

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

Paulo Henrique Gomes

**Estudo sobre equações diferenciais ordinárias e solução pelo Método de
Euler**

Ribeirão Preto-SP
2025

PAULO HENRIQUE GOMES

**Estudo sobre equações diferenciais ordinárias e solução pelo método de
Euler**

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia,
Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, como parte
das exigências para a obtenção do título de Mestre em
Matemática - Área: Matemática na Educação Básica.
Orientadora: Prof^a. Dr^a. Vanessa Rolnik Artioli.

Ribeirão Preto-SP
2025

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Gomes, Paulo Henrique
**Estudo sobre equações diferenciais ordinárias e solução
pelo Método de Euler**
Ribeirão Preto, 2025.
105 p. 36 il. ; 30 cm

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Filosofia,
Ciências e Letras de Ribeirão Preto/USP. Área de concentração:
Matemática na Educação Básica.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Vanessa Rolnik Artioli

1. Equações diferenciais ordinárias.
2. Itinerário pedagógico.
3. Método de Euler.
4. Recursos computacionais.

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa, Gegislaine, pelo incentivo constante para que eu retomasse os estudos e pelo apoio incondicional ao longo de toda essa caminhada. Sua compreensão nos momentos de maior exigência, especialmente diante do cansaço e da sobrecarga, foi essencial para que este trabalho se concretizasse.

Registro também minha sincera gratidão à minha orientadora, Prof^a Vanessa Rolnik, pela paciência, disponibilidade e olhar atento durante todas as etapas deste processo. Desde os primeiros encontros até a versão final deste trabalho, suas orientações foram fundamentais para o desenvolvimento da pesquisa, sempre conduzidas com profissionalismo, rigor acadêmico e acolhimento.

Estendo meus agradecimentos aos colegas e professores que compartilharam comigo esta jornada, bem como à Universidade de São Paulo (USP), pela formação sólida e pelo ambiente acadêmico que favoreceu o crescimento intelectual e humano necessário à realização deste trabalho.

Dedico a minha esposa Gegislaine Terezinha de Oliveira pelo apoio incondicional.

“A minha grande teoria é que, embora o mundo pareça confuso e caótico, se o transferirmos para o mundo dos números e formas, padrões vão surgir e começamos a entender porque é que as coisas são como são.”

(Marcus du Sautoy)

RESUMO

GOMES, P. H. **Estudo sobre equações diferenciais ordinárias e solução pelo Método de Euler**. 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, São Paulo, 2025.

Este trabalho tem como objetivo propor um roteiro de itinerário pedagógico sobre Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de uma perspectiva aplicada e acessível a alunos do Ensino Médio. Permeado por aplicações em áreas como Física, Química e Biologia, o roteiro favorece a interdisciplinaridade, além de evidenciar a importância dos modelos matemáticos na compreensão de fenômenos naturais. O texto está embasado em técnicas analíticas de resolução de EDOs de primeira ordem e de sistemas de EDOs de primeira ordem, bem como em técnicas de análise qualitativa, como os pontos de equilíbrio e os campos de direções; trata também do método de Euler para aproximação das soluções, em seus aspectos teóricos e práticos; e utiliza planilhas eletrônicas para construção dos campos de direções, automatização do método de Euler e visualização das soluções aproximadas obtidas. O itinerário pretende desenvolver nos alunos habilidades de resolução de problemas, raciocínio lógico, uso de planilhas e softwares, análise gráfica, organização de gráficos e simulação computacional. As aulas são propostas de forma a explorar as diversas abordagens pedagógicas como discussão em grupo, oficinas práticas, estudo em laboratório de informática e aulas expositivas. Esperamos que este trabalho sirva de inspiração aos professores e que possa contribuir para a formação de estudantes mais críticos e preparados para os desafios contemporâneos.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias; Itinerário pedagógico; Método de Euler; Recursos computacionais.

ABSTRACT

GOMES, P. H. **Study on ordinary differential equations and solution by Euler's method**. 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da USP, São Paulo, 2025.

This work aims to propose a pedagogical itinerary for Ordinary Differential Equations (ODEs) from an applied and accessible to high school students perspective. Interspersed with applications in fields such as Physics, Chemistry, and Biology, the itinerary promotes interdisciplinarity and highlights the importance of mathematical models in understanding natural phenomena. The text is based on analytical techniques for solving first-order ODEs and first-order ODE systems, as well as on qualitative analysis techniques, such as equilibrium points and direction fields; it also addresses Euler's method for approximating solutions, in its theoretical and practical aspects; and uses spreadsheets to construct direction fields, automate Euler's method, and visualize the approximated solutions obtained. The itinerary aims to develop in the students skills in problem-solving, logical reasoning, use of spreadsheets and software, graphical analysis, organization of graphs and computer simulation. The classes are designed to explore various pedagogical approaches, such as group discussions, hands-on workshops, computer lab work, and lectures. We hope this work will serve as inspiration to teachers and contribute to the development of more critical and prepared for contemporary challenges students.

Keywords: Ordinary differential equations; Pedagogical itinerary; Euler's Method; Computational resources.

Conteúdo

1	Equações diferenciais ordinárias	14
1.1	Revisão de cálculo diferencial e integral	14
1.2	Exemplos motivacionais	19
1.3	Técnicas de solução de EDOs	20
1.4	Campos de direções e análise qualitativa	31
1.5	Aplicações em dinâmica populacional	36
1.5.1	Crescimento exponencial: modelo de Malthus	36
1.5.2	Crescimento logístico: modelo de Verhulst	37
2	Sistemas de EDOs	41
2.1	Exemplos motivacionais	42
2.2	Sistema de EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes	45
2.3	Sistema de EDOs lineares não homogêneas com coeficientes constantes	53
2.4	Sistemas autônomos localmente lineares	57
2.5	Aplicações em dinâmica populacional	61
2.5.1	Modelo de espécies em competição	61
2.5.2	Modelo presa-predador	64
3	Soluções numéricas	67
3.1	Método de Euler para uma EDO	67
3.2	Método de Euler para sistemas de EDOs	71
3.2.1	Exemplo do modelo de espécies em competição	73
3.2.2	Exemplo do modelo presa-predador	75
3.3	Convergência do método de Euler	75
4	Roteiro do itinerário pedagógico	84
4.1	Cronograma	84
4.2	Elaboração e desenvolvimento de aulas	85
5	Conclusões	95
A	Resolução da equação logística	96
B	Cálculos dos autovalores e autovetores da Seção 2.2	98

Lista de Figuras

1.1	Gráfico da função $f(x) = x^2$ com duas retas tangentes.	16
1.2	Gráfico da função $V(t) = 2t^3 + 2t^2 + 10t + 50$, solução da EDO (1.22) com condição inicial $V(0) = 50$	22
1.3	Gráfico da função $y(t) = \sqrt{\frac{2}{3} \ln 1 + x^3 + 4}$, solução do PVI (1.32).	25
1.4	Gráfico da função $P(t) = 100e^{0,1386t}$, solução da do problema de crescimento de uma população de bactérias.	26
1.5	Gráfico da função $y(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2t} + Ce^{-3t}$, solução da EDO (1.46), para alguns valores de C	29
1.6	Gráfico da função $y(t) = 4 \cos t + 8 \sin t - 5e^{-t/2}$, solução do PVI (1.50).	30
1.7	Gráfico da função $T(t) = 45 + 35e^{-0,2t}$, solução do PVI (1.54).	31
1.8	Campo de direções da EDO (1.58).	36
1.9	Gráficos da função $y(t) = y_0e^{rt}$, solução do PVI (1.59), com $r = 0,75$ fixo, para alguns valores de y_0	37
1.10	Taxa de crescimento $f(y)$ no modelo logístico.	38
1.11	Campo de Direções para o modelo de crescimento logístico (1.63) com $r = 0,75$ e $k = 4$	39
1.12	Gráficos de soluções do modelo de crescimento Logístico com $r = 0,75$, $k = 4$ e $y_0 = 0, 5; 2; 4; 8$	40
2.1	Circuito elétrico LRC em paralelo.	42
2.2	Campo de direções para o caso de autovalores reais e positivos distintos.	47
2.3	Campo de direções para o caso de autovalores reais e opostos.	48
2.4	Campo de direções para o caso de autovalores reais negativos e distintos.	49
2.5	Campo de direções para o caso de autovalores reais positivos e repetidos.	51
2.6	Campo de direções para o caso de autovalores reais negativos e repetidos.	52
2.7	Campo de direções para o caso de autovalores complexos.	53
2.8	Campo de direções para o sistema de EDOs (2.50).	60
2.9	Campo de direções para o modelo de espécie em competição (2.55).	63
2.10	Campo de direções para o modelo presa-predador (2.57).	65
3.1	Cálculos no Excel — Método de Euler aplicado ao resfriamento com aquecimento externo.	69
3.2	Gráficos das soluções analítica e numérica do Exemplo 11.	70
3.3	Comparação entre o gráfico da solução analítica e do Método de Euler para o Exemplo 12.	71
3.4	Gráfico da solução aproximada $(y_{1,n}, y_{2,n})$ do Exemplo 13 obtida pelo método de Euler com $t_f = 18$ e $h = 0,1$	73

3.5	Evolução das populações x e y ao longo do tempo no modelo de espécies em competição.	74
3.6	Diagrama de fase ilustrando o comportamento das populações x e y no modelo de espécies em competição, obtido pelo método de Euler usando planilha eletrônica.	74
3.7	Campo de direções gerado a partir dos cálculos, representando graficamente a interação entre presa e predador.	75
3.8	Evolução das populações x e y ao longo do tempo no modelo presa-predador.	76
3.9	Diagrama de fase ilustrando o comportamento das populações x e y no modelo presa-predador, obtido pelo método de Euler usando planilha eletrônica.	76
3.10	Gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{3}$ e a interpretação geométrica do método de Euler.	77
3.11	Gráfico ilustrando o Teorema do Valor Médio (TVM).	79
3.12	Comparação das soluções exatas e numérica, com $h = 0,1$ e $0,001$	81
3.13	Comparação da solução $x_1(t)$ com as aproximações usando $h = 0,1$ e $h = 0,01$	82
3.14	Comparação da solução $x_2(t)$ com as aproximações usando $h = 0,1$ e $h = 0,01$	83

Introdução

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) compõem uma poderosa classe de ferramentas matemáticas, que permite modelar fenômenos reais que variam continuamente ao longo do tempo, ou de outra variável independente, nas mais diversas áreas do conhecimento, como Engenharias, Medicina, Economia, entre outras.

A versatilidade das EDOs não está presente apenas na modelagem de fenômenos complexos, existem aplicações mais simples, tangíveis aos alunos do Ensino Médio. Por exemplo, podem ser modelados com EDOs problemas da área de Física como aquecimento e resfriamento de corpos, circuitos elétricos e sistemas massa-mola; da área de Química, como acúmulo de água em recipientes e problemas de misturas; e da área de Biologia, como crescimento populacional, modelo de competição entre espécies e modelo presa-predador.

No entanto, tanto a teoria quanto as técnicas de resolução das EDOs necessitam de conceitos mais avançados, do Cálculo Diferencial e Integral, impedindo que as EDOs sejam ensinadas da forma tradicional a alunos do Ensino Médio. De forma que, caso professor tenha interesse em apresentar o assunto a um grupo de alunos interessados, deve abordá-lo com auxílio de ferramentas que permitam tornar o aprendizado acessível e agradável.

Assim, nosso objetivo é propor um roteiro de itinerário pedagógico para o ensino de EDOs voltado a alunos do terceiro ano do Ensino Médio, permeado por aplicações em áreas como Física, Química e Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade e evidenciando a importância dos modelos matemáticos na compreensão de fenômenos naturais. Um segundo objetivo é oferecer um material para auxiliar os professores de Matemática do Ensino Médio na compreensão do tema com uma certa profundidade, para que possam trabalhar de forma segura e assertiva com os alunos.

Para tornar essa proposta exequível no contexto do ensino médio, incluindo escolas com recursos limitados, optou-se pela utilização de métodos numéricos para aproximação das soluções das EDOs, ao invés do cálculo das soluções exatas. Especificamente, utilizamos o Método de Euler, que possui uma fórmula algébrica simples e produz resultados suficientemente precisos para o escopo deste projeto. Além disso, o uso de planilhas eletrônicas, como Excel, LibreOffice Calc e Google Planilhas, foi escolhido por sua acessibilidade e potencial pedagógico, possibilitando a realização dos extensos cálculos necessários, a representação gráfica das soluções e a construção de planos de fase e campos de direções.

A proposta está de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente no que diz respeito ao desenvolvimento de competências voltadas à resolução de problemas, à modelagem matemática, ao uso de ferramentas tecnológicas acessíveis e à interdisciplinaridade. As aulas são propostas de forma a explorar as diversas abor-

dagens pedagógicas como discussão em grupo, oficinas práticas, estudo em laboratório de informática e aulas expositivas. Apesar de não ter sido aplicado em sala de aula até a finalização deste trabalho, espera-se que o roteiro sirva de inspiração aos professores e que possa contribuir para a formação de estudantes mais críticos e preparados para os desafios contemporâneos.

O texto possui a seguinte divisão de capítulos. No Capítulo 1, apresentamos os conceitos iniciais sobre EDOs de primeira ordem e uma revisão dos principais tópicos de cálculo diferencial e integral que embasam as técnicas de resolução dessas equações. Também incluímos problemas motivadores com temas que dialogam com outras disciplinas, como Física, Química e Biologia, por exemplo, o crescimento de bactérias e o acúmulo de água em recipientes. Ao final, discutimos algumas estratégias de resolução de EDOs de primeira ordem e o uso de campos de direções como recurso visual para compreender as características das soluções.

No Capítulo 2, passamos ao estudo de sistemas de EDOs de primeira ordem, introduzindo o tema por meio de exemplos concretos, como circuitos elétricos, o sistema massa-mola e o problema da mistura química. Estudamos especificamente os sistemas com coeficientes constantes, tanto lineares quanto não lineares, e discutimos a ideia de sistemas autônomos localmente lineares. Este capítulo se encerra com a aplicação dos conceitos em modelos populacionais, especialmente os de competição entre espécies e o clássico modelo presa-predador.

O Capítulo 3 traz a fundamentação teórica do método de Euler para aproximação de soluções tanto de uma EDO quanto de um sistema de EDOs. Utilizamos planilhas eletrônicas como ferramenta de apoio para o traçado dos gráficos das soluções aproximadas obtidas. Em destaque, analisamos novamente o modelo presa-predador, agora com foco em sua solução aproximada e do traçado do diagrama de fases utilizando essas soluções.

No Capítulo 4, propomos um itinerário com duração de 13 aulas de 50 minutos cada, voltado ao terceiro ano do Ensino Médio. Essa sequência inclui momentos expositivos e práticos, bem como o uso do laboratório de informática para a construção de gráficos, campos de direções e planos de fase. A proposta se encerra com uma atividade em que os próprios alunos são convidados a elaborar e apresentar um modelo matemático, integrando os conhecimentos adquiridos ao longo do percurso.

Por fim, o Capítulo 5 traz as conclusões desta dissertação, quanto à escolha do tema, das aplicações, do método de resolução e do recurso computacional.

Capítulo 1

Equações diferenciais ordinárias

Neste capítulo, vamos considerar equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (1.1)$$

em que $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada, e uma condição inicial

$$y(t_0) = y_0, \quad (1.2)$$

$y_0 \in \mathbb{R}$, sendo que (1.1) - (1.2) formam um problema de valor inicial (PVI). Uma solução do PVI (1.1)–(1.2) é uma função $y(t)$, definida no intervalo $[t_0, t_f]$, derivável em (t_0, t_f) e que satisfaz simultaneamente a EDO (1.1) para todo $t \in [t_0, t_f]$ e a condição inicial (1.2).

No geral, vamos considerar PVIs que tenham uma única solução. Para estudo sobre existência e unicidade de solução de PVIs, recomendamos as referências [BD,SIL].

Começamos com uma breve revisão de cálculo diferencial e integral com o objetivo de estabelecer alguns conceitos e notações preliminares, necessários para a compreensão do restante do texto. Em seguida, apresentamos técnicas de resolução para os PVIs do tipo (1.1) - (1.2), acompanhadas de exemplos numéricos e aplicações em problemas contextualizados. Comentamos sobre os campos de direções, importante ferramenta para análise qualitativa de soluções dos PVIs. Finalizamos com o estudo de dois modelos de crescimento populacional.

1.1 Revisão de cálculo diferencial e integral

Nos atemos aos conceitos que são diretamente utilizados ao longo do texto. Para mais detalhes, indicamos as referências [STW,TWH] ou qualquer outro livro de Cálculo diferencial e integral.

Um conceito que ocupa papel central neste trabalho é o de derivada. Em especial, sua interpretação como taxa de variação se faz muito importante para a compreensão de modelos de fenômenos que evoluem com o tempo, como crescimento populacional, velocidade, fluxo de calor, entre muitos outros; além de ser a base conceitual para a aplicação do método de Euler, que é apresentado no Capítulo 3.

Seja I um intervalo aberto não vazio e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real, dada por $y = f(x)$. Dizemos que a função f é derivável no ponto $a \in I$ se existir o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (1.3)$$

Quando esse limite existe, ele é chamado de derivada da função f no ponto a . As notações usuais para representar a derivada são

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \text{ou} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}.$$

De forma equivalente, a derivada também pode ser expressa por meio do chamado incremento $h = x - a$, assumindo a formulação

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Assim, define-se a função derivada de f em um intervalo I , como a função que associa a cada ponto $x \in I$, sempre que o limite existir, o valor

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Em outras palavras, dizemos que uma função é derivável em I quando sua derivada existe em todos os pontos do intervalo I .

Por exemplo, para a função $f(x) = x^2$, calculamos

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h}.$$

Desenvolvendo o quadrado do binômio, cancelando os termos semelhantes e fatorando o numerador, obtemos

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2a + h)}{h}.$$

Cancelando o fator h no numerador e denominador e calculando o limite, chegamos ao resultado

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a,$$

de onde concluímos que a derivada da função $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Figura 1.1 mostra o gráfico da função $f(x) = x^2$ juntamente com duas retas tangentes ao gráfico em pontos distintos $(-5, 25)$ e $(10, 100)$, de equações dadas, respectivamente, por $h(x) = -10x - 25$ e $g(x) = 20x - 100$. Observamos que o coeficiente angular dessas retas corresponde ao valor da derivada da função naquele ponto específico, ou seja, $f'(-5) = 2 \times (-5) = -10$ para a reta dada por $h(x)$ e $f'(10) = 2 \times 10 = 20$ para a reta dada por $g(x)$.

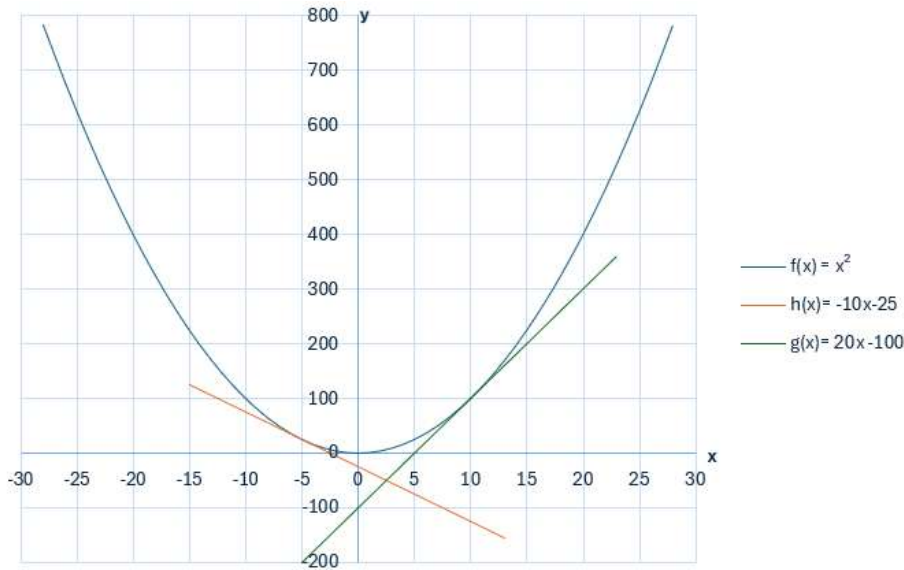


Figura 1.1: Gráfico da função $f(x) = x^2$ com duas retas tangentes.

Já a definição de taxa de variação média de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ou, considerando $h = x_2 - x_1 \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}. \quad (1.4)$$

Em termos de gráfico, a taxa de variação média de f no intervalo $[x_1, x_2]$ é o coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$.

Assim, podemos interpretar a derivada (1.3) como sendo a taxa de variação instantânea fazendo h tender a zero em (1.4). A taxa de variação instantânea, a derivada, é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva que passa pelo ponto $P(x_1, f(x_1))$.

Também podemos calcular a derivada segunda de uma função f como sendo a derivada da função derivada da f , ou seja,

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right),$$

e da mesma forma, podemos definir derivadas de ordem superior.

Por exemplo, a velocidade instantânea é a derivada da função que indica a posição em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é $s = f(t)$, então sua velocidade no instante t é

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

enquanto a aceleração instantânea é a derivada da velocidade em relação ao tempo. Se a posição de um corpo no instante t é $s = f(t)$, então sua aceleração no instante t é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (1.5)$$

A seguir, destacamos algumas regras de derivada que usamos no texto. Considerando que f e g são funções deriváveis em x , isto é, $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, e que c é uma constante, então

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$;
- $\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$;
- (regra do tombo) se n for um inteiro positivo, então $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$;
- (regra da soma) $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$;
- (regra do produto) $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$;
- (regra da cadeia) se $f(u)$ é derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ é derivável em x , então

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{u}f(u)\frac{d}{dx}g(x).$$

Usando a definição de derivada é possível mostrar que

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x \quad e \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Terminamos essa breve revisão com a definição de primitiva de uma função e o Teorema Fundamental do Cálculo que relaciona a derivada e a integral.

Uma função $F(x)$ é uma primitiva de uma função $f(x)$ se

$$F'(x) = f(x),$$

para qualquer x no domínio de f . O conjunto de todas as primitivas de f é a integral indefinida de f em relação a x , denotada por

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

em que \int é o símbolo de uma integral, a função $f(x)$ é chamada de integrando, x é a variável de integração e C é a constante de integração.

Por exemplo,

$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C,$$

pois, derivando a primitiva, $F'(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}e^{2x} + C)$, obtemos o integrando, $f(x) = e^{2x}$.

