

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

## Probabilidade via urnas

**Márcio Luiz Gonçalves Junior**

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Márcio Luiz Gonçalves Junior**

## **Probabilidade via urnas**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. VERSÃO REVISADA.

Área de concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Rafael Andrés Rosales Mitrowsky

**Versão revisada**

**USP – São Carlos**

**Agosto de 2025**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

G643p      Gonçalves, Marcio Luiz  
            Probabilidade via urnas / Marcio Luiz Gonçalves;  
            orientador Rafael Andrés Rosales Mitrowsky. -- São  
            Carlos, 2025.  
            55 p.

            Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
            em Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
            Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de  
            Computação, Universidade de São Paulo, 2025.

            1. probabilidade. 2. probabilidade condicional.  
            3. urna de Pólya. 4. abordagem computacional. 5. Lei  
            Forte. I. Mitrowsky, Rafael Andrés Rosales, orient.  
            II. Título.

**Márcio Luiz Gonçalves Junior**

**Probability via urns**

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo - ICMC/USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master in Science - Professional Master in Mathematics in National Network. FINAL VERSION.

Concentration area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Rafael Andrés Rosales Mitrowsky

**Final version**

**USP – São Carlos**  
**August 2025**



## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus, que me concedeu essa oportunidade e sempre esteve comigo independente da dificuldade do momento. Sua companhia foi indispensável durante todo essa trajetória.

À minha namorada, Letícia Felício Fernandes, por todas as vezes me levou de moto para a faculdade e que durante o processo veio a se tornar minha noiva e é pessoa com quem amo compartilhar minha vida. Obrigado por todo o afeto e incentivo que me proporcionou nos momentos mais difíceis e que eu pensei em desistir.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Rafael Andres Rosales Mitrowsky, cuja orientação teve papel fundamental para a conclusão deste trabalho. Suas valiosas contribuições intelectuais, e seu apoio contínuo durante todo esse processo, foram essenciais para que esta pesquisa fosse realizada e concluída com sucesso.

Aos meus pais, Márcio Luiz Gonçalves e Adriana Marcia Simsic Gonçalves, que foram responsáveis por toda a minha formação pessoal e me proporcionaram carinho e compaixão para seguir em frente, apenas com isso tive essa possibilidade. E também à minha sogra Rosângela Miotto Felício pela estadia, incentivo e pela ótima comida que preparava para eu levar para a faculdade.

Por fim, quero externar meus agradecimentos a todos meus amigos que me proporcionaram momentos de lazer em diversas situações difíceis. Em especial, meu amigo Lucca dos Santos Santana pelos momentos de descontração e apoio concedidos. Além de todos os professores e amigos do curso PROFMAT por ajudarem no meu crescimento acadêmico.



## RESUMO

GONÇALVES, M. L. **Probabilidade via urnas**. 2025. 55 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, USP – São Carlos, Agosto de 2025.

Esta dissertação aborda o ensino de probabilidade no ensino médio utilizando o mecanismo definido por uma urna. Esta escolha permite desenvolver a intuição do conceito de probabilidade. Além de permitir uma abordagem ao nível de ensino médio, as urnas são uma ferramenta excelente para desenvolver os conceitos de probabilidade condicional e independência de eventos. Nesta dissertação, propomos diversas atividades a serem realizadas em sala de aula com estes objetivos. Dentre as atividades, incluímos a análise dos resultados obtidos mediante uma urna física e aqueles obtidos mediante simulações computacionais. Esta dissertação também considera o estudo das propriedades limite da urna de Pólya. Este modelo é interessante pois fornece um exemplo de uma sequência de variáveis aleatórias dependentes cuja média aritmética converge quase certamente a uma variável aleatória com distribuição absolutamente contínua a respeito da medida de Lebesgue.

**Palavras-chave:** probabilidade; probabilidade condicional; urna de Pólya; abordagem computacional; Lei Forte.



## ABSTRACT

GONÇALVES, M. L. **Probability via urns**. 2025. 55 p. Dissertation (Master in Science) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, USP – São Carlos, August 2025.

This dissertation focuses on teaching high school probability using urn models. Urns serve as a mechanism that allows to develop the concept of probability empirically. Urns are also an excellent tool for developing the concepts of conditional probability and independence of events. In this dissertation, we propose several activities that can be carried out in the classroom with these objectives. Among the activities, we include the analysis of the results obtained through a physical urn and those obtained via computer simulations. This dissertation also considers the study of the limiting properties of the model known as Pólya's urn. This model is interesting because it provides an example of a sequence of dependent random variables whose arithmetic mean converges almost surely to a random variable that has an absolutely continuous distribution with respect to Lebesgue measure.

**Keywords:** probability; conditional probability; Pólya urn; computational approach; Strong Law.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>1.1</b>	<b>Motivação</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização da dissertação</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Probabilidade como frequência relativa</b>	<b>19</b>
2.1.1	Atividades em sala	19
2.1.2	Probabilidade	23
<b>2.2</b>	<b>Probabilidade condicional</b>	<b>24</b>
<b>2.3</b>	<b>Independência de eventos</b>	<b>30</b>
<b>2.4</b>	<b>Abordagem computacional</b>	<b>31</b>
2.4.1	Estudo computacional da convergência na urna de Pólya	33
<b>3</b>	<b>CONVERGÊNCIA DA URNA DE PÓLYA</b>	<b>37</b>
<b>3.1</b>	<b>Intercambiabilidade</b>	<b>37</b>
<b>3.2</b>	<b>Intercambiabilidade da urna Pólya</b>	<b>38</b>
<b>3.3</b>	<b>O Teorema de representação de De Finetti</b>	<b>39</b>
<b>3.4</b>	<b>O Teorema de Pólya-Eggenberger</b>	<b>41</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>45</b>
	<b>APÊNDICE A – A</b>	<b>47</b>
<b>A.1</b>	<b>O Teorema de seleção de Helly</b>	<b>47</b>
<b>A.2</b>	<b>Aproximação assintótica de <math>(x)_r</math></b>	<b>48</b>
<b>A.3</b>	<b>Martingais</b>	<b>49</b>
<b>A.4</b>	<b>Convergência de variáveis aleatórias</b>	<b>49</b>
	<b>APÊNDICE B – B</b>	<b>51</b>
<b>B.1</b>	<b>Código para simular a probabilidade condicional</b>	<b>51</b>
<b>B.2</b>	<b>Código para simular a urna de Pólya</b>	<b>52</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>55</b>



# 1 INTRODUÇÃO

O processo de ensino-aprendizagem sofreu várias mudanças com o passar do tempo, em particular o ensino da matemática. Isso ocorre não somente pelo avanço da tecnologia em geral e pela disponibilidade de vários softwares, aplicativos educacionais e da internet, mas também pela variedade discente, possuindo alunos com histórias de vida e culturas completamente diferentes. A nova geração, que nasceu e cresceu no meio desse avanço tecnológico, espera mais do que o ensino tradicional pode oferecer. Por isso, propomos um ambiente dinâmico e com propostas que gerem o interesse em aprender.

Essa mudança dos discentes traz um novo desafio: como adaptar nossas práticas para um ensino envolvente, com o dinamismo e metodologias ativas necessárias? O foco na habilidade matemática também está diferente. Mais do que apenas a memorização e repetição de processos, agora o foco está no desenvolvimento de habilidades essenciais para o século XXI, como a capacidade de resolver problemas, o pensamento crítico e o trabalho em equipe. Nesse meio, a tecnologia pode ser tratada como uma ferramenta educacional e uma forma de conectar os alunos com problemas reais, com contextos variados e vivenciados por eles no dia a dia.

Nesse contexto, a proposta educacional deste trabalho é direcionada a explorar as tecnologias disponíveis para o ensino dos conceitos de probabilidade, probabilidade condicional e independência de eventos com foco na prática e na utilização de ferramentas computacionais. O emprego de metodologias ativas, tais como a interação com uma urna física, traz uma abordagem lúdica e viável e não apenas teórica, proporcionando um aprofundamento dos conceitos.

Além da implementação da urna física, o avanço da tecnologia permite a utilização de programas computacionais para cálculos rápidos e em grande escala. Isto fomenta, assim, uma atividade lúdica e propícia para que os alunos testem suas ideias e suposições. Esses recursos proporcionam uma visualização clara e imediata dos resultados, facilitando a aprendizagem de novos conceitos de uma maneira mais intuitiva e acessível. Ademais, os recursos computacionais estão incluídos diretamente no cotidiano, gerando mais engajamento com a aula e ajudando a criar desafios para os alunos experimentarem novas abordagens de conceitos abstratos. Com a utilização dessas ferramentas e metodologias, a intenção é tornar a educação matemática uma experiência rica, onde os alunos não olhem somente para probabilidades, mas consigam aplicá-las em situações práticas e que os afetem significativamente em suas vidas.

Dessa forma, é possível preparar os jovens não somente para o desafio dos estudos básicos e superiores, mas para um mundo real, onde a capacidade de tomar decisões informadas com embasamento em probabilidade é uma habilidade relevante e essencial. Em resumo, pode-se dizer que este trabalho propõe uma nova estratégia de ensino, na qual a prática e a tecnologia andem de mãos dadas no processo educacional, tornando a função de aprendizado mais conectada à prática real do estudante e mais significativa, centrada no desenvolvimento das competências necessárias para o século XXI.

## 1.1 Motivação

A probabilidade não é um assunto abordado com frequência como matéria escolar, principalmente a probabilidade condicional, e, quando aparece no currículo, geralmente é tratada de maneira superficial. Isso se deve, em parte, à falta de prática dos docentes com o tema, além de a probabilidade muitas vezes desafiar a nossa intuição com diversos problemas e paradoxos.

O ensino da probabilidade pode ser desafiador, sobretudo pelas diferentes abordagens possíveis — desde maneiras intuitivas até abordagens formalmente rigorosas —, além de que lidar com incertezas é algo que, por si só, gera desconforto. Soma-se a isso o fato de que muitos professores não tiveram acesso, durante sua formação inicial, a um aprofundamento suficiente sobre esse conteúdo.

Uma das dificuldades recorrentes na formação docente é a ênfase reduzida dada à probabilidade durante a graduação. Os cursos superiores de licenciatura em Matemática, em sua maioria, privilegiam disciplinas consideradas mais tradicionais, como álgebra, aritmética, cálculo e geometria. Assim, a probabilidade acaba sendo apresentada de forma breve e pouco aprofundada. Esse tratamento, embora introdutório, não é suficiente para preparar os futuros profissionais da educação para trabalharem com conceitos mais complexos, como a probabilidade condicional e a independência de eventos. Tais conceitos, apesar de fundamentais, costumam ser tratados de maneira rápida, muitas vezes sem uma abordagem que considere as dificuldades reais dos discentes.

Outro ponto relevante é a escassez de programas de formação continuada que abordem, de maneira específica e prática, o ensino da probabilidade. Muitos professores em exercício não tiveram oportunidade de se aprofundar nesse campo durante sua formação inicial e, mesmo aqueles que tiveram, nem sempre se sentem preparados para aplicar esse conhecimento em sala de aula. A carência de iniciativas voltadas à atualização dos conhecimentos docentes e à adoção de novas práticas pedagógicas dificulta um ensino mais acessível, lúdico e envolvente para os alunos.

Por fim, a probabilidade é um campo que, se bem explorado, tem um enorme potencial para o desenvolvimento do pensamento crítico e das habilidades de tomada de decisão, especialmente em um mundo cada vez mais tecnológico, marcado por incertezas e complexidade. O ensino adequado da teoria da probabilidade em nível escolar é, portanto, de suma importância, pois oferece a base para o entendimento da estatística e de áreas emergentes, como a inteligência artificial e o aprendizado de máquina.

## 1.2 Organização da dissertação

O resto deste trabalho está organizado nos Capítulos 2 e 3. A seguir, apresentamos um breve resumo do conteúdo de cada um.

No Capítulo 2, é desenvolvido o conceito de probabilidade utilizando a abordagem frequentista. Esta abordagem possui um forte apelo à intuição, tornando a sua utilização particularmente efetiva em sala de aula. Isso não apenas facilita a compreensão teórica, mas também motiva a participação ativa dos alunos por meio de atividades interativas. A noção de probabilidade frequentista é apresentada em sala de aula utilizando uma urna. Esta última também é utilizada para mostrar de maneira empírica os conceitos de probabilidade condicional e de independência de eventos. Ao final de cada seção, apresentamos diversos exercícios, os quais têm como propósito complementar as atividades realizadas em sala de aula. Todas essas atividades são complementadas com simulações realizadas utilizando a linguagem Python, a fim de trazer um dinamismo diferente em sala. Os conteúdos considerados neste capítulo fazem parte dos tópicos presentes na ementa curricular atual do ensino médio.

No Capítulo 3 consideramos tópicos mais avançados, com foco no modelo probabilístico conhecido como a Urna de Pólya. Este modelo, introduzido por Florian Eggenberger e George Pólya (Eggenberger; Pólya, 1923), é caracterizado por um esquema de reposição onde, a cada sorteio, a bola retirada é devolvida à urna junto com outras bolas adicionais da mesma cor. Esse

processo de reforço cria uma dependência entre os sorteios subsequentes, tornando o modelo particularmente interessante do ponto de vista matemático. Também explicamos detalhadamente o funcionamento do esquema de reposição, construindo gradualmente a intuição sobre como as proporções de bolas de cada cor evoluem ao longo do tempo. O principal resultado apresentado neste capítulo, conhecido como o Teorema de Pólya-Eggenberger, ou simplesmente Teorema de Pólya, é que a fração de bolas de uma cor converge em distribuição para uma variável aleatória com densidade Beta, com parâmetros determinados pela composição inicial da urna. Várias passagens na demonstração, de caráter técnico, são relegadas a um Apêndice no final da dissertação. O Apêndice também inclui o código em Python utilizado nas atividades descritas no Capítulo 2.



