das frações, podemos transformar uma fração que possui uma soma no seu numerador em duas frações, de tal forma que ambas as frações resultantes possuam o mesmo denominador e que os seus numeradores sejam as parcelas no numerador o qual separamos.

$$\frac{D}{d} = \frac{d \cdot q}{d} + \frac{r}{d}$$

3º PASSO: Pelas propriedades das frações, podemos colocar o valor do quociente (q) na frente do quociente $\frac{d}{d}$. Desta forma, teremos:

$$\frac{D}{d} = q \cdot \frac{d}{d} + \frac{r}{d}$$

Como $\frac{d}{d} = 1$, teremos:

$$\frac{D}{d} = q \cdot 1 + \frac{r}{d}$$

Como $q \cdot 1 = q$, teremos:

$$\frac{D}{d} = \boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}}$$

Observações: A variável q é a **parte inteira** do número representado no visor da calculadora e o quociente $\frac{r}{d}$ corresponde ao valor da **parte decimal** que aparecerá no visor da calculadora ao lado da parte inteira q.

Propriedades usadas no exercício de demonstração:

$a = b \Longrightarrow \frac{a}{k} = \frac{b}{k}$	$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$	$\frac{k \cdot a}{b} = k \cdot \frac{a}{b}$

4.5. As Palavras: Divisor, Divisível e Múltiplo de um Número Inteiro

60) Complete as lacunas a partir das palavras abaixo:

É múltiplo / não é múltiplo
É divisível / não é divisível
É divisor / não é divisor

$$\begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array}$$

a) 10 ______________ de 5.

b) 10 é divisível ______ por 5.

c) 5 ________________ de 10.

d) 9 ______________ de 5.

e) 9 ______________ por 5.

f) 5 ______________ de 9.

Os tipos de números decimais e as suas representações em uma calculadora.

O quociente entre dois números inteiros em divisões não exatas resulta em decimais exatos ou dízimas periódicas. As calculadoras possuem limitações para lidar, por exemplo, com números com infinitas casas decimais.

Nesse percurso, serão introduzidos brevemente conceitos como número exato, número aproximado e erro de aproximação decorrente do uso da calculadora na divisão de inteiros. Além disso, em consonância com as orientações da BNCC, também serão propostas atividades que envolvem o cálculo mental envolvendo a divisão.

61) Complete cada tabuada da divisão abaixo com o auxílio das dicas de cálculo mental de divisões por 2, 4, 5, 8, 9 e 10. Utilize também uma calculadora para conferir os seus resultados quando você julgar necessário; em seguida, faça o preenchimento do quadro à direita interpretando qual é a representação correta de cada número. Identifique os resultados como INT (números inteiros), DE (decimais exatos) e DP (dízimas periódicas).

Dicas de Cálculo Mental nas divisões por 2, 4, 5, 8 e 10.		**Sequência das operações**
$\boldsymbol{x \div 2}$	A metade de x.	$x \div 2$
$\boldsymbol{x \div 4}$	A metade da metade de x	$x \div 4 = (x \div 2) \div 2$
$\boldsymbol{x \div 8}$	A metade da metade da metade de x	$x \div 8 = ((x \div 2) \div 2) \div 2$

$\boldsymbol{x \div 10}$	Anda a vírgula uma casa para a esquerda.	$x \div 10$
$\boldsymbol{x \div 5}$	Dobra o valor de x e divide o resultado por 10.	$x \div 5 = (x \cdot 2) \div 10$

Resultados encontrados no visor da calculadora — Valores reais dessas operações

Tabuada do 10

Resultados encontrados no visor da calculadora	Valores reais dessas operações	
$10 \div 1 =$	$10 \div 1 =$	
$10 \div 2 = 5$	$10 \div 2 = 5$	INT
$10 \div 3 = 3{,}3333333333$	$10 \div 3 = 3{,}333\ldots$ ou $3{,}\overline{3}$	DP
$10 \div 4 = 2{,}5$	$10 \div 4 = 2{,}5$	DE
$10 \div 5 =$	$10 \div 5 =$	
$10 \div 6 = 1{,}6666666667$	$10 \div 6 = 1{,}666\ldots$ ou $1{,}\overline{6}$	DP
$10 \div 7 =$	$10 \div 7 =$	
$10 \div 8 =$	$10 \div 8 =$	
$10 \div 9 = 1{,}1111111111$	$10 \div 9 = 1{,}111\ldots$ ou $1{,}\overline{1}$	DP
$10 \div 10 =$	$10 \div 10 =$	

Tabuada do 9

Resultados encontrados no visor da calculadora	Valores reais dessas operações
$9 \div 1 =$	$9 \div 1 =$
$9 \div 2 =$	$9 \div 2 =$
$9 \div 3 =$	$9 \div 3 =$
$9 \div 4 =$	$9 \div 4 =$
$9 \div 5 =$	$9 \div 5 =$
$9 \div 6 =$	$9 \div 6 =$
$9 \div 7 = 1{,}2857142857$	$9 \div 7 =$
$9 \div 8 =$	$9 \div 8 =$
$9 \div 9 =$	$9 \div 9 =$
$9 \div 10 =$	$9 \div 10 =$

Tabuada do 8

8 ÷ 1 =	8 ÷ 1 =
8 ÷ 2 =	8 ÷ 2 =
8 ÷ 3 = 2,6666666667	8 ÷ 3 =
8 ÷ 4 =	8 ÷ 4 =
8 ÷ 5 =	8 ÷ 5 =
8 ÷ 6 = 1,3333333333	8 ÷ 6 =
8 ÷ 7 = 1,1428571429	8 ÷ 7 =
8 ÷ 8 =	8 ÷ 8 =
8 ÷ 9 = 0,8888888889	8 ÷ 9 =
8 ÷ 10 =	8 ÷ 10 =

Tabuada do 7

7 ÷ 1 =	7 ÷ 1 =
7 ÷ 2 =	7 ÷ 2 =
7 ÷ 3 = 2,3333333333	7 ÷ 3 =
7 ÷ 4 =	7 ÷ 4 =
7 ÷ 5 =	7 ÷ 5 =
7 ÷ 6 = 1,1666666667	7 ÷ 6 =
7 ÷ 7 =	7 ÷ 7 =
7 ÷ 8 =	7 ÷ 8 =
7 ÷ 9 = 0,7777777778	7 ÷ 9 =
7 ÷ 10 =	7 ÷ 10 =

Tabuada do 6

6 ÷ 1 =	6 ÷ 1 =
6 ÷ 2 =	6 ÷ 2 =
6 ÷ 3 =	6 ÷ 3 =
6 ÷ 4 =	6 ÷ 4 =
6 ÷ 5 =	6 ÷ 5 =
6 ÷ 6 =	6 ÷ 6 =
6 ÷ 7 = 0,851428571	6 ÷ 7 =
6 ÷ 8 =	6 ÷ 8 =
6 ÷ 9 = 0,6666666667	6 ÷ 9 =
6 ÷ 10 =	6 ÷ 10 =

Tabuada do 5

5 ÷ 1 =	5 ÷ 1 =
5 ÷ 2 =	5 ÷ 2 =
5 ÷ 3 = 1,6666666667	5 ÷ 3 =
5 ÷ 4 =	5 ÷ 4 =
5 ÷ 5 =	5 ÷ 5 =
5 ÷ 6 = 0,8333333333	5 ÷ 6 =
5 ÷ 7 = 0,7142857143	5 ÷ 7 =
5 ÷ 8 =	5 ÷ 8 =
5 ÷ 9 = 0,5555555556	5 ÷ 9 =
5 ÷ 10 =	5 ÷ 10 =

Tabuada do 4

4 ÷ 1 =	4 ÷ 1 =
4 ÷ 2 =	4 ÷ 2 =
4 ÷ 3 = 1,3333333333	4 ÷ 3 =
4 ÷ 4 =	4 ÷ 4 =
4 ÷ 5 =	4 ÷ 5 =
4 ÷ 6 = 0,6666666667	4 ÷ 6 =
4 ÷ 7 = 0,5714285714	4 ÷ 7 =
4 ÷ 8 =	4 ÷ 8 =
4 ÷ 9 = 0,4444444444	4 ÷ 9 =
4 ÷ 10 =	4 ÷ 10 =

Tabuada do 3

3 ÷ 1 =	3 ÷ 1 =
3 ÷ 2 =	3 ÷ 2 =
3 ÷ 3 =	3 ÷ 3 =
3 ÷ 4 =	3 ÷ 4 =
3 ÷ 5 =	3 ÷ 5 =
3 ÷ 6 =	3 ÷ 6 =
3 ÷ 7 = 0,4285714286	3 ÷ 7 =
3 ÷ 8 =	3 ÷ 8 =
3 ÷ 9 = 0,3333333333	3 ÷ 9 =
3 ÷ 10 =	3 ÷ 10 =

Tabuada do 2

2 ÷ 1 =	2 ÷ 1 =
2 ÷ 2 =	2 ÷ 2 =
2 ÷ 3 = 0,6666666667	2 ÷ 3 =
2 ÷ 4 =	2 ÷ 4 =
2 ÷ 5 =	2 ÷ 5 =
2 ÷ 6 = 0,3333333333	2 ÷ 6 =
2 ÷ 7 = 0,2857142857	2 ÷ 7 =
2 ÷ 8 =	2 ÷ 8 =
2 ÷ 9 = 0,2222222222	2 ÷ 9 =
2 ÷ 10 =	2 ÷ 10 =

Tabuada do 1

1 ÷ 1 =	1 ÷ 1 =
1 ÷ 2 =	1 ÷ 2 =
1 ÷ 3 = 0,3333333333	1 ÷ 3 =
1 ÷ 4 =	1 ÷ 4 =
1 ÷ 5 =	1 ÷ 5 =
1 ÷ 6 = 0,1666666667	1 ÷ 6 =
1 ÷ 7 = 0,1428571429	1 ÷ 7 =
1 ÷ 8 =	1 ÷ 8 =
1 ÷ 9 = 0,1111111111	1 ÷ 9 =
1 ÷ 10 =	1 ÷ 10 =

Tabuada do 0

0 ÷ 0 =	0 ÷ 0 =
0 ÷ 1 =	0 ÷ 1 =
0 ÷ 2 =	0 ÷ 2 =
0 ÷ 3 =	0 ÷ 3 =
0 ÷ 4 =	0 ÷ 4 =
0 ÷ 5 =	0 ÷ 5 =
0 ÷ 6 =	0 ÷ 6 =
0 ÷ 7 =	0 ÷ 7 =
0 ÷ 8 =	0 ÷ 8 =
0 ÷ 9 =	0 ÷ 9 =
0 ÷ 10 =	0 ÷ 10 =

62) Responda as questões a seguir baseado nas tabuadas da divisão do exercício anterior.

a) As divisões por quais números inteiros resultaram em *números decimais exatos*?

Resposta: ____.

b) As divisões por quais números inteiros resultaram em *dízimas periódicas*?

Resposta: ____.

c) Quais operações resultaram em *dízimas periódicas compostas*?

Resposta: ____.

d) Ao dividir um número inteiro não nulo por outro número inteiro não nulo de valor absoluto menor, o resultado da divisão é sempre maior que 1 ou menor que 1? Justifique sua resposta.

Resposta: ____.

Comentários sobre as discrepâncias nos resultados obtidos nas calculadoras:

- A calculadora nativa no smartphone Samsung Galaxy S22 apresentou todos os números decimais exatas com no máximo 10 casas decimais.
- A maioria das calculadoras exibe até 12 dígitos em suas telas. Assim, resultados de expressões matemáticas com números decimais que excedem esse limite são ajustados pelo algoritmo da calculadora, exibindo um valor aproximado em vez do valor exato.
- Quando o resultado exato de uma operação, como uma divisão entre números inteiros positivos, é um decimal que excede a capacidade de exibição da calculadora, obtemos um valor aproximado. O erro absoluto é calculado por

$$E_{\text{absoluto}} = |\text{VALOR}_{\text{exato}} - \text{VALOR}_{\text{aproximado}}|$$

- Embora as calculadoras gerem erros de aproximação, esses são geralmente muito pequenos e desprezíveis em operações matemáticas do dia a dia
- No preenchimento das tabelas acima ficou claro que certas operações cujos resultados exatos são dízimas periódicas, apareceram nas calculadoras um número decimal exato e o último dígito não corresponde a um valor do período.

4.6. Por que as calculadoras erram?

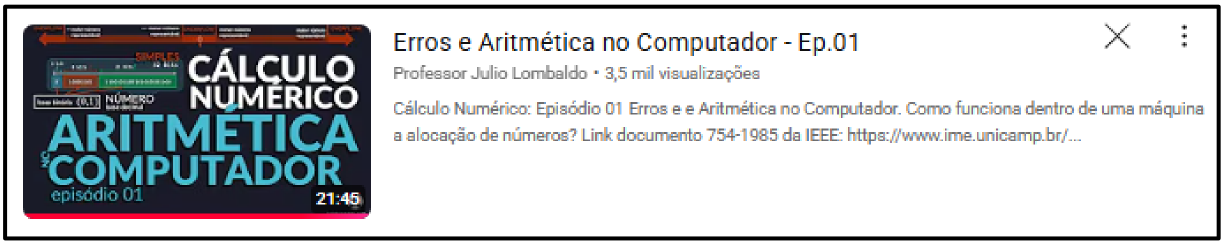
Sandra Renz Pacheco(2007) discute em seu artigo os tipos de erros que podem ocorrer no uso de calculadoras; dentre eles estão os erros de truncamento e arredondamento.

> Para a resolução dos modelos matemáticos é necessário fazer aproximações. Tais aproximações podem gerar os chamados erros de truncamento e os erros de arredondamento. Os erros de truncamento são aqueles cometidos quando se substitui qualquer processo infinito por um processo finito. [...]. Já os erros de arredondamento surgem quando se trabalha com calculadoras digitais ou computadores para representar números pertencentes ao campo dos reais, [...]. (RENZ PACHECO,2007)

A calculadora trabalha com um sistema de representação de números no seu visor denominado de **Aritmética de Ponto Flutuante**. E essa representação possui limitações. Por exemplo, ao efetuar $2 \div 3$ em uma calculadora, que é um número real cuja representação decimal é $0{,}666\ldots$, temos que o visor da calculadora aparecerá um número limitado de casas decimais. Conforme visto no exercício anterior, $2 \div 3 = 0{,}6666666667$. Faça a leitura do emprego deste símbolo em $2 \div 3 = 0{,}6666666667$ como o resultado obtido pela calculadora após teclar "=". Matematicamente falando, ao saber que esse número é uma aproximação do *valor exato*, a simbologia correta seria $2 \div 3 \approx 0{,}6666666667$; a leitura desta sentença é: $2 \div 3$ é $aproximadamente\ igual\ a$ $0{,}6666666667$. Para usar o símbolo de igualdade, neste caso, é necessário apresentar o valor exato; isto é: $2 \div 3 = 0{,}666\ldots$

No caso das dízimas periódicas, cabe ressaltar que esse processo de arredondamento, às vezes deixará o último dígito exibido no visor da calculadora igual ao período da dízima, mas isso não significa que o valor do visor é uma dízima periódica. Por exemplo, ao digitar a expressão '$2 \div 9$' na calculadora e, em seguida, teclar "=", o resultado que aparece no visor é $0{,}6666666666$; portanto, deduz-se, pelo visor que: $2 \div 9 = 0{,}6666666666$, que sabe-se que também é uma aproximação de $0{,}666\ldots$.

No vídeo *Erros e Aritmética no Computador – Ep.01* (PROFESSOR JÚLIO LOMBALDO,2022), *o* professor Júlio cita no seu vídeo o documento IEEE Std 754-1985, conhecido como Norma IEEE 754, que tem como finalidade estabelecer um padrão internacional para a aritmética em ponto flutuante em computadores e calculadoras digitais. Este documento define regras para representar e manipular números reais em formato binário e decimal de forma uniforme em todas as máquinas de calcular, e traz informações sobre arredondamentos, erros de aproximação, situações de *overflow* (estouro superior), *underflow* (valores muito próximos de zero), divisão por zero e resultados indefinidos (NaN – Not a Number) envolvendo essas máquinas.



Fonte: (PROFESSOR JÚLIO LOMBALDO,2022)

4.7. A Tecla “Fração”

Visando ampliar o conhecimento dos estudantes sobre a calculadora científica, será apresentada a “tecla de fração”, que possibilita obter o quociente entre dois inteiros colocando-os na forma de fração. A partir dessa exploração, pretende-se que os alunos associem os números decimais exatos e as dízimas periódicas às frações, compreendendo-os como expressões do quociente entre inteiros — ideia que se articula diretamente à definição de número racional.

Você sabia que a fração pode ser vista como uma divisão?

Em algumas calculadoras existe a tecla fração. Verificaremos o que aparecerá no visor da calculadora após usarmos essa tecla.

Figura 40: A tecla de fração numa calculadora científica portátil. Casio

Algumas calculadoras não possuem essa tecla disponível. Na Matemática a fração pode ser interpretada de várias formas diferentes.

Quiz: Qual é a ideia de fração associada a tecla de fração da calculadora?

( ) 1ª ideia: fração como parte/todo **( ) 3ª ideia:** fração de uma quantidade

( ) 2ª ideia: fração como razão **(X) 4ª ideia:** fração como quociente

Para trabalhar com frações na calculadora, usaremos a ***4ª ideia de fração***: fração como quociente.

A tecla de fração está relacionada ao que chamamos de ***número fracionário***.

Definição: Sejam a e b dois números inteiros, com $b \neq 0$. Define-se a fração a por b, denotada por:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a \div b$$

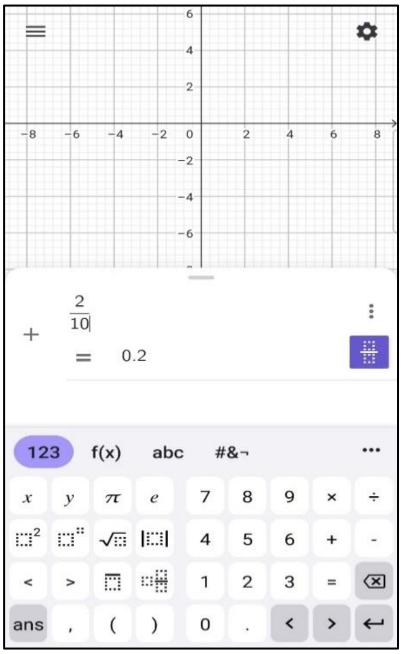
Isto é, como a representação da divisão de a por b, onde a é o numerador e b é o denominador.

Leitura de um Número Fracionário:

Exemplo 1: $\frac{10}{2} = 5$ Lê-se: O quociente entre 10 e 2 é igual a 5. (Fig. 18).

Exemplo 2: $\frac{2}{10} = 0{,}2$ Lê-se: O quociente entre 2 e 10 é igual a 0,2.

Figura 41: Visor com as respostas



Comentários:

1) Algumas calculadoras como o Geogebra, se você digitar $8 \div 5$, aparecerá no seu visor, $\frac{8}{5}$. Isto é, a notação na forma de fração.

2) Não existe a tecla de fração nas calculadoras portáteis mais simples.

3) O Geogebra não possui a tecla “DEL” ou “AC”; usa-se, ao invés disso, o recurso *touchscreen* dos smartphones; e o ícone dos “três pontinhos” para deletar resultados.

4) O Geogebra possui uma tecla de número misto.

Como o número fracionário representa o quociente entre dois números inteiros, logo podemos ter como resultados: números inteiros, decimais exatos ou dízimas periódicas; conforme observamos nas tabuadas da divisão de inteiros.

4.8. Divisão com Resultados Iguais

Você sabia que... existem operações de divisão em que o quociente e o resto são iguais?

63) Determine as divisões que produzem os resultados indicados em cada item abaixo. Dica: Consulte as tabuadas de divisão que você preencheu. Caso sobrem retângulos, crie outras operações de divisão que gerem o mesmo resultado.

a) $\boxed{?} \div \boxed{?} = \mathbf{2}$

$2 \div 1$					

b) $\boxed{?} \div \boxed{?} = \mathbf{1,5}$

$3 \div 2$					

c) $\boxed{?} \div \boxed{?} = \mathbf{0,5}$

$1 \div 2$					

d) $\boxed{?} \div \boxed{?} = \mathbf{0,333}$ ...

$3 \div 9$					

Você sabia que .... para obter operações de divisão que possuem o mesmo resultado basta escolhermos um número inteiro diferente de zero para multiplicar pelo dividendo e o divisor?

64) Siga os seguintes passos:

a) Encontre o valor de $6 \div 2 =$ ______.

b) Multiplique o dividendo e o divisor por 5.

c) Como fica a nova expressão? $\boxed{} \div \boxed{}$

d) Em seguida, divida os valores na ordem que aparecem. Qual é o resultado da divisão após essas multiplicações? _____.

e) ***Conclusão:*** $6 \div 2 = \boxed{} \div \boxed{}$. Escrevendo na forma de números fracionários, temos: $\frac{6}{2} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$.

65) As operações $5 \div 4$ e $10 \div 8$ geram o mesmo resultado no visor da calculadora? Justifique a sua resposta.

____

____

____

Propriedade: Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois ***números fracionários,*** eles são iguais, se e somente se, vale a sentença abaixo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Exercícios:

66) Verifique se as igualdades abaixo são verdadeiras ou falsas.

$a)$ ( ) $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ $c)$ ( ) $\frac{5}{10} = \frac{10}{5}$

$b)$ ( ) $\frac{2}{10} = \frac{6}{10}$ $d)$ ( ) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}$

Você sabia que .... para obter operações de divisão que possuem o mesmo resultado podemos dividir o dividendo e o divisor por um mesmo número desde que esse número escolhido seja diferente de zero?

67) Siga os seguintes ***passos***:

a) Encontre o valor de $4 \div 8 =$ _____.

b) Divida o dividendo e o divisor por 2.

c) Como fica a nova expressão? $\square \div \square$

d) Em seguida, divida os valores na ordem que aparecem. Qual é o resultado da divisão após essas multiplicações? ____.

e) ***Conclusão:*** $4 \div 8 = \square \div \square$. Escrevendo na forma de números fracionários, temos: $\frac{4}{8} = \frac{\square}{\square}$.

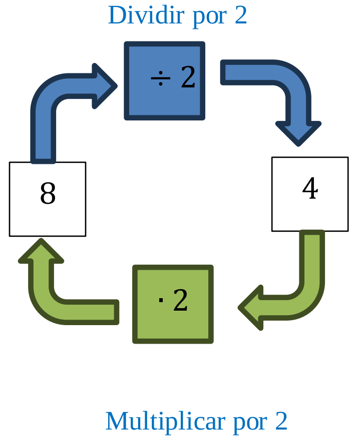
Observações:

1) Embora possamos dividir o 4 e 8 por qualquer número inteiro, diferente de zero (aqui estamos admitindo que a divisão pode resultar em decimal), vamos escolher aquele ou aqueles números que são divisores comuns de 4 e 8 (para que a divisão possa ser um resultado inteiro.) Por exemplo, 2 e o 4.