Na expressão simbólica de uma integral definida

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

a é o limite inferior da integração, b o limite superior da integração, o intervalo $[a, b]$ é o intervalo de integração. Um dos principais resultados sobre as integrais definidas é o de que se $f(x)$ é contínua sobre um intervalo $[a, b]$, então ela é integrável neste intervalo.

O Teorema Fundamental do Cálculo, cujo enunciado pode ser encontrado em todos os livros de Cálculo, possui duas partes. A Parte 1, nos diz que se $f(t)$ for uma função contínua em $[a, b]$, a integral desde qualquer número fixo a até um outro número x define uma função cujo valor em x é

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

que é derivável em todo ponto x de $[a, b]$ e

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Em resumo, essa parte do teorema diz que toda função contínua tem uma primitiva e que o processo de integração e diferenciação são inversos um do outro. A Parte 2 mostra como calcular integrais definidas diretamente a partir das primitivas. Se f é contínua em todo ponto de $[a, b]$ e se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Por exemplo, para calcular $\int_{-1}^3 (x^3 + 1)dx$, encontramos uma primitiva mais simples de $f(x) = x^3 + 1$, $F(x) = \frac{x^4}{4} + x$ (com $C = 0$). Assim,

$$\int_{-1}^3 (x^3 + 1)dx = \left(\frac{81}{4} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 24.$$

Para as integrais definidas e indefinidas, valem as seguintes propriedades, para f e g integráveis, e F primitiva de f , e c constante:

- $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$;
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;
- (regra da substituição) $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$;
- (integração por partes) $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$;

Por exemplo, para $\int \sin(x^3)x^2 dx$, usamos a regra da substituição observando que $u = g(x) = x^3$, $g'(x) = \frac{1}{3}x^2$ e $f(u) = \sin(u)$. Assim,

$$\int \sin(u)\frac{1}{3}du = -\frac{1}{3} \cos(u) + C = -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C.$$

E para $\int xe^{-x} dx$, usamos a integração por partes fazendo $f(x) = x$ e $g'(x) = e^{-x}$, de onde calculamos $f'(x) = 1$ e $g(x) = -e^{-x}$. Assim,

$$\int xe^{-x}dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

1.2 Exemplos motivacionais

As EDOs são equações que envolvem funções de uma única variável e suas derivadas, como visto na Equação (1.1). Embora as EDOs sejam amplamente utilizadas nos cursos de exatas do Ensino Superior, de certa forma começam a ser abordadas nas aplicações em alguns conteúdos do ensino médio, quando os alunos empregam seus princípios sem terem sido apresentados formalmente a elas.

Um exemplo da sua utilização é no campo da Física, nas leis do movimento de Newton que são ensinadas aos alunos do primeiro, segundo e terceiro anos do Ensino Médio. A Segunda Lei de Newton é inicialmente definida por

$$F = ma, \quad (1.6)$$

onde F representa a força resultante, m a massa e a a aceleração. Substituindo a aceleração pela derivada de velocidade v em relação ao tempo t , conforme (1.5), temos

$$F = m \left(\frac{dv}{dt} \right). \quad (1.7)$$

Por sua vez, a velocidade v é a derivada da posição s em relação ao tempo e, portanto, a aceleração é a derivada segunda da posição em relação ao tempo. Com isso, podemos escrever

$$F = m \left(\frac{d^2s}{dt^2} \right). \quad (1.8)$$

Outro exemplo de utilização das EDOs é na cinética química, podendo modelar as velocidades das reações químicas e os fatores que as influenciam, como concentração dos reagentes, temperatura, superfície de contato, e a presença de catalisadores. Os alunos do Ensino Médio aprendem conceitos como a teoria das colisões, a energia de ativação, e as leis de velocidade, que ajudam a explicar como e por que as reações químicas ocorrem em diferentes velocidades.

Por exemplo, para uma reação de primeira ordem, na qual um reagente $[A]$ se converte em um produto B , a taxa de reação é proporcional à concentração do reagente $[A]$. A expressão para a taxa de reação é

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]. \quad (1.9)$$

O estudo das velocidades das reações químicas proporciona uma base importante para entender processos químicos que ocorrem tanto no cotidiano quanto em aplicações industriais.

De forma intuitiva, a noção de taxa de variação instantânea, ou seja, a noção de derivada, já é introduzida e desenvolvida no Ensino Médio, bem como a noção de equações diferenciais de primeira ordem para modelar processos que variam com o tempo. Ao longo do texto, outros exemplos são apresentados, incluindo aplicações em Biologia e Ecologia. Exemplos dessas aplicações podem ser encontrados e discutidos em [BD,STW].

1.3 Técnicas de solução de EDOs

Embora não exista um método geral para resolver EDOs, algumas técnicas foram desenvolvidas para classes específicas de equações. Para as equações de primeira ordem, como (1.1), destacam-se três classes principais que possuem técnicas analíticas de solução: as equações lineares, as equações separáveis e as equações exatas.

Começamos pela classe mais simples de EDOs, onde a função f do lado direito da Equação (1.1) depende apenas de x (técnica da integração direta). Em seguida, mostramos técnicas de solução para as equações separáveis (técnica de separação de variáveis) e para as equações lineares (técnica do fator integrante). Para outras técnicas, deixamos indicada a referência [BD].

Técnica da integração direta

A técnica de integração direta é aplicável às equações diferenciais de primeira ordem que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (1.10)$$

Esse tipo de equação representa situações em que a taxa de variação da variável dependente y depende exclusivamente da variável independente x .

Para resolver, integramos ambos os lados da Equação (1.10) em relação a x ,

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx. \quad (1.11)$$

Do lado esquerdo, temos a integral da derivada da função $y(x)$, o que resulta na própria função y mais uma constante de integração C . Do lado direito, o cálculo da integral depende da expressão de $f(x)$, de forma que por enquanto, deixamos apenas indicada. Assim, a solução da Equação (1.10) é

$$y = \int f(x) dx + C. \quad (1.12)$$

Seguem um exemplo e uma aplicação em um problema de física.

Exemplo 1. Resolver a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2x + 5. \quad (1.13)$$

Resolução. Aplicando a técnica de integração direta, integramos ambos os lados da Equação (1.13) em relação a x , obtendo

$$y = \int (4x^3 - 2x + 5) dx. \quad (1.14)$$

Calculando cada termo da integral, temos

$$\int 4x^3 dx = x^4 + c_1, \quad \int -2x dx = -x^2 + c_2, \quad \int 5 dx = 5x + c_3.$$

Somando os resultados, obtemos a solução de (1.13)

$$y = x^4 - x^2 + 5x + C. \quad (1.15)$$

Aplicação 1. Movimento retilíneo com aceleração constante

Um exemplo clássico da aplicação da integração direta ocorre na física, no estudo do movimento retilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Nesse tipo de movimento, a aceleração de um corpo é constante e o modelo é dado por

$$\frac{dv}{dt} = a, \quad (1.16)$$

onde v é a velocidade, em m/s, t é o tempo, em s, e a é a aceleração constante, em m/s².

Resolução. Aplicando a integração direta para determinar a velocidade em função do tempo, temos

$$v(t) = at + C_1. \quad (1.17)$$

Considerando a condição inicial $v(0) = v_0$, obtemos

$$v(0) = a \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0,$$

de onde concluímos que a função velocidade é

$$v(t) = at + v_0. \quad (1.18)$$

Sabemos que a velocidade é a taxa de variação da posição em relação ao tempo, isto é,

$$\frac{ds}{dt} = at + v_0. \quad (1.19)$$

Aplicando novamente a integração direta para determinar a posição $s(t)$, temos

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + C_2, \quad (1.20)$$

e considerando a condição inicial $s(0) = s_0$, obtemos

$$s(0) = \frac{a}{2} \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = s_0,$$

de onde concluímos que a função posição em relação do tempo é

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0. \quad (1.21)$$

Aplicação 2. Acúmulo de água em um reservatório

Um reservatório está sendo abastecido com água e a vazão de entrada no reservatório varia ao longo do tempo de acordo com a função

$$\frac{dV}{dt} = 6t^2 + 4t + 10, \quad (1.22)$$

onde V representa o volume de água no reservatório, em metros cúbicos, e t é o tempo, em horas. Sabe-se que no instante inicial, $t = 0$, o reservatório já contém 50 m³ de

água. Determine a função que expressa o volume de água no reservatório em função do tempo t .

Resolução. A equação diferencial que modela o problema é apresentada em (1.22). Aplicando a técnica de integração direta, integramos ambos os lados da equação em relação ao tempo t , obtendo

$$V = \int (6t^2 + 4t + 10) dt. \quad (1.23)$$

Calculando cada termo da integral

$$\int 6t^2 dt = 2t^3 + c_1, \quad \int 4t dt = 2t^2 + c_2, \quad \int 10 dt = 10t + c_3,$$

e somando os termos, obtemos a função volume geral

$$V(t) = 2t^3 + 2t^2 + 10t + C. \quad (1.24)$$

Aplicamos a condição inicial $V(0) = 50$ para determinar a constante C :

$$50 = 2(0)^3 + 2(0)^2 + 10(0) + C \quad \Rightarrow \quad C = 50.$$

Portanto, a função que expressa o volume de água no reservatório em função do tempo é

$$V(t) = 2t^3 + 2t^2 + 10t + 50. \quad (1.25)$$

A função $V(t)$ descreve como o volume de água no reservatório varia ao longo do tempo e a Figura 1.2 mostra seu gráfico.

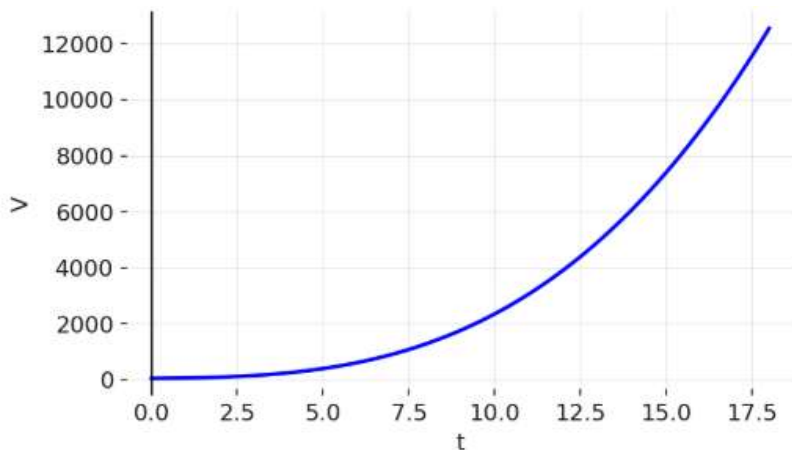


Figura 1.2: Gráfico da função $V(t) = 2t^3 + 2t^2 + 10t + 50$, solução da EDO (1.22) com condição inicial $V(0) = 50$.

Técnica de separação de variáveis

Uma equação diferencial é dita ser separável quando pode ser escrita na forma

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.26)$$

Para resolver (1.26), consideramos as funções H_1 e H_2 tais que

$$H_1'(x) = M(x) \quad \text{e} \quad H_2'(y) = N(y). \quad (1.27)$$

Substituindo na Equação (1.26), temos

$$H_1'(x) + H_2'(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.28)$$

Pela regra da cadeia e observando que $y = y(x)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H_1(x) &= H_1'(x), \\ \frac{d}{dx} H_2(y) &= H_2'(y) \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

Logo, a Equação (1.28) fica

$$\frac{d}{dx} H_1(x) + \frac{d}{dx} H_2(y(x)) = 0,$$

ou ainda, usando a regra da soma,

$$\frac{d}{dx} (H_1(x) + H_2(y(x))) = 0. \quad (1.29)$$

A Equação (1.29) pode ser integrada e sua integral é

$$H_1(x) + H_2(y) = C, \quad (1.30)$$

onde C é uma constante arbitrária.

Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaça a Equação (1.30) é uma solução da equação diferencial (1.26). A função (1.30) representa, portanto, uma solução implícita da equação diferencial.

Adicionando uma condição inicial

$$y(x_0) = y_0,$$

a solução da Equação (1.26) que satisfaz essa condição é obtida fazendo $x = x_0$ e $y = y_0$ na Equação (1.30), ou seja,

$$C = H_1(x_0) + H_2(y_0) = C,$$

que substituindo C em (1.30),

$$H_1(x) + H_2(y) = H_1(x_0) + H_2(y_0),$$

$$H_1(x) - H_1(x_0) + H_2(y) - H_2(y_0) = 0.$$

Por outro lado, aplicando os limites de integração e o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^x M(s) ds$$

$$H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^y N(s) ds$$

Portanto, a solução particular de (1.26), dada a condição inicial $y(x_0) = y_0$, é

$$\int_{x_0}^x M(s) ds + \int_{y_0}^y N(s) ds = 0. \quad (1.31)$$

A função (1.31) é uma representação implícita da solução da equação diferencial (1.26), que também satisfaz a condição inicial. Na maioria dos casos, essa solução permanece na forma implícita, uma vez que pode ser difícil ou até impossível isolar y em função de x de forma explícita. Nessas situações, é comum utilizar métodos numéricos para determinar valores aproximados da solução.

Exemplo 2. Resolver o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1+x^3)}, \\ y(0) = 2. \end{cases} \quad (1.32)$$

Resolução. Observamos que $N(y) = y$ e $M(x) = -\frac{x^2}{1+x^3}$. De acordo com a técnica apresentada, Equação (1.31), a solução de (1.32) é dada

$$-\int_0^x \frac{s^2}{1+s^3} ds + \int_2^y s ds = 0. \quad (1.33)$$

Calculando as integrais separadamente, obtemos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_2^y s ds = \frac{y^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{y^2}{2} - 2.$$

Para o termo em x , usamos a substituição $g(x) = 1+x^3$ com $g'(x) = 3x^2$, de forma que $x^2 dx = \frac{1}{3} du$, resultando em

$$\int \frac{s^2}{1+s^3} ds = \frac{1}{3} \ln |1+x^3| - \frac{1}{3} \ln |1+0^3| = \frac{1}{3} \ln |1+x^3|.$$

Portanto, a solução fica

$$\frac{y^2}{2} - 2 - \frac{1}{3} \ln |1+x^3| = 0, \quad (1.34)$$

Isolando y , temos

$$y = \sqrt{\frac{2}{3} \ln |1+x^3| + 4}, \quad (1.35)$$

solução que descreve o comportamento da variável y em função de x de forma explícita. É importante observar aqui que tomamos apenas a raiz positiva em (1.35), uma vez que a solução deve satisfazer a condição inicial $y(0) = 2$.

A Figura 1.3 apresenta o gráfico da solução do PVI (1.32) mostrando como é a evolução de y com os valores de x .

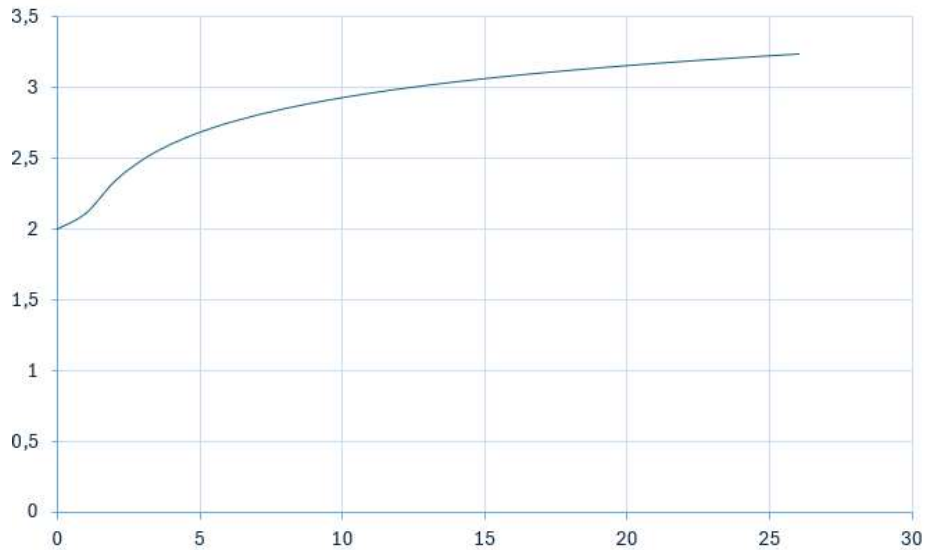


Figura 1.3: Gráfico da função $y(x) = \sqrt{\frac{2}{3} \ln |1 + x^3| + 4}$, solução do PVI (1.32).

Aplicação 3. Crescimento de uma população de bactérias

Considere uma população de bactérias cuja taxa de crescimento é proporcional à própria quantidade de bactérias no instante t . Inicialmente, a população é de 100 bactérias e, após 5 horas, atinge 200 bactérias.

Resolução. O modelo que descreve essa situação é dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad (1.36)$$

onde $P(t)$ representa a população no instante t e k é a constante de proporcionalidade.

A Equação (1.36) é do tipo separável com $N(P) = \frac{1}{P}$ e $M(t) = -k$. Portanto, a solução é dada por

$$\int \frac{1}{P} dP - \int k dt = 0,$$

de onde obtemos

$$\ln |P| = kt + c_1,$$

e, isolando P , temos

$$P = e^{kt+c_1} = Ce^{kt}.$$

onde $C = e^{c_1}$ é uma constante arbitrária.

Aplicando a condição inicial $P(0) = 100$, temos

$$100 = Ce^0 \Rightarrow C = 100.$$

Logo, a função da população é

$$P(t) = 100e^{kt}. \quad (1.37)$$

Utilizando a informação de que após 5 horas a população é 200, determinamos a constante k

$$200 = 100e^{5k} \Rightarrow 2 = e^{5k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5} \approx 0,1386.$$

Substituindo k na Equação (1.37), obtemos a solução do problema

$$P(t) = 100e^{0,1386t}. \quad (1.38)$$

A função $P(t)$ representa a solução particular da EDO (1.36) e que satisfaz a condição inicial fornecidas. A função descreve o comportamento da população de bactérias ao longo do tempo, apresentando crescimento exponencial. A Figura 1.4 ilustra esse fato.

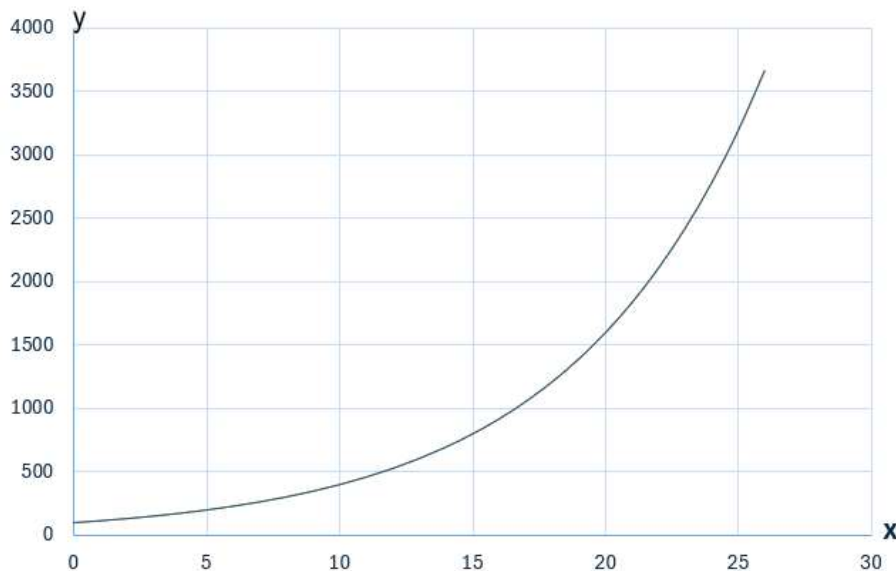


Figura 1.4: Gráfico da função $P(t) = 100e^{0,1386t}$, solução da do problema de crescimento de uma população de bactérias.

Técnica dos fatores integrantes

As EDOs lineares de primeira ordem são as que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t), \quad (1.39)$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções conhecidas e contínuas no intervalo considerado.

Para resolver EDOs do tipo (1.39), usamos a técnica dos fatores integrantes. Nessa técnica, a função denominada fator integrante $\mu(t)$ é utilizada para transformar a Equação (1.39) em uma forma que possa ser resolvida por uma integração direta. A seguir, explicamos como determinar o fator integrante e obter a solução de (1.39).

Buscamos uma função $\mu(t)$ que, ao multiplicarmos ambos os lados da Equação (1.39), transforme o lado esquerdo na derivada do produto $\mu(t)y$, de forma que, pela regra da cadeia, tenhamos

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu'(t)y. \quad (1.40)$$

Para isso, fazemos

$$\mu(t) \left(\frac{dy}{dt} + p(t)y \right) = \mu(t)q(t),$$

ou seja,

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t). \quad (1.41)$$

Comparando o lado direito de (1.40) com o lado esquerdo de (1.41), concluímos que a função desejada $\mu(t)$ deve satisfazer

$$\mu'(t) = \mu(t)p(t). \quad (1.42)$$

A Equação (1.42) é uma EDO do tipo separável com $M(t) = -p(t)$ e $N(\mu) = 1/\mu$ e sua solução é dada por (1.30), onde $H_1(t) = -\int p(t) dt$ e $H_2(\mu) = \int \frac{1}{\mu} d\mu$, resultando em

$$-\int p(t) dt + \ln |\mu(t)| = C.$$

Como estamos buscando por um fator integrante, podemos tomar o que tenha $C = 0$. Assim, reorganizando a equação e calculando a exponencial de ambos os lados, resulta no fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}. \quad (1.43)$$

Substituindo (1.43) em (1.41), obtemos

$$e^{\int p(t) dt} \frac{dy}{dt} + e^{\int p(t) dt} p(t)y = e^{\int p(t) dt} q(t). \quad (1.44)$$

Lembrando que o lado esquerdo é a derivada do produto $\mu(t)y$, integrando (1.44), resulta em

$$e^{\int p(t) dt} y = \int e^{\int p(t) dt} q(t) dt + C.$$

Isolando $y(t)$, obtemos a solução geral da equação diferencial linear de primeira ordem

$$y(t) = e^{-\int p(t) dt} \left(\int e^{\int p(t) dt} q(t) dt + C \right). \quad (1.45)$$

Exemplo 3. Resolver a EDO

$$\frac{dy}{dt} + 3y = t + e^{-2t}. \quad (1.46)$$

Resolução. A EDO (1.46) é do tipo linear e, comparando com (1.39), identificamos que $p(t) = 3$ e $q(t) = t + e^{-2t}$. Usamos diretamente a fórmula (1.43) para calcular o fator integrante. Assim,

$$\mu(t) = e^{\int 3 dt} = e^{3t}, \quad (1.47)$$

já considerando a constante de integração igual a zero. Agora, usando

$$y(t) = e^{-3t} \left(\int e^{3t}(t + e^{-2t}) dt + c_1 \right). \quad (1.48)$$

Calculamos as integrais, a primeira usando a técnica de integração por partes com $f(t) = t$ e $g'(t) = e^{3t}$ e a segunda diretamente da primitiva, obtendo

$$\int te^{3t} dt = \frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} + c_2,$$
$$\int e^{3t}e^{-2t} dt = \int e^t dt = e^t + c_3.$$

Substituindo em (1.48),

$$y(t) = e^{-3t} \left(\frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9} + c_2 + e^t + c_3 + c_1 \right).$$

Portanto, a solução da Equação (1.46) é

$$y(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2t} + Ce^{-3t}. \quad (1.49)$$

A função (1.49) expressa o comportamento da função $y(t)$ ao longo do tempo. A Figura 1.5 apresenta o gráfico de $y(t)$ onde é possível visualizar o comportamento dessa função em relação ao tempo, considerando diferentes valores da constante de integração C .