## 2 PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO


























































### 2.1 Probabilidade como frequência relativa

O objetivo desta seção consiste em introduzir o conceito de probabilidade de um evento como a frequência relativa do número de vezes que o evento ocorre ao repetirmos um mesmo experimento várias vezes. A partir desta noção de probabilidade, é desenvolvido o conceito de probabilidade condicional e, por fim, de independência de eventos. Supomos que o docente está minimamente familiarizado com a linguagem básica utilizada em probabilidade, tal como espaço amostral, eventos, etc. Recomendamos para aqueles que desejam revisar estes conceitos a leitura dos capítulos iniciais em [Ross \(2010\)](#), a qual é uma excelente referência sobre o assunto. Nenhum conhecimento preliminar será suposto por parte dos alunos.

#### 2.1.1 Atividades em sala

**Atividade 1.** Consideramos uma urna contendo 2 bolas vermelhas e 1 bola preta. Os alunos sabem apenas que a urna possui 3 bolas, mas as cores destas não são reveladas a eles. Pedimos a um aluno da turma que retire uma bola, observe a sua cor e a devolva na urna. Esta experiência é repetida até que todos os alunos da turma tenham realizado este procedimento. Para termos um maior número de realizações do experimento, cada aluno pode repetir a experiência várias vezes. Ao final do experimento, contabilizamos o número de bolas de uma das cores retiradas, como, por exemplo, o número de bolas vermelhas. A Tabela 1 apresenta um exemplo dos resultados obtidos em uma turma de 40 alunos.

Tabela 1 – Resultados obtidos ao extrair uma bola de uma urna contendo 2 bolas vermelhas ( $V$ ) e 1 preta ( $P$ ) 120 vezes.

	1 <sup>a</sup>								10 <sup>a</sup>	Total
$V$										6
$P$										4
	11 <sup>a</sup>								20 <sup>a</sup>	Total
$V$										7
$P$										3
	21 <sup>a</sup>								30 <sup>a</sup>	Total
$V$										7
$P$										3
	31 <sup>a</sup>								40 <sup>a</sup>	Total
$V$										9
$P$										1
	41 <sup>a</sup>								50 <sup>a</sup>	Total
$V$										8
$P$										2
	51 <sup>a</sup>								60 <sup>a</sup>	Total
$V$										5
$P$										5

	61 <sup>a</sup>								70 <sup>a</sup>	Total
V			●		●		●	●		4
P	●	●		●		●		●	●	6
	71 <sup>a</sup>								80 <sup>a</sup>	Total
V	●	●		●		●				4
P			●		●		●	●	●	6
	81 <sup>a</sup>								90 <sup>a</sup>	Total
V	●	●		●	●	●		●	●	8
P			●				●			2
	91 <sup>a</sup>								100 <sup>a</sup>	Total
V	●	●		●	●		●	●	●	8
P			●			●				2
	101 <sup>a</sup>								110 <sup>a</sup>	Total
V		●	●	●	●	●	●	●		7
P	●							●	●	3
	111 <sup>a</sup>								120 <sup>a</sup>	Total
V	●	●	●	●			●		●	6
P					●	●		●	●	4

A ideia por trás desta primeira experiência é que a composição da urna possa ser estimada pela frequência relativa do número de vezes que foram observadas bolas vermelhas. De acordo com os resultados apresentados na Tabela 1, a frequência relativa é  $\frac{79}{120} \approx 0,658333$ . A frequência relativa obtida é bem próxima da composição relativa de bolas vermelhas na urna; de fato,

$$\frac{79}{120} = \frac{80 - 1}{120} = \frac{2}{3} - \frac{1}{120} = \frac{2}{3} - 0,008333333.$$

Podemos conjecturar neste momento que a urna possui 2 bolas vermelhas.

A experiência descrita nesta primeira atividade é um exemplo de um fenômeno geral. Introduzimos a seguinte definição para formalizar o assunto.

**Definição 2.1.1.** Seja  $\Omega$  o espaço amostral de um experimento o qual supomos possa ser repetido indefinidamente. Seja  $A \subset \Omega$  um evento, e seja  $\mathbf{1}_A(n)$  a função indicadora do evento  $A$  na  $n$ -ésima realização do experimento, isto é,

$$\mathbf{1}_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ ocorre na } i\text{-ésima realização do experimento,} \\ 0, & \text{se } A \text{ não ocorre na } i\text{-ésima realização do experimento.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Denotamos por  $\#A(n)$  o número de vezes que ocorre o evento  $A$  durante as primeiras  $n$  realizações do experimento, isto é,

$$\#A(n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_A(k). \quad (2.2)$$

No contexto da experiência realizada em sala de aula, seja  $\Omega_1$  o espaço amostral correspondente ao experimento realizado por um aluno qualquer, isto é, retirar uma bola da urna e observar a sua cor. Sejam  $v_1$ ,  $v_2$  e  $p$  os resultados correspondentes a observar uma das bolas

vermelhas ou a outra uma bola preta. Assim,  $\Omega_1 = \{v_1, v_2, p\}$ . Seja  $\Omega$  o espaço amostral obtido ao extrair uma bola e observar a sua cor 120 vezes, isto é  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_1 = \Omega_1^{120}$ . Por extenso

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \dots, x_{120}) : x_k \in \{v_1, v_2, p\}, k = 1, 2, \dots\}.$$

Seja  $A \subset \Omega_1$  o evento

$$A = \{v_1, v_2\},$$

e por fim seja  $\#A(n)$  o número de vezes que foi observada uma bola vermelha durante as primeiras  $n$ ,  $1 \geq n \geq 120$ , extrações da urna. Segundo os resultados da Tabela 1 temos que  $\#A(120) = 79$ .

**Atividade 2.** Propomos a seguir uma análise da evolução da frequência relativa  $\#A(n)/n$  com o objetivo de motivar a noção da probabilidade do evento  $A$ . Observando os resultados provenientes da Tabela 1, constatamos que a frequência relativa  $\#A(n)/n$  varia ao longo do número de extrações  $n$ . Por exemplo, a frequência relativa de bolas vermelhas da primeira até a décima jogada é  $\frac{6}{10}$ , até a vigésima jogada a frequência é  $\frac{13}{20}$  e assim por diante obtemos os valores  $\frac{20}{30}$ ,  $\frac{29}{40}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{79}{120}$ . Utilizando dessa ferramenta podemos mostrar como a frequência relativa tende a se estabilizar ao longo do número de realizações, quanto maior é o número de tentativas do experimento, maior é a aproximação da frequência relativa à  $\frac{2}{3}$ . Para visualizarmos isto, a Figura 1 apresenta o gráfico da evolução de  $\#A(n)/n$  em função de  $n$  (pontos pretos).

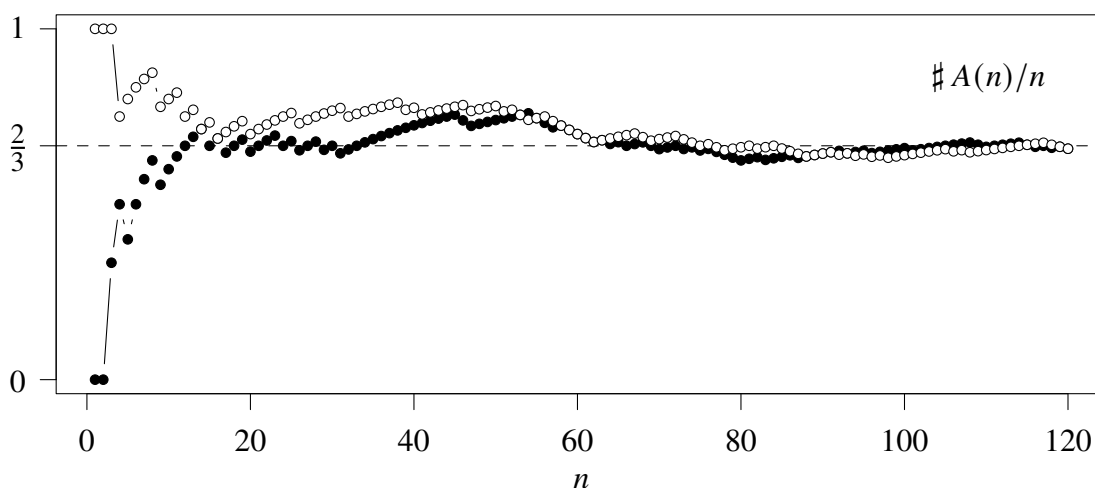


Figura 1 – Duas evoluções da frequência relativa do número de vezes que é retirada com reposição uma bola vermelha de uma urna contendo duas bolas vermelhas e uma preta. Uma das evoluções graficada com círculos pretos inicia em 0 e a outra, em círculos brancos, inicia em 1.

Além de apresentar a evolução de frequência relativa do número de bolas vermelhas retiradas de acordo aos valores da Tabela 1, a Figura 1 mostra uma outra evolução possível (pontos brancos), obtida ao retirar 120 bolas da urna. Observamos que ambas as realizações se estabilizam em torno de  $\frac{2}{3}$ .

Os resultados descritos permitem continuar a atividade proposta da seguinte maneira. A turma é dividida em dois grupos. Cada um destes deve gerar um número suficiente de dados, calcular e fazer o gráfico de  $\#A(n)/n$ . O objetivo é chegar a uma conclusão similar à apresentada na Figura 1: não importa qual é a sequência específica de bolas pretas e vermelhas retiradas, a frequência relativa de bolas vermelhas deve se aproximar da proporção de bolas vermelhas na

urna. Também podemos utilizar os dados obtidos para observar as seguintes três propriedades de  $\#A(n)/n$ :

- (a<sub>1</sub>) Seja  $A^c$  o evento complementar de  $A$ , isto é o evento que ocorre quando não ocorre  $A$ . Neste caso, para qualquer  $n$ ,

$$\frac{\#A(n)}{n} + \frac{\#A^c(n)}{n} = 1.$$

- (a<sub>2</sub>) Para qualquer  $n$ ,

$$0 \leq \frac{\#A(n)}{n} \leq 1.$$

pois se  $A$  nunca ocorre,  $\#A(n) = 0$  logo  $\#A(n)/n = 0$ ; e se  $A$  sempre ocorre  $\#A(n) = n$  e assim  $\#A(n)/n = n/n = 1$ .

- (a<sub>3</sub>) Seja  $A$  e  $B$  dois eventos disjuntos, isto é,  $A$  e  $B$  são tais que  $A \cap B = \emptyset$ . (Por exemplo,  $\Omega_1 = \{v_1, v_2, p\}$  e  $A = \{v_1, v_2\}$ ,  $B = \{p\}$ ). Neste caso, se  $A \cup B$  denota o evento no qual ocorre  $A$  ou  $B$  ou ambos  $A$  e  $B$ , tem-se

$$\frac{\#(A \cup B)(n)}{n} = \frac{\#A(n)}{n} + \frac{\#B(n)}{n}.$$

É importante destacar que as propriedades (a<sub>1</sub>)–(a<sub>3</sub>) valem para qualquer  $\Omega$ .

Munidos destes novos conhecimentos, podemos colocar à prova o que os alunos aprenderam. Esperamos que a intuição seja o principal recurso para a resolução de alguns problemas básicos, tais como aqueles apresentados nas seguintes perguntas.

## Exercícios

---

**Questão 1.** Na experiência realizada em sala de aula, qual foi a frequência de bolas vermelhas obtida da 1<sup>a</sup> à 10<sup>a</sup> retirada?

**Questão 2.** Na experiência realizada em sala de aula, qual foi a frequência de bolas vermelhas obtida da 1<sup>a</sup> à 20<sup>a</sup> retirada?

**Questão 3.** Na experiência realizada em sala de aula, qual foi a frequência de bolas pretas obtida da 1<sup>a</sup> à 40<sup>a</sup> retirada?

**Questão 4.** No contexto da atividade realizada, forneça um exemplo de um evento que sempre ocorre e de outro que nunca ocorre.

**Questão 5.** No experimento no qual é retirada uma bola 120 vezes e de cada vez é observada a sua cor, forneça um exemplo de dois eventos disjuntos e determine a frequência relativa de cada um. Determine a frequência relativa da união destes eventos. Qual é o significado da união em termos das ocorrências destes eventos?

**Questão 6.** No contexto da atividade realizada, forneça um exemplo de dois eventos com interseção não vazia e determine a frequência relativa da interseção. Que significa a interseção em termos da ocorrência de cada evento?

## 2.1.2 Probabilidade

Esta seção está dedicada à introdução do conceito de probabilidade de um evento. O método utilizado será a abordagem frequentista, enraizada no conceito de frequência relativa introduzido na seção anterior. Escolhemos esta abordagem, em lugar da abordagem axiomática, pois esta é acessível aos alunos do ensino médio e está fortemente baseada na intuição desenvolvida na experiência anterior: supondo que um experimento possa ser repetido infinitas vezes, a probabilidade de um evento é a frequência relativa da ocorrência desse evento. Destacamos que os itens  $(a_1)$ – $(a_3)$  da seção anterior não estão em conflito com o ponto de vista axiomático; pelo contrário, estes fornecem uma justificativa ao nível intuitivo para a escolha dos axiomas utilizados para definir formalmente uma probabilidade. O leitor interessado pode revisar a definição axiomática de probabilidade no Capítulo 2, Seção 2.3 em [Ross \(2010\)](#).

**Definição 2.1.2.** Seja  $\Omega$  um espaço amostral e  $A$  um evento de  $\Omega$ . A probabilidade do evento  $A$ , denotada  $\mathbb{P}(A)$ , é definida pelo limite

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#A(n)}{n}, \quad (2.3)$$

sempre que esse limite exista.