2) Ao *multiplicar* ou *dividir* ambos os termos do número fracionário $\left(\frac{4}{8}\right)$ pelo número 1 teremos que $\frac{4}{8} = \frac{4}{8}$.

3) Há infinitos pares de números inteiros cujos quocientes são iguais a $\frac{4}{8}$.

4.9. Operações Inversas: Multiplicação e Divisão



Enunciado: Sejam a e b números inteiros, onde b é diferente de zero e tal que $a \div b$ é uma divisão exata. É possível relacionar os valores de a, b e c conforme a equivalência abaixo.

$$a \div b = c \iff c \cdot b = a$$

Exemplo: $\boxed{8} \div \boxed{2} = \boxed{4} \iff \boxed{4} \cdot \boxed{2} = \boxed{8}$

Observação: Para verificar se o resultado de uma operação de divisão está correto, pode-se usar o raciocínio da operação inversa.

68) Qual é o número desconhecido?

a) $\boxed{40} \div \boxed{10} = \boxed{?}$

b) $\boxed{40} \div \boxed{4} = \boxed{10}$

c) $\boxed{?} \div \boxed{40} = \boxed{10}$

d) $\boxed{?} \div \boxed{40} = \boxed{5}$

e) $\boxed{40} \div \boxed{?} = \boxed{1}$

f) $\boxed{?} \div \boxed{40} = \boxed{0}$

g) $\boxed{40} \div \boxed{?} = \boxed{5}$

69) Como encontrar o resto de uma divisão de inteiros utilizando o resultado do visor?

____

____

Exemplo: Por que os números decimais obtidos pela divisão de um número inteiro diferente de zero por 5 sempre serão decimais exatos?

Solução: Ao dividirmos qualquer número inteiro por 5, os resultados possíveis para os seus restos são: 0,1,2,3 e 4. Utilizando a fórmula, $q_{decimal} = q_{inteiro} + \frac{r}{d}$, podemos determinar se as divisões não exatas por 5 sempre serão números decimais exatos bastando calcular o resultado de $\frac{r}{d}$. De fato, tomando todas as possibilidades de $\frac{r}{d}$, verificamos que $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ são números decimais exatos. Logo, $q_{decimal} = q_{inteiro} + deimal\ exato$, que não pode resultar em dízima periódica.

70) Por que os números decimais obtidos pelas divisões de um número inteiro diferente de zero por 2,4,5,8 e 10 são sempre decimais exatos?

____

____

____

Observação: O método utilizado para resolver esse tipo de problema é relativamente simples, mas quando os divisores são números elevados, como 83, esse jeito de pensar, apesar de correto, se torna inviável. Na atividade 10 (ver Produto Educacional no apêndice) há uma sugestão de resolução desse problema utilizando uma técnica mais simples e rápida.

71) Resolva as divisões abaixo utilizando a tecla de subtração da calculadora. Anote o quociente inteiro e o resto de cada operação.

a) $12 \div 3$ b) $20 \div 4$ c) $15 \div 4$ d) $9 \div 2$

72) Considerando a divisão de inteiros, é possível garantir que divisões não exatas por 3, 6, 7 e 9 sempre resultarão em dízimas periódicas? Comente a sua resposta.

____

____

____

73) Complete os quadros 1 e 2 abaixo. Em seguida, responda as questões.

Quadro 1: Propriedade do Elemento Neutro

$0 \div 1 =$ ____

$1 \div 1 =$ ____

$2 \div 1 =$ ____

$3 \div 1 =$ ____

$4 \div 1 =$ ____

Considerando x um número inteiro qualquer, podemos afirmar que:

$x \div 1 =$ ____

Usando a notação de número fracionário, temos:

$\frac{x}{1} =$ _____

Quadro 2: Um número dividido por ele mesmo

$0 \div 0 =$ ____

$1 \div 1 =$ ____

$2 \div 2 =$ ____

$3 \div 3 =$ ____

$4 \div 4 =$ ____

Considerando x um número inteiro qualquer diferente de zero, podemos afirmar que:

$x \div x =$ ____

Usando a notação de número fracionário, temos:

$\frac{x}{x} =$ _____

a) A propriedade comutativa é válida para a operação de divisão? ____________

b) O elemento neutro da divisão é 1? _____________________________________

c) Use a Relação Fundamental da Divisão e verifique se os valores encontrados para $\frac{x}{1}$ e $\frac{x}{x}$ estão corretos.

4.10. O valor de uma expressão numérica

Uma expressão numérica é uma combinação de números e operações matemáticas, podendo aparecer com ou sem os sinais de associação: parênteses, colchetes e chaves. A sequência com que as operações aritméticas aparecem na expressão numérica, bem como os sinais de associação, interferem no resultado. Segue a seguir a regra geral para determinação do valor numérico de uma expressão numérica.

A regra geral para calcular o valor de uma expressão segue a seguinte ordem de resolução:

1º Passo
- **Multiplicação e divisão**, efetuamos as operações na ordem em que aparecem da esquerda para a direita.

2º Passo
- **Adição e subtração** , efetuamos as operações na ordem em que aparecem da esquerda para a direita.

❖ A hierarquia de agrupamento dos ***sinais de associação***: 1º lugar: ( );2º lugar: [ ] e, em 3º lugar, { }.

É importante destacar que **multiplicação não tem prioridade sobre a divisão**, assim como **adição não tem prioridade sobre a subtração**. O critério é sempre a leitura da esquerda para a direita dentro do mesmo nível de operação.

Expressões numéricas com DUAS operações aritméticas

74) Realize os cálculos abaixo manualmente e, em seguida, use uma calculadora para verificar a correção dos resultados, inserindo os dados no teclado e observando o resultado na tela.

f) $8 + 4 + 2 =$ _____.

g) $8 - 4 - 2 =$ _____.

h) $8 \times 4 \times 2 =$ _____.

i) $8 \div 4 \div 2 =$ _____.

e) $10 \times 5 \div 2 =$ _____.

f) $10 \div 5 \times 2 =$ _____.

g) $10 + 5 - 2 =$ _____.

h) $10 - 5 + 2 =$ _____.

Expressões numéricas com as 4 operações aritméticas, sem sinais de associação:

Exemplo 1: Qual é o valor da expressão?

$$8 + 12 \div 4 \times 2 - 3$$
$$= 8 + 12 \div 4 \times 2 - 3$$
$$= 8 + 3 \times 2 - 3$$
$$= 8 + 3 \times 2 - 3$$
$$= 8 + 6 - 3$$
$$= 8 + 6 - 3$$
$$= 14 - 3$$
$$= 11$$

Exemplo 2: Coloque os sinais de associação na expressão abaixo indicando a ordem correta dos cálculos.

$$8 + 12 \div 4 \times 2 - 3$$
$$= 8 + (12 \div 4) \times 2 - 3$$
$$= 8 + [(12 \div 4) \times 2] - 3$$
$$= \{8 + [(12 \div 4) \times 2]\} - 3$$

Observação: Na calculadora padrão do smartphone não há teclas de colchetes e chaves. Esse não é um problema, pois pode-se utilizar as teclas parênteses no lugar delas. Num código de programação é muito comum o programador usar só os parênteses. Para estabelecimento da ordem de resolução dos cálculos na ausência dos colchetes e chaves, a regra é começa-se a determinar o valor da expressão resolvendo as expressões dentro dos parênteses mais interno da expressão até chegar aos parênteses externos.

Exemplo: Resolva a expressão numérica abaixo com o auxílio de uma calculadora.

$$\{8 + [(12 \div 4) \times 2]\} - 3$$

Solução: Inserimos a expressão correspondente a de cima substituindo os símbolos de colchetes e chaves por parênteses.

$$\Big(8 + \big((12 \div 4) \times 2\big)\Big) - 3$$

75) Verdadeiro ou Falso? Considere a, b e c inteiros positivos.

vii. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + c$ ( )

viii. $(a \div b) \div c = a \div (b \div c)$ ( )

ix. $a \div (b + c) = a \div b + a \div c$ ( )

x. $(b + c) \div a = b \div a + c \div a$ ( )

xi. $a \div (b \cdot c) = (a \div b) \div c$ ( )

xii. $a \div (b \cdot c) = a \div b \cdot c$ ( ).

APÊNDICE F: PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADE 5

5.1. Operações com números inteiros positivos e negativos

Nesta atividade, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com inteiros são estudadas incluindo os inteiros negativos como operandos. Objetiva-se utilizar a definição de multiplicação e da propriedade das operações inversas, para ensinar como as regras de cálculo foram adaptadas com a inclusão dos números negativos – as regras dos sinais. Além disso, define-se a subtração de números inteiros como a adição de um número ao seu oposto, a qual culmina no entendimento que a diferença entre dois números inteiros quaisquer é um número inteiro. Introduz-se uma breve reflexão sobre os usos dos números negativos e positivos em problemas do cotidiano, de forma conscientizar o aluno sobre a relevância de estudar o assunto. Quanto ao uso da calculadora, são apresentadas as funções das teclas: “módulo” e “+/- “. Aspectos geométricos quanto a localização de pontos na reta numérica é mais evidenciada nessa atividade, bem como as visualizações geométricas dos conceitos de módulo e números opostos entre si. Quanto a comparação de números inteiros, apresenta-se estrategicamente uma alternativa de fazer essa comparação usando as teclas das calculadoras de forma que o aluno possa associar a noção de comparação entre inteiros (relação de ordem :maior do que) com as operações de subtração e divisão. Nas atividades, o uso dos parênteses ficará mais frequente. Aborda-se a importância do uso dos parênteses em certos tipos de expressões numéricas, aqui usadas também num contexto de separação de sinais de números (positivo e/ou negativo) com os sinais dos símbolos das operações - a tecla de parênteses da calculadora nesse sentido será usada para comprovar essas ideias de como a presença ou ausência dos parênteses podem afetar os cálculos de determinadas expressões.

5.2. A revolução dos números positivos e negativos na humanidade

Os números são criações abstratas da mente humana, mas com enorme impacto prático. Desde que começaram a ser registrados, transformaram profundamente as civilizações, pois tornaram as relações sociais, econômicas e culturais mais organizadas. A matemática, nesse sentido, pode ser compreendida como uma linguagem própria, em que os números funcionam como seu alfabeto. Para dominar essa linguagem, estudamos os diferentes conjuntos numéricos e suas regras, uma estrutura de conhecimento que é ensinada em praticamente todas as culturas.

É importante lembrar que a matemática que utilizamos hoje não nasceu de uma única tradição: ela é resultado da contribuição de diversos povos e civilizações ao longo da história. Esse patrimônio coletivo possibilitou avanços em áreas como a Física e a Química e influenciou até mesmo a forma como registramos o tempo histórico, ao utilizar os números negativos para marcar os períodos “antes” e “depois de Cristo” em uma linha do tempo.

No cotidiano, os números são indispensáveis. Com eles, comunicamos nossa idade, registramos documentos de identidade, controlamos saldos bancários, contamos pessoas em uma sala ou medimos temperaturas ao redor do mundo. Sem compreender o significado dos números — sejam positivos ou negativos —, não seríamos capazes de interpretar fusos horários, variações climáticas ou a indicação de estar acima ou abaixo do nível do mar. Basta pensar em uma situação prática: ao viajar, se a previsão do tempo indicar 20 °C, logo entendemos que o clima será agradável; mas se aparecer o símbolo “–” ao lado, como em –20 °C, sabemos que será necessário enfrentar um frio rigoroso.

Esses exemplos mostram que o conhecimento dos números e das operações entre eles não apenas resolve questões simples do dia a dia, mas também fundamenta a resolução de problemas mais complexos. É difícil imaginar a vida sem compreender, por exemplo, os números negativos.

O estudo dos conjuntos numéricos começa com os **números naturais**, que têm origem na contagem. Em alguns contextos, considera-se o número 1 como ponto inicial; em outros, o zero. De qualquer modo, quando os matemáticos ampliaram esse conjunto para incluir os números situados antes do zero, surgiram os **inteiros negativos**, que foram representados pelo sinal de menos (–). Essa convenção simbólica passou a indicar oposição, ausência ou direção contrária, enriquecendo a linguagem matemática e permitindo novas aplicações, como na medição de temperaturas, na representação de altitudes ou no controle de saldos financeiros.

5.3. A representação dos números inteiros em uma reta numérica

A ideia de representar os números inteiros numa reta numérica surgiu como uma forma visual de organizar os números e entender suas relações de ordem, distância e operações.

A reta numérica permite visualizar os números inteiros como pontos igualmente espaçados, com o zero ao centro, os positivos à direita e os negativos à esquerda. Essa disposição facilita a compreensão de conceitos como adição, subtração, valor absoluto e simetria, além de fornecer uma base para o desenvolvimento da álgebra — ramo da matemática que utiliza letras e símbolos para representar e resolver problemas numéricos — e da análise matemática, área que estuda as variações e comportamentos das funções, sendo fundamental para entender temas como limites, gráficos, crescimento e decrescimento de quantidades, além de ser a base do cálculo que aparece no final do Ensino Médio e em cursos superiores.

A construção da reta numérica do conjunto dos números inteiros:

76) Siga o passo a passo abaixo para construir a reta numérica dos números inteiros:

1º Passo – marcação da origem da reta numérica: Traçamos uma reta horizontal e no seu centro, marcamos um ponto que será a *origem*. Vamos escolher a letra O para representar a **origem**. A este ponto associaremos o número zero. Coloque a letra O acima no ponto, e o número 0 abaixo deste ponto.

2º Passo – marcação dos pontos dos números inteiros positivos: Refaça o desenho da reta acima no espaço abaixo e, adicione um ponto à direita da Origem, chame esse ponto de X. A essa distância entre os pontos O e X chamamos de ***unidade***. Abaixo do ponto X, marcamos o número $+1$. Escolhendo a mesma unidade, após o ponto de $+1$, marcamos o ponto de $+2$ e assim sucessivamente. Marque até o ponto do número +3. Acima dos pontos de $+2$ e $+3$, escolha alguma letra para o ponto. Deve ser maiúscula sempre, por convecção, letras maiúsculas representam pontos na reta.

3º Passo – marcação dos pontos dos números inteiros negativos: Refaça o desenho da reta acima no espaço abaixo e, adicione um ponto à esquerda da origem os pontos referentes a -1, -2 e -3. Considere que a mesma unidade de medida usada para os intervalos dos positivos, deverá ser a mesma para os intervalos dos números negativos.

Observações:

1) Entre dois números inteiros consecutivos não há números inteiros.

2) O intervalo entre dois números inteiros possui números decimais.

3) Embora o número -100 ou $+100$ não apareçam indicados na reta que foi desenhada no exercício anterior, isso não significa que eles não façam parte da reta.

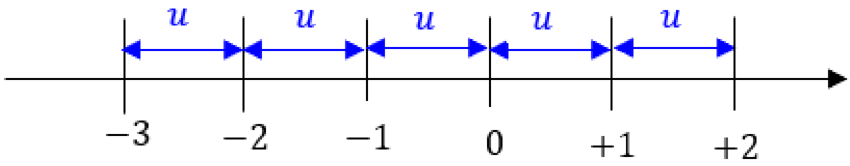
4) Um outro nome para reta numérica é a reta graduada. Em algumas situações do nosso dia a dia, a reta numérica ou graduada aparece constantemente. Por exemplo, a trena usada para medir comprimentos, nos lembra a reta dos naturais. A escala de um termômetro não digital de parede, nos lembra a reta numérica dos inteiros.

5.4. O módulo ou valor absoluto de um número inteiro

Nesta seção, objetiva-se introduzir o conceito de **módulo de um número inteiro.** Inicialmente é apresentada a reta numérica dos números inteiros, buscando a consolidação da ideia de associação de um número a um ponto da reta e, vice-versa. Em seguida, considera-se a distância de pontos dessa reta até o ponto que está situado o número zero. Considerando que um número é positivo, quando este está localizado sobre um ponto localizado à direita do zero, e que o número é negativo, quando está associado a um ponto que está à esquerda do zero, fica claro, que não faz sentido associar ao conceito de módulo de um número a uma quantidade positiva ou negativa. Esse conceito é tão importante, que até uma tecla na calculadora científica há para ele, a qual estudaremos como usá-la.

Enunciado: O **módulo** ou **valor absoluto** de um número inteiro a é denotado por $|a|$, e é a distância entre o ponto que representa esse número na reta numérica e a origem (zero). Para qualquer $a \neq 0$, o módulo $|a|$ é sempre um número positivo (Dante, 2019).

Figura 42: A reta numérica dos números inteiros e unidade de medida.



77) Complete as lacunas abaixo completando a frase: "*A distância entre os pontos correspondentes aos números .... é de ____ unidades. Logo, o módulo de ...... é igual a ____*.":

a) $+2$ e 0 é de _______ unidades. Logo, o módulo de $+2$ é igual a _________.

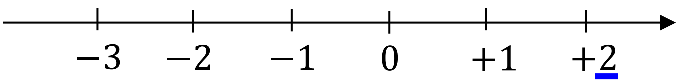
b) -2 e 0 é de _______ unidades. Logo, o módulo de -2 é igual a _________.

c) 0 e 0 é de _______ unidades. Logo, o módulo de -2 é igual a _________.

78) Completar a tabela abaixo.

	Expressão (Linguagem falada)	**Notação Matemática do módulo de um número**	**Resultado**	**Leitura**
a)	O módulo de 5			
b)	O módulo de -5			
c)	O módulo de $+5$	$\|+5\|$	5	O módulo de $+5$ é 5.
d)	O módulo de 0			

79) Sublinhe os módulos dos números inteiros que estão indicados na reta numérica abaixo.



A definição do módulo de um número inteiro:

Enunciado: Define-se o valor absoluto de um elemento $a \in \mathbb{Z}$ como sendo,

$$|a| = \begin{cases} a & para\ a \geq 0 \\ -a & para\ a < 0 \end{cases}$$

Assim, $|a| \geq 0$, para todo $a \in \mathbb{Z}$ e que vale a igualdade se e somente se $a = 0$ (Hefez, 2024)

Exemplo 1: O módulo de $+5$ é denotado como $|+5|$. Como o número no inteiro dos "| |" é positivo, logo $|+5| = +5 = 5$.

Exemplo 2: O módulo de -5 é denotado como $|-5|$. Como o número no inteiro dos "| |" é negativo, logo $|-5| = -(-5) = +5 = 5$.

Exemplo 3: O módulo de 0 é denotado como $|0|$. Como o número no inteiro dos "| |" é zero, logo $|0| = 0$.

Aprendendo a função da tecla "$|x|$"

- O objetivo desta tecla é retirar *o sinal de número* de um número qualquer.

1º PASSO: Ative o modo calculadora científica, para aparecer essa tecla.

2º PASSO: Clicar na tecla $\boxed{|x|}$. Aparecerá no visor:

Visor: $abs($

3º PASSO: Insira o número no qual será aplicado o módulo. Por exemplo, $+7$.

Visor: $abs(+7$

4º PASSO: Clicar na tecla $\boxed{(\ )}$.

Visor: $abs(+7)$

5º PASSO: Clicar na tecla $\boxed{=}$.

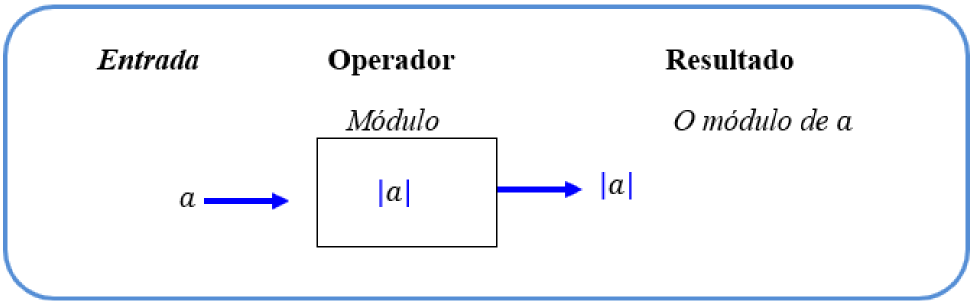
Visor: 7

Verificando na calculadora: O cálculo do módulo

80) Calcule o módulo de -7 usando uma calculadora.

O bloco da tecla do módulo de um número

Figura 43: Diagrama de Blocos do operador "o módulo de um nº inteiro".



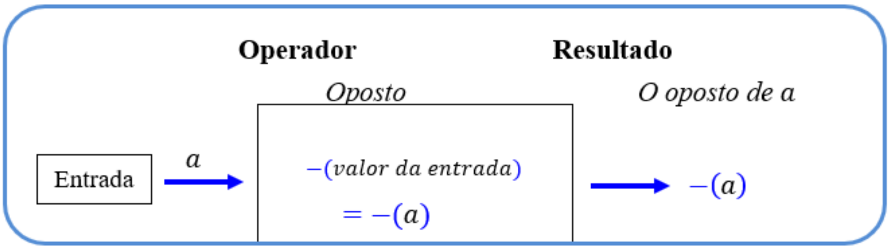
5.5. O oposto de um número inteiro e a tecla $\boxed{+/-}$

Objetiva-se nesta seção uma revisão do conceito de número oposto (ou simétrico) no conjunto dos números inteiros, com o apoio de explicações teóricas, exemplos ilustrativos e atividades práticas. Os exercícios propostos poderão ser resolvidos manualmente, sem o uso da calculadora, ou com o auxílio desse recurso tecnológico, favorecendo tanto a compreensão conceitual quanto a aplicação prática dos conteúdos abordados.

Será apresentado o uso de uma tecla específica da calculadora, destinada à alteração do sinal de um número. Essa tecla permite obter rapidamente o número oposto de um valor e é útil na inserção de expressões numéricas que envolvem números inteiros. Além disso, ao longo do estudo das operações com inteiros, serão exploradas diferentes estratégias para determinar o número oposto. Também será exemplificado o uso desse conceito no contexto da resolução e do balanceamento de equações do 1º grau com uma incógnita.

5.6. O Cálculo do Oposto de um Número Inteiro

Figura 44: Diagrama de Blocos do operador "o oposto de um nº inteiro".

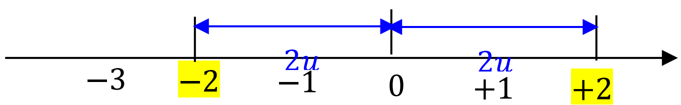


O operador oposto e a sua notação.	Leitura
$-(\blacksquare)$	*Lê-se:* O oposto de ■ é menos $-\blacksquare$.