Exemplo 4. Resolver o PVI

$$y' + \frac{1}{2}y = 2 \cos t, \quad y(0) = -1. \quad (1.50)$$

Resolução. A equação diferencial é do tipo linear de primeira ordem, para a qual identificamos $p(t) = \frac{1}{2}$ e $q(t) = 2 \cos t$. O fator integrante $\mu(t)$ é dado por

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{2} dt} = e^{t/2} \quad (1.51)$$

Calculando, por partes, a integral

$$\int e^{\int p(t) dt} q(t) dt = \int e^{t/2} 2 \cos t dt = 4e^{t/2} \cos t + 8e^{t/2} \sin t + c_2,$$

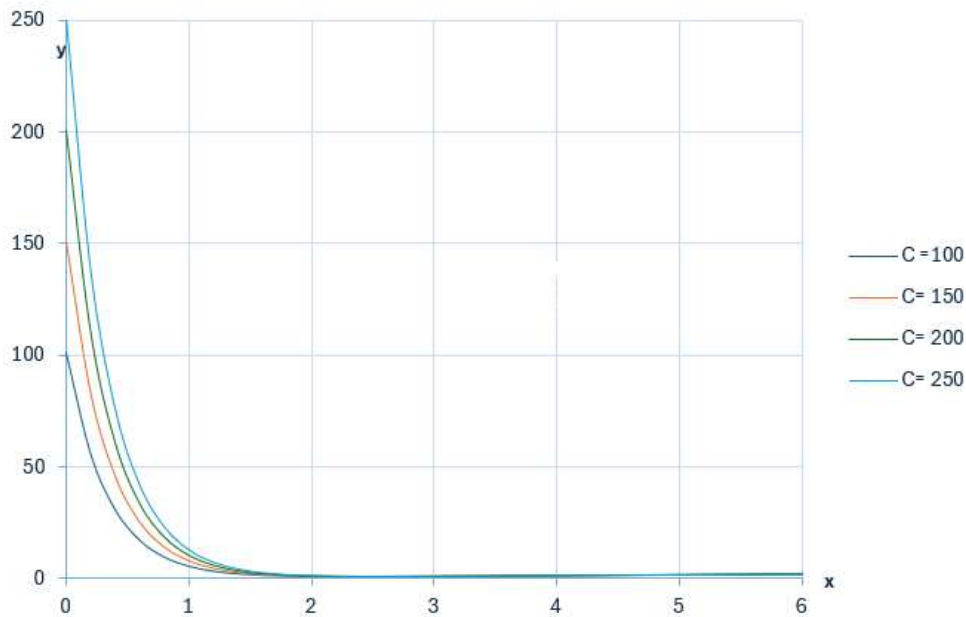


Figura 1.5: Gráfico da função $y(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2t} + Ce^{-3t}$, solução da EDO (1.46), para alguns valores de C .

de onde obtemos a solução

$$y(t) = e^{-t/2} (4e^{t/2} \cos t + 8e^{t/2} \sin t + c_2 + c_1),$$

ou seja,

$$y(t) = 4 \cos t + 8 \sin t + Ce^{-t/2}. \quad (1.52)$$

Aplicando a condição inicial $y(0) = -1$, determinamos a constante C

$$-1 = 4 \cos(0) + 8 \sin(0) + Ce^0 \Rightarrow C = -5.$$

Substituindo na Equação (1.52), a solução particular do problema de valor inicial é

$$y(t) = 4 \cos t + 8 \sin t - 5e^{-t/2} \quad (1.53)$$

A Figura 1.6 mostra o gráfico da solução do PVI (1.50), permitindo visualizar o comportamento da solução ao longo do tempo.

Aplicação 4. Resfriamento com aquecimento externo

Um objeto aquecido está em um ambiente cuja temperatura é constante de 20°C . Pela Lei do Resfriamento de Newton, a taxa de variação da temperatura do objeto é proporcional à diferença entre sua temperatura $T(t)$ e a temperatura ambiente. Além disso, uma fonte externa aquecendo o objeto a uma taxa constante de 5°C por unidade de tempo, e a constante de proporcionalidade de resfriamento do objeto é $k = 0,2$ e sua temperatura inicial quando exposto ao ambiente é de 80°C .

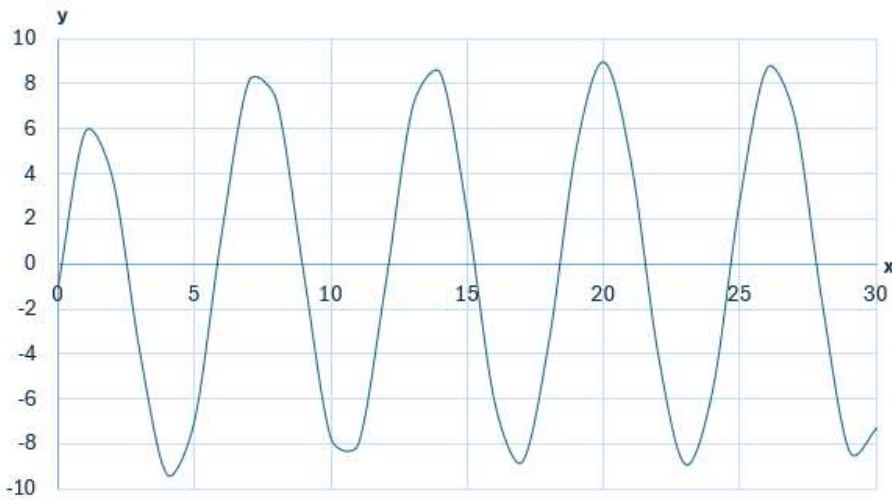


Figura 1.6: Gráfico da função $y(t) = 4 \cos t + 8 \sin t - 5e^{-t/2}$, solução do PVI (1.50).

Resolução. O modelo que descreve essa situação é dado pelo PVI

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = 0,2(T(t) - 20) + 5, \\ T(0) = 80. \end{cases} \quad (1.54)$$

Podemos reescrever a EDO em (1.54) para que fique no formato da equação linear (1.39)

$$\frac{dT}{dt} + 0,2T = 9, \quad (1.55)$$

de onde identificamos as funções $p(t) = 0,2$ e $q(t) = 4$. O fator integrante é calculado por

$$\mu(t) = e^{\int 0,2 dt} = e^{0,2t}, \quad (1.56)$$

e a solução é dada por

$$T(t) = e^{-0,2t} \int 9e^{0,2t} dt = 45 + Ce^{-0,2t}.$$

Impondo a condição inicial $T(0) = 80$, determinamos $C = 35$. Portanto, a solução final do PVI (1.54) é

$$T(t) = 45 + 35e^{-0,2t}. \quad (1.57)$$

A função $T(t)$ em (1.57) representa a evolução da temperatura do objeto ao longo do tempo, considerando tanto o resfriamento natural em direção à temperatura ambiente quanto o aquecimento constante fornecido pela fonte externa. A Figura 1.7 apresenta o gráfico da função $T(t) = 45 + 35e^{-0,2t}$, mostrando como a temperatura se aproxima do equilíbrio de $45 \text{ }^\circ\text{C}$ conforme o tempo avança. Exemplos semelhantes podemos encontrar em [BD,BDH].

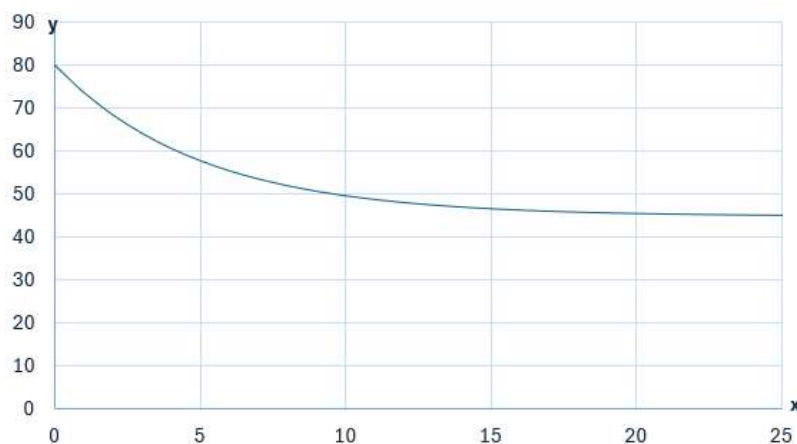


Figura 1.7: Gráfico da função $T(t) = 45 + 35e^{-0,2t}$, solução do PVI (1.54).

1.4 Campos de direções e análise qualitativa

Uma maneira simples e útil de estudar as soluções de equações diferenciais da forma da Equação (1.1), é a construção de campos de direções. Essa ferramenta permite investigar o comportamento das soluções sem resolver a equação diferencial. Como dissemos no início da Seção 1.3, não existe um método geral para resolver EDOs. Para as equações que não possuem técnicas analíticas de solução, e mesmo para as que são de difícil resolução, os campos de direções possibilitam a realização de uma análise qualitativa do comportamento da solução.

O conceito de campo de direções vem do fato de que uma solução da Equação (1.1) é uma função $y(t)$ cujo gráfico é uma curva no plano ty e que dy/dt pode ser interpretado como taxa de variação instantânea da variável y em um determinado instante t . Assim, ao calcularmos f em alguns pontos do plano ty , teremos o coeficiente angular da reta tangente à solução naquele ponto. Além disso, é possível obter sobre essa reta aproximações para a direção e o sentido de evolução da solução a partir do ponto tomado.

Se vetores forem construídos de forma sistematizada, tomando uma malha retangular no plano ty , calculando f em cada ponto (t, y) dessa malha, e desenhando um vetor partindo do ponto (t, y) , obtemos um conjunto de vetores, o qual é conhecido como campo de direções. Cada vetor é tangente ao gráfico de uma solução que passa por aquele ponto, de forma que o campo de direções fornece uma representação visual do comportamento das soluções da equação diferencial.

Voltando à Aplicação 4, sobre o resfriamento de um corpo, Equação (1.54), aqui considerando um caso mais simples, sem aquecimento externo e tomando $k = 0,1$,

$$\frac{dT}{dt} = -0,1(T - 20), \quad (1.58)$$

escolhemos pontos no plano $t \times T$ para traçar os vetores.

Tomando, por exemplo, $(t_0, T_0) = (0, 24)$, a inclinação nesse ponto é dada por

$$\frac{dT}{dt} = -0,1(24 - 20) = -0,4,$$

Assim, o vetor tangente no ponto $(0, 24)$ é o vetor $\vec{v} = (1, -0,4)$, que aponta para a direita no eixo t e para baixo no eixo T , indicando que a solução decresce nesse ponto.

Agora, vamos normalizar o vetor, o que significa transformar o vetor \vec{v} em um versor \vec{u} que tenha a mesma direção e o mesmo sentido de \vec{v} , mas com comprimento igual a 1. Isso é feito dividindo cada componente de \vec{v} pelo seu módulo. Assim,

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-0,4)^2} = \sqrt{1,16},$$

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{1,16}}, \frac{-0,4}{\sqrt{1,16}} \right) \approx (0,928, -0,371).$$

Somando o ponto $(0, 24)$ com o vetor normalizado, obtemos

$$(t', T') = (0 + 0,928, 24 - 0,371) = (0,928, 23,629),$$

e traçamos o versor de (t_0, T_0) até (t', T') .

Esse cálculo deve ser repetido para diversos pontos, a fim de obtermos um campo de direções representativo. Abaixo, tomamos uma malha retangular sobre $t_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $T_0 = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$, e calculamos os versores da mesma forma que fizemos para o ponto $(0, 24)$. Os cálculos podem ser vistos nas Tabelas 1.1 a 1.7.

Tabela 1.1: Versores partindo de $(t_0, 16)$.

t_0	T_0	$\frac{dT}{dt}$	Versor	Ponto final (t', T')
0	16	0,4	(0,928, 0,371)	(0,928, 16,371)
1	16	0,4	(0,928, 0,371)	(1,928, 16,371)
2	16	0,4	(0,928, 0,371)	(2,928, 16,371)
3	16	0,4	(0,928, 0,371)	(3,928, 16,371)
4	16	0,4	(0,928, 0,371)	(4,928, 16,371)
5	16	0,4	(0,928, 0,371)	(5,928, 16,371)
6	16	0,4	(0,928, 0,371)	(6,928, 16,371)
7	16	0,4	(0,928, 0,371)	(7,928, 16,371)
8	16	0,4	(0,928, 0,371)	(8,928, 16,371)

Tabela 1.2: Versores partindo de $(t_0, 17)$.

t_0	T_0	$\frac{dT}{dt}$	Versor	Ponto final (t', T')
0	17	0,3	(0,957, 0,290)	(0,957, 17,290)
1	17	0,3	(0,957, 0,290)	(1,957, 17,290)
2	17	0,3	(0,957, 0,290)	(2,957, 17,290)
3	17	0,3	(0,957, 0,290)	(3,957, 17,290)
4	17	0,3	(0,957, 0,290)	(4,957, 17,290)
5	17	0,3	(0,957, 0,290)	(5,957, 17,290)
6	17	0,3	(0,957, 0,290)	(6,957, 17,290)
7	17	0,3	(0,957, 0,290)	(7,957, 17,290)
8	17	0,3	(0,957, 0,290)	(8,957, 17,290)

Tabela 1.3: Versores partindo de $(t_0, 18)$.

t_0	T_0	$\frac{dT}{dt}$	Versor	Ponto final (t', T')
0	18	0,2	(0,980, 0,196)	(0,980, 18,196)
1	18	0,2	(0,980, 0,196)	(1,980, 18,196)
2	18	0,2	(0,980, 0,196)	(2,980, 18,196)
3	18	0,2	(0,980, 0,196)	(3,980, 18,196)
4	18	0,2	(0,980, 0,196)	(4,980, 18,196)
5	18	0,2	(0,980, 0,196)	(5,980, 18,196)
6	18	0,2	(0,980, 0,196)	(6,980, 18,196)
7	18	0,2	(0,980, 0,196)	(7,980, 18,196)
8	18	0,2	(0,980, 0,196)	(8,980, 18,196)

Tabela 1.4: Versores partindo de $(t_0, 19)$.

t_0	T_0	$\frac{dT}{dt}$	Versor	Ponto final (t', T')
0	19	0,1	(0,995, 0,099)	(0,995, 19,099)
1	19	0,1	(0,995, 0,099)	(1,995, 19,099)
2	19	0,1	(0,995, 0,099)	(2,995, 19,099)
3	19	0,1	(0,995, 0,099)	(3,995, 19,099)
4	19	0,1	(0,995, 0,099)	(4,995, 19,099)
5	19	0,1	(0,995, 0,099)	(5,995, 19,099)
6	19	0,1	(0,995, 0,099)	(6,995, 19,099)
7	19	0,1	(0,995, 0,099)	(7,995, 19,099)
8	19	0,1	(0,995, 0,099)	(8,995, 19,099)

Tabela 1.5: Versores partindo de $(t_0, 20)$.

t_0	T_0	$\frac{dT}{dt}$	Versor	Ponto final (t', T')
0	20	0,0	(1,000, 0,000)	(1,000, 20,000)
1	20	0,0	(1,000, 0,000)	(2,000, 20,000)
2	20	0,0	(1,000, 0,000)	(3,000, 20,000)
3	20	0,0	(1,000, 0,000)	(4,000, 20,000)
4	20	0,0	(1,000, 0,000)	(5,000, 20,000)
5	20	0,0	(1,000, 0,000)	(6,000, 20,000)
6	20	0,0	(1,000, 0,000)	(7,000, 20,000)
7	20	0,0	(1,000, 0,000)	(8,000, 20,000)
8	20	0,0	(1,000, 0,000)	(9,000, 20,000)

Tabela 1.6: Versores partindo de $(t_0, 21)$.

t_0	T_0	$\frac{dT}{dt}$	Versor	Ponto final (t', T')
0	21	-0,1	(0,995, -0,099)	(0,995, 20,901)
1	21	-0,1	(0,995, -0,099)	(1,995, 20,901)
2	21	-0,1	(0,995, -0,099)	(2,995, 20,901)
3	21	-0,1	(0,995, -0,099)	(3,995, 20,901)
4	21	-0,1	(0,995, -0,099)	(4,995, 20,901)
5	21	-0,1	(0,995, -0,099)	(5,995, 20,901)
6	21	-0,1	(0,995, -0,099)	(6,995, 20,901)
7	21	-0,1	(0,995, -0,099)	(7,995, 20,901)
8	21	-0,1	(0,995, -0,099)	(8,995, 20,901)

Tabela 1.7: Versores partindo de $(t_0, 22)$.

t_0	T_0	$\frac{dT}{dt}$	Versor	Ponto final (t', T')
0	22	-0,2	(0,980, -0,196)	(0,980, 21,804)
1	22	-0,2	(0,980, -0,196)	(1,980, 21,804)
2	22	-0,2	(0,980, -0,196)	(2,980, 21,804)
3	22	-0,2	(0,980, -0,196)	(3,980, 21,804)
4	22	-0,2	(0,980, -0,196)	(4,980, 21,804)
5	22	-0,2	(0,980, -0,196)	(5,980, 21,804)
6	22	-0,2	(0,980, -0,196)	(6,980, 21,804)
7	22	-0,2	(0,980, -0,196)	(7,980, 21,804)
8	22	-0,2	(0,980, -0,196)	(8,980, 21,804)

Tabela 1.8: Versores partindo de $(t_0, 23)$.

t_0	T_0	$\frac{dT}{dt}$	Versor	Ponto final (t', T')
0	23	-0,3	(0,957, -0,290)	(0,957, 22,710)
1	23	-0,3	(0,957, -0,290)	(1,957, 22,710)
2	23	-0,3	(0,957, -0,290)	(2,957, 22,710)
3	23	-0,3	(0,957, -0,290)	(3,957, 22,710)
4	23	-0,3	(0,957, -0,290)	(4,957, 22,710)
5	23	-0,3	(0,957, -0,290)	(5,957, 22,710)
6	23	-0,3	(0,957, -0,290)	(6,957, 22,710)
7	23	-0,3	(0,957, -0,290)	(7,957, 22,710)
8	23	-0,3	(0,957, -0,290)	(8,957, 22,710)

Tabela 1.9: Versores partindo de $(t_0, 24)$.

t_0	T_0	$\frac{dT}{dt}$	Versor	Ponto final (t', T')
0	24	-0,4	(0,928, -0,371)	(0,928, 23,629)
1	24	-0,4	(0,928, -0,371)	(1,928, 23,629)
2	24	-0,4	(0,928, -0,371)	(2,928, 23,629)
3	24	-0,4	(0,928, -0,371)	(3,928, 23,629)
4	24	-0,4	(0,928, -0,371)	(4,928, 23,629)
5	24	-0,4	(0,928, -0,371)	(5,928, 23,629)
6	24	-0,4	(0,928, -0,371)	(6,928, 23,629)
7	24	-0,4	(0,928, -0,371)	(7,928, 23,629)
8	24	-0,4	(0,928, -0,371)	(8,928, 23,629)

Após os cálculos dos vetores, construímos o campo de direções e tiramos as informações possíveis. No exemplo, o campo de direções construído pode ser visto na Figura 1.8, onde observamos que para $T = 20$, os vetores são paralelos ao eixo t , sugerindo que não há variação na temperatura. Para valores iniciais acima de 20, os vetores apontam para a direita e para baixo, sugerindo diminuição de temperatura; além disso, vão diminuindo a inclinação e tendendo a vetores horizontais com o passar do tempo e quando se aproximam de 20. Para valores iniciais abaixo de 20, os vetores apontam para a direita e para cima, sugerindo aumento de temperatura, e, da mesma forma que o anterior, vão diminuindo de inclinação e tendendo a vetores horizontais com o passar do tempo e conforme se aproximam de 20.

De forma mais precisa, o campo de direções, Figura 1.8, sugere que em $T = 20$ há uma solução de equilíbrio estável. Aqui podemos combinar outra ferramenta de análise qualitativa, o cálculo das soluções de equilíbrio, que são as soluções em que a taxa de variação é nula. Para o exemplo, $f(t, T) = -0,1(T - 20) = 0$ se, e somente se, $T = 20$, e concluímos assim que existe uma única solução de equilíbrio.

A solução de equilíbrio é interpretada da seguinte forma. Se inicialmente a solução for $T(0) = 20$, a solução particular do PVI será $T(t) = 20$, para todo $t \in [0, \infty)$, não há variação. Além disso, nesse exemplo, $T = 20$ é uma solução de equilíbrio estável, pois se iniciarmos em $T(0) = T_0 < 20$, a solução particular para cada T_0 crescerá e com o passar do tempo tenderá a 20 e se iniciarmos em $T(0) = T_0 > 20$, a solução particular para cada T_0 crescerá e com o passar do tempo tenderá a 20.

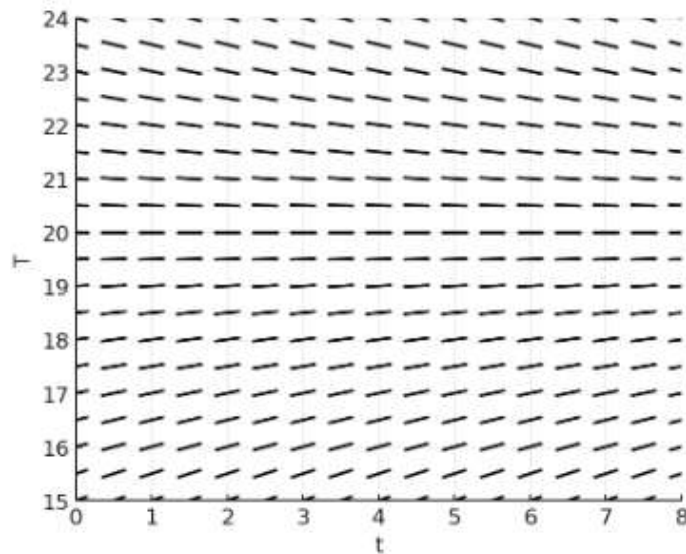


Figura 1.8: Campo de direções da EDO (1.58).