Apesar da definição utilizar um conceito mais avançado como limite, à nível escolar não precisamos entrar em detalhes sobre a formalização. A ideia que queremos transmitir é que na prática, quanto mais experimentos realizamos, mais nos aproximamos da verdadeira probabilidade, e isso pode ser analisado pelos próprios alunos, visualizando as tabelas que criaram anteriormente. Eles não terão a definição formal, mas criarão uma intuição sobre o assunto que é suficiente para o nível escolar. Formalmente, a questão sobre a existência do limite em (2.3) é respondida pela Lei dos Grandes Números. No momento apenas mencionamos que a lei é válida para todos os exemplos a serem desenvolvidos em sala de aula. Maiores detalhes sobre a Lei dos Grandes Números podem ser encontrados em nível introdutório em [Ross \(2010\)](#) e de maneira mais profunda em [James \(2023\)](#).

Uma consequência importante da Definição 2.1.2 é que ela permite calcular de maneira eficiente a probabilidade de um evento sob a seguinte condição de simetria. Suponhamos que  $\Omega$  seja finito. Lembramos que para qualquer  $\omega \in \Omega$ , o evento  $\{\omega\}$  é chamado de evento elementar. Dizemos que uma probabilidade é simétrica em  $\Omega$  se existir uma constante  $0 \leq c \leq 1$  tal que para todo  $\omega \in \Omega$ ,  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \lim_n \# \omega(n)/n = c$ . Para qualquer evento  $A \subseteq \Omega$ , denotamos por  $|A|$  a sua cardinalidade. Se  $\Omega$  for finito, sob simetria tem-se

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (2.4)$$

De fato, se  $\Omega$  é finito, existe  $n < \infty$  tal que  $|\Omega| = n$ . Como  $\Omega = A \cup A^c$ , de  $(a_1)$  temos  $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$ . Por outro lado,  $\Omega$  também pode ser escrito como a união de eventos elementares  $\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$  portanto, de  $(a_3)$  segue  $1 = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} c = nc$  e assim  $c = 1/n$ . Como  $A \subseteq \Omega$ , existe  $m \leq n$  tal que  $|A| = m$ , logo  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = mc = m/n = |A|/|\Omega|$ .

Voltando ao exemplo considerado na Atividade 1, proposta em sala de aula, neste caso temos  $\Omega_1 = \{v_1, v_2, p\}$  e  $A = \{v_1, v_2\}$ . Como a urna possui duas bolas vermelhas, temos que  $|A| = 2$ . Agora, se supomos que as três bolas na urna têm exatamente o mesmo tamanho e peso, qualquer uma delas tem a mesma chance de ser escolhida. Assim, por simetria

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega_1|} = \frac{2}{3}.$$

Com isso em mente, de maneira geral podemos dizer que sob equiprobabilidade de eventos elementares quando  $\Omega$  é finito, a probabilidade de um evento  $A$  pode ser calculada como

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos totais}}, \quad (2.5)$$

mencionando que esta definição é uma consequência de (2.3) sem entrar em maiores detalhes.

Esta última definição permite calcular a probabilidade de um grande número de eventos e de fato, cobre a maior parte das questões que usualmente são consideradas no currículo atual do ensino médio. Apenas a título de exemplo, propomos a continuação da resolução das seguintes questões.

## Exercícios

**Questão 7.** Se uma urna contém 1 bola amarela e 1 azul, qual a probabilidade de retirarmos a bola azul?

**Solução.** Se considerarmos que a urna contém 2 bolas em seu interior e as duas têm o mesmo tamanho e peso, e além disso, a pessoa que irá retirar a bola não tem nenhum conhecimento sobre o posicionamento das bolas, é razoável considerar que quando a bola for retirada não há nenhum motivo além da sorte que nos faça acreditar que a chance de retirar a bola azul seja maior ou menor que a chance de retirar a bola amarela. Sendo assim, concluímos que a probabilidade de retirada de uma bola azul é igual a chance de retirar a bola amarela, igual a  $\frac{1}{2}$ .

**Questão 8.** Lançamos uma moeda 6 vezes. (i) Qual a probabilidade de obter exatamente duas caras. (ii) Qual a probabilidade de obter o mesmo número de caras e coroas? (iii) Qual a probabilidade de termos pelo menos duas caras? (iv) Qual a probabilidade de termos mais de 3 caras? Sugestão: os cálculos necessários decorrem de (2.5) e da contagem combinatória usual para determinar a cardinalidade dos eventos envolvidos.

**Solução.** (i) Observamos que  $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \dots, x_6) : x_i \in \{\text{cara, coroa}\}\}$ . Pelo princípio fundamental da contagem,  $|\Omega| = 2^6$ . Sob simetria, isto é, se a moeda possui  $\frac{1}{2}$  de probabilidade de resultar cara e  $\frac{1}{2}$  de resultar coroa, temos que qualquer evento elementar  $\omega$  possui a mesma probabilidade,  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/|\Omega| = 1/2^6$ . Em particular, qualquer  $\omega$  com exatamente duas caras ocorre com probabilidade  $1/2^6$ . Para determinar a probabilidade de termos exatamente duas caras devemos contar o número total de eventos elementares  $\omega$  com exatamente duas caras. No total temos  $6!/(2!(6-2)!) = \binom{6}{2}$  destes eventos:  $6!$  representa o total de formas de permutarmos as coordenadas de  $(x_1, x_2, \dots, x_6)$ . Devemos corrigir pelas trocas de posição de uma cara por outra, pois isto não gera um novo evento, logo dividimos por  $2!$ . Também devemos descontar as trocas de uma coroa por outra, o qual pode ser feito de  $(6-2)!$  maneiras. Por fim, se  $A$  representa o evento no qual ocorrem exatamente duas caras, de (2.4) obtemos  $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = \binom{6}{2}/2^6$ . (ii) Utilizando o mesmo raciocínio empregado em (i) obtemos  $\binom{6}{3}2^6$ . (iii) Seja  $B$  o evento “ocorrem pelo menos duas caras”. De (a<sub>1</sub>) obtemos  $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$ , sendo  $B^c$  o evento no qual “ocorre só uma cara ou nenhuma”, logo  $\mathbb{P}(B) = 1 - [\binom{6}{1}/2^6 + \binom{6}{0}/2^6]$ . (iv)  $[\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}]/2^6$ .

## 2.2 Probabilidade condicional

Com o objetivo de motivar a definição de probabilidade condicional, nesta seção também utilizamos uma urna, porém diferentemente do considerado na Seção 2.1, agora o esquema de

reposição será outro. Suponhamos que uma urna inicialmente apresenta 2 bolas, sendo 1 de cor preta e 1 de cor vermelha. Uma bola é retirada, se a sua cor é vermelha, então são repostas duas bolas vermelhas, caso contrário repomos duas bolas pretas. Este é o esquema de reposição conhecido como a urna de Pólya. Claramente, o conteúdo da urna é modificado pelo resultado de cada extração.

A seguinte pergunta surge naturalmente neste contexto: dado que a bola retirada na primeira tentativa é vermelha, qual é a probabilidade de que esta seja vermelha na segunda tentativa? Para respondermos esta questão sejam  $V_k$  e  $P_k$ ,  $k \in \{1, 2\}$ , os seguintes eventos

$V_k =$  na  $k$ -ésima retirada é obtida uma bola da cor vermelha

$P_k =$  na  $k$ -ésima retirada é obtida uma bola da cor preta

































Motivados pela noção frequentista desenvolvida na Seção 2.1, consideramos agora a experiência da qual consiste na extração de duas bolas segundo o esquema de reposição de Pólya  $n$  vezes. É razoável dividir o número de vezes nas quais ambas bolas extraídas são vermelhas pelo número de vezes que é observada uma bola vermelha na primeira extração, isto é,














































































$$\frac{\#(V_1 \cap V_2)(n)}{\#V_1(n)}. \tag{2.6}$$

É importante observar que o evento  $V_1$  ocorre de duas maneiras  $V_1 \cap V_2$  ou  $V_1 \cap V_2^c$ , sendo cada uma disjunta da outra. Assim, de acordo com (a<sub>3</sub>)

$$\#V_1(n) = \#(V_1 \cap V_2)(n) + \#(V_1 \cap V_2^c)(n).$$

Tabela 2 – Duas extrações segundo o esquema de reposição da urna de Pólya.

	1 <sup>a</sup>		10 <sup>a</sup>	Total
$V_1 \cap V_2$				1
$V_1 \cap P_2$				3
$P_1 \cap V_2$				4
$P_1 \cap P_2$				2
	11 <sup>a</sup>		20 <sup>a</sup>	Total
$V_1 \cap V_2$				2
$V_1 \cap P_2$				3
$P_1 \cap V_2$				2
$P_1 \cap P_2$				3
	21 <sup>a</sup>		30 <sup>a</sup>	Total
$V_1 \cap V_2$				3
$V_1 \cap P_2$				3
$P_1 \cap V_2$				3
$P_1 \cap P_2$				1
	31 <sup>a</sup>		40 <sup>a</sup>	Total
$V_1 \cap V_2$				2
$V_1 \cap P_2$				1
$P_1 \cap V_2$				3
$P_1 \cap P_2$				4

	41 <sup>a</sup>						50 <sup>a</sup>	Total	
$V_1 \cap V_2$								3	
$V_1 \cap P_2$								0	
$P_1 \cap V_2$								2	
$P_1 \cap P_2$								4	
	51 <sup>a</sup>						60 <sup>a</sup>	Total	
$V_1 \cap V_2$								4	
$V_1 \cap P_2$								2	
$P_1 \cap V_2$								3	
$P_1 \cap P_2$								1	
	61 <sup>a</sup>						70 <sup>a</sup>	Total	
$V_1 \cap V_2$								1	
$V_1 \cap P_2$								1	
$P_1 \cap V_2$								3	
$P_1 \cap P_2$								5	
	71 <sup>a</sup>						80 <sup>a</sup>	Total	
$V_1 \cap V_2$								3	
$V_1 \cap P_2$								1	
$P_1 \cap V_2$								3	
$P_1 \cap P_2$								3	
	81 <sup>a</sup>						90 <sup>a</sup>	Total	
$V_1 \cap V_2$								3	
$V_1 \cap P_2$								2	
$P_1 \cap V_2$								5	
$P_1 \cap P_2$								0	
	91 <sup>a</sup>						100 <sup>a</sup>	Total	
$V_1 \cap V_2$								2	
$V_1 \cap P_2$								1	
$P_1 \cap V_2$								3	
$P_1 \cap P_2$								4	
	101 <sup>a</sup>						110 <sup>a</sup>	Total	
$V_1 \cap V_2$								3	
$V_1 \cap P_2$								3	
$P_1 \cap V_2$								3	
$P_1 \cap P_2$								0	
	111 <sup>a</sup>						120 <sup>a</sup>	Total	
$V_1 \cap V_2$									4
$V_1 \cap P_2$								2	
$P_1 \cap V_2$								1	
$P_1 \cap P_2$								3	

**Atividade 3.** Analogamente às atividades 1 e 2 a serem realizadas em sala de aula, propomos agora que cada aluno realize duas extrações seguindo o esquema de reposição de Pólya. A Tabela 2 apresenta os dados obtidos ao realizar duas extrações da urna de Pólya 120 vezes. Esta

tabela fornece um expo dos resultados obtidos em uma turma de 40 alunos se cada aluno repete a experiência 3 vezes. A partir dos resultados na tabela obtemos

$$\#(V_1 \cap V_2)(120) = 31, \quad \#V_1(120) = 53$$

e assim o quociente em (2.6) é igual a  $\frac{31}{53} \approx 0,5849057$ . Para simplificar a notação, denotamos a frequência relativa em (2.6) por  $\#(V_2 | V_1)(n)$ .

A Figura 2 apresenta a evolução de  $\#(V_2 | V_1)(n)$  em função de  $n$ . Podemos observar que para  $n$  suficientemente grande, a frequência relativa do evento  $V_2$  dado  $V_1$  está próxima de  $\frac{2}{3}$ . Esta experiência justifica a noção frequentista da probabilidade condicional do evento  $V_2$  dado o evento  $V_1$ , exatamente da mesma forma como a frequência relativa do evento  $V_1$  leva a noção da probabilidade do evento  $V_1$ .

Suponhamos que o experimento da extração de duas bolas consecutivas de acordo com a reposição da urna de Pólya possa ser realizado indefinidamente. Isto último justifica a passagem ao seguinte limite, o qual suporemos existe devido a Lei dos Grandes Números,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \#(V_2 | V_1)(n) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \#(V_1 \cap V_2)(n)/n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \#V_1(n)/n} = \frac{\mathbb{P}(V_1 \cap V_2)}{\mathbb{P}(V_1)}.$$

O quociente assim definido é a probabilidade condicional do evento  $V_2$  dado o evento  $V_1$ . Mais geralmente, de forma análoga ao considerado na Seção 2.1, esta noção de probabilidade condicional pode ser generalizada para quaisquer dois eventos  $A$  e  $B$ .

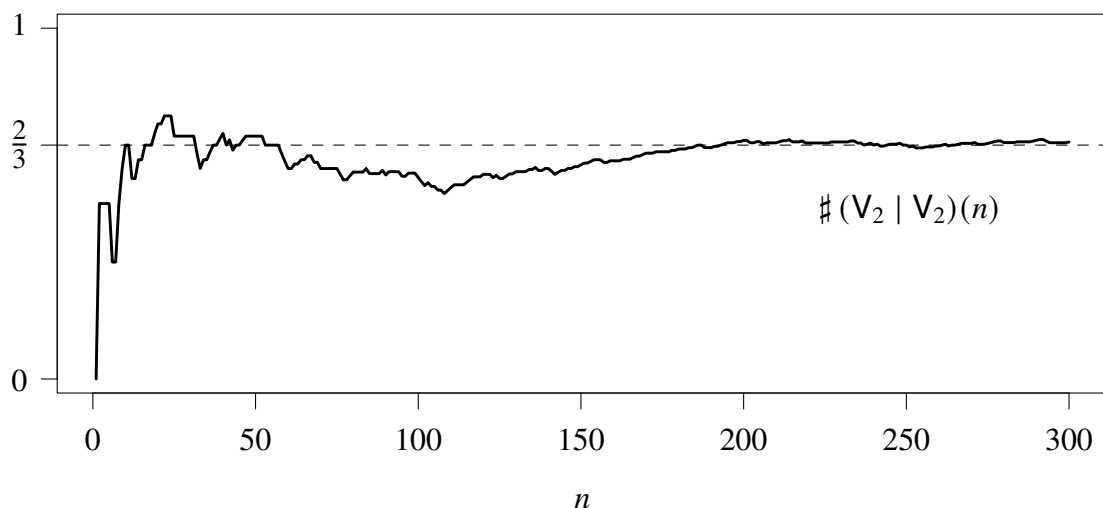


Figura 2 – evolução da frequência relativa do evento  $V_2|V_1$  para uma urna contendo inicialmente uma bola vermelha e uma preta.