Definição de números opostos

Enunciado: Dois números inteiros a e b são chamados de opostos quando possuem o mesmo módulo, ou seja $|a| = |b|$, mas apresentam sinais contrários; isto é, na reta numérica, esses números estão equidistantes da origem e se localizam em lados opostos.

Figura 19: Indicação da simetria entre os pontos que estão localizados os números -2 e $+2$ em relação à origem



Exemplo: Os números -2 e $+2$ são *números opostos*, conforme observamos na Fig. 19, eles possuem *sinais contrários* (um é positivo e o outro é negativo) e os *mesmos módulos*:$|+2| = |-2| = 2$ e ambos são equidistantes da origem.

81) Completar a tabela abaixo.

	Expressão (Linguagem falada)	Notação Matemática do oposto de um número	Resultado	Leitura
a)	O oposto de 5			
b)	O oposto de -5			
c)	O oposto de $+5$	$-(+5)$		O oposto de $+5$ é 5.
d)	O oposto de 0			

Observações:

1) O oposto de um número inteiro *positivo* é um número inteiro *negativo*, e vice-versa. O oposto de zero é zero.

2) O uso dos parênteses foi obrigatório em dois casos acima: no cálculo dos opostos de números positivos que aparecem o sinal de $+$ e dos números negativos.

3) O oposto de um número pode ser denominado de o *inverso aditivo* desse número.

Aprendendo a função da tecla "+/−"

- O símbolo dessa tecla indica uma conversão de $+$ para $-$, e vice-versa.
- Para fazer essa operação de mudança de sinal a calculadora faz uma operação aritmética. Nesta seção, você aprenderá uma programação para transformar um número positivo em um número negativo, e vice-versa.

1º PASSO: Clicar em $\boxed{+/-}$. Aparecerá no visor: $(-$

Aparecerá no visor um parêntese aberto "(", o sinal de "−" ao seu lado e *o cursor piscando* ao lado do "−" para o usuário *inserir um valor*.

2º PASSO: Clicar em $\boxed{+}$. Aparecerá no visor: $(+$

Como era de se esperar, o sinal de $-$ transformou-se em $+$.

82) Siga o passo a passo abaixo na calculadora do seu smartphone. Digitar os *números:* (-7), $(+7), +7\ e - 7$.

	Exercício	Tutorial	Tecla Especial	Sequência de comandos	Resultado no visor
a)	Digitar: (-7)	1º tutorial	$\boxed{+/-}$	$\boxed{+/-} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{(\ )}$	(-7)
		2º tutorial	$\boxed{+/-}$	$\boxed{(\ )} \rightarrow \boxed{-} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{(\ )}$	(-7)
b)	Digitar: $(+7)$	1º tutorial	$\boxed{(\ )}$	$\boxed{+/-} \rightarrow \boxed{+} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{(\ )}$.	$(+7)$
		2º tutorial	$\boxed{(\ )}$	$\boxed{(\ )} \rightarrow \boxed{+} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{(\ )}$	$(+7)$
c)	Digitar: -7	1º tutorial	-	1º PASSO*:* Digite (-7); 2º PASSO*:* Delete os parênteses para deixar o número -7 sozinho.	-7
d)	Digitar: $+7$	1º tutorial	-	1º PASSO*:* Digite $(+7)$; 2º PASSO*:* Delete os parênteses para deixar o número $+7$ sozinho.	$+7$

83) Verifique o valor de $-(-7)$ na calculadora do seu smartphone.

Solução: $\boxed{+/-} \rightarrow \boxed{(\ )} \rightarrow \boxed{(-)} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{(\ )} \rightarrow$ Delete o primeiro parêntese $\rightarrow \boxed{(=)}$

84) Usando a tecla $\boxed{+/-}$ da calculadora, obtenha o que se pede: Coloque a sua resposta conforme o exemplo resolvido.

	Cálculo	Sequência de comandos na calculadora	Resultado do Display
a)	O oposto de 7	$\boxed{7} \rightarrow \boxed{+/-} \rightarrow \boxed{(\ )} \rightarrow \boxed{(=)}$	
b)	O oposto de -7		
c)	O oposto do oposto de 7		

5.7. Comparação de Números Inteiros (Noção Geométrica)

Comparar dois números inteiros, envolve verificar se eles são iguais ou diferentes; e, no caso de serem diferentes, determina-se qual deles é o maior ou o menor em relação ao outro.

85) Assinale com um “X” a afirmação verdadeira.

a) ( ) 2 *é maior do que* 3. b) ( ) 2 *é menor do que* 3. c) ( ) 2 *é igual a* 3

> Lei da Tricotomia:
> Dados dois números inteiros a e b, podemos afirmar que
> $ou\ \ a = b\ ou\ a > b\ ou\ a < b$

86) Como se lê as sentenças abaixo?

a) $a < x > b$ Leitura: ____

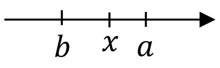
b) $a < x < b$ Leitura: ____

c) $a < x$ Leitura: ____

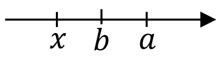
d) $x < a$ Leitura: ____

87) Considerando a marcação dos números inteiros a, b e x na reta numérica em uma reta numérica, assinale a alternativa que onde $a < x < b$.

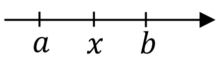
(A)



(B)

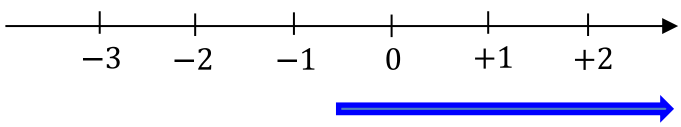


(C)



A comparação de números inteiros

Dois números inteiros podem ser comparados por meio da posição relativa deles na reta numérica (o que está mais à direta é maior).



Sentido de crescimento

Observações:

•A reta numérica é orientada para a direta. Há uma “setinha” que aparece ao final do traço da reta. Este é o sentido de crescimento dos números.

•O *sucessor* de um número inteiro está uma unidade à direta desse número; ele é obtido somando uma unidade a esse número.

•O *antecessor* de um número inteiro está uma unidade à esquerda desse número; ele é obtido subtraindo uma unidade a esse número.

88) Complete as frases com os números inteiros adequados. Considere $x \in \mathbb{Z}$ para resolver o item (d).

a) O antecessor de $+1$ é __________ e o sucessor de +1 é _____________.

b) O antecessor de 0 é ___________ e o sucessor de 0 é ______________.

c) O antecessor de -1 é __________ e o sucessor de -1 é ______________.

d) O antecessor de x é __________ e o sucessor de x é ______________.

89) Complete as lacunas com as palavras adequadas. Opções de palavras: "MENOR, MAIOR, IGUAL, IGUAIS, DIFERENTE, DIFERENTES".

a) Todo número positivo é _______________ do que zero. Exemplo: _____________

b) Todo número negativo é _______________ do que zero. Exemplo: _____________

c) Dois números opostos são _______________ entre si. Exemplo: _____________

d) Um número positivo é __________ do que um número negativo. Exemplo: ________

90) Complete as lacunas escrevendo $<$ (menor do que), $>$(maior do que) ou $=$ (igual a). Propositalmente, na coluna de "notação" foi invertida a ordem dos números em alguns itens.

	Escrita por extenso.	Notação
a)	$+8$ e 8 são números _______________________.	$+8$ ____________ 1.
b)	$+3$ é maior do que 1.	$+3$ $>$ 1.
c)	-13 é _______________________ do que $+10$.	$+10$ _________ -13.
d)	4 é ___________________________ do que -3.	-3 ___________ -1.
e)	-99 é _________________________ do que -1.	-99 __________ -1.

Regra para comparação de números inteiros de mesmo sinal

Considerando o princípio de comparação de ordenação dos números inteiros (quando mais a direta na reta numérica, maior será o número) pode-se entender o porquê dos exemplos abaixo serem verdadeiros.

Exemplo 1: $+2024 > +50$ Justificativa: $+2024$ está a direta de $+50$.

Exemplo 2: $-2024 < -50$ Justificativa: -2024 está à esquerda de -50.

91) Represente a reta numérica dos inteiros indicando localizando os números de -4 até $+5$. E responda as questões a seguir:

a) Quais são os módulos de $-2, -3$ e -4? ____________________

b) Quais são os módulos de $+2, +3\ e + 4$? ____________________

c) É correto afirmar que $-3 < -2 < -1$? ____________________

d) É correto afirmar que $+3 < +2 < +1$? ____________________

92) V(verdadeiro) ou F(falso)?

a) ( ) Dados dois números inteiros *positivos*, o maior dentre eles é aquele que possui o *maior módulo*.

b) ( ) Dados dois números inteiros *negativos*, o maior dentre eles é aquele que possui o *menor módulo*.

5.8. A eliminação dos parênteses:

O uso dos parênteses nas expressões numéricas em $\mathbb{N}$ tinha como única função: ordenar os cálculos nas expressões. Aqui, no estudo do conjunto dos números inteiros, o uso dos parênteses possui uma função adicional a esta. Em $\mathbb{Z}$, admite-se duas coisas: o sinal de $+$ pode aparecer como sinal de número positivo e como sinal da operação de adição; e o sinal de $-$ pode aparecer como sinal de número negativo e como o sinal da operação de subtração. Portanto, quando deseja-se somar ou subtrair um número inteiro positivo ou negativo, é necessário que na expressão seja usado parênteses para que os sinais das operações ($+$ e $-$) não fiquem "colados" com os sinais de números($+$ e $-$). Este é o sentido do uso dos parênteses na formação das expressões numéricas. A regra a seguir ensina como eliminar esses parênteses. Nesse primeiro momento, o sinal $-$ na frente de um número positivo ou negativo, tem o sentido de calcular o oposto de um número. Já, o sinal de $+$ na frente dos parênteses, será interpretado com o comportamento oposto ao de colocar o sinal de $-$ na frente dos parênteses.

1º CASO: Sinais Iguais	**2º CASO:** Sinais Diferentes
Eliminamos os parênteses trocando os sinais iguais pelo sinal $+$	Eliminamos os parênteses trocando os sinais diferentes pelo sinal $-$
$+(+\blacksquare) = +\blacksquare$	$-(+\blacksquare) = -\blacksquare$
$-(-\blacksquare) = +\blacksquare$	$+(-\blacksquare) = -\blacksquare$

Comentários:
Observe na tabela ao lado que quando o sinal $-$ precede os parênteses, o resultado da eliminação dos parênteses, é o oposto do número no interior dos parênteses. Já, se os parênteses forem antecedidos pelo sinal $+$, o resultado da eliminação dos parênteses será o número que está dentro dos parênteses.

93) Calcule o valor das expressões:

a) $-(+8) =$ ____ b) $-(-7) =$ ____ c) $+(-2) =$ ____ d) $+(+1) =$ ____

5.9. A operação de adição com números inteiros

94) Calcule os valores das expressões a seguir.

a) $+3 - 4 =$ ______ f) $+3 + 0 =$ ______

b) $+3 - 3 =$ ______ g) $+3 + 1 =$ ______

c) $+3 - 2 =$ ______ h) $+3 + 2 =$ ______

d) $+3 - 1 =$ ______ i) $+3 + 3 =$ ______

e) $+3 - 0 =$ ______ j) $+3 + 4 =$ ______

Existem diversas formas de resolver expressões do tipo $\pm a \pm b$. Uma delas é o raciocínio "andando na reta", onde o primeiro número representa a localização de uma pessoa na reta numérica e o segundo número indica a movimentação que a pessoa fará nessa reta, os sinais (deste segundo valor) indicam o sentido de deslocamento: $+$ (deslocamento para a direta e $-$ (deslocamento para à esquerda); e, o módulo desse segundo número, representa quantas unidades dessa reta a pessoa se deslocará. O resultado dessa operação é a posição final dessa pessoa após a movimentação.

As expressões do tipo $(\pm a) + (\pm b)$:

95) Calcule os valores das expressões a seguir.

a) $(+3) + (-4) = +3 - 4 = -1$

b) $(+3) + (-3) =$ _______

c) $(+3) + (-2) =$ _______

d) $(+3) + (-1) =$ _______

e) $(+3) + (0) =$ _______

f) $(+3) + (0) =$ _______

g) $(+3) + (+1) =$ _______

h) $(+3) + (+2) =$ _______

i) $(+3) + (+3) =$ _______

j) $(+3) + (+4) =$ _______

5.10. A operação de subtração com números inteiros

Definição: Para todo a e b números inteiros, a diferença entre a e b é igual a soma de a com o oposto de b. $a - b = a + (-b)$ Esta igualdade indica que a subtração com números inteiros, pode ser calculada a partir da operação de adição.

96) Calcule os valores das expressões a seguir.

a) $(+3) - (-4) = (+3) + (+4) = +7$

b) $(+3) - (-3) =$ _______

f) $(+3) - (0) =$ _______

g) $(+3) - (+1) =$ _______

c) $(+3) - (-2) =$ ______

d) $(+3) - (-1) =$ ______

e) $(+3) - (0) =$ ______

h) $(+3) - (+2) =$ ______

i) $(+3) - (+3) =$ ______

j) $(+3) - (+4) =$ ______

5.11. A operação de multiplicação com números inteiros:

A tabela a seguir mostra como obter os valores dos produtos de dois inteiros quaisquer usando a definição de multiplicação com inteiros positivos, e a definição do oposto de um número.

1º CASO Dois números positivos	**2º CASO** Números com sinais contrários		**3º CASO** Dois números negativos
$(+)\cdot(+)$	$(+)\cdot(-)$	$(-)\cdot(+)$	$(-)\cdot(-)$
$(+\mathbf{2})\cdot(+\mathbf{3})$	$(+\mathbf{2})\cdot(-\mathbf{3})$	$(-\mathbf{2})\cdot(+\mathbf{3})$	$(-\mathbf{2})\cdot(-\mathbf{3})$
$(+2)\cdot(+3)$ $= (2)\cdot(3)$ $= 2\cdot 3$ $= 6$	$(+2)\cdot(-3)$ $= (2)\cdot(-3)$ $= 2\cdot(-3)$ $= (-3)\cdot 2$ $= (-3) + (-3)$ $= -6$	$(-2)\cdot(+3)$ $= (-2)\cdot(3)$ $= (-2)\cdot 3$ $= (-2) + (-2)$ $+ (-2)$ $= -6$	$(-2)\cdot(-3)$ $= -[2\cdot(-3)]$ $= -[-6]$ $= +6$

Observações:

1) Nos dois primeiros casos acima, há um número positivo, o que nos permite aplicar diretamente a definição de multiplicação para números naturais.

2) No 1º e 2º casos, constatamos que $(+2)\cdot(-3)$ *e* $(-2)\cdot(+3)$ possuem os mesmos resultados, já que os fatores possuem módulos iguais, diferindo apenas do sinal.

3) No 3º caso, para multiplicar dois números negativos, podemos colocar em evidência o sinal de "$-$" do 1º fator e dentro dos colchetes colocar o 1º fator positivo multiplicado pelo 2º fator negativo. Desta forma, resolvemos o que está dentro dos colchetes e aplicamos trocamos o sinal do resultado encontrado dentro dos parênteses, o que resulta em um número positivo.

Regra dos Sinais da Multiplicação

Sinais Iguais

Dados a e b números inteiros quaisquer,

$$(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$$
$$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$$

Sinais Contrários

Dados a e b números inteiros quaisquer,

$$(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$
$$(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$$

97) Calcule os valores das expressões a seguir.

a) $(+3) \cdot (-4) = -(3 \cdot 4) = -12$

b) $(-3) \cdot (+3) =$ _______

c) $(+8) \cdot (-1) =$ _______

d) $(-6) \cdot (-1) =$ _______

e) $(-3) \cdot (0) =$ _______

f) $(-8) \cdot (+9) =$ _______

g) $-8 \cdot (-9) =$ _______

h) $+8 \cdot (-9) =$ _______

i) $(+10) \cdot (+10) =$ _______

j) $(-1) \cdot (+4) =$ _______

98) Verifique $(-a) \cdot (b) = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ para $a = 4$ e $b = -7$.

5.12. A operação de divisão com números inteiros: $(\pm a) \div (\pm b)$

99) Encontre o valor desconhecido, aplicando a propriedade da relação inversa (multiplicação e divisão). Em seguida, procure deduzir a regra dos sinais da divisão pelos seus resultados.

a) $(+8) \div (+2) = \boxed{?}$ $\Rightarrow$ $\boxed{?} \cdot (+2) = (+8)$ $\Rightarrow$ $\boxed{?} = +4$

b) $(+8) \div (-2) = \boxed{?}$ $\Rightarrow$ ________________ $\Rightarrow$ $\boxed{?} =$ ______ $+\,4$

c) $(-8) \div (+2) = \boxed{?}$ $\Rightarrow$ ________________ $\Rightarrow$ $\boxed{?} =$ ______ $+\,4$

d) $(-8) \div (-2) = \boxed{?}$ $\Rightarrow$ ________________ $\Rightarrow$ $\boxed{?} =$ ______ $+\,4$

Quadro da *Regra dos Sinais* da Divisão

Sinais Iguais:

Dados a e b números inteiros quaisquer,

$$(+a) \div (+b) = +(a \div b)$$

$$(-a) \div (-b) = +(a \div b)$$

Sinais Contrários:

Dados a e b números inteiros quaisquer,

$$(+a) \div (-b) = -(a \div b)$$

$$(-a) \div (+b) = -(a \div b)$$

100) Calcule os valores das expressões a seguir.

a) $(+10) \div (-2) = -5$

b) $(+10) \div (+1) =$ ______

c) $(0) \div (-1) =$ ________

d) $(-2) \div (+10) =$ ______

e) $(+3) \div (-3) =$ ______

f) $(+3) \div (+3) =$ ______

g) $(-6) \div (+3) =$ ______

h) $(+6) \div (-3) =$ ______

i) $(-3) \div (-4) =$ ______

j) $(+3) \div (+4) =$ ______

Quadro da *Regra dos Sinais* da Divisão (*numa outra perspectiva*)

Sinais Diferentes

Dados a e b números inteiros, onde b é diferente de zero, vale a relação a seguir.

$$(-a) \div (b) = a \div (-b) = -(a \div b)$$

Notação de fração: $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$

Sinais Iguais

Dados a e b números inteiros, onde b é diferente de zero, vale a relação a seguir.

$$(-a) \div (-b) \ = \ +(a \div b)$$

$Notação\ de\ fração$: $$\frac{-a}{-b} \ = \ +\frac{a}{b}$$

5.13. A comparação de números inteiros através de operações aritméticas.

Você sabia que.... é possível usar a calculadora para saber se 6 é menor ou maior do que determinado número?

1ª Estratégia: Tecla da subtração

Essa estratégia está associada ao conceito de diferença entre dois números. Por meio dela, é possível não apenas verificar se um número é maior, menor ou igual a outro, mas também identificar quantas unidades os separam, ou seja, quantas unidades um número excede ou é inferior ao outro.

Critérios para a comparação usando $\boxed{-}$

Dados a e b dois números inteiros quaisquer.

$1^{\underline{o}}$ ***caso***	$2^{\underline{o}}$ ***caso***	$3^{\underline{o}}$ ***caso***
$a - b = 0 \implies a = b$	$a - b > 0 \implies a > b$	$a - b < 0 \implies a < b$

2ª Estratégia: Tecla da Divisão

Essa estratégia está relacionada ao conceito de *razão* entre dois números. Por meio dela, é possível não apenas comparar se um número é maior, menor ou igual a outro, mas também determinar quantas vezes um número é maior ou menor em relação ao outro.

Critérios para a comparação usando $\boxed{\div}$

1º Estudo: O quociente entre números positivos.

101) Sejam a e b números inteiros não negativos, com $b \neq 0$.

$1^{\underline{o}}$ ***caso***	$2^{\underline{o}}$ ***caso***
$\frac{a}{b} = 0 \implies a = 0$	$0 < \frac{a}{b} < 1 \implies 0 < a < b$

$3^{\underline{o}}$ ***caso***	$4^{\underline{o}}$ ***caso***
$\frac{a}{b} = 1 \implies a = b$	$\frac{a}{b} > 1 \implies a > b > 0$

Escolha valores para a e b em cada caso acima, considerando a e b dois números inteiros positivos.

2º Estudo: O quociente entre números positivos

102) É possível que dois números inteiros negativos simultaneamente satisfaçam algum caso do quadro do exercício anterior? Se sim, mostre, de acordo com a sua intuição, como seriam os valores de $\boxed{?}$.

Sejam a e b números *inteiros negativos*, com $b \neq 0$.

$1^{\underline{o}}$ ***caso***	$2^{\underline{o}}$ ***caso***
$\frac{a}{b} = 0 \implies \boxed{?}$	$0 < \frac{a}{b} < 1 \implies \boxed{?}$

$3^{\underline{o}}$ ***caso***	$4^{\underline{o}}$ ***caso***
$\frac{a}{b} = 1 \implies \boxed{?}$	$\frac{a}{b} > 1 \implies \boxed{?}$

103) Encontre valores para as variáveis que foram as frações abaixo de tal forma que elas estejam no intervalo indicado na reta. Considere a reta abaixo a reta dos números racionais.

$$\frac{a}{b} < -1 < \frac{c}{d} < 0 < \frac{x}{y} < 1 < \frac{z}{w}$$

104) Como seria o critério para comparar dois números inteiros pela divisão quando os quocientes são números negativos?

$1^{\underline{o}}$ *caso*	$2^{\underline{o}}$ *caso*	$3^{\underline{o}}$ *caso*
$\frac{a}{b} < -1 \Rightarrow \boxed{?}$	$\frac{a}{b} = -1 \Rightarrow \boxed{?}$	$-1 < \frac{a}{b} < 0 \Rightarrow \boxed{?}$

105) Complete a tabela.

	Pergunta	Resposta	Comparação Pela Diferença	Comparação Pelo Quociente
a)	6 é maior do que 2?	( ) SIM ( ) NÃO	$6 - 2 = 4$	$\frac{6}{2} = 3$
b)	2 é maior do que 6?	( ) SIM ( ) NÃO		
c)	-5 é maior do que -8?	( ) SIM ( ) NÃO		
d)	-5 é menor do que $+8$?	( ) SIM ( ) NÃO		
e)	-18 é maior do que -9?	( ) SIM ( ) NÃO		
f)	-9 é maior do que $+8$?	( ) SIM ( ) NÃO		
f)	-1 é maior do que $+1$?	( ) SIM ( ) NÃO		
g)	0 é maior do que $+1$?	( ) SIM ( ) NÃO		

Comentários: Usar a razão para comparar dois números inteiros ajuda os alunos a desenvolverem o raciocínio proporcional e a compreenderem relações multiplicativas entre grandezas, inclusive em situações de variação direta e inversa. Ela é muito utilizada na Geometria Plana, onde calcula-se a razão entre dois segmentos de reta, e assim, pode-se comparar os tamanhos desses segmentos.

