

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Estudo de funções via modelos de crescimento populacional

Darlis Aparecido da Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Darlis Aparecido da Silva

Estudo de funções via modelos de crescimento populacional

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Katia Andreia Gonçalves de Azevedo

USP – São Carlos
Julho de 2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

A639e Aparecido da Silva , Darlis
 Estudo de funções via modelos de crescimento
populacional / Darlis Aparecido da Silva ;
orientador Katia Andreia Gonçalves de Azevedo. --
São Carlos, 2025.
 113 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2025.

 1. Funções. 2. Modelos de crescimento
populacional . I. Andreia Gonçalves de Azevedo,
Katia , orient. II. Título.

Darlis Aparecido da Silva

Study of functions via population growth models

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Katia Andreia Gonçalves de Azevedo

USP – São Carlos
July 2025

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A Deus e à Nossa Senhora Aparecida, que sempre guiam os meus passos.

Aos meus pais, Ailson e Lúcia, pelo apoio e encorajamento.

À minha orientadora, Katia, pela sua dedicação, paciência e enorme conhecimento.

A todos os professores do Departamento de Computação e Matemática da FFCLRP.

Ao meu namorado, Moisés, que é um exemplo de dedicação e perseverança.

À minha amiga, Natália, que assim como eu, cultiva pela Matemática um imenso amor.

“A Matemática é a honra do espírito humano.”
(Gottfried Wilhelm Leibniz)

RESUMO

SILVA, D. A. **Estudo de funções via modelos de crescimento populacional**. 2025. 113 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

Este trabalho é baseado, principalmente, em (KOT, 2001) e (ELAYDI, 2005), e objetiva aplicar funções matemáticas conhecidas, juntamente com conceitos de Cálculo e Equações de Diferenças, no estudo de alguns modelos de crescimento populacional.

Palavras-chave: Funções, Modelos de crescimento populacional.

ABSTRACT

SILVA, D. A. **Study of functions via population growth models.** 2025. 113 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

This work is based mainly on (KOT, 2001) and (ELAYDI, 2005), and the main goal is to apply certain specific concepts from Calculus and Difference Equations in the study of some population growth models.

Keywords: Functions, Population growth models.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Campo de direções da Equação Diferencial $\frac{dy}{dt} = 2y(1 - \frac{y}{3})$	25
Figura 2 – Campo de direções da Equação Diferencial $\frac{dy}{dt} = 2y(1 - \frac{y}{3})$, juntamente com algumas curvas solução.	25
Figura 3 – Campo de direções da equação diferencial $\frac{dy}{dt} = y^3 - y$	28
Figura 4 – Diagrama de bifurcação da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \mu - y^2$	29
Figura 5 – Diagrama de bifurcação da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \mu y - y^2$	29
Figura 6 – Teia de aranha da equação de diferenças $x(n+1) = \frac{2x(n)}{1 + \frac{1}{3}x(n)}$, com $x(0) = 1$	35
Figura 7 – Os pontos fixos de f^2 , representados na figura como P_1, P_2, P_3 e P_4 . Dois deles (P_1 e P_3) são também pontos fixos de f	43
Figura 8 – Os pontos fixos de T^2 , representados na figura como P_1, P_2, P_3 e P_4 . Dois deles (P_1 e P_3) são também pontos fixos de T	44
Figura 9 – Crescimento exponencial	48
Figura 10 – Taxa de crescimento per capita - modelo exponencial	49
Figura 11 – Algumas curvas-solução da equação diferencial logística	50
Figura 12 – Taxa de crescimento per capita - modelo logístico	52
Figura 13 – Campo de direções e uma curva solução de $\frac{dP}{dt} = 6e^{-2t}P$	54
Figura 14 – Taxa de crescimento per capita - modelo de Gompertz	57
Figura 15 – Colheita de baixa mortalidade	58
Figura 16 – Colheita de alta mortalidade	58
Figura 17 – Sobrepesca severa	59
Figura 18 – Diagrama de bifurcação	59
Figura 19 – Curva rendimento-esforço	60
Figura 20 – Compensação crítica	61
Figura 21 – Efeito Allee	61
Figura 22 – Compensação crítica com colheita	62
Figura 23 – Diagrama de bifurcação	62
Figura 24 – Curva rendimento-esforço	64
Figura 25 – Taxa de crescimento per capita constante	66
Figura 26 – Crescimento geométrico	67
Figura 27 – Decaimento geométrico	67
Figura 28 – Oscilações decrescentes	68
Figura 29 – Oscilações crescentes	68

Figura 30 – Crescimento geométrico no diagrama teia de aranha	69
Figura 31 – Decaimento geométrico no diagrama teia de aranha	69
Figura 32 – Diagrama teia de aranha para um equilíbrio estável	71
Figura 33 – Compensação	73
Figura 34 – Curva de Beverton-Holt	73
Figura 35 – Teia de aranha da equação $N(t + 1) = \frac{2N_t}{1 + \frac{1}{3}N_t}$; $N_0 = 1$	74
Figura 36 – Curva da Equação de Diferenças Logística	76
Figura 37 – Taxa de crescimento per capita	76
Figura 38 – Curva da Equação de Diferenças Logística na forma (4.13)	77
Figura 39 – Diagrama de teia de aranha da equação $N_{t+1} = 1,5N_t - 0,05N_t^2$	78
Figura 40 – Curva de crescimento da população de peixes modelada por $N_{t+1} = 1,5N_t - 0,05N_t^2$	78
Figura 41 – Curva de crescimento da população de peixes modelada por $N_{t+1} = 3,2N_t - 0,11N_t^2$	79
Figura 42 – Curva de crescimento da população de peixes modelada por $N_{t+1} = 3,95N_t - 0,295N_t^2$	80
Figura 43 – Raízes reais positivas	85
Figura 44 – Valor crítico r_0 em função do retardo T	86
Figura 45 – Plotando algumas soluções da equação (5.11).	89
Figura 46 – Plotando algumas soluções da equação (5.13).	90
Figura 47 – Um foco estável.	92
Figura 48 – Um foco estável.	93
Figura 49 – Dois círculos invariantes	94
Figura 50 – Um atrator estranho	94
Figura 51 – Plotando algumas soluções da equação (5.27)	95
Figura 52 – Plotando algumas soluções da equação (5.28)	95
Figura 53 – A planilha do Geogebra	99
Figura 54 – Taxa de crescimento per capita constante	100
Figura 55 – Curva do crescimento exponencial	101
Figura 56 – Ajuste linear dos dados (t, Y)	102
Figura 57 – Ajuste exponencial para os dados da tabela 1	103
Figura 58 – Ajuste quadrático dos pontos (y_i, y_{i+1})	105
Figura 59 – Ajuste linear dos dados (t, Y)	106
Figura 60 – Ajuste logístico para os dados da tabela 10	106
Figura 61 – Taxa de crescimento per capita	107
Figura 62 – Recrutamento	107
Figura 63 – Ajuste linear dos dados (t, Y)	110
Figura 64 – Ajuste de Beverton-Holt para os dados da tabela 1	110
Figura 65 – Gráfico da função $l(x) = x^3 - 15x$ e os pontos fixos da mesma	112

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Algumas iterações da equação (5.11)	88
Tabela 2 – Algumas iterações da equação (5.13)	90
Tabela 3 – Crescimento da população brasileira no período 1940 - 2022	98
Tabela 4 – Conjunto de pontos (t, Y)	102
Tabela 5 – Tabela de dados (y_i, y_{i+1})	104
Tabela 6 – Tabela de dados (t_i, Y_i)	105
Tabela 7 – Tabela de dados (t_i, Y_i)	109
Tabela 8 – Crescimento da população de Capitólio, MG, no período 1980 - 2022	111
Tabela 9 – Crescimento da população de Passos, MG, no período 1970 - 2022	111

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS . . .	21
2.1	Equações Diferenciais Ordinárias	21
2.1.1	<i>Teorema de Existência e Unicidade</i>	22
2.1.2	<i>Pontos de Equilíbrio de uma Equação Diferencial e Estabilidade dos Equilíbrios.</i>	24
2.2	Equações de Diferenças	30
2.2.1	<i>Introdução</i>	30
2.2.2	<i>Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem</i>	31
2.2.3	<i>Pontos de Equilíbrio de uma Equação de Diferenças e Estabilidade dos Equilíbrios.</i>	34
2.2.4	<i>Equações de Diferenças Lineares Homogêneas de Ordem Superior com Coeficientes Constantes</i>	37
2.2.5	<i>Comportamento das Soluções de uma Equação de Diferenças Linear Homogênea de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes</i>	41
2.2.6	<i>Pontos e Ciclos Periódicos</i>	42
3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO ESTUDO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL	47
3.1	A Equação Exponencial	47
3.2	A Equação Logística	49
3.3	A Equação de Gompertz	52
3.4	Analisando um Modelo de Colheita de Peixes	57
4	EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NO ESTUDO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL	65
4.1	Crescimento Independente da Densidade	65
4.2	Crescimento Dependente da Densidade	71
5	MODELOS COM RETARDO	83
5.1	Equações de Diferenças com Retardo	83
6	UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA	97

6.1	Introdução	97
6.2	Ajuste de Curvas Utilizando o Geogebra	98
6.3	Estudo do Modelo Exponencial	100
6.4	Estudo do Modelo Logístico	102
6.5	Estudo do Modelo de Beverton-Holt	107
REFERÊNCIAS		113

INTRODUÇÃO

O estudo de funções no ensino médio é comumente feito através de uma abordagem exclusivamente teórica, trabalhando-se tanto as características algébricas das fórmulas envolvidas quanto as representações gráficas de tais funções. Entretanto, tem-se aí a oportunidade de trabalhar com a modelagem de problemas do mundo real, que podem surgir nas mais diversas áreas, como por exemplo, em Economia, Biologia e Física. Esta abordagem pode despertar nos alunos um maior interesse pela aprendizagem, pois torna mais significativo e recompensatório todo o conhecimento adquirido no estudo teórico.

Objetivamos, neste trabalho, abordar modelos de crescimento populacional nos quais aparecerão as principais funções estudadas em um curso de ensino médio: constantes, afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e racionais. Isto permite o desenvolvimento de atividades multidisciplinares, uma vez que todas as funções apresentadas estão inseridas no contexto da modelagem de crescimento populacional, sendo possível, portanto, a interpretação dessas funções e suas características algébricas e gráficas em um contexto biológico. Além disso, os alunos podem ter seu aprendizado enriquecido com o uso de softwares matemáticos que irão ajudá-los na construção de tabelas e gráficos.

Pretendemos que este trabalho possa ser utilizado por professores de Matemática que se interessem pelo ensino de modelagem matemática, permitindo aos alunos aplicar seus conhecimentos sobre funções em problemas que envolvem análise e interpretação de dados.

Procuramos aprofundar os conceitos matemáticos necessários para a compreensão do conteúdo desenvolvido, aplicando equações diferenciais e equações de diferenças a modelos de crescimento populacional.

No capítulo 2, estudamos equações diferenciais e equações de diferenças, com ênfase na análise de seus pontos de equilíbrio, na estabilidade desses equilíbrios e na interpretação gráfica destes conceitos, que são importantes no desenvolvimento dos capítulos seguintes.

No capítulo 3, estudamos modelos de crescimento populacional regidos por equações diferenciais, seguindo uma ordem crescente de complexidade. Começamos pelo modelo exponencial, em seguida abordamos o modelo logístico e o modelo de Gompertz. Finalizamos o capítulo com uma análise de um modelo de colheita de peixes.

No capítulo 4, estudamos modelos de crescimento populacional em tempo discreto, os quais são regidos por equações de diferenças. Começamos pelo crescimento exponencial, passando pelo modelo de Beverton-Holt e finalizando com a versão em tempo discreto do modelo logístico, a equação de diferenças logística.

No capítulo 5, discutimos modelos de crescimento em tempo discreto com retardo, com ênfase no estudo da estabilidade dos equilíbrios destes modelos.

Finalmente, no capítulo 6, apresentamos uma atividade a ser desenvolvida com alunos do ensino médio, com o objetivo de aplicar alguns dos modelos discutidos neste trabalho na modelagem do crescimento populacional da população brasileira e de algumas cidades brasileiras. Esta atividade também permite trabalhar com a tecnologia, uma vez que os alunos realizarão algumas etapas utilizando o computador.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Neste capítulo, estudaremos alguns conceitos básicos sobre equações diferenciais e equações de diferenças. Mais especificamente, discutiremos sobre a existência e unicidade de solução para um problema de valor inicial e conceitos relacionados à estabilidade das soluções destas equações. Os resultados serão aplicados nos capítulos seguintes, onde utilizaremos equações diferenciais ordinárias e equações de diferenças finitas para estudar modelos de crescimento populacional.

2.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Iniciaremos com a definição e exemplos de equações diferenciais ordinárias.

Definição 1. Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação diferencial que envolve uma função incógnita e suas derivadas.

Exemplo 1. Alguns exemplos de equações diferenciais ordinárias:

1. $y'(t) = 3t + y$
2. $\sin(t)y''(t) - y'(t) = \cos(t)y(t) + 3$
3. $y'(t) = t^2 \cdot (y(t))^2 + 2$

Uma **solução** da equação $y'(t) = f(t, y)$ é uma função derivável $y = y(t)$, definida em um intervalo I de valores de t , tal que $\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t))$. A **solução geral** de uma equação diferencial ordinária é uma solução que contém todas as soluções possíveis.

A maioria das equações diferenciais não pode ser resolvida explicitamente. Mesmo assim, podemos utilizar métodos computacionais para apresentar soluções aproximadas do problema

ou fazer uma abordagem qualitativa, isto é, utilizando métodos que nos permitam analisar o comportamento de suas soluções sem saber explicitamente expressá-las.

Comumente, ao resolver uma equação diferencial, estamos interessados em uma solução particular, que atenda uma condição inicial. Temos, então, os chamados **Problemas de Valor Inicial (PVI)**. Por exemplo, suponha que devemos resolver a equação (1) do exemplo anterior, mas desejemos a solução que satisfaz $y(1) = 2$. Temos, assim, o PVI

$$\begin{cases} y'(t) = 3t + y \\ y(1) = 2 \end{cases} .$$

A solução é $y(t) = -3(t + 1) + 8e^{t-1}$.

Consideremos, agora, o PVI

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Observamos, de imediato, que $y = 0$ é uma solução. No entanto, podemos verificar que $y = t^2$ também é solução.

Seja, agora, o PVI

$$\begin{cases} y'(t) = \sec^2 t \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} .$$

A família de funções que resolve a equação diferencial é $y(t) = tg t + k$, onde $k \in \mathbb{R}$. Mas a função $tg(t)$ não está definida em $t = \frac{\pi}{2}$, de modo que o PVI não tem solução.

Estes exemplos leva-nos a questionar sobre o seguinte: Quando é que existe solução para um PVI e, caso exista, como podemos saber se ela é única? Na próxima seção, responderemos esta pergunta.

2.1.1 Teorema de Existência e Unicidade

Existe um teorema que estabelece as condições suficientes para garantir a existência e a unicidade de solução de um PVI da forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} , \quad (2.1)$$

onde f é uma função definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, com $(t_0, y_0) \in A$.

Teorema 1. (Existência e Unicidade Local) Suponha que f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sejam funções contínuas no retângulo

$$R = \{(t, y); t_0 \leq t \leq t_0 + a; |y - y_0| \leq b\} \subset A,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}^+$. Sejam $M = \max_{(t,y) \in R} |f(t,y)|$ e $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. Então, o PVI (2.1) tem uma única solução $y = y(t)$ em $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada no trabalho de (SILVA, 2020).

Exemplo 2. Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = y^2 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Como $f(t, y) = y^2$, temos que f e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ são contínuas em todo \mathbb{R}^2 . Assim, o Teorema 1 garante a existência e a unicidade de solução para todo $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Logo, existe uma e somente uma solução local da equação diferencial $y'(t) = y^2$ que passa pelo ponto $(1, 1)$.

As soluções da equação diferencial desse PVI é a família de curvas $y(t) = \frac{1}{K-t}$, em que $K \in \mathbb{R}$. Notemos que, como $y'(t) = y^2 > 0$, as curvas solução são sempre crescentes. Como desejamos a curva particular que passa por $(1, 1)$, devemos calcular a constante K que atende tal condição:

$$1 = \frac{1}{K-1} \Rightarrow K - 1 = 1 \Rightarrow K = 2$$

Portanto, a solução do PVI é a função $y(t) = \frac{1}{2-t}$.

2.1.2 Pontos de Equilíbrio de uma Equação Diferencial e Estabilidade dos Equilíbrios.

Nesta seção, trataremos de equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad (2.2)$$

que são chamadas de **autônomas**, por não conterem nenhuma dependência explícita em t .

A seguir, daremos a definição de ponto de equilíbrio para uma equação diferencial da forma (2.2).

Definição 2. Diz-se que $y = y^*$ é um **ponto de equilíbrio** de (2.2) se $f(y^*) = 0$.

Os pontos de equilíbrio são também soluções da equação diferencial. Os pontos de equilíbrio podem ser especialmente importantes quando a equação surge na modelagem matemática para algum estudo do mundo real, como, por exemplo, a análise da variação populacional de determinada espécie de ser vivo. Um ponto de equilíbrio pode indicar, por exemplo, que o número de indivíduos na população se estabiliza com o decorrer do tempo, ou então, que a população se afasta de determinado valor. Nesse sentido, podemos classificar os equilíbrios de uma equação diferencial como estáveis ou instáveis. Antes de discorrer em detalhes sobre a estabilidade dos equilíbrios, vamos falar um pouco sobre campo de direções, cuja definição daremos no próximo exemplo.

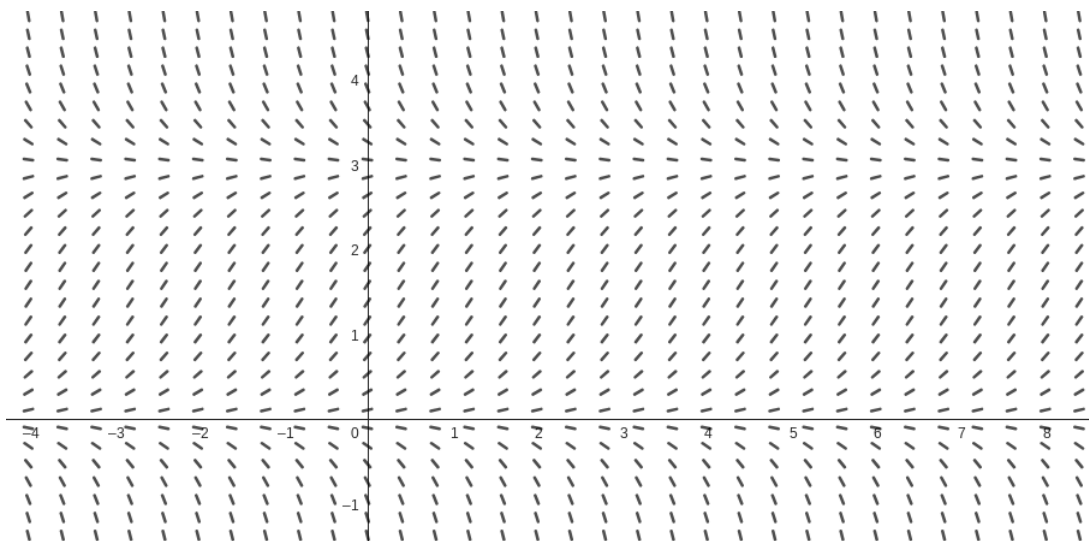
Exemplo 3. A equação diferencial $\frac{dy}{dt} = 2y(1 - \frac{y}{3})$ tem dois equilíbrios: $y^* = 0$ e $y^* = 3$. Vamos esboçar o campo de direções dessa equação e observar o comportamento das curvas-solução em relação às duas soluções de equilíbrio.

Em cada ponto (t, y) na região do plano ty que constitui o domínio de f , desenha-se um segmento cujo coeficiente angular nesse ponto é $\frac{dy}{dt} = f(y)$. Considerando a parametrização $\gamma(t) = (t, y(t))$, cujo vetor tangente é $\gamma'(t) = (1, y'(t))$, cada segmento tem o mesmo coeficiente angular que a curva solução da equação diferencial que passa por (t, y) , sendo também tangente à curva nesse mesmo ponto. O conjunto de todos esses segmentos compõe o **campo de direções** da equação diferencial (veja a figura 1). O campo de direções fornece uma visualização da forma geral das curvas-solução. (Observamos que, para facilitar a visualização do campo de direções, normalizamos o tamanho dos vetores).

A equação diferencial desse exemplo pode ser resolvida explicitamente, e a solução geral é

$$y(t) = \frac{3}{1 + Ce^{-2t}}, \text{ onde } C \in \mathbb{R}.$$

Figura 1 – Campo de direções da Equação Diferencial $\frac{dy}{dt} = 2y(1 - \frac{y}{3})$.

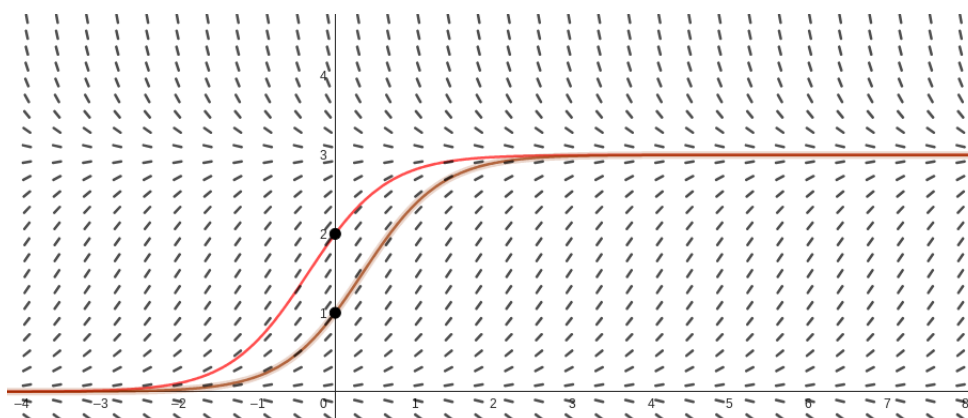


Fonte: Elaborada pelo autor.

Por exemplo, no ponto $(0, 2)$, a inclinação do segmento vale $\frac{dy}{dt} = 4(\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$, assim como o coeficiente angular da curva solução da equação diferencial que passa por $(0, 2)$.

A seguir, exibimos o campo de direções juntamente com duas curvas-solução: as que passam pelos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$. Observamos aqui que a função $f(y) = 2y(1 - \frac{y}{3})$ satisfaz as hipóteses do teorema de existência e unicidade local; logo, cada uma dessas curvas é solução única em seus respectivos problemas de valor inicial.

Figura 2 – Campo de direções da Equação Diferencial $\frac{dy}{dt} = 2y(1 - \frac{y}{3})$, juntamente com algumas curvas solução.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos ver que as soluções se afastam do equilíbrio $y^* = 0$, mas se aproximam do equilíbrio $y^* = 3$. Dizemos que o equilíbrio $y^* = 0$ é instável, enquanto o equilíbrio $y^* = 3$ é estável.

Podemos observar que um equilíbrio estável atrai as soluções da equação diferencial para si, ao passo que um equilíbrio instável as afasta de si.

O campo de direções de uma equação diferencial permite visualizar a forma geral das curvas-solução, bem como a estabilidade ou instabilidade das soluções de equilíbrio. No entanto, esboçá-lo é demasiadamente trabalhoso, e embora possamos usar um computador para essa tarefa, isso não é realmente necessário. Existe um critério para determinarmos se cada equilíbrio da equação diferencial (2.2) é estável ou instável. Antes de apresentá-lo e demonstrá-lo, daremos as definições formais de estabilidade e estabilidade assintótica.

Definição 3. Um ponto de equilíbrio y^* é **estável segundo Lyapunov** se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe em correspondência um $\delta > 0$ (dependente de ε) tal que, para todas as condições iniciais $y(t_0) = y_0$ que satisfaçam $|y_0 - y^*| < \delta$, temos $|y(t) - y^*| < \varepsilon$, $\forall t \in (t_0, +\infty)$.

Falando de outro modo, um equilíbrio y^* é estável se outra solução que começa próxima o suficiente de y^* mantém $y(t)$ próxima de y^* .

Definição 4. Um ponto de equilíbrio y^* é **assintoticamente estável** quando é estável e existe um $\rho > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = 0$$

para todo $y(t_0) = y_0$ satisfazendo $|y_0 - y^*| < \rho$.

Falando de outro modo, temos equilíbrio assintoticamente estável quando, para desvios de y^* suficientemente pequenos do valor inicial y_0 , as soluções tendem a y^* com o passar do tempo.

Teorema 2. Se y^* é um ponto de equilíbrio, $f(y)$ é uma função continuamente diferenciável e $f'(y^*) \neq 0$, então o ponto de equilíbrio y^* é assintoticamente estável se $f'(y^*) < 0$, e instável se $f'(y^*) > 0$.

Demonstração. Consideremos um equilíbrio para o qual $f'(y^*) < 0$ e façamos

$$x(t) = y(t) - y^*.$$

Se fizermos a expansão em série de Taylor de $f(y)$, em torno de y^* , obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} - 0 = f(y) \\
&= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{f^{(K)}(y^*)}{K!} (y - y^*)^K \\
&= f(y^*) + f'(y^*)x + f''(y^*)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(y^*)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(y^*)\frac{x^4}{4!} + \dots
\end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\frac{dx}{dt} = f(y^*) + f'(y^*)x + g(x), \quad (2.3)$$

em que $g(x)$ consiste em termos de ordem superior em x .

Como y^* é um ponto de equilíbrio, a equação (2.3) se reduz para

$$\frac{dx}{dt} = f'(y^*)x + g(x) \quad (2.4)$$

e pode ser interpretada como uma perturbação de uma equação diferencial linear de coeficiente constante. Em particular, $g(x)$ satisfaz $g(0) = 0$ e também $g'(0) = 0$.

Isso, juntamente com a continuidade de $g'(x)$ nos garante que, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma pequena vizinhança δ em torno de zero em que $|g'(x)| < \varepsilon$. Como resultado, $g(x) = \int_0^x g'(s) ds \leq \int_0^x \varepsilon ds \leq \varepsilon|x|$.

Logo, segue que

$$\frac{dx}{dt} = f'(y^*)x + g(x) \leq f'(y^*)x + \varepsilon|x|$$

Para δ e ε suficientemente pequenos e $f'(y^*) \neq 0$, os termos de ordem superior não podem mudar o sinal de $\frac{dx}{dt}$.