**Definição 2.2.1.** Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos quaisquer em  $\Omega$ . A probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$ , denotada por  $\mathbb{P}(A | B)$ , é definida por

$$\mathbb{P}(A | B) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, & \text{se } \mathbb{P}(B) > 0, \\ 0, & \text{se } \mathbb{P}(B) = 0. \end{cases}$$

Podemos agora verificar que  $\mathbb{P}(V_2 | V_1) = \frac{2}{3}$ . Munidos desta última definição e da equação (2.4), temos que

$$\mathbb{P}(V_2 | V_1) = \frac{|V_1 \cap V_2|}{|V_1|}. \quad (2.7)$$

Desenvolvemos estes cálculos de maneira geral, para qualquer composição inicial da urna. Posteriormente especializamos para o caso considerado na experiência a ser realizada em sala de aula. Sejam  $v_0$  e  $p_0$  respectivamente o número inicial de bolas vermelhas e pretas na urna. Denotamos por  $\Omega$  o espaço amostral correspondente a retirarmos uma bola e depois outra, seguindo o esquema de reposição de Pólya. Suponhamos que  $a \geq 1$  bolas adicionais sejam colocadas na urna após cada extração. Neste caso, de (2.4), temos que

$$\mathbb{P}(V_1) = \frac{|V_1|}{|\Omega|} = \frac{v_0(v_0 + a) + v_0 p_0}{(v_0 + p_0)(v_0 + p_0 + a)} = \frac{v_0}{v_0 + p_0}$$

e

$$\mathbb{P}(V_1 \cap V_2) = \frac{|V_1 \cap V_2|}{|\Omega|} = \frac{v_0(v_0 + 1)}{(v_0 + p_0)(v_0 + p_0 + a)}.$$

Assim, da equação (2.7) obtemos finalmente

$$\mathbb{P}(V_2 | V_1) = \frac{v_0(v_0 + 1)}{v_0(v_0 + a) + v_0 p_0} = \frac{v_0 + a}{v_0 + p_0 + a}. \quad (2.8)$$

No caso particular correspondente à Atividade 3 a ser desenvolvida em sala de aula, isto é, quando  $v_0 = p_0 = a = 1$ , temos que

$$\mathbb{P}(V_2 | V_1) = \frac{2}{3}.$$

É importante observarmos neste instante que  $\mathbb{P}(A | B)$  é, em geral, diferente de  $\mathbb{P}(A)$ . Especificamente, na urna de Pólya, para os eventos  $V_1$  e  $V_2$  temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_2) &= \mathbb{P}(V_2 | V_1)\mathbb{P}(V_1) + \mathbb{P}(V_2 | V_1^c)\mathbb{P}(V_1^c) \\ &= \frac{v_0 + a}{v_0 + p_0 + a} \frac{v_0}{v_0 + p_0} + \frac{v_0}{v_0 + p_0 + a} \frac{p_0}{v_0 + p_0} \\ &= \frac{v_0}{v_0 + p_0}. \end{aligned}$$

Assim, de (2.8) obtemos  $\mathbb{P}(V_2 | V_1) \neq \mathbb{P}(V_2)$  quando  $a > 0$ .

Uma observação à margem, decorrente do cálculo de  $\mathbb{P}(V_2)$ , é que a probabilidade de obter uma bola vermelha na segunda extração é igual à probabilidade de obter uma bola vermelha na primeira. Duas propriedades surpreendentes da urna de Pólya válidas para qualquer  $n \geq 1$  são

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_n) &= \mathbb{P}(V_1), \\ \mathbb{P}(V_n | V_{n-1}) &= \mathbb{P}(V_{n-1} | V_n). \end{aligned}$$

Ambas podem ser provadas utilizando indução em  $n$ .

Consideramos agora várias questões para fixar as ideias desta seção e estimular o raciocínio dos alunos.

## Exercícios

---

**Questão 9.** Sabendo que a primeira bola retirada foi preta, qual é a probabilidade de que a segunda bola também seja preta, considerando que, após a primeira retirada, devolvemos a bola e adicionamos mais uma bola da mesma cor?

**Solução.** Iniciamos com 1 bola de cada cor, totalizando 2 na urna. Após a primeira retirada, que foi preta, devolvemos a bola e adicionamos outra bola preta à urna, de modo que agora a urna possui 2 bolas pretas e 1 vermelha, totalizando 3 bolas na urna. Na segunda retirada, a probabilidade de que uma bola preta seja retirada se dá pela razão da quantidade de bolas pretas pelo total de bolas na urna. Logo:  $\frac{2}{3}$

**Questão 10.** Sabendo que a primeira bola retirada foi vermelha, qual é a probabilidade de que a segunda bola seja preta, considerando que, após a primeira retirada, devolvemos a bola e adicionamos mais três bolas da mesma cor?

**Solução.** Iniciamos com 1 bola de cada cor, totalizando 2 na urna. Após a primeira retirada, que foi vermelha, devolvemos a bola e adicionamos outras 3 bolas vermelhas à urna, de modo que agora a urna possui 4 bolas vermelhas e 1 preta, totalizando 5 bolas na urna. Na segunda retirada, a probabilidade de que uma bola preta seja retirada se dá pela razão da quantidade de bolas pretas pelo total de bolas na urna. Logo:  $\frac{1}{5}$

**Questão 11.** Verificar que a frequência relativa da ocorrência de um evento  $A$  dado outro  $B$ , ou seja  $\#(A | B)(n)/n$  satisfaz as propriedades  $(a_1)$ - $(a_3)$ , isto é:  $\#(A | B)(n)/n + \#(A^c | B)(n)/n = 1$ ,  $0 \leq \#(A | B)(n)/n \leq 1$ , e se  $A$  e  $C$  são disjuntos, então  $\#(A \cap C | B)(n)/n = \#(A | B)(n)/n + \#(C | B)(n)/n$ .

**Solução:** Propriedade  $(a_1)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\#(A | B)(n)}{n} + \frac{\#(A^c | B)(n)}{n} &= \frac{\#(A \cap B)(n)}{\#B(n)} + \frac{\#(A^c \cap B)(n)}{\#B(n)} \\ &= \frac{\#B(n)}{\#B(n)} = 1. \end{aligned}$$

Propriedade  $(a_2)$ . Suponhamos que  $\#B(n) > 0$ . Por definição,  $\#(A \cap B)(n) \geq 0$ . Assim

$$\frac{\#(A | B)(n)}{n} = \frac{\#(A \cap B)(n)}{\#B(n)} \geq 0$$

Além disso, como  $\#(A \cap B)(n) \leq \#B(n)$ , temos

$$\frac{\#(A | B)(n)}{n} = \frac{\#(A \cap B)(n)}{\#B(n)} \leq 1.$$

Se agora supomos que  $\#B(n) = 0$ , por definição  $\#(A | B)(n) = 0$ . Mostramos portanto que, em geral, para qualquer caso  $\#B(n) = 0$  ou  $\#B(n) > 0$ ,  $0 \leq \#(A | B)(n) \leq 1$ .

Propriedade ( $a_3$ ).

$$\begin{aligned} \frac{\#(A \cup C | B)(n)}{n} &= \frac{\#((A \cup C) \cap B)(n)}{\#B(n)} \\ &= \frac{\#((A \cap B) \cup (C \cap B))(n)}{\#B(n)} \\ &= \frac{\#(A \cap B)(n)}{\#B(n)} + \frac{\#(C \cap B)(n)}{\#B(n)} \\ &= \frac{\#(A | B)(n)}{n} + \frac{\#(C | B)(n)}{n}. \end{aligned}$$

### 2.3 Independência de eventos

Uma das conclusões dos experimentos da seção anterior é que  $\mathbb{P}(V_2 | V_1) \neq \mathbb{P}(V_2)$ . Ou seja, a probabilidade de escolhermos uma bola vermelha na segunda extração, dado que o resultado da primeira extração é uma bola vermelha, difere da probabilidade de observarmos uma bola vermelha na segunda extração sem condicionarmos por nenhuma outra informação. Este resultado é bem intuitivo, pois sob a informação adicional da ocorrência de  $V_1$ , o conteúdo da urna é diferente daquele quando não é considerado nenhum resultado na primeira extração. Isto motiva a seguinte definição, bastante importante em teoria de probabilidade.

**Definição 2.3.1.** Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos quaisquer do espaço amostral  $\Omega$ . Dizemos que  $A$  é independente de  $B$  se

$$\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A).$$

Caso contrário, dizemos que  $A$  é não independente de  $B$  ou que  $A$  é dependente de  $B$ . Se  $A$  é independente de  $B$  e se  $B$  é independente de  $A$  dizemos que  $A$  e  $B$  são mutuamente independentes ou, simplesmente, que  $A$  e  $B$  são independentes.

Concluimos portanto que  $V_2$  é dependente de  $V_1$ . Em geral, quando são consideradas extrações sucessivas da urna de Pólya, é possível mostrar que para qualquer  $n > 1$ ,  $V_n$  é dependente de  $V_{n-1}$ .

### Exercícios

**Questão 12.** Lançamos uma moeda duas vezes. Supomos que  $A$  denote o evento no qual o resultado são duas caras e  $B$  o evento no qual o resultado do primeiro lançamento é cara. Mostrar que os eventos  $A$  e  $B$  são dependentes, isto é, mostrar que  $A$  é dependente de  $B$  e que  $B$  é dependente de  $A$ .

**Solução.** Definimos como  $C$  o evento que ocorreu cara e  $K$  o evento que ocorreu coroa. O espaço amostral é amostral  $\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$ . Com isso temos

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Como  $\mathbb{P}(A | B) \neq \mathbb{P}(A)$  e  $\mathbb{P}(B | A) \neq \mathbb{P}(B)$  os eventos  $A$  e  $B$  são dependentes.

**Questão 13.** Lançamos uma moeda duas vezes. Mostrar que o resultado do segundo lançamento é independente do resultado do primeiro lançamento.

**Solução.** Definimos como  $C_i$  o evento que ocorreu cara na  $i$ -ésima retirada e  $K_i$  o evento que ocorreu coroa na  $i$ -ésima retirada. Com essas informações conseguimos nosso espaço amostral  $\Omega = \{(C_1, C_2), (C_1, K_2), (K_1, C_2), (K_1, K_2)\}$ . Dito isso,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(K_1) = \mathbb{P}(K_2) &= \frac{1}{2} \\ &= \mathbb{P}(C_2 | C_1) = \mathbb{P}(C_2 | K_1) = \mathbb{P}(K_2 | C_1) = \mathbb{P}(K_2 | K_1). \end{aligned}$$

Temos que  $C_2$  e  $K_2$  são independentes de  $C_1$  e  $K_1$ .

**Questão 14.** Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos. Estes eventos são ditos independentes se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \quad (2.9)$$

Esta igualdade é geralmente a definição de independência encontrada na maior parte dos textos sobre probabilidade. Mostrar que esta definição é equivalente à Definição 2.3.1.

**Solução.** Suponhamos que (2.9) seja válida. Se  $\mathbb{P}(B) > 0$ , da definição de probabilidade condicional temos

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A).$$

Analogamente verificamos que  $\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$ , e assim segundo a Definição 2.3.1, concluímos que  $A$  e  $B$  são independentes.

Suponhamos que  $A$  e  $B$  satisfazem a Definição 2.3.1. Neste caso, da definição de probabilidade condicional temos

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

o qual mostra que  $A$  e  $B$  satisfazem (2.9).

## 2.4 Abordagem computacional

As experiências práticas descritas nas seções 2.1 e 2.2 têm por objetivo mostrar como  $\#A(n)/n$  e  $\#(V_2 | V_1)(n)$  tendem, respectivamente, às probabilidades  $\mathbb{P}(V_1)$  e  $\mathbb{P}(V_2 | V_1)$ . Os resultados descritos consideraram 120 repetições de cada experimento. O motivo de complementar com experimentos computacionais aqueles já realizados manualmente é ter a possibilidade de aumentar o número de interações bem além do número que seria possível em sala de aula. A Figura 3 com seus devidos parâmetros foi gerada à partir do código B.1. Este código implementa a função `redred`, a qual permite simular a retirada de duas bolas da urna e contar o número de vezes que ocorre uma bola vermelha na primeira e na segunda escolha. Especificamente, as trajetórias apresentadas na Figura 3 foram geradas ao carregar o código contendo a declaração da função a partir de uma linha de comando do Python e digitando

```

redred(seed1=4, seed2=20, n=50)
redred(seed1=4, seed2=20, n=250)
redred(seed1=4, seed2=20, n=500)
redred(seed1=4, seed2=20, n=5000)

```

Os parâmetros `seed1` e `seed2` determinam a semente do gerador de números aleatórios para a primeira e a segunda realização apresentada em cada gráfico. O parâmetro `n` determina o número de iterações.