5.14. O conceito de números opostos aplicados em equações e demonstrações matemáticas.

A definição de números opostos (*numa outra perspectiva*)

Definição: Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $a + a' = 0$. Denominamos esse a' como o oposto de a. O valor de $a' = -a$. Portanto, O *oposto* ou *simétrico* de um número inteiro é o valor que somado com esse número é igual a zero.

A ideia do número oposto na resolução de equações do 1º grau com uma incógnita através do método do balanceamento.

106) Resolva a equação $a + x = 0$ considerando a uma constante inteira e x a incógnita da equação.

Solução:

$$a + x = 0$$

$$x + a = 0$$

$$x + a + (-a) = 0 + (-a)$$

$$x + [a + (-a)] = 0 + (-a)$$

$$x + 0 = -a$$

$$x = -a$$

Portanto, x é o oposto de a.

Solução: $S = \{-a\}$

A ideia do número oposto em outros tipos de demonstrações:

107) Provar que $-0 = 0$.

Solução: Como $0 \in \mathbb{Z}$, logo existe $0' \in \mathbb{Z}$ tal que $0 + 0' = 0$. Por definição, $0'$ é o oposto de 0. O valor de $0' = -0$. Por outro lado, pela propriedade do elemento neutro da adição, se $0 + 0' = 0$, logo $0' = 0$. Logo, como $0' = -0$ e $0' = 0$, temos que $-0 = 0$.

A expressão $" - b"$:

1ª Interpretação:	2ª Interpretação:
$-b = 0 - b$	$-b = -1 \cdot b$
O oposto de b é igual a diferença entre 0 e b.	O oposto de b é igual ao produto de -1 por b.
Exemplo: $-4 = 0 - 4$	Exemplo: $-4 = (-1) \cdot 4$

Observação: Para calcular o oposto de x, basta multiplicar x por -1.

APÊNDICE G: PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADE 6

6.1. O Conjunto dos Números Racionais

Nesta atividade é apresentado o conceito de número racional oferecendo fundamentos teóricos que possibilitam aos estudantes desenvolverem a capacidade de resolver situações-problema envolvendo números decimais exatos, dízimas periódicas e as frações formadas por números inteiros.

Ao longo desta atividade, busca-se aprofundar a compreensão do aluno sobre a relação entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais, evidenciando as conexões e ampliações conceituais que ocorrem nessa transição. Além disso, introduz-se o estudo da **avaliação dos erros** decorrentes da aproximação numérica de um número, promovendo uma reflexão crítica sobre a precisão dos valores utilizados em contextos matemáticos e aplicados.

A propriedade do fechamento em um conjunto numérico

Definição: Dizemos que um conjunto numérico é **fechado** para uma operação se, ao realizar essa operação entre quaisquer dois elementos do conjunto, o resultado também pertence a esse conjunto. (Adaptado de: HUNGERFORD, Thomas W. Algebra.Springer-Berlag,1974)

Exemplo: A operação de adição é fechada em $\mathbb{N}$, isto é, se $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$, então $a + b \in \mathbb{N}$.

Operação	Operações com fechamento em $\mathbb{N}$	Operações com fechamento em $\mathbb{Z}$
Adição	☑ Sim	☑ Sim
Subtração	✕ Não	☑ Sim
Multiplicação	☑ Sim	☑ Sim
Divisão	✕ Não	✕ Não

As operações de subtração e divisão não são fechadas em $\mathbb{N}$

Se $a = 2$ e $b = 5$, então $a - b = -3 \notin \mathbb{N}$.

Se $a = 3$ e $b = 2$, então $a \div b = 1{,}5 \notin \mathbb{N}$.

A operação de divisão não é fechada em $\mathbb{Z}$

Se $a = 3$ e $b = 2$, então $a \div b = 1{,}5 \notin \mathbb{Z}$.

Você sabia que o fato do resultado da divisão entre dois números inteiros nem sempre ser um número inteiro está relacionado à definição do conjunto dos números racionais? Esse conjunto, representado pela letra $\mathbb{Q}$, foi estruturado para assegurar que a **propriedade do fechamento** também fosse válida para a operação de divisão entre inteiros (com exceção da divisão por zero), garantindo, assim, que o resultado dessa operação pertença ao próprio conjunto dos racionais.

Operação	Operações com fechamento em $\mathbb{N}$	Operações com fechamento em $\mathbb{Z}$	Operações com fechamento em $\mathbb{Q}$
Adição	☑ Sim	☑ Sim	☑ Sim
Subtração	✕ Não	☑ Sim	☑ Sim
Multiplicação	☑ Sim	☑ Sim	☑ Sim
Divisão	✕ Não	✕ Não	☑ Sim

O conjunto dos números racionais

Símbolo do Conjunto	**Nome do Conjunto**	**Definição**	**Observações**
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos Números **Racionais**	$\left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \ e \ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$	Nesse conjunto aparecem: ☑ As **frações** com quocientes inteiros, onde o segundo termo é diferente de zero; ☑ Os **números inteiros** (positivos, negativos e zero); ☑ Os **números decimais exatos** (positivos e negativos); ☑ As **dízimas periódicas** (positivas e negativas).

Exemplos:

(1) $\frac{1}{5}$ é um nº racional, pois $1 \in \mathbb{Z} \ e \ 5 \in \mathbb{Z}^*$. (4) -3 é um número racional, pois $-3 = \frac{-6}{2}$.

(2) $\frac{-4}{7}$ é um nº racional, pois $-4 \in \mathbb{Z} \ e \ 7 \in \mathbb{Z}^*$. (5) 0,25 é um número racional, pois $0{,}25 = \frac{1}{4}$.

(3) $\frac{5}{0}$ não é um nº racional, pois $0 \notin \mathbb{Z}^*$. (6) 0,555... é um número racional, pois $0{,}555\ldots = \frac{5}{9}$.

Você sabia que existem infinitos pares de números inteiros cujos quocientes são iguais a um determinado número racional? Por exemplo, o número 5 pode ser escrito na forma de fração como $\frac{10}{2}$, $\frac{25}{5}$ e $\frac{5}{1}$.

Observações:

1) A expressão $\frac{a}{b}$ representa o quociente entre dois números inteiros a e b (com $b \neq 0$). Esse quociente pode resultar em um número inteiro, um decimal exato ou uma dízima periódica, o que caracteriza esses elementos como pertencentes ao conjunto dos números racionais. Além disso, esses resultados podem ser positivos ou negativos, uma vez que a divisão entre inteiros com sinais opostos também é possível dentro desse conjunto.

2) Vale destacar que o número zero também é considerado um número racional, pois pode ser representado como uma fração na forma $\frac{0}{b}$, com $b \neq 0$, o que satisfaz a definição de número racional.

3) Para provar que um determinado número é racional, é necessário encontrar dois inteiros, cujo quociente resulte nesse valor.

4) Existem alguns métodos práticos que permitem representar números da forma decimal para a forma fracionária.

6.2. Conversão entre representações decimal e fracionária de números racionais

(I)Números inteiros: Da representação decimal para a representação em fração

A forma mais simples de passar a representação inteira de um número racional para a sua representação fracionária, é colocando 1 abaixo dele.

Exemplo: Transformar os números inteiros indicados no conjunto abaixo em fração.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Colocando os números inteiros na forma de fração, temos:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -\frac{3}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, +\frac{1}{1}, +\frac{2}{1}, +\frac{3}{1}, \ldots\}$$

(II)Números decimais exatos: Da representação decimal para a representação em fração

A forma mais simples de representar um número decimal exato na sua forma fracionária é colocando esse número na forma de *fração decimal*[14].

[14] Fração decimal é um tipo especial de fração cujo denominador é uma potência de 10, ou seja, **10**, **100**, **1000**, **10000**, etc.

Exemplo: Transformar os números abaixo em fração decimal.

a) $0{,}2 = \frac{2}{10}$ b) $1{,}25 = \frac{125}{100}$ c) $12{,}398 = \frac{12398}{1000}$

Exercício de Verificação. Use a sua calculadora dividindo os termos de cada **fração decimal** para verificar as igualdades acima.

> Regra Prática: Elimine a vírgula do número decimal, formando o numerador da fração. O denominador desta fração será "10" para números com uma casa decimal, "100" para números com duas casas decimais, "1000" para números com três casas decimais e assim por diante.

Observação: Essa regra está baseada no seguinte raciocínio: Se um número possui uma casa decimal, devemos multiplicá-lo é dividi-lo por 10. Se um número possui duas casas decimais, devemos multiplicá-lo é dividi-lo por 100.

(III)As dízimas periódicas: Da representação decimal para a representação em fração

Uma **dízima periódica simples** é um número decimal infinito e periódico, em que logo após a vírgula, aparece uma sequência de algarismos que se repete indefinidamente.

Uma **dízima periódica composta** é um número decimal infinito e periódico, em que os algarismos que se repetem não vêm imediatamente após a vírgula, ou seja, há uma **parte não periódica** entre a vírgula e o início da repetição.

6.3. Dízimas periódicas simples com parte inteira igual a zero.

> Regra Prática: O numerador da fração desejada será o período da dízima. O denominador da fração desejada será 9 para uma dízima que possui um dígito no período, será 99 para uma dízima que possuir dois dígitos no período, será 999 para uma dízima que possuir três dígitos no período, e assim por diante.

Dízima Periódica Simples com período $\boldsymbol{A}$	Dízima Periódica Simples com período $\boldsymbol{AB}$	Dízima Periódica Simples com período $\boldsymbol{ABC}$
$0,AAA\ldots = \frac{A}{9}$	$0,ABABAA\ldots = \frac{AB}{99}$	$0,ABCABCABC\ldots = \frac{ABC}{999}$
$0{,}777\ldots = \frac{7}{9}$	$0{,}252525\ldots = \frac{25}{99}$	$0{,}108108108\ldots = \frac{108}{999}$

Use a sua calculadora dividindo os termos de cada **fração geratriz**[15] para verificar as igualdades acima.

6.4 Dízimas periódicas simples com parte inteira diferente de zero

> Regra Prática: Somamos a parte inteira da dízima com a fração geratriz da parte decimal.

Exemplo: Transformar 1,555 ... em fração decimal.

$1{,}555\ldots = 1 + 0{,}555\ldots = 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}$ *Resultado:* $1{,}555\ldots = \frac{14}{9}$

108) Determine um par de números inteiros cujo quociente seja igual ao valor fornecido.

a) $2 = \frac{\square}{\square}$

b) $1{,}8 = \frac{\square}{\square}$

c) $0{,}777\ldots = \frac{\square}{\square}$

d) $-6 = \frac{\square}{\square}$

e) $-0{,}25 = \frac{\square}{\square}$

f) $-1{,}777\ldots = \frac{\square}{\square}$

Observação: Há um método geral e sistemático para determinar as frações geratrizes de dízimas periódicas, sejam elas simples ou compostas. Embora esse procedimento não seja o foco desta atividade, é importante o seu estudo. No *YouTube* há diversos vídeos sobre essa tema que podem ser localizados utilizando como palavras-chave: “Frações Geratrizes de Dízimas Periódicas”.

6.4. A reta numérica dos números racionais

Diferentemente da reta dos números inteiros, na reta dos números racionais, há pontos entre dois inteiros que estão associados a números racionais (na representação decimal, estes pontos representarão os números decimais exatos e as dízimas periódicas).

[15] Fração geratriz é a fração que gera (ou representa) um número decimal exato ou periódico.

A localização de números decimais exatos com UMA casa decimal na reta numérica entre dois números inteiros consecutivos.

109) Represente a reta numérica dos racionais, indicando nela os números inteiros 0 e 1; e os números decimais exatos com uma casa decimal entre 0 e 1.

110) Represente a reta numérica dos racionais, indicando nela os números inteiros -1 e 0; e os números decimais exatos com uma casa decimal entre -1 e 0.

A localização de números decimais exatos com DUAS casas decimais na reta numérica

111) Trace uma linha horizontal de 15 cm de comprimento. Sobre essa linha, marque o ponto do número 1,1 a uma distância de 10cm do ponto do número 1,2. Divida o intervalo entre 1,1 e 1,2 em 10 partes iguais. Em seguida, marque os números decimais exatos que possuem duas casas decimais neste intervalo.

O *módulo* ou *valor absoluto* de um número racional

Definição: O *módulo* ou *valor absoluto* de um número racional $\frac{a}{b}$ é denotado por $\left|\frac{a}{b}\right|$. Ele representa a distância entre o ponto da reta que está situado o número $\frac{a}{b}$ até a origem da reta.

O *oposto* ou *simétrico* de um número racional

Definição: O *oposto* ou *simétrico* de um número racional $\frac{a}{b}$ é o valor que somado com esse número é igual a zero. Portanto, o oposto de $\frac{a}{b}$ é $-\frac{a}{b}$.

Observação: O oposto ou simétrico de um número racional é conhecido mais formalmente como o **inverso aditivo**.

A Lei da Tricotomia para os números racionais: Dados os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$. Apenas um dos casos abaixo é verdadeiro:

1º CASO	2º CASO	3º CASO
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

6.5. Comparação de números racionais

Para comparar dois números racionais na forma de fração usando a calculadora, podemos comparar os quocientes correspondentes a cada fração. O visor da calculadora exibirá esses resultados na representação decimal. Os quocientes na representação podem ser *números inteiros* ou *números decimais*.

Casos possíveis, dados dois números racionais, podem aparecer:

- A comparação entre dois *números inteiros*;
- A comparação entre dois *números decimais*;
- A comparação entre *frações*;
- A comparação entre números na representação decimal: números inteiros com números decimais;
- A comparação entre um número na forma decimal com frações.

> Como todos os números racionais podem ser colocados na forma de fração, onde o segundo termo é diferente de zero, logo, no estudo do conjunto dos números racionais os cálculos com frações são essenciais.

- Inicialmente, vamos aprender a *comparar* dois números racionais na *forma de fração*.

- Será necessário, nesse primeiro momento, revisar o assunto frações[16], conforme é estudado no 6º ano, onde os seus termos são números inteiros positivos. Caso você tenha facilidade nesse tópico, faça direto os exercícios.

Frações equivalentes (possuem o mesmo quociente)

Propriedade: Sejam os números $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde a, b, c e d são números inteiros positivos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

Exemplo 1: $\frac{5}{4}$ e $\frac{10}{8}$ são frações equivalentes, pois $5 \cdot 8 = 40$ e $10 \cdot 4 = 40$. Portanto, $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$.

Exemplo 2: $\frac{1}{4}$ e $\frac{10}{8}$ *não* são frações equivalentes, pois $1 \cdot 8 = 8$ e $10 \cdot 4 = 40$. Portanto, $\frac{1}{4} \neq \frac{10}{8}$.

112) Verifique com uma calculadora que $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ e que $\frac{1}{4} \neq \frac{10}{8}$.

Como obter frações equivalentes a partir de uma fração.

Para obter frações equivalentes a uma dada fração, podemos usar a propriedade abaixo.

Propriedade: Dados $a \in \mathbb{Z}_+^*$ e $a \in \mathbb{Z}_+^*$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ e tomando um número inteiro positivo $k \neq 0$, temos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número inteiro k diferente de zero, obtém-se uma ***fração equivalente*** à original.

No estudo das frações, observa-se que existem infinitas frações equivalentes a uma dada fração.

[16] Segundo pesquisas feitas nesse trabalho de dissertação com alunos de 1º ano do Ensino Médio, mais do que a metade dos alunos disseram que possuem muita dificuldade no assunto operações com frações.

Simplificação de frações e a forma irredutível de uma fração

Simplificar uma fração significa reduzir os seus números (numerador e denominador) a uma forma mais simples, sem alterar o seu valor, através da divisão por um número que seja um divisor comum de ambos.

Propriedade: Dados a e b dois números inteiros positivos e k um divisor comum de a e de b.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração $\frac{a}{b}$ por um mesmo número inteiro k, que é um divisor comum de a e de b, diferente de zero, obtém-se uma ***fração equivalente*** à original. Se $k \neq 1$, logo a fração obtida será uma fração com termos reduzidos.

Quando o máximo divisor comum entre os termos de uma fração é 1, dizemos que esta fração está na ***forma irredutível.***

Observação: É muito comum que as respostas de muitos exercícios sejam deixadas na forma de fração irredutível.

Exemplo: A *forma irredutível* da fração $\frac{10}{8}$ é obtida dividindo os seus termos por 2.

$$\frac{10}{8} = \frac{10 \div 2}{8 \div 2} = \frac{5}{4}$$

Como não existe divisores comuns além do 1 para os termos da fração $\frac{5}{4}$, logo essa fração é dita estar na *forma irredutível*.

Redução de duas frações ao mesmo denominador

Como reduzir duas frações a um mesmo denominador?

Sejam as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde a, b, c e d são números inteiros positivos podemos fazer com essas duas frações tenham o mesmo denominador (reduzir as frações ao mesmo denominador) seguindo o método abaixo:

[1º Passo] multiplicamos ambos os termos da fração $\frac{a}{b}$ pelo denominador da fração $\frac{c}{d}$, que é o "d". Em seguida, multiplicamos separadamente a fração $\frac{c}{d}$ pelo denominador da outra fração que é o número "b".

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \quad e \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$$

Como $b \cdot d = d \cdot b$, logo as frações equivalentes encontradas possuem o mesmo denominador.

Portanto, como $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{b \cdot d}$,

[2º Passo] obtidas as frações equivalentes a $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ com o mesmo denominador, temos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, os numeradores das respectivas frações equivalentes forem iguais, isto é, $a \cdot d = c \cdot b$. No caso de os numeradores serem diferentes, para saber qual é a maior

Exemplo: Compare as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{10}{8}$ utilizando o método de redução de frações ao mesmo denominador.

Solução: Multiplicamos os termos da fração $\frac{1}{4}$ por 8, que é o denominador da outra fração, temos:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{8}{32}$$

Multiplicamos os termos da fração $\frac{10}{8}$ por 4, que é o denominador da outra fração, temos:

$$\frac{10}{8} = \frac{10 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{40}{32}$$

Comparando as duas frações equivalentes, temos que a fração $\frac{40}{32}$ é maior do que a fração $\frac{8}{32}$.

Portanto, podemos escrever: $\frac{40}{32} > \frac{8}{32}$ ou $\frac{10}{8} > \frac{1}{4}$.

113) Compare as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{10}{8}$ utilizando a comparação desses quocientes na forma decimal.

Método de comparação de frações (*usando a operação de subtração*[17]) e uma Calculadora.

Como obter o valor de $\frac{9}{3} - \frac{8}{4}$ usando uma calculadora?

Solução: Para encontrar o valor da expressão $\frac{9}{3} - \frac{8}{4}$ na calculadora, basta inserirmos a expressão $(9 \div 3) - (8 \div 4)$ e clicarmos em $\boxed{=}$.

$$\frac{9}{3} - \frac{8}{4} = 3 - 2 = \mathbf{1}$$

Em geral, dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, considerando que a, b, c e d sejam números inteiros positivos, para obter o valor da diferença entre essas frações usando uma calculadora, utiliza-se as teclas de parênteses, de divisão e a tecla de subtração.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = (a \div b) - (c \div d)$$

Considerando esse procedimento seja feito utilizando uma calculadora, é necessário usarmos a ideia de fração como quociente, logo usaremos a *tecla de divisão* para entrar com as frações na calculadora.

Para saber se a *primeira* fração é maior do que a *segunda*, basta verificarmos o sinal do resultado da diferença entre essas frações encontrado no visor da calculadora. Observe os casos possíveis no quadro a seguir:

Comparação de frações pela operação de subtração		
1º CASO	**2º CASO**	**3º CASO**
O resultado *é negativo*.	O resultado *é zero*.	O resultado *é positivo*.
$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0 \implies \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0 \implies \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0 \implies \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

[17] A comparação de dois números racionais usando a operação de subtração será utilizada mais a frente no estudo do cálculo do erro absoluto.

Exemplo 1: $\frac{9}{3} - \frac{8}{4} = (9 \div 3) - (8 \div 4) = \mathbf{1}$, que é um número positivo. Portanto, $\frac{9}{3} > \frac{8}{4}$.

Exemplo 2: $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} = (1 \div 8) - (1 \div 4) = \mathbf{-0,125}$, que é um número negativo.

Portanto, $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$.

114) Compare as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{10}{8}$ utilizando a comparação pelo método da diferença entre esses valores. Use a calculadora.

115) Compare os pares de frações a seguir usando os símbolos <, > ou =. Justifique as suas respostas através de um dos métodos de comparação de frações ensinados até aqui.

a) $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$ c) $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$

6.6. Operações com frações

Dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde a, b, c e d são números inteiros positivos

Operações com frações		
Adição de Frações	**Subtração de Frações**	**Multiplicação de Frações**
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

6.7. Operações com números racionais – Adição, Subtração e Multiplicação

Comentários gerais sobre os números racionais, as operações com racionais e as propriedades operatórias.

- O conjunto dos números inteiros é um subconjunto do conjunto dos números racionais.
- O conjunto $\mathbb{Q}$ herda todas as propriedades operatórias que estudamos no conjunto $\mathbb{Z}$ adaptadas para números fracionários.

- Observe que a fórmula da adição de frações e da subtração são semelhantes. Isso já era esperado, pois a diferença entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é igual à soma de $\frac{a}{b}$ com o oposto de $\frac{c}{d}$. Ou seja, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{c}{d}\right)$, portanto, podemos deduzir a fórmula da subtração de duas frações, a partir da fórmula da adição de frações.
  - No conjunto dos números racionais é válida a **propriedade do inverso aditivo e a do inverso multiplicativo**[18] de um número racional. A operação de divisão definida em $\mathbb{Q}$ está baseada no conceito de inverso multiplicativo.

Propriedade do Inverso Aditivo em $\mathbb{Q}$. Na adição de números racionais existe uma propriedade chamada **inverso aditivo**. Essa propriedade diz o seguinte: Todo número racional possui um outro número que, ao ser adicionado a ele resulta no número 0. Esse "outro número" é chamado de inverso aditivo, oposto ou simétrico desse número.

Seja $\boldsymbol{x}$ um número racional.

- O inverso aditivo, oposto ou simétrico de $\boldsymbol{x}$ é $-\boldsymbol{x}$.
- Todo número somado ao seu oposto (inverso aditivo) é igual a 0.

$$x + (-x) = 0$$

Seja $\frac{a}{b}$ um número racional, o oposto de $\frac{a}{b}$ é $-\frac{a}{b}$.