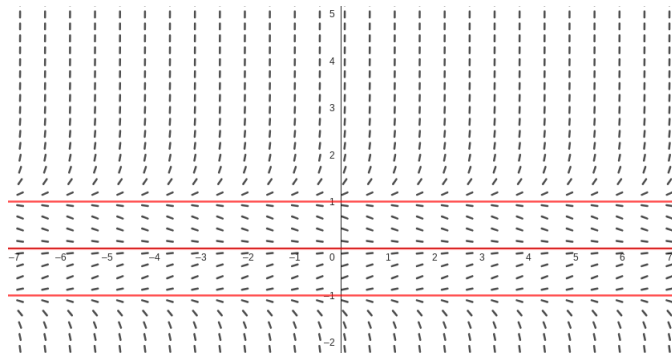
De fato, para y próximo de y^* , $g(x)$ se aproxima de zero. Se tomarmos $y > y^*$, teremos $x = y - y^* > 0$ e, como $f'(y^*) < 0$, segue que $\frac{dx}{dt} < 0$, o que significa que $x(t)$ decresce, com $y \rightarrow y^*$; por outro lado, se tomarmos $y < y^*$, teremos $x = y - y^* < 0$ e, como $f'(y^*) < 0$, segue que $\frac{dx}{dt} > 0$, o que significa que $x(t)$ cresce, com $y \rightarrow y^*$.

Para o caso em que $f'(y^*) > 0$, as conclusões são análogas. De fato, se tomarmos $y > y^*$, teremos $x = y - y^* > 0$ e, como $f'(y^*) > 0$, segue que $\frac{dx}{dt} > 0$, o que significa que $x(t)$ cresce, com y afastando-se de y^* . Por outro lado, se tomarmos $y < y^*$, teremos $x = y - y^* < 0$ e, como $f'(y^*) > 0$, segue que $\frac{dx}{dt} < 0$, o que significa que $x(t)$ decresce, com y afastando-se de y^* . \square

Voltando ao Exemplo 4, temos $f(y) = 2y(1 - \frac{y}{3})$ e, portanto, $f'(y) = 2 - \frac{4}{3}y$. Então, para o equilíbrio $y^* = 0$, temos $f'(0) = 2 > 0$; logo, $y^* = 0$ é instável. Para o equilíbrio $y^* = 3$, temos $f'(3) = -2 < 0$; logo, $y^* = 3$ é assintoticamente estável.

Exemplo 4. Seja a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = y^3 - y$. Há três pontos de equilíbrio: $y^* = 0$, $y^* = -1$ e $y^* = 1$. Como $f(y) = y^3 - y$, temos $f'(y) = 3y^2 - 1$. Assim, $f'(0) = -1$, $f'(-1) = 2$ e $f'(1) = 2$. Portanto, $y^* = 0$ é equilíbrio assintoticamente estável, enquanto $y^* = -1$ e $y^* = 1$ são equilíbrios instáveis. Exibimos, a seguir, o campo de direções dessa equação diferencial, juntamente com os pontos de equilíbrio.

Figura 3 – Campo de direções da equação diferencial $\frac{dy}{dt} = y^3 - y$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma equação diferencial autônoma pode conter um parâmetro, do qual dependem as soluções de equilíbrio. A alteração desse parâmetro pode provocar mudanças na estabilidade dos equilíbrios. As mudanças qualitativas resultantes no comportamento de um sistema dinâmico são chamadas de **bifurcações**, e os parâmetros são chamados parâmetros de bifurcação.

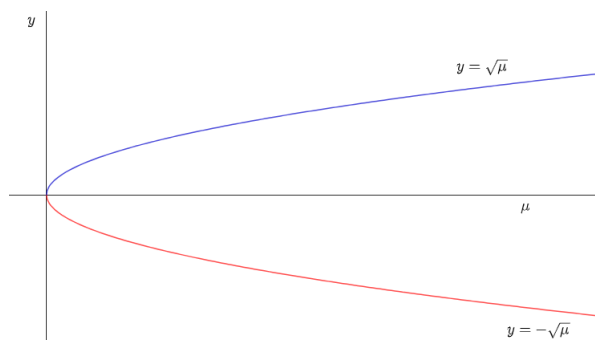
Podemos ilustrar como a localização e a estabilidade das soluções de equilíbrio dependem do parâmetro através dos chamados **diagramas de bifurcação**. Neste trabalho, representaremos ramos estáveis em azul, e ramos instáveis em vermelho.

Exemplo 5. Seja a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \mu - y^2$. Os pontos de equilíbrio são dados por $y^* = \pm\sqrt{\mu}$. É claro que devemos ter $\mu \geq 0$. Se $\mu < 0$, não há ponto de equilíbrio algum.

Sabemos que $y = \pm\sqrt{\mu}$ corresponde aos ramos inferior e superior da parábola $y^2 = \mu$.

Como $f(y) = \mu - y^2$, então $f'(y) = -2y$, de modo que temos $f'(-\sqrt{\mu}) = 2\sqrt{\mu}$ e $f'(\sqrt{\mu}) = -2\sqrt{\mu}$. Assim, para $\mu > 0$, temos estabilidade assintótica no ramo superior e instabilidade no ramo inferior. O ponto $\mu = 0$ é um ponto de bifurcação. Exibimos, a seguir, o diagrama de bifurcação dessa equação diferencial.

Figura 4 – Diagrama de bifurcação da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \mu - y^2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 6. Seja a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \mu y - y^2$. Os pontos de equilíbrio são dados por $y^* = 0$ e $y^* = \mu$.

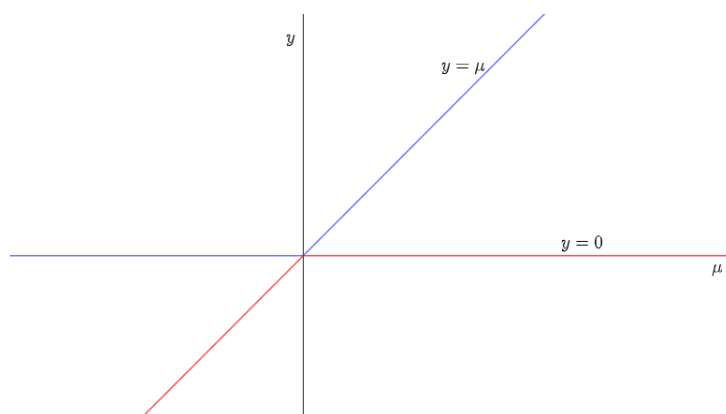
As retas $y = 0$ e $y = \mu$ determinam quatro regiões no plano μy . Como $f(y) = \mu y - y^2$, então $f'(y) = \mu - 2y$, de modo que temos $f'(0) = \mu$ e $f'(\mu) = -\mu$.

Assim, se $\mu > 0$, o equilíbrio $y^* = 0$ é instável, enquanto o equilíbrio $y^* = \mu$ é assintoticamente estável.

Por outro lado, se $\mu < 0$, o equilíbrio $y^* = 0$ é assintoticamente estável, enquanto o equilíbrio $y^* = \mu$ é instável. O ponto $\mu = 0$ é um ponto de bifurcação.

Exibimos a seguir o diagrama de bifurcação dessa equação diferencial.

Figura 5 – Diagrama de bifurcação da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \mu y - y^2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2 Equações de Diferenças

2.2.1 Introdução

Definição 5. Equações de diferenças são equações do tipo

$$x(n+1) = f(n, x(n), x(n-1), \dots, x(n-m)),$$

em que m e n são números naturais tais que $n \geq m$ e $f : \mathbb{R}^{m+2} \rightarrow \mathbb{R}$.

Neste trabalho, estudaremos equações de diferenças da forma

$$x(n+1) = f(x(n)). \tag{2.5}$$

Equações de diferenças permitem descrever a evolução de certos fenômenos com o decorrer do tempo. Por exemplo: suponha que faremos o estudo do crescimento de uma população em tempo discreto (isto é, contabilizaremos a população em instantes inteiros e regulares de tempo), de forma que o número $x(n+1)$ de indivíduos da geração $(n+1)$ é função do número $x(n)$ de indivíduos da geração n .

Se o número inicial de indivíduos é x_0 , teremos a seguinte sequência:

$$\begin{aligned} x_0 & \\ x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0) \\ x_4 &= f(x_3) = f(f(f(f(x_0)))) = f^4(x_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dizemos que $f^n(x_0)$ é a **n -ésima iterada** de x_0 sob f . Por definição, $f^0(x_0) = x_0$.

Fazendo $x(n) = f^n(x_0)$, temos que $x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f[f^n(x_0)] = f(x(n))$.

Exemplo 7. Seja $f(x) = x^2$ e $x_0 = 0,3$. Temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) = f(0,3) = 0,3^2 = 0,09 \\ x_2 &= f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(0,09) = 0,09^2 = 0,0081 \\ x_3 &= f^3(x_0) = f(f^2(x_0)) = f(0,0081) = 0,0081^2 = 0,00006561 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Temos, nesse exemplo, a equação de diferenças $x(n+1) = x^2(n)$; $x(0) = 0,3$. Observe que $x(n)$ tende para zero quando $n \rightarrow \infty$.

2.2.2 Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem

Uma equação de diferenças linear homogênea de primeira ordem tem a forma

$$x(n+1) = a(n) x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (2.6)$$

enquanto a equação não-homogênea associada tem a forma

$$y(n+1) = a(n) y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (2.7)$$

onde $a(n) \neq 0$ e $a(n)$ e $g(n)$ são funções de valores reais para $n \geq n_0 \geq 0$.

A solução da equação (2.6) pode ser obtida por iteração. Vejamos:

$$\begin{aligned} x(n_0+1) &= a(n_0) x(n_0) = a(n_0) x_0 \\ x(n_0+2) &= a(n_0+1) x(n_0+1) = a(n_0+1) a(n_0) x_0 \\ x(n_0+3) &= a(n_0+2) x(n_0+2) = a(n_0+2) a(n_0+1) a(n_0) x_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Indutivamente, nota-se que:

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n_0+n-n_0) = a(n_0+n-n_0-1) a(n_0+n-n_0-2) \cdots a(n_0) x_0 \\ &= a(n-1) a(n-2) \cdots a(n_0) x_0, \end{aligned}$$

que podemos representar como

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] \cdot x_0. \quad (2.8)$$

Exemplo 8. Consideremos a equação de diferenças: $x(n+1) = 2x(n)$, $x(0) = 3$. Aqui, temos $a(n) = 2$, $n_0 = 0$ e $x_0 = 3$. Aplicando (2.8), temos:

$$x(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} 2 \right] \cdot 3 = 2^n \cdot 3 = 3 \cdot 2^n.$$

Portanto, a solução é $x(n) = 3 \cdot 2^n$.

Para encontrar a solução da equação (2.7), começamos fazendo algumas iterações:

$$\begin{aligned}
y(n_0 + 1) &= a(n_0) y(n_0) + g(n_0) \\
y(n_0 + 2) &= a(n_0 + 1) y(n_0 + 1) + g(n_0 + 1) \\
&= a(n_0 + 1)a(n_0)y(n_0) + a(n_0 + 1)g(n_0) + g(n_0 + 1) \\
y(n_0 + 3) &= a(n_0 + 2)y(n_0 + 2) + g(n_0 + 2) \\
&= a(n_0 + 2)a(n_0 + 1)a(n_0)y(n_0) + a(n_0 + 2)a(n_0 + 1)g(n_0) + a(n_0 + 2)g(n_0 + 1) + g(n_0 + 2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Usando indução matemática, mostraremos que

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) \quad (2.9)$$

Vamos, então, supor a validade de (2.9) para $n = k$. Isto é:

$$y(k) = \left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) \quad (2.10)$$

Provemos que decorre a validade de (2.9) para $n = k + 1$.

De fato, de (2.7), temos que $y(k + 1) = a(k) y(k) + g(k)$, o que, usando (2.10), dá

$$y(k + 1) = a(k) \left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[a(k) \prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) + g(k) \quad (2.11)$$

$$= \left[\prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^k a(i) \right] g(r) + \left(\prod_{i=k+1}^k a(i) \right) g(k) \quad (2.12)$$

(onde adotamos que $\prod_{i=k+1}^k a(i) = 1$)

$$= \left[\prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^k \left(\prod_{i=r+1}^k a(i) \right) g(r) \quad (2.13)$$

o que prova a validade de (2.9) para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Um caso particular da equação (2.7) é o seguinte:

$$y(n + 1) = a y(n) + g(n), \quad y(0) = y_0 \quad (2.14)$$

Usando, então, (2.9), com $n_0 = 0$, $a(i) = a$ e k no lugar de r , obtemos:

$$y(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a \right] y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} a \right] g(k) \quad (2.15)$$

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k) \quad (2.16)$$

Exemplo 9. Para a equação de diferenças: $y(n+1) = 3y(n) + 4n$, $y(0) = 4$, temos $a = 3$, $g(n) = 4n$, $n_0 = 0$ e $y_0 = 4$. Usando (2.16), vem:

$$\begin{aligned} y(n) &= 3^n \cdot 4 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^{n-k-1} \cdot 4k \\ &= 4 \cdot 3^n + 4 \cdot 3^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} \cdot k \\ &= 4 \cdot 3^n + 4 \cdot 3^{n-1} \left[-\frac{1}{2} \cdot 3^{1-n} \cdot n + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot 3^{1-n} \right] \\ &= 5 \cdot 3^n - 2n - 1 \end{aligned}$$

Portanto, a solução é $y(n) = 5 \cdot 3^n - 2n - 1$.

Outro caso particular da equação (2.7) é o seguinte:

$$y(n+1) = a y(n) + b, \quad y(0) = y_0 \quad (2.17)$$

Usando (2.16), com $g(k) = b$, obtemos, para o caso $a \neq 1$:

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b \quad (2.18)$$

Este somatório é calculado como segue:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b = b(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a^0) \quad (2.19)$$

Entre parênteses, temos a soma de uma P.G. finita, com primeiro termo a^{n-1} e razão $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Então prosseguimos, aplicando a fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b = b(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a^0) = b \left[\frac{a^{n-1}(a^{-n} - 1)}{\frac{1-a}{a}} \right] = b \left[\frac{a^n - 1}{a - 1} \right]$$

de modo que temos

$$y(n) = a^n y_0 + b \left[\frac{a^n - 1}{a - 1} \right] \quad (2.20)$$

Notemos que $y_1(n) = b \left[\frac{a^n - 1}{a - 1} \right]$ é a solução da equação não homogênea $y(n+1) = a y(n) + b$; $y(0) = 0$, enquanto $y_2(n) = a^n y_0$ é a solução geral da equação homogênea $y(n+1) = a y(n)$; $y(0) = y_0$.

Para o caso $a = 1$, teremos

$$y(n) = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b = y_0 + b \sum_{k=0}^{n-1} 1 = y_0 + bn. \quad (2.21)$$

Exemplo 10. Para a equação de diferenças $y(n+1) = 2 y(n) + 6$, $y(0) = 3$, usando (2.20), com $a = 2$, $b = 6$ e $y_0 = 3$, segue a solução:

$$y(n) = (2)^n \cdot 3 + 6(2^n - 1) = 9 \cdot 2^n - 6.$$

2.2.3 Pontos de Equilíbrio de uma Equação de Diferenças e Estabilidade dos Equilíbrios.

Um ponto x^* no domínio de f é dito **ponto de equilíbrio** (ou ponto fixo) da equação de diferenças (2.5) se tivermos $f(x^*) = x^*$.

Exemplo 11. A equação de diferenças $x(n+1) = \frac{2x(n)}{1 + \frac{1}{3}x(n)}$ tem dois equilíbrios: $x^* = 0$ e $x^* = 3$.

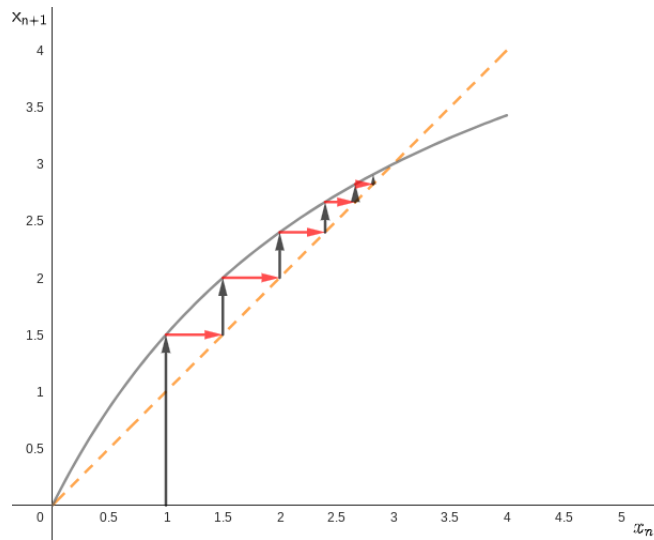
Assim como ocorre com as equações diferenciais, a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio de uma equação de diferenças pode ser especialmente importante quando a equação advém da modelagem matemática de um problema do mundo real. Antes de darmos as definições de equilíbrio estável e assintoticamente estável para equações de diferenças, vamos falar sobre os diagramas degrau de escada.

Como $x(n+1) = f(x(n))$, pode-se desenhar um gráfico de f no plano $(x(n), x(n+1))$. Dado $x(0) = x_0$, identifica-se o valor $x(1)$ desenhando uma linha vertical passando por x_0 e cruzando o gráfico de f em $(x_0, x(1))$. Após isso, desenha-se uma linha horizontal de $(x_0, x(1))$ que encontra a reta $y = x$ no ponto $(x(1), x(1))$. Agora, desenhando uma linha vertical a partir do ponto $(x(1), x(1))$, ela encontra o gráfico de f no ponto $(x(1), x(2))$. Continuando esse processo, podemos encontrar $x(n)$, para todo $n > 0$. O diagrama assim obtido é chamado de **diagrama degrau de escada** ou **teia de aranha**. Esse diagrama é importante na análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação (2.5). Na Figura 6, tem-se o diagrama de teia de aranha para a equação de diferenças do Exemplo 11, considerando-se $x_0 = 1$.

Podemos ver que, à medida que o índice n cresce, $x(n)$ se afasta de $x^* = 0$, e se aproxima de $x^* = 3$. O equilíbrio $x^* = 0$ é instável, ao passo que o equilíbrio $x^* = 3$ é estável.

Daremos, a seguir, as definições de estabilidade e estabilidade assintótica.

Figura 6 – Teia de aranha da equação de diferenças $x(n+1) = \frac{2x(n)}{1 + \frac{1}{3}x(n)}$, com $x(0) = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 6. Dizemos que um ponto de equilíbrio x^* é **estável segundo Lyapunov** se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe em correspondência um $\delta > 0$ (dependente de ε) tal que

$$|x(t_0) - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \varepsilon$$

para todo $t > t_0$.

Definição 7. Um ponto de equilíbrio x^* é **assintoticamente estável** quando é estável e existe algum $\rho > 0$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^*| = 0$$

para todo x_0 satisfazendo $|x(t_0) - x^*| < \rho$.

Teorema 3. Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação de diferenças (2.5), em que f é continuamente diferenciável em x^* . Então, x^* é assintoticamente estável se $|f'(x^*)| < 1$, e instável se $|f'(x^*)| > 1$.

Demonstração. Provaremos o caso $|f'(x^*)| < 1$. Suponhamos $|f'(x^*)| < M < 1$. Então, existe um intervalo $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$, que contém x^* , tal que $|f'(x)| \leq M < 1$, para todo $x \in J$, pois, para $x(0) \in J$, temos que

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)|.$$

Pelo teorema do valor médio, existe ξ_1 entre $x(0)$ e x^* tal que

$$|f(x(0)) - f(x^*)| = |f'(\xi_1)| |x(0) - x^*|.$$

Então,

$$|f(x(0)) - x^*| \leq M |x(0) - x^*|.$$

Desse modo,

$$|x(1) - x^*| \leq M |x(0) - x^*|.$$

Como $M < 1$, a última desigualdade acima revela que $x(1)$ está mais próximo de x^* que $x(0)$.

Como consequência, temos que $x(1) \in J$.

Agora, como $x(1) \in J$, temos:

$$|x(2) - x^*| = |f(x(1)) - f(x^*)|$$

Pelo teorema do valor médio, existe ξ_2 entre $x(1)$ e x^* tal que

$$|f(x(1)) - f(x^*)| = |f'(\xi_2)| |x(1) - x^*|$$

Então,

$$|f(x(1)) - f(x^*)| \leq M |x(1) - x^*|.$$

Desse modo,

$$|x(2) - x^*| \leq M |x(1) - x^*| \leq M^2 |x(0) - x^*|.$$

Como $0 < M < 1$, $M^2 < 1$ e conclui-se que $x(2)$ está mais próximo de x^* que $x(0)$. Assim, $x(2) \in J$.

Indutivamente, concluímos que

$$|x(n) - x^*| \leq M^n |x(0) - x^*|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, fazendo $\delta = \frac{\varepsilon}{2M^n}$, então $|x(0) - x^*| < \delta$ implica que:

$$|x(n) - x^*| \leq M^n |x(0) - x^*| < M^n \cdot \frac{\varepsilon}{2M^n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para todo $n > 0$, o que prova a estabilidade de x^* . Além disso, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n) - x^*| = 0$, e, daí, $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$, o que prova a estabilidade assintótica de x^* . \square

O Teorema (3) é inconclusivo para os casos em que $|f'(x^*)| = 1$. Para estes, precisamos de outros dois Teoremas, os quais enunciaremos a seguir. Uma prova pode ser encontrada em (ELAYDI, 2005).

Teorema 4. Suponha que, para um ponto de equilíbrio x^* de (2.5), $f'(x^*) = 1$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se $f''(x^*) \neq 0$, então x^* é instável.
- (ii) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$, então x^* é instável.
- (iii) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$, então x^* é assintoticamente estável.

Teorema 5. Suponha que, para um ponto de equilíbrio x^* de (2.5), $f'(x^*) = -1$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se $-f'''(x^*) - \frac{3}{2}(f''(x^*))^2 < 0$, então x^* é assintoticamente estável.
- (ii) Se $-f'''(x^*) - \frac{3}{2}(f''(x^*))^2 > 0$, então x^* é instável.

2.2.4 Equações de Diferenças Lineares Homogêneas de Ordem Superior com Coeficientes Constantes

Comentaremos brevemente como são as soluções gerais para equações de diferenças de k -ésima ordem da forma

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + p_2x(n+k-2) + \dots + p_kx(n) = 0. \quad (2.22)$$

Equações como (2.22) aparecerão mais tarde neste trabalho, no estudo de modelos populacionais com retardo. Suporemos que as soluções são da forma $x(n) = \lambda^n$, sendo λ um número complexo. Se substituirmos este valor em (2.22), obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+k} + p_1\lambda^{n+k-1} + p_2\lambda^{n+k-2} + \dots + p_k\lambda^n &= 0 \\ \lambda^n\lambda^k + p_1\lambda^n\lambda^{k-1} + p_2\lambda^n\lambda^{k-2} + \dots + p_k\lambda^n &= 0 \\ \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \dots + p_k &= 0 \end{aligned}$$

Definição 8. A equação

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \dots + p_k = 0 \quad (2.23)$$

é a **equação característica** de (2.22), e suas raízes λ são as **raízes características**.

Para o caso de as raízes reais características $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ serem distintas, a solução geral de (2.22) é dada por

$$x(n) = \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i^n, \quad (2.24)$$

em que os a_i são números complexos.

Exemplo 12. Um casal de coelhos recém-nascidos foi colocado em um cercado. Vejamos como determinar a expressão que dá a quantidade de casais de coelhos ao final do n -ésimo mês.

Solução: Seja $F(n)$ o número de casais de coelhos ao final do n -ésimo mês. Ao final do primeiro mês, temos apenas o casal inicial, isto é, $F(1) = 1$. Ao final do segundo mês, ainda temos apenas o casal inicial, de modo que $F(2) = 1$, mas esse casal já é capaz de procriar. Assim, no terceiro mês, temos o casal inicial e mais um casal que estes produziram, de modo que $F(3) = 2$. No quarto mês, temos o casal inicial, o casal de coelhos gerados por esse casal inicial no corrente mês, e o casal gerado pelo casal inicial no mês anterior, que ao final do quarto mês já é capaz de procriar; portanto, $F(4) = 3$. Pode-se notar que o número de casais de coelhos em um determinado mês (a partir do terceiro mês) é dado pela soma do número de casais nascidos no corrente mês com o número total de casais do mês anterior. A relação de recorrência que representa este modelo é a equação de diferenças linear de segunda ordem:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n); F(1) = 1, F(2) = 1. \quad (2.25)$$

A equação característica é $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Portanto, usando (2.24), a solução geral de (2.25) é dada por

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + a_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Usando as condições iniciais $F(1) = 1$ e $F(2) = 1$, obtemos $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $a_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Portanto, a solução de (2.25) é

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Para o caso em que as raízes características $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ de (2.23) têm multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_r , isto é, quando uma raiz λ_i aparece m_i vezes, a solução geral de (2.22) é dada por

$$x(n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n (a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \dots + a_{i,m_i-1}n^{m_i-1}). \quad (2.26)$$

Exemplo 13. Considere a equação $x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0$, com $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ e $x(2) = 1$. Trata-se de uma equação de diferenças linear homogênea de terceira ordem. Sua equação característica é

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 2$, com multiplicidade $m_1 = 2$, e $\lambda_2 = 3$, com multiplicidade $m_2 = 1$. Portanto, para $\lambda_1 = 2$, escrevemos no somatório: $2^n(a_{10} + a_{11}n)$. Para a raiz $\lambda_2 = 3$, escrevemos: $3^n(a_{20})$. Assim, a solução geral é dada por

$$x(n) = 2^n(a_{10} + a_{11}n) + a_{20}3^n,$$

mas podemos reescrevê-la como

$$x(n) = a_0 \cdot 2^n + a_1 \cdot n \cdot 2^n + a_2 \cdot 3^n.$$

Usando os dados iniciais $x(0) = 0$, $x(1) = 1$ e $x(2) = 1$, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a_0 + a_2 = 0 \\ 2a_0 + 2a_1 + 3a_2 = 1 \\ 4a_0 + 8a_1 + 9a_2 = 1 \end{cases},$$

cuja solução é $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ e $a_2 = -3$. Portanto, a solução da equação é

$$x(n) = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot n \cdot 2^n - 3^{n+1} = 2^n(3 + 2n) - 3^{n+1}.$$

Por fim, discutiremos como é a solução geral da equação linear homogênea de segunda ordem

$$x(n+2) + p_1 x(n+1) + p_2 x(n) = 0, \quad (2.27)$$

quando suas raízes características λ_1 e λ_2 são números complexos. Nesse caso, as raízes são conjugadas uma da outra.