1.5 Aplicações em dinâmica populacional

Nesta última seção, exploramos dois modelos de crescimento populacional, os quais são utilizados em aplicações reais, tanto no próprio contexto de crescimento populacional como em diversos outros contextos, como propagação de calor, propagação de boatos, propagação de epidemias, reações químicas, etc.

1.5.1 Crescimento exponencial: modelo de Malthus

O modelo mais simples de crescimento populacional, chamado de Crescimento Exponencial ou de Modelo de Malthus, já foi explorado neste texto, na Aplicação 3 - Crescimento de uma População Bacteriana. De forma geral, temos o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ry, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.59)$$

onde a constante de proporcionalidade r é chamada de taxa de crescimento ou taxa de declínio, dependendo se seu valor é positivo ou negativo.

A solução dessa equação diferencial é dada por

$$y(t) = y_0 e^{rt}, \quad (1.60)$$

tendo seu comportamento descrito na Figura 1.9, para diferentes valores de y_0 e $r > 0$.

Podemos concluir que o modelo matemático baseado no PVI (1.59) com $r > 0$ prevê um crescimento exponencialmente sempre, como ilustrado na Figura 1.9.

A solução (1.60) do PVI (1.59) descreve, com certa precisão, muitas populações em estágios iniciais de crescimento, quando não há limitação de recursos. No entanto, em períodos mais longos, fatores como espaço limitado, escassez de alimentos e competição por recursos tendem a reduzir a taxa de crescimento, tornando o modelo menos preciso. Nessas situações, temos um modelo mais realista, como o modelo de Verhulst, a seguir.

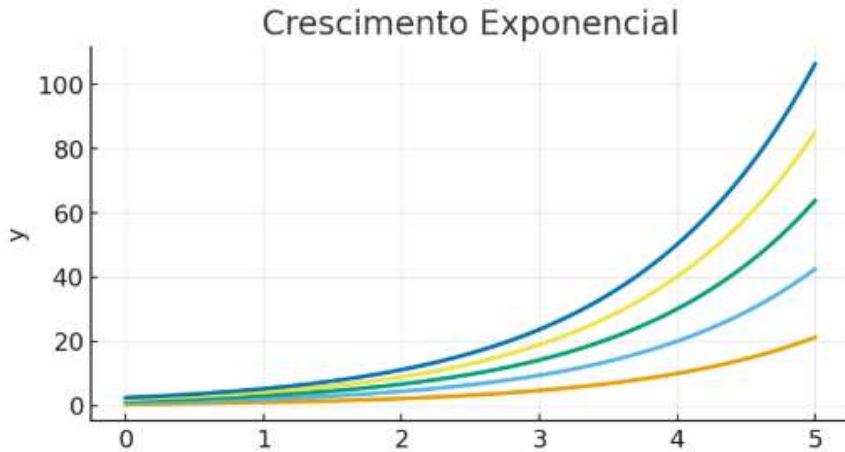


Figura 1.9: Gráficos da função $y(t) = y_0 e^{rt}$, solução do PVI (1.59), com $r = 0,75$ fixo, para alguns valores de y_0 .

1.5.2 Crescimento logístico: modelo de Verhulst

Este modelo considera que a taxa de crescimento depende diretamente da população. Para isso, substitui r na Equação (1.59) por uma função $h(y)$, resultando na seguinte equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = h(y)y. \quad (1.61)$$

Essa modificação permite que o crescimento não seja sempre exponencial, mas varie conforme a população se aproxima de um limite sustentável, tornando o modelo mais realista para diversas situações. A ideia é buscar por uma função $h(y)$ que atenda a algumas condições desejáveis:

- $h(y)$ deve se aproximar de $r > 0$ quando y for pequeno, garantindo um crescimento exponencial inicial semelhante ao modelo de Malthus;
- $h(y)$ deve decrescer à medida que y cresce, refletindo o efeito de limitação de recursos no ambiente;
- $h(y)$ deve ser negativa para valores suficientemente grandes de y , indicando que a população pode diminuir quando ultrapassa um certo limite.

Uma escolha simples que satisfaz essas condições é

$$h(y) = r - ay,$$

onde a é uma constante positiva. Esse ajuste leva à equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y. \quad (1.62)$$

Definindo $k = r/a$ e substituindo em (1.62), e já acrescentando a condição inicial, obtemos o modelo logístico

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{k}\right), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.63)$$

Neste modelo, k representa a capacidade de suporte do ambiente, isto é, o limite máximo de indivíduos que a população pode atingir em condições sustentáveis e r é chamada de taxa de crescimento intrínseco, ou seja, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador. O PVI (1.63) já foi extensamente estudado e detalhes podem ser encontrados em diversas referências, como [BD]. Faremos aqui um resumo.

Os pontos de equilíbrio de (1.63) ocorrem quando

$$y = 0 \quad \text{e} \quad y = k.$$

Observe que a Equação (1.63) é do tipo autônoma, ou seja, a função $f(y) = y(1 - \frac{y}{k})$ depende apenas de y . O gráfico de $f(y)$ pode ser visto na Figura 1.10. É uma parábola com concavidade voltada para baixo, com raízes nos pontos $(0, 0)$ e $(k, 0)$, indicando que a taxa de crescimento é nula quando a população é zero ou atinge a capacidade de suporte k . No intervalo $0 < y < k$, a função assume valores positivos, significando que a população está crescendo. A taxa de crescimento atinge seu valor máximo no ponto $(\frac{k}{2}, \frac{rk}{4})$, que corresponde ao vértice da parábola, e a partir desse ponto a taxa começa a diminuir. Dessa forma, no intervalo $0 < y < \frac{k}{2}$, a função é crescente, indicando que a taxa de variação populacional aumenta à medida que a população cresce. Já no intervalo $\frac{k}{2} < y < k$, a função é decrescente, o que significa que a taxa de crescimento começa a reduzir conforme a população se aproxima da capacidade de suporte. Nos extremos $y = 0$ e $y = k$, a taxa de crescimento é nula, caracterizando os pontos de equilíbrio do sistema.

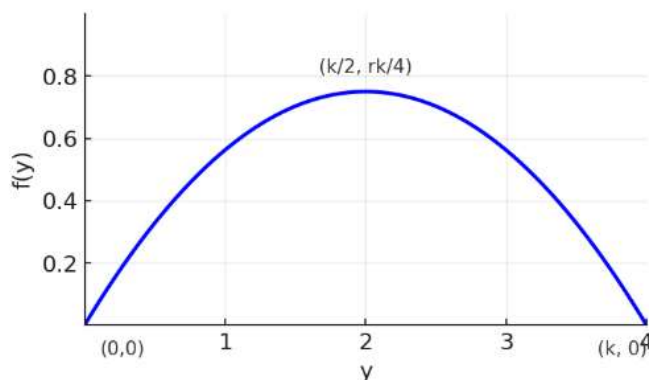


Figura 1.10: Taxa de crescimento $f(y)$ no modelo logístico.

Sobre os pontos de equilíbrio, podemos classificá-los considerando que $y = 0$ é um equilíbrio instável, pois pequenas perturbações podem levar ao crescimento populacional, enquanto $y = k$ é um equilíbrio estável, já que a população se estabiliza nesse valor ao longo do tempo.

Por exemplo, tomando $r = 0.75$ e $k = 4$, os pontos de equilíbrio são $y = 0$ (equilíbrio instável) e $y = 4$ (equilíbrio estável). Assim, se $y_0 = 4$, a população permanecerá constante, e para qualquer outro $y_0 > 0$, as soluções tenderão a esse equilíbrio. Por sua vez, apesar de $y = 0$ ser uma solução de equilíbrio, não faz sentido em termos de aplicação, uma vez que, se não existe indivíduo na população, não há motivo para se realizar o estudo. Além disso, esse equilíbrio $y = 0$ é instável, pois qualquer valor acima

de zero, mesmo que pequeno, fará com que a população y cresça. As demais análises acima podem ser feitas para esse exemplo.

Também podemos observar os comportamentos descritos acima construindo um campo de direções, Figura 1.11, com $r = 0.75$ e $k = 4$.

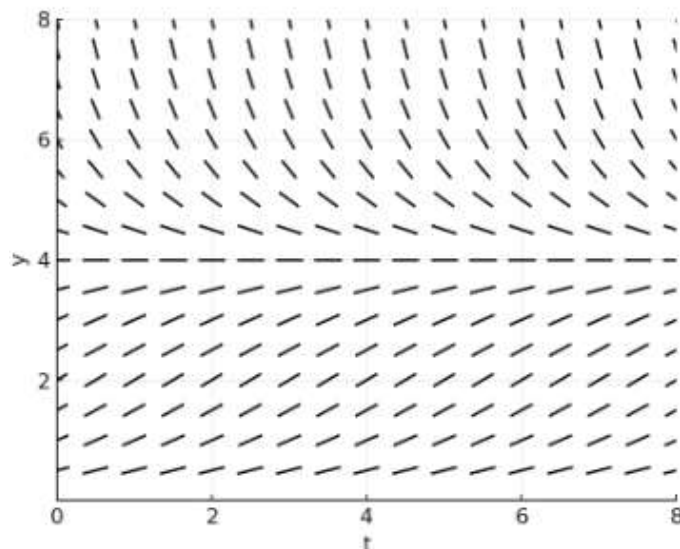


Figura 1.11: Campo de Direções para o modelo de crescimento logístico (1.63) com $r = 0.75$ e $k = 4$.

Toda a análise qualitativa feita a partir do gráfico visto na Figura 1.11, muitas vezes fornece informações suficientes, mesmo sem resolver a EDO. No entanto, se quisermos uma descrição mais detalhada do crescimento logístico, como determinar o valor da população em um instante específico, é fundamental obter a solução da equação e, para isso, precisamos resolver a Equação (1.63).

Para resolver a EDO utilizamos o método de separação de variáveis. Os detalhes da resolução podem ser vistos no Apêndice A. A solução é

$$y(t) = \frac{ky_0}{y_0 + (k - y_0)e^{-rt}}. \quad (1.64)$$

A Figura 1.12 mostra a solução explícita, Equação (1.64), da equação logística para $k = 4$ fixo e diferentes condições iniciais y_0 . Notamos que as conclusões qualitativas às quais chegamos anteriormente são verificadas pela solução explícita.

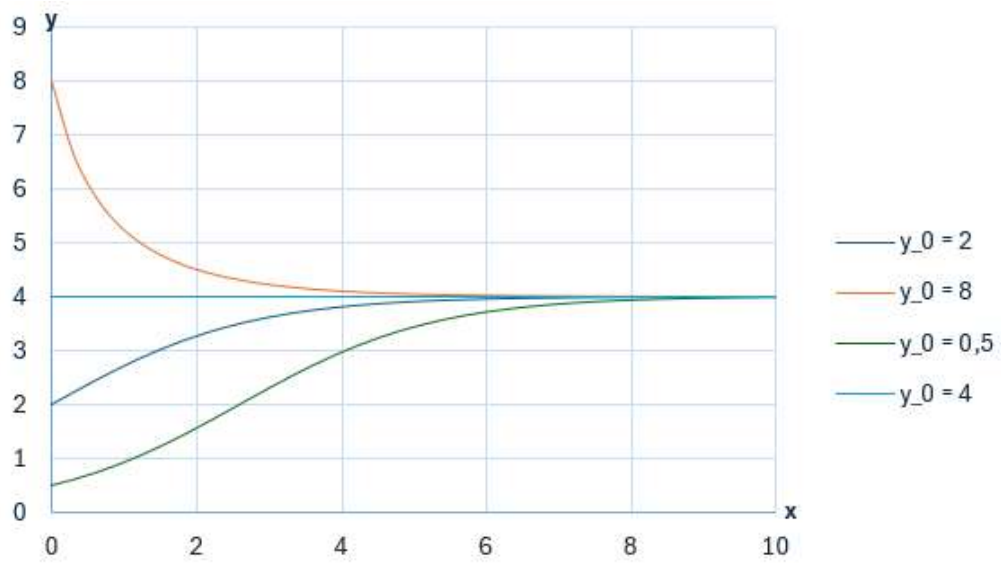


Figura 1.12: Gráficos de soluções do modelo de crescimento Logístico com $r = 0,75$, $k = 4$ e $y_0 = 0,5; 2; 4; 8$.

Capítulo 2

Sistemas de EDOs

Este capítulo, baseado em [BD], considera sistemas compostos por duas EDOs da forma

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde as funções f_1 e f_2 estão definidas de $[t_0, t_f] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R} . Para completar o PVI, acrescentamos as condições iniciais

$$y_1(t_0) = y_{10} \quad \text{e} \quad y_2(t_0) = y_{20}, \quad (2.2)$$

onde y_{10} e y_{20} são números reais.

Sistemas como (2.1) aparecem na modelagem de problemas envolvendo duas variáveis dependentes, cada uma delas sendo função da mesma variável independente. Aplicações são vistas ao longo deste capítulo.

O estudo de sistemas com duas EDOs também é importante pois inclui as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem do tipo

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f(t, u, u'),$$

com condições iniciais

$$u(t_0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(t_0) = z_0.$$

Chamando $y_1 = u$ e $y_2 = \frac{du}{dt}$, temos $\frac{dy_1}{dt} = \frac{du}{dt} = y_2$ e $\frac{dy_2}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2}$, a equação de segunda ordem se transforma em um sistema com duas EDOs de primeira ordem, da forma

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = f(t, y_1, y_2), \end{cases} \quad (2.3)$$

onde as funções f_1 e f_2 de (2.1) são, respectivamente, $f_1(t, y_1, y_2) = y_2$ e $f_2(t, y_1, y_2) = f(t, y_1, y_2)$, com condições iniciais

$$y_1(t_0) = u_0, \quad y_2(t_0) = z_0.$$

Para sistemas de EDOs, os métodos de resolução são ainda mais escassos do que para uma única equação. Neste capítulo abordamos sistemas em que as funções f_1 e f_2 são lineares, de forma que o sistema (2.1) pode ser reescrito por

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + g_1(t), \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + g_2(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

ou ainda na forma matricial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t), \quad (2.5)$$

sendo

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Também estudaremos sistemas autônomos localmente lineares da forma

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}). \quad (2.7)$$

Para todos eles, fazemos análises qualitativas e, quando possível, encontramos a solução geral. Traçamos os campos de direções utilizando o Excel. Terminamos o capítulo com o estudo de dois modelos quase lineares bastante populares, o modelo de espécies em competição e o modelo presa-predador.

2.1 Exemplos motivacionais

Nas aulas de física, os alunos do ensino médio aprendem circuitos elétricos, por exemplo, aprendem o que é um circuito *LRC* em paralelo, onde V é a diferença de tensão no capacitor, I a corrente passando pelo indutor, L a indutância, C capacitância e R a resistência, como mostrado na Figura 2.1.

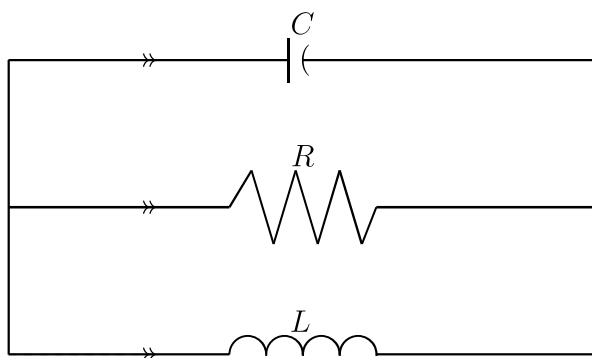


Figura 2.1: Circuito elétrico *LRC* em paralelo.

Sejam I_1 , I_2 e I_3 as correntes atravessando, respectivamente, o capacitor, a resistência e o indutor. Analogamente, sejam V_1 , V_2 e V_3 as diferenças de tensão correspondentes. As setas denotam as direções, escolhidas arbitrariamente, nas quais as correntes e diferenças de tensão estão consideradas positivas.

Aplicando a segunda Lei de Kirchhoff, que diz que a diferença entre tensão total em cada laço fechado é zero, temos $V_1 - V_2 = 0$ e $V_2 - V_3 = 0$. E, aplicando a primeira lei de Kirchhoff, que diz que o fluxo total de corrente atravessando cada nó é zero, $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

Pela relação entre a corrente e a diferença de tensão em cada elemento do circuito, obtemos as equações

$$C \frac{dV_1}{dt} = I_1, \quad V_2 = RI_2, \quad L \frac{dI_3}{dt} = V_3.$$

Substituindo uma equação na outra e simplificando, obtemos o modelo

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = -\frac{I_3}{C} - \frac{V_1}{RC}, \\ \frac{dI_3}{dt} = \frac{V_3}{L}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Observação sobre a notação: No início da modelagem, usamos índices nas variáveis (como $V_1, V_2, V_3, I_1, I_2, I_3$) para identificar a qual componente do circuito (capacitor, resistor ou indutor) cada grandeza está associada. Essa notação é importante para organizar corretamente as equações com base nas leis de Kirchhoff e nas relações constitutivas dos elementos do circuito. No entanto, após aplicarmos essas leis e simplificarmos o sistema, percebemos que algumas variáveis são iguais, por exemplo, a corrente é a mesma em todos os componentes em um circuito em série e outras podem ser escritas em função das principais. Por isso, os índices são retirados no modelo final, mantendo-se apenas as variáveis essenciais (como $V(t)$ e $I(t)$), o que torna o sistema mais claro e mais fácil de analisar. Essa prática é comum em livros como na referência [BD], onde a ênfase é dada à estrutura matemática do sistema e não mais à identificação de cada componente físico individualmente. Assim, podemos reescrever o modelo (2.8) sem os índices, como

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{V}{L}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Ainda na física temos um sistema clássico conhecido como massa-mola vertical que modela um sistema de uma massa m presa a uma mola que está fixa no teto. Nesse modelo, a massa oscila para cima e para baixo ao redor de uma posição de equilíbrio determinada pelo alongamento natural da mola sob o peso da massa.

Esse movimento pode ocorrer em um meio com resistência, como o ar, ou um fluido viscoso, que exerce uma força contrária ao movimento da massa, chamada de amortecimento. Além disso, o sistema pode estar sujeito à ação de uma força externa variável no tempo, como uma vibração periódica ou uma perturbação controlada.

A equação do movimento da massa com as condições iniciais forma o PVI

$$\begin{cases} ms''(t) + \gamma s'(t) + ks(t) = F(t), \\ s(0) = s_0, \\ s'(0) = v_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

onde temos que m representa a massa do corpo, γ é o coeficiente de amortecimento que quantifica a resistência do meio ao movimento (quanto maior γ , mais rapidamente a oscilação perde energia), k é a constante elástica da mola que mede sua rigidez (quanto maior k , mais forte é a força restauradora), e $F(t)$ é a força externa aplicada ao sistema ao longo do tempo.

Fazendo a mudança de variável $y_1(t) = s(t)$ e $y_2(t) = s'(t)$, obtendo

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{m}(F(t) - ky_1 - \gamma y_2), \\ y_1(0) = s_0, \\ y_2(0) = v_0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Um problema que surge na química é o de mistura. Por exemplo, em uma estação de tratamento experimental, dois tanques interligados estão sendo usados para estudar o comportamento da mistura de soluções salinas ao longo do tempo; o tanque A está inicialmente cheio com água pura, ou seja, sem sal. Já o tanque B está cheio com 100 litros de uma solução salina contendo 10 kg de sal.

A solução em cada tanque é constantemente misturada, de forma que a concentração de sal é sempre uniforme dentro de cada tanque. As soluções são continuamente bombeadas em uma taxa de 3 litros por minuto do tanque A para o tanque B e de 2 litros por minuto do tanque B para o tanque A. Queremos determinar como a quantidade de sal varia em cada tanque ao longo do tempo.

Sejam

- $x(t)$: quantidade de sal, em kg, no tanque A no tempo t minutos;
- $y(t)$: quantidade de sal, em kg, no tanque B no tempo t minutos.

A variação do sal em A pode ser calculada fazendo a diferença entre a entrada e a saída de sal

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{100}y(t) - \frac{3}{100}x(t). \quad (2.12)$$

Da mesma forma, podemos calcular essas variações do sal em B

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{100}x(t) - \frac{2}{100}y(t). \quad (2.13)$$

Podemos montar um sistema de equação do sistema proposto

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2}{100}y - \frac{3}{100}x, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{3}{100}x - \frac{2}{100}y, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 10. \end{cases} \quad (2.14)$$

Estas e outras aplicações, bem como as análises qualitativas por meio de campos de direções, podem ser encontrado nas referências [BD,BDH]. Ao final deste capítulo voltamos à aplicação em dinâmica populacional, agora com duas populações interagindo entre si.

2.2 Sistema de EDOs lineares homogêneas com coeficientes constantes

No caso homogêneo com coeficientes constantes, isto é, quando $\mathbf{g}(t) = 0$ em (2.5), o sistema se resume a

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}. \quad (2.15)$$

Vamos buscar soluções de (2.15) fazendo uma analogia com o caso escalar de uma equação linear homogênea de primeira ordem. Para

$$\frac{dy}{dt} = ay,$$

as soluções são do tipo $y = Ce^{at}$. Assim, para (2.15) buscamos soluções da forma

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}e^{\lambda t}. \quad (2.16)$$

Substituindo a expressão (2.16) na Equação (2.15), obtemos

$$\lambda\boldsymbol{\xi}e^{\lambda t} = A\boldsymbol{\xi}e^{\lambda t},$$

cancelando o fator comum $e^{\lambda t} \neq 0$, resulta na equação

$$A\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}. \quad (2.17)$$

Notamos que se existir um $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ e um λ escalar que satisfazem (2.17) então $\boldsymbol{\xi}$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ .

Para obter os autovalores e autovetores de A , resolvemos a equação

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (2.18)$$

obtendo os valores de λ e, em seguida, substituímos cada λ_i em (2.18), obtendo o autovetor associado $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$.