A propriedade do inverso multiplicativo: Na multiplicação de números racionais, existe uma propriedade chamada **inverso multiplicativo**. Essa propriedade diz o seguinte: Todo número racional diferente de zero possui um outro número que, ao ser multiplicado por ele, resulta no número 1. Esse "outro número" é chamado de inverso multiplicativo.

[18] É comum no Ensino Básico que o termo "inverso aditivo de um número" seja apresentado como "oposto" ou "simétrico" de um número. Da mesma forma, o "inverso multiplicativo" de um número racional costuma ser referido simplesmente como "inverso". Por isso, quando se utiliza apenas a palavra "inverso" de um número, geralmente está se fazendo referência ao **inverso multiplicativo**.

Seja $\boldsymbol{x}$ um número racional *diferente de zero*,

O inverso de x é $\frac{1}{x}$.

Todo número diferente de zero multiplicado pelo seu inverso é igual a 1.

$x \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} = 1$

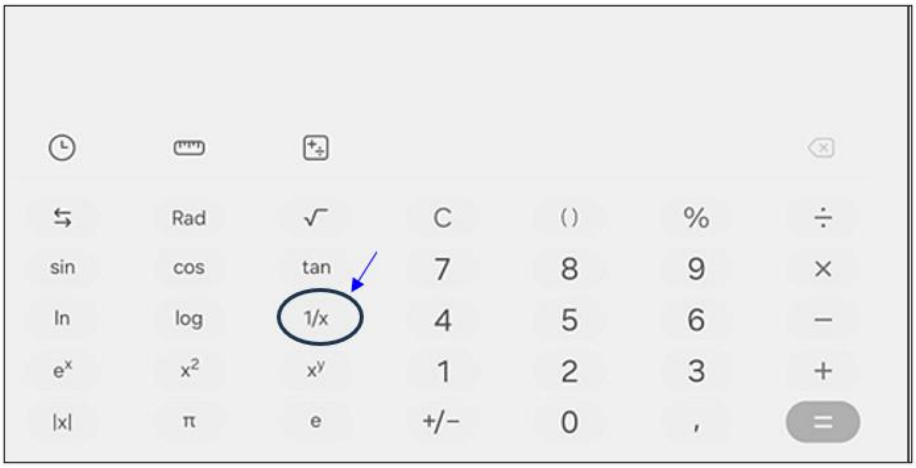
Notação: O inverso de x pode ser representado como x^{-1}.

Obs.: Seja $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ um número racional diferente de zero, o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = 1$$

Observação: Existe uma tecla na calculadora relacionada ao *inverso multiplicativo* de um número, como pode ser observada na Fig. 23.

Figura 45: A tecla do inverso multiplicativo em uma calculadora nativa de um smartphone



116) Calcule os inversos dos números a seguir usando uma calculadora:

a)4 b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) 0,5

Operações com números racionais – Divisão:

É possível definir a divisão de dois números inteiros a partir da propriedade do inverso multiplicativo dos racionais.

Definição da divisão de inteiros

Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Temos que:

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Leitura: O *quociente* entre a e b é igual ao *produto* de a pelo *inverso* de b.

Por que o raciocínio acima é possível?

Dado $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Tem-se que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Considere a como $\frac{a}{1}$. Sabendo-se que b é um número inteiro, consequentemente, b é um número racional; logo, existe um inverso para b e este inverso é $\frac{1}{b}$. Multiplicando a na sua forma $\frac{a}{1}$ pelo inverso de b, temos que $\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Essa última igualdade relaciona o quociente entre a e b como o produto de a pelo inverso de b.

Definição da divisão de racionais

Dados $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais, onde a, b, c e d são números inteiros e b, c e d são diferentes de zero.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Leitura: O *quociente* entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é igual ao *produto* de $\frac{a}{b}$ pelo *inverso* de $\frac{c}{d}$.

117) Complete as tabelas a seguir.

Frações com *denominadores iguais*

	Operação com duas frações	Resposta na forma de fração irredutível	Resposta da coluna anterior na forma decimal	Resposta obtida pela calculadora do smartphone
a)	$\frac{3}{4} + \frac{15}{4}$			

b)	$\frac{3}{4} - \frac{15}{4}$			
c)	$\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{4}$			
d)	$\frac{3}{4} \div \frac{15}{4}$			

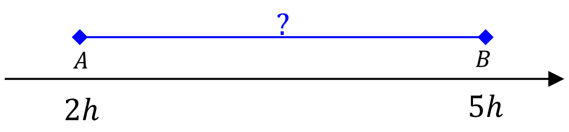
Frações com denominadores diferentes

	Operação com duas frações	Resposta na forma de fração irredutível	Resposta da coluna anterior na forma decimal	Resposta obtida pela calculadora do smartphone
e)	$\frac{3}{4} + \frac{15}{10}$			
f)	$\frac{3}{4} - \frac{15}{10}$			
g)	$\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{10}$			
h)	$\frac{3}{4} \div \frac{15}{10}$			

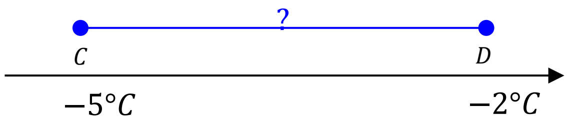
6.8 Cálculo da Distância entre dois Pontos na Reta Numérica com Números Racionais

A medida da distância entre dois pontos da reta numérica do conjunto dos racionais conhecidos os números correspondentes a cada ponto.

118) Calcule a distância do ponto A ao ponto B observando a reta abaixo. Considere as marcações de tempo nessa reta cujas medidas são dadas em horas.

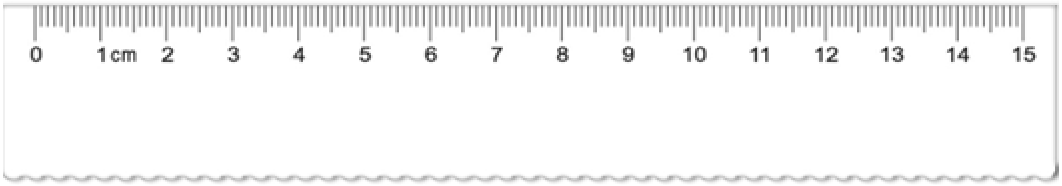


119) Calcula a distância do ponto C ao ponto D observando a reta abaixo. Considere as marcações de temperatura nessa reta cujas medidas são dadas em graus Celsius.

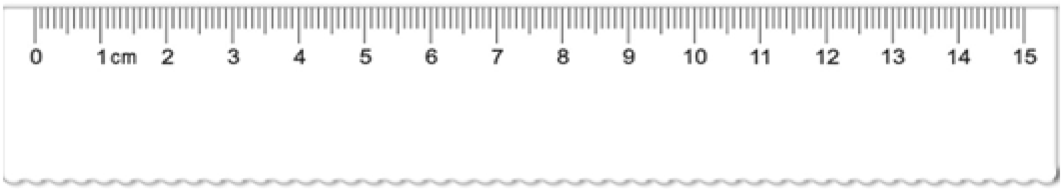


120) Artur e Diana mediram o comprimento dos seus smartphones. Artur mediu o seu aparelho partir do traço da régua cuja marcação é 0 cm. Já Diana, mediu o tamanho do seu smartphone a partir de 2 cm.

121) Sabendo-se que Artur encontrou uma medida de 10 cm, faça o desenho da linha da borda desse aparelho (do segmento de reta) na régua abaixo.



122) Sabendo-se que Diana encontrou uma medida de 12 cm, faça o desenho da linha da borda desse aparelho (do segmento de reta) na régua abaixo.



Observações:

(1) Os tamanhos dos segmentos geralmente são medidos a partir do ponto de origem, cuja marcação é 0 cm, pois isso facilita a leitura das medições das linhas. Nestes casos, o tamanho de um segmento medido a partir de 0cm corresponderá a leitura do número que está abaixo do traço que coincide com o ponto da outra extremidade desse segmento de reta.

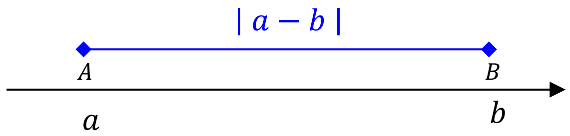
(2) Se quisermos medir um segmento a partir do ponto (1 cm) não poderemos dizer que a medida do segmento medido corresponderá a leitura do ponto, mas é possível efetuar a medida, considerando o cálculo da distância entre dois pontos quaisquer que será enunciada a seguir.

(3) Nem sempre podemos medir a medida do intervalo entre dois pontos olhando uma figura, mas é possível medir o intervalo, sabendo as marcações numéricas correspondentes as extremidades do segmento que está sendo medido.

Fórmula da distância entre dois pontos de uma reta a partir dos valores numéricos correspondentes a esses pontos.

Definição: Dados dois números inteiros a e b quaisquer, situados respectivamente sobre os pontos A e B de uma reta numérica, a distância entre os pontos A e B, indicada por $d(A,B)$, pode ser obtida pelo cálculo do módulo da diferença entre esses dois números.

$$d(A,B) = |a - b|$$



Observações:

1) Os pontos são entes matemáticos representados por letras maiúsculas; já os números correspondentes a cada um desses pontos da reta, são representados por letras minúsculas.

2) Para saber o valor da distância entre os pontos, usamos nos cálculos apenas as marcações numéricas de cada ponto, por isso, essa fórmula vale para qualquer letra; inclusive para situações como, a própria régua, onde não aparece letras dos pontos, mas, sim, o valor numérico do ponto.

123) Assinale com “X” a resposta correta.

a) A distância de A a B é igual a distância de B a A? ( ) SIM ( ) NÃO

b) $|5 - 2| = |2 - 5|$? ( ) SIM ( ) NÃO

c) $|5 - 0| = 5$? ( ) SIM ( ) NÃO

d) $|-5 - 0| = 5$? ( ) SIM ( ) NÃO

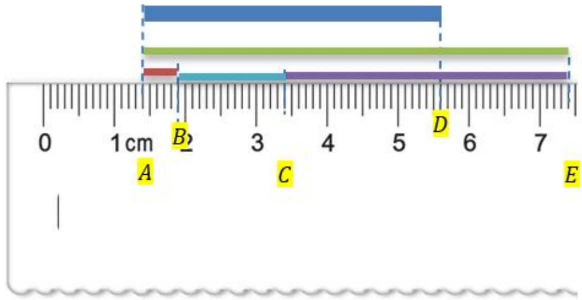
Comentário: A definição de módulo de um número racional $\boldsymbol{x}$

Dados dois números inteiros 0 e x quaisquer, situados respectivamente sobre os pontos O e P de uma reta numérica. Ao aplicarmos a fórmula da distância, temos:

$$d(P, O) = |x - 0| = |x|$$

Isso significa que para calcular o módulo de um número x, seja ele positivo ou negativo, basta contar quantas unidades ele dista do zero. Ou seja, o módulo, será o próprio número sem o sinal $+$ ou $-$.

124) Observe a figura abaixo e preencha as duas tabelas a seguir.



Uma régua graduada em cm.

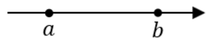
Ponto	Marcação da Régua $(\boldsymbol{cm})$
A	
B	
C	$2\ cm$
D	
E	

	Cor do segmento	Notação do segmento	Fórmula da distância entre dois pontos	A medida desse segmento é de:
a)	Verde	$\overline{AE}$	$d(A, E) = \|0 - 6\| = \|-6\| = 6$	$6\ cm$
b)	Azul Escuro			
c)	Vermelho			
d)	Azul Claro			
e)	Lilás			

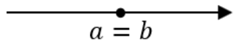
A visualização geométrica da lei da tricotomia para $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$

Dados dois números racionais a e b, somente uma das visualizações geométricas das posições desses números na reta numérica é verdadeira. Observe essas possibilidades e **a visualização geométrica de $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$**:

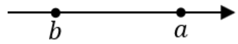
$a < b$ $a = b$ $a > b$



a está à esquerda de b.



a e b estão localizados no mesmo ponto da reta.



a está à direita de b.

125) Considere dois números racionais a e b, representados respectivamente pelos pontos A e B em uma reta numérica. Analise as alternativas a seguir e assinale com um "X" aquela em que os pontos A e B estão mais próximos um do outro. Dica: Quanto menor o valor de $|a - b|$, mais próximos estão os pontos na reta.

(A) $d(A, B) = |a - b| = 1$ (C) $d(A, B) = |a - b| = 0{,}01$

(B) $d(A, B) = |a - b| = 0{,}1$ (D) $d(A, B) = |a - b| = 0{,}001$

126) Considere dois números racionais a e b, representados respectivamente pelos pontos A e B em uma reta numérica. Analise as alternativas a seguir e assinale com um "X" aquela em que os pontos A e B estão mais próximos um do outro.

(A) $a = -2 \ e \ b = 3$(C) $a = -4 \ e \ b = 2$

(B) $a = 1{,}5 \ e \ b = 2{,}1$(D) $a = 0 \ e \ b = 3{,}2$

APÊNDICE H: PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADE 7

7.1. Estudo de erros nas aproximações numéricas

Em diversas situações cotidianas, é comum nos depararmos com números que não representam valores exatos, mas sim aproximações. Esse fenômeno ocorre tanto em atividades simples do dia a dia quanto em cálculos matemáticos mais complexos. Por exemplo, ao abastecer um veículo com R$ 47,87, o valor final registrado pode ser arredondado para R$ 47,90 ou R$ 47,80, devido à ausência[19] de moedas de 1 centavo e 5 centavos no caixa. Esse tipo de ajuste reflete uma necessidade prática: nem sempre é possível operar com precisão absoluta.

Na Matemática, essa mesma ideia se aplica quando lidamos com certos números, como π, $\sqrt{2}$, ou com dízimas periódicas geradas por frações como $\frac{1}{3}$ ou $\frac{14}{23}$. Esses números, por apresentarem infinitas casas decimais, não podem ser totalmente representados em cálculos manuais ou até mesmo em calculadoras, exigindo, portanto, o uso de aproximações.

A atividade a seguir tem como objetivo introduzir o estudo da mensuração dos erros decorrentes das aproximações numéricas e, a partir dessa abordagem, estimular o desenvolvimento do raciocínio crítico dos alunos em relação ao uso consciente da calculadora. Busca-se, assim, capacitá-los a interpretar adequadamente os resultados obtidos e compreender as limitações inerentes à representação numérica nos visores desses dispositivos.

O que são Números Aproximados? Nem sempre é possível representar um número com todos os seus algarismos decimais, seja por limitação do espaço, tempo de cálculo ou por necessidade prática. Quando usamos apenas parte dos algarismos de um número, dizemos que estamos utilizando uma **aproximação** para esse número. O símbolo mais comum e padronizado para indicar aproximação na matemática é o "$\approx$" (é aproximadamente igual a). Os símbolos "$\cong$" e "$\simeq$" são vistos em alguns textos de matemática para esse fim também.

Observações:

(1) Ao longo desse texto, a variável x representará o **valor exato** de um número e $\overline{x}$ um **valor aproximado** de x. Portanto, $\overline{x} \approx x$.

[19] As moedas de 1 centavo ainda existem. Elas não são mais produzidas no Brasil desde 2005 devido ao alto custo de produção e baixa circulação. Apesar de não serem mais fabricadas, elas ainda são consideradas legais e válidas como meio de pagamento, embora sua presença em transações seja rara. O Banco Central do Brasil não determinou o recolhimento dessas moedas.

(2) O *número exato* é aquele que representa o valor inteiro ou completo de uma grandeza. O *número aproximado* é aquele utilizado para representar o número exato.

127) Complete a tabela abaixo com o auxílio da calculadora padrão de um smartphone e da calculadora do aplicativo Geogebra. Em seguida, compare se os resultados encontrados são iguais. Se forem diferentes, qual deles está com o resultado mais correto no seu ponto de vista?

	Números	**Resultado do Visor da Calculadora**		Os resultados encontrados em ambas as calculadoras são iguais?
		Calculadora Padrão do Smartphone	Calculadora do Geogebra	
a)	π			
b)	$\sqrt{2}$			
c)	$\frac{22}{7}$			
d)	$\frac{17}{12}$			

Exemplos: A seguir são apresentados alguns *valores aproximados* para certos números decimais com infinitas casas decimais.

a) $\pi \approx 3{,}14$b) $\sqrt{2} \approx 1{,}41$c) $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$

Observação: Os valores das aproximações acima são *suficientemente próximos* [20]para muitos usos práticos.

7.2. Análise dos Erros em Números Aproximados

[20] Em Topologia, que é uma área da Matemática, a ideia de "pontos suficientemente próximos" está ligada aos conceitos de conjuntos abertos e vizinhanças. Ao dizer que dois pontos estão suficientemente próximos, nesse contexto topológico, significa que existe uma vizinhança de um ponto que também contém o outro ponto.

a)Erro Absoluto

É a diferença entre o **valor exato** e o **valor aproximado**.

$$Erro\ absoluto = |\ valor\ exato - valor\ aproximado\ |$$

Definição do Erro Absoluto. Dado o número racional x. Seja $\overline{x}$ uma aproximação para o valor de x, representando o erro absoluto por E_{abs}, temos que:

$$E_{abs} = |x - \overline{x}|$$

b)Erro Relativo

É o erro absoluto em relação ao valor exato. Indica o "tamanho" do erro proporcionalmente ao número analisado.

$$Erro\ relativo = \frac{erro\ absoluto}{valor\ exato}$$

Definição do Erro Relativo. Dado o número racional x. Seja $\overline{x}$ uma aproximação para o valor de x, representando o erro relativo por E_{rel}, temos que:

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{x} \quad ou \quad E_{rel} = \frac{|x - \overline{x}|}{x}$$

Para obter o *Erro percentual*, basta multiplicar o erro relativo por 100%.

O truncamento e o arredondamento de um número decimal: Pode ser de duas formas práticas para se obter uma aproximação de um número é por meio do truncamento ou do arredondamento desse número.

Truncamento

O que significa **truncar** um número? Truncar um número significa eliminar as suas casas decimais a partir de uma certa posição, sem fazer arredondamento. Ou seja, corta-se o número na casa desejada e descarta-se o restante.

Exemplo 1: Truncando o número **8,746** na segunda casa decimal: Resultado: **8,74**

Exemplo 2: Truncando o número **5,987** na primeira casa decimal: Resultado: **5,9**

Exemplo 3: Truncando o número **3,999** na parte inteira: Resultado: **3**

Arredondamento

O que significa **arredondar** um número? Arredondar um número significa substituir esse número por outro mais simples ou mais curto, que seja *aproximadamente* igual ao original, de acordo com uma regra definida. O objetivo é facilitar os cálculos ou a leitura de valores, especialmente quando não se precisa de tanta precisão.

Regra de arredondamento:

Para arredondar um número a uma certa **casa decimal**, você deve observar o **dígito seguinte** (à direita): Se esse dígito for **menor que 5**, **mantém-se** o último dígito desejado. Se for **5 ou maior**, **aumenta-se em 1** o último dígito desejado.

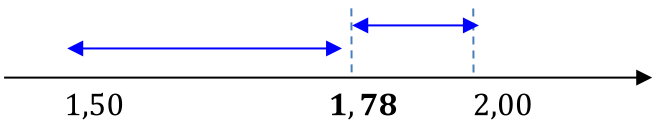
Exemplo: Complete a tabela fazendo o arredondamento dos números fornecidos para uma casa decimal.

	Número	Arredondamento para uma casa decimal
a)	**6,47**	**6,5**
b)	**3,14**	**3,1**
c)	**6,47**	**6,5**
d)	**8,999**	**9,0**

128) Qual é a diferença entre truncar o número 5,678 para duas casas decimais e arredondar esse mesmo valor para duas casas decimais?

		Truncamento		**Arredondamento**	
	Número	para uma casa decimal	para duas casas decimais	para uma casa decimal	para duas casas decimais
a)	**5,670**				
b)	**5,674**				
c)	**5,675**				
d)	**5,676**				

Números aproximados por falta ou por excesso



Exemplo: Em relação ao número 1,78 (valor exato), o número **1,50** é um número aproximado por falta em relação a 1**,78**.

$$E_{abs} = |x - \overline{x}| = |1{,}78 - 1{,}50| = |0{,}28| = 0{,}28$$

O número **2,00** é um número aproximado por excesso em relação a **1,78.**

$$E_{abs} = |x - \overline{x}| = |1{,}78 - 2{,}00| = |-0{,}22| = 0{,}22$$

Contextualização de aproximações numéricas aplicados a compras num mercado

Ao pensar em dinheiro, considerando R$ 1,78 o preço de uma mercadoria, e a pessoa tendo pagado R$ 1,50 no caixa, o erro de aproximação cometido foi de R$ 0,28 para menos. Considerando R$ 1,78 o preço de uma mercadoria, e a pessoa tendo pagado R$ 2,00 no caixa, o erro de aproximação cometido foi de R$ 0,22 para mais.

Definição: Um número aproximado $\overline{x}$ do valor exato x é um número que difere ligeiramente do número exato. Se $\overline{x} > x$, dizemos que $\overline{x}$ é uma *aproximação por excesso*. Se $\overline{x} < x$, dizemos que $\overline{x}$ é uma *aproximação por falta*.

Exemplo de estudo dos erros nas medições de grandezas físicas

Nos contextos de medição de grandezas, por exemplo, ao medir a massa de um objeto, a qual chamaremos aqui do nome *peso*, usa-se uma balança. Nenhuma balança fornece o peso exato de uma pessoa, pois todo instrumento de medição possui limitações estruturais e depende de fatores externos para a sua operação, fazendo que suas medições não sejam exatas. Portanto, a balança fornecerá um valor aproximado para o seu peso.

Suponhamos que você subiu na balança e leu no seu visor 83,5 kg. Supondo-se que a margem de erro dessa balança seja de 0,2 kg para mais ou para menos, isso significa que seu peso exato está entre 83,3 kg e 83,7 kg.

$$\boxed{Valor\ mínimo\ do\ peso\ < \ valor\ do\ peso\ exato\ < \ Valor\ máximo\ do\ peso}$$

Valor mínimo = Valor leitura – Valor da margem de erro = 83,5 kg – 0,2 kg = 83,3 kg

Valor máximo = Valor leitura + Valor da margem de erro = 83,5 kg + 0,2 kg = 83,7 kg

Logo,

$$83{,}3\ kg < \ valor\ do\ peso\ exato\ < \ 83{,}7\ kg$$

Suponhamos que o fabricante de uma balança estipule erro máximo ($E_{máx}$). Isso significa que a diferença entre o peso real (peso exato) da pessoa e o peso medido pela balança não podem ultrapassar um valor de erro específico. $|x - \overline{x}| < E_{máx}$.