Sejam, então, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Usando (2.24), a solução geral de (2.27) é dada por

$$x(n) = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n. \quad (2.28)$$

No plano complexo, o ponto (α, β) representa o número complexo $\alpha + i\beta$. O módulo desse número complexo é $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Se o argumento de $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ é θ , então o argumento de $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ é $360^\circ - \theta$. A forma trigonométrica de $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ é $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, enquanto a forma trigonométrica de $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ é $r(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)$. Substituindo, em (2.28), as formas algébricas desses números complexos pelas suas respectivas formas trigonométricas, podemos escrever a solução geral em termos de r e de θ :

$$\begin{aligned} x(n) &= c_1[r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)] + c_2[r^n (\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta)] \\ &= c_1 r^n \cos n\theta + c_2 r^n \cos n\theta + c_1 r^n i \operatorname{sen} n\theta - c_2 r^n i \operatorname{sen} n\theta \\ &= r^n [(c_1 + c_2) \cos n\theta + i(c_1 - c_2) \operatorname{sen} n\theta] \\ &= r^n [a_1 \cos n\theta + a_2 \operatorname{sen} n\theta], \end{aligned}$$

onde $a_1 = c_1 + c_2$ e $a_2 = i(c_1 - c_2)$.

Se fizermos $\cos \omega = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$, $\operatorname{sen} \omega = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$ e $\omega = \tan^{-1}(\frac{a_2}{a_1})$, podemos reescrever $x(n)$ como:

$$\begin{aligned} x(n) &= r^n [\cos \omega \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cos (n\theta) + \operatorname{sen} \omega \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \operatorname{sen} (n\theta)] \\ &= r^n \sqrt{a_1^2 + a_2^2} [\cos \omega \cos (n\theta) + \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} (n\theta)] \\ &= r^n \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cos (n\theta - \omega) \end{aligned}$$

ou

$$x(n) = Ar^n \cos (n\theta - \omega). \quad (2.29)$$

Exemplo 14. Para encontrar a solução geral da equação de diferenças

$$2x(n+2) + 2x(n+1) + x(n) = 0.$$

Obtemos a equação característica, dada por $2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, cujas raízes características são $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$. Temos $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Assim, a solução geral é

$$x(n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left[a_1 \cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \right].$$

2.2.5 Comportamento das Soluções de uma Equação de Diferenças Linear Homogênea de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Discutiremos aqui o comportamento das soluções de equações da forma

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = 0. \quad (2.30)$$

Essa discussão contém resultados que serão importantes quando aplicarmos equações de diferenças na análise de modelos com retardo para crescimento populacional.

Sejam λ_1 e λ_2 as raízes características da equação (2.30). Temos três casos a analisar.

1) λ_1 e λ_2 são raízes distintas.

Nesse caso, $y_1(n) = \lambda_1^n$ e $y_2(n) = \lambda_2^n$ são soluções linearmente independentes de (2.30). Se $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, dizemos que $y_1(n)$ é a **solução dominante** e que λ_1 é a **raiz característica dominante**. A solução geral de (2.30) é $y(n) = a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n$.

O comportamento da solução geral pode ser determinado pelo comportamento da solução dominante. Vamos supor $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. De fato, podemos escrever:

$$y(n) = \lambda_1^n \left[a_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right].$$

Como $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$, temos que $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \lambda_1^n.$$

Dependendo do valor de λ_1 , podem ocorrer as seguintes situações:

- a) Se $\lambda_1 > 1$, então a sequência $a_1 \lambda_1^n$ diverge para ∞ . Dizemos que a solução é instável.
- b) Se $\lambda_1 = 1$, então a sequência $a_1 \lambda_1^n$ é constante. Dizemos que a solução é estável.
- c) Se $0 < \lambda_1 < 1$, então a sequência $a_1 \lambda_1^n$ é monotonicamente decrescente para zero. Dizemos que a solução é estável.

d) Se $-1 < \lambda_1 < 0$, a sequência $a_1 \lambda_1^n$ oscila em torno de zero (portanto, alterna em sinal) e converge para zero. Dizemos que a solução é estável.

e) Se $\lambda_1 = -1$, a sequência $a_1 \lambda_1^n$ oscila entre os valores a_1 e $-a_1$. A solução é instável.

f) Se $\lambda_1 < -1$, a sequência oscila aumentando em módulo. Dizemos que a solução é instável.

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Nesse caso, a solução geral de (2.30) é dada por

$$y(n) = (a_1 + a_2 n)\lambda^n.$$

Se $|\lambda| \geq 1$, a solução $y(n)$ diverge monotonicamente se $\lambda \geq 1$ e por oscilação se $\lambda \leq -1$.

Contudo, se $|\lambda| < 1$, então a solução converge para zero, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda^n = 0$.

3) As raízes características λ_1 e λ_2 são números complexos.

Sejam, então, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, com $\beta \neq 0$. Como vimos, a solução geral de (2.30) pode ser dada por $y(n) = Ar^n \cos(n\theta - \omega)$, em que $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ e $\theta = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$.

Então, $y(n)$ oscila, uma vez que a função cosseno oscila. A oscilação de $y(n)$ pode ocorrer de três modos distintos, dependendo da localização das raízes características. Temos:

a) Se $r > 1$: λ_1 e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ localizam-se fora do círculo unitário. Portanto, $y(n)$ oscila, aumentando em módulo. Dizemos que o sistema é instável.

b) Se $r = 1$: λ_1 e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ localizam-se sobre o círculo unitário. Nesse caso, $y(n)$ oscila, mas é constante em módulo.

c) Se $r < 1$: λ_1 e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ localizam-se no interior do círculo unitário. A solução $y(n)$ oscila, mas converge para zero quando $n \rightarrow \infty$.

A discussão feita pode ser resumida por meio do seguinte Teorema.

Teorema 6. São válidas as seguintes afirmações:

(i) Todas as soluções da equação (2.30) oscilam (em torno de zero) se, e somente se, a equação característica não apresenta raízes reais positivas.

(ii) Todas as soluções da equação (2.30) convergem para zero (portanto, a solução zero é assintoticamente estável) se e somente se o máximo entre $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$ é um número menor que 1.

2.2.6 Pontos e Ciclos Periódicos

Outros dois conceitos importantes que utilizaremos nesse trabalho são os de pontos e ciclos periódicos. Temos as seguintes definições:

Definição 9. Seja b um ponto no domínio de f (ou da equação $x(n+1) = f(x(n))$). Dizemos que b é um **ponto periódico** de f se, para algum inteiro positivo k , temos $f^k(b) = b$. Neste caso, também dizemos que b é um ponto k -periódico de f . Portanto, podemos dizer que um ponto é k -periódico se é ponto fixo de f^k , ou seja, se é um ponto de equilíbrio da equação de diferenças

$$x(n+1) = g(x(n)), \tag{2.31}$$

onde $g = f^k$. A órbita periódica de b é o conjunto dado por $O(b) = \{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{k-1}(b)\}$ e é chamada de k -ciclo.

Definição 10. Dizemos que b é um ponto **k -periódico eventualmente** se, para algum inteiro positivo m , $f^m(b)$ é um ponto k -periódico. Dito de outro modo, b é eventualmente periódico se $f^{m+k}(b) = f^m(b)$.

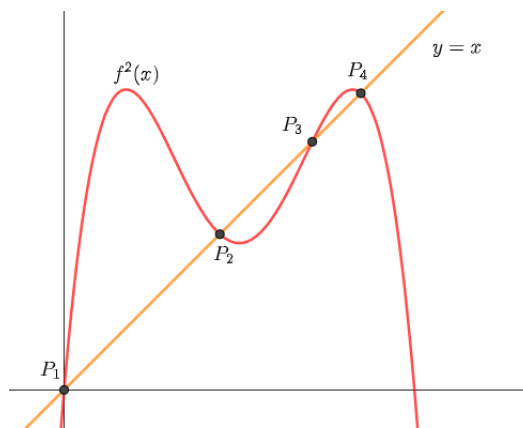
Graficamente, um ponto k -periódico é a coordenada x do ponto onde o gráfico de f^k intercepta o gráfico da função identidade, $y = x$.

Exemplo 15. Consideremos a equação $f(x) = 3,43x(1-x)$. Temos que:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = (3,43^2x - 3,43^2x^2)(1 - 3,43x + 3,43x^2) \\ &= -3,43^3 \cdot x^4 + 2 \cdot 3,43^3 \cdot x^3 + (-3,43^3 - 3,43^2) \cdot x^2 + 3,43^2 \cdot x. \end{aligned}$$

Para achar os pontos 2-periódicos de f , resolvemos a equação $f^2(x) = x$. Descobrimos então que existem quatro pontos fixos de f^2 : $x_1 = 0$, $x_2 = 0,445$, $x_3 = 0,708$ e $x_4 = 0,847$. A figura 7 exhibe os gráficos de f^2 e da função identidade, juntamente com os quatro pontos fixos de f^2 . Destes, dois (x_1 e x_3) são também pontos fixos de f e os outros dois são pontos fixos de f^2 , mas não de f . Por isso, dizemos que x_2 e x_4 formam o 2-ciclo $\{0,445; 0,847\}$, no qual $b = 0,445$ e $f(b) = 0,847$.

Figura 7 – Os pontos fixos de f^2 , representados na figura como P_1, P_2, P_3 e P_4 . Dois deles (P_1 e P_3) são também pontos fixos de f .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Notemos que, pelo Teorema (3), como $|[f^2(0,445)]'| = 0,9 < 1$, então $x = 0,445$ é um equilíbrio assintoticamente estável de f^2 . Analogamente, como $|[f^2(0,847)]'| = 0,91 < 1$, então $x = 0,847$ é um equilíbrio assintoticamente estável de f^2 .

Exemplo 16. Consideremos a equação de diferenças gerada pela função teto

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \text{para } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

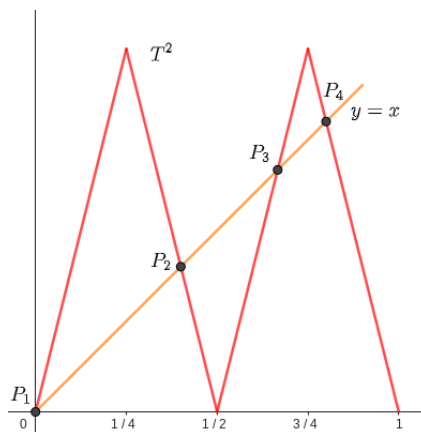
Vamos encontrar os pontos periódicos de T de período 2. Estes são os pontos fixos de T^2 . Temos que:

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 2(1-2x) & \text{para } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 4x-2 & \text{para } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 4(1-x) & \text{para } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Vemos então que T^2 tem quatro pontos de equilíbrio: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{2}{3}$ e $x_4 = \frac{4}{5}$. Destes, x_1 e x_3 são também equilíbrios de T . Portanto, x_2 e x_4 formam o 2-ciclo $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$, no qual $b = \frac{2}{5}$ e $T(b) = \frac{4}{5}$.

A figura a seguir exhibe o gráfico de T^2 e da função identidade, juntamente com os quatro pontos fixos de T^2 .

Figura 8 – Os pontos fixos de T^2 , representados na figura como P_1 , P_2 , P_3 e P_4 . Dois deles (P_1 e P_3) são também pontos fixos de T .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Notemos que, pelo Teorema (3), como $|[T^2(\frac{2}{5})]'| = |[T^2(\frac{4}{5})]'| = 4 > 1$, então $x_2 = \frac{2}{5}$ e $x_4 = \frac{4}{5}$ são equilíbrios instáveis de T^2 .

Vamos encontrar agora os pontos periódicos de T de período 3. Estes são os pontos fixos de T^3 . Temos que:

$$T^3(x) = \begin{cases} 8x & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{8}, \\ 2(1-4x) & \text{para } \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4}, \\ -2+8x & \text{para } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{8}, \\ 4-8x & \text{para } \frac{3}{8} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 8x-4 & \text{para } \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{8}, \\ 6-8x & \text{para } \frac{5}{8} \leq x < \frac{3}{4}, \\ -6+8x & \text{para } \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{8}, \\ 8-8x & \text{para } \frac{7}{8} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Vemos então que T^3 tem oito pontos de equilíbrio: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{9}$, $x_3 = \frac{2}{7}$, $x_4 = \frac{4}{9}$, $x_5 = \frac{4}{7}$, $x_6 = \frac{2}{3}$, $x_7 = \frac{6}{7}$, $x_8 = \frac{8}{9}$. Pode-se verificar que todos estes equilíbrios são instáveis em relação a T^3 , e que $\left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\}$ e $\left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}$ são 3-ciclos.

Dado um k -ciclo $\{b = x(0), f(b) = x(1), f^2(b) = x(2), \dots, f^{k-1}(b) = x(k-1)\}$, todos os pontos do k -ciclo têm a mesma propriedade de estabilidade de b . Assim, podemos falar da estabilidade de um k -ciclo.

No Exemplo 15, o 2-ciclo $\{0,445; 0,847\}$ é assintoticamente estável, uma vez que $b = 0,445$ é um ponto fixo assintoticamente estável de f^2 . No Exemplo 16, o 2-ciclo $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ não é estável, pois $b = \frac{2}{5}$ não é estável em relação a f^2 .

Damos, agora, a seguinte definição.

Definição 11. Seja b um ponto k -periódico de f . Dizemos que b é:

- (i) estável se for um ponto fixo estável de f^k ;
- (ii) assintoticamente estável se for um ponto fixo assintoticamente estável de f^k ;
- (iii) instável se for um ponto fixo instável de f^k .

O Teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em (KOT, 2001), é uma modificação do Teorema (3), e fornece condições para classificarmos a estabilidade de um k -ciclo.

Teorema 7. Seja $O(b) = \{b = x(0), f(b) = x(1), f^2(b) = x(2), \dots, f^{k-1}(b) = x(k-1)\}$ um k -ciclo de uma função continuamente diferenciável f . As seguintes afirmações são válidas:

(i) O k -ciclo $O(b)$ é assintoticamente estável se $|f'(x(0))f'(x(1)) \cdots f'(x(k-1))| < 1$.

(ii) O k -ciclo $O(b)$ é instável se $|f'(x(0))f'(x(1)) \cdots f'(x(k-1))| > 1$.

Exemplo 17. Tomemos a equação de diferenças $x(n+1) = 1 - x^2(n)$. Vamos encontrar seu 2-ciclo e determinar sua estabilidade. Temos que $f(x(n)) = 1 - x^2(n)$. Portanto, $f^2(x(n)) = 1 - (1 - x^2(n))^2 = -x^4(n) + 2x^2(n)$. Resolvendo a equação $f^2(x(n)) = x(n)$, encontramos os pontos fixos de f^2 : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ e $x_4 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Como $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ são pontos fixos de f^2 , mas não de f , eles formam o 2-ciclo $\{0, 1\}$, no qual $b = 0$ e $f(b) = 1$.

Notemos que, como $|[f^2(0)]'| = 0 < 1$, segue do Teorema (3) que $b = 0$ é assintoticamente estável em relação à f^2 ; portanto, o 2-ciclo $\{0, 1\}$ é assintoticamente estável. Podemos também aplicar o Teorema (7). Nesse caso, temos $f'(x(n)) = -2x(n)$, portanto, $f'(0) = 0$ e $f'(1) = -2$, de modo que $|f'(0) \cdot f'(1)| = 0 < 1$. Logo, o 2-ciclo $\{0, 1\}$ é assintoticamente estável.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO ESTUDO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

Neste Capítulo, faremos o estudo de alguns modelos de crescimento populacional, aplicando as teorias desenvolvidas no Capítulo 2 para equações diferenciais ordinárias.

3.1 A Equação Exponencial

Consideremos uma população cujo crescimento é proporcional ao tamanho $P(t)$ da população, no instante t , isto é:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (3.1)$$

onde $k > 0$ é a taxa de natalidade menos a taxa de mortalidade por indivíduo por unidade de tempo. O número k é chamado **taxa intrínseca de crescimento**.

Podemos resolver a equação (3.1) utilizando o método de separação de variáveis e integrando ambos os membros com relação a t , como segue:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= k dt \\ \int \frac{dP}{P} &= \int k dt \\ \ln P &= kt + c \\ P &= e^{kt} \cdot e^c \\ P &= D e^{kt} \end{aligned}$$

O número inicial de indivíduos da população é o valor de P no instante $t = 0$. Temos:

$$P = D \cdot e^{k \cdot 0} = D \cdot e^0 = D$$

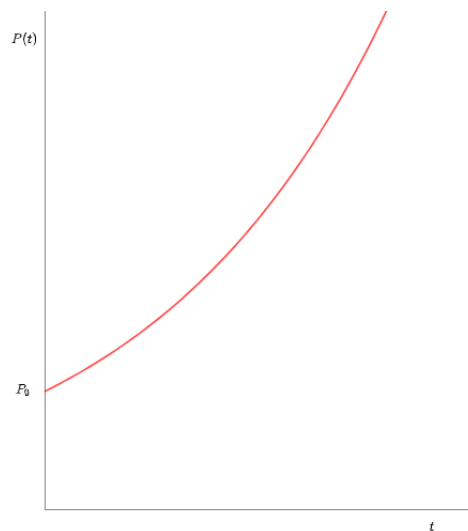
Portanto, se denotarmos o número inicial de indivíduos por P_0 , a solução do modelo (3.1) pode ser escrita como:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt} \quad (3.2)$$

Podemos ver então que tal modelo caracteriza um crescimento (se $k > 0$) ou decaimento (se $k < 0$) exponencial da população. Ele seria adequado caso ela crescesse em condições ideais (tais como um meio ambiente com recursos ilimitados, imunidade a doenças e inexistência de predadores) desenvolvendo, assim, seu potencial biótico.

Exibimos na figura seguinte a curva típica (exponencial) do modelo dado por (3.1), considerando-se $k > 0$.

Figura 9 – Crescimento exponencial



Fonte: Elaborada pelo autor.

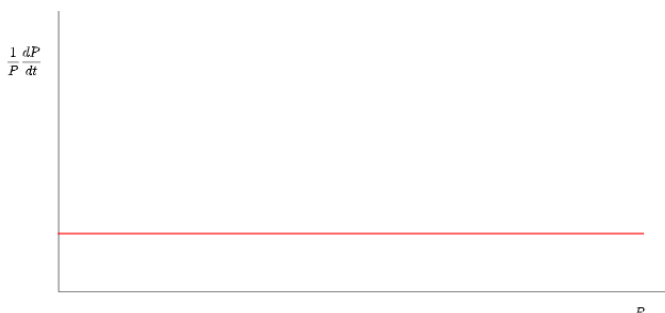
A equação (3.1) possui um único equilíbrio: $P = 0$. Uma análise de sua solução permite ver que, quando $k > 0$, a população se afasta de zero, e $P = 0$ é um equilíbrio instável. Por outro lado, se $k < 0$, a população se aproxima de zero, de modo que $P = 0$ é um equilíbrio assintoticamente estável. Isso está de acordo com o critério de estabilidade para equações diferenciais autônomas dado pelo Teorema (2). De fato, $f(P) = kP$; logo, $f'(P) = k$ e $f'(0) = k$. Portanto, $P = 0$ é um equilíbrio assintoticamente estável se $f'(0) = k < 0$, e instável se $f'(0) = k > 0$.

O número $\frac{1}{P} \frac{dP}{dt}$ é chamado de *taxa de crescimento per capita*. Ele indica o quanto, em média, cada indivíduo da população contribui para o crescimento ou decréscimo populacional. Para o modelo (3.1), temos:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = k \quad (3.3)$$

ou seja, a taxa de crescimento per capita é constante, para todos os tamanhos populacionais. Portanto, neste modelo, a taxa de crescimento da população não é afetada pelo tamanho da população. O gráfico da taxa de crescimento per capita em função do tamanho da população é, portanto, dado por uma reta horizontal (figura 10).

Figura 10 – Taxa de crescimento per capita - modelo exponencial



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 A Equação Logística

Em geral, o ambiente impõe limitações ao crescimento de uma população, e podemos supor que há um número máximo M de indivíduos que esse ambiente é capaz de acomodar. Esse número é a **capacidade de carga**, ou **limite de saturação** da população. Inicialmente, o crescimento é rápido, devido à grande disponibilidade de recursos. Se a população crescer a ponto de exceder a capacidade de carga, tal situação pode levar, por exemplo, ao esgotamento de recursos, a um aumento no contágio de doenças e à atração de predadores. Consequentemente, a população tende a diminuir.

Assim, o modelo (3.1) tem de ser aperfeiçoado, de modo a considerar as seguintes hipóteses:

- 1) Inicialmente, a taxa de crescimento da população é proporcional a seu tamanho, ou seja, $\frac{dP}{dt} \approx kP$;
- 2) Se a população exceder a capacidade de carga, então essa população diminui, tendendo à capacidade de carga.

A equação diferencial a seguir incorpora essas duas hipóteses:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{M} \right). \quad (3.4)$$

De fato, notemos que, se P é pequeno em comparação com a capacidade de carga M , então o número $\frac{P}{M}$ está próximo de zero, de modo que $\frac{dP}{dt} \approx kP$. Se $P > M$, o número $1 - \frac{P}{M}$ é negativo, de modo que $\frac{dP}{dt} < 0$ e, portanto, temos diminuição no tamanho da população.

A equação (3.4) é chamada **equação diferencial logística**, e foi proposta pelo biólogo holandês Pierre-François Verhulst. Ela tem dois equilíbrios: $P = 0$ e $P = M$. Podemos ver que, se $0 < P < M$, temos $\frac{dP}{dt} > 0$, e, como já foi dito, se $P > M$ temos $\frac{dP}{dt} < 0$.

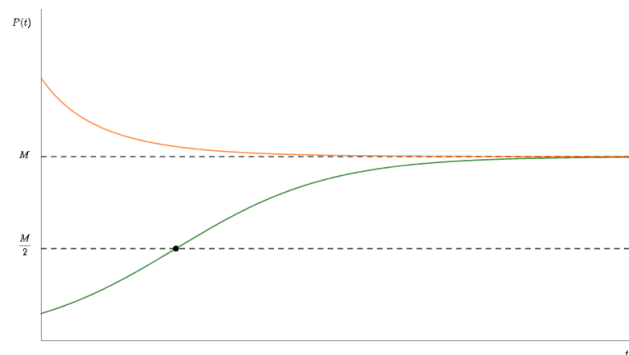
As curvas integrais de uma equação diferencial são as soluções da equação, representadas geometricamente como curvas no plano. As curvas integrais da equação (3.4) podem ter suas concavidades caracterizadas derivando-se os dois lados dessa equação em relação a t . Temos que

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k \frac{dP}{dt} \left(1 - 2\frac{P}{M}\right).$$

Como $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ quando $P = \frac{M}{2}$, existe um ponto de inflexão em $P = \frac{M}{2}$.

Quando $P < \frac{M}{2}$, temos $\frac{dP}{dt} > 0$ e $1 - 2\frac{P}{M} > 0$; portanto, $\frac{d^2P}{dt^2} > 0$. Quando $\frac{M}{2} < P < M$, temos $\frac{dP}{dt} > 0$ e $1 - 2\frac{P}{M} < 0$; portanto, $\frac{d^2P}{dt^2} < 0$. Finalmente, se $P > M$, temos $\frac{dP}{dt} < 0$ e $1 - 2\frac{P}{M} < 0$; portanto, $\frac{d^2P}{dt^2} > 0$. Assim, para $0 < P < \frac{M}{2}$, as curvas de população têm concavidade voltada para cima, existindo um ponto de inflexão nelas exatamente onde $P = \frac{M}{2}$. Esse ponto de inflexão indica uma mudança no sentido da concavidade dessas curvas. Para $\frac{M}{2} < P < M$, as concavidades estão voltadas para baixo, e para $P > M$, as concavidades estão novamente voltadas para cima. Exibimos na figura seguinte algumas curvas de população do modelo dado por (3.4). Podemos observar que as curvas se afastam de $P = 0$ e se aproximam da capacidade de carga, $P = M$. Quando $t \rightarrow \infty$, $\frac{dP}{dt} \rightarrow 0$ e a população se estabiliza.

Figura 11 – Algumas curvas-solução da equação diferencial logística



Fonte: Elaborada pelo autor.

De fato, usando o critério de estabilidade para equações diferenciais autônomas dado pelo Teorema (2), como $f(P) = kP \left(1 - \frac{P}{M}\right)$, temos que $f'(P) = k - 2k\frac{P}{M}$ e, como $k > 0$, temos $f'(0) = k$, o que caracteriza $P = 0$ como equilíbrio instável, e $f'(M) = -k$, o que caracteriza $P = M$ como equilíbrio assintoticamente estável.

A equação diferencial logística pode ser resolvida explicitamente. De fato, como $\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{M}\right)$, podemos fazer a separação de variáveis, obtendo $\frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{M}\right)} = kdt$. A expressão $\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{M}\right)}$ no lado esquerdo desta última igualdade pode ser reescrita como $\frac{M}{P(M-P)}$. Usando frações parciais, temos que $\frac{M}{P(M-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}$. Portanto, podemos escrever:

$$\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}\right) dP = kdt$$

Integrando ambos os membros, obtemos:

$$\begin{aligned} \ln|P| - \ln|M-P| &= kt + C \\ \ln|M-P| - \ln|P| &= -kt - C \\ \ln\left|\frac{M-P}{P}\right| &= -kt - C \\ \left|\frac{M-P}{P}\right| &= e^{-kt-C} = e^{-C} e^{-kt} \\ \frac{M-P}{P} &= Ae^{-kt}, \end{aligned}$$

onde $A = \pm e^{-C}$.

Se isolarmos P , obtemos:

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

Se colocarmos $t = 0$ nessa equação, então $P = P_0$ e obtemos que $A = \frac{M - P_0}{P_0}$.