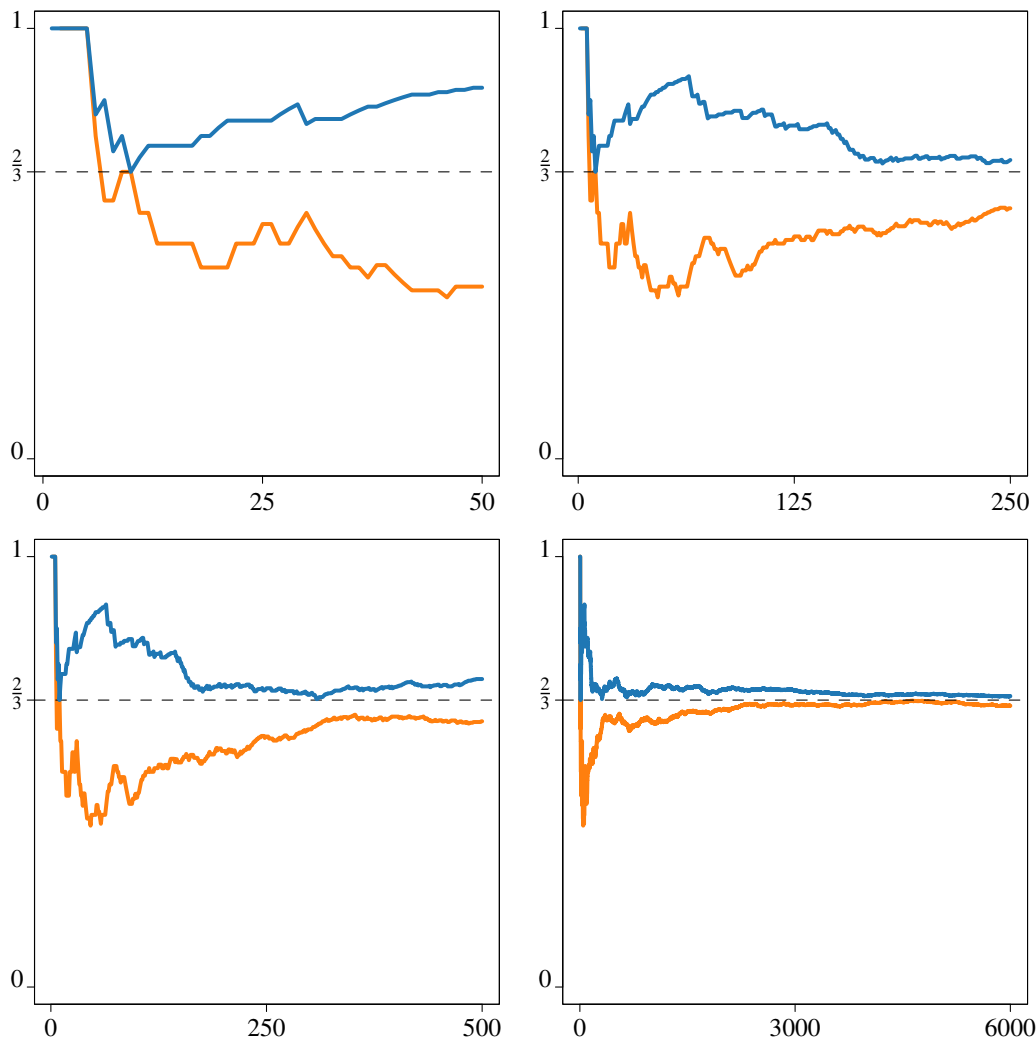


Figura 3 – Quatro evoluções da frequência relativa do evento  $V_2|V_1$  para  $n = 50, 250, 500$  e  $6000$ , repondo 3 bolas. Para cada um dos valores de  $n$ , todas as curvas azuis foram obtidas com a mesma semente do gerador de números aleatórios utilizado no código da função `redred` (`seed1`, Seção B.1), e todas as laranjas com uma outra semente (`seed2`). A mesma semente foi utilizada para cada valor de  $n$ .

Com essa ferramenta em mãos, podemos também fazer testes mudando a quantidade de bolas repostas para observarmos como o gráfico se comporta. Ao aumentar o número de simulações, a frequência relativa dos resultados se aproxima de valores fixos, sugerindo uma convergência da frequência relativa à probabilidade teórica esperada. Esse comportamento

reforça a ideia de que, conforme a quantidade de experimentos aumenta, a frequência relativa estabiliza, permitindo uma melhor aproximação da probabilidade real dos eventos.

#### 2.4.1 Estudo computacional da convergência na urna de Pólya

Passamos agora ao estudo computacional de um outro problema com o objetivo de motivar o assunto a ser estudado no próximo capítulo. O material é mais avançado e não faz parte das atividades a serem realizadas em sala de aula.

Seja  $\Omega$  o espaço amostral de um determinado experimento, o qual suporemos possa ser repetido um número arbitrário de vezes, e seja  $\mathbf{1}_A(k)$  a função indicadora da ocorrência de  $A$  na  $k$ -ésima realização do experimento, isto é, a variável aleatória definida em (2.1). A Lei dos Grandes Números estabelece que o evento

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_A(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_A(k) \right] \right\}, \quad (2.10)$$

é um evento de probabilidade um. Das propriedades elementares de esperança temos que para qualquer  $n$ ,  $\mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_A(k) \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(k)] = \mathbb{P}(A)$ . Assim, a Lei dos Grandes Números afirma que a fração relativa de vezes que  $A$  ocorre converge quase certamente à sua probabilidade. Por exemplo, se  $A$  é o evento  $V_1$  analisado nas seções anteriores e  $v_0 = p_0 = 1$ , então  $\# V_1(n)/n$  converge a  $\frac{1}{2}$ .

Para podermos aplicar a Lei dos Grandes Números, são necessárias as seguintes condições:

(C<sub>1</sub>). Para quaisquer inteiros positivos diferentes  $j$  e  $k$ ,  $\mathbf{1}_A(j)$  e  $\mathbf{1}_A(k)$  assumem valores independentemente, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \{ \mathbf{1}_A(j) = x_j \} \cap \{ \mathbf{1}_A(k) = x_k \} \right) &= \mathbb{P}(\mathbf{1}_A(j) = x_j) \mathbb{P}(\mathbf{1}_A(k) = x_k) \\ \forall j \neq k, \text{ e } x_j, x_k &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

(C<sub>2</sub>). As variáveis  $\mathbf{1}_A(k)$  possuem a mesma distribuição, isto é,

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}_A(k) = 1) = 1 - \mathbb{P}(\mathbf{1}_A(k) = 0) = p, \quad p \in [0, 1], \quad \forall k \geq 1.$$

Ambas as condições (C<sub>1</sub>) e (C<sub>2</sub>) são satisfeitas quando é considerado o mesmo evento  $A$  em realizações independentes de um determinado experimento. Isto justifica teoricamente a convergência das frações relativas dos eventos  $V_1$  e  $V_2 \mid V_1$ .

Passamos agora a considerar a sequência de eventos  $(V_n)$ ,  $n \geq 1$ , definida ao realizar  $n$  extrações *subsequentes* da urna de Pólya. Seja  $(\mathbf{1}_{V_n})$ ,  $n \geq 1$ , a sequência das funções indicadoras associadas, e sejam  $V_n$  e  $P_n$  respectivamente o número de bolas vermelhas e pretas na urna após as primeiras  $n$  extrações. A quantidade  $V_n/(V_n + P_n)$ , correspondente à fração relativa de bolas vermelhas, pode ser escrita como

$$\frac{V_n}{V_n + P_n} = \frac{1}{na + v_0 + p_0} \left( v_0 + \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{V_k} \right). \quad (2.11)$$

Diferentemente do que ocorre com a convergência da soma (2.10), a soma à esquerda em (2.11) não envolve eventos independentes como visto na Seção 2.3: como  $V_n$  é dependente de  $V_{n-1}$ , as variáveis  $\mathbf{1}_{V_n}$  assumem valores em  $\{0, 1\}$  de forma dependente. Por outro lado, a soma em (2.11) tampouco envolve variáveis identicamente distribuídas. De fato, para qualquer  $k \geq 1$  temos

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}_{V_k} = 1) = 1 - \mathbb{P}(\mathbf{1}_{V_k} = 0) = \frac{V_k}{V_k + P_k},$$

mas,  $V_k/(V_k + P_k)$  possui probabilidade zero de ser constante para todo  $k$ . Sendo assim, nenhuma das condições  $(C_1)$  e  $(C_2)$  são satisfeitas. Como consequência disto, não é possível utilizar a Lei dos Grandes Números para estudar o comportamento assintótico da frequência relativa das bolas de uma cor na urna de Pólya. O objetivo do resto desta seção é mostrar mediante simulações que o comportamento da soma em (2.11) é surpreendentemente diferente daquele em (2.10).

As seguintes simulações mostram a evolução de  $V_n/(V_n + P_n)$  ao considerar diferentes composições iniciais  $v_0$ ,  $p_0$  e valores para  $a$ , o número de bolas novas introduzidas em cada passo. A primeira simulação considera o caso em que  $v_0 = p_0 = a = 1$ . O resultado é mostrado na Figura 4.

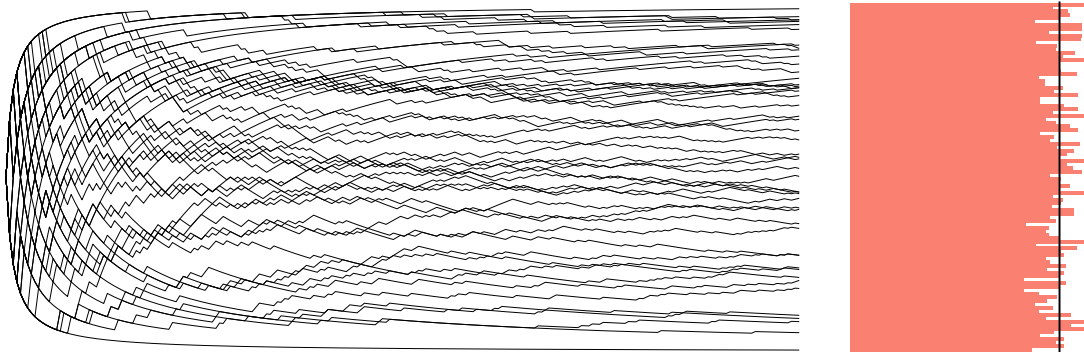


Figura 4 – evolução da fração relativa de bolas vermelhas, para o caso  $v_0 = p_0 = a = 1$ .

A Figura 4 foi produzida ao carregar o código apresentado no Apêndice B.2, digitando

```
caminhos(220, 1, 1, 1, 50)
histograma(1000, 1, 1, 1, 15000)
```

A função `caminhos` gera 50 evoluções da fração de bolas vermelhas e apresenta o gráfico das primeiras 220, isto é de  $V_n/(V_n + P_n)$  para  $n = 1, 2, \dots, 220$ . A função `histograma` gera 15000 evoluções, cada uma de comprimento 1000 e apresenta o histograma dos valores  $V_{1000}/(V_{1000} + P_{1000})$ . `histograma` também sobrepõe o gráfico da densidade  $\text{Beta}(v_0/a, p_0/a)$ . Observamos que, apesar da disposição inicial de bolas ser idêntica em todos os testes, a proporção de bolas vermelhas não tende para o mesmo valor. A depender da realização, a proporção final de bolas vermelhas fica distribuída uniformemente ao longo do intervalo  $[0, 1]$ . O histograma sugere que o limite está uniformemente distribuído em  $[0, 1]$ , o qual de fato corresponde à densidade  $\text{Beta}(1/1, 1/1)$ ; uma outra maneira de parametrizar a densidade uniforme.

A próxima simulação apresentada na Figura 5 ilustra o caso em que  $v_0 = p_0 = 1$  e  $a = 2$ .

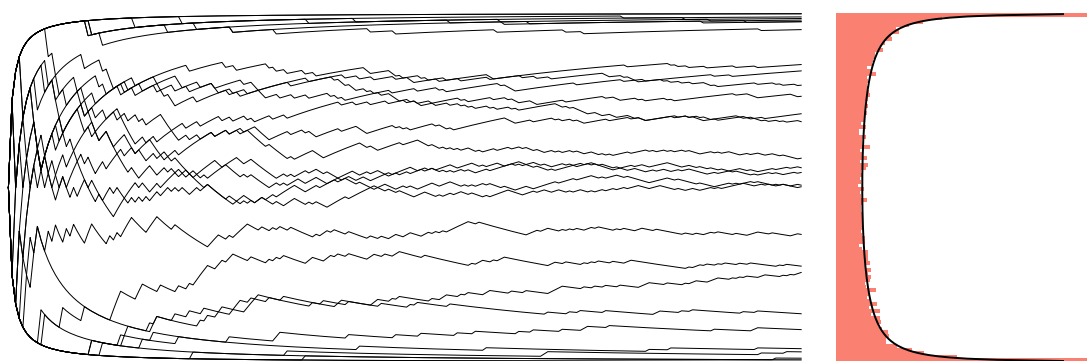


Figura 5 – evolução da fração relativa de bolas vermelhas, para o caso  $\nu_0 = p_0 = 1$  e  $a = 2$ .

Essa simulação nos mostra algo diferente da primeira. Ao invés da proporção ser totalmente aleatória, ela possui uma tendência maior a ficar nos extremos. A próxima simulação apresentada na Figura 6 apresenta o resultado para os parâmetros  $\nu_0 = p_0 = 3$  e  $a = 2$ .

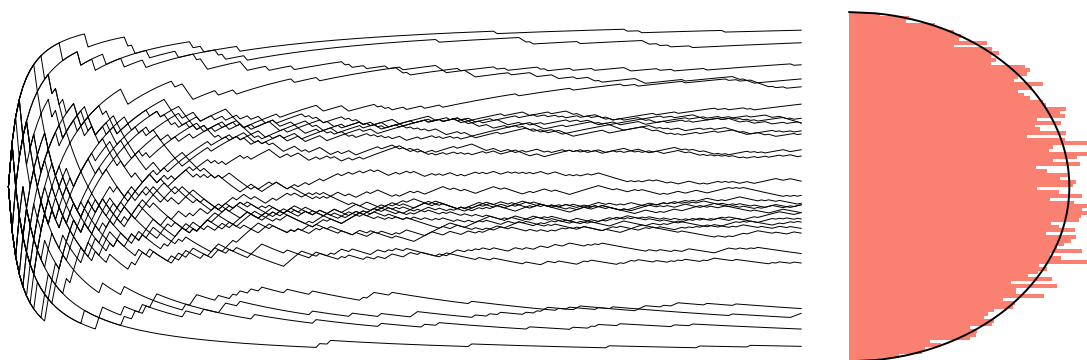


Figura 6 – evolução da fração relativa de bolas vermelhas, para o caso  $\nu_0 = p_0 = 3$  e  $a = 2$ .