Logo, $\overline{x} - E_{máx} < x < \overline{x} + E_{máx}$.

Assim como é impossível medir com total exatidão o peso de uma pessoa, também não é possível realizar certos cálculos com exatidão em uma calculadora. No entanto, em muitas aplicações práticas, os erros de aproximação são desprezíveis.

Exercícios Propostos

129) Complete a tabela:

	Número	Truncamento para uma casa decimal	Truncamento para duas casas decimais	Arredondamento para uma casa decimal	Arredondamento para duas casas decimais
a)	**4,786**				
b)	**9,5231**				
c)	**7,804**				
d)	**0,9999**				

130) Faça as divisões abaixo em uma calculadora e complete a tabela abaixo:

	Número	Os cinco primeiros dígitos são:	Truncamento na terceira casa decimal	Arredondamento na terceira casa decimal.
a)	$10 \div 3$			
b)	$22 \div 7$			
c)	$7 \div 6$			
d)	$2 \div 11$			

131) Exemplifique uma situação em que é mais adequado *arredondar* um número e outra em que é mais adequado *truncar* esse número para uma casa decimal?

132) Um supermercado vende maçãs a R\$ 7,996 o quilo. Por uma questão de etiqueta e visualização para o cliente, o preço será arredondado para apresentar duas casas decimais. Qual será o valor exibido na etiqueta?

133) ***Pesquise:*** as calculadoras científicas possuem alguma tecla especial usada para aproximações numéricas? Qual comando no *Excel* usado para fazer a aproximação numérica de um valor?

134) Complete a tabela abaixo.

Obtenção de $\overline{x}$

(a) Arredondando 4,784 para duas casas decimais;

(b) Arredondando 4,784 para uma casa decimal;

(c) Arredondando 4,784 para um número inteiro.

	Dados:		**Responda:** Aproximação por falta ou por excesso?	**Calcule:**		
	Número exato	Valor aproximado		Erro absoluto	Erro relativo	Erro relativo percentual
	x	$\overline{x}$		$\lvert x-\overline{x}\rvert$	$\frac{\lvert x-\overline{x}\rvert}{x}$	$\frac{\lvert x-\overline{x}\rvert}{x}\cdot 100\%$
a)	4,784					
b)	4,784					
c)	4,784					

135) Complete a tabela abaixo.

Obtenção de $\overline{y}$

(a) Truncar 4,784 a partir da 2ª casa decimal;

(b) Truncar 4,784 a partir da 1ª casa decimal;

(c) Truncar 4,784 a partir da parte inteira;

	Dados:		**Responda:** Aproximação por falta ou por excesso?	**Calcule:**		
	Número exato	Valor aproximado		Erro absoluto	Erro relativo	Erro relativo percentual
	y	$\overline{y}$		$\lvert y-\overline{y}\rvert$	$\frac{\lvert y-\overline{y}\rvert}{y}$	$\frac{\lvert y-\overline{y}\rvert}{y}\cdot 100\%$
a)	4,786					
b)	4,786					
c)	4,786					

136) **Desafio:** Resolva o exercício acima através do aplicativo do Excel ou aplicativo similar.

APÊNDICE I: PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADE 8

8.1. Inverso multiplicativo de forma contextualizada

O conceito de inverso multiplicativo é uma ferramenta fundamental na Matemática e está presente em diversas situações do cotidiano escolar, especialmente no estudo dos números racionais e das equações. Nesta atividade, os alunos serão convidados a explorar diferentes aplicações desse conceito, aprofundando sua compreensão por meio do uso da calculadora e da resolução de problemas. Inicialmente, será abordado o uso da tecla de inverso (ou tecla "$1/x$") presente nas calculadoras, que permite realizar divisões de forma alternativa e eficiente. Ao invés de digitar uma divisão como $a \div b$, o aluno poderá usar a multiplicação de a pelo inverso de b, isto é, $a \cdot \frac{1}{b}$, reforçando a ideia de que dividir por um número é o mesmo que multiplicar pelo seu inverso. Outro ponto a ser explorado é a observação de que, ao calcular os inversos dos números inteiros maiores do que 1, como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, percebemos que existem infinitos números racionais entre 0 e 1. Essa ideia amplia a noção de densidade dos racionais na reta numérica e contribui para o desenvolvimento de um pensamento mais abstrato e crítico por parte dos alunos. Por fim, será trabalhada a utilidade do inverso multiplicativo na resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, sobretudo em situações em que o coeficiente da variável precisa ser "eliminado" para isolar a incógnita. Nesses casos, multiplicar ambos os membros da equação pelo inverso do coeficiente é uma estratégia eficiente e conceitualmente fundamentada.

A divisão de inteiros com a tecla de inverso "1/*x*"

Você sabia que ... através da tecla "o inverso multiplicativo de um número não nulo" podemos dividir dois números inteiros *sem* usar a tecla de divisão?

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Lê-se: O quociente entre a e b é igual ao produto/ de a pelo inverso de b.

137) Preencha a tabela abaixo com o auxílio da tecla inverso da calculadora.

		O inverso de **2** é:	O inverso de **4** é:	O inverso de **5** é:	O inverso de **8** é:	O inverso de **10** é:
a)	Representação ***fracionária***		$\frac{1}{4}$			
b)	Representação ***decimal***		0,25			

138) Ordene as os inversos de 2, 4, 5, 8 e 10 representados na *forma de fração* em ordem crescente.

Ordem crescente					

139) Ordene as os inversos de 2, 4, 5, 8 e 10 representados na *forma decimal* em ordem crescente.

Ordem crescente					

140) O que aconteceu na tabela acima com os valores de $\frac{1}{x}$ à medida o valor de x aumentava: o valor de $\frac{1}{x}$ aumentou ou diminuiu? À medida que o valor de $\frac{1}{x}$ diminui, esses valores estão se aproximando de qual número inteiro?

A quantidade de números racionais entre dois n$^{\underline{os}}$ inteiros consecutivos

141) Represente os números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ na reta numérica.

142) Quantos números racionais existem no intervalo 0 e 1? Justifique sua resposta explorando o comportamento de $1/x$ à medida que os valores de x aumentam, considerando $x > 1$, e relacione isso à densidade dos números racionais nesse intervalo.

8.2. Resolução de equações do 1º grau a uma incógnita

Você sabia que ... através da propriedade do inverso multiplicativo de um número podemos resolver equações do 1º grau a uma incógnita usando a relação abaixo?

$$\boldsymbol{x \cdot \frac{1}{x} = 1}$$

Lê-se: Um número diferente de zero multiplicado pelo seu inverso multiplicativo é igual a 1.

143) Resolva a equação do primeiro grau na incógnita x abaixo considerando que a e b são números inteiros e a é diferente de zero.

$\boldsymbol{a \cdot x = b}$

144) Resolva a equação do primeiro grau na incógnita x abaixo considerando que a, b e c são números inteiros e a é diferente de zero.

$\boldsymbol{a \cdot x + b = c}$

APÊNDICE J: PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADE 9

9.1. Análise do gráfico da função: *y* = *a*/*x* e suas implicações

A divisão por zero não é possível. Segundo a relação fundamental da divisão (ou divisão euclidiana), uma divisão entre dois números inteiros só é possível quando o divisor é diferente de zero. Por isso, as calculadoras exibem, nesses casos, mensagens de erro. Eis alguns exemplos encontrados nos visores de smartphones ou calculadoras portáteis simples: “erro”, “indefinido” ou “não é possível dividir por zero”. Contudo, algo inesperado surgiu em sala de aula: um aluno encontrou que 1 divido por zero é igual a ∞. Nesta lição, será investigado o porquê do resultado aparecer “∞” nos visores de algumas calculadoras.

Figura 46: Resultados de 1÷0 (a) Calculadora de um smartphone (b)calculadora Geogebra

(a)


(b)


Neste contexto, busca-se, nesta atividade, responder a esta pergunta através do estudo do inverso de um número inteiro qualquer diferente de zero. Esta atividade está centrada no estudo do inverso de um número inteiro, e dos seus usos na Matemática. A calculadora gráfica Geogebra terá um papel muito importante. A partir de atividades guiadas no Geogebra, busca-se o entendimento de noções como relações entre grandezas inversas e o comportamento inversamente proporcional entre x e y na relação $y = \frac{a}{x}$, onde a é uma constante inteira.

Exercícios Propostos no Geogebra

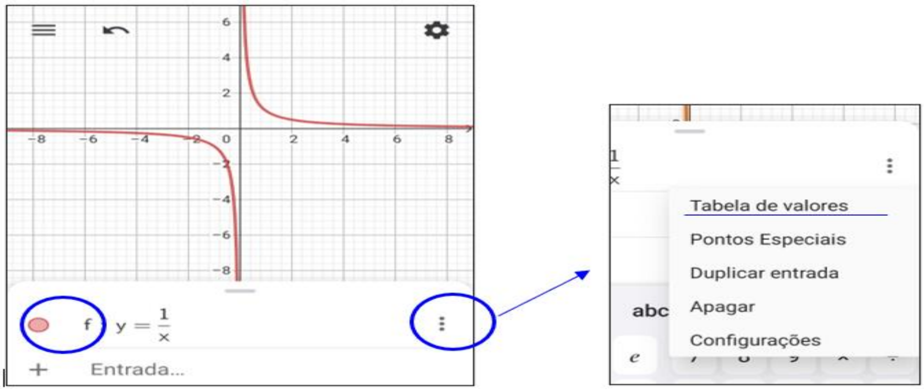
145) Siga os passos a seguir para plotar a função $y = \frac{1}{x}$ no Geogebra.

a) Abra o aplicativo “Calculadora Gráfica Geogebra”;

b) Clique nas teclas da calculadora conforme a sequência abaixo.

$\boxed{y} \to \boxed{=} \to \boxed{1} \to \boxed{\div} \to \boxed{x} \to \boxed{\hookleftarrow}$

Figura 47: Gráfico da função *y*=1/*x* gerada pelo Geogebra.



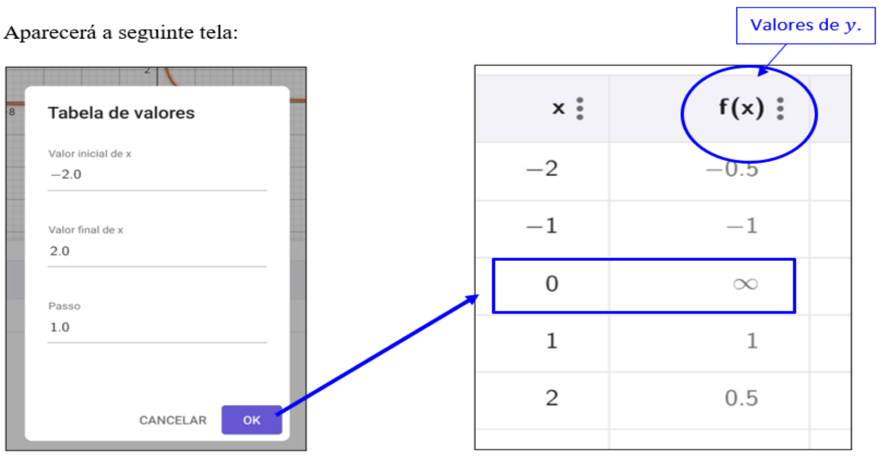
Comentário: O gráfico da função será o conjunto de pontos (x, y) que pertencem a função. Após a inserção dos comandos de plotagem[21], o gráfico será exibido com uma cor e um nome para a função. Observe o círculo azul da figura acima que indica a cor do gráfico e o nome da função que foram gerados pelo Geogebra.

Análise da tabela de valores de x e y gerada automaticamente pelo Geogebra

Após entrar com a plotagem de $y = \frac{1}{x}$ no Geogebra, podemos acessar, pelo aplicativo a *tabela* correspondente a esta função. Uma função pode ser observada pelo seu gráfico ou por uma tabela de valores a qual relaciona a variável dependente(y), com a variável independente (x) através da lei de formação da função (y=1/x).

Clique nos três pontinhos. Escolha a opção "tabela de valores".

Figura 48: (a) Janela para ajustar os limites de x. (b) Tabela de valores de x e de y= f(x).



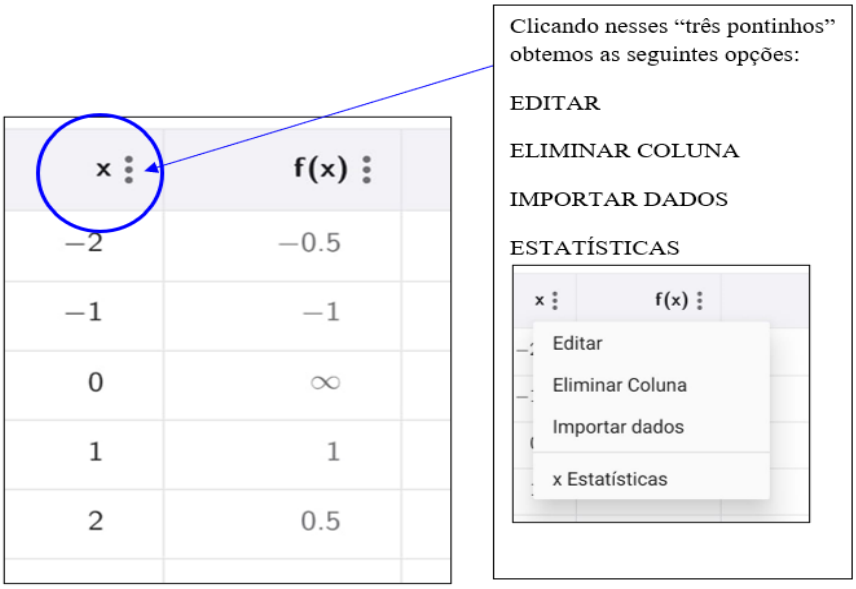
[21] Plotar significa criar uma representação visual de dados em um sistema de coordenadas, geralmente em duas ou três dimensões

Comentários:

1) Clicando em “OK”, aparecerá a janela “TABELA DE VALORES”, onde pode-se configurar o valor inicial e o valor final de x que aparecerá na tabela, os quais serão calculados os respectivos valores de y. Também é possível configurar o “passo”. O passo indica como os valores de x vão aumentando a partir do valor inicial de x escolhido. Por exemplo, no caso das figuras ilustradas acima, o passo é **1**, o que significa que após o primeiro valor de x, que é o -2, os seguintes valores de x serão somados de 1 em 1 até se chegar ao valor final de x, que está configurado como 2.

2) Para mudar as configurações dos valores inicial e final de x e o passo, podemos clicar nos três pontinhos que aparecem ao lado do x, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 49:Opções de edição da tabela.



Observações:

1) Clique em “Editar”, caso deseje configurar novamente a “tabela de valores de x e y”. Os demais comandos: “Eliminar Coluna”, “Importar Dados” e “Estatística” não temos o objetivo de usar nesse momento, contudo você poderá explorar esse aplicativo fantástico para conhecer mais as suas funcionalidades.

2) Ao clicar numa célula da coluna do x é possível inserir valores ou apagando um valor de x já existente na célula, ou clicando em uma célula em branco.

Criação de tabelas de pontos x e y no Geogebra: Explorando o comportamento da função $f(x) = 1/x$ em torno do ponto $x = 0$.

1º Estudo: Comportamento da função $y = 1/x$ para valores de x positivos que se aproximam do zero pela direita e pela esquerda.

146) Complete as tabelas abaixo usando sua calculadora do smartphone.

Figura 50: Valores de x aproximando-se de zero (a) pela direita (b) pela esquerda.

(a)

x	$y = \frac{1}{x}$	y
1		
$0{,}1$	$y = \frac{1}{0{,}1}$	10
$0{,}01$		
$0{,}001$		
$0{,}0001$		

(b)

x	$y = \frac{1}{x}$	y
-1		
$-0{,}1$	$y = \frac{1}{-0{,}1}$	-10
$-0{,}01$		
$-0{,}001$		
$-0{,}0001$		

Comentário: Embora o preenchimento dessa tabela seja mais fácil usando a calculadora padrão com a função inverso, o tutorial a seguir, indicará como completar essas tabelas.

147) Criando uma tabela de valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ manualmente pelo Geogebra

a) Abra o aplicativo Geogebra. Aparecerá a tela da Fig 29;

b) Clique no canto inferior direito da tela que apareceu, a opção “Planilha de Cálculos” – Fig. 29.

Figura 51: (a) Tela inicial do aplicativo Geogebra e (b) Ferramentas do Geogebra.

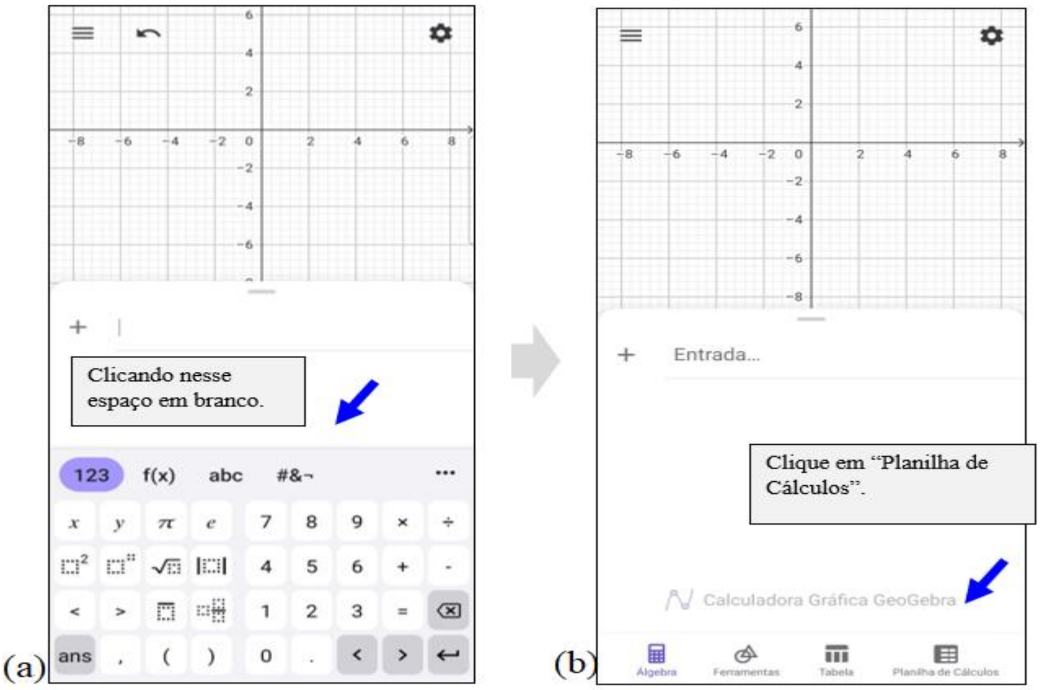
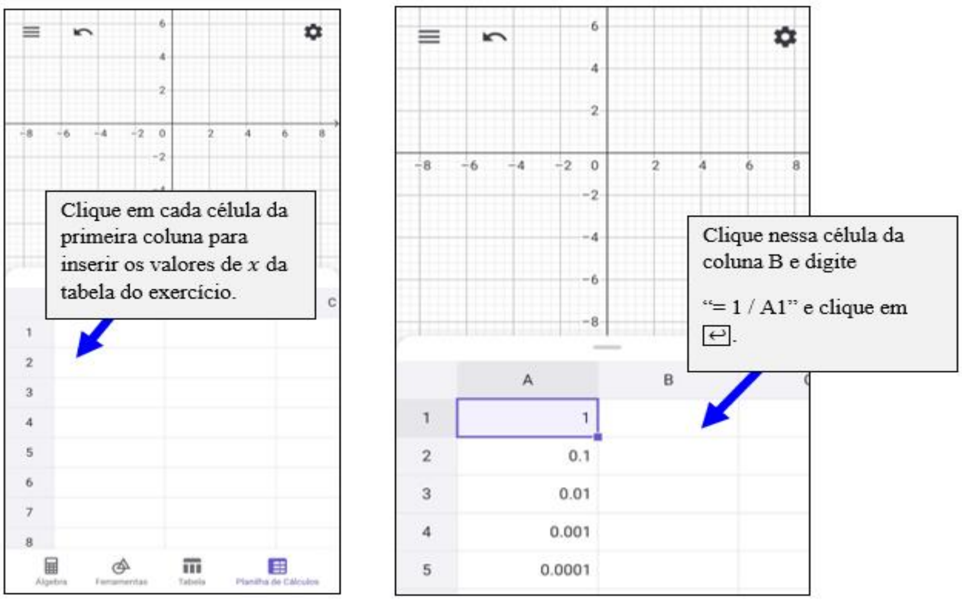


Figura 52:Inserindo valores de x na "Planilha de Cálculos".



Atenção! Para digitar na célula alguns símbolos você precisará trabalhar com os menus acima do teclado da calculadora que permitem inserir letras etc.