Resumindo, a solução da equação diferencial logística (3.4) é:

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}, \text{ onde } A = \frac{M - P_0}{P_0}. \quad (3.5)$$

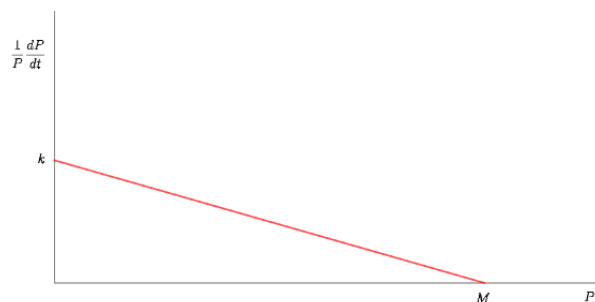
Podemos ver que $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = M$, como esperado.

Para a equação diferencial logística, a taxa de crescimento per capita é dada por:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = k \left(1 - \frac{P}{M}\right) \quad (3.6)$$

Portanto, para esse modelo, a taxa de crescimento per capita diminui linearmente com o aumento da população, atingindo o valor zero quando a população alcança a capacidade de suporte. O gráfico da taxa de crescimento per capita em função da população é uma reta decrescente, conforme mostra a figura 12.

Figura 12 – Taxa de crescimento per capita - modelo logístico



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 A Equação de Gompertz

Outro modelo para estudo populacional que exhibe muitas propriedades em comum com a equação diferencial logística é o **modelo de Gompertz**. Segundo este modelo, o crescimento da população não é infinito, tendo um valor limite. Uma aplicação do modelo de Gompertz em Biologia é feita no estudo do crescimento de tumores. Neste modelo, temos uma população que decai exponencialmente, segundo a equação:

$$\frac{dP}{dt} = r_0 e^{-\alpha t} P \quad (3.7)$$

em que $r_0 > 0$ e $\alpha > 0$ são constantes. Esta é uma equação diferencial ordinária não autônoma (há dependência explícita de t) que pode ser resolvida explicitamente para P . Usando o método da separação de variáveis e integrando, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= r_0 e^{-\alpha t} P \\
dP &= r_0 e^{-\alpha t} P dt \\
\frac{dP}{P} &= r_0 e^{-\alpha t} dt \\
\int \frac{dP}{P} &= r_0 \int e^{-\alpha t} dt \\
\ln P &= r_0 \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} + C \right) \\
\ln P &= -\frac{r_0}{\alpha} e^{-\alpha t} + Cr_0 \\
\ln P &= -\frac{r_0}{\alpha} e^{-\alpha t} + K \\
P &= e^{-\frac{r_0}{\alpha} e^{-\alpha t}} \cdot e^K \\
P &= M \cdot e^{-\frac{r_0}{\alpha} e^{-\alpha t}}
\end{aligned}$$

Analisando a solução geral da equação de Gompertz, com $M > 0$, $\alpha > 0$ e $r_0 > 0$, podemos ver que, quando $t \rightarrow \infty$, $e^{-\alpha t} \rightarrow 0$, $e^{-\frac{r_0 e^{-\alpha t}}{\alpha}} \rightarrow 1$ e conseqüentemente $P(t) \rightarrow M$. Portanto, M é a capacidade de suporte.

As curvas integrais da equação (3.7) podem ter suas concavidades caracterizadas derivando-se os dois lados dessa equação com relação a t :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 P}{dt^2} &= r_0 \left[\frac{dP}{dt} \cdot e^{-\alpha t} + P \cdot (-\alpha e^{-\alpha t}) \right] \\
&= r_0 \left[\frac{dP}{dt} e^{-\alpha t} - \alpha P e^{-\alpha t} \right] \\
&= r_0 \left[e^{-\alpha t} \left(\frac{dP}{dt} - \alpha P \right) \right] \\
&= r_0 e^{-\alpha t} \left(\frac{dP}{dt} - \alpha P \right)
\end{aligned}$$

Como $\frac{d^2 P}{dt^2} = 0$ quando $P = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dP}{dt}$, existe um ponto de inflexão em $P = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dP}{dt}$. Fazendo o estudo de sinal de $\frac{d^2 P}{dt^2}$, vemos que $\frac{d^2 P}{dt^2} > 0$ para $P < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dP}{dt}$, enquanto que $\frac{d^2 P}{dt^2} < 0$ para $P > \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dP}{dt}$.

Então, as curvas integrais da equação (3.7) têm concavidade voltada para cima quando $P < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dP}{dt}$, e concavidade voltada para baixo quando $P > \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dP}{dt}$.

Exemplo 18. Considere uma população que cresce segundo a equação

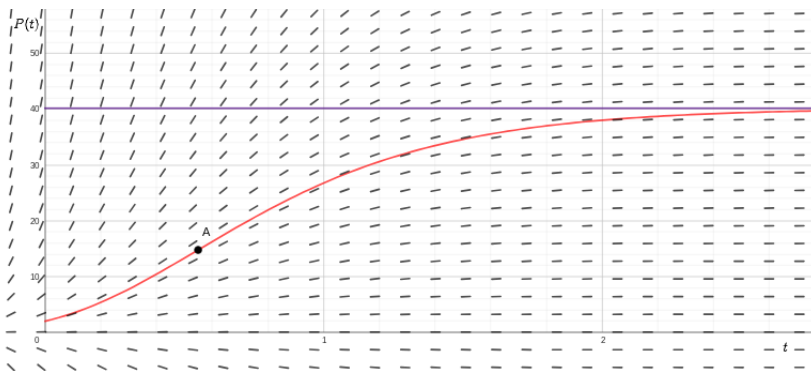
$$\frac{dP}{dt} = 6e^{-2t}P.$$

Suponhamos que o número inicial de indivíduos seja igual a 2. Isso determina a constante M presente na solução geral, $P(t) = M \cdot e^{-3e^{-2t}}$. Temos que $M = 2e^3$, de modo que a função que modela esse crescimento é $P(t) = 2e^{3-3e^{-2t}}$. Para determinar o instante t onde ocorre o ponto de inflexão, primeiramente calculamos $\frac{dP}{dt}$, obtendo $\frac{dP}{dt} = 12e^{3-3e^{-2t}-2t}$.

Agora, fazendo $P = \frac{1}{2} \frac{dP}{dt}$, obtemos $t = \frac{1}{2} \ln 3$. Nesse caso, $P = 2e^2$. Portanto, o ponto em que a curva muda de concavidade é $A(\frac{1}{2} \ln 3, 2e^2)$.

Exibimos, na figura a seguir, o campo de direções da equação $\frac{dP}{dt} = 6e^{-2t}P$, juntamente com a curva que satisfaz $P(0) = 2$ e o ponto no qual ocorre a mudança de concavidade da curva. Note a assíntota horizontal $y = 2e^3$.

Figura 13 – Campo de direções e uma curva solução de $\frac{dP}{dt} = 6e^{-2t}P$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Há uma outra expressão para a equação (3.7). A partir da solução $P = M \cdot e^{-\frac{r_0}{\alpha} e^{-\alpha t}}$, temos:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{r_0}{\alpha} e^{-\alpha t}} &= \frac{P}{M} \\ (e^{e^{-\alpha t}})^{-\frac{r_0}{\alpha}} &= \frac{P}{M} \\ e^{-\alpha t} &= \left(\frac{P}{M}\right)^{-\frac{\alpha}{r_0}} \\ \ln e^{-\alpha t} &= \ln \left(\frac{P}{M}\right)^{-\frac{\alpha}{r_0}} \\ e^{-\alpha t} &= -\frac{\alpha}{r_0} \ln \left(\frac{P}{M}\right) \\ e^{-\alpha t} &= -\frac{\alpha}{r_0} (\ln P - \ln M) \end{aligned}$$

Agora, substituindo na equação (3.7), vem:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= r_0 e^{-\alpha t} P \\ \frac{dP}{dt} &= r_0 \cdot -\frac{\alpha}{r_0} \cdot (\ln P - \ln M) \cdot P \\ \frac{dP}{dt} &= -\alpha \cdot (\ln P - \ln M) \cdot P \\ \frac{dP}{dt} &= \alpha \cdot (\ln M - \ln P) \cdot P \\ \frac{dP}{dt} &= \alpha P \ln \left(\frac{M}{P} \right) \\ \frac{dP}{dt} &= \alpha P \ln \left(\frac{K}{P} \right)\end{aligned}$$

onde, na última linha, fizemos $M = K$.

Analisando a equação de Gompertz na forma autônoma

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P \ln \left(\frac{K}{P} \right) \quad (3.8)$$

vemos que há um único equilíbrio: $P = K$. Usando o critério de estabilidade dado pelo Teorema (2), como $f(P) = \alpha P \ln \left(\frac{K}{P} \right)$, temos que $f'(P) = \alpha \ln \left(\frac{K}{P} \right) - \alpha$. Assim, $f'(K) = -\alpha < 0$. Portanto, o equilíbrio $P = K$ é assintoticamente estável.

Calculando-se $\frac{d^2P}{dt^2}$, obtemos $\frac{d^2P}{dt^2} = \alpha \frac{dP}{dt} \left[\ln \left(\frac{K}{P} \right) - 1 \right]$. Então, temos $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ quando $P = \frac{K}{e}$; portanto, existe aí um ponto de inflexão.

Podemos resolver a equação de Gompertz da forma (3.8) explicitamente. Escrevendo:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{P \ln \left(\frac{K}{P} \right)} &= \alpha dt \\ \int \frac{dP}{P \ln \left(\frac{K}{P} \right)} &= \int \alpha dt\end{aligned}$$

Vamos fazer agora uma substituição de variáveis, colocando

$$u = \ln \left(\frac{K}{P} \right) \quad (3.9)$$

Isto nos dá $du = -\frac{1}{P} dP$. Substituindo na integral do lado esquerdo, vem:

$$\begin{aligned}\int -\frac{du}{u} &= \int \alpha dt \\ \int \frac{du}{u} &= -\alpha \int dt \\ \ln |u| &= -\alpha t + C \\ |u| &= e^{-\alpha t + C} \\ |u| &= e^C \cdot e^{-\alpha t} \\ u &= D e^{-\alpha t}\end{aligned}$$

Se $t = 0$, temos $u(0) = D$. Mas, de $u = \ln\left(\frac{K}{P}\right)$, temos que $u(0) = \ln\left(\frac{K}{P_0}\right)$. Ou seja, $D = \ln\left(\frac{K}{P_0}\right)$. Assim:

$$u(t) = e^{-\alpha t} \ln\left(\frac{K}{P_0}\right)$$

Substituindo esse resultado em (3.9), vem:

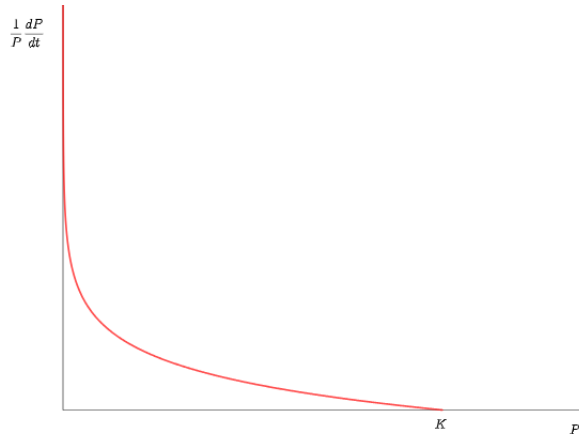
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{K}{P_0}\right) e^{-\alpha t} &= \ln\left(\frac{K}{P}\right) \\ \frac{K}{P} &= \left(\frac{K}{P_0}\right) e^{-\alpha t} \\ P \cdot \left(\frac{K}{P_0}\right) e^{-\alpha t} &= K \\ P &= \frac{K}{\left(\frac{K}{P_0}\right) e^{-\alpha t}} \\ P &= K \cdot \left(\frac{P_0}{K}\right) e^{-\alpha t}\end{aligned}$$

Para o modelo de Gompertz na forma autônoma (3.8), a taxa de crescimento per capita é dada por

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \alpha \ln\left(\frac{K}{P}\right) \quad (3.10)$$

Portanto, a taxa de crescimento per capita diminui com o aumento da população, atingindo o valor zero quando a população alcança a capacidade de suporte. A curva da taxa de crescimento per capita em função do tamanho da população tem o aspecto mostrado na figura seguinte.

Figura 14 – Taxa de crescimento per capita - modelo de Gompertz



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4 Analisando um Modelo de Colheita de Peixes

No Capítulo 2, discutimos que uma equação diferencial pode conter um parâmetro, cuja alteração pode modificar a estabilidade dos equilíbrios ou mesmo destruí-los. Vamos ver um pouco disso analisando um modelo de colheita de peixes.

Consideremos, então, uma população de peixes que está crescendo de acordo com a equação logística, e ao mesmo tempo está sendo coletada. Temos:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - qEN. \quad (3.11)$$

Nesse modelo, qEN é a **taxa de colheita**. Ela representa o produto de três termos: o esforço de pesca E , uma constante de proporcionalidade q , a qual mede a capturabilidade, e o nível de estoque N . O produto da capturabilidade pelo esforço, qE , é a **mortalidade por pesca**, que tem as mesmas dimensões que r e desempenha um papel importante, como veremos.

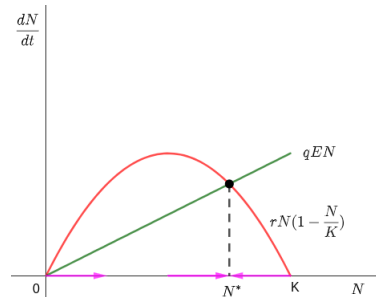
Temos equilíbrio N^* quando a taxa de crescimento da população de peixes é igual à taxa de colheita, ou seja, quando:

$$rN^* \left(1 - \frac{N^*}{K} \right) = qEN^* \quad (3.12)$$

Há dois equilíbrios: $N^* = 0$ e $N^* = K \left(1 - \frac{qE}{r} \right)$. O equilíbrio $N^* = 0$ corresponde à extirpação do estoque. Para valores pequenos da mortalidade por pesca (qE), o equilíbrio $N^* = K \left(1 - \frac{qE}{r} \right)$ é assintoticamente estável. De fato, para pequenas perturbações à direita deste equilíbrio, a taxa de colheita é maior que a taxa de crescimento, e assim o nível de estoque diminui. Para pequenas perturbações à esquerda deste equilíbrio, a taxa de crescimento excede a taxa de colheita, e o nível de estoque aumenta. Em ambos os casos, perturbações decaem e o

nível de estoque retorna para N^* , como sugerido pelas setas ao longo do eixo x na Figura 15. O equilíbrio $N^* = 0$, por sua vez, é instável.

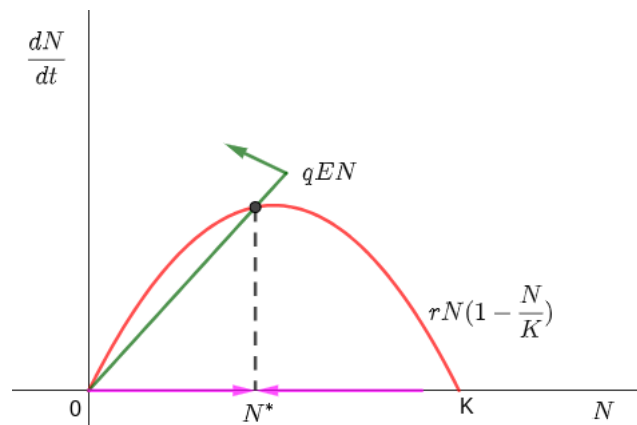
Figura 15 – Colheita de baixa mortalidade



Fonte: Elaborada pelo autor.

À medida que começamos a aumentar a mortalidade por pesca (Figura 16), o equilíbrio $N^* = K \left(1 - \frac{qE}{r}\right)$ desloca-se para a esquerda, mantendo sua estabilidade.

Figura 16 – Colheita de alta mortalidade

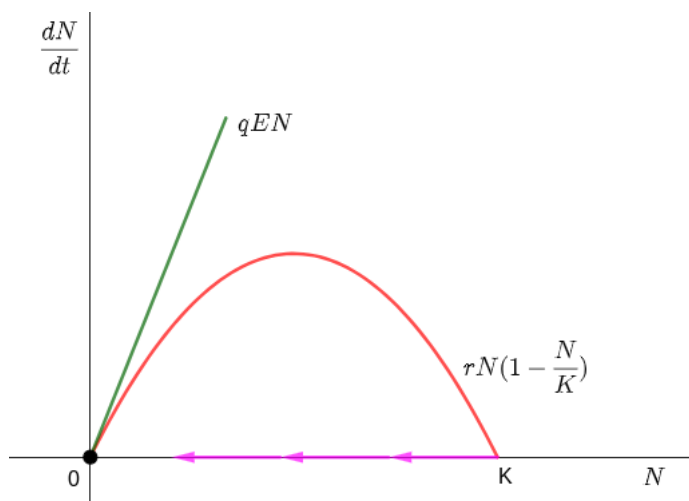


Fonte: Elaborada pelo autor.

No entanto, à medida que continuamos aumentando a mortalidade por pesca, eventualmente chegamos a um ponto (Figura 17) em que a colheita excede a taxa de crescimento para todos os níveis de estoque positivos.

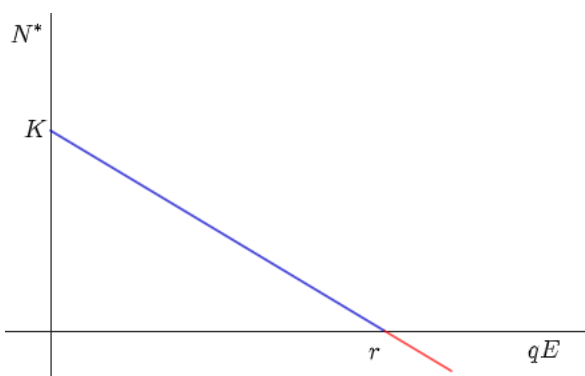
Então, o equilíbrio na origem, correspondente à extinção, é estável. Na Figura 18, desenhamos a localização dos equilíbrios em função da mortalidade por pesca. O ramo estável está representado em azul, enquanto o ramo instável está representado em vermelho.

Figura 17 – Sobrepesca severa



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – Diagrama de bifurcação



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao fazer isso, continuamos o primeiro equilíbrio no quarto quadrante. Isto não faz qualquer sentido biológico, embora tenha sentido matemático. O diagrama de bifurcação da figura 18 mostra uma bifurcação transcritical em $qE = r$: dois ramos colidem e trocam estabilidade. Ocorre aí uma mudança qualitativa no comportamento do sistema.

A taxa de colheita equilibrada ou **rendimento sustentável** é também importante. O rendimento sustentável no equilíbrio $N^* = K \left(1 - \frac{qE}{r}\right)$ é dado por

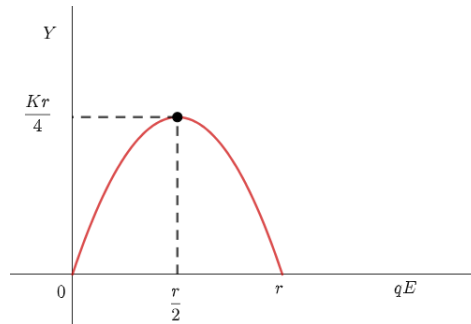
$$Y = qEN^* = qEK \left(1 - \frac{qE}{r}\right). \quad (3.13)$$

O gráfico dessa função (rendimento sustentável em função da mortalidade por pesca) é uma parábola (Figura 19), dada por

$$Y = qEK - \frac{q^2 E^2}{r} K$$

$$Y = -\frac{1}{r} K (qE)^2 + KqE$$

Figura 19 – Curva rendimento-esforço



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vemos então que o aumento do esforço de pesca aumenta o rendimento sustentável - até certo ponto. Aumentos adicionais no esforço de pesca diminuem o rendimento à medida que o estoque se torna mais explorado e esgotado. Para colheita fixa (q fixo), o rendimento máximo sustentável ocorre quando

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dE} &= qK - \frac{q^2}{r} 2KE \\ &= qK \left(1 - \frac{q}{r} 2E \right) = 0 \end{aligned}$$

O nível de esforço ideal correspondente é $E = \frac{r}{2q}$, que produz o rendimento máximo sustentável, $RMS = Y_{max} = \frac{Kr}{4}$.

Até aqui, nossa discussão baseou-se no fato de as populações de peixes crescerem logisticamente. No entanto, algumas populações crescem com um limiar de crescimento (a população precisa estar acima de um nível mínimo para que possa crescer). Considere a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{N}{K_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (3.14)$$

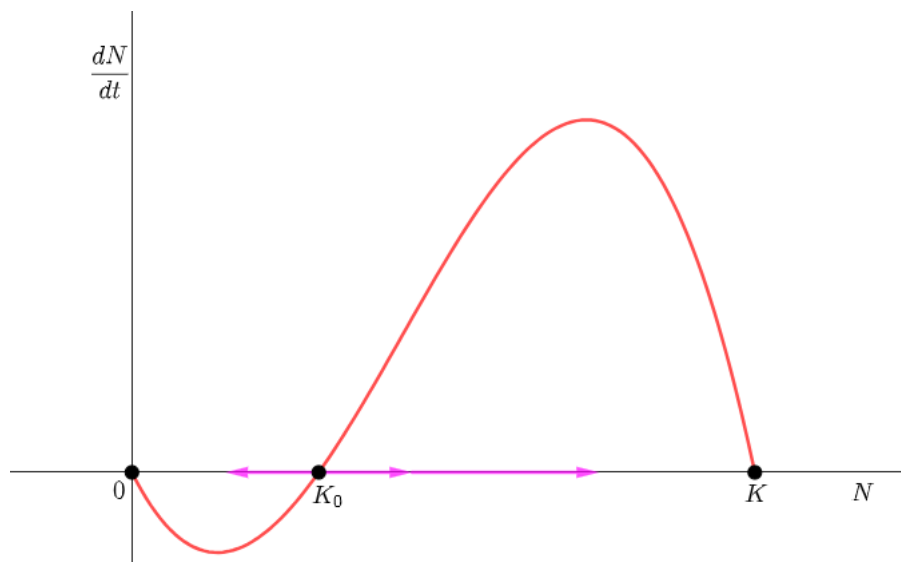
Vamos traçar a curva de $\frac{dN}{dt}$ em função de N . Vemos que:

$$\frac{dN}{dt} = 0 \Leftrightarrow N = 0, N = K_0 \text{ ou } N = K.$$

Se $0 < N < K_0$, então $\left(\frac{N}{K_0} - 1\right) < 0$, $\left(1 - \frac{N}{K}\right) > 0$ e $\frac{dN}{dt} < 0$.

Se $K_0 < N < K$, então $\left(\frac{N}{K_0} - 1\right) > 0$, $\left(1 - \frac{N}{K}\right) > 0$ e $\frac{dN}{dt} > 0$.

Figura 20 – Compensação crítica



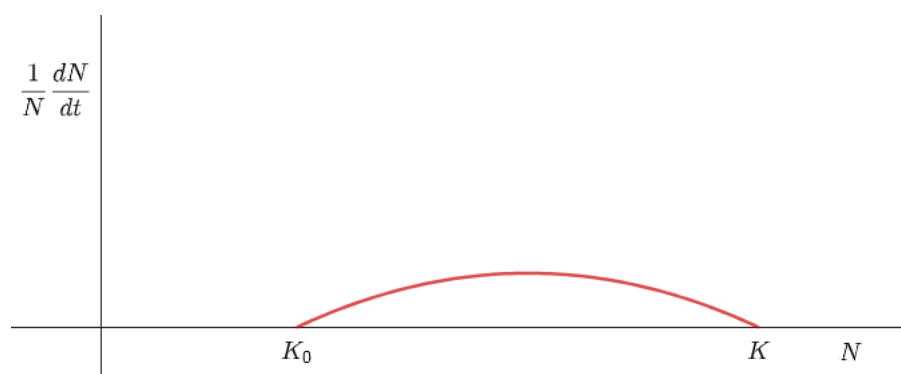
Fonte: Elaborada pelo autor.

Como a taxa líquida de crescimento é negativa em níveis populacionais baixos, este modelo apresenta compensação crítica. Além disso, a taxa de crescimento *per capita*,

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left(\frac{N}{K_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

não é mais uma taxa monotonicamente decrescente em função da densidade. Em vez disso, mostra um efeito Allee (aumento na taxa de crescimento *per capita*), em determinadas faixas de densidade.

Figura 21 – Efeito Allee

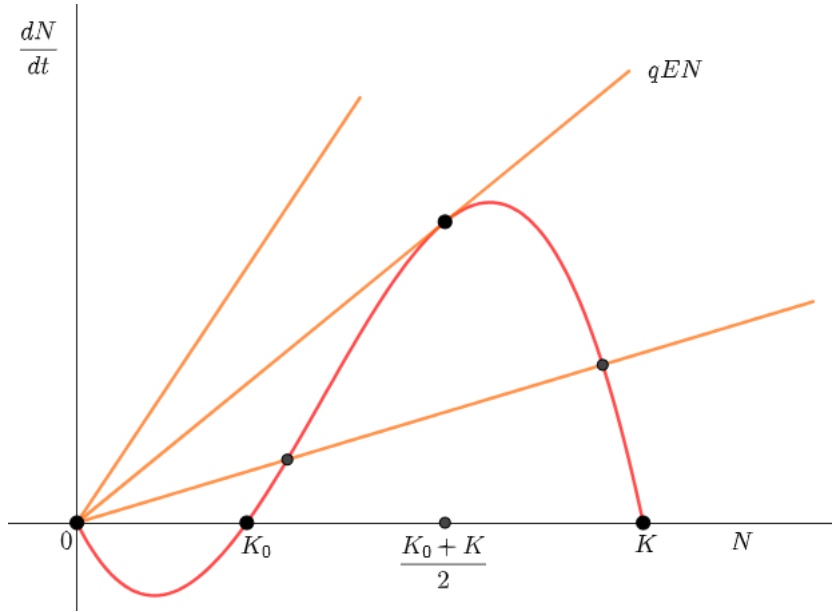


Fonte: Elaborada pelo autor.

Adicionando a taxa de colheita ao modelo (3.14), obtemos

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{N}{K_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{N}{K} \right) - qEN \quad (3.15)$$

Figura 22 – Compensação crítica com colheita

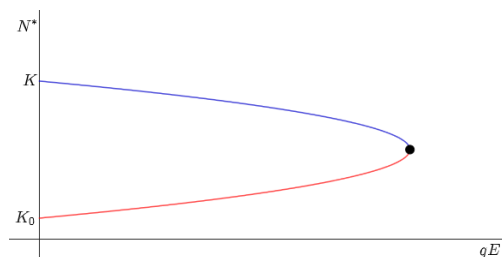


Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos equilíbrio quando $rN^* \left(\frac{N^*}{K_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{N^*}{K} \right) = qEN^*$. Note que há um equilíbrio trivial em $N^* = 0$. Os demais equilíbrios satisfazem a equação quadrática $r \left(\frac{N^*}{K_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{N^*}{K} \right) = qE$, que pode ser reescrita como $-\frac{r}{K_0 K} N^{*2} + \left(\frac{r}{K_0} + \frac{r}{K} \right) N^* - r = qE$.