Matrizes 2×2 possuem dois autovalores, λ_1 e λ_2 , que podem ser: ambos reais distintos (positivos, negativos ou de sinais opostos), reais iguais (positivos ou negativos), ou complexos. Esses seis casos são estudados a seguir, um a um.

Quanto aos autovetores, em geral, dois autovalores geram dois autovetores linearmente independentes, porém no caso de serem reais iguais, podem gerar apenas um autovetor. Mais detalhes sobre autovalores e autovetores podem ser encontrados em [SW] ou em qualquer outro livro de Álgebra Linear.

Resultados teóricos sobre as soluções de (2.15) mostram que dado um par de autovalor e autovetor de A , $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(i)}e^{\lambda_i t}$ é solução do sistema. Além disso, se o sistema admite duas soluções linearmente independentes

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\lambda_2 t}, \quad (2.19)$$

então a solução geral do sistema é

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad (2.20)$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais determinadas pelas condições iniciais.

A seguir, por meio de exemplos, estudamos o comportamento da solução (2.20) diante das diferentes naturezas dos autovalores. Para não sobrecarregar o texto, os cálculos dos autovalores e autovetores estão detalhados no Apêndice B. Em particular, essa análise permite compreender o comportamento qualitativo das soluções do sistema no campo de direções.

Caso 1. Autovalores reais e positivos distintos

Vamos estudar, por meio de um exemplo, um sistema de duas EDOs onde a matriz associada possui autovalores reais, positivos e distintos. Seja o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2, \end{cases} \quad (2.21)$$

cujas matriz A associada é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo os autovalores e autovetores

$$\lambda_1 = 2, \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução geral do sistema (2.21) é dada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

ou, de forma explícita, as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t}, \\ x_2(t) = c_1 e^{4t} + 3c_2 e^{2t}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Observando a solução, podemos tirar as seguintes informações sobre o seu comportamento. Como o termo e^{4t} cresce mais rapidamente que e^{2t} , o comportamento da solução para $t \rightarrow \infty$ é dominado pelo autovalor maior ($\lambda = 4$). Isso significa que, independentemente das condições iniciais, a solução tenderá a se alinhar na direção do autovetor associado ao maior autovalor,

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução apresentada para o sistema de EDOs descreve o comportamento das variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$ ao longo do tempo. Para o exemplo, o comportamento é visualmente evidente no campo de direções apresentado na Figura 2.2, onde as trajetórias são atraídas para a direção de crescimento mais rápido.

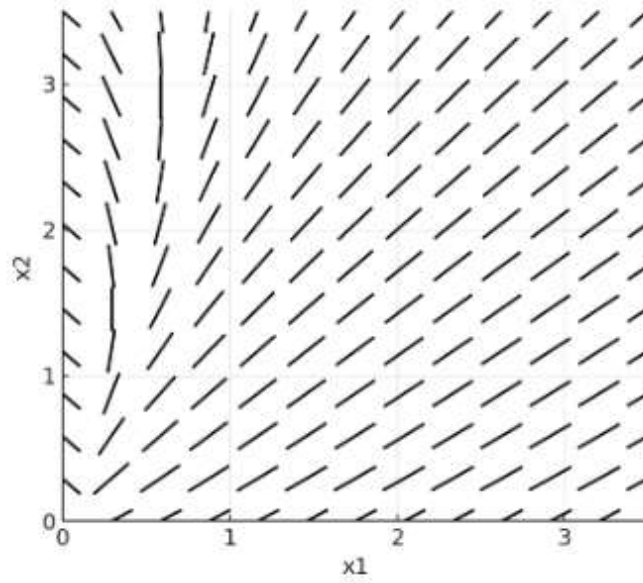


Figura 2.2: Campo de direções para o caso de autovalores reais e positivos distintos.

Caso 2. Autovalores reais e opostos

Vamos estudar, por meio de um exemplo, um sistema de duas EDOs onde a matriz associada possui autovalores reais com sinais opostos. Seja o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + \sqrt{3}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \sqrt{3}x_1 - x_2, \end{cases} \quad (2.24)$$

cuja matriz associada é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix},$$

e possui os seguintes autovalores e autovetores:

$$\lambda_1 = -2, \quad \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2, \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução geral é dada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

De forma explícita, as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \frac{\sqrt{3}}{3} e^{2t} - c_2 \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-2t}, \\ x_2(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}. \end{cases} \quad (2.26)$$

Com uma análise dessas soluções, observamos que, para $t \rightarrow +\infty$, a solução é dominada pelo termo e^{2t} , que cresce exponencialmente na direção do autovetor

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, para $t \rightarrow -\infty$, a solução é dominada pelo termo e^{-2t} , alinhando-se na direção do autovetor

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O campo de direções correspondente, ilustrado na Figura 2.3, permite visualizar como as soluções se comportam em função dos autovalores encontrados. Esse comportamento é típico de um **ponto de sela**, onde uma direção está associada ao crescimento exponencial ($\lambda = 2$) e a outra ao decaimento exponencial ($\lambda = -2$), como pode ser visto na Figura 2.3, a qual apresenta o campo de direções do sistema (2.24).

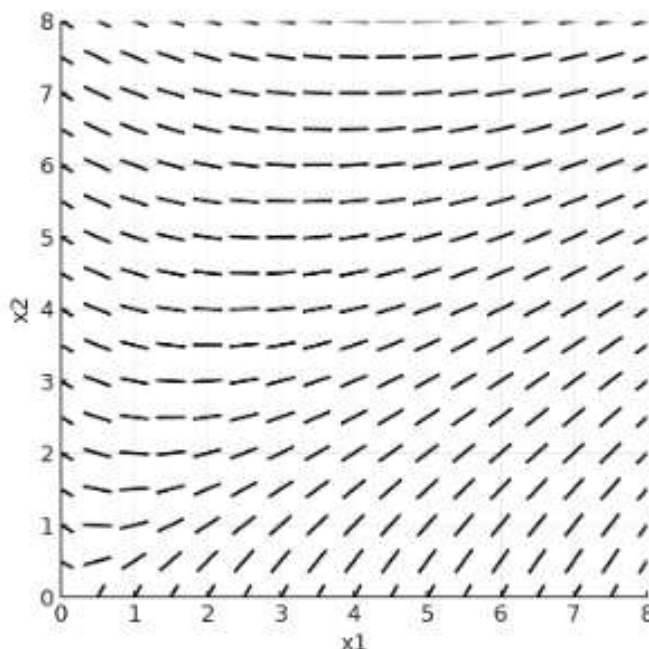


Figura 2.3: Campo de direções para o caso de autovalores reais e opostos.

Caso 3. Autovalores reais, negativos e distintos

Vamos estudar, por meio de um exemplo, um sistema de duas EDOs onde a matriz associada possui autovalores reais, negativos e distintos. Seja o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad (2.27)$$

tendo como matriz associada

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

com autovalores e autovetores dados por

$$\lambda_1 = -2, \quad \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \lambda_2 = -3, \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução geral do sistema (2.27) é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

que, de forma explícita, fica

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-2t}, \\ x_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Ambas as soluções são combinações de funções exponenciais decrescentes, o que caracteriza um nó estável. A variável $x_1(t) = c_1 e^{-2t}$ depende apenas de c_1 e decai exponencialmente à taxa e^{-2t} , tendendo a zero conforme t cresce. Já a variável $x_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$ possui dois termos. Como o termo com e^{-3t} decai mais rapidamente, sua influência desaparece antes, e o comportamento de $x_2(t)$ para $t \rightarrow +\infty$ será dominado pela taxa de decaimento de $x_1(t)$, isto é, e^{-2t} .

Dessa forma, ambas as variáveis convergem suavemente para a origem, sem oscilações ou mudanças bruscas, refletindo a estabilidade do sistema. Esse comportamento pode ser visto no campo de direções representado na Figura 2.4.

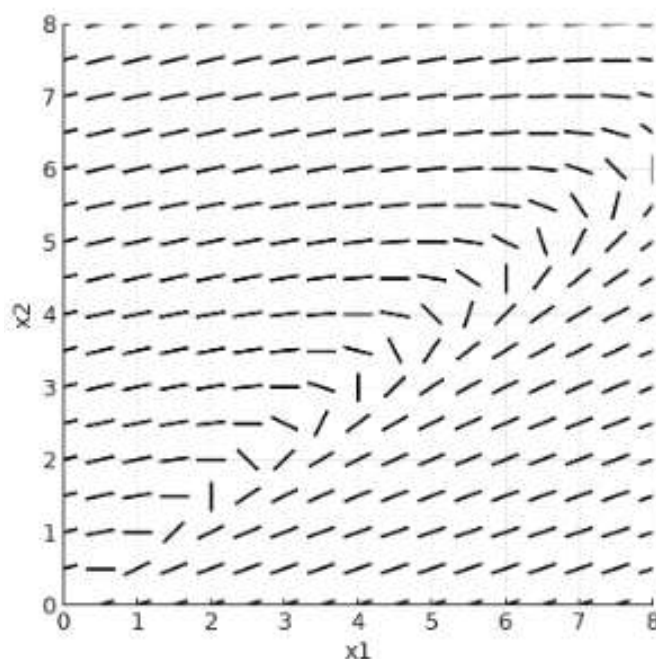


Figura 2.4: Campo de direções para o caso de autovalores reais negativos e distintos.

Caso 4. Autovalores reais e iguais positivos

Vamos estudar sistemas de EDOs onde os autovalores são reais, positivos e iguais. Para isso, utilizaremos o sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 4x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2, \end{cases} \quad (2.30)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

que possui um autovalor $\lambda = 1$, de multiplicidade algébrica 2. Neste caso, o autovalor gera apenas um autovetor associado,

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

No entanto, é possível obter a solução geral do sistema (2.30) tomando uma outra solução linearmente independente te^t , da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \left[t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right]. \quad (2.31)$$

De forma explícita

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t [(2c_1 + c_2) + 2c_2 t], \\ x_2(t) = e^t [c_1 + c_2 t]. \end{cases} \quad (2.32)$$

Neste sistema, como há um autovalor real e positivo com multiplicidade 2 e apenas um autovetor, a solução apresenta, além do crescimento exponencial e^t , um termo adicional proporcional a te^t . Este termo causa uma divergência mais rápida das trajetórias em comparação a sistemas com autovalores simples.

Observamos que ambas as variáveis $x_1(t)$ e $x_2(t)$ crescem exponencialmente, com a influência crescente do termo linear em t à medida que o tempo avança. Este tipo de comportamento é característico de um nó instável com autovalores repetidos, e pode ser observado no campo de direções representado na Figura 2.5.

Caso 5. Autovalores reais e iguais negativos

Vamos estudar o sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{3}{2}x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2. \end{cases} \quad (2.33)$$

para o qual

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

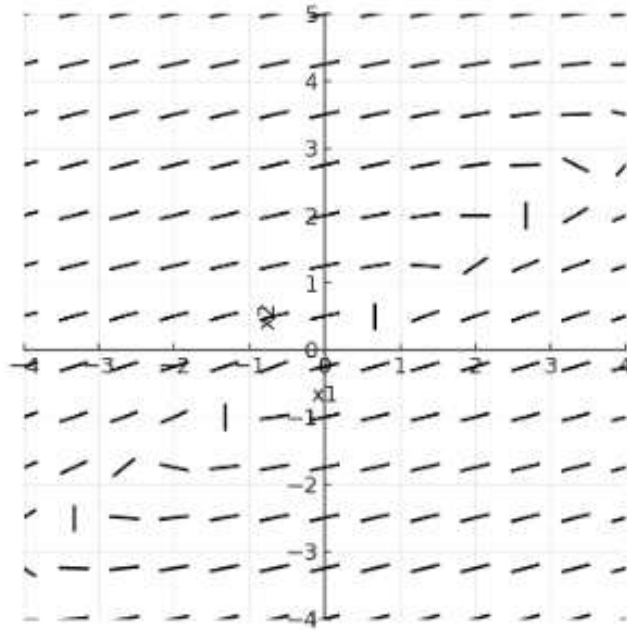


Figura 2.5: Campo de direções para o caso de autovalores reais positivos e repetidos.

com um autovalor $\lambda = -1$, de multiplicidade algébrica 2), e um único autovetor associado

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como no caso anterior, conseguimos uma solução geral da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \left[t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right]. \quad (2.34)$$

De forma explícita

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t} [2c_1 + 2c_2 t] \\ x_2(t) = e^{-t} [c_1 + c_2 t + 2c_2] \end{cases} \quad (2.35)$$

Neste sistema, como o autovalor $\lambda = -1$ possui multiplicidade 2 e há apenas um autovetor, a solução envolve não apenas termos exponenciais decrescentes, mas também um termo proporcional a te^{-t} , caracterizando um nó estável com autovalores repetidos.

As duas variáveis, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, convergem para a origem à medida que $t \rightarrow +\infty$, sendo que a influência do termo proporcional a te^{-t} é mais significativa nos instantes iniciais. Esse comportamento pode ser observado no campo de direções representado na Figura 2.6, onde todas as trajetórias são atraídas para a origem de forma suave, sem oscilações.

Caso 6. Autovalores complexos

Vamos encontrar os autovalores, autovetores e a solução geral do sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 - x_2, \end{cases} \quad (2.36)$$

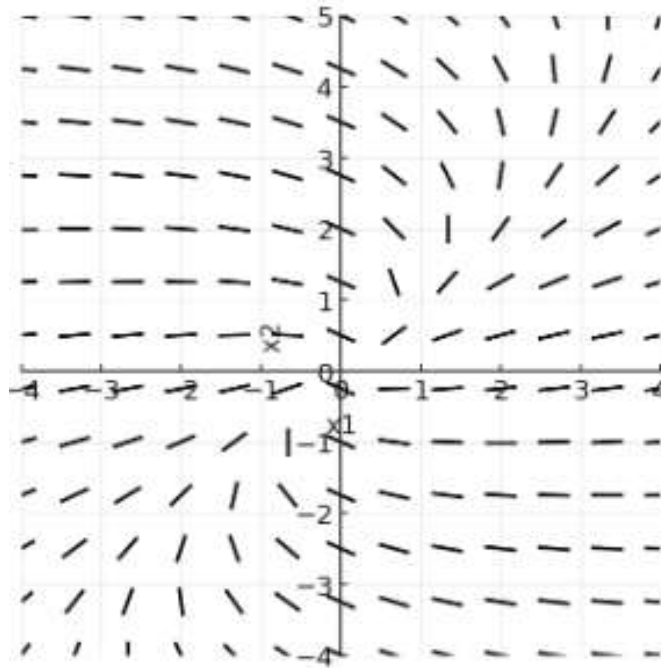


Figura 2.6: Campo de direções para o caso de autovalores reais negativos e repetidos.

que possui

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},$$

autovalores $\lambda = 1 \pm 2i$, e autovetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - i \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + i \end{bmatrix}.$$

A solução geral do sistema (2.36) é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - i \end{bmatrix} + c_2 e^{(1-2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + i \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

de onde podemos extrair a solução geral real

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

De forma explícita

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t [c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)], \\ x_2(t) = e^t [-c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)]. \end{cases} \quad (2.39)$$

Neste sistema, os autovalores complexos conjugados, com parte real positiva, indicam um foco instável. A presença da parte imaginária gera oscilações periódicas (termos de seno e cosseno), enquanto a parte real positiva provoca crescimento exponencial.

Portanto, as soluções descrevem espirais que se afastam da origem, com movimento rotacional combinado com crescimento ao longo do tempo. Esse comportamento é claramente visualizado no campo de direções representado na Figura 2.7.

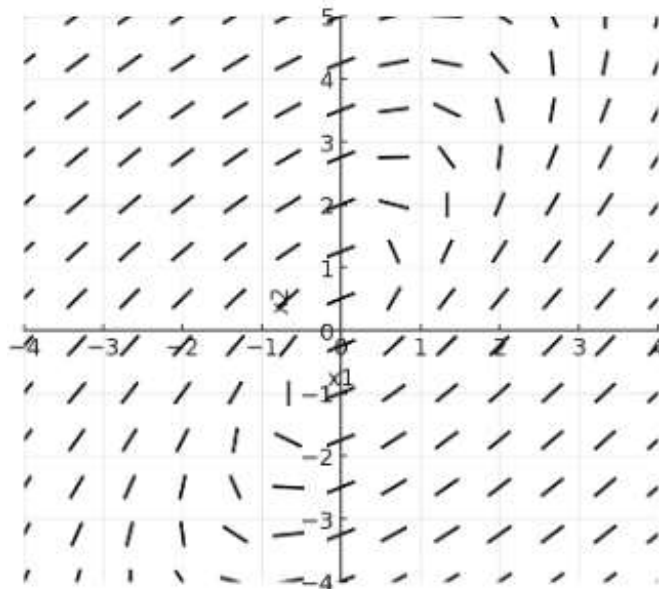


Figura 2.7: Campo de direções para o caso de autovalores complexos.

2.3 Sistema de EDOs lineares não homogêneas com coeficientes constantes

Nesta seção consideramos o caso em que a função $\mathbf{g}(t)$ em (2.5) é não nula, isto é,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t). \quad (2.40)$$

A solução geral de um sistema bidimensional Equação (2.40) pode ser expressa na forma

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{y}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{y}^{(2)}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (2.41)$$

onde as duas primeiras parcelas correspondem à solução geral do sistema homogêneo, conforme visto na Seção 2.2, e $\mathbf{v}(t)$ é uma solução particular do sistema não homogêneo (2.40).

Descrevemos a seguir dois métodos de resolução. O primeiro, o Método dos coeficientes indeterminados, é usado para encontrar $\mathbf{v}(t)$. O segundo, a Diagonalização, encontra a solução geral completa como em (2.41). Vamos resolver apenas um exemplo para cada método. Para um estudo aprofundado, indicamos a referência [BD] ou qualquer outro livro de EDO.

Método dos coeficientes indeterminados

Para usar esse método, supomos que a solução tem determinada forma com alguns ou todos os coeficientes indeterminados e depois procuramos esses coeficientes de modo

- igualando os coeficientes de te^t :

$$\begin{cases} a_1 = 2a_1 - a_2 \Rightarrow a_2 = a_1 \\ a_2 = 3a_1 - 2a_2 \Rightarrow a_2 = a_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = \frac{3}{2};$$

- igualando os coeficientes de e^t :

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 2b_1 - b_2 + 1 \\ a_2 + b_2 = 3b_1 - 2b_2 \end{cases} \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{4}, \quad b_2 = -\frac{3}{4};$$

- igualando os coeficientes de t :

$$\begin{cases} c_1 = 2c_1 - c_2 \Rightarrow c_2 = c_1 \\ c_2 = 3c_1 - 2c_2 + 1 \Rightarrow \text{Contradição se } c_1 = c_2 \end{cases} \quad \text{Escolhemos: } c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1;$$

- igualando os termos constantes:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = 2d_1 - d_2 \\ a_2 + b_2 + c_2 = 3d_1 - 2d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 = 0, \quad d_2 = 1.$$

Logo, a solução particular é

$$\mathbf{v}(t) = \frac{3}{2}te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^t + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e a solução geral do sistema é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Diagonalização

Esta técnica pode ser aplicada desde que A seja diagonalizável, ou seja, no caso 2×2 , quando possui dois autovetores linearmente independentes. O caso não diagonalizável se restringe a dois autovalores iguais, gerando apenas um autovetor.

A diagonalização consiste em transformar A em uma matriz diagonal, por

$$T^{-1}AT = D, \tag{2.43}$$

onde D é a matriz 2×2 cujos elementos da diagonal são os autovalores λ_1 e λ_2 e T possui as colunas com os autovetores $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$, arrumados na mesma ordem que aparecem na matriz diagonal.

Definindo uma nova variável \mathbf{x} por $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$, temos que $\mathbf{y}' = T\mathbf{x}'$. Substituindo ambos na Equação (2.40), obtemos

$$T\mathbf{x}' = AT\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \tag{2.44}$$

Multiplicando por T^{-1} , segue que

$$\mathbf{x}' = (T^{-1}AT)\mathbf{x} + T^{-1}\mathbf{g}(t) = D\mathbf{x} + \mathbf{h}(t), \quad (2.45)$$

onde $\mathbf{h}(t) = T^{-1}\mathbf{g}(t)$ e $D = T^{-1}AT$.

O novo sistema de EDOs é desacoplado, de forma que as EDOs podem ser resolvidas separadamente, por uma das técnicas vistas no Capítulo 1, ou outra mais apropriada. Obtendo as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$, a solução \mathbf{y} é finalmente encontrada pela transformação $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$.

Exemplo 6. Resolver

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Resolução. Para a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, os autovalores e autovetores são $\lambda_1 = 2$, $\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\lambda_2 = -2$, $\xi^{(2)} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}$, de onde construímos as matrizes

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Observamos que a solução geral do sistema homogêneo é

$$\mathbf{y}_h(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Usando a fórmula para inverter matrizes 2×2 ,

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

calculamos

$$T^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Agora, podemos calcular

$$\mathbf{x}' = D\mathbf{x} + T^{-1}g(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix},$$

de onde obtemos duas EDOs desacopladas

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + \frac{3}{4\sqrt{3}}(e^t + e^{-t}), \\ x_2' = -2x_2 + \frac{1}{4\sqrt{3}}(-e^t + 3e^{-t}). \end{cases} \quad (2.46)$$

Ambas são EDOs lineares de 1^a ordem, que podem ser resolvidas pela técnica dos fatores integrantes. Para a primeira, o fator integrante é $\mu(t) = e^{-2t}$ e a solução é

$$x_1(t) = \frac{3}{4\sqrt{3}} \left(-e^t + \frac{1}{3}e^{-t} \right) + Ce^{2t},$$

e, para a segunda, o fator integrante é $\mu(t) = e^{2t}$ e a solução é

$$x_2(t) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}e^t + 3e^{-t} \right) + Ce^{-2t}.$$

Voltando para \mathbf{y} ,

$$\mathbf{y}(t) = T\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x_1(t) - \sqrt{3}x_2(t) \\ x_1(t) + 3x_2(t) \end{pmatrix},$$

Cálculo da primeira coordenada:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sqrt{3}x_1(t) - \sqrt{3}x_2(t) \\ &= \sqrt{3} \left[\frac{3}{4\sqrt{3}} \left(-e^t + \frac{1}{3}e^{-t} \right) + c_1e^{2t} \right] - \sqrt{3} \left[\frac{1}{4\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}e^t + 3e^{-t} \right) + c_2e^{-2t} \right] \\ &= -\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \sqrt{3}c_1e^{2t} - \sqrt{3}c_2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Cálculo da segunda coordenada:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= x_1(t) + 3x_2(t) \\ &= \left[\frac{3}{4\sqrt{3}} \left(-e^t + \frac{1}{3}e^{-t} \right) + c_1e^{2t} \right] + 3 \left[\frac{1}{4\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}e^t + 3e^{-t} \right) + c_2e^{-2t} \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}e^t + \frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t} + c_1e^{2t} + 3c_2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Logo, a solução geral do sistema é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \sqrt{3}c_1e^{2t} - \sqrt{3}c_2e^{-2t} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}e^t + \frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t} + c_1e^{2t} + 3c_2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

2.4 Sistemas autônomos localmente lineares

Nesta seção vamos considerar sistemas bidimensionais do tipo

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad (2.47)$$

que são autônomos, pois a função do lado direito não depende explicitamente da variável independente t , apesar dela estar presente pois uma solução de (2.47) é uma função vetorial $\mathbf{y}(t)$. Além disso, para que o sistema (2.47) esteja próximo de um sistema linear $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, temos que considerar que $\|\mathbf{g}\|$ seja pequeno em comparação a $\|\mathbf{y}\|$ perto da origem. Tal sistema é chamado localmente linear na vizinhança do ponto crítico $(0, 0)$.