Figura 53: Configurando as células que calculam os valores de *y*

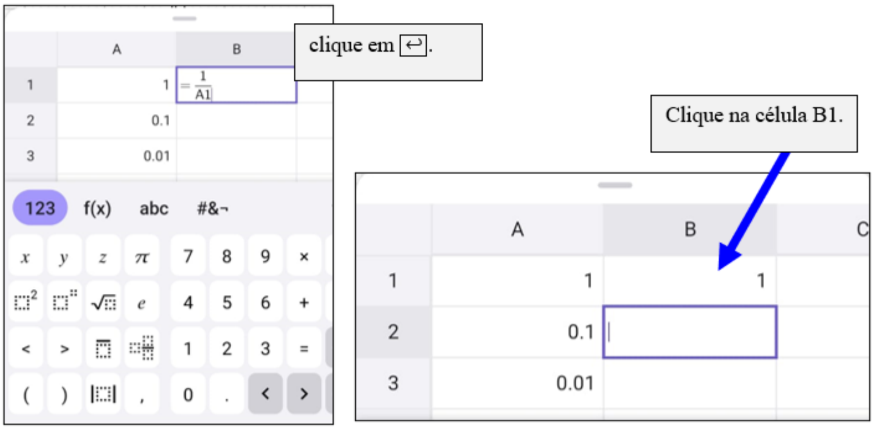


Figura 54: Selecionando uma célula com uma fórmula definida

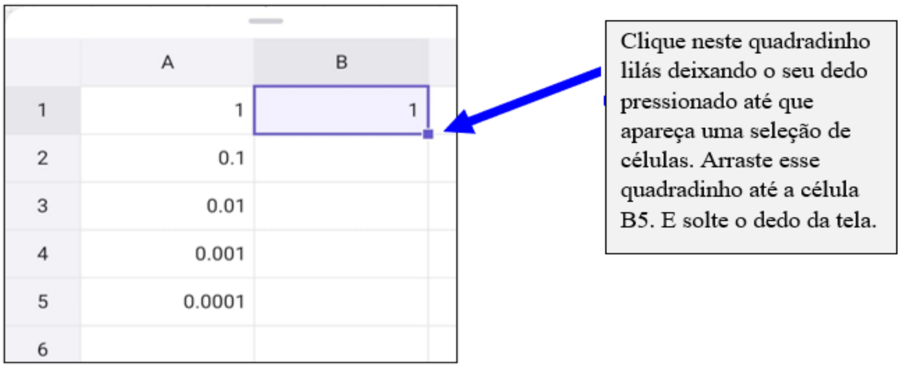
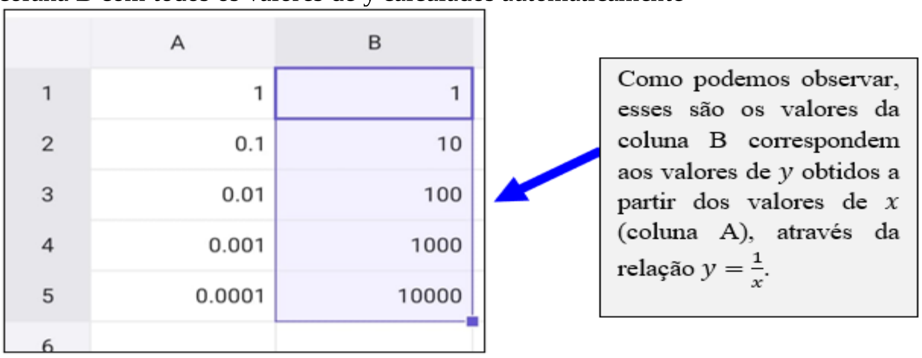


Figura 55: A coluna B com todos os valores de y calculados automaticamente



9.2. Estudo da variação de y em função de x a partir dos dados tabelados

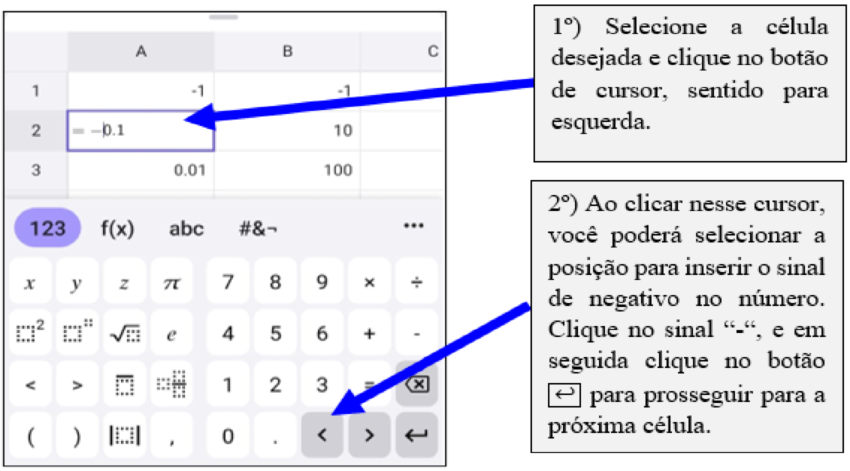
Análise da variação de y a partir dos valores de x, quando x tende a zero pela direita

Observa-se, na tabela, que à medida que os valores de x vão diminuindo sucessivamente em uma razão de 10 (ou seja, a cada passo x se torna 10 vezes menor do que o anterior), eles se aproximam cada vez mais do zero. Ao mesmo tempo, os valores correspondentes de y aumentam em uma razão de 10, ou seja, tornam-se 10 vezes maiores a cada passo. Esse comportamento faz com que a sequência de valores de y cresça rapidamente, atingindo números cada vez mais elevados.

Análise da variação de y a partir dos valores de x, quando x tende a zero pela esquerda

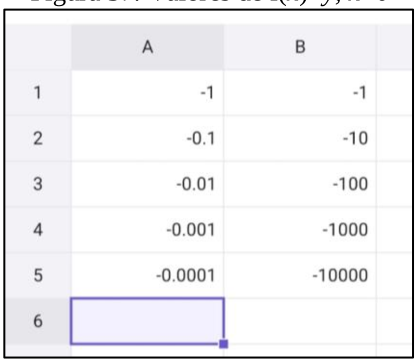
Para completar a tabela de $y = \frac{1}{x}$, onde os valores de x tende a zero pela esquerda, vamos usar a mesma planilha que utilizamos recentemente no Geogebra, pois o que difere uma da outra é o sinal de " $-$ " de x. As células de x serão editadas através do passo a passo a seguir.

Figura 56: Editando uma célula com novos valores de x



Após essas inclusões do sinal de "$-$", a coluna com os respectivos valores de y já estará atualizada.

Figura 57: Valores de f(x)=y; x<0



	A	B
1	-1	-1
2	-0.1	-10
3	-0.01	-100
4	-0.001	-1000
5	-0.0001	-10000
6		

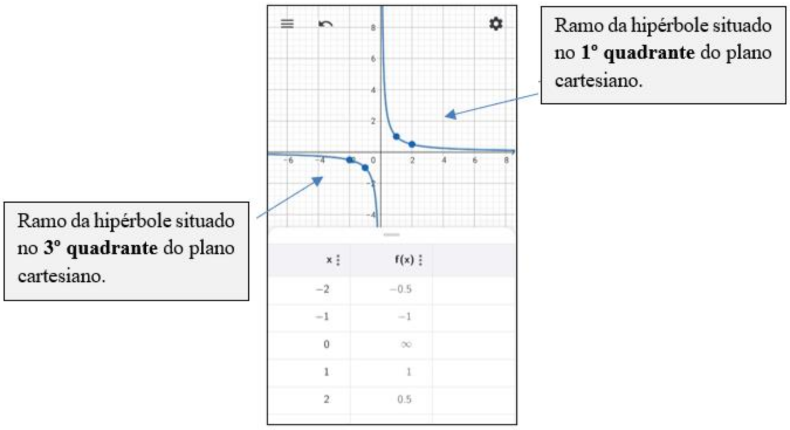
Análise da variação de y a partir dos valores de x, quando x tende a zero pela esquerda

Observa-se que à medida que os valores de x vão aumentando sucessivamente em uma razão de 10 (ou seja, a cada passo x se torna 10 vezes maior do que o anterior), eles se afastam cada vez mais do zero. Ao mesmo tempo, os valores correspondentes de y diminuem em uma razão de 10, ou seja, tornam-se 10 vezes menores a cada passo. Esse comportamento faz com que a sequência de valores de y diminua rapidamente, atingindo números cada vez menores.

Análise do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$

O gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ é chamado de *hipérbole equilátera*. Podemos observar que existe um ramo da hipérbole no 1º quadrante do plano cartesiano, e o outro ramo dessa hipérbole no 3º quadrante desse plano cartesiano.

Figura 58: Hipérbole equilátera



- No 1º quadrante, observa-se que a medida que os valores de x vão se aproximando de zero, os valores de y vão crescendo de forma muito rápida, de tal forma que parece que a hipérbole (linha azul) toca o eixo dos y, contudo ela se aproxima cada vez mais do eixo de y, mas nunca tocará o eixo do y. Portanto, à medida que x se aproxima do zero pela direita, os valores de y estão indo para o infinito (positivo).
- No 3º quadrante, observa-se que à medida que os valores de x vão se aproximando de zero pela esquerda, os valores de y vão diminuindo de forma muito rápida, de tal forma que parece que a hipérbole (linha azul) toca o eixo dos y, contudo ela se aproxima cada vez mais do eixo de y, mas nunca tocará o eixo do y. Portanto, à medida que x se aproxima do zero pela esquerda, os valores de y estão indo para o infinito (negativo).

Um contexto em que a aproximação por zero também vai ao infinito:

O número de imagens (n) formado por dois espelhos planos, que formam um ângulo α entre si é obtido pela fórmula:

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1$$

Quando esses espelhos estão paralelos entre si, o ângulo α é zero. Mas, se fosse considerado zero nessa substituição, não haveria como fazer o cálculo, já que divisão por zero é indefinida. Mas, ao analisar-se o ângulo α se aproximando de 0° (zero grau), o resultado da divisão se aproxima do infinito, indicando um número muito grande de imagens. Portanto, neste contexto, a divisão por zero, está ligado a ideia de limite no estudo de funções.

Figura 59: Infinitas imagens formadas entre dois espelhos paralelos

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/espelhos-paralelos.htm

9.3. O curioso caso das dízimas periódicas iguais a inteiros:

Afirmação: $\mathbf{0,999... = 1}$

Demonstração: A dízima periódica 0,999... está escrita na sua representação decimal. Portanto, podemos escrevê-la numa soma considerando o valor posicional de cada um de seus dígitos.

$$0,999 ... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 ...$$

Ou ainda, podemos escrever:

$$0,999 ... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} ...$$

Considerando n um número natural maior do que ou igual a 1 e denotando por S_n, o valor da soma dos termos até a posição n, temos:

S_n	$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	Parcelas na forma de fração	Parcelas na forma decimal
S_1	$= a_1$	$= \frac{9}{10}$	$= 0{,}9$
S_2	$= a_1 + a_2$	$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$	$= 0{,}9 + 0{,}09 = 0{,}99$
S_3	$= a_1 + a_2 + a_3$	$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$	$= 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 = 0{,}999$
S_4	$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000}$	$= 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009$ $= 0{,}9999$

À medida que é acrescida uma casa decimal com o dígito 9 cada vez mais próximo esse número estará do número 1.

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

a_1: é o primeiro termo;

q: é a razão da PG, onde $|q| < 1$.

S: é a soma dos termos da PG infinita.

Essa **soma** é conhecida na matemática como **série geométrica**, pois é a soma de termos de uma progressão geométrica (PG), que é uma sequência numérica onde cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por um mesmo número.

$$S = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \ldots$$

Essa progressão geométrica é infinita, o seu primeiro termo é $\frac{9}{10}$ e a sua razão é $\frac{1}{10}$. Através dessa informação, podemos utilizar a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, já que a razão dessa PG é $\frac{1}{10}$, que satisfaz a uma condição necessária que é da razão da PG ser um valor em módulo entre 0 e 1.

Na série acima, temos $a_1 = 0{,}9$ e $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10}$. Substituindo esses valores na fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, temos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}9}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0{,}9}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}9}{0{,}9} = 1$$

Portanto, $0{,}999 \ldots = 1$.

Como se chega à fórmula da *PG infinita* a partir da fórmula da *PG finita*? A fórmula do **termo geral** *da PG* permite encontrar o valor de qualquer termo da PG conhecendo algumas informações n (posição do termo na sequência) , a_1(o valor do primeiro termo) e q (razão da PG).

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

A fórmula da soma dos termos de uma **PG finita** é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Quando q é um número entre $0\ e\ 1$ ou entre 0 e -1, essa PG **converge** para um valor S. À medida que n cresce, a soma S_n converge para o valor S.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Vamos usar o Geogebra para visualizar que q^n converge para zero, quando $|q| < 1$.

Tomando o valor de $q = 0{,}1$, que é a razão relacionada a série da nossa dízima (0,999...), podemos descobrir que o valor desse q^n tende a zero, à medida que n tende ao infinito. Complete a tabela abaixo usando a calculadora do smartphone e a tecla de potência $\boxed{x^y}$.

Tabela 4: Valores de q^n, onde $q = 0{,}1$.

n	$y = 0{,}1^n$	y
1	$y = 0{,}1^1$	0,1
2	$y = 0{,}1^2$	0,01
3	$y = 0{,}1^3$	0,001
4	$y = 0{,}1^4$	0,0001
10	$y = 0{,}1^{10}$	0,0000000001

Como q^n está se aproximando de zero à medida que n tende ao infinito, logo, podemos substituir q^n por zero dentro dos parênteses do numerador da fração.

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Substituindo q^n por zero, temos:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad S = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot (-1)}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad S = \lim_{n\to\infty} \frac{-a_1}{q - 1}$$

Multiplicando ambos os termos da fração $\frac{-a_1}{q-1}$ por -1, temos: $\frac{a_1}{-(q-1)} = \frac{a_1}{1-q}$

$$\boldsymbol{S = \frac{a_1}{1-q}}.$$

APÊNDICE K: PRODUTO EDUCACIONAL – ATIVIDADE 10

10.1. Decimal exato ou dízima periódica?

É possível saber se uma divisão de inteiros resulta em um número decimal exato, uma dízima periódica ou um número decimal não exato e não periódico apenas consultando o visor da calculadora? Essa questão é mais profunda do que aparenta, pois envolve o reconhecimento da natureza dos números racionais e irracionais, além do entendimento das limitações técnicas dos dispositivos eletrônicos. Ao realizar uma operação de divisão, a calculadora fornece uma representação decimal do quociente, porém, essa representação é finita e, muitas vezes, truncada ou arredondada. Assim, o visor da máquina pode não revelar, de forma evidente, se o número é uma dízima periódica ou um decimal exato, o que pode gerar interpretações equivocadas para uma pessoa que não sabe da existência de números decimais que possuem infinitas casas decimais, ou até mesmo que possui um número finito de casas decimais, contudo que não pode ser observado pelo visor de uma calculadora, já que a mesma, tem limitações exibição de resultados.

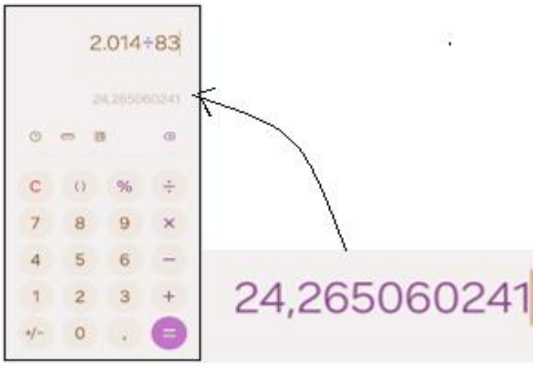
Propõe-se uma revisão teórica guiada com exemplos e exercícios de forma que o aluno possa compreender a técnica que será usada para classificar se os resultados da divisão entre dois inteiros é um decimal exato ou dízima periódica independente do uso da calculadora. Também se propõe uma reflexão de formas alternativas para a investigação dos resultados de uma calculadora através de softwares matemáticos como o Maple. E reflete-se aqui que o uso da Inteligência Artificial deve sempre ser usá-lo de forma reflexiva, pois esta pode errar no processamento e apresentação de resultados matemáticos.

10.2. Divisão de Números: Calculadora, GeoGebra e ChatGPT em Comparação

A calculadora nativa de um smartphone

148) Calcule $2014 \div 83$ usando a calculadora do seu smartphone. Em seguida, verificar e se é possível determinar se esse resultado é um decimal exato, dízima periódica ou decimal não exato através do visor da calculadora.

Figura 60: Calculadora do Android



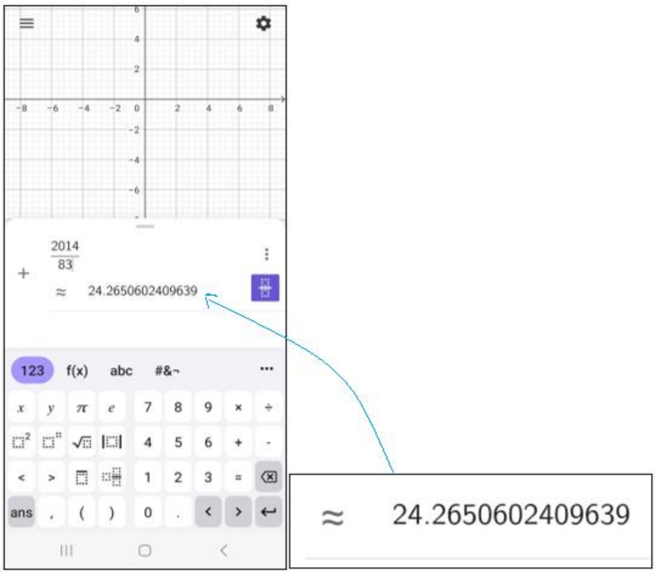
Resposta: O resultado encontrado pela calculadora foi 24,265060241.

O Display exibe um *número decimal exato*, contudo, $2024 \div 83$ é uma dízima periódica, pois 83 é um número primo. Logo, o resultado do Display é uma aproximação do valor real desse número e o último algarismo 1 é duvidoso.

A calculadora do Geogebra

149) Calcule $2014 \div 83$ usando a calculadora gráfica Geogebra. Em seguida, verificar e se é possível determinar se esse resultado é um decimal exato, dízima periódica ou decimal não exato através do visor da calculadora. **Observação:** Faça esse exercício no seu smartphone.

Figura 61: Calculadora do Geogebra (Aplicativo Smartphone)



Resposta: O resultado encontrado pela calculadora Geogebra foi 24,2650602409639.

O *visor* exibe um *número decimal exato*, contudo, $2024 \div 83$ é uma dízima periódica, pois 83 é um número primo. Logo, o resultado do visor é uma aproximação do valor real desse número e o último algarismo 9 é duvidoso. Observe que o visor da calculadora Geogebra exibe mais casas decimais comparado a calculadora do smartphone.

ChatGPT como Ferramenta de Cálculo: Dividindo Números

150) Verifique se os resultados das pesquisas a seguir no aplicativo **ChatGPT** (versão smartphone) estão de acordo com os resultados encontrados na calculadora padrão do smartphone e a do aplicativo Geogebra.

a) Qual é o valor de $2014 \div 83$?

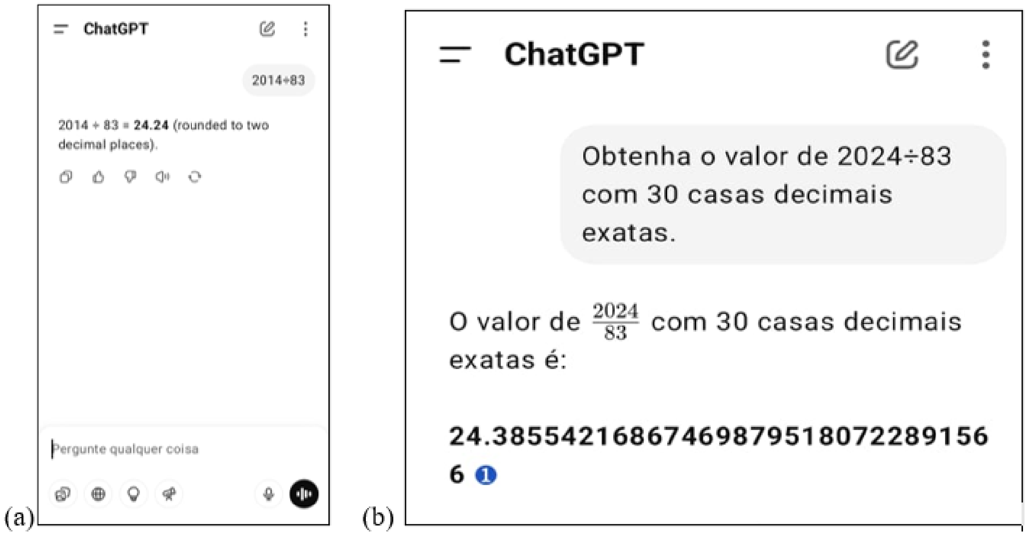
b) Obtenha o resultado de $2014 \div 83$ com 30 casas decimais exatas.

c) $2014 \div 83$ é um número decimal exato ou uma dízima periódica?

d) Qual é o período da dízima periódica obtida por $2014 \div 83$?

Resoluções

Figura 62: Pesquisa dos resultados da divisão de 2024/83 no ChatGPT

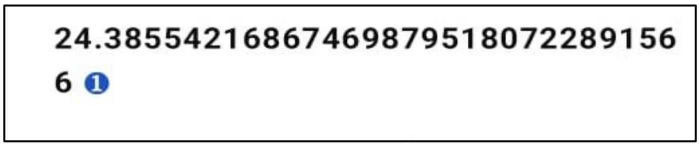


Resposta: **a)** Inicialmente, o ChatGPT, apresentou o resultado da pesquisa 2014 ÷ 83 com uma aproximação de duas casas decimais.

Resposta: **b)** Em seguida, pesquisou-se por “obtenha o valor de 2014 ÷ 83 com 30 casas decimais exatas.” O aplicativo exibiu diversas casas decimais, contudo ainda assim, não daria para saber se o número era um decimal exato ou periódico. Cabe salientar, que descartamos que esse resultado é um número irracional (número que não é racional), já que toda a divisão de inteiros, onde o segundo é diferente de zero é um número racional.

A Divisão de 2014 por 83 no ChatGPT: Um Olhar sobre o Algoritmo Utilizado

Figura 63:Resultado da divisão de 2014 ÷ 83 com 30 casas decimais exatas.



O ChatGPT apresentou nessa pesquisa, um ponto de exclamação azul. A partir desse ponto de exclamação, a inteligência artificial permitiu visualizar o código de programação que foi utilizado para realizar essa operação.

Figura 64: Algoritmo do ChatGPT para calcular 2014÷83 com 30 casas decimais exatas.