Se olharmos para qE como variável dependente (de N^*), podemos ver facilmente que $qE = 0$ para $N^* = K_0$ e $N^* = K$. Fazendo o gráfico de qE em função de N^* mas mantendo o eixo qE na posição horizontal, o resultado é mostrado na figura 23. O ramo estável está representado em azul, enquanto o ramo instável está representado em vermelho.

Figura 23 – Diagrama de bifurcação



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma pescaria posicionada perto deste ponto de bifurcação pode sofrer um colapso catastrófico após um pequeno aumento na mortalidade por pesca.

Consideremos, agora, uma população de peixes que está crescendo de acordo com a equação de Gompertz, e que está sendo colhida de modo que a captura por unidade de esforço seja proporcional ao tamanho do estoque. Temos então o seguinte modelo:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \ln \left(\frac{K}{N} \right) - qEN \quad (3.16)$$

Vamos encontrar os equilíbrios, a curva de rendimento e o rendimento máximo sustentável para o modelo (3.16).

Temos equilíbrio N^* quando a taxa de crescimento da população de peixes é igual à taxa de colheita, isto é, quando:

$$\alpha N^* \ln \left(\frac{K}{N^*} \right) = qEN^*.$$

Observemos que $N \neq 0$; portanto, ao contrário do modelo (3.11), não há equilíbrio trivial. Há um único equilíbrio, que satisfaz

$$\alpha \ln \left(\frac{K}{N^*} \right) = qE.$$

Resolvendo para N^* , obtemos

$$N^* = K \cdot e^{-\frac{qE}{\alpha}}.$$

O rendimento sustentável no equilíbrio $N^* = K \cdot e^{-\frac{qE}{\alpha}}$ é dado por

$$Y = qEN^* = q \cdot E \cdot K \cdot e^{-\frac{qE}{\alpha}}.$$

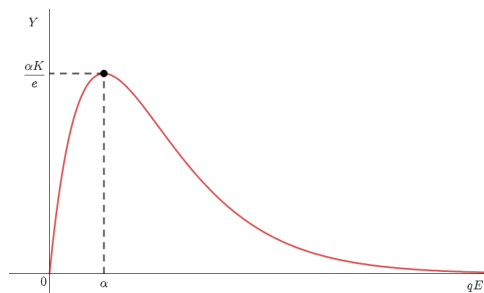
Considerando $\alpha > 0$ e $K > 0$, temos a curva rendimento-esforço mostrada a seguir.

Assim como ocorre no modelo (3.16), o aumento do esforço de pesca aumenta, até certo ponto, o rendimento sustentável. Aumentos adicionais no esforço de pesca diminuem o rendimento (que tende para zero) à medida que o estoque se torna mais explorado e esgotado.

Fixando-se a capturabilidade q , o rendimento máximo sustentável ocorre quando

$$\frac{dY}{dE} = q \cdot K \cdot e^{-\frac{qE}{\alpha}} \left[1 - \frac{q}{\alpha} E \right] = 0.$$

Figura 24 – Curva rendimento-esforço



Fonte: Elaborada pelo autor.

O nível de esforço ideal correspondente é $E = \frac{\alpha}{q}$, que produz o rendimento máximo sustentável, $RMS = Y_{max} = \frac{\alpha K}{e}$.

EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NO ESTUDO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

Neste Capítulo, faremos o estudo de modelos de crescimento populacional, aplicando as teorias desenvolvidas no Capítulo 2 para equações de diferenças.

4.1 Crescimento Independente da Densidade

Seja N_t o tamanho de uma população na geração t . Se desconsiderarmos os fenômenos migratórios, considerarmos que cada indivíduo da população deixa B descendentes antes de morrer e que uma proporção D de indivíduos terá morrido depois do intervalo Δt , então o número de indivíduos da população na geração seguinte é igual à população na geração atual, mais o número de nascimentos e menos o número de mortes, isto é:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= N_t + BN_t - DN_t \\ &= N_t + (B - D)N_t \end{aligned}$$

Se fizermos $R = B - D$, então R , que é a diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade, é chamado de *taxa intrínseca de crescimento*. Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= N_t + RN_t = (1 + R)N_t \\ &= R_0 N_t, \end{aligned}$$

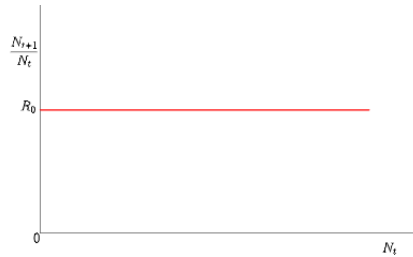
onde $R_0 = 1 + R$. Obtemos assim a equação de diferenças

$$N_{t+1} = R_0 N_t \tag{4.1}$$

Para esse modelo, a *taxa de crescimento per capita*, definida pelo quociente $\frac{N_{t+1}}{N_t}$, é igual a R_0 , ou seja, a taxa de crescimento per capita da população permanece constante, à medida que

a população aumenta. Portanto, o gráfico da taxa de crescimento per capita é dado por uma reta horizontal.

Figura 25 – Taxa de crescimento per capita constante



Fonte: Elaborada pelo autor.

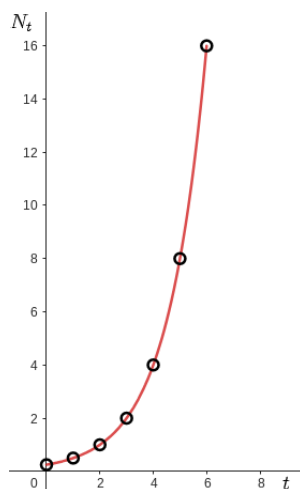
A equação (4.1) é uma equação de diferenças linear, de primeira ordem e de coeficiente constante. Assim, ela tem a forma de (2.6), com $a(n) = R_0$. Desse modo, podemos obter a solução geral aplicando (2.8), mas também podemos deduzí-la a partir de algumas iterações, como segue.

$$\begin{aligned} N_1 &= R_0 N_0 \\ N_2 &= R_0 N_1 = N_0 R_0^2 \\ N_3 &= R_0 N_2 = N_0 R_0^3 \\ &\vdots \\ N_t &= N_0 R_0^t. \end{aligned}$$

A solução da equação (4.1) é, portanto, de crescimento ou decrescimento geométrico. Se $R_0 > 1$, o número de nascimentos supera o de mortes, e a população cresce geometricamente (Figura 26).

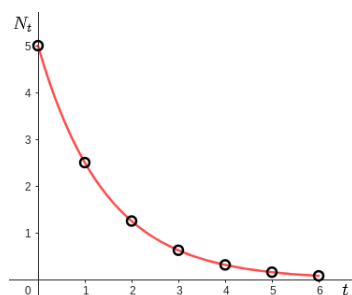
Se $0 < R_0 < 1$, o número de mortes supera o de nascimentos, e a população diminui geometricamente (Figura 27).

Figura 26 – Crescimento geométrico



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Decaimento geométrico



Fonte: Elaborada pelo autor.

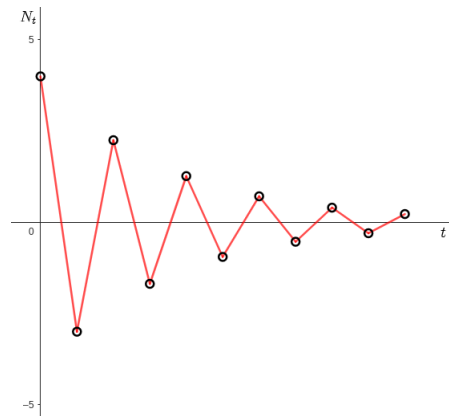
Esses números se assemelham aos do crescimento e decrescimento exponencial. De fato, podemos fazer $R_0 \equiv e^r$ e reescrever a solução como uma equação de crescimento exponencial, obtendo $N_t = N_0 e^{rt}$.

Os indivíduos não podem deixar um número negativo de descendentes. No entanto, podemos considerar matematicamente esta possibilidade.

Para $-1 < R_0 < 0$, obtemos oscilações decrescentes (Figura 28).

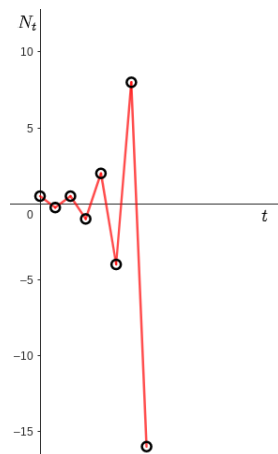
Para $R_0 < -1$, temos oscilações de crescimento, como mostra a Figura 29 (N_t ora decresce, ora cresce, mas sempre se afastando do eixo t).

Figura 28 – Oscilações decrescentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 – Oscilações crescentes



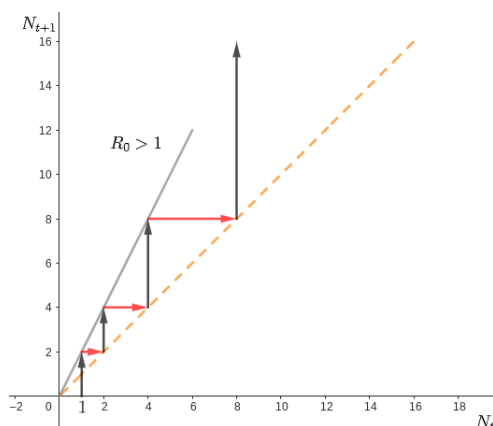
Fonte: Elaborada pelo autor.

As Figuras 26, 27, 28 e 29 sugerem que as soluções se aproximam da origem se $|R_0| < 1$, e divergem (se afastando da origem) se $|R_0| > 1$.

De fato, observemos que, de (4.1), vemos que $N^* = 0$ é um equilíbrio. Além disso, temos $f(N_t) = R_0 N_t$ e daí, $f'(N_t) = R_0$. Aplicando o Teorema (3), temos $f'(0) = R_0$, $|f'(0)| = |R_0|$ e portanto $N^* = 0$ é equilíbrio assintoticamente estável se $|R_0| < 1$, e instável se $|R_0| > 1$.

Podemos plotar N_{t+1} em função de N_t usando o diagrama de teia de aranha. A figura a seguir mostra esse diagrama para a equação (4.1), com $R_0 > 1$. Aqui, tomamos $N_0 = 1$ e $R_0 = 2$.

Figura 30 – Crescimento geométrico no diagrama teia de aranha



Fonte: Elaborada pelo autor.

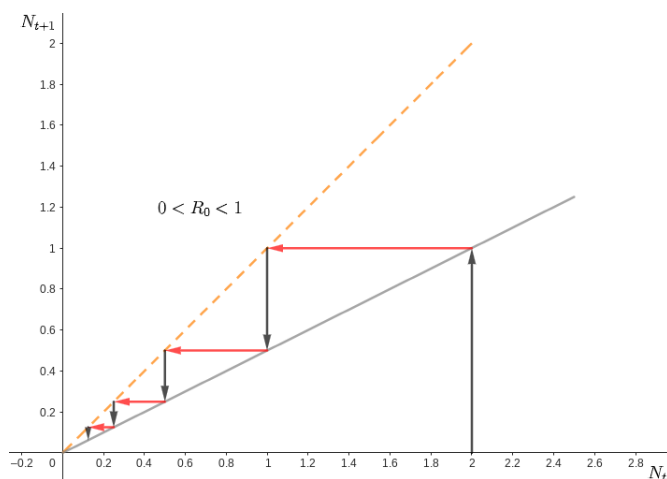
A equação $N_{t+1} = R_0 N_t$ é claramente uma linha reta (em cinza na Figura 30). A figura também mostra a linha tracejada dada por $N_{t+1} = N_t$. Podemos iterar a equação de diferenças repetidamente,

(a) movendo-se para cima (ou para baixo) na curva e então

(b) saltando na linha tracejada (de modo que redefinimos $N_{t+1} = N_t$).

A figura a seguir mostra o diagrama de teia de aranha da equação (4.1), com $0 < R_0 < 1$. Aqui, tomamos $N_0 = 2$ e $R_0 = \frac{1}{2}$.

Figura 31 – Decaimento geométrico no diagrama teia de aranha



Fonte: Elaborada pelo autor.

O equilíbrio trivial na Figura 30 é instável; o equilíbrio trivial na Figura 31 é estável.

Quando permitimos a imigração ou emigração, uma equação de diferenças linear independente da densidade pode ter um valor diferente de zero como equilíbrio. Por exemplo, a

equação de diferenças

$$N_{t+1} = \frac{3}{4}N_t + 10 \quad (4.2)$$

tem um equilíbrio que satisfaz

$$N^* = \frac{3}{4}N^* + 10.$$

Neste caso, a imigração equilibra a baixa sobrevivência em $N^* = 40$.

De (4.2), vemos que $f(N_t) = \frac{3}{4}N_t + 10$ e daí, $f'(N_t) = \frac{3}{4}$. Aplicando o Teorema (3), temos $f'(40) = \frac{3}{4} = 0,75$, $|f'(40)| = 0,75 < 1$ e portanto $N^* = 40$ é equilíbrio assintoticamente estável.

A fim de resolver (4.2), vamos introduzir uma nova variável, que mede o desvio deste equilíbrio, isto é, fazendo

$$x_t \equiv N_t - 40, \quad (4.3)$$

temos que $N_t = x_t + 40$ e $N_{t+1} = x_{t+1} + 40$. Assim, podemos reescrever a equação (4.2) como segue:

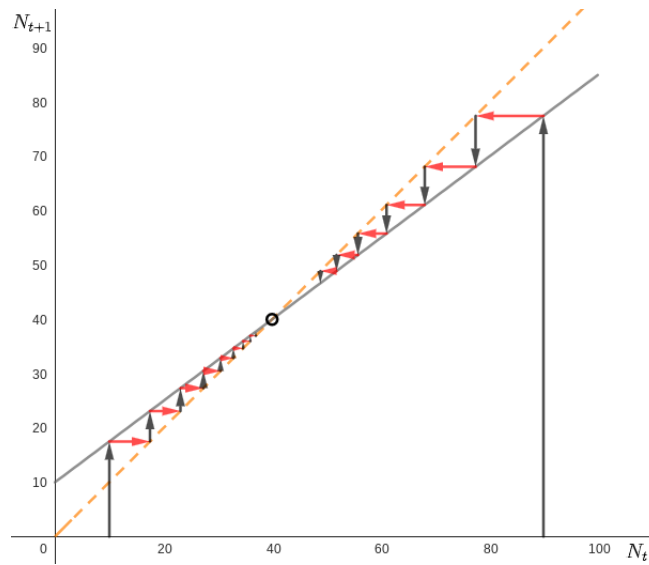
$$\begin{aligned} N_{t+1} &= \frac{3}{4}N_t + 10 \\ x_{t+1} + 40 &= \frac{3}{4}x_t + 30 + 10 \\ x_{t+1} &= \frac{3}{4}x_t \end{aligned}$$

que é da forma (4.1) e portanto tem como solução $x_t = x_0\left(\frac{3}{4}\right)^t$. Assim:

$$N_t = 40 + x_t = 40 + x_0\left(\frac{3}{4}\right)^t = 40 + (N_0 - 40)\left(\frac{3}{4}\right)^t$$

é a solução de (4.2). Fica claro que pequenas perturbações em torno do equilíbrio decaem de volta ao equilíbrio, o que reafirma a estabilidade assintótica deste. Esta estabilidade também aparece na análise do diagrama de teia de aranha (Figura 32). Aqui, estamos supondo $N_0 = 10$ e depois $N_0 = 90$.

Figura 32 – Diagrama teia de aranha para um equilíbrio estável



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Crescimento Dependente da Densidade

Como já observado anteriormente, uma população não cresce ilimitadamente, pois existem fatores que contribuem para a diminuição da taxa de crescimento. Entre esses fatores, podemos citar a limitação dos recursos imposta pelo meio em que a população se encontra (como água, alimento, espaço), as competições que ocorrem entre indivíduos da mesma espécie ou de espécies diferentes, as migrações, as doenças, os fatores climáticos, entre outros.

Assim, modelos de crescimento que independem da densidade podem funcionar de maneira satisfatória apenas nos estágios iniciais do desenvolvimento de uma população. Modelos mais realísticos são necessários à medida que a população aumenta, pois é preciso que se leve em conta fatores inibidores de crescimento, como os descritos no parágrafo anterior. Dessa forma, é natural esperar que uma população cresça tendendo a um valor limite. Nesse contexto, falaremos de dois modelos que têm dependência da densidade, isto é, modelos onde o número per capita de descendentes varia com o tamanho da população.

No Capítulo 3, analisamos a equação diferencial logística para o estudo de populações que variam continuamente no tempo. Podemos formular um modelo análogo a essa equação para o estudo em tempo discreto.

Um primeiro modelo considera que o número per capita de novos indivíduos, $\frac{N_{t+1}}{N_t}$, é inversamente proporcional à uma função linear do número de indivíduos adultos:

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = \frac{R_0}{1 + \left[\frac{R_0 - 1}{K} \right] N_t} \quad (4.4)$$

Esse modelo pode ser obtido a partir da solução da equação logística:

$$N_t = \frac{K}{1 + Ce^{-rt}}, \text{ onde } C = \frac{K - N_{t_0}}{N_{t_0}}$$

$$N_t = \frac{KN_{t_0}}{N_{t_0} + [K - N_{t_0}]e^{-rt}}.$$

A partir de N_{t_0} e após um intervalo de tempo Δt , temos:

$$N_{t_0+\Delta t} = \frac{KN_{t_0}}{N_{t_0} + [K - N_{t_0}]e^{-r(t_0+\Delta t)}}$$

$$= \frac{KN_{t_0}}{N_{t_0} + [K - N_{t_0}]e^{-rt_0}e^{-r\Delta t}}$$

Lembrando que $t_0 = 0$ e fazendo $R_0 = e^{r\Delta t}$, obtemos:

$$N_{t+1} = \frac{KN_t}{N_t + [K - N_t] \cdot \frac{1}{R_0}}$$

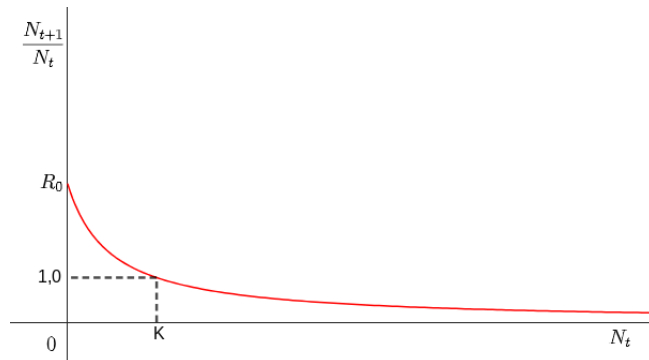
que pode ser reescrita como

$$N_{t+1} = \frac{R_0 N_t}{1 + \left[\frac{R_0 - 1}{K} \right] N_t} \quad (4.5)$$

Essa equação é conhecida como **curva de Beverton-Holt**. Como $N_{t+1} \rightarrow \frac{R_0 K}{R_0 - 1}$ quando $N_t \rightarrow \infty$, isso significa que a curva da equação (4.5) tem a assíntota horizontal $y = \frac{R_0 K}{R_0 - 1}$. A curva de Beverton-Holt (Figura 34) é compensatória: aumenta monotonicamente, mas com inclinação cada vez menor. Um aumento na densidade leva a uma diminuição na taxa de reprodução per capita, sem reduzir o recrutamento de toda a população. Em dinâmica populacional, *recrutamento* é o processo pelo qual novos indivíduos são adicionados a uma população.

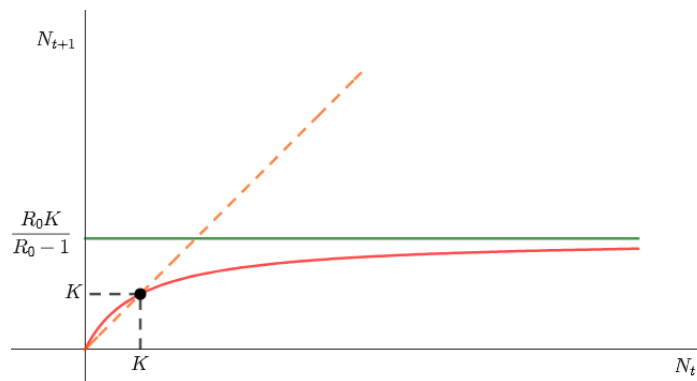
Notemos de (4.4) que, quando $N_t = K$, temos $\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1$. Além disso, se $\frac{N_{t+1}}{N_t} = R_0$, temos $N_t = 0$. Assim, a curva da taxa de crescimento per capita tem o aspecto mostrado na Figura 33. Podemos ver que o aumento da densidade acarreta diminuição no número de descendentes per capita.

Figura 33 – Compensação



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Curva de Beverton-Holt



Fonte: Elaborada pelo autor.

A equação (4.5) tem dois equilíbrios: $N = 0$ (trivial) e $N = K$ (não trivial).

Vamos analisar a estabilidade desses equilíbrios usando os critérios de estabilidade para equações de diferenças desenvolvidos no Capítulo 2.

$$\text{Como } f(N_t) = \frac{R_0 N_t}{1 + \left[\frac{R_0 - 1}{K}\right] N_t}, \text{ então } f'(N_t) = \frac{R_0}{\left[1 + \left(\frac{R_0 - 1}{K}\right) N_t\right]^2}.$$

Em $N = 0$, temos $f'(0) = R_0$. Assim, esse equilíbrio é instável se $|R_0| > 1$. Mas, em termos biológicos, vamos considerar $R_0 > 0$ e portanto temos que $N = 0$ é equilíbrio instável se $R_0 > 1$.

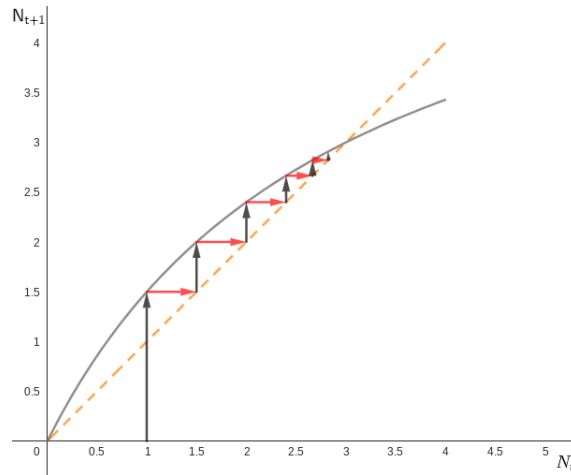
Em $N = K$, temos $f'(K) = \frac{1}{R_0}$. Assim, a capacidade de suporte K é assintoticamente estável se $\frac{1}{R_0} < 1$, ou seja, se $R_0 > 1$. Portanto, para $R_0 > 1$, a população se afasta de zero e se aproxima de $N = K$ quando $t \rightarrow \infty$.

Por outro lado, o equilíbrio $N = 0$ é estável se $|R_0| < 1$. Considerando $R_0 > 0$, isso significa que $0 < R_0 < 1$. O equilíbrio $N = K$ é instável se $\left|\frac{1}{R_0}\right| > 1$. Considerando $R_0 > 0$, isso significa que $\frac{1}{R_0} > 1$, ou seja, $0 < R_0 < 1$. Portanto, para $0 < R_0 < 1$, a população tende à

extinção quando $t \rightarrow \infty$.

Exemplo 19. Se $R_0 = 2$ e $K = 3$, temos a equação de diferença $N_{t+1} = \frac{2N_t}{1 + \frac{1}{3}N_t}$. O equilíbrio $N = 0$ é instável, enquanto o equilíbrio $N = 3$ é assintoticamente estável.

Figura 35 – Teia de aranha da equação $N(t+1) = \frac{2N_t}{1 + \frac{1}{3}N_t}$; $N_0 = 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos, agora, dar uma solução exata e fechada para a equação de diferenças de Beverton-Holt:

$$N_{t+1} = \frac{R_0 N_t}{1 + \left[\frac{R_0 - 1}{K}\right] N_t}$$

Façamos a substituição $u_t \equiv \frac{1}{N_t}$. Então, $N_{t+1} = \frac{1}{u_{t+1}}$. Temos:

$$\frac{1}{u_{t+1}} = \frac{R_0 \cdot \frac{1}{u_t}}{1 + \left[\frac{R_0 - 1}{K}\right] \frac{1}{u_t}}$$

Chegamos em

$$u_{t+1} = \frac{1}{R_0} u_t + \frac{1}{K} - \frac{1}{KR_0},$$

que é uma equação de diferenças linear não homogênea. A equação homogênea associada é $u_{t+1} = \frac{1}{R_0} u_t$. Sua solução é $u_t = \frac{1}{R_0^t} \cdot C$, $C \in \mathbb{R}$. Achamos uma solução particular (constante) da equação não homogênea. Fazendo:

$$c_1 = \frac{c_1}{R_0} + \frac{1}{K} - \frac{1}{KR_0},$$

concluimos que $c_1 = \frac{1}{K}$. Portanto, a solução da equação não homogênea é $u_t = \frac{1}{R_0^t}C + \frac{1}{K}$. Escrevendo de volta em termos de N_t , obtemos

$$N_t = \frac{R_0^t K}{KC + R_0^t},$$

em que a constante C é determinada a partir do valor de N_0 . De fato, quando $t = 0$, temos:

$$N_0 = \frac{K}{KC + 1},$$

donde se obtém que $C = \frac{K - N_0}{KN_0}$.