Como o termo não linear $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ é pequeno comparado ao termo linear quando \mathbf{y} é pequeno, é razoável esperar que as trajetórias do sistema linear $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ sejam boas aproximações das trajetórias do sistema não linear (2.47), pelo menos perto da origem.

Isso ocorre na maioria dos casos, mas não em todos, como pode ser visto nos resultados resumidos na Tabela (2.1).

Tabela 2.1: Classificação e estabilidade de sistemas lineares e localmente lineares

r_1, r_2	Sistema Linear		Sistema Localmente Linear	
	Tipo	Estabilidade	Tipo	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	N	Instável	N	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	N	Assint. estável	N	Assint. estável
$r_2 < 0 < r_1$	PS	Instável	PS	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	NP ou NI	Instável	N ou PE	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	NP ou NI	Assint. estável	N ou PE	Assint. estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	PE	Instável	PE	Instável
$\lambda < 0$	PE	Assintot. estável	PE	Assint. estável
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Estável	C ou PE	Indeterminado

Nota: N: nó; NI: nó impróprio; NP: nó próprio; PS: ponto de sela; PE: ponto espiral; C: centro; Assint. estável: Assintoticamente estável. Fonte: [BD].

A situação mais sensível ocorre quando $r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$. Neste caso, o ponto crítico do sistema linear é um centro e as trajetórias são curvas fechadas (elipses) em volta dele. Se for feita uma ligeira mudança nos coeficientes, então os autovalores r_1 e r_2 terão novos valores $r_1 = \lambda' + i\mu', r_2 = \lambda' - i\mu'$, em que λ' é pequeno em valor absoluto e $\mu' \approx \mu$. Se $\lambda' \neq 0$, então as trajetórias do sistema perturbado serão espirais ao invés de elipses, com trajetórias assintoticamente estáveis ou instáveis, dependendo do sinal de λ' .

A condição de ser localmente linear não é facilmente verificada pela definição. No entanto, um resultado, cuja prova pode ser encontrada em [BD], simplifica essa verificação. Ele diz que o sistema autônomo não linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases} \quad (2.48)$$

será localmente linear em uma vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0) sempre que as funções f e g tiverem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem.

Deste resultado, segue que o sistema linear que aproxima o não linear (2.48) em torno do ponto crítico (x_0, y_0) é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

A matriz

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

é chamada de matriz jacobiana e precisamos supor que $\det J$ não se anula em (x_0, y_0) de modo que esse ponto seja um ponto isolado do sistema linear (2.49).

Quando estudamos sistemas lineares homogêneos, a natureza do ponto crítico na origem determina praticamente todo o comportamento das trajetórias no plano xy . Diferentemente dos sistemas lineares, o comportamento das soluções dos sistemas não lineares pode ser muito mais complexo e variado, com fenômenos como múltiplos pontos de equilíbrio, oscilações e padrões imprevisíveis. Os pontos críticos ou pontos de equilíbrio desempenham um papel fundamental na análise desses sistemas.

Apesar das diferenças, a classificação dos pontos críticos em sistemas não lineares pode ser feita de forma semelhante à dos sistemas lineares, utilizando ferramentas como o campo de direções para poder visualmente estudar a direção das trajetórias em cada ponto do plano e a análise de pontos críticos, estudando o local do comportamento das soluções em torno dos pontos de equilíbrio, utilizando o Jacobiano e a classificação dos equilíbrios.

Exemplo 7. *Determinar a natureza de cada ponto crítico do sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - xy, \\ \frac{dy}{dt} = -3y + xy. \end{cases} \quad (2.50)$$

Resolução. Para calcular os pontos de equilíbrio do sistema (2.50) precisamos resolver o sistema algébrico

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - xy = 0, \\ \frac{dy}{dt} = -3y + xy = 0. \end{cases}$$

Para a primeira equação, $x(2 - y) = 0$, ou seja,

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 2.$$

Para a segunda equação, $y(-3 + x) = 0$, ou seja,

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

Analisando os casos:

- Se $x = 0$, substituindo na segunda equação:

$$y(-3 + 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Então, o ponto crítico é $(0, 0)$.

- Se $y = 2$, substituindo na segunda equação:

$$2(-3 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Então, o ponto crítico é $(3, 2)$.

Conclusão: Os pontos críticos do sistema são $(0, 0)$ e $(3, 2)$.

Com o cálculo dos pontos críticos, o gráfico e a elaboração do campo de direções da Figura 2.8, podemos realizar uma análise qualitativa do sistema de EDO dado em (2.50). Observa-se claramente que, no ponto crítico $(0, 0)$, há um comportamento das trajetórias que convergem ao longo de uma direção e divergem em outra, o que indica que se trata de um ponto de sela. Já no ponto $(3, 2)$, nota-se que, em sua vizinhança, formam-se espirais que tendem a se aproximar do ponto, sugerindo que ele é um foco atrator, ou seja, um ponto estável em espiral.

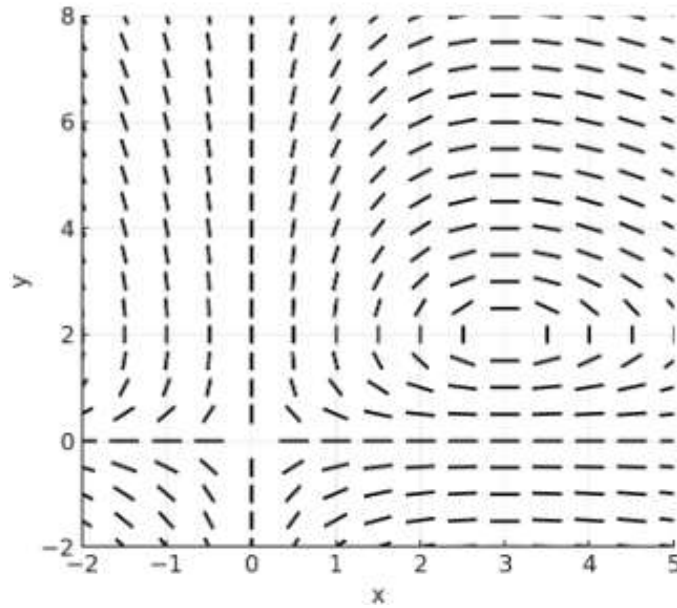


Figura 2.8: Campo de direções para o sistema de EDOs (2.50).

Vamos analisar o comportamento do sistema linear associado ao não linear (2.50) por meio dos autovalores da matriz jacobiana. Seja

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}[x(2-y)] & \frac{\partial}{\partial y}[x(2-y)] \\ \frac{\partial}{\partial x}[y(-3+x)] & \frac{\partial}{\partial y}[y(-3+x)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-y & -x \\ y & -3+x \end{bmatrix}$$

No ponto $(0, 0)$:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Autovalores: } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3,$$

reais com sinais opostos \rightarrow **ponto de sela**. Logo, para o problema não linear, $(0, 0)$ é também um ponto de sela.

No ponto $(3, 2)$:

$$J(3, 2) = \begin{bmatrix} 2-2 & -3 \\ 2 & -3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Autovalores: } \lambda = \pm i\sqrt{6},$$

complexos puros \rightarrow **centro**.

Contudo, para o sistema não linear, autovalores puramente imaginários não garantem que o ponto de equilíbrio seja um centro. Isso indica que o sistema linearizado possui comportamento oscilatório, mas a estabilidade do ponto $(3, 2)$ deve ser analisada com mais profundidade.

2.5 Aplicações em dinâmica populacional

Nesta seção, assim como na Seção 1.5, exploramos modelos de dinâmica populacional, os quais são utilizados em aplicações reais, tanto no próprio contexto de dinâmica populacional quanto em diversos outros contextos. Em especial, o modelo de duas espécies em competição é utilizado, por exemplo, para representar duas espécies que disputam pelos mesmos recursos naturais, como alimento ou espaço, influenciando mutuamente suas taxas de crescimento. Já o modelo presa-predador é empregado em estudos ecológicos para descrever a interação entre populações de espécies, como uma população de predadores e sua respectiva presa, sendo útil na análise de ciclos populacionais e estratégias de controle ambiental. Esses modelos permitem prever comportamentos oscilatórios, estabilidade ou extinção de espécies, contribuindo para decisões em manejo ambiental, agricultura e conservação.

2.5.1 Modelo de espécies em competição

O objetivo aqui é estudar a relação entre duas espécies semelhantes que vivem em um ambiente fechado e competem pelo mesmo alimento limitado. Essas espécies não estão diretamente ligadas entre si. Naturalmente, esse modelo é bastante simples se comparado às relações complexas que ocorrem na natureza, mas nos ajuda a compreender alguns princípios ecológicos.

Denotamos por x e y as populações dessas duas espécies em um instante t . Suponhamos que a população de cada espécie, na ausência da outra, seja modelada por uma equação logística. Então,

$$\frac{dx}{dt} = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x), \quad (2.51)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y), \quad (2.52)$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são as taxas de crescimento das duas populações, e ϵ_1/σ_1 e ϵ_2/σ_2 são seus níveis de saturação. No entanto, quando ambas as espécies estão presentes, cada uma vai afetar o suprimento de comida disponível para a outra. De fato, elas reduzem as taxas de crescimento e os níveis de saturação uma da outra.

A expressão mais simples para reduzir a taxa de crescimento da espécie x devido à presença da espécie y é substituir o fator de crescimento $\epsilon_1 - \sigma_1 x$ na Equação (2.51) por $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y$, onde α_1 é uma medida do grau de interferência da espécie y sobre a espécie x . Analogamente, substituímos $\epsilon_2 - \sigma_2 y$ na Equação (2.52) por $\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x$.

Obtemos, então, o sistema de equações fica

$$\frac{dx}{dt} = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \quad (2.53)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) \quad (2.54)$$

Os valores das constantes positivas $\epsilon_1, \sigma_1, \epsilon_2, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2$ dependem das espécies particulares em consideração e têm que ser determinados, em geral, através de observações. Estamos interessados nas soluções das Eqs. (2.54) para as quais x e y não são negativos. Segue um exemplo.

Exemplo 8. Realizar a análise qualitativa do problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1,5 - x - 0,5y), \\ \frac{dy}{dt} = y(2 - y - 0,75x). \end{cases} \quad (2.55)$$

Resolução. Começamos encontrando os pontos críticos do sistema, isto é, quando as derivadas são nulas, o que equivale a resolver os sistemas de equações algébricas

$$x(1,5 - x - 0,5y) = 0, \quad y(2 - y - 0,75x) = 0.$$

Se $x = 0$ na primeira equação, resolvendo a segunda, $y(2 - y) = 0$, obtemos que $y = 0$ ou $y = 2$. Portanto, os pontos de equilíbrio com $x = 0$ são $(0, 0)$ e $(0, 2)$. Se $y = 0$ na segunda equação, resolvendo a primeira, $x(1,5 - x) = 0$, obtemos $x = 0$ ou $x = 1,5$. Portanto, os pontos de equilíbrio com $y = 0$ são $(0, 0)$ e $(1,5, 0)$.

Por fim, buscamos os pontos de equilíbrio com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} 1,5 - x - 0,5y = 0, \\ 2 - y - 0,75x = 0, \end{cases}$$

cuja solução é o ponto $(0,8, 1,4)$.

Os pontos de equilíbrio encontrados são interpretados da seguinte forma:

- $(0, 0)$ é um ponto trivial, que significa inexistência de ambas espécies;
- $(0, 2)$ significa a existência apenas da espécie y ;
- $(1,5, 0)$ significa a presença apenas da espécie x ;
- $(0,8, 1,4)$ é um ponto de equilíbrio interno e ambas espécies coexistem.

Prosseguindo com a análise qualitativa, vamos calcular a natureza de cada pontos críticos encontrado, com base nos autovalores de cada matriz jacobiana. De (2.55), observamos que $f(x, y) = x(1,5 - x - 0,5y)$ e $g(x, y) = y(2 - y - 0,75x)$. Logo, a matriz jacobiana fica

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 - 2x - 0,5y & -0,5x \\ -0,75y & 2 - 2y - 0,75x, \end{bmatrix}$$

na qual substituímos cada ponto de equilíbrio e concluímos que:

- em $(0; 0)$, $J(0,0) = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1,5, \quad \lambda_2 = 2$, ambos os autovalores positivos: nó instável (repulsor);
- em $(0; 2)$, $J(0,2) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ -1,5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0,5, \quad \lambda_2 = -2$, autovalores reais com sinais opostos: ponto de sela (instável);
- em $(1,5; 0)$, $J(1,5,0) = \begin{bmatrix} -1,5 & -0,75 \\ 0 & 0,875 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1,5, \quad \lambda_2 = 0,875$, autovalores reais com sinais opostos: ponto de sela (instável);
- em $(0,8; 1,4)$, $J(0,8,1,4) = \begin{bmatrix} -0,8 & -0,4 \\ -1,05 & -1,4 \end{bmatrix}$, para a qual determinamos os autovalores resolvendo a equação característica

$$\lambda^2 + 2,2\lambda + 1,06 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2,2 \pm \sqrt{2,2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1,06}}{2} = \frac{-2,2 \pm \sqrt{0,6}}{2}$$

$\Rightarrow \lambda_1 \approx -1,35, \quad \lambda_2 \approx -0,85$, ambos os autovalores reais negativos: nó estável (atrator).

O campo de direções mostrado na Figura 2.9 destaca do ponto crítico em $(0,8; 1,4)$, no qual os vetores ao redor indicam uma tendência de convergência. Esse padrão sugere que o ponto funciona como um ponto de equilíbrio estável, onde ambas as populações tendem a se estabilizar ao longo do tempo.

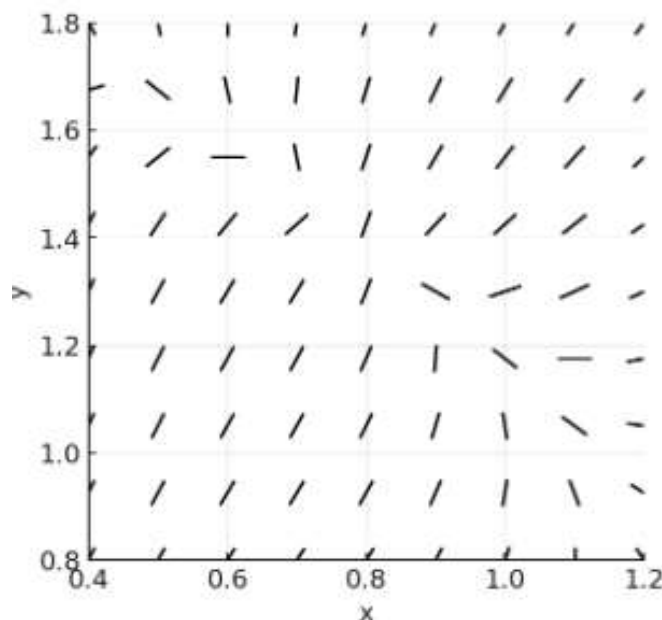


Figura 2.9: Campo de direções para o modelo de espécie em competição (2.55).

2.5.2 Modelo presa-predador

Nessa seção vamos investigar EDOs que correspondem à relação entre duas espécies, uma conhecida como predador, que se alimenta de outra espécie, a presa, a qual, por sua vez, se alimenta de outro recurso.

Na fauna podemos encontrar essa relação em diversos biomas. Por exemplo, na Amazônia, convivem o gavião-real e a preguiça; no Cerrado, o lobo-guará e o tatu-galinha; e, na Mata Atlântica, presente no Sul e Sudeste, a relação entre a jararaca e o rato-do-campo.

Naturalmente, o estudo isolado entre duas espécies não traduz com exatidão a complexa rede de interações que ocorre na natureza. No entanto, esse modelo simplificado representa o primeiro passo para a compreensão de fenômenos ecológicos mais complexos.

Vamos usar x e y para denotar, respectivamente, as populações de presas e predadores, e denotamos por t o instante dessa interação. Para estudar essa relação vamos considerar as seguintes hipóteses:

- Na ausência do predador y , ou seja, quando não há caça à presa, a população de presas x cresce a uma taxa proporcional à sua população atual. Essa variação é definida por $\frac{dx}{dt} = ax$, com $a > 0$, quando $y = 0$.
- Na ausência de presas x , ou seja, quando o predador y não tem alimento para sustentar sua espécie, a população de predadores entra em declínio e é extinta a uma taxa definida por $\frac{dy}{dt} = -cy$, com $c > 0$, quando $x = 0$.
- O número de encontros entre predadores y e presas x será estimado pelo produto xy . Cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população de predadores y e a redução da população de presas x . Assim, a taxa de crescimento da população de predadores é dada por um termo γxy , com $\gamma > 0$, enquanto a taxa de diminuição da população de presas é representada por $-\alpha xy$, com $\alpha > 0$.

Em consequência dessas hipóteses, somos levados as equações

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x). \end{cases} \quad (2.56)$$

As constantes a, c, α e γ são todas positivas; a e c são as taxas de crescimento da população de presas e de morte da população de predadores, respectivamente, e α e γ são medidas do efeito da interação entre as duas espécies.

As equações (2.56) são chamadas de equações de Lotka-Volterra. Foram desenvolvidas em artigos escritos por Lotka em 1925 e por Volterra em 1926. É um problema do tipo localmente linear, de forma que podemos usar a teoria vista na Seção 2.4. A seguir, vamos fazer as análises qualitativas por meio de um exemplo típico.

Exemplo 9. Realizar a análise qualitativa do problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - 0,5y), \\ \frac{dy}{dt} = y(-0,5 - x). \end{cases} \quad (2.57)$$

Resolução. No exemplo, a taxa de crescimento da população de presas é igual a 1, ou seja, 100%, e a taxa de mortalidade da população de predadores é de 0,5, ou seja, 50%. As taxas de interação entre as espécies são 0,5 para a população de presas e 1 para a população de predadores.

Inicialmente analisamos os pontos de equilíbrio das populações de presas e predadores. Tais pontos são calculados resolvendo o sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} x(1 - 0,5y) = 0, \\ y(-0,5 - x) = 0, \end{cases} \quad (2.58)$$

ou seja, quando a variação das populações de presas e predadores são nulas. Obtemos $y = 2$ e $x = 0,5$ e $y = 0$ e $x = 0$ então temos dois pontos de equilíbrio $(0,0)$ e $(0,5;2)$.

A Figura 2.10 mostra os pontos críticos e um campo de direções para o sistema (2.58). Dessa figura, parece que as trajetórias no primeiro quadrante circulam em torno do ponto crítico $(0,5;2)$. Não é possível determinar definitivamente do campo de direções se as trajetórias são de fato curvas fechadas ou se elas espiralam para dentro ou para fora. A origem parece ser um ponto de sela. Os eixos coordenados são trajetórias das Eqs. (2.58). Em consequência, nenhuma outra trajetória pode cruzar um eixo coordenado, o que significa que toda solução que começa no primeiro quadrante permanece aí para todo o sempre.

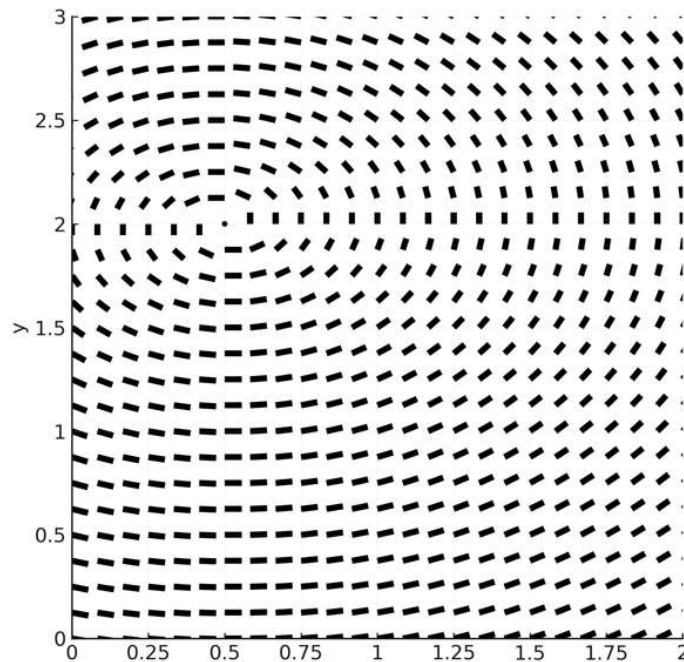


Figura 2.10: Campo de direções para o modelo presa-predador (2.57).

Vamos examinar, a seguir, o comportamento local das soluções perto de cada ponto de equilíbrio. De (2.58), observamos que $f(x,y) = x(1 - 0,5y)$ e $g(x,y) = y(-0,5 - x)$. Por meio da matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 0,5y & -0,5x \\ -y & -0,5 - x \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

concluimos que:

- Em $(0; 0)$, $J(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0,5$, autovalores reais e de sinais opostos. Assim, a origem é um ponto de sela para ambos os sistemas, o linear (2.57) e o não linear (2.58), e, portanto, instável. Um par de trajetórias entra na origem ao longo do eixo dos y ; todas as outras trajetórias se afastam de uma vizinhança da origem.
- Em $(0,5, 2)$, $J((0,5, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -0,25 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, que possui os autovalores $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Assim, os autovalores são reais e de sinais opostos, o ponto crítico $(0,5, 2)$ é um centro do sistema linear (2.57) e, portanto, um ponto crítico instável para esse sistema. O comportamento do sistema linear pode ser o mesmo ou não do sistema não linear, de modo que a natureza do ponto $(0,5, 2)$ para o sistema não linear (2.58) não pode ser determinada por essa informação.