Essa terceira simulação demonstra um comportamento onde a proporção de bolas vermelhas tende a se concentrar mais próximo de  $\frac{1}{2}$ , isso se dá pela disposição inicial começar com 3 bolas de cada, fazendo assim o comportamento reforçado ser menos impactante a cada retirada. A Figura 7 apresenta o resultado obtido ao considerar uma urna inicialmente desbalanceada, definida por  $\nu_0 = 2$ ,  $p_0 = 5$  e  $a = 1$ .

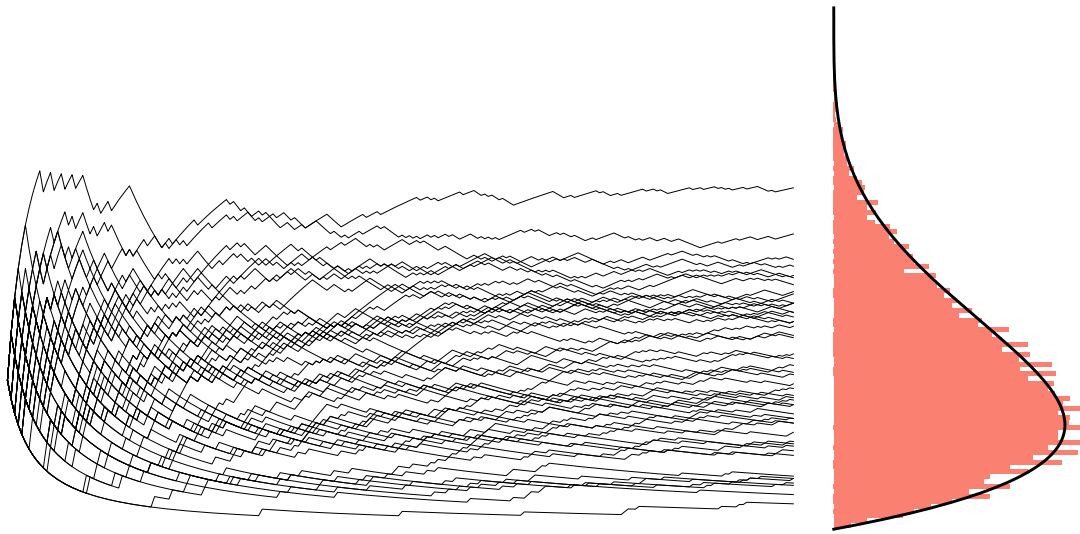


Figura 7 – evolução da fração relativa de bolas vermelhas, para o caso  $v_0 = 2$ ,  $p_0 = 5$  e  $a = 1$ .

Neste caso, a maior parte dos caminhos do processo da frequência relativa de bolas vermelhas está próxima de 0, o qual intuitivamente é natural, pois a urna possui inicialmente 5 bolas pretas e só 2 vermelhas.

Mesmo que  $V_n/(V_n + P_n)$  possa ser visto segundo (2.11) como uma média aritmética de variáveis aleatórias, as simulações apresentadas nesta seção mostram que o seu comportamento é radicalmente diferente das médias da forma  $n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_A(k)$ , constituídas por somas de variáveis independentes. Esta última converge quase certamente ao valor  $\mathbb{P}(A)$ . O próximo capítulo mostra a sequência  $V_n/(V_n + P_n)$  de fato possui um limite, e que o limite é uma variável aleatória. Além disso, o capítulo também identifica a distribuição desta variável como sendo a distribuição com densidade  $\text{Beta}(v_0/a, p_0/a)$ .

### 3 CONVERGÊNCIA DA URNA DE PÓLYA

Este capítulo está dedicado à demonstração do Teorema de Eggenberger-Pólya, descrito informalmente no capítulo introdutório e exemplificado pelas simulações apresentadas no Capítulo 2. O Teorema de Eggenberger-Pólya faz parte do folclore nos círculos probabilísticos que estudam modelos de urna. Embora existam diversas provas deste teorema, a sua demonstração na íntegra é difícil de ser encontrada. A primeira demonstração formal é atribuída ao esboço apresentado em Freedman (1965). A demonstração exposta aqui segue em linhas gerais o argumento descrito nas Seções 1.7 e 3.2 em Mahmoud (2009). Este último está por sua vez baseado em Heath e Sudderth (1976). O primeiro passo da demonstração consiste em observar a propriedade de intercambiabilidade da urna de Pólya. Isto permite utilizar o Teorema de representação de De Finetti, o qual, em termos gerais, estabelece a existência de uma função de distribuição limite para a proporção de sucessos de uma sequência de variáveis Bernoulli intercambiáveis. No caso da urna de Pólya, é relativamente simples verificar que a função de distribuição corresponde à função de distribuição da proporção limite de uma das cores. A proporção é, por sua vez, uma variável aleatória convergente por ser um martingal limitado. O último passo consiste em um desenvolvimento assintótico, o qual permite identificar a densidade limite da proporção.

#### 3.1 Intercambiabilidade

Salvo seja mencionado o contrário, suporemos ao longo deste capítulo que todas as variáveis aleatórias estão definidas em espaço de probabilidade adequado  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . O conceito de intercambiabilidade fornece uma ferramenta interessante que vai além da noção de independência. Ela provê uma ideia de simetria que pode ser importante para o cálculo de alguns resultados. Um exemplo disso é o seguinte.

**Exemplo 1.** Suponhamos que um dado seja lançado duas vezes. Denotamos por  $X$  e  $Y$  respectivamente, as variáveis aleatórias correspondentes ao resultado do primeiro e do segundo lançamento. O espaço amostral de qualquer um dos dois lançamentos é o conjunto  $\Omega_1 = \{1, 2, \dots, 6\}$ . Claramente, para quaisquer  $1 \leq x, y \leq 6$ , neste caso obtemos

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = y, Y = x).$$

De fato, da independência entre os resultados de ambos os dados e da simetria da probabilidade em  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_1$  resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = x, Y = y) &= \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \\ &= \frac{1}{|\Omega_1|} \frac{1}{|\Omega_1|} \\ &= \mathbb{P}(X = y)\mathbb{P}(Y = x) \\ &= \mathbb{P}(X = y, Y = x). \end{aligned}$$

De maneira geral, consideramos a seguinte definição.

**Definição 3.1.1.** As variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_k$  são intercambiáveis se a igualdade

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \mathbb{P}(X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \dots, X_k = x_{i_k})$$

vale para qualquer permutação  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_k$  dos índices  $1, 2, 3, \dots, k$ .

Observamos que a permutação entre os valores assumidos pelas variáveis aleatórias consideradas é equivalente à permutar os índices das variáveis aleatórias, mantendo os índices dos seus valores, pois

$$\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\} = \{X_1 = x_2, X_2 = x_1\} = \{X_2 = x_1, X_1 = x_2\}.$$

Com isto podemos garantir a igualdade da distribuição entre quaisquer vetores aleatórios, resultado das permutações das suas coordenadas, ou seja

$$(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k) \stackrel{d}{=} (X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, \dots, X_{i_k}),$$

o qual simplesmente é a forma abreviada de escrever

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_k \leq x_k) = \mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1, X_{i_2} \leq x_2, \dots, X_{i_k} \leq x_k)$$

para quaisquer  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

O seguinte exemplo apresenta uma extensão natural do experimento descrito no Exemplo 1.

**Exemplo 2** (Sequências de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas). Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Seja  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  uma permutação qualquer dos índices  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{i_1} = x_1)\mathbb{P}(X_{i_2} = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{i_1} = x_1, X_{i_2} = x_2, \dots, X_{i_n} = x_n). \end{aligned}$$

As variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são, portanto, intercambiáveis.

### 3.2 Intercambiabilidade da urna Pólya

Agora, considerando um esquema de urnas de Pólya-Eggenberger onde são misturadas bolas pretas e vermelhas e toda vez que sorteamos uma bola aleatoriamente, devolvemos  $a \geq 1$  bolas da mesma cor que foi retirada na urna. Suponhamos que inicialmente a urna apresenta  $p_0$  bolas pretas e  $v_0$  bolas vermelhas. Seja

$$X_i = \mathbf{1}_{V_i} = \begin{cases} 1, & \text{se a bola retirada na } i\text{-ésima tentativa é vermelha} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Da fórmula da probabilidade composta (ou fórmula do produto) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) &= \mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_2 = 0, X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &= \frac{p_0 + a}{v_0 + p_0 + 2a} \frac{p_0}{v_0 + p_0 + a} \frac{v_0}{v_0 + p_0}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) = \frac{p_0 + a}{v_0 + p_0 + 2a} \frac{v_0}{v_0 + p_0 + a} \frac{p_0}{v_0 + p_0}$$

e também

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{v_0}{v_0 + p_0 + 2a} \frac{p_0 + a}{v_0 + p_0 + a} \frac{p_0}{v_0 + p_0}.$$

Como podemos notar, todas as sequências com exatamente uma bola vermelha nas 3 primeiras retiradas têm a mesma probabilidade. Em particular, isto mostra que as variáveis aleatórias  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , as quais indicam se o resultado é uma bola vermelha, são intercambiáveis.

Determinamos a seguir a probabilidade de obtermos exatamente  $k$  bolas vermelhas em  $n$  realizações da urna de Pólya. A probabilidade deste evento é utilizada na demonstração do Teorema de Eggenberger-Pólya, Teorema 3.4.1. Os denominadores das frações das probabilidades de cada retirada sempre serão  $v_0 + p_0, v_0 + p_0 + a, \dots, v_0 + p_0 + (n-1)a$ , pois na primeira retirada temos  $v_0 + p_0$  possibilidades de escolha, e a cada retirada acrescentamos  $a + 1$  bolas. Já os numeradores serão  $v_0, v_0 + a, v_0 + 2a, \dots, v_0 + (k-1)a$ , e  $p_0, p_0 + a, p_0 + 2a, \dots, p_0 + (n-k-1)a$ , supomos que todas as bolas vermelhas necessárias tenham sido retiradas nas  $k$  primeiras tentativas e as próximas  $n - k$  retiradas sejam de bolas pretas. Temos assim que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 0, X_{k+3} = 0, \dots, X_n = 0) \\ &= \frac{v_0}{v_0 + p_0} \frac{v_0 + a}{v_0 + p_0 + a} \frac{v_0 + 2a}{v_0 + p_0 + 2a} \cdots \frac{v_0 + (k-1)a}{v_0 + p_0 + (k-1)a} \\ &\quad \frac{p_0}{v_0 + p_0 + ka} \frac{p_0 + a}{v_0 + p_0 + (k+1)a} \frac{p_0 + 2a}{v_0 + p_0 + (k+2)a} \cdots \frac{p_0 + (n-k-1)a}{v_0 + p_0 + (n-1)a} \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{v_0 + ia}{v_0 + p_0 + ia} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{p_0 + (j-k)a}{v_0 + p_0 + ja}. \end{aligned}$$

Seja  $V_n$  a variável aleatória igual ao número de bolas vermelhas retiradas nas  $n$  primeiras tentativas. Como qualquer permutação da ordem em que as bolas vermelhas foram retiradas tem a mesma probabilidade pela intercambiabilidade, os cálculos anteriores fornecem a demonstração do seguinte lema.

**Lema 3.2.1.**

$$\mathbb{P}(V_n = k) = \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{v_0 + ia}{v_0 + p_0 + ia} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{p_0 + (j-k)a}{v_0 + p_0 + ja}.$$

### 3.3 O Teorema de representação de De Finetti

**Teorema 3.3.1** (De Finetti, 1937). *Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias intercambiáveis com valores em  $\{0, 1\}$ . Existe uma função de distribuição  $F$  concentrada em  $[0, 1]$  tal que*

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dF(x),$$

para cada  $n$  e  $0 \leq k \leq n$ .

*Demonstração.* Seja  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , e para simplificar a notação denotamos por  $A$  o evento  $\{X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0\}$ . Seja  $m$  um inteiro positivo tal que  $m \geq n \geq k \geq 0$ .