O segundo modelo é obtido como uma aproximação direta para a equação diferencial logística. Começamos com

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right). \quad (4.6)$$

Aproximamos a derivada do lado esquerdo com um quociente de diferenças infinito, obtendo:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right). \quad (4.7)$$

Se considerarmos que o intervalo de tempo é de uma geração, então $\Delta t = 1$. Assim, a equação (4.7) se reduz para

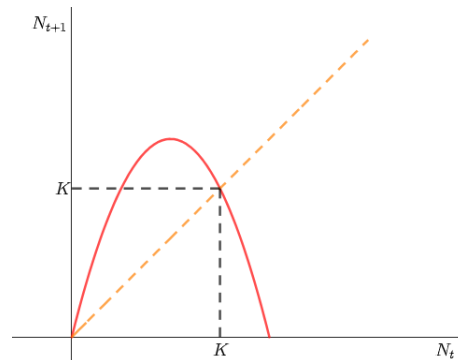
$$\begin{aligned} \Delta N &= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \\ N_{t+1} - N_t &= rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right). \end{aligned}$$

Obtemos assim a **equação de diferenças logística**:

$$N_{t+1} = N_t(1 + r) - \frac{r}{K}N_t^2. \quad (4.8)$$

A curva desse modelo é dada pela Figura 36.

Figura 36 – Curva da Equação de Diferenças Logística



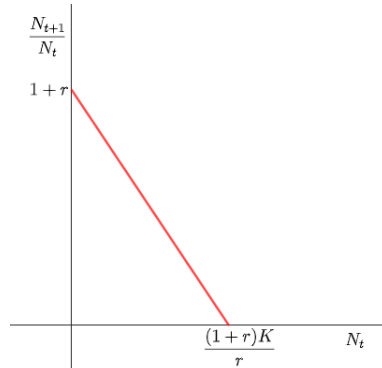
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para este modelo, a taxa de crescimento per capita é dada por

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = (1+r) - \frac{r}{K}N_t, \quad (4.9)$$

que é uma função linearmente decrescente (Figura 37).

Figura 37 – Taxa de crescimento per capita



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos reescrever a equação de diferenças logística, fazendo

$$x_t \equiv \frac{r}{1+r} \frac{N_t}{K}, \quad (4.10)$$

$$\mu \equiv 1+r. \quad (4.11)$$

De (4.10), temos que $N_t = \frac{1+r}{r} K x_t$. Daí, $N_{t+1} = \frac{1+r}{r} K x_{t+1}$. Com a equação de diferenças logística escrita como

$$N_{t+1} = N_t(1+r) - \frac{r}{K}N_t^2, \quad (4.12)$$

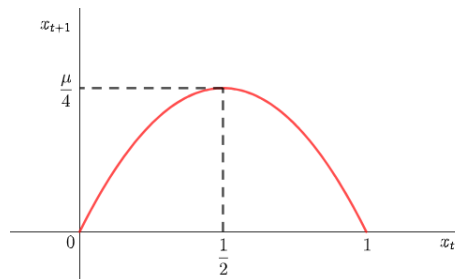
substituímos N_t e N_{t+1} pelas expressões obtidas acima, e vem:

$$\begin{aligned}\frac{1+r}{r}Kx_{t+1} &= (1+r)\frac{1+r}{r}Kx_t - \frac{r}{K}\left(\frac{1+r}{r}\right)^2K^2x_t^2 \\ x_{t+1} &= (1+r)\frac{1+r}{r}Kx_t \frac{r}{(1+r)K} - \frac{r}{K}\left(\frac{1+r}{r}\right)^2K^2x_t^2 \frac{r}{(1+r)K} \\ x_{t+1} &= (1+r)x_t - (1+r)x_t^2 \\ x_{t+1} &= \mu x_t - \mu x_t^2\end{aligned}$$

isto é,

$$x_{t+1} = \mu x_t - \mu x_t^2. \quad (4.13)$$

Figura 38 – Curva da Equação de Diferenças Logística na forma (4.13)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vantagem da equação (4.12) é o fato de possuir um equilíbrio não trivial em $N_t = K$. A equação (4.13), por sua vez, tem a vantagem de que o intervalo $0 \leq x \leq 1$ é invariante para $0 \leq \mu \leq 4$. De fato, quando $0 \leq \mu \leq 4$, então $0 \leq \frac{\mu}{4} \leq 1$, mas $\frac{\mu}{4}$ é o valor máximo de x_{t+1} na equação (4.13). Assim, temos que $0 \leq x_{t+1} \leq 1$.

Vamos analisar a estabilidade dos equilíbrios da equação diferencial logística (4.12), usando os critérios de estabilidade para equações de diferenças desenvolvidos no capítulo 2. Há dois equilíbrios: $N^* = 0$ e $N^* = K$. Com $f(N_t) = N_t(1+r) - \frac{r}{K}N_t^2$, temos $f'(N) = (1+r) - \frac{2r}{K}N_t$.

Então, $f'(0) = 1+r$. O equilíbrio trivial é instável para $|1+r| > 1$, isto é, para $r < -2$ ou $r > 0$, e assintoticamente estável para $|1+r| < 1$, isto é, para $-2 < r < 0$.

Temos também $f'(K) = 1-r$. Assim, a capacidade de suporte é instável para $|1-r| > 1$, isto é, para $r < 0$ ou $r > 2$, e assintoticamente estável para $|f'(K)| = |1-r| < 1$, o que significa que $0 < r < 2$.

Portanto, para $0 < r < 2$, a população se afasta de zero e se aproxima de $N = K$. Para $r < 0$, a população tende a extinção. Se tomarmos $r > 2$, podemos ter comportamento periódico ou caótico. Os Exemplos 20, 21 e 22 a seguir ilustram os casos $0 < r < 2$ e $r > 2$.

Exemplo 20. Uma população de peixes cresce à uma taxa intrínseca de $r = 0,5$ tonelada por ano, e a população limite é de $k = 10$ toneladas. Supondo que a população inicial seja de $N_0 = 1$

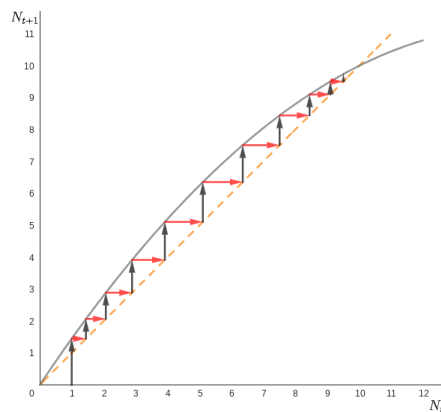
tonelada, podemos usar o modelo (4.12), que neste caso é dado por

$$N_{t+1} = 1,5N_t - 0,05N_t^2, \quad (4.14)$$

para estudar o crescimento da população ao longo dos anos.

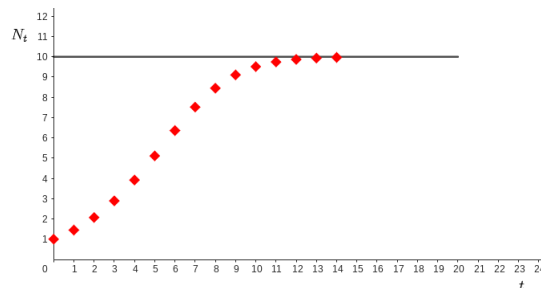
As Figuras 39 e 40 mostram, respectivamente, o diagrama de teia de aranha da equação (4.14) e a curva de crescimento da população. Podemos observar no diagrama de teia que N_t se afasta do equilíbrio trivial $N = 0$, e se aproxima da capacidade de suporte $K = 10$. A curva de crescimento mostra que, inicialmente, quando a população está distante da capacidade de suporte, o crescimento é aproximadamente exponencial, mas a taxa de crescimento torna-se gradativamente menor, à medida que a população cresce, aproximando-se da capacidade de suporte.

Figura 39 – Diagrama de teia de aranha da equação $N_{t+1} = 1,5N_t - 0,05N_t^2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 40 – Curva de crescimento da população de peixes modelada por $N_{t+1} = 1,5N_t - 0,05N_t^2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 21. Suponhamos, agora, que uma população de peixes tem uma taxa intrínseca de crescimento igual a $r = 2,2$ toneladas por ano, e que a população limite seja de $k = 20$ toneladas. Se a população inicial é de $N_0 = 1$ tonelada, vamos prever o tamanho da população usando o modelo (4.12), que neste caso é dado por

$$N_{t+1} = 3,2N_t - 0,11N_t^2. \quad (4.15)$$

Fazendo o gráfico de N_t em função de t , podemos perceber que a trajetória tende para uma solução periódica estável de período igual a 2, isto é, temos um 2-ciclo estável. De fato:

$$f^2(N_t) = -0,001331N_t^4 + 0,07744N_t^3 - 1,4784N_t^2 + 10,24N_t$$

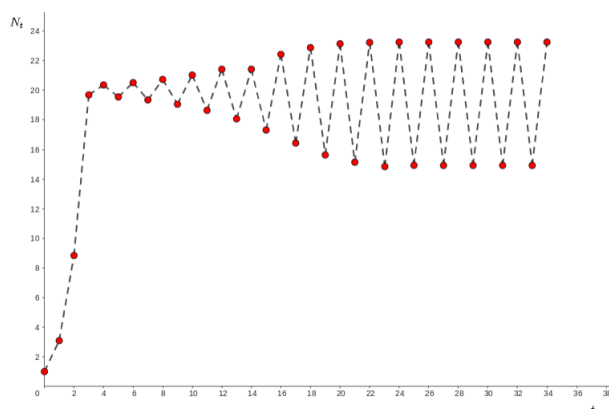
e as soluções de $f^2(N_t) = N_t$ são $N_1 = 0$, $N_2 = 20$, $N_3 = 14,92493$ e $N_4 = 23,25688$. Como N_1 e N_2 são também equilíbrios de f , temos que N_3 e N_4 formam o 2-ciclo de f : $\{14,92493; 23,25688\}$.

Verifiquemos a estabilidade deste 2-ciclo, aplicando o Teorema (7). Como $f'(N_t) = 3,2 - 0,22N_t$, temos que $f'(14,92493) = -0,0834846$ e $f'(23,25688) = -1,9165136$. Portanto:

$$|f'(14,92493) \cdot f'(23,25688)| = 0,16 < 1,$$

donde concluímos que $\{14,92493; 23,25688\}$ é um 2-ciclo assintoticamente estável. Podemos dizer que a população de peixes descrita pela equação (4.15) oscila entre 14 e 23 toneladas, ano após ano.

Figura 41 – Curva de crescimento da população de peixes modelada por $N_{t+1} = 3,2N_t - 0,11N_t^2$.



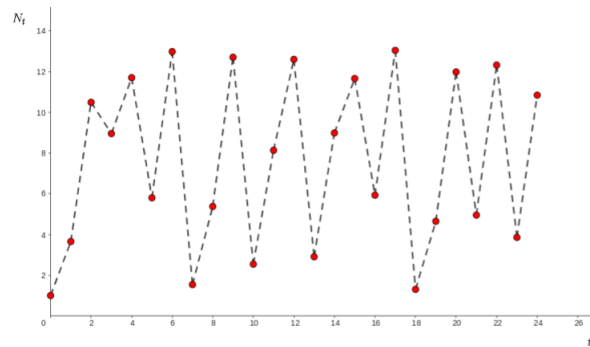
Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 22. Suponhamos, agora, que uma população de peixes tem uma taxa intrínseca de crescimento igual a $r = 2,95$ toneladas por ano, e que a população limite seja de $k = 10$ toneladas. Se a população inicial é de $N_0 = 1$ tonelada, vamos prever o tamanho da população usando o modelo (4.12), que neste caso é dado por

$$N_{t+1} = 3,95N_t - 0,295N_t^2. \quad (4.16)$$

Fazendo o gráfico de N_t em função de t , podemos perceber que as soluções se comportam de modo caótico, não sendo possível prever o tamanho da população no ano seguinte, a partir do conhecimento de seu tamanho no ano atual.

Figura 42 – Curva de crescimento da população de peixes modelada por $N_{t+1} = 3,95N_t - 0,295N_t^2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observemos que:

$$f^2(N_t) = -0,025672375N_t^4 + 0,6874975N_t^3 - 5,7679875N_t^2 + 14,6025N_t$$

e as soluções de $f^2(N_t) = N_t$ são $N_1 = 0$, $N_2 = 10$, $N_3 = 4,71436$ e $N_4 = 12,06529$. Como N_1 e N_2 são também equilíbrios de f , temos que N_3 e N_4 formam o 2-ciclo de f : $\{4,71436; 12,06529\}$.

Verifiquemos a estabilidade deste 2-ciclo, aplicando o Teorema (7). Como $f'(N_t) = 3,95 - 0,59N_t$, temos que $f'(4,71436) = 1,1685276$ e $f'(12,06529) = -3,1685211$. Portanto:

$$|f'(4,71436) \cdot f'(12,06529)| = 3,7 > 1,$$

donde concluímos que $\{4,71436; 12,06529\}$ é um 2-ciclo instável.

Vamos, agora, analisar a estabilidade dos equilíbrios da equação diferencial logística na forma (4.13). Para encontrar os equilíbrios, resolvemos a equação

$$x_{t+1} = x_t,$$

isto é,

$$\mu x_t - \mu x_t^2 = x_t.$$

Obtemos que $x = 0$ ou $x = \frac{\mu - 1}{\mu}$, $\mu \neq 1$.

Usando o critério de estabilidade para equações de diferença desenvolvidos no Capítulo 2, com $f(x_t) = \mu x_t - \mu x_t^2$, temos que $f'(x_t) = \mu - 2\mu x_t$. Com relação ao equilíbrio trivial $x = 0$, temos $f'(0) = \mu$. Assim, $x = 0$ é equilíbrio assintoticamente estável se $|f'(0)| = |\mu| < 1$. Como estamos considerando $\mu > 0$, isso significa que $0 < \mu < 1$. Temos ainda que $x = 0$ é um equilíbrio instável se $|f'(0)| = |\mu| > 1$. Como $\mu > 0$, isso significa que $\mu > 1$.

Com relação à estabilidade do equilíbrio trivial quando $\mu = 1$, observemos que $|f'(0)| = 1$ e, como $f''(x_t) = -2\mu$, então $f''(0) = -2 \neq 0$. Portanto, pelo Teorema (4), temos que $x^* = 0$ é instável quando $\mu = 1$.

Em relação ao equilíbrio não trivial, $x = \frac{\mu - 1}{\mu}$, $\mu \neq 1$, temos $f'(\frac{\mu - 1}{\mu}) = 2 - \mu$. Portanto, o equilíbrio não trivial é assintoticamente estável se $|2 - \mu| < 1$, isto é, se $1 < \mu < 3$. Temos ainda que o equilíbrio não trivial é instável se $|2 - \mu| > 1$, isto é, se $\mu < 1$ ou $\mu > 3$, mas devemos descartar $\mu < 1$ se desejarmos o equilíbrio não trivial no intervalo $(0, 1]$, pois isso exige que $\mu > 1$. Precisamos agora checar a estabilidade do equilíbrio não trivial quando $\mu = 3$. Nesse caso, o equilíbrio não trivial é $x = \frac{2}{3}$, e temos $f'(\frac{2}{3}) = 3 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = -1$. Assim, precisamos do Teorema (5). Como $f'''(x_t) = -2$, então $-f'''(\frac{2}{3}) - \frac{3}{2}(f''(\frac{2}{3}))^2 = 2 - \frac{3}{2} \cdot 36 = -52 < 0$. Logo, para $\mu = 3$, o equilíbrio não trivial é assintoticamente estável.

A curva de Beverton-Holt e a equação de diferenças logística têm formas distintas de dependência da densidade. No modelo de Beverton-Holt, como vimos, o aumento na densidade acarreta diminuição na reprodução per capita, porém não reduz o recrutamento de toda a população. Já na equação de diferenças logística, o aumento na densidade leva à diminuição da reprodução per capita, com diminuição do recrutamento.

O comportamento mostrado pelo modelo de Beverton-Holt pode ser relacionado a um tipo de competição intraespecífica (isto é, entre indivíduos da mesma espécie), em que ocorre disputa pelos recursos do ambiente. Alguns indivíduos ganham, enquanto outros perdem. Assim, os indivíduos que ganham garantem os recursos suficientes para se reproduzirem, independentemente da densidade. Isso leva à estabilização do recrutamento, à medida que o número de indivíduos adultos aumenta.

Já o modelo descrito pela equação de diferenças logística pode ser relacionado a outro tipo de competição intraespecífica, no qual todos os indivíduos dividem os recursos igualmente. Se a densidade for alta o suficiente, poderá ocorrer que nenhum indivíduo consiga recursos suficientes para garantir sua reprodução. Isso pode levar à diminuição na reprodução per capita,

com diminuição no recrutamento.

MODELOS COM RETARDO

Neste Capítulo, estudaremos modelos de crescimento populacional utilizando equações de diferenças com retardo.

5.1 Equações de Diferenças com Retardo

Nesta seção, estudaremos modelos da forma

$$N_{t+1} = f(N_t, N_{t-T}) = N_t F(N_{t-T}), \quad (5.1)$$

em que T é um atraso explícito na dependência da densidade.

Exemplo 23. O modelo de Beverton-Holt com retardo:

$$N_{t+1} = \frac{R_0 N_t}{1 + [\frac{R_0 - 1}{K}] N_{t-T}} = N_t \frac{R_0}{1 + [\frac{R_0 - 1}{K}] N_{t-T}}. \quad (5.2)$$

Exemplo 24. A equação de diferenças logística com retardo:

$$N_{t+1} = N_t \left[1 + r \left(1 - \frac{N_{t-T}}{K} \right) \right] = \left[1 + r \left(1 - \frac{N_{t-T}}{K} \right) \right] N_t = (1 + r) N_t - \left(\frac{r}{K} \right) N_t N_{t-T}. \quad (5.3)$$

Exemplo 25. A equação de Ricker com retardo:

$$N_{t+1} = N_t e^{r \left[\left(1 - \frac{N_{t-T}}{K} \right) \right]}. \quad (5.4)$$

Todas essas equações de diferenças são de ordem superior, mas nos referiremos a elas como equações de diferenças com retardos. Notemos que, em todas elas, $F(K) = 1$, de modo que $N_{t+1} = N_t$. Portanto, a capacidade de carga K é um equilíbrio de cada uma dessas equações. Além disso, temos que, se $N_t = N_{t-T} = K$, então $N_{t+1} = f(N_t, N_{t-T}) = K$.

Vamos discutir agora a respeito da estabilidade da capacidade de suporte. Para isso, linearizamos a função f de (5.1) no ponto (K, K) , isto é, quando $N_t = N_{t-T} = K$. Fazemos ainda $x_t \equiv N_t - K$. Temos:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= f(K, K) + \frac{\partial f}{\partial N_t}(K, K) (N_t - K) + \frac{\partial f}{\partial N_{t-T}}(K, K) (N_{t-T} - K) \\ N_{t+1} - K &= \frac{\partial f}{\partial N_t}(K, K) (N_t - K) + \frac{\partial f}{\partial N_{t-T}}(K, K) (N_{t-T} - K) \\ x_{t+1} &= \frac{\partial f}{\partial N_t}(K, K) x_t + \frac{\partial f}{\partial N_{t-T}}(K, K) x_{t-T} \end{aligned}$$

Para as equações dos Exemplos, obtemos a equação de diferenças linear (cuja ordem obviamente depende do retardo T):

$$x_{t+1} = x_t - rx_{t-T}. \quad (5.5)$$

Com a substituição $x_t = N_t - K$, o estudo da estabilidade da capacidade de suporte se resume ao estudo da estabilidade da solução zero da equação (5.5). Como esta é uma equação de diferenças de ordem superior, o comportamento de suas soluções depende de suas raízes características, conforme já discutimos.

Supondo uma solução da forma $x_t = x_0 \lambda^t$, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0 \lambda^{t+1} &= x_0 \lambda^t - rx_0 \lambda^{t-T} \\ rx_0 \lambda^{t-T} &= x_0 \lambda^t - x_0 \lambda^{t+1} \\ rx_0 \lambda^{t-T} &= x_0 \lambda^t (1 - \lambda) \\ r \lambda^{-T} &= 1 - \lambda \\ r &= \frac{1 - \lambda}{\lambda^{-T}} = \lambda^T (1 - \lambda). \end{aligned}$$

A equação

$$\lambda^T (1 - \lambda) = r \quad (5.6)$$

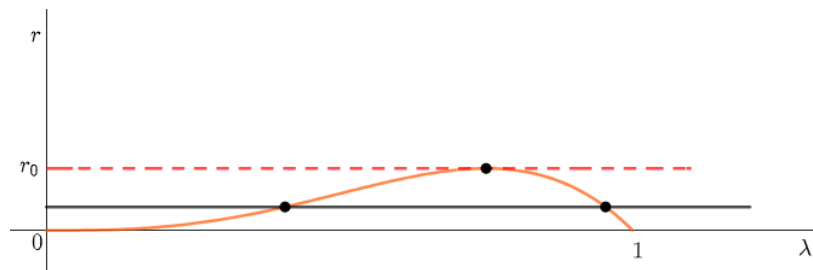
é a equação característica de (5.5). Ela possui $(T + 1)$ raízes λ_i , uma vez que é de grau $(T + 1)$. De acordo com os resultados que obtivemos no Capítulo 2, todas as soluções de (5.5) convergem para zero (ou seja, $x_t = 0$ é assintoticamente estável) se, e somente se, todas as raízes λ_i da equação característica (5.6) forem tais que $|\lambda_i| < 1$.

Como sabemos, entre as raízes da equação característica, aquela de maior módulo é chamada de raiz dominante. Se a raiz dominante tem módulo menor do que 1, então as soluções de (5.5) são monotonicamente decrescentes para zero; portanto, $x_t = 0$ é um equilíbrio

assintoticamente estável de (5.5) e então a capacidade de carga K é assintoticamente estável. Se a raiz dominante for um número complexo com módulo menor que 1 ou um número negativo com módulo menor que 1, as soluções de (5.5) oscilam, convergindo para zero. Nesse caso, podemos esperar oscilações amortecidas sobre a capacidade de carga, isto é, as soluções estão ora maiores, ora menores que K , mas se aproximam de K . Finalmente, se a raiz dominante tem módulo maior que 1, o equilíbrio é instável. Portanto, as oscilações amortecidas aparecem quando temos a raiz dominante sendo um número complexo com módulo menor que 1 ou um número negativo com módulo menor que 1.

Vamos traçar o gráfico da equação (5.6), com r em função de λ (Figura 43).

Figura 43 – Raízes reais positivas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando r é positivo e pequeno, temos duas raízes reais positivas. À medida que r aumenta, essas duas raízes convergem, até o momento em que elas se fundem e a partir daí desaparecem. Então, as oscilações se estabelecem no valor crítico $r = r_0$, onde as duas raízes positivas desaparecem. Tal valor crítico corresponde ao valor máximo da expressão do lado esquerdo de (5.6). Podemos determinar r_0 calculando $\frac{dr}{d\lambda}$ e fazendo $\frac{dr}{d\lambda} = 0$. Como $\frac{dr}{d\lambda} = T\lambda^{T-1} - (T+1)\lambda^T$, obtemos:

$$\begin{aligned} T\lambda^{T-1} - (T+1)\lambda^T &= 0 \\ T\lambda^{T-1} &= (T+1)\lambda^T \\ \frac{\lambda^{T-1}}{\lambda^T} &= \frac{T+1}{T} \\ \lambda^{-1} &= \frac{T+1}{T} \\ \lambda &= \frac{T}{T+1} \end{aligned}$$

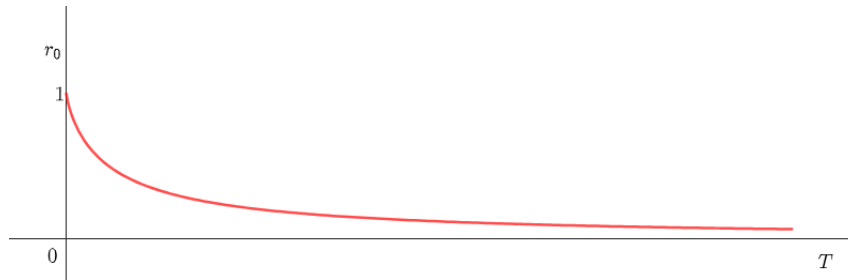
Portanto, o valor máximo de r ocorre quando $\lambda = \frac{T}{T+1}$. Tal valor é:

$$r_0 = \left(\frac{T}{T+1}\right)^T \left[1 - \frac{T}{T+1}\right] = \frac{T^T}{(T+1)^{T+1}}. \quad (5.7)$$

Esse resultado mostra que o valor crítico de r_0 é uma função decrescente do retardo T . Além disso, temos que $r_0 \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow \infty$. Portanto, quanto maior o retardo, mais fácil se torna a obtenção de oscilações.

A figura a seguir mostra o gráfico de r_0 em função do retardo T .

Figura 44 – Valor crítico r_0 em função do retardo T



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se T é um número ímpar, a equação (5.6) possui um número par de raízes. Com $r > r_0$, todas as suas raízes são complexas. Se T é um número par, a equação (5.6) possui um número ímpar de raízes. Com $r > r_0$, segue que existe uma raiz real entre -1 e 0.

No caso das raízes complexas de (5.6), sabemos que, se elas têm módulo igual a 1 (isto é, se estão sobre o círculo unitário $\lambda = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen} \theta$ no plano complexo), então x_t oscila, sendo constante em módulo. Portanto, a estabilidade da capacidade de suporte K é perdida.

Suponhamos que isso ocorre em $r = r_u$. Reescrevendo a equação característica (5.6) neste valor, obtemos:

$$\begin{aligned} r &= \lambda^T(1 - \lambda) \\ r_u &= \lambda^T - \lambda \cdot \lambda^T \\ \lambda \cdot \lambda^T &= \lambda^T - r_u \\ \lambda &= 1 - r_u \cdot \lambda^{-T} \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever:

$$e^{i\theta} = 1 - r_u \cdot e^{-i\theta T} \quad (5.8)$$

Fazendo $e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 1 &= (1 - r_u \cdot e^{-i\theta T}) \cdot (1 - r_u \cdot e^{i\theta T}) \\
 1 &= 1 - r_u \cdot e^{i\theta T} - r_u \cdot e^{-i\theta T} + r_u^2 \\
 0 &= r_u(-e^{i\theta T} - e^{-i\theta T}) + r_u^2 \\
 r_u^2 &= -r_u(-e^{i\theta T} - e^{-i\theta T}) \\
 r_u &= -(-e^{i\theta T} - e^{-i\theta T}) \\
 r_u &= e^{i\theta T} + e^{-i\theta T} \\
 &= \cos(\theta T) + i \operatorname{sen}(\theta T) + \cos(\theta T) - i \operatorname{sen}(\theta T) \\
 &= 2\cos(\theta T).
 \end{aligned}$$

Como $r_u = e^{i\theta T} + e^{-i\theta T}$, substituindo em (5.8), obtemos:

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} &= 1 - (e^{i\theta T} + e^{-i\theta T}) \cdot e^{-i\theta T} \\
 e^{i\theta} &= 1 - 1 - e^{-2i\theta T} = -e^{-2i\theta T} \\
 e^{i\theta} &= -1 \cdot e^{-2i\theta T} \\
 &= e^{(2n+1)\pi i} \cdot e^{-2i\theta T} \\
 &= e^{i[(2n+1)\pi - 2\theta T]}.
 \end{aligned}$$

Concluimos então que $\theta = (2n + 1)\pi - 2\theta T$. Resolvendo essa equação para θ , obtemos:

$$\theta = \frac{(2n + 1)\pi}{2T + 1}, \quad (5.9)$$

em que $n = 0, 1, 2, \dots$.