Para nos ajudar a traçar as trajetórias das soluções desse sistema de EDOs, utilizamos o método de Euler, apresentado no Capítulo 3.

Capítulo 3

Soluções numéricas

Os métodos numéricos são importantes ferramentas para extrair informações da solução de um problema quando as técnicas analíticas não são capazes.

O Método de Euler é o método numérico mais simples para encontrar soluções aproximadas de EDOs de primeira ordem, bem como para sistemas de EDOs de primeira ordem. É simples tanto em sua dedução quanto na sua fórmula, o que permite o uso no ensino médio.

Neste capítulo buscamos apresentar o método de Euler sob diferentes aspectos. Primeiramente o apresentamos por meio de sua interpretação geométrica, para problemas com uma única EDO. Em seguida, expandimos essa interpretação para sistemas com duas EDOs. Mais à frente, deduzimos o método usando série de Taylor e tratamos dos aspectos teóricos, como convergência e ordem de convergência. Aplicamos o método para aproximar soluções de exemplos e aplicações vistas nos capítulos anteriores, dando ênfase aos problemas de dinâmica populacional.

Os métodos numéricos em geral exigem uma grande quantidade de cálculo, principalmente quando queremos encontrar uma aproximação para a solução com certa precisão. Assim, faz-se necessária a utilização de um programa computacional que permita a implementação da fórmula e a aplicação dela repetidamente. Nesta parte do trabalho também usamos o Excel.

3.1 Método de Euler para uma EDO

Vamos retomar o PVI com uma EDO (1.1)-(1.2), repetido aqui

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_f], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Escolhemos pontos discretos que representam a variável t no intervalo $[t_0, t_f]$. Por simplicidade, tomamos os pontos igualmente espaçados de h . Neste caso, $h = (t_f - t_0)/N$, onde $N = np - 1$ e np é o quantidade de pontos no intervalo. Assim, construímos uma malha $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ onde

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Ao invés de termos uma solução contínua, nos métodos numéricos temos um conjunto discreto de aproximações para a solução em cada ponto. Vamos chamar a solução numérica de $\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$, sendo $y_n \approx y(t_n)$.

Para a solução no ponto t_0 , a solução numérica é a solução exata y_0 . Para as demais soluções, aplicamos uma fórmula, que está deduzida a seguir, por meio da interpretação geométrica do método. Primeiramente, calculamos a EDO em um ponto t_n , isto é,

$$\frac{dy}{dt}(t_n) = f(t_n, y(t_n)). \quad (3.3)$$

Como vimos no Capítulo 1, a derivada $\frac{dy}{dt}(t_n)$ pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y(t)$ no ponto $(t_n, y(t_n))$. No entanto, se traçarmos a reta secante ao gráfico da função $y(t)$ passando pelos pontos $(t_n, y(t_n))$ e $(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$, o coeficiente angular da reta secante será uma aproximação para o coeficiente angular da reta tangente. Em termos matemáticos,

$$\frac{dy}{dt}(t_n) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.3), obtemos

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} \approx f(t_n, y(t_n)),$$

ou seja,

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)).$$

Agora, usando a notação de solução numérica, reestabelecemos a igualdade e obtemos a fórmula geral do método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.5)$$

Essa aproximação é repetida para cada n , até que o valor final $t_N = t_f$ seja alcançado.

Exemplo 10. *Aplicar o Método de Euler no PVI*

$$\frac{dy}{dt} = t + y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 2],$$

com passo $h = 0.1$.

Observamos que $f(t, y) = t + y$, logo o método de Euler fica

$$y_{n+1} = y_n + h(t_n + y_n) = y_n + 0,1(t_n + y_n).$$

Do PVI, tiramos a informação de que $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$. A partir daí seguimos passo a passo encontrando as aproximações para a solução nos demais pontos da malha. Assim,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \cdot f(t_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1.1 \\ y_2 &= y_1 + h \cdot f(t_1, y_1) = 1.1 + 0.1 \cdot (0.1 + 1.1) = 1.22 \\ y_3 &= y_2 + h \cdot f(t_2, y_2) = 1.22 + 0.1 \cdot (0.2 + 1.22) = 1.364 \\ y_4 &= y_3 + h \cdot f(t_3, y_3) = 1.364 + 0.1 \cdot (0.3 + 1.364) = 1.5304 \\ y_5 &= y_4 + h \cdot f(t_4, y_4) = 1.5304 + 0.1 \cdot (0.4 + 1.5304) = 1.72344 \\ y_6 &= y_5 + h \cdot f(t_5, y_5) = 1.72344 + 0.1 \cdot (0.5 + 1.72344) = 1.945784 \\ y_7 &= y_6 + h \cdot f(t_6, y_6) = 1.945784 + 0.1 \cdot (0.6 + 1.945784) = 2.2003624 \end{aligned}$$

A solução numérica entre $t = 0,0$ e $t = 0,7$ está disposta na Tabela 3.1. Este processo continua até que se atinja $t_f = 2$.

Tabela 3.1: Solução numérica do Exemplo 10.

n	t_n	y_n
0	0.0	1.0000
1	0.1	1.1000
2	0.2	1.2200
3	0.3	1.3640
4	0.4	1.5304
5	0.5	1.7234
6	0.6	1.9458
7	0.7	2.2004

Exemplo 11. Voltando à Aplicação 4 - Resfriamento com Aquecimento Externo, modelada por

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} + 0,2T = 9, \\ T(0) = 80, \end{cases} \quad (3.6)$$

obter uma aproximação para a solução pelo método de Euler.

Na Figura 3.1, apresentamos a planilha elaborada no Excel, contendo os cálculos e o gráfico da solução. Cada linha representa uma etapa do método, mostrando os valores de tempo, temperatura e os incrementos sucessivos.

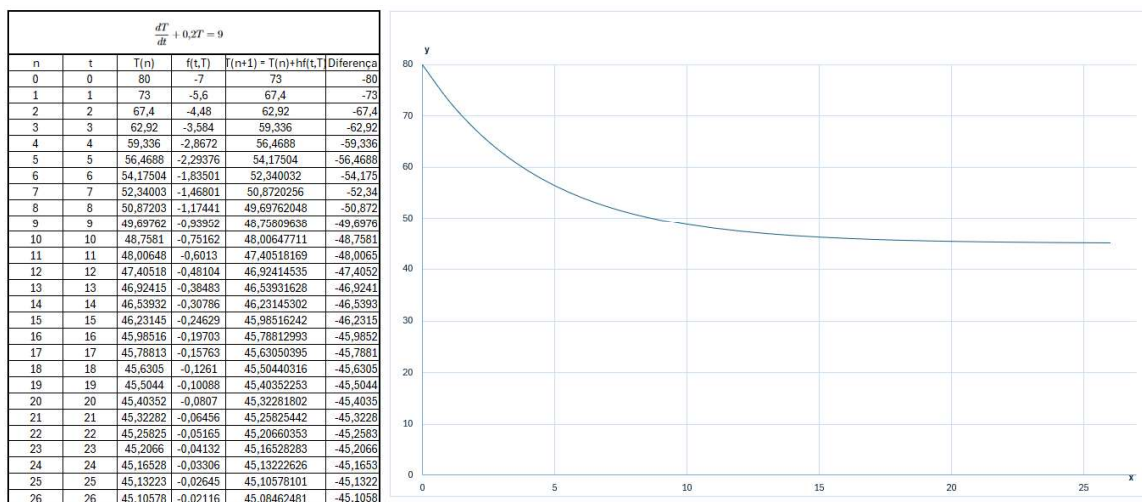


Figura 3.1: Cálculos no Excel — Método de Euler aplicado ao resfriamento com aquecimento externo.

Na Figura 3.2, realizamos uma comparação gráfica entre a solução numérica obtida pelo método de Euler e a solução analítica da equação diferencial (3.6), que, conforme visto no Capítulo 1, é dada por:

$$T(t) = 45 + 35e^{-0,2t}. \quad (3.7)$$

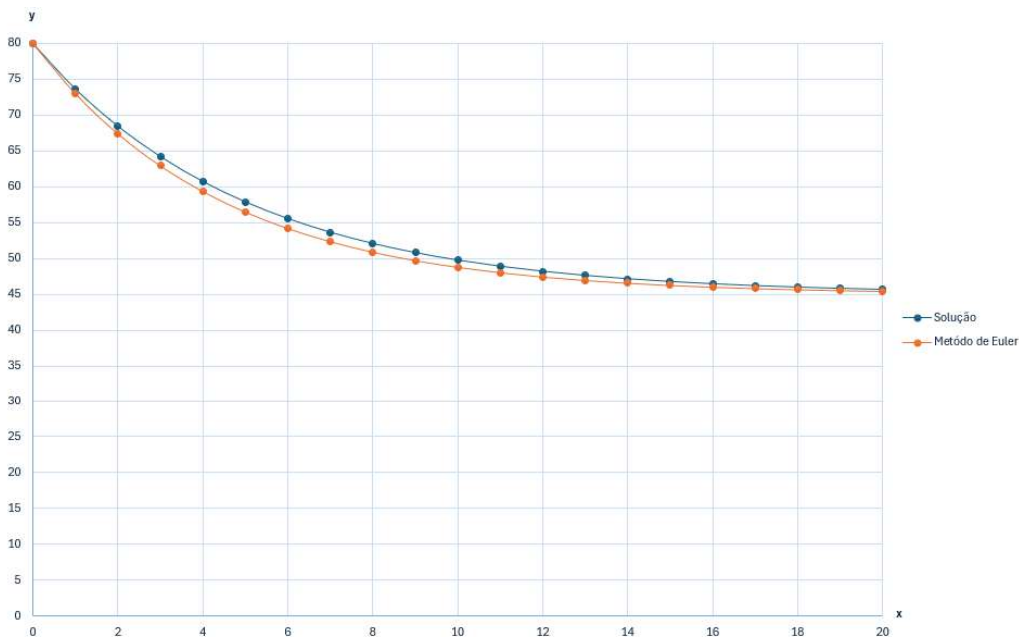


Figura 3.2: Gráficos das soluções analítica e numérica do Exemplo 11.

Observa-se que, nos primeiros instantes, ambas as curvas praticamente se sobrepõem, evidenciando que, com um passo h relativamente pequeno, o Método de Euler oferece uma boa aproximação. Contudo, à medida que o tempo avança, uma leve divergência se torna perceptível: a curva obtida pelo Método de Euler tende a permanecer ligeiramente acima da solução exata. Isso ocorre devido ao erro de truncamento acumulado que é estudado na Seção 3.3.

Apesar dessa diferença crescente, especialmente visível após $t \approx 15$, o Método de Euler ainda fornece uma boa aproximação, suficiente para entender o comportamento da solução, principalmente em intervalos de tempo curtos.

Exemplo 12. *voltando à Aplicação 2 - Acúmulo de água em um reservatório, modelada por*

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = 6t^2 + 4t + 10, \\ T(0) = 50. \end{cases} \quad (3.8)$$

obter uma aproximação para a solução pelo método de Euler.

Colocando na planilha do Excel a função $f(t, T) = 6t^2 + 4t + 10$, a condição inicial $T_0 = 50$ e utilizando $h = 1$, obtivemos os pontos sobre a curva laranja na Figura 3.3. Podemos também ver na figura, uma comparação visual com a solução exata.

Assim como no exemplo anterior, é possível verificar que nos primeiros intervalos de tempo ambas as soluções — analítica e numérica — apresentam um excelente alinhamento. No entanto, à medida que o tempo avança, torna-se perceptível uma leve divergência entre as curvas. Essa diferença é uma consequência natural do erro de truncamento acumulado, inerente aos métodos numéricos, que pode ser mais ou menos acentuada dependendo do problema.

Apesar disso, a aproximação continua bastante satisfatória para muitos contextos práticos, especialmente quando se busca entender o comportamento geral da solução ao longo do tempo. Este exemplo reforça a importância do Método de Euler como uma ferramenta didática e computacional acessível para a resolução de problemas de equações diferenciais ordinárias.

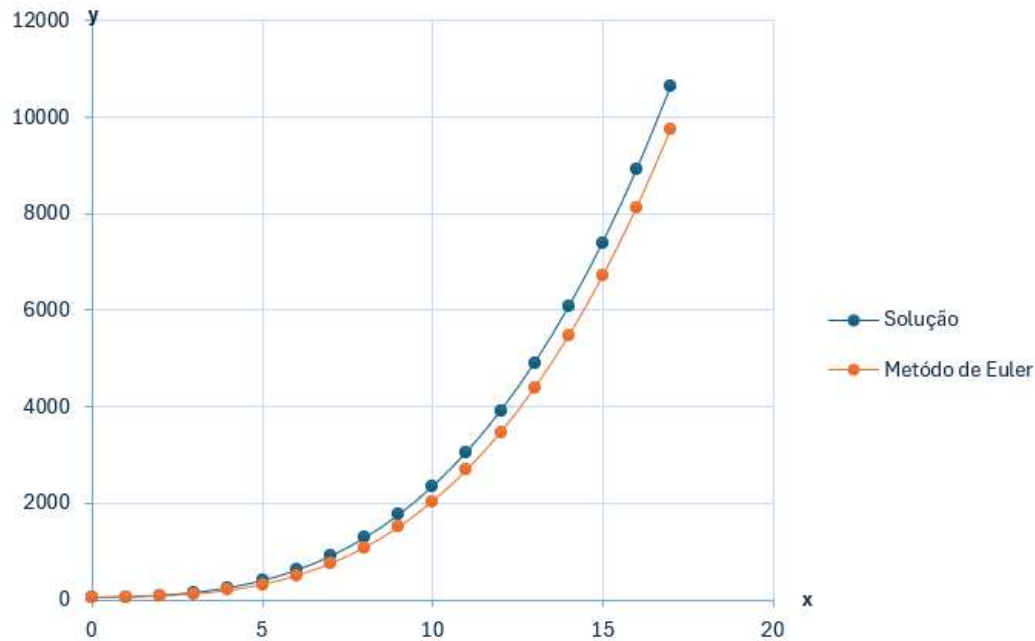


Figura 3.3: Comparação entre o gráfico da solução analítica e do Método de Euler para o Exemplo 12.

3.2 Método de Euler para sistemas de EDOs

Considere um PVI com duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem dado por (2.1)-(2.2), repetido aqui

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2), \\ y_1(t_0) = y_{10}, \\ y_2(t_0) = y_{20}. \end{cases} \quad (3.9)$$

O objetivo é resolver o sistema de equações para valores de y no intervalo $[t_0, t_f]$. Da mesma forma como no caso unidimensional, calculamos o tamanho do passo $h = (t_f - t_0)/N$, onde np é o quantidade de pontos no intervalo e $N = np - 1$, e construímos uma malha com os pontos

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (3.10)$$

A solução numérica é dada por $\{(y_{1,0}, y_{2,0}), (y_{1,1}, y_{2,1}), \dots, (y_{1,N}, y_{2,N})\}$, onde $y_{1,n} \approx y_1(t_n)$ e $y_{2,n} \approx y_2(t_n)$ e a generalização da fórmula (3.5) para o sistema de EDOs (3.9) fica

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} &= y_{1,n} + hf_1(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}), \\ y_{2,n+1} &= y_{2,n} + hf_2(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

para $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Exemplo 13. Considere o sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1 + 2y_2, & y_1(0) = 1, \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_1 + 2y_2, & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicar o método de Euler com um passo $h = 0.1$ para aproximar as soluções no intervalo $[0, 1]$.

Resolução. Começando de $y_{1,0} = 1$ e $y_{2,0} = 0$, aplicamos as fórmulas (3.11).

Para $n = 0$,

$$y_{1,1} = y_{1,0} + hf_1(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 1 + 0.1 \cdot (1 + 2 \cdot 0) = 1.1$$

$$y_{2,1} = y_{2,0} + hf_2(t_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = 0 + 0.1 \cdot (3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 0.3$$

Para $n = 1$,

$$y_{1,2} = y_{1,1} + h \cdot f_1(t_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 1.1 + 0.1 \cdot (1.1 + 2 \cdot 0.3) = 1.26$$

$$y_{2,2} = y_{2,1} + h \cdot f_2(t_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = 0.3 + 0.1 \cdot (3 \cdot 1.1 + 2 \cdot 0.3) = 0.69$$

Para $n = 2$,

$$y_{1,3} = y_{1,2} + h \cdot f_1(t_2, y_{1,2}, y_{2,2}) = 1.26 + 0.1 \cdot (1.26 + 2 \cdot 0.69) = 1.498$$

$$y_{2,3} = y_{2,2} + h \cdot f_2(t_2, y_{1,2}, y_{2,2}) = 0.69 + 0.1 \cdot (3 \cdot 1.26 + 2 \cdot 0.69) = 1.242$$

Para $n = 3$,

$$y_{1,4} = y_{1,3} + h \cdot f_1(t_3, y_{1,3}, y_{2,3}) = 1.498 + 0.1 \cdot (1.498 + 2 \cdot 1.242) = 1.8712$$

$$y_{2,4} = y_{2,3} + h \cdot f_2(t_3, y_{1,3}, y_{2,3}) = 1.242 + 0.1 \cdot (3 \cdot 1.498 + 2 \cdot 1.242) = 2.1538$$

Para $n = 4$,

$$y_{1,5} = y_{1,4} + h \cdot f_1(t_4, y_{1,4}, y_{2,4}) = 1.8712 + 0.1 \cdot (1.8712 + 2 \cdot 2.1538) = 2.30196$$

$$y_{2,5} = y_{2,4} + h \cdot f_2(t_4, y_{1,4}, y_{2,4}) = 2.1538 + 0.1 \cdot (3 \cdot 1.8712 + 2 \cdot 2.1538) = 3.72272$$

Para $n = 5$,

$$y_{1,6} = y_{1,5} + h \cdot f_1(t_5, y_{1,5}, y_{2,5}) = 2.30196 + 0.1 \cdot (2.30196 + 2 \cdot 3.72272) = 2.811504$$

$$y_{2,6} = y_{2,5} + h \cdot f_2(t_5, y_{1,5}, y_{2,5}) = 3.72272 + 0.1 \cdot (3 \cdot 2.30196 + 2 \cdot 3.72272) = 6.396112$$

Para $n = 6$,

$$\begin{aligned} y_{1,7} &= y_{1,6} + h \cdot f_1(t_6, y_{1,6}, y_{2,6}) = 2.811504 + 0.1 \cdot (2.811504 + 2 \cdot 6.396112) \\ &= 3.4317656 \end{aligned}$$

$$y_{2,7} = y_{2,6} + h \cdot f_2(t_6, y_{1,6}, y_{2,6}) = 6.396112 + 0.1 \cdot (3 \cdot 2.811504 + 2 \cdot 6.396112) \\ = 10.9720336$$

A solução numérica entre $t = 0,0$ e $t = 0,7$ está disposta na Tabela 3.2. Este processo continua até que se atinja t_f , um valor final desejado. A Figura 3.4, apresenta os gráficos das soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ obtidas pelo Método de Euler.

Tabela 3.2: Solução numérica do Exemplo 13.

n	t_n	$y_{1,n}$	$y_{2,n}$
0	0.0	1.0000	0.0000
1	0.1	1.1000000	0.3000000
2	0.2	1.2600000	0.6900000
3	0.3	1.4980000	1.2420000
4	0.4	1.8712000	2.1538000
5	0.5	2.3019600	3.7227200
6	0.6	2.8115040	6.3961120
7	0.7	3.4317656	10.9720336

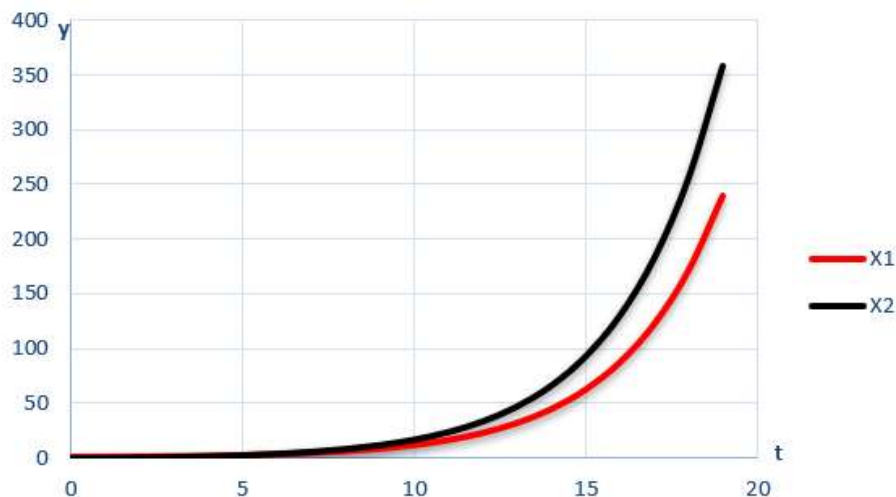


Figura 3.4: Gráfico da solução aproximada $(y_{1,n}, y_{2,n})$ do Exemplo 13 obtida pelo método de Euler com $t_f = 18$ e $h = 0,1$.

3.2.1 Exemplo do modelo de espécies em competição

Voltando ao Exemplo 8, encontramos a solução numérica e a apresentamos como resultado duas figuras. A Figura 3.5 exibe a evolução das populações x e y em função do tempo. Observa-se que, ao longo do tempo, ambas as espécies caminham para o ponto de equilíbrio do sistema, demonstrando um comportamento típico de sistemas estáveis de competição.

A Figura 3.6 representa o diagrama de fase, ou seja, o comportamento da população y em função da população x . Este gráfico permite visualizar a trajetória dinâmica do

sistema no espaço de fases, evidenciando como as espécies interagem e se aproximam do equilíbrio.