Ao condicionarmos pelo evento  $\{S_m = r\}$ , sendo  $m - (n - k) \geq r \geq k$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{r=k}^m \mathbb{P}(A \mid S_m = r) \mathbb{P}(S_m = r) \\ &= \sum_{r=k}^m \frac{\binom{m-n}{r-k}}{\binom{m}{r}} \mathbb{P}(S_m = r) \\ &= \sum_{r=k}^m \frac{(m-n)!}{(r-k)!(m-n-(r-k))!} \frac{r!(m-r)!}{m!} \mathbb{P}(S_m = r). \end{aligned}$$

A segunda igualdade é consequência da intercambiabilidade das variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , pois qualquer sequência destas variáveis tal que  $S_m = \sum_{i=1}^m X_i = r$ , consistente com a sequência inicial definida pelo evento  $A$ , possui a mesma probabilidade. Rearranjando fatores temos

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{r=k}^m \frac{(r)_k (m-r)_{n-k}}{(m)_n} \mathbb{P}(S_m = r), \quad (3.1)$$

onde para quaisquer  $x \in \mathbb{R}$  e  $r \in \mathbb{N}$ ,  $(x)_r$  denota o símbolo de Pochhammer, isto é

$$(x)_r = x(x-1)(x-2) \dots (x-r+1).$$

Consideramos agora  $x = r/m$ , a fração relativa de uns na sequência  $X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m$ , isto é,  $x = \sum_{i=1}^m x_i/m$ . Seja  $F_m(x)$  a função de salto igual a 0 se  $x < 0$ , e incrementos  $\mathbb{P}(S_m = r)$  em  $x = r/m$  para  $r = 0, 1, 2, \dots, m$ .  $F_m$  denota a função de distribuição de  $S_m/m$ . Nestes termos, (3.1) pode ser reescrita como

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x=\frac{k}{m}}^1 \frac{(mx)_k (m-mx)_{n-k}}{(m)_n} dF_m(x).$$

Analisamos agora o comportamento no limite  $m \rightarrow \infty$ . Do Lema A.2.1, para  $m$  grande obtemos as aproximações assintóticas  $(mx)_k \sim (mx)^k$ ,  $(m-mx)_{n-k} \sim (m(1-x))^{n-k}$  e  $(m)_n \sim m^n$ , portanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(mx)_k (m-mx)_{n-k}}{(m)_n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x^k m^k (1-x)^{n-k} m^{n-k}}{m^n} = x^k (1-x)^{n-k}.$$

Por outro lado, utilizando o Teorema de seleção de Helly, Teorema A.1.1, temos que a sequência  $\{F_m(x); m = 1, 2, \dots\}$  possui uma subsequência convergente  $\{F_{m_j}(x); j = 1, 2, \dots\}$  tal que para alguma função de distribuição  $F$  definida no  $\mathbb{R}$ ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{m_j}(x) = F(x) \quad \text{nos pontos de continuidade de } F.$$

Destas observações segue

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{x=k/m_j}^1 \frac{(m_j x)_k (m_j - m_j x)_{n-k}}{(m_j)_n} dF_{m_j}(x) \\ &= \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dF(x). \end{aligned} \quad \square$$

### 3.4 O Teorema de Pólya-Eggenberger

Para enunciar corretamente o Teorema de Pólya-Eggenberger e apresentar a sua demonstração precisamos das seguintes definições.

**Definição 3.4.1.** Sejam  $(X_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uma sequência de variáveis aleatórias e  $X$  uma variável aleatória, ambas definidas em  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ .  $(X_n)$  converge quase certamente a  $X$  se  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$ . Neste caso escrevemos  $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$ .

**Definição 3.4.2.** Seja  $(X_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uma sequência de variáveis aleatórias e seja  $(F_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a sequência das suas funções de distribuição. Seja  $X$  uma variável aleatória e  $F$  sua função de distribuição. A sequência  $(X_n)$  converge em distribuição a  $X$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \text{para todo } x \text{ onde } F(x) \text{ é continua.}$$

Neste caso, utilizamos a notação  $X_n \xrightarrow{d} X$ .

**Definição 3.4.3.** A função  $B : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida pela integral

$$B(x_1, x_2) = \int_0^1 t^{x_1-1} (1-t)^{x_2-1} dt$$

é conhecida como a função beta. As funções beta e gamma estão relacionadas da seguinte maneira,

$$B(x_1, x_2) = \frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)}{\Gamma(x_1 + x_2 - 1)}. \quad (3.2)$$

**Definição 3.4.4.** A variável aleatória contínua  $X$  possui densidade Beta( $\alpha, \beta$ ),  $\alpha > 0, \beta > 0$ , se a sua densidade  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada pela expressão

$$f(x) = B(\alpha, \beta)^{-1} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}.$$

**Teorema 3.4.1** (F. Eggenberger e G. Pólya, 1923). *Seja  $V_n$  o número de bolas da cor vermelha na urna após os primeiros  $n$  sorteios. Se no  $n$ -ésimo sorteio é escolhida uma bola de uma determinada cor, além da bola escolhida, são repostas as bolas dessa cor. Neste caso, existe uma variável aleatória  $X$  tal que*

$$(i) \quad \frac{V_n}{V_n + P_n} \xrightarrow{d} X,$$

$$(ii) \quad X \sim \text{Beta}\left(\frac{v_0}{a}, \frac{p_0}{a}\right).$$

*Demonstração.* Para mostrarmos a afirmação (i) é suficiente provar que  $M_n = V_n/(V_n + P_n)$  é um martingal à respeito de  $\mathfrak{F}_n$ , onde  $\mathfrak{F}_n$ ,  $n \geq 0$ , a filtração natural gerada por  $(V_n, P_n)$ . Seja  $(\xi_n)$ ,  $n \geq 1$ , a sequência de variáveis aleatórias com valores em  $\{0, \frac{1}{a}\}$  definida por

$$\xi_n = \frac{1}{a}(V_n - V_{n-1}),$$

e seja  $t_0 = v_0 + p_0$ . Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{V_{n+1}}{V_{n+1} + P_{n+1}} \mid \mathfrak{F}_n\right] \\ &= \frac{1}{(n+1)a + t_0} \mathbb{E}[V_n + a\xi_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n].\end{aligned}$$

Utilizando a linearidade da esperança condicional, propriedade  $(p_2)$  no Apêndice A.3, temos que  $\mathbb{E}[V_n + a\xi_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] = \mathbb{E}[V_n \mid \mathfrak{F}_n] + a\mathbb{E}[\xi_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n]$ . Observamos agora que  $V_n$  está adaptada a  $\mathfrak{F}_n$ , portanto da propriedade  $(p_2)$  no Apêndice A.3, obtemos  $\mathbb{E}[V_n \mid \mathfrak{F}_n] = V_n$ . Por outro lado, dado  $\mathfrak{F}_n$ ,  $\xi_n$  possui distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso  $M_n$ . Segue destas observações que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] &= \frac{1}{(n+1)a + t_0} \left( V_n + a \frac{V_n}{V_n + P_n} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)a + t_0} \left( V_n + a \frac{V_n}{na + t_0} \right) \\ &= \frac{V_n}{V_n + P_n} \\ &= M_n.\end{aligned}$$

A variável  $M_n = V_n/(V_n + P_n)$  está claramente adaptada a  $\mathfrak{F}_n$  pois  $\mathfrak{F}_n$  é a sigma álgebra gerada por  $(V_n, P_n)$ . Observamos também que  $\sup_n \mathbb{E}[M_n] < \infty$ , uma vez que  $0 \leq V_n/(V_n + P_n) \leq 1$  vale para todo  $n \geq 1$ . Segue portanto do Teorema de Convergência de Martingais, Teorema A.3.1, que existe uma variável aleatória  $X$  tal que

$$M_n = \frac{V_n}{V_n + P_n} \xrightarrow[\text{q.c.}]{} X.$$

Do Teorema A.4.1, isto por sua vez implica em  $M_n \rightarrow_d X$ , isto é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

para qualquer  $x \in [0, 1]$ , e termina portanto a demonstração da primeira afirmação do teorema.

O resto da demonstração consiste em identificar a distribuição da variável aleatória  $X$ . Seja  $(X_n)$ ,  $n \geq 1$ , a sequência de variáveis aleatórias Bernoulli com valores em  $\{0, 1\}$  definida por  $X_n = a\xi_n$ , e seja  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . O evento no qual  $k$  bolas vermelhas são extraídas nos primeiros  $n$  sorteios é o evento  $\{S_n = k\}$ . De acordo ao visto na Seção 3.2, temos que as variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são intercambiáveis. Sendo assim, independentemente da ordem na qual ocorram  $k$  sucessos, qualquer sequência de comprimento  $n$  com  $k$  sucessos possui a mesma probabilidade, portanto do Lema 3.2.1 temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = k) &= \binom{n}{k} \mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0) \\ &= \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{v_0 + ia}{t_0 + ia} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{p_0 + (j-k)a}{t_0 + ja} \\ &= \binom{n}{k} \frac{v_0(v_0 + a) \cdots (v_0 + (k-1)a) p_0(p_0 + a) \cdots (p_0 + (n-k-1)a)}{t_0(t_0 + a) \cdots (t_0 + (n-1)a)}.\end{aligned}$$

O quociente da ultima expressão é igual a

$$\frac{a^k (v_0/a)(v_0/a + 1) \cdots (v_0/a + k - 1) a^{n-k} p_0/a(p_0/a + 1) \cdots (p_0/a + n - k - 1)}{a^n (t_0/a)(t_0/a + 1) \cdots (t_0/a + n - 1)},$$

e em termos da função gamma ao considerar o fatorial ascendente  $x^{(r)} = x(x+1) \cdots (x+r-1) = \Gamma(x+r)/\Gamma(x)$  obtemos

$$\frac{(v_0/a)^{(k)}(p_0/a)^{(n-k)}}{(t_0/a)^n} = \frac{\Gamma(v_0/a+k)\Gamma(p_0/a+n-k)}{\Gamma(t_0/a+n)} \frac{\Gamma(t_0/a)}{\Gamma(v_0/a)\Gamma(p_0/a)}.$$

Utilizando a relação entre as funções beta e gamma em (3.2) podemos escrever

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} \frac{B(v_0/a+k, p_0/a+n-k)}{B(v_0/a, p_0/a)}. \quad (3.3)$$

Por outro lado, devido à intercambiabilidade das variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , segundo o Teorema de seleção de De Finetti, Teorema 3.3.1, temos que existe uma função de distribuição  $F$  concentrada em  $[0, 1]$  tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \binom{n}{k} \mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_n = 0) \\ &= \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dF(x), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $F$  é a função de distribuição limite da fração de sucessos na sequência  $X_n$ , isto é

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{V_n}{V_n + P_n} \leq x\right).$$

Comparando (3.3) e (3.4) obtemos

$$\frac{B(v_0/a+k, p_0/a+n-k)}{B(v_0/a, p_0/a)} = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dF(x). \quad (3.5)$$

Desenvolvemos a continuação a expressão a esquerda de (3.5), utilizando a definição da função beta. Da Definição 3.4.3,

$$\begin{aligned} \frac{B(v_0/a+k, p_0/a+n-k)}{B(v_0/a, p_0/a)} &= \frac{1}{B(v_0/a, p_0/a)} \int_0^1 x^{v_0/a+k-1} (1-x)^{p_0/a+n-k-1} dx \\ &= \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \frac{x^{v_0/a-1} (1-x)^{p_0/a-1}}{B(v_0/a, p_0/a)} dx. \end{aligned}$$

Comparando a expressão a direita da ultima igualdade com a expressão a direita da igualdade em (3.5) e utilizando a Definição 3.4.4, concluímos que  $dF(x) = f(x)dx$  onde  $f(x)$  é a densidade Beta com parâmetros  $v_0/a$  e  $p_0/a$ . Isto termina a demonstração da segunda afirmação do teorema.  $\square$



## **APÊNDICES**



## APÊNDICE A – A

### A.1 O Teorema de seleção de Helly

Apresentamos neste apêndice o Teorema de seleção de Helly. A sua demonstração segue o texto em [Capiński e Kopp \(2004, Teorema 7.19\)](#).

**Teorema A.1.1.** *Seja  $F_n$  uma sequência de funções de distribuição. Existe  $F$ , uma função de distribuição não necessariamente de probabilidade, e uma sequência  $k_n \rightarrow \infty$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{k_n}(x) = F(x),$$

nos pontos de continuidade de  $F$ .

*Demonstração.* Seja  $\{q_1, q_2, \dots\}$  uma enumeração dos racionais  $\mathbb{Q}$ . A sequência  $F_n(q_1)$  é limitada, pois para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  tem-se  $0 \leq F_n(x) \leq 1$ . Existe portanto uma subsequência convergente

$$F_{k_n^1}(q_1) \rightarrow y_1.$$

Consideramos agora a sequência  $F_{k_n^1}(q_2)$ . Por ser limitada, também temos a convergência para uma subsequência  $k_n^2$  de  $k_n^1$ , isto é,

$$F_{k_n^2}(q_2) \rightarrow y_2.$$

Claramente também temos

$$F_{k_n^1}(q_2) \rightarrow y_2.$$

Procedendo desta forma é possível definir as sequências  $k_n^3, k_n^4, \dots$ , cada uma sendo uma subsequência da sequência anterior, tal que

$$F_{k_n^3}(q_m) \rightarrow y_m \quad \text{para } m \leq 3,$$

$$F_{k_n^4}(q_m) \rightarrow y_m \quad \text{para } m \leq 4,$$

e assim por diante. A sequência diagonal  $F_{k_n} = F_{k_n^n}$  converge em todos os pontos racionais. Definimos  $F_{\mathbb{Q}}$  em  $\mathbb{Q}$  por

$$F_{\mathbb{Q}}(q) = \lim_n F_{k_n}(q),$$

e em seguida

$$F(x) = \inf \{F_{\mathbb{Q}}(q) : q \in \mathbb{Q}, q > x\}.$$

Mostramos a seguir que  $F$  é não decrescente e contínua a direita.

Mostramos que  $F$  é não decrescente. Como  $F_n$  são não decrescentes, o mesmo vale para  $F_{\mathbb{Q}}$ . De fato,  $q_1 < q_2$  implica em  $F_{k_n}(q_1) < F_{k_n}(q_2)$ , o qual permanece verdadeiro no limite. Seja agora  $x_1 < x_2$ .  $F(x_1) \leq F_{\mathbb{Q}}(q)$  para tudo  $q > x_1$  e assim em particular para todo  $q > x_2$ , portanto  $F(x_1) \leq \inf_{q > x_2} F_{\mathbb{Q}}(q) = F(x_2)$ .

Mostramos que  $F$  é contínua a direita. Seja  $x_n$  uma sequência decrescente com limite  $x$ . Pela monotonicidade de  $F$ ,  $F(x) \leq F(x_n)$  e assim  $F(x) \leq \lim_n F(x_n)$ . Suponhamos que  $F(x) < \lim F(x_n)$ . Da definição de  $F$  existe  $q \in \mathbb{Q}$ ,  $x < q$ , tal que  $F_{\mathbb{Q}}(q) < \lim_n F(x_n)$ . Para algum  $n_0$ ,  $x \leq x_{n_0} < q$ , portanto da definição de  $F$  segue  $F(x_{n_0}) \leq F_{\mathbb{Q}}(q)$ , logo  $F(x_{n_0}) < \lim_n F(x_n)$  o qual é uma contradição.