Substituindo θ na equação $r_u = 2\cos(\theta T)$, obtemos:

$$r_u = 2 \cos\left(\frac{(2n + 1)\pi T}{2T + 1}\right). \quad (5.10)$$

Portanto, a equação (5.10) fornece os valores de r nos quais aparecem raízes complexas de módulo igual a 1, e portanto onde a estabilidade da capacidade de suporte K é perdida. Se desejarmos obter a primeira raiz característica de (5.6) que cruza o círculo unitário $\lambda = e^{i\theta}$ no plano complexo, colocamos $n = 0$ na equação (5.10), obtendo assim:

$$r_u = 2\cos\left(\frac{\pi T}{2T + 1}\right).$$

Exemplo 26. Consideremos a equação de diferenças logística com retardo $T = 1$. Para determinar o valor de r onde raízes positivas desaparecem e temos oscilações amortecidas, aplicamos (5.7), obtendo $r_0 = \frac{1}{4}$. Se tomarmos, por exemplo, $r = \frac{1}{2}$ e $K = 2$, a equação fica

$$N_{t+1} = 1,5N_t - 0,25 \cdot N_t \cdot N_{t-1}, \quad (5.11)$$

e a equação em x_t é a equação de diferenças linear homogênea de segunda ordem

$$x_{t+1} = x_t - \frac{1}{2} \cdot x_{t-1}. \quad (5.12)$$

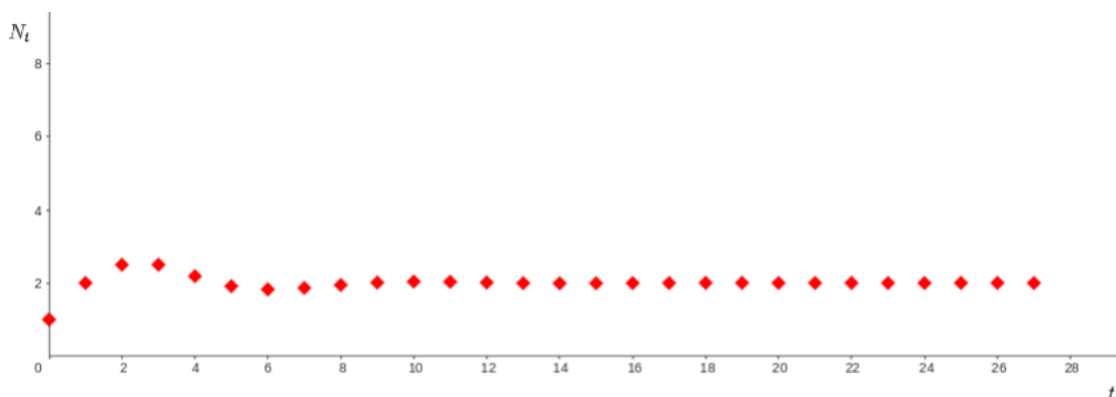
cuja equação característica é $\lambda(1 - \lambda) = 0,5$. Como as raízes da equação característica são complexas com módulo menor que 1, concluímos que há oscilações amortecidas sobre a solução geral de (5.12), que converge para zero. Portanto, a capacidade de suporte $K = 2$ da equação (5.11) é assintoticamente estável. Esse comportamento pode ser visualizado na Tabela 1 e na Figura 45. Estamos considerando $N_0 = 1$ e $N_1 = 2$.

Tabela 1 – Algumas iterações da equação (5.11)

t	N_t
0	1
1	2
2	2,5
3	2,5
4	2,1875
5	1,914063
6	1,824341
7	1,863536
8	1,945372
9	2,011741
10	2,039215
11	2,033229
12	2,013296
13	1,996571
14	1,989934
15	1,99164
16	1,996652
17	2,000825
18	2,0025
19	2,002087
20	2,000836

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 45 – Plotando algumas soluções da equação (5.11).



Fonte: Elaborada pelo autor.

A estabilidade da capacidade de suporte $K = 2$ é perdida quando $r_u = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Esse é o primeiro valor de r para o qual as raízes complexas da equação característica têm módulo igual a 1. A equação logística com retardo, com $r = 1$, fica

$$N_{t+1} = 2N_t - 0,5 \cdot N_t \cdot N_{t-1}, \quad (5.13)$$

e a equação em x_t é

$$x_{t+1} = x_t - x_{t-1}, \quad (5.14)$$

cuja equação característica é

$$\lambda(1 - \lambda) = 1. \quad (5.15)$$

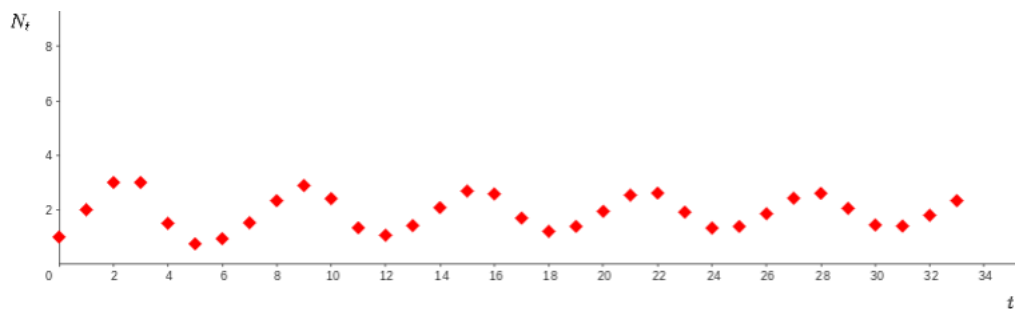
As soluções da equação (5.14) oscilam, mas são constantes em módulo, e a capacidade de suporte $K = 2$ de (5.13) é instável. Exibimos, a seguir, algumas iterações da equação (5.13), bem como o gráfico de N_t em função de t . Estamos considerando $N_0 = 1$ e $N_1 = 2$.

Tabela 2 – Algumas iterações da equação (5.13)

t	N_t
0	1
1	2
2	3
3	3
4	1,5
5	0,75
6	0,9375
7	1,523438
8	2,332764
9	2,888618
10	2,408004
11	1,338107
12	1,06513
13	1,417632
14	2,080282
15	2,686027
16	2,578207
17	1,693847
18	1,20415
19	1,388477
20	1,940986
21	2,534466
22	2,60925
23	1,911973
24	1,329538
25	1,388056
26	1,853375
27	2,420456

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 46 – Plotando algumas soluções da equação (5.13).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos estudar a equação de diferenças logística com retardo igual a 1 de modo um pouco mais aprofundado. Para isso, faremos as substituições:

$$u_t \equiv \frac{r}{(1+r)K} N_t \quad (5.16)$$

e

$$a \equiv 1+r \quad (5.17)$$

de modo a reescrever a equação de diferenças logística com retardo igual a 1 como uma equação de diferenças de segunda ordem.

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= \frac{r}{(1+r)K} \cdot N_{t+1} \\ &= \frac{r}{(1+r)K} \cdot N_t \cdot \left[1+r - \frac{r}{K} N_{t-1}\right] \\ &= \frac{r}{K} \cdot N_t - \frac{r^2}{K^2} \cdot \frac{N_{t-1}}{1+r} \cdot N_t \\ &= u_t(1+r) - \frac{r}{K} N_{t-1} \cdot \frac{r}{(1+r)K} N_t \\ &= u_t(1+r) - u_t \cdot \frac{r}{K} N_{t-1} \\ &= a \cdot u_t - u_t \cdot u_{t-1}(1+r) \\ &= a \cdot u_t - a \cdot u_t \cdot u_{t-1} \\ &= a \cdot u_t \cdot (1 - u_{t-1}) \end{aligned}$$

Agora, dado que

$$u_{t+1} = a \cdot u_t \cdot (1 - u_{t-1}), \quad (5.18)$$

faremos

$$x_t = u_{t-1} \quad (5.19)$$

e

$$y_t = u_t, \quad (5.20)$$

o que permite reescrever a equação (5.18) na forma de um sistema de equações de diferenças de primeira ordem:

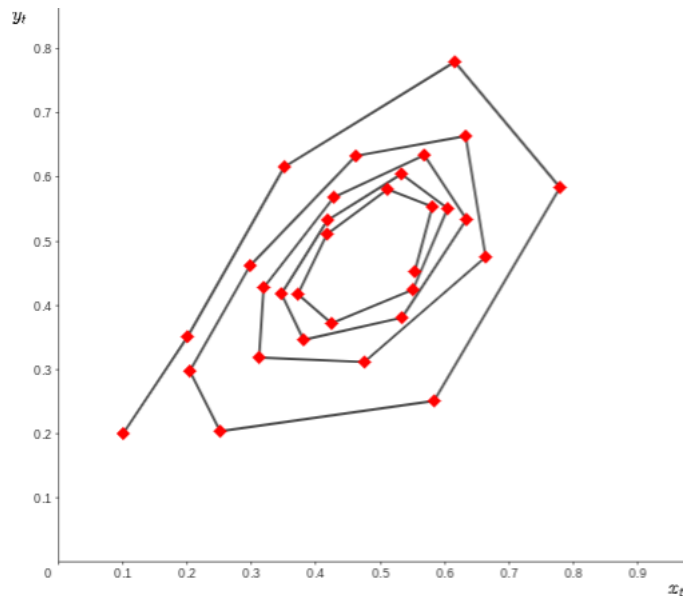
$$\begin{cases} x_{t+1} = u_t = y_t \\ y_{t+1} = u_{t+1} = a \cdot u_t \cdot (1 - u_{t-1}) = a \cdot y_t \cdot (1 - x_t) \end{cases} \quad (5.21)$$

Começando com o ponto (x_0, y_0) , cada ponto (x_t, y_t) do plano tem como imagem o ponto (x_{t+1}, y_{t+1}) , através do sistema acima. Assim, as iterações obtidas produzem uma sequência de pontos (semiórbita positiva) no plano. Vejamos onde o sistema (5.21) tem um equilíbrio.

Fazer $y_{t+1} = y_t$ nos leva a $x_t = \frac{a-1}{a}$. Portanto, o equilíbrio é o ponto $(\frac{a-1}{a}, \frac{a-1}{a})$.

Oscilações amortecidas começam quando $r = \frac{1}{4}$, ou seja, quando $a = 1 + r = 1,25$. Na Figura 47, exibimos a órbita que se obtém para $a = 1,95$. Nesse caso, o ponto de equilíbrio é $(\frac{95}{195}, \frac{95}{195})$. As oscilações amortecidas aproximam-se do equilíbrio. Aqui, estamos considerando $x_0 = 0,1$ e $y_0 = 0,2$.

Figura 47 – Um foco estável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 27. Consideremos a equação de diferenças logística com retardo $T = 1$, $K = 2$ e $r = 0,5$. Sabemos, do Exemplo 26, que $K = 2$ é um equilíbrio assintoticamente estável, e que N_t se aproxima de 2 por oscilações amortecidas. As equações (5.16) e (5.17) ficam:

$$u_t = \frac{N_t}{6} \tag{5.22}$$

e

$$a = 1,5. \tag{5.23}$$

A equação de diferenças de segunda ordem que obtemos é

$$u_{t+1} = 1,5u_t(1 - u_{t-1}). \tag{5.24}$$

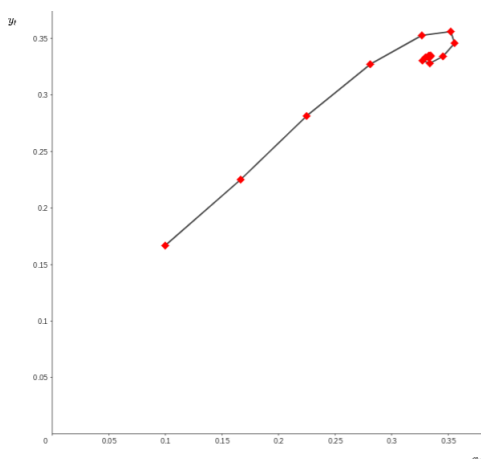
Fazendo $x_t = u_{t-1}$ e $y_t = u_t$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x_{t+1} = u_t = y_t \\ y_{t+1} = u_{t+1} = a \cdot u_t \cdot (1 - u_{t-1}) = 1,5 \cdot y_t \cdot (1 - x_t), \end{cases} \quad (5.25)$$

o qual gera uma sequência de pontos no plano, e tem como equilíbrio o ponto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. As oscilações amortecidas aproximam-se deste equilíbrio. De fato, se $y_t \rightarrow \frac{1}{3}$, de (5.22) vemos que $N_t \rightarrow 2$.

Na figura a seguir, exibimos parte da órbita para $a = 1,5$. Estamos considerando $x_0 = \frac{1}{10}$ e $y_0 = \frac{1}{6}$.

Figura 48 – Um foco estável.



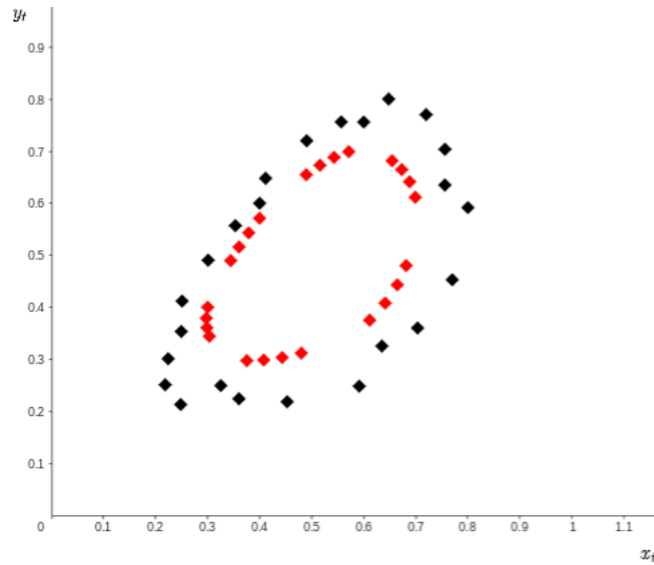
Fonte: Elaborada pelo autor.

Se $T = 1$ e $a = 1 + r$, a equação de diferenças logística com retardo tem por equação característica $\lambda(1 - \lambda) = a - 1$, cujas raízes são dadas por

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5 - 4a}}{2}. \quad (5.26)$$

Se $1 < a < 2$ (o que significa $0 < r < 1$), temos $|\lambda| < 1$. Em $a = 2$ (o que significa $r = 1$), as raízes passam pelo círculo unitário do plano complexo, e a estabilidade do equilíbrio não trivial é perdida. Para $a > 2$ (o que significa $r > 1$), o equilíbrio não trivial é repulsivo. Entretanto, quando consideramos valores de $a > 2$ pequenos o suficiente e distâncias grandes o suficiente do equilíbrio, temos uma pequena atração em círculo no plano (x_t, y_t) . Esse círculo fica maior à medida que aumentamos a . Na Figura 49, exibimos os círculos que se obtém para $a = 2,04$

Figura 49 – Dois círculos invariantes

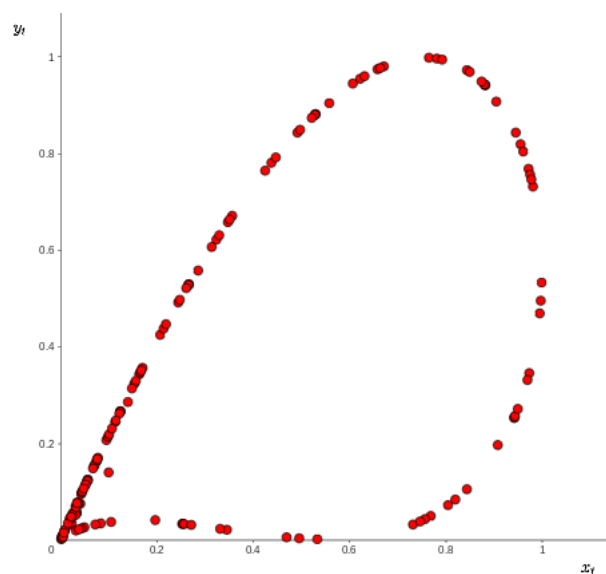


Fonte: Elaborada pelo autor.

(pontos em vermelho) e para $a = 2,1$ (pontos em preto). Para valores de a maiores que 2,271, aproximadamente, esses círculos atratores não mais ocorrem.

Quando $a = 2,27$, as soluções ficam dispostas da forma mostrada na Figura 50. Aqui, estamos considerando $x_0 = \frac{1}{10}$ e $y_0 = \frac{127}{908}$, e plotamos as soluções correspondentes às 149 primeiras iterações. Aparentemente, parece haver um círculo atrator, mas a dinâmica aqui é muito mais complicada.

Figura 50 – Um atrator estranho



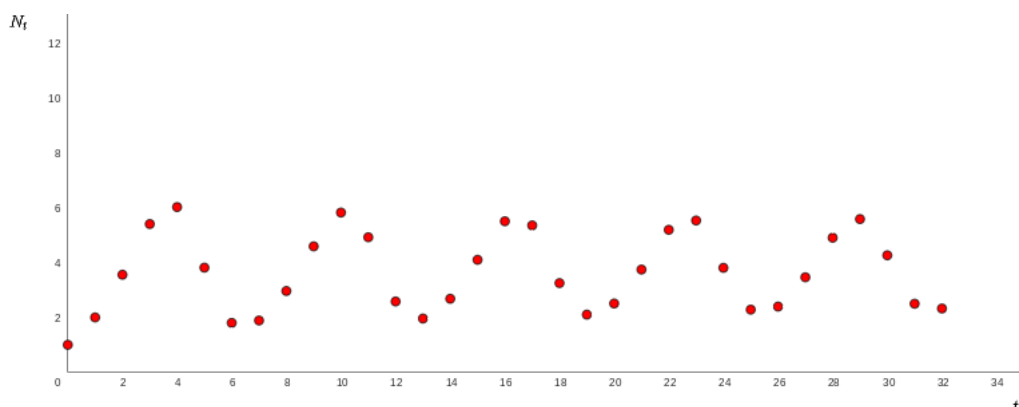
Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 28. A figura a seguir mostra algumas soluções da equação de diferenças logística com retardo $T = 1$, $a = 2,04$ e $K = 4$, isto é:

$$N_{t+1} = 2,04N_t - 0,26N_t \cdot N_{t-1}. \quad (5.27)$$

Estamos considerando $N_0 = 1$ e $N_1 = 2$. A capacidade de suporte é instável, mas as soluções têm um comportamento oscilatório.

Figura 51 – Plotando algumas soluções da equação (5.27)

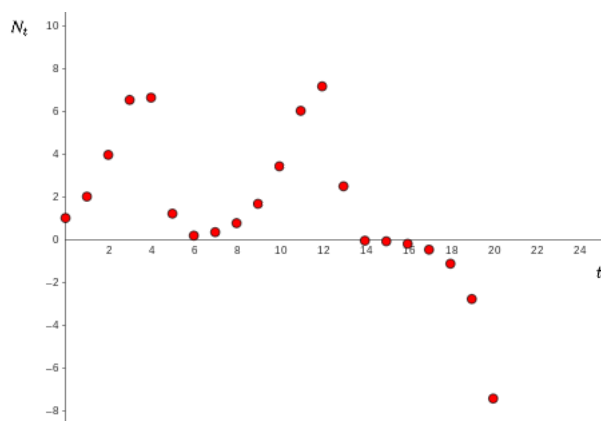


Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 29. A figura a seguir mostra algumas soluções da equação de diferenças logística com retardo $T = 1$, $a = 2,3$ e $K = 4$, isto é:

$$N_{t+1} = 2,3N_t - 0,325N_t \cdot N_{t-1}. \quad (5.28)$$

Figura 52 – Plotando algumas soluções da equação (5.28)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Estamos considerando $N_0 = 1$ e $N_1 = 2$. A capacidade de suporte é instável e, a partir de $t = 14$, as soluções se tornam negativas, com $N_t \rightarrow -\infty$.

UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Neste capítulo, descreveremos algumas atividades propostas para alunos do ensino médio, no sentido de modelar o crescimento de algumas populações utilizando modelos discutidos neste trabalho. Os alunos deverão utilizar o GeoGebra como ferramenta de apoio na construção dos ajustes e dos gráficos.

6.1 Introdução

Foram realizadas aulas com uma turma do 2º ano do Ensino Médio. Para a realização das atividades, foi necessário revisar os principais tipos de funções estudadas em um curso de ensino médio, especialmente em relação aos gráficos destas funções.

O objetivo desta aplicação é levar os alunos a entender como diferentes funções matemáticas podem aparecer em modelagens envolvendo problemas de crescimento populacional. Em particular, ver como as funções constantes, afim, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e racionais, presentes no currículo do ensino fundamental e médio, aparecem neste contexto de crescimento populacional.

A pretensão é que esse material possa ser utilizado em aulas interdisciplinares, por exemplo, envolvendo biologia e matemática, além de recursos computacionais. Sugiro que o professor interessado em trabalhar esta atividade a realize dosadamente, em um conjunto de encontros em quantidade suficiente para que os alunos compreendam todos os procedimentos realizados. O processo de linearização dos modelos envolve a ideia de logaritmo; portanto, caso os alunos ainda não tenham aprendido este assunto, será necessário dedicar uma ou duas aulas para trabalhar este tópico. Além disso, no ajuste do modelo logístico, aparecem os seguintes conceitos: ponto fixo, sequências, subsequências e sequências monótonas. Esses assuntos devem ser trabalhados previamente com os alunos. É recomendável que as aulas sejam realizadas no laboratório de informática, e que os alunos trabalhem em duplas ou em grupos.

Com a ajuda do software Geogebra, espera-se que os alunos sejam capazes de compreender os dados de crescimento da população brasileira. Para isso, faremos uso de ajuste de curvas.

Um ajuste de curva consiste em determinar uma função que se ajuste bem a um conjunto de dados conhecidos sobre um determinado fenômeno. Podemos utilizar o modelo de ajuste para fazer previsões de valores futuros e investigar comportamentos do fenômeno em estudo. O leitor pode obter mais informações sobre ajustes de curvas no texto de (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014). O objetivo desta aula é utilizar um recurso computacional (precisamente o software Geogebra) para ajustar algumas curvas aos dados reais de crescimento da população brasileira no período 1940 - 2022, obtidos pelo site do IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, e apresentados na tabela abaixo. Ao final, são propostas algumas atividades para os alunos aplicarem os conteúdos do texto.

Tabela 3 – Crescimento da população brasileira no período 1940 - 2022

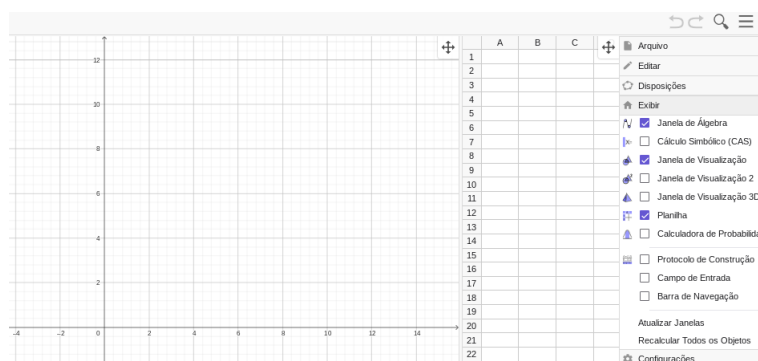
Década	População (em milhões de habitantes)
1940	41
1950	52
1960	71
1970	95
1980	121
1991	147
2000	170
2010	191
2022	203

Fonte: IBGE (2024).

6.2 Ajuste de Curvas Utilizando o Geogebra

O uso do software Geogebra no ensino de Matemática permite conciliar o estudo teórico com o uso de diversos recursos computacionais. Desse modo, pensando especificamente na modelagem matemática, os alunos podem analisar e interpretar dados reais, construindo de forma dinâmica planilhas e gráficos e interpretando os resultados. Utilizaremos a versão online do aplicativo Geogebra (Geogebra Classic), que pode ser acessada diretamente pelo link: <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT>. Uma das ferramentas que exploraremos é a *Regressão*, e o tipo de regressão que faremos dependerá do modelo que iremos ajustar. O Geogebra possui a ferramenta *Planilha*, onde os alunos irão inserir os dados. Para exibir a planilha, deve-se clicar em *menu*, que são as três barras horizontais no canto superior direito, em seguida em *Exibir*, e então marcar a caixa *Planilha*.

Figura 53 – A planilha do Geogebra



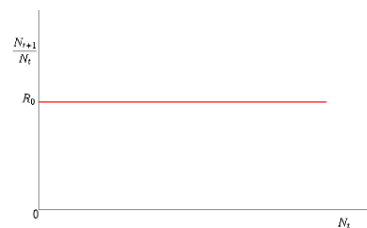
Fonte: Elaborada pelo autor.

Os dados podem ser digitados nas duas primeiras colunas da planilha (colunas A e B).

6.3 Estudo do Modelo Exponencial

Seja $N(t)$ o tamanho de uma população no instante t . Assim, $N(t+1)$ é o tamanho dessa população no instante posterior. A razão $\frac{N(t+1)}{N(t)}$ é chamada de *taxa de crescimento per capita*, e determina quanto cada indivíduo contribui para o crescimento da população. No modelo exponencial, a taxa per capita de crescimento permanece constante com o aumento da população, ou seja, temos $\frac{N(t+1)}{N(t)} = R_0$. Assim, o gráfico da taxa de crescimento per capita em função da população é dado por uma reta horizontal.