×

Resultado do código

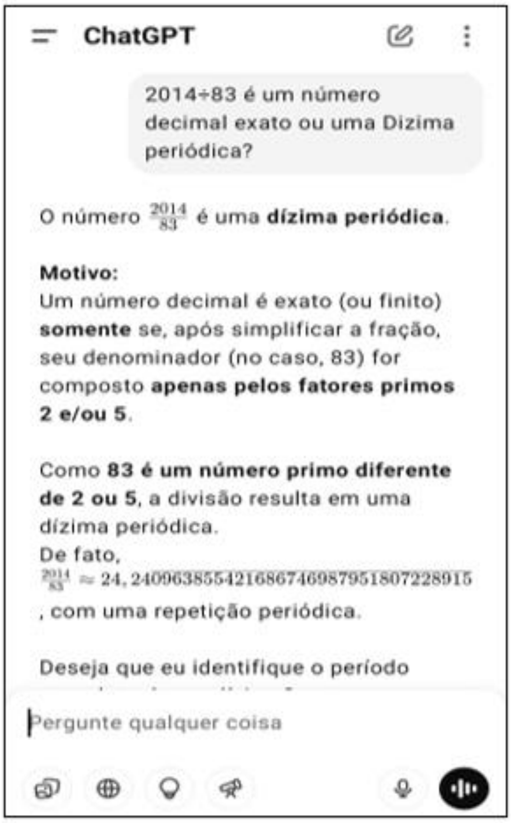
```
# Set precision to 35 digits
to ensure 30 exact decimal
places
getcontext().prec = 35

# Perform the division with
high precision
numerator = Decimal('2024')
denominator = Decimal('83')
result = numerator /
denominator

# Format result to 30 decimal
places
formatted_result =
format(result, '.30f')
formatted_result
```

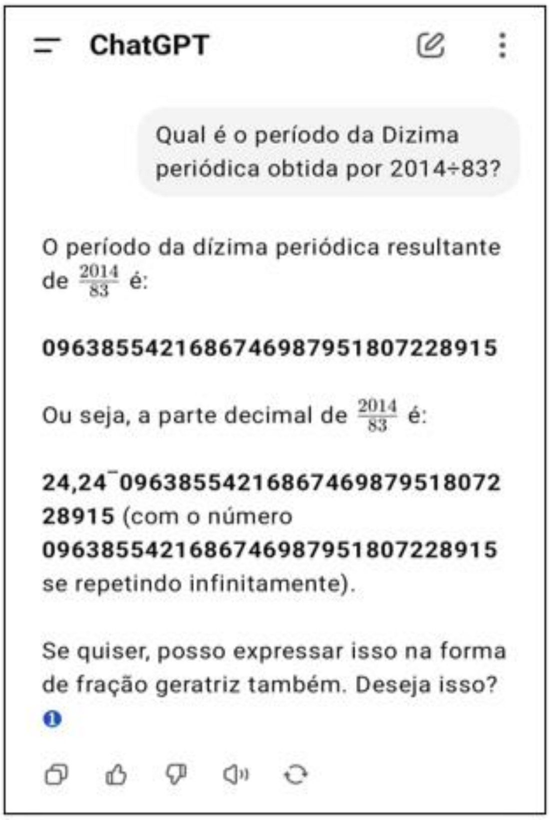
Analisando essas 30 casas decimais, ainda não é possível saber se o resultado tenderá a um número decimal exato ou uma dízima periódica, já que não é possível ver um padrão de repetição nas casas decimais.

Sendo assim, foi proposta uma pergunta ao ChatGPT neste sentido de perguntá-lo se o resultado da operação é um número decimal exato ou dízima periódica.

Figura 65: Pesquisas no ChatGPT sobre a periodicidade da dízima obtida por uma divisão

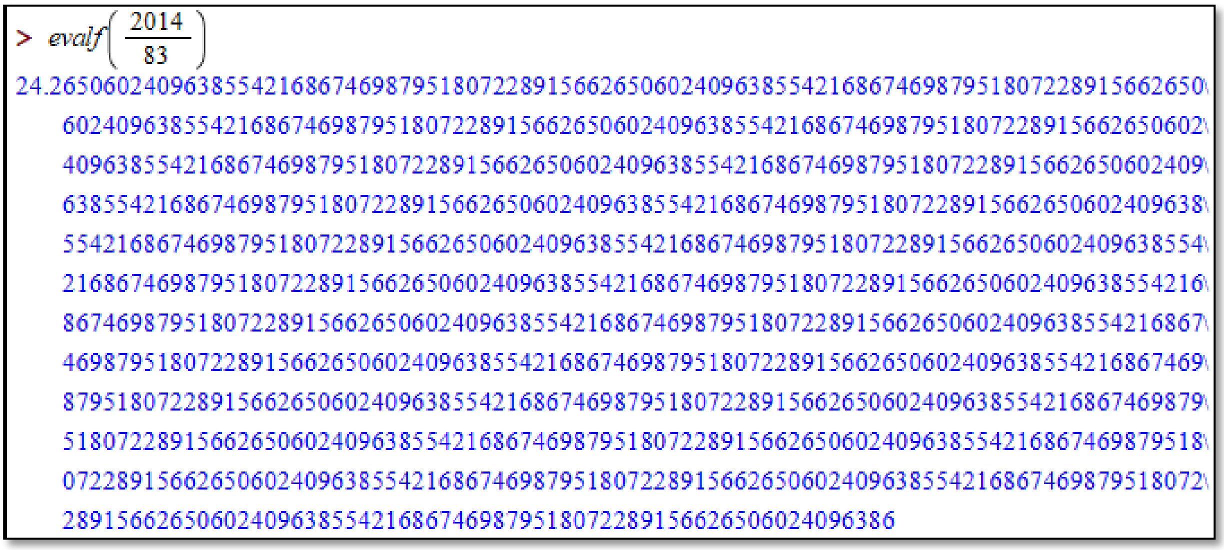
Respostas dos itens **c e d.**





O *ChatGPT* identificou um período para a dízima periódica que diverge do período de 41 casas decimais, determinado pelo *software Maple*, conforme pode ser observado na Fig. 44:

Figura 66: A divisão de 2014 por 83 efetuada no Maple com 1000 dígitos.



Como saber se uma divisão de inteiros gera um decimal exato ou dízima periódica? Cabe ressaltar que o objetivo deste tópico é apresentar um método que permita identificar, de forma geral, se o resultado de uma divisão é um número decimal exato. Esse tipo de análise torna-se especialmente relevante em casos mais complexos, como na divisão de 2014 por 83, em que o número exibido no visor da calculadora não permite, à primeira vista, reconhecer a natureza do resultado. Nesta atividade é apresentada uma sequência didática de métodos que culminarão ao entendimento do critério geral, capaz de esclarecer definitivamente se o resultado será um decimal exato ou não.

Bases Conceituais para a Compreensão do Tema (Parte I)

- Número Decimal Exato

Definição: Um *número decimal exato* é um número racional cuja representação decimal possui um número finito de casas decimais.

- Fração Decimal[22]

Definição: Chamamos de *frações decimais* aquelas que tem denominadores iguais a 10,100,1000, etc., ou seja, potências de 10. (DANTE, 2012)

- A relação entre o nº decimal exato e a fração decimal

"Todo número decimal exato pode ser escrito na forma de uma fração com denominador 10, 100, 1000, etc., ou seja, uma fração decimal." (DANTE, 2013)

151) Qual é a *fração decimal* correspondente a fração $\frac{7}{2}$?

Solução: Como $\frac{7}{2} = 3{,}5$ que é um nº decimal exato, logo, podemos encontrar a fração decimal correspondente através da regra estudada na seção 7.6.3 do Capítulo 7.

Logo, $\frac{7}{2} = 3{,}5 = \frac{35}{10}$

[22] Embora muitos autores definam frações decimais como aquelas cujo denominador é uma potência de base 10, poucos fazem referência explícita à natureza do numerador. No entanto, observa-se que em todos os exemplos apresentados nas obras de Dante (2001) e Ripoll et al. (2011), os numeradores são sempre inteiros, o que reforça a compreensão de que frações decimais representam a divisão de um número inteiro por 10, 100, 1000 etc.

Você sabia que.... há casos em que a divisão de dois inteiros é um número decimal exato, mas isso não fica claro no visor da calculadora, pois este número decimal possui um número de casas decimais maior do que a capacidade máxima de dígitos que o visor pode mostrar ou da capacidade de cálculo da máquina?

Suponhamos que você tenha uma fração cuja representação decimal não seja possível descobrir pelo resultado exibido no visor da calculadora se é um decimal exato ou dízima periódica, como foi estudado com a divisão $2024 \div 83$. Nestes casos, quando não sabemos se o número é decimal exato, podemos pensar no seguinte:

1º Método de Investigação: Comparando a fração desejada, com frações decimais com um numerador desconhecido.

152) Encontre o valor de x usando uma calculadora. Considere que esse valor deve ser inteiro para que a fração decimal esteja definida. Verifique se esse valor é um número inteiro ou decimal.

$a)\ \frac{2031}{40} = \frac{x}{10}$ $\qquad b)\ \frac{2031}{40} = \frac{x}{100}$ $\qquad c)\ \frac{2031}{40} = \frac{x}{1000}$

Se encontrarmos um valor de x inteiro em uma das igualdades acima, isso significará que a fração que terá o x inteiro é uma ***fração decimal*** e, portanto, a fração equivalente a ela, será um número decimal exato.

Conclusão do 1º método: Esse método de determinar se uma fração é equivalente a uma fração decimal pode ser demorado em alguns contextos, pois, dependendo dos valores numéricos, os cálculos seriam mais trabalhosos. Observe que foi necessário fazer duas operações aritméticas: primeiro a multiplicação e, em seguida, uma divisão. Portanto, esse primeiro método nem sempre é uma boa opção para saber se a divisão será um decimal exato.

Uso das propriedades de equivalência de frações:

> Considerando n_1, n_2, d_1 *e* d_2 números inteiros, com d_1 e d_2 diferentes de zero, vale a propriedade a seguir.
>
> $$\frac{n_1}{d_1} = \frac{\boldsymbol{n_2}}{d_2} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{n_2} = \frac{n_1 \cdot d_2}{d_1}$$

Observações:

1) A propriedade da equivalência de frações possibilita a determinação de um termo dessa igualdade a partir dos demais.

2) As variáveis escolhidas para os termos das frações, foram escolhidas propositalmente[23] com a letra do nome da posição ("n" para numerador e "d" para denotar "denominador"). Também foi atribuído um número subscrito para cada letra (em particular, o número "1" representa os termos da *primeira fração*, isto é, n_1 é o numerador da primeira fração e d_1 é o denominador da primeira fração).

3) Observe que para encontrar o valor de n_2 (o numerador da segunda fração) foram necessárias apenas duas operações: multiplicar dois valores e, em seguida, dividir esse resultado por outro valor.

4) Considerando que o enunciado parte do princípio de que os quatro termos são números inteiros, então o valor desejado para o termo desconhecido n_2 também deverá ser um número inteiro. Caso n_1, d_1 e d_2 sejam números inteiros e o n_2 não seja um número inteiro, conclui-se a equação não terá solução segundo os dados do enunciado; mas, caso esse valor não seja um número inteiro, essa igualdade seria válida caso o enunciado dissesse que d_2 poderia ser um número racional qualquer.

---

[23] A utilização de variáveis representadas por letras acompanhadas de índices numéricos (como a_1,a_2 , a_n) oferece aos alunos do Ensino Médio a oportunidade de conhecer formas mais elaboradas de notação algébrica, muitas vezes ausentes nos livros didáticos do Ensino Fundamental e mesmo do Ensino Médio. Embora essa forma de representação seja pouco explorada nesses materiais, ela ganha relevância no contexto das orientações da BNCC (2018), que valoriza o desenvolvimento do pensamento computacional. Nesse cenário, o uso de variáveis indexadas está fortemente associado à ideia de sequências, à identificação de posições específicas em expressões algébricas — como em termos de frações —, bem como à generalização de estruturas algébricas mais complexas, como **polinômios**, e **matrizes**, nas quais cada elemento é denotado por índices duplos, como a_{ij}, indicando sua posição na linha i e na coluna j. Esse tipo de notação contribui para ampliar a compreensão do aluno sobre padrões matemáticos, organização estrutural e representação algorítmica.

2º Método de Investigação: Dividindo *a potência de base 10* do denominador da fração decimal pelo primeiro denominador (divisor) e verificando se essa divisão é exata.

Exemplo 1: $54 \div 125$ é um número decimal exato?

Resposta: Sim. Pois o número 1000 dividido por 125 é uma divisão exata, cujo resultado é um número inteiro. Ou seja, 125 é um divisor de 1000.

Para justificar esse resultado, aplicaremos novamente o método utilizado anteriormente para determinar o valor de x e verificar se ele é um número inteiro.

$$\frac{54}{125} = \frac{x}{1000} \Rightarrow x = \frac{54 \cdot 1000}{125} = 54 \cdot \frac{1000}{125} = 54 \cdot 8 = 432 \Rightarrow x = 432 \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{432}{1000}$$

Observe, que foi possível encontrar um valor inteiro para x, porque o fator

$$\frac{1000}{125}\ (1000 \div 125)$$

é um *valor inteiro*, isto é, 1000 é um múltiplo de 125; ou, em outras palavras, 125 é um divisor de 1000. Observe que 1000 é o denominador da fração decimal, que dividido pelo denominador da primeira fração resulta num resultado inteiro.

Conclusão do 2º método: Para que a divisão $54 \div 125$ resulte em um número decimal exato, é necessário que o divisor dessa operação (125) seja um divisor de uma potência de base 10. E, neste caso, concluiu-se 125 é um divisor de 1000. Observe que 125 não tem chances de ser divisor de 10 e nem de 100, pois é um número maior do que 10 e 100. Caso a divisão não fosse exata, verificaríamos se 125 seria divisível por outras potências de base 10 como 10000, 100000 etc.

3º Método de Investigação: Verificando se o divisor da operação de divisão desejada é um divisor de uma potência de base 10 (10,100,1000 etc.).

O conjunto dos divisores de 10, 100, 1000, etc.

$$D(10) = \{1,2,5,10\}$$
$$D(100) = \{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}$$
$$D(1000) = \{1,2,4,5,8,10,20,25,40,50,100,125,200,250,500,1000\}$$

No exercício que foi feito na *atividade* 4 (divisão de inteiros) desse TCC, provou-se que divisões não exatas cujos divisores são $2,4,5,8$ e 10 são sempre decimais exatos por um caminho diferente do que será citado aqui. Perceba que esses números são divisores de potências de base 10.

153) Considerando os conjuntos dos divisores de 10, 100 e 100, escreva em cada quadro abaixo os números que são divisores de 10, 100 e/ou 1000.

2	**4**	**5**	**8**	**10**
É divisor de 10, 100 e 1000	É divisor de 100 e 1000.			

154) Siga o padrão a seguir, fatorando os números abaixo em fatores primos recursivamente.

a) $10 = 2 \cdot 5$
b) $100 = 10 \cdot 10 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$
c) $1000 = 100 \cdot 10 = (2^2 \cdot 5^2) \cdot (2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
d) $10000 =$
e) $100000 =$

Observações:

(1) Observe que 8 é um divisor de 1000, mas não é de 100. É necessário ter pelo menos três fatores iguais a 2 na fatoração de um número para que ele seja múltiplo de 8.

(2) Todos os divisores de 10, 100, 1000, 10000 etc. possuem na sua fatoração em primos somente o fator 2 e 5 ou apenas o fator 2 ou apenas o fator 5.

> Conclusão do 3º método: Para que a divisão $54 \div 125$ resulte em um número decimal exato, é necessário que a fatoração do divisor (125) em números primos possua somente o fator 2 e 5 ou apenas o fator 2 ou apenas o fator 5. Neste caso, $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, o que comprova que a divisão de $54 \div 125$ é equivalente a uma fração decimal e, portanto, a divisão resulta em um número decimal exato.

O 3º método acima, está associado ao teste padrão para verificar se uma divisão de inteiros resulta em um decimal exato ou dízima periódica. O professor Dante, em seu livro

"Um número racional admite representação decimal exata se, e somente se, na sua **forma irredutível**, o denominador possui como fatores primos apenas 2 e/ou 5" (DANTE, 2013)

Observação: Para aplicar o método acima é necessário que a fração correspondente a divisão seja uma fração irredutível. E, de fato, $\frac{54}{125}$ é uma fração irredutível e, por isso, fatoramos o 125.

Exemplo: $3 \div 6$ é um decimal exato ou dízima periódica?

Observe que se você fatorar o número 6, terá $6 = 2 \cdot 3$, que tem um fator que não é 5. Logo, parece que $3 \div 6$ é uma dízima periódica, mas não é. Observe $3 \div 6 = \frac{3}{6}$. Como ambos os termos da fração são múltiplos de 3, logo podemos simplificar essa fração dividindo os seus termos por 3. Daí teremos que $3 \div 6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 1 \div 2$. Como o divisor 2 é um número primo e ele satisfaz ao critério da divisão ser decimal exato.

Refazendo os exemplos anteriores.

- $2031 \div 40$ é um **número decimal exato**, pois $\frac{2031}{40}$ é uma fração irredutível e 40 possui uma forma fatorada igual a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.

- $54 \div 125$ é um **número decimal exato**, pois $125 = 5 \cdot 5 \cdot 2$ só possui o número 5 na sua forma fatorada.

- $40 \div 54$ é uma **dízima periódica**, pois $\frac{40}{54} = \frac{20}{27}$ e $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$.

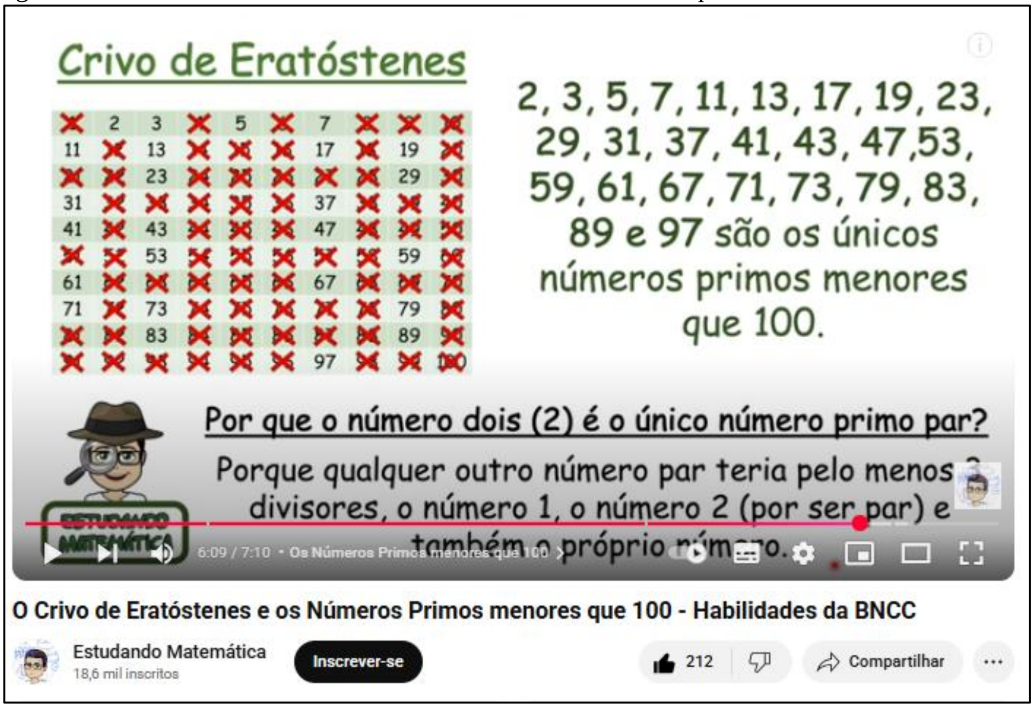
Bases Conceituais para a Compreensão do Tema (Parte II)

Número primo: "Chama-se número primo todo número maior que 1 que tem apenas dois divisores distintos: o número 1 e ele mesmo." (DANTE, 2001, p. 104)

Número composto: "Número composto é todo número maior que 1 que possui mais de dois divisores." (DANTE, 2001, p. 104)

Os 25 primeiros números primos: Os números primos menores do que 100 podem ser obtidos através de um método chamado de Crivo de Eratóstenes.

Figura 67: O crivo de Eratóstenes e os Números Primos menores que 100 – Habilidades da BNCC



Fonte: Videoaula do Youtube acessada em 17 de julho de 2025 pelo website: https://youtu.be/WItXIskLJo0

Fração Irredutível: Dados dois números inteiros a e b, A fração $\frac{a}{b}$ é *irredutível* se o a e b forem números primos entre si. Isso ocorre quando $mdc(a, b) = 1$. Lembre-se que dizer que o máximo divisor comum de dois inteiros é 1, significa que os conjuntos de divisores $D(a)$ e $D(b)$ só possuem um divisor comum, que é o número 1.

155) O quociente entre dois números primos sempre será uma dízima periódica? Justifique a sua resposta.

156) Por que os números decimais obtidos pelas divisões de um número inteiro diferente de zero por 2,4,5,8 e 10 são sempre decimais exatos?

157) Considerando a divisão de inteiros, é possível garantir que divisões não exatas por 3, 6, 7 e 9 sempre resultarão em dízimas periódicas? Comente a sua resposta.

Resolução do exercício principal dessa lição:

O resultado de $2024 \div 83$ na calculadora do smartphone é uma *dízima periódica*?

Solução: Sim. Como 83 é um número primo 2024 não é divisível por 83 a fração está na forma irredutível. Como 83 é um número primo, não pode ser fatorado em primos. Portanto, seguindo o critério de ter apenas números primos 2 e/ou 5 para ser decimal exato, logo $2024 \div 83$ resulta numa dízima periódica.

ANEXO A: Tabuadas da adição, subtração e multiplicação.

+		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

−		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
	1	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
	2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
	3	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	4	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
	5	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
	6	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
	7	7	6	5	4	2	2	1	0	-1	-2	-3
	8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
	10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

×		ENTRADA 2										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ENTRADA 1	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
	7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
	8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
	9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
	10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo C.; VILLARREAL, Mônica. *Tecnologias digitais e reconfiguração do conhecimento em matemática*. Campinas, SP: Papirus, 2005.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 22 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 24 jun. 2025.

BURTON, D. M. The History of Mathematics: An Introduction. McGraw-Hill. 2011.

CARVALHO, J. A. et al. *Dificuldades na aprendizagem de matemática: um olhar psicopedagógico.* São Paulo: Avercamp, 2004.

CORRIENNA Abdul Talib; Hassan Aliyu; Rainer Zawadzki; Marlina Ali. *Developing student's computational thinking through graphic calculator in STEAM education*. *AIP Conference Proceedings* 2184, 030003 (2019).

DANTE, Luiz Roberto. Teláris Essencial – Matemática – 9º ano, São Paulo. Editora Ática, 2019.

DRUBSCKY, Luiza. Mobile UX: guia definitivo 2025. UXCam, 26 fev. 2025. Disponível em: https://uxcam.com/br/blog/mobile-ux/. Acesso em: 25 jun. 2025.

FGV Projetos. Estudo de avaliação da política industrial da Zona Franca de Manaus. Rio de Janeiro: FGV Projetos, 2018. Disponível em: https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/handle/10438/24694. Acesso em: 24 jun. 2025.

HEFEZ, Abramo. Curso de Álgebra, Volume 1. 6ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2024.

LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LORENZATO, Sérgio. *Calculadora na sala de aula: proposta para o ensino de matemática no ensino fundamental e médio*. Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, Sérgio. *Calculadora na sala de aula: e agora?*. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Didática da Matemática).

MOURA, Ronaldo Rogério de Freitas. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.

SUFRAMA. História da Zona Franca de Manaus. Manaus: Superintendência da Zona Franca de Manaus, [s.d.]. Disponível em: https://www.gov.br/suframa. Acesso em: 24 jun. 2025.

SANTOS, Leidiane da Silva. *A Zona Franca de Manaus e o Polo Industrial de Manaus: os limites do modelo de desenvolvimento regional*. 2014. 103 f. Dissertação (Mestrado em Sociedade e Cultura na Amazônia) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2014. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5216. Acesso em: 24 jun. 2025.