Finalmente, mostramos que de  $F$  é contínua em  $x$ , então  $F_{k_n}(x) \rightarrow F(x)$ . Seja  $\epsilon > 0$  arbitrário e sejam  $q_1, q_2$  e  $q_3$  racionais tais que  $q_1 < q_2 < x < q_3$  e

$$F(x) - \epsilon < F(q_1) \leq F(x) \leq F(q_3) < F(x) + \epsilon.$$

Como  $F_{k_n}(q_2) \rightarrow F_{\mathbb{Q}}(q_2) \geq F(q_1)$ , para  $n$  suficientemente grande tem-se

$$F(x) - \epsilon < F_{k_n}(q_2).$$

Observamos que  $F_{k_n}$  é não decrescente, portanto

$$F_{k_n}(q_2) \leq F_{k_n}(x) \leq F_{k_n}(q_3).$$

Por fim,  $F_{k_n}(q_3) \rightarrow F_{\mathbb{Q}}(q_3) \geq F(q_1)$ , e assim para  $n$  suficientemente grande segue que

$$F_{k_n}(q_3) < F(x) + \epsilon.$$

Juntando as desigualdades acima concluímos que

$$F(x) - \epsilon < F_{k_n}(x) < F(x) + \epsilon,$$

o qual prova a convergência.  $\square$

## A.2 Aproximação assintótica de $(x)_r$

Nesta seção descrevemos o comportamento assintótico do símbolo de Pochhammer  $(x)_r$ , quando  $x \rightarrow \infty$ . Estas quantidades são consideradas na demonstração do Teorema de De Finetti, no Capítulo 3. Sejam  $f, g$  duas funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é assintoticamente equivalente a  $g$  se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

e neste caso escrevemos  $f \sim g$ . Um exemplo disto é a seguinte equivalência

$$x! \sim \sqrt{\pi 2x} \left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

conhecida como a aproximação de Stirling para  $x!$ .

**Lema A.2.1.**  $(x)_r \sim x^r$ .

*Demonstração.* Mostraremos primeiro que para quaisquer  $x, a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} \sim x^{a-b}. \quad (\text{A.1})$$

Consideramos as aproximações de Stirling,  $\Gamma(x+a) \sim \sqrt{2\pi} x^{x+a-1} e^{-x} x^{\frac{1}{2}}$  e  $\Gamma(x+b) \sim \sqrt{2\pi} x^{x+b-1} e^{-x} x^{\frac{1}{2}}$ , descritas em [Olver et al. \(2024\)](#). Assim

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+a)}{\sqrt{2\pi} x^{x+a-1} e^{-x} x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+b)}{\sqrt{2\pi} x^{x+b-1} e^{-x} x^{\frac{1}{2}}} = 1$$

e portanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+a)/x^a}{\Gamma(x+b)/x^b} = 1$$

o qual mostra (A.1). Da identidade  $x! = \Gamma(x+1)$  e (A.1) obtemos finalmente

$$(x)_r = x(x-1) \cdots (x-r+1) = \frac{x!}{(x-r)!} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-r+1)} \sim x^{1-(r+1)} = x^r. \quad \square$$

### A.3 Martingais

Os martingais são essenciais na teoria de probabilidade contemporânea. O material desta seção foi tomado em parte de [Williams \(1991\)](#).

Seja  $\Omega$  um espaço amostral e  $\mathfrak{F}$  uma sigma álgebra de  $\Omega$ . Utilizamos a notação  $(\Omega, \mathfrak{F})$  sempre e quando este seja o caso. Denotamos por  $\mathfrak{B}$  a sigma álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$ .

**Definição A.3.1** ([Williams, 1991](#), Seção 3.1). Seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Para  $A \subseteq \mathbb{R}$ , define-se

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$

$X$  é adaptada a  $\mathfrak{F}$  se  $X^{-1} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{F}$ , isto é,  $X^{-1}(A) \in \mathfrak{F}, \forall A \in \mathfrak{B}$ .

**Definição A.3.2.** Seja  $\Omega$  um espaço amostral e  $\mathfrak{F}$  uma sigma álgebra de  $\Omega$ . Uma filtração de  $(\Omega, \mathfrak{F})$  é uma sequência  $(\mathfrak{F}_n), n \geq 1$ , de sigma álgebras de  $\Omega$  tal que para todo  $n, \mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}_{n+1}$ , e  $\lim_n \mathfrak{F}_n = \bigcup_n \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$ .

**Definição A.3.3** ([Williams, 1991](#), Seção 10.3). Seja  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e  $\mathfrak{F}_n, n \geq 1$  uma filtração de  $(\Omega, \mathfrak{F})$ . Seja  $M = (M_n), n \geq 1$ , uma sequência de variáveis aleatórias em  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ .  $M_n$  é um martingal a respeito de  $\mathfrak{F}_n$  se:

- (i)  $M_n$  está adaptado a  $\mathfrak{F}_n$ ,
- (ii)  $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty, \forall n$ ,
- (iii) quase certamente  $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathfrak{F}_n] = M_n$ .

**Teorema A.3.1** ([Williams, 1991](#), Seção 11.5). *Seja  $M$  um martingal tal que  $\sup_n \mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ . Existe uma variável aleatória finita  $X$  tal que  $X = \lim_n M_n$ .*

Enunciamos a seguir duas propriedades de esperança condicional utilizadas na demonstração do primeiro item do Teorema 3.4.1. Ambas foram tomadas da Seção 9.7 em [Williams \(1991\)](#).

(p<sub>1</sub>) Se  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  está adaptada a  $\mathfrak{F}$ , então  $\mathbb{E}[X \mid \mathfrak{F}] = X$ .

(p<sub>2</sub>) Sejam  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ , logo  $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathfrak{F}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathfrak{F}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathfrak{F}]$ .

### A.4 Convergência de variáveis aleatórias

Apresentamos neste apêndice um resultado bem conhecido, o qual estabelece a relação entre convergência quase certa e em distribuição. A sua demonstração pode ser encontrada em [James \(2023\)](#).

**Teorema A.4.1.** *Sejam  $(X_n), n \in \mathbb{N}$ , e  $X$  respectivamente uma sequência de variáveis aleatórias e uma variável aleatória em definidas em  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . Em geral vale*

$$X_n \xrightarrow[\text{q.c.}]{} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X.$$



## APÊNDICE B – B

Neste Apêndice apresentamos o código Python utilizado para gerar as figuras desta tese. Em particular, o código da Seção B.1 é utilizado para desenvolver as atividades em sala descritas no Capítulo 2.

### B.1 Código para simular a probabilidade condicional

Esta seção apresenta o código utilizado para simular o processo da urna de Pólya. Especificamente, este foi utilizado para gerar a Figura 3.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def Polya_2x():
    r1 = np.random.binomial(1, 1/2)
    if r1 == 1:
        p = 2/3
    else:
        p = 1/3
    r2 = np.random.binomial(1, p)
    return r1, r2

def redred(seed1, seed2, n):
    # Conjunto de dados 1
    np.random.seed(seed1)
    rr1 = 0
    rb1 = 0
    v1 = []
    for _ in range(n):
        a = Polya_2x()
        if a[0] == 1 and a[1] == 1:
            rr1 += 1
        if a[0] == 1 and a[1] == 0:
            rb1 += 1
        v1.append(rr1 / (rr1 + rb1) if rr1 + rb1 > 0 else 0)

    # Conjunto de dados 2
    np.random.seed(seed2)
    rr2 = 0
    rb2 = 0
    v2 = []
    for _ in range(n):
        a = Polya_2x()
        if a[0] == 1 and a[1] == 1:
            rr2 += 1
        if a[0] == 1 and a[1] == 0:
            rb2 += 1
        v2.append(rr2 / (rr2 + rb2) if rr2 + rb2 > 0 else 0)
```

```

# Plotando os dois conjuntos de dados
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(v1, linewidth=2)
plt.plot(v2, linewidth=2)

plt.axhline(y=2/3, color='black', linestyle='--')
plt.ylim(0, 1)
plt.show()

```

## B.2 Código para simular a urna de Pólya

Esta seção apresenta o código utilizado para simular o processo da urna de Pólya. Este foi utilizado para gerar as Figuras 4, 5, 6 e 7

```

from matplotlib import pyplot, transforms
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import array as arr
from scipy.stats import beta
import random

```

```

def simula_urna_polya(numero_passos, bolas_pretas_iniciais,
                    bolas_vermelhas_iniciais,
                    bolas_adicionadas):
    bolas_pretas = bolas_pretas_iniciais
    bolas_vermelhas = bolas_vermelhas_iniciais
    razoes = []
    for i in range(numero_passos):
        total_bolas = bolas_pretas + bolas_vermelhas
        razao_atual = bolas_pretas / total_bolas
        razoes.append((i, razao_atual))
        bola_escolhida = random.randint(1, total_bolas)
        if bola_escolhida <= bolas_pretas:
            bolas_pretas += bolas_adicionadas
        else:
            bolas_vermelhas += bolas_adicionadas
    return razoes

```

```

def simula_urna_polya2(numero_passos, bolas_pretas_iniciais,
                      bolas_vermelhas_iniciais,
                      bolas_adicionadas):
    bolas_pretas = bolas_pretas_iniciais
    bolas_vermelhas = bolas_vermelhas_iniciais
    razoes = []
    for i in range(numero_passos):
        total_bolas = bolas_pretas + bolas_vermelhas
        razao_atual = bolas_pretas / total_bolas
        bola_escolhida = random.randint(1, total_bolas)
        if bola_escolhida <= bolas_pretas:
            bolas_pretas += bolas_adicionadas
        else:

```

```

        bolas_vermelhas += bolas_adicionadas
    return razao_atual

```

```

def histograma(numero_passos, bolas_pretas_iniciais,
               bolas_vermelhas_iniciais, bolas_adicionadas,
               numero_simulacoes):
    h = []
    for i in range(numero_simulacoes):
        razao_atual = simula_urna_polya2(numero_passos,
                                         bolas_pretas_iniciais,
                                         bolas_vermelhas_iniciais,
                                         bolas_adicionadas)

        h.append(razao_atual)

    his=pyplot.hist(arr.array('d',h), bins=100,
                    orientation="horizontal",
                    color='salmon', density=True);
    x = np.linspace(0,1,300)
    y = beta.pdf(x,bolas_pretas_iniciais/bolas_adicionadas,
                 bolas_vermelhas_iniciais/bolas_adicionadas)
    base = pyplot.gca().transData
    rot = transforms.Affine2D().rotate_deg(90)
    line = pyplot.plot(x,-y, color='black', linewidth=1.5,
                       linestyle='-', transform= rot + base)

    ax = pyplot.gca()
    ax.set_xlim([-0.1, None])
    ax.set_ylim([-0.025, 1.025])
    pyplot.axis('off')

```

```

def caminhos(numero_passos, bolas_pretas_iniciais,
             bolas_vermelhas_iniciais,
             bolas_adicionadas, numero_simulacoes):
    for i in range(numero_simulacoes):
        razoes = simula_urna_polya(numero_passos,
                                    bolas_pretas_iniciais,
                                    bolas_vermelhas_iniciais,
                                    bolas_adicionadas)

        L = []
        for i in range(len(razoes)):
            L.append(razoes[i][1])
        pyplot.plot(L,color='black', linewidth=.5, linestyle='-')

    ax = pyplot.gca()
    ax.set_xlim([-numero_passos/50, numero_passos
                 + numero_passos/50])
    ax.set_ylim([-0.025, 1.025])
    pyplot.axis('off')

```



## REFERÊNCIAS

CAPLÍNSKI, M.; KOPP, E. **Measure, integral and probability**. 2a. ed. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2004. xvi+311 p. (Springer Undergraduate Mathematics Series). [MR-2077699](#). ISBN 1-85233-781-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0645-6>.

EGGENBERGER, F.; PÓLYA, G. Über die statistik verketteter vorgäge. **Z. fur Angew. Math. Mech.**, v. 3, p. 279–289, 1923.

FREEDMAN, D. A. Bernard Friedman's urn. **Ann. Math. Statist.**, v. 36, p. 956–970, 1965. ISSN 0003-4851. [MR-177432](#). Disponível em: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177700068>.

HEATH, D.; SUDDERTH, W. De Finetti's theorem on exchangeable variables. **Amer. Statist.**, v. 30, n. 4, p. 188–189, 1976. ISSN 0003-1305. [MR-501301](#). Disponível em: <https://doi.org/10.2307/2683760>.

JAMES, B. R. **Probabilidade—um curso em nível intermediário**. 5a. ed. : Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2023. 327 p. (Projeto Euclides). [MR-4713009](#). ISBN 978-85-244-0455-9; 978-85-244-0522-8.

MAHMOUD, H. M. **Pólya urn models**. : CRC Press, Boca Raton, FL, 2009. xii+290 p. (Texts in Statistical Science Series). [MR-2435823](#). ISBN 978-1-4200-5983-0.

OLVER, F. W. J. *et al.* **NIST Digital Library of Mathematical Functions**. 2024. <https://dlmf.nist.gov/>, Versão 1.2.1 de 2024-06-15. **5.11 Gamma function properties: Asymptotic Expansions**. Disponível em: <https://dlmf.nist.gov/>.

ROSS, S. **Probabilidade: Um Curso Moderno com Aplicações**. 8a. ed. : Bookman, Porto Alegre, RS, 2010. 680 p. ISBN 978-8577806218.

WILLIAMS, D. **Probability with martingales**. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. xvi+251 p. (Cambridge Mathematical Textbooks). [MR-1155402](#). ISBN 0-521-40455-X; 0-521-40605-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511813658>.