Figura 54 – Taxa de crescimento per capita constante



Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante comentar com os alunos que nesse modelo, não sendo a taxa per capita dependente do tamanho da população, temos uma situação em que não se leva em conta os diversos fatores que limitam o crescimento dessa população. Tal modelo de crescimento é adequado apenas nos estágios iniciais de desenvolvimento da população.

Para a obtenção do modelo exponencial, a partir da expressão da taxa de crescimento per capita, temos que $N(t+1) = R_0 N(t)$. Se chamarmos a população inicial de N_0 , temos:

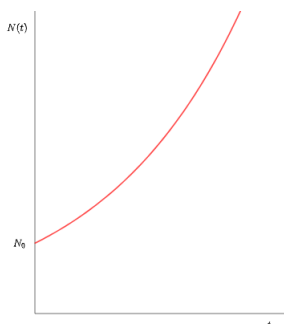
$$\begin{aligned} N(1) &= R_0 N_0 \\ N(2) &= R_0 N(1) = R_0^2 N_0 \\ N(3) &= R_0 N(2) = R_0^3 N_0 \\ &\vdots \\ N(t) &= N_0 R_0^t \end{aligned}$$

Podemos ver então que a população cresce de forma exponencial. Se fizermos $R_0 = e^k$, podemos reescrever a última equação como $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$. Portanto, o objetivo é ajustar uma curva do tipo

$$N(t) = N_0 e^{kt} \tag{6.1}$$

aos dados da Tabela 3, onde t é o número de décadas decorridas após o ano de 1940, $N(t)$ é a população correspondente, em milhões de habitantes, N_0 é a população inicial e k é a taxa intrínseca de crescimento. Para $k > 0$, a curva (6.1) é exponencial crescente. É importante que os alunos reconheçam o modelo (6.1) como uma função exponencial.

Figura 55 – Curva do crescimento exponencial



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para determinar as constantes N_0 e k , vamos linearizar o modelo (6.1). Para isso, aplicamos o logaritmo neperiano a ambos os membros da equação, obtendo:

$$\ln N(t) = \ln (N_0 e^{kt})$$

$$\ln N(t) = \ln N_0 + \ln e^{kt}$$

$$\ln N(t) = kt + \ln N_0$$

Se fizermos a substituição $Y = \ln N(t)$, então vem

$$Y = kt + \ln N_0 \tag{6.2}$$

Agora devemos calcular Y correspondente a cada $N(t)$, para então ajustar uma função polinomial do 1º grau ao conjunto de pontos (t, Y) . Construímos a seguinte tabela na planilha do Geogebra.

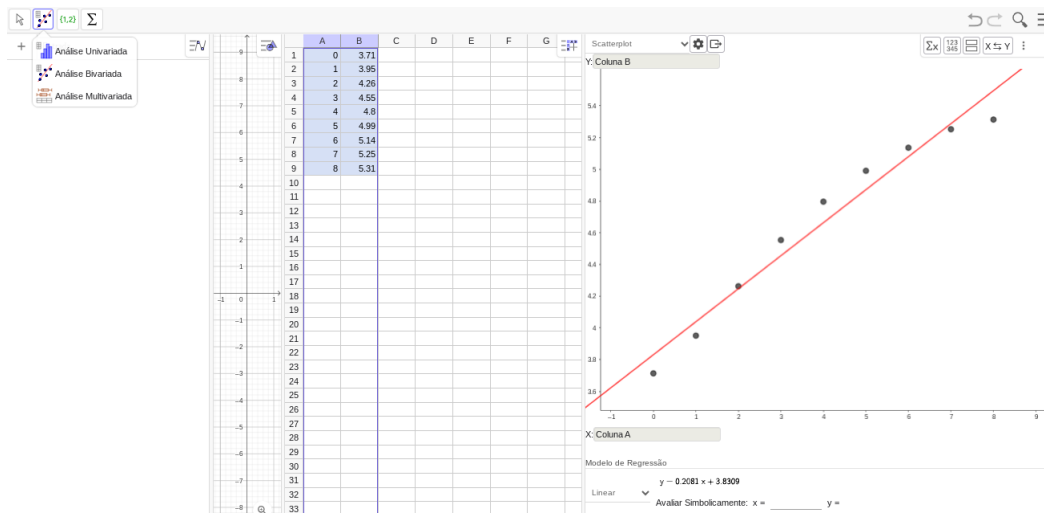
Em seguida, selecionamos todos os dados e clicamos em *Análise Bivariada*. Escolhemos a regressão linear. O Geogebra fornece a função $y = 0,2081x + 3,8309$ (Figura 56), donde tiramos que $k = 0,2081$ e $\ln N_0 = 3,8309 \iff N_0 = e^{3,8309} = 46,1$. Disto segue que o modelo exponencial que se ajusta aos dados é $N(t) = 46,1 \cdot e^{0,2081t}$. A Figura 57 exhibe essa curva, juntamente com os pontos $(t, N(t))$.

Tabela 4 – Conjunto de pontos (t, Y)

t	Y
0	$\ln(41) = 3,71$
1	$\ln(52) = 3,95$
2	$\ln(71) = 4,26$
3	$\ln(95) = 4,55$
4	$\ln(121) = 4,8$
5	$\ln(147) = 4,99$
6	$\ln(170) = 5,14$
7	$\ln(191) = 5,25$
8	$\ln(203) = 5,31$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 56 – Ajuste linear dos dados (t, Y)



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.4 Estudo do Modelo Logístico

Vamos construir um modelo de crescimento logístico que se ajuste aos valores reais da população brasileira, descritos na Tabela 3.

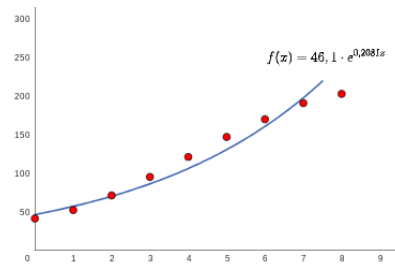
Seja $N(t)$ o número de indivíduos da população brasileira (em milhões de habitantes) e t o número de décadas decorridas desde 1940. A equação diferencial logística é

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) = -\frac{r}{K}N^2 + rN, \quad (6.3)$$

cuja solução é dada por

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-rt}}. \quad (6.4)$$

Figura 57 – Ajuste exponencial para os dados da tabela 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, o ajuste de curva que faremos para os dados tem como expressão:

$$y = \frac{K}{1 + be^{at}}, \quad (6.5)$$

onde $b > 0$, $a < 0$ e K é a capacidade de suporte. O valor de K é calculado usando-se os próprios dados em estudo.

Começamos fazendo a linearização do modelo (6.5).

$$\begin{aligned} K &= y + be^{at}y \\ K - y &= ybe^{at} \\ \frac{K - y}{y} &= be^{at} \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo neperiano a ambos os membros, obtemos:

$$\ln\left(\frac{K - y}{y}\right) = at + \ln b$$

Fazendo a substituição $Y = \ln\left(\frac{K - y}{y}\right)$, vem:

$$Y = at + \ln b \quad (6.6)$$

A determinação do parâmetro K é feita através do chamado **método de Ford-Walford**. Esse método baseia-se no seguinte fato: dada uma sequência de dados (t_i, y_i) que tem as características da equação (6.5), então $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = K$. Se a sequência y_i é monótona, há um índice n a partir do qual dois termos consecutivos y_n e y_{n+1} estão muito próximos. Sendo a sequência y_i monótona não decrescente, como essa sequência é limitada superiormente por K , qualquer subsequência de y_i terá o mesmo limite K . Assim, podemos afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = K.$$

Seja, agora, uma função l que ajusta os pares (y_i, y_{i+1}) . Portanto, $l(y_i) = y_{i+1}$. Temos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} l(y_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{i+1} = K.$$

Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, l(y_n)) = (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}) = (K, K),$$

de modo que $l(K) = K$. Portanto, K é o ponto fixo da função de ajuste dos dados (y_i, y_{i+1}) .

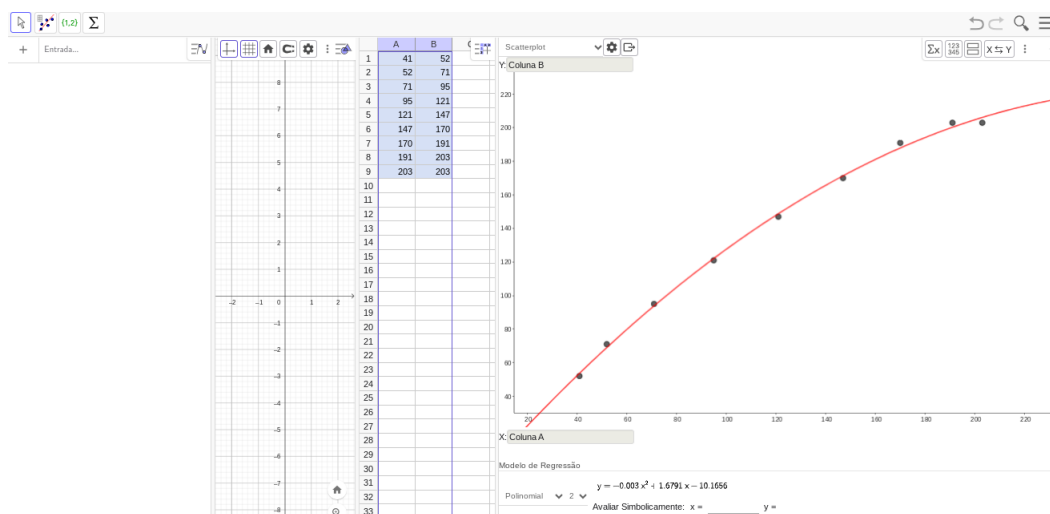
Assim, a fim de obter o valor do parâmetro K do modelo (6.4), vamos construir uma tabela de dados (y_i, y_{i+1}) e utilizar o Geogebra para fazer o ajuste desses dados por meio de uma função quadrática, dada a natureza de (6.3).

Tabela 5 – Tabela de dados (y_i, y_{i+1})

y_i	y_{i+1}
41	52
52	71
71	95
95	121
121	147
147	170
170	191
191	203
203	203

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em seguida, selecionamos todos os dados (colunas A e B) e clicamos em *Análise Bivariada*. Como modelo de regressão, escolhemos o modelo polinomial, grau 2. O Geogebra fornece a função $l(x) = -0,003x^2 + 1,6791x - 10,1656$ (Figura 58).

Figura 58 – Ajuste quadrático dos pontos (y_i, y_{i+1}) 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para determinar os pontos fixos de l , reconstruímos o gráfico de l , juntamente com a reta $y = x$, e usamos a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* para encontrar os pontos $A(16, 12; 16, 12)$ e $B(210, 25; 210, 25)$. Tomamos $K = 210, 25$. Uma vez determinado o valor de K , podemos retomar a substituição $Y = \ln\left(\frac{K-y}{y}\right)$ para calcular Y correspondente a cada y e então ajustar uma função polinomial do 1º grau ao conjunto de pontos (t, Y) . Depois de calcular todos os valores Y , construímos a tabela seguinte na planilha do Geogebra:

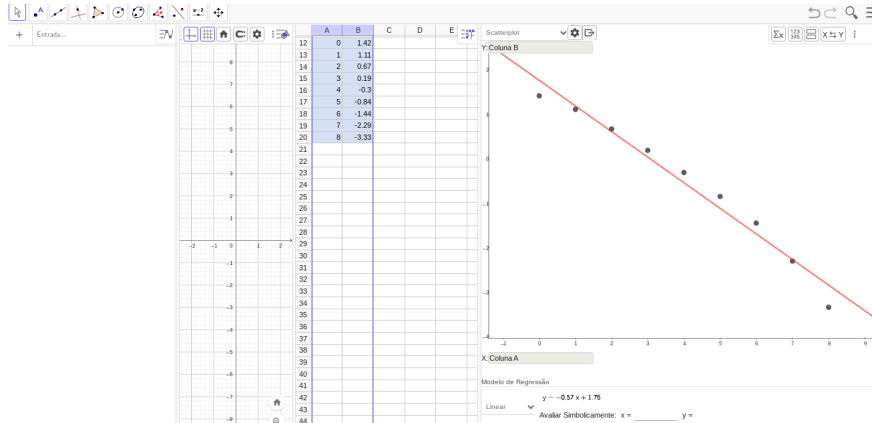
Tabela 6 – Tabela de dados (t_i, Y_i)

t_i	$Y_i = \ln\left(\frac{K-y_i}{y_i}\right)$
0	1,417804845
1	1,112932342
2	0,673591001
3	0,19322679
4	-0,304349124
5	-0,843337459
6	-1,440688433
7	-2,294762367
8	-3,33220451

Fonte: Elaborada pelo autor.

O Geogebra fornece a função de ajuste $y = -0,57x + 1,76$ (figura a seguir). Portanto, $a = -0,57$ e $\ln b = 1,76 \Leftrightarrow b = 5,81$.

Figura 59 – Ajuste linear dos dados (t, Y)



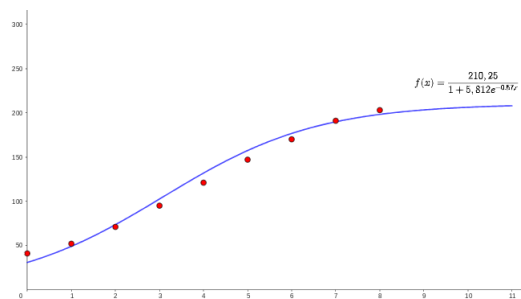
Fonte: Elaborada pelo autor.

Disso, segue que um modelo logístico de ajuste aos dados da Tabela 1 é

$$y = \frac{210,25}{1 + 5,81e^{-0,57t}}. \quad (6.7)$$

A figura a seguir exibe a curva de ajuste, juntamente com os pontos $(t, N(t))$.

Figura 60 – Ajuste logístico para os dados da tabela 10



Fonte: Elaborada pelo autor.

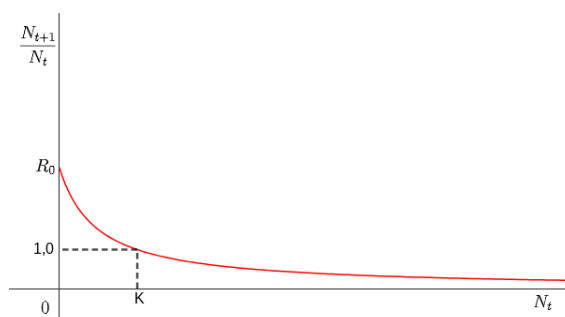
6.5 Estudo do Modelo de Beverton-Holt

O modelo de crescimento de Beverton-Holt, de forma semelhante ao modelo logístico, considera que uma população não pode crescer de forma ilimitada. Nesse modelo, a taxa de crescimento per capita diminui com o aumento da população (Figura 61), segundo uma função racional:

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{R_0}{1 + \left[\frac{R_0 - 1}{K} \right] N(t)}. \quad (6.8)$$

Aqui, K é a capacidade de suporte do ambiente e R_0 é a taxa de crescimento.

Figura 61 – Taxa de crescimento per capita

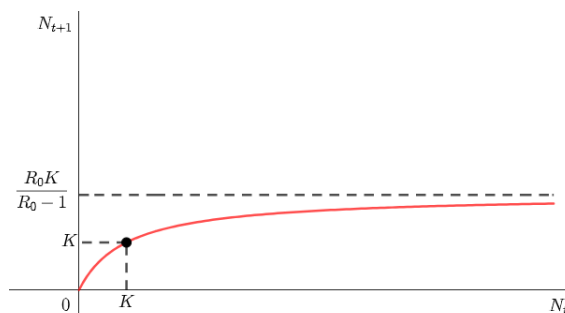


Fonte: Elaborada pelo autor.

Vemos, de (6.8), que o tamanho da população no instante $t + 1$ depende do tamanho da população no instante t segundo uma função racional (Figura 62):

$$N(t+1) = \frac{R_0 N(t)}{1 + \left[\frac{R_0 - 1}{K} \right] N(t)}. \quad (6.9)$$

Figura 62 – Recrutamento



Fonte: Elaborada pelo autor.

A curva de Beverton-Holt que mede o tamanho $N(t)$ da população no instante t é do tipo

$$N(t) = \frac{K \cdot a^t}{bK + a^t} \quad (6.10)$$

onde K é a capacidade de suporte do ambiente, $a > 0$ e $b > 0$ são constantes a determinar, $N(t)$ é o tamanho da população t décadas após o ano de 1940.

Para determinar os valores das constantes a e b , vamos linearizar o modelo (6.10). Começamos reescrevendo-o como:

$$\begin{aligned} Ka^t &= byK + ya^t \\ Ka^t - ya^t &= byK \\ a^t(K - y) &= byK \\ \frac{K - y}{Ky} &= \frac{b}{a^t} \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo neperiano a ambos os membros da última igualdade, obtemos:

$$\ln \left(\frac{K - y}{Ky} \right) = \ln b - (\ln a) t \quad (6.11)$$

Fazendo a substituição:

$$Y = \ln \left(\frac{K - y}{Ky} \right), \quad (6.12)$$

obtemos:

$$Y = -\ln a \cdot t + \ln b. \quad (6.13)$$

Precisamos determinar o valor da capacidade de suporte K . Para o ajuste de Beverton-Holt, isso é feito ajustando uma função da forma

$$f(x) = \frac{ax}{1 + bx} \quad (6.14)$$

aos pares de pontos (N_i, N_{i+1}) , pois é dessa forma a função (6.9). O valor de K será tomado como sendo um ponto fixo de f .

Construímos, então, a Tabela de pontos (N_i, N_{i+1}) na planilha do Geogebra. Como queremos ajustar uma função racional aos pares de pontos (N_i, N_{i+1}) , vamos proceder do seguinte modo: selecionamos todos os dados (colunas A e B), clicamos com o botão direito do mouse, selecionamos a opção *Criar* e em seguida selecionamos *Lista de pontos*. O Geogebra cria a lista com todos os pontos da Tabela (N_i, N_{i+1}) e nomeia automaticamente essa lista como $l1$. Em seguida, no campo *Entrada*, digitamos a função (6.14) e teclamos *Enter*. Para ajustar os

pontos da lista $l1$ à uma função da forma de (6.14), em um novo campo de entrada, digitamos: Regressão($l1$, f). O Geogebra fornece o ajuste $y = \frac{1,57x}{1 + 0,0025x}$. Assim,

$$f(x) = \frac{1,57x}{1 + 0,0025x} \quad (6.15)$$

será tomada como função de ajuste dos pares (N_i, N_{i+1}) . Para encontrar os pontos fixos de f , construímos na mesma tela o gráfico de f e a reta $y = x$, e usando a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* encontramos o ponto $A(228, 228)$. Tomamos então $K = 228$.

Encontrado o valor de K , usamos a substituição (6.12) para calcular Y correspondente a cada y e então ajustar uma função polinomial do 1º grau ao conjunto de pontos (t, Y) . Construímos a Tabela 7 na planilha do Geogebra.

Tabela 7 – Tabela de dados (t_i, Y_i)

t_i	$Y_i = \ln\left(\frac{K - y_i}{Ky_i}\right)$
0	-3,911809079
1	-4,210105352
2	-4,635779701
3	-5,092873392
4	-5,55230734
5	-6,025329061
6	-6,504701055
7	-7,070701144
8	-7,523675783

Fonte: Elaborada pelo autor.

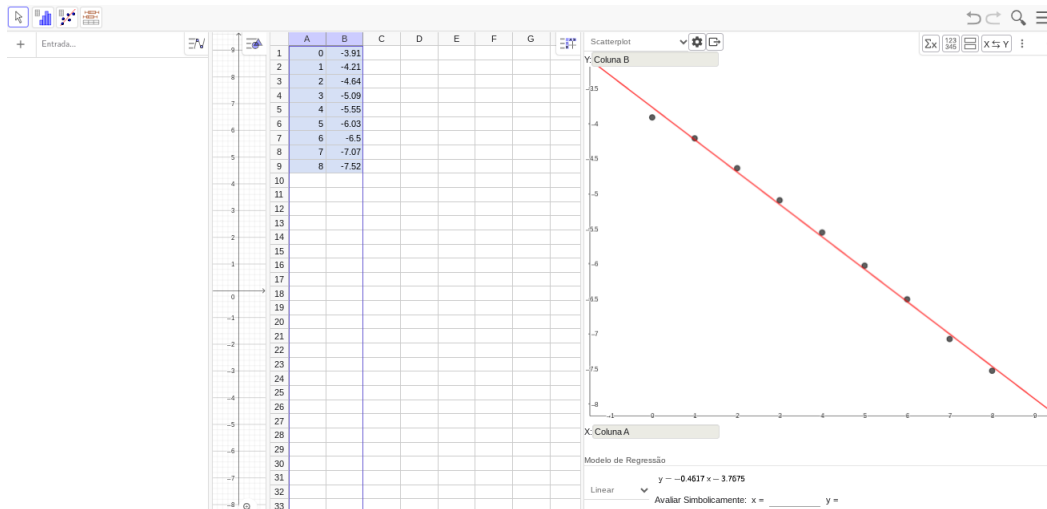
O Geogebra fornece a função de ajuste $y = -0,46x - 3,77$. Portanto, $\ln a = 0,46 \Leftrightarrow a = 1,58$ e $\ln b = -3,77 \Leftrightarrow b = 0,023$.

Temos que o modelo de ajuste de Beverton-Holt para os dados de crescimento da população brasileira no período 1940-2022 é dado por

$$N(t) = \frac{228 \cdot 1,58^t}{5,244 + 1,58^t} \quad (6.16)$$

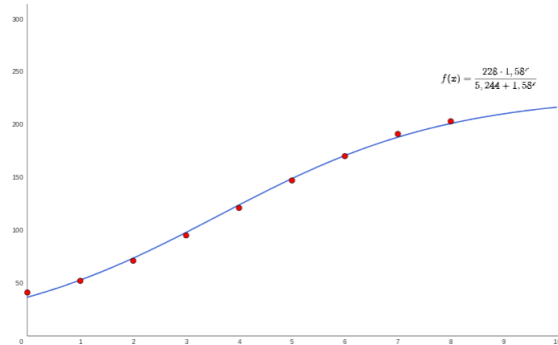
A figura a seguir exibe a curva de ajuste, juntamente com os pontos $(t, N(t))$.

Figura 63 – Ajuste linear dos dados (t, Y)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 64 – Ajuste de Beverton-Holt para os dados da tabela 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalizamos com algumas atividades cujo objetivo é levar os alunos a praticar os procedimentos mostrados ao longo deste capítulo.

Exercícios Propostos

1. Calcule os pontos fixos da função $l(x) = x^3 - 15x$. Utilizando o Geogebra, esboce na mesma tela o gráfico de l juntamente com o da reta identidade $y = x$ e verifique seus resultados.

2. A tabela abaixo apresenta dados reais de crescimento da cidade de Capitólio, MG, no período 1980-2022, obtidos no site do IBGE.

Seja $P(t)$ a população de Capitólio, t décadas após 1980. Ajuste uma curva do tipo

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt}, \quad (6.17)$$

em que $P_0 > 0$ é a população inicial e $k > 0$ é a taxa de crescimento intrínseca, aos dados da Tabela 8. Em seguida, use o modelo para estimar a população de Capitólio em 2030.

Tabela 8 – Crescimento da população de Capitólio, MG, no período 1980 - 2022

Ano	População
1980	5222
1991	6823
2000	7737
2010	8133
2022	10380

Fonte: [IBGE \(2024\)](#).

3. A tabela abaixo apresenta dados reais de crescimento da cidade de Passos, MG, no período 1970 - 2022, obtidos no site do IBGE.

Tabela 9 – Crescimento da população de Passos, MG, no período 1970 - 2022

Década	População
1970	54 879
1980	69 046
1991	84 622
2000	97 211
2010	106 290
2022	111 939

Fonte: [IBGE \(2024\)](#).

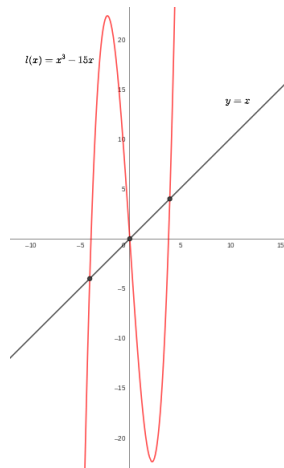
a) Ajuste uma curva do tipo (6.5) aos dados da Tabela 9, utilizando os passos descritos no texto. Considere que $N(t)$ é o tamanho da população t décadas após o ano de 1970. Faça um esboço da curva de ajuste, juntamente com o conjunto de pontos $(t, N(t))$. Segundo esse modelo, qual é o limite K da população? Use esse modelo para estimar a população de Passos em 2030.

b) Ajuste uma curva do tipo (6.10) aos dados da Tabela 9, utilizando os passos descritos no texto. Considere que $N(t)$ é o tamanho da população t décadas após o ano de 1970. Faça um esboço da curva de ajuste, juntamente com o conjunto de pontos $(t, N(t))$. Segundo esse modelo, qual é o limite K da população? Use esse modelo para estimar a população de Passos em 2030.

Respostas

1. $x = -4$, $x = 0$ e $x = 4$.

Figura 65 – Gráfico da função $l(x) = x^3 - 15x$ e os pontos fixos da mesma



Fonte: Elaborada pelo autor.

2. $P(t) = 5479,67 \cdot e^{0,155t}$. População estimada para 2030: $11\ 894,13 \approx 12\ 000$ habitantes.

3. a) $P(t) = \frac{113\ 315,65}{1 + 1,495e^{-0,853t}}$. População estimada para 2030: $112\ 310,24 \approx 112\ 000$ habitantes.

b) $P(t) = \frac{1,846^t \cdot 118\ 020,43}{1,263 + 1,846^t}$. População estimada para 2030: $114\ 370,15 \approx 114\ 000$ habitantes.

REFERÊNCIAS

BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. da M. **Modelagem Matemática**. 1.ed. Uberlândia, Minas Gerais: Universidade Federal de Uberlândia, 2014. Citado na página 98.

ELAYDI, S. **An Introduction to Difference Equation**. 3. ed. San Antonio, Texas: Springer, 2005. Citado nas páginas 9, 11 e 37.

IBGE. **Panorama do Censo 2022**. 2024. Disponível em: <<https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/>>. Acesso em: 14/08/2024. Citado nas páginas 98 e 111.

KOT, M. **Elements of Mathematical Ecology**. 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2001. Citado nas páginas 9, 11 e 45.

SILVA, L. H. da. **Equações diferenciais ordinárias e suas aplicações**. Monografia (Pós graduação) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020. Citado na página 23.