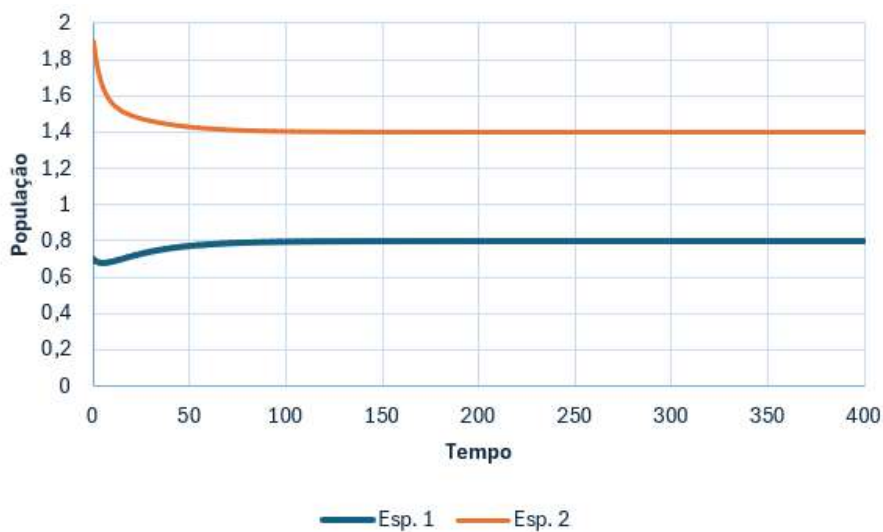


Figura 3.5: Evolução das populações x e y ao longo do tempo no modelo de espécies em competição.

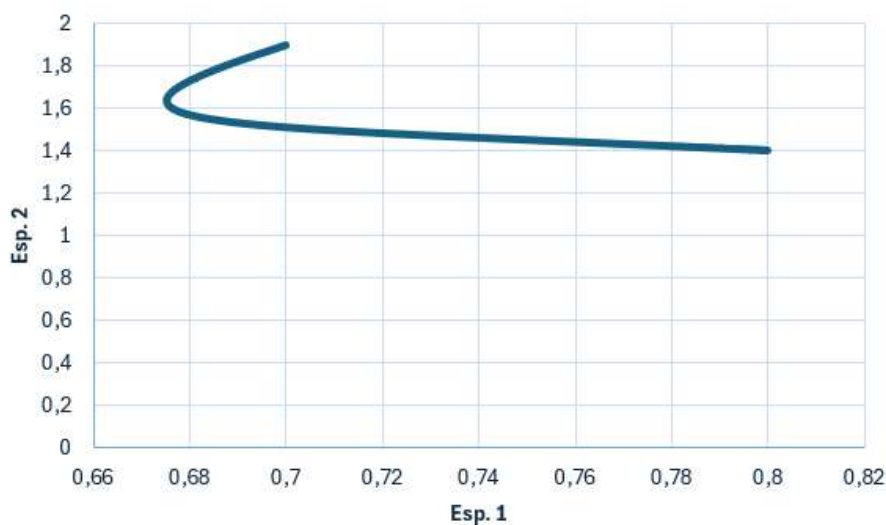


Figura 3.6: Diagrama de fase ilustrando o comportamento das populações x e y no modelo de espécies em competição, obtido pelo método de Euler usando planilha eletrônica.

Estes gráficos reforçam a interpretação qualitativa das soluções, mostrando que o modelo utilizado representa adequadamente a dinâmica competitiva entre as espécies, que converge para um equilíbrio estável ao longo do tempo.

3.2.2 Exemplo do modelo presa-predador

Tomamos o PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1,1x - 0,4xy, \\ \frac{dy}{dt} = 0,1xy - 0,4y. \end{cases} \quad (3.12)$$

Aplicamos o método de Euler a ele, de onde seguem os resultados.

A Figura 3.7 apresenta o campo de direções do PVI (3.12), o qual permite visualizar as trajetórias possíveis no espaço de fases e o comportamento dinâmico das populações.

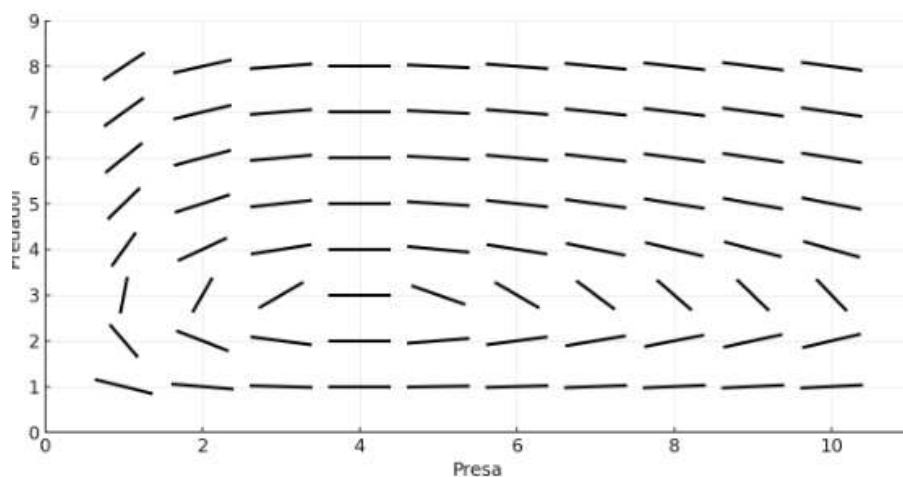


Figura 3.7: Campo de direções gerado a partir dos cálculos, representando graficamente a interação entre presa e predador.

Já nas Figuras 3.8 e 3.9 observamos claramente o comportamento cíclico das populações de presa e predador ao longo do tempo. Esse padrão é característico de sistemas do tipo Lotka-Volterra, onde o crescimento de uma população impacta diretamente na dinâmica da outra, gerando oscilações periódicas.

3.3 Convergência do método de Euler

Uma outra forma de deduzir o método de Euler é por meio da série de Taylor. Para detalhes sobre série de Taylor, indicamos [STW,TWH] ou qualquer outro livro de Cálculo. A dedução do método de Euler e estudo da convergência podem ser encontrados em [F] ou em livros de Cálculo Numérico.

Seja a série de Taylor da solução y em torno de x_n ,

$$y(t) = y(t_n) + (t - t_n)y'(t_n) + \frac{(t - t_n)^2}{2}y''(\xi_n), \quad (3.13)$$

para algum ξ_n entre t e t_n .

Calculamos a série de Taylor em $t = t_n + h = t_{n+1}$,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n), \quad (3.14)$$



Figura 3.8: Evolução das populações x e y ao longo do tempo no modelo presa-predador.

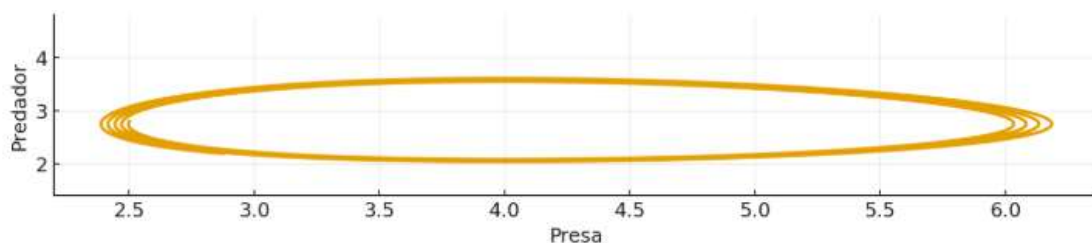


Figura 3.9: Diagrama de fase ilustrando o comportamento das populações x e y no modelo presa-predador, obtido pelo método de Euler usando planilha eletrônica.

substituímos $y'(t_n)$ por $f(t_n, y(t_n))$, uma vez que y satisfaz a EDO e descartamos, por enquanto, o termo do erro (chamado de erro de arredondamento), obtendo

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)).$$

Prosseguindo como na Seção 3.1, usamos a solução aproximada para reestabelecer a igualdade, obtendo a fórmula do método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Fazendo uma análise detalhada, observamos que para t_0 , a solução exata e a aproximada coincidem. Para t_1 , y_1 é calculada pela fórmula, $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$ sobre a qual incide apenas um tipo de erro, o erro de truncamento da série de Taylor. Para t_2 , $y_2 \approx y(t_1) + hf(t_1, y(t_1)) \approx y_1 + hf(t_1, y_1)$, ou seja, há a incidência de dois tipos de erro, o de truncamento da série de Taylor e o erro vindo de usarmos na fórmula a aproximação y_1 ao invés do valor exato $y(t_1)$. Para t_3 , incide o erro de truncamento da série de Taylor mais o erro propagado da aproximação y_2 , que já continha um erro propagado da aproximação y_1 . E assim por diante, o erro se propaga sucessivamente pela solução numérica.

Para ilustrar esse fato, a Figura 3.10 mostra o gráfico da função $f(t) = \frac{t^3}{3}$, juntamente com o caminho percorrido pelo método de Euler, partindo de (t_0, y_0) , seguindo para (t_1, y_1) pela direção da tangente ao gráfico no ponto (t_0, y_0) . Em seguida, parte da solução aproximada (t_1, y_1) e caminha por uma direção que é uma aproximação da direção da tangente ao gráfico no ponto (t_1, y_1) . E assim por diante.

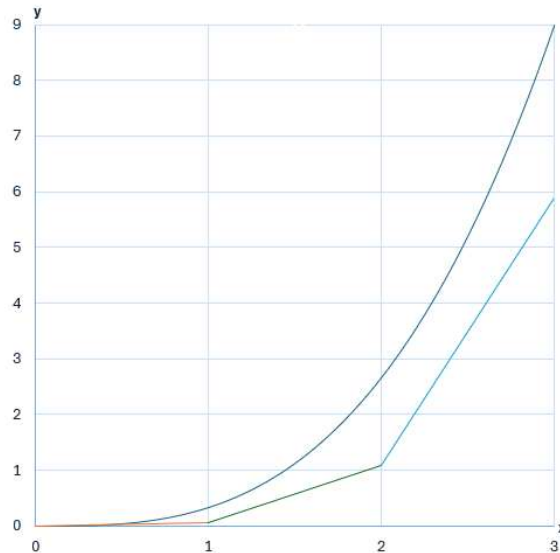


Figura 3.10: Gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{3}$ e a interpretação geométrica do método de Euler.

O estudo a seguir pretende mostrar que sob algumas condições sobre a f , a solução numérica se mantém a uma distância desejada da solução exata.

Como vimos neste capítulo, a solução numérica está vinculada à malha de pontos usada, ou seja, à escolha do número de pontos, e conseqüentemente ao valor de h . Para deixar esse fato bem claro, a partir daqui vamos chamar a malha de $\Delta^{(h)}$ e solução numérica por $\{y_0^{(h)}, y_1^{(h)}, y_2^{(h)}, \dots, y_N^{(h)}\}$, e vamos tratar h como uma variável.

Antes de iniciarmos, precisamos da definição de convergência e de ordem de convergência.

Definição. O método de Euler, definido por (3.5), é dito ser convergente em relação à equação diferencial que se aproxima quando for satisfeita a condição

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n=0,1,\dots,N} |y(t_n) - y_n^{(h)}| = 0,$$

onde $y_n^{(h)}$ representa a aproximação numérica obtida no n -ésimo passo pelo método de Euler e $y(t_n)$ é a solução exata do problema de valor inicial.

A definição acima diz que a distância entre a solução exata $y(t_n)$ e a solução aproximada no mesmo ponto $y_n^{(h)}$, calculada com uma malha $\Delta^{(h)}$, logo distância = $|y(t_n) - y_n^{(h)}|$, a maior distância entre todos os pontos depende de alguma forma de h , e se h for diminuindo e tendendo a zero, a distância também vai diminuindo e tendendo a zero. Com isso, dizemos que a solução numérica está tendendo à solução exata, ou, em outras palavras, a solução numérica está convergindo para a solução exata.

Para demonstrar a convergência, precisamos fazer suposições sobre a função f , $f : D = [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(H1) Vamos supor que f é de classe $C^1(D)$, isto é, f possui derivada primeira contínua para todos os pontos de seu domínio D ;

(H2) Vamos supor também que a derivada primeira é limitada.

De (H1) e (H2), tiramos duas informações importantes para a demonstração da convergência. Primeira, como $d/dt(d/dty(t)) = d/dtf(t, y(t))$ e $|d/dtf(t, y(t))| \leq M$, concluímos que

$$|y''(t)| \leq M, \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_f]. \quad (3.15)$$

Segunda, a derivada parcial em relação a y (deixando t fixo) é limitada em D . De forma matemática, f deve ser tal que se existir uma constante $K > 0$, tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq K, \quad \text{para todo } (t, y) \in D.$$

Essa característica da função f leva a uma outra desigualdade, decorrendo do Teorema do Valor Médio (TVM), segundo o qual, se uma função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) , então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Pode-se ilustrar o Teorema do Valor Médio, através da Figura 3.11, em que esboça-se o gráfico de g e a reta que passa pelos pontos $(a, g(a))$ e $(b, g(b))$. Essa reta é o gráfico da função r dada por

$$r(x) = g(a) + \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a).$$

O TVM afirma que existe $c \in (a, b)$ tal que a derivada de g em $x = c$, $g'(c)$, é a inclinação da reta r . Adaptando o TVM para a função f à direita da EDO, que é de duas variáveis, mas considerando a primeira variável constante, temos

$$\frac{f(t, y_1) - f(t, y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, c),$$

para algum (t, c) na linha entre (t, y_1) e (t, y_2) . Como por hipótese $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$, pois $(t, c) \in D$, segue que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|. \quad (3.16)$$

Teorema. Dado o PVI (3.1), se f satisfaz (H1) e (H2) então o método de Euler definido por (3.5) é convergente. Além disso, a ordem de convergência global é h , isto é,

$$\max_{n=0,1,\dots,N} |y(t_n) - y_n^{(h)}| \leq C.h,$$

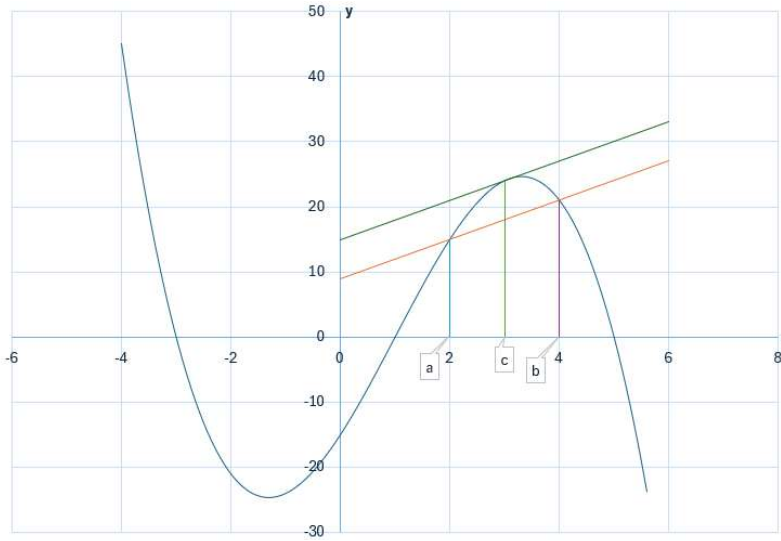


Figura 3.11: Gráfico ilustrando o Teorema do Valor Médio (TVM).

onde C é uma constante.

Demonstração. Começamos a demonstração tomando a série de Taylor, Equação (3.14), usada na dedução do método

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n),$$

e o método de Euler

$$y_{n+1}^{(h)} = y_n^{(h)} + hf(t_n, y_n^{(h)}).$$

A subtração das das expressões acima, resulta em

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)} = y(t_n) - y_n^{(h)} + h[f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n^{(h)})] + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n).$$

Logo, tomando o módulo em ambos os lados e aplicando a desigualdade triangular, obtém-se

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)}| \leq |y(t_n) - y_n^{(h)}| + h|f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n^{(h)})| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_n)|.$$

Usando as desigualdades (3.15) e (3.16), encontramos a relação entre o erro no instante t_n e o erro no instante t_{n+1} ,

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)}| \leq (1 + hK)|y(t_n) - y_n^{(h)}| + \frac{h^2}{2}M. \quad (3.17)$$

Repetindo o processo para t_n e t_{n-1} , chegamos a uma relação semelhante à anterior,

$$|y(t_n) - y_n^{(h)}| \leq (1 + hK)|y(t_{n-1}) - y_{n-1}^{(h)}| + \frac{h^2}{2}M. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.17), obtemos

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)}| \leq (1 + hK) \left[(1 + hK) |y(t_{n-1}) - y_{n-1}^{(h)}| + \frac{h^2}{2}M \right] + \frac{h^2}{2}M$$

$$\leq (1 + hK)^2 |y(t_{n-1}) - y_{n-1}^{(h)}| + [(1 + hK) + 1] \frac{h^2}{2} M.$$

Repetindo o mesmo processo de substituir sucessivamente o erro anterior, obtemos

$$\begin{aligned} |y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)}| &\leq (1 + hK)^2 \left[(1 + hK) |y(t_{n-2}) - y_{n-2}^{(h)}| + \frac{h^2}{2} M \right] \\ &\quad + [(1 + hK) + 1] \frac{h^2}{2} M \\ &\leq (1 + hK)^3 |y(t_{n-2}) - y_{n-2}^{(h)}| \\ &\quad + [(1 + hK)^2 + (1 + hK) + 1] \frac{h^2}{2} M \\ &\leq (1 + hK)^{(n+1)} |y(t_0) - y_0^{(h)}| \\ &\quad + [1 + (1 + hK) + (1 + hK)^2 + \dots + (1 + hK)^n] \frac{h^2}{2} M. \end{aligned}$$

Na última desigualdade, temos que $|y(t_0) - y_0^{(h)}| = 0$, pois a solução numérica coincide com a exata no ponto inicial, e observamos que os termos acumulados formam uma progressão geométrica finita de razão $1 + hK$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} |y(t_n) - y_n^{(h)}| &\leq \left[\frac{(1 + hK)^n - 1}{hK} \right] \frac{h^2}{2} M \leq \left[\frac{(1 + hK)^n - 1}{K} \right] \frac{h}{2} M \\ &\leq \left[\frac{e^{nhK} - 1}{K} \right] \frac{M}{2} h \leq \left[\frac{e^{(t_n - t_0)K} - 1}{K} \right] \frac{M}{2} h \leq \left[\frac{e^{(t_f - t_0)K} - 1}{K} \right] \frac{M}{2} h. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\max_{n=0,1,\dots,N} |y(t_n) - y_n^{(h)}| \leq \frac{M}{2} \left[\frac{e^{(t_f - t_0)K} - 1}{K} \right] h,$$

Tomando $C = \frac{M}{2} \left[\frac{e^{(t_f - t_0)K} - 1}{K} \right]$, constante, podemos reescrever

$$\max_{n=0,1,\dots,N} |y(t_n) - y_n^{(h)}| \leq Ch,$$

de onde concluímos a demonstração, mostrando que o erro global do método de Euler é limitado por uma constante vezes h , o que confirma que o método é de ordem h .

Esse resultado é interpretado da seguinte forma, primeiro: se h tender a zero, a solução aproximada tenderá à solução exata; segundo, como a convergência é da ordem de h , se diminuirmos o passo em 10^{-1} , a precisão da solução deve diminuir proporcionalmente a 10^{-1} .

Voltando à Aplicação 3 - crescimento da população bacteriana, apresentado no Capítulo 1, elaboramos a Tabela 3.3, que mostra o erro absoluto máximo entre a solução exata $P(t) = 100e^{0,1386t}$ e a solução aproximada obtida pelo método de Euler para diferentes valores de h .

Tabela 3.3: Maior erro absoluto em relação a h para o método de Euler aplicado a $P(t) = 100e^{0,1386t}$.

h	N	$y(t_n)$ (Euler)	$P(t_n)$ (exato)	$e_i = y(t_n) - P(t_n) $
0,1	10	116,45850	114,86645	1,59205
0,01	100	115,02566	114,86645	0,15920
0,001	1000	114,8665	114,86645	0,01592
0,0001	10000	114,8680	114,86645	0,00160

A Figura 3.12 apresenta a comparação entre a solução exata da equação diferencial $P(t) = 100e^{0,1386t}$ e as soluções aproximadas obtidas pelo método de Euler com passos $h = 0,1$ e $h = 0,01$. Observa-se que, embora ambos os métodos forneçam aproximações próximas da solução exata nos instantes iniciais, à medida que o tempo avança, especialmente para valores de t próximos de 1, o erro no caso de $h = 0,1$ torna-se mais perceptível.

Isso ocorre porque a função solução cresce de forma exponencial, característica que amplifica os efeitos acumulados do erro numérico. Já o passo menor, $h = 0,01$, consegue acompanhar com maior fidelidade a curva exata, mesmo nos trechos de maior crescimento. Esse comportamento evidencia a importância da escolha do passo em métodos numéricos, particularmente em equações com soluções que variam rapidamente.

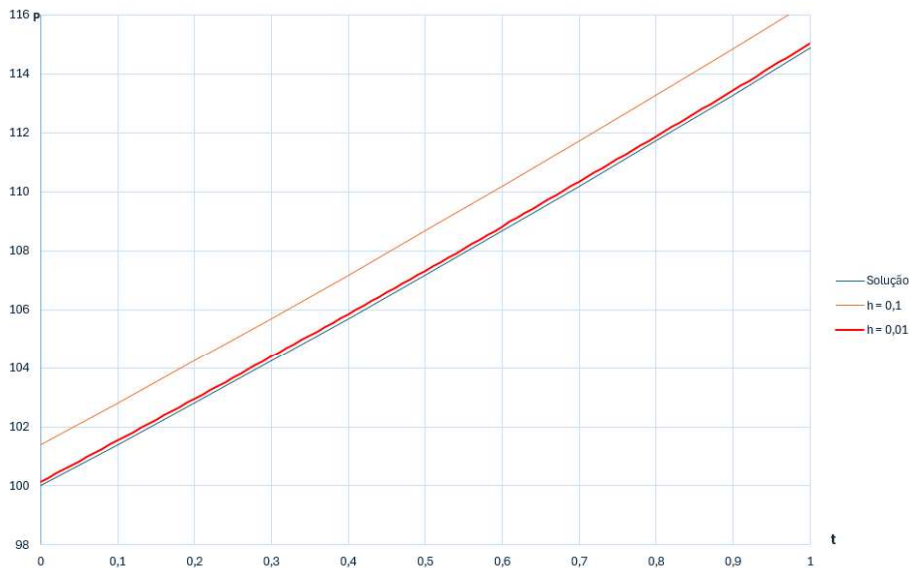


Figura 3.12: Comparação das soluções exatas e numérica, com $h = 0,1$ e $0,001$.

Para sistemas de EDOs, análise de convergência é a mesma. Retomando o sistema de equações diferenciais apresentado no Capítulo 2, temos:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2. \end{cases}$$

Aplicando o método de Euler com diferentes valores de h , com condições iniciais $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 0$, calculamos a solução numérica em $t = 1$ e comparamos com a solução exata $x_1(1) \approx 78,2026$ e $x_2(1) \approx 70,8135$. A Tabela 3.4 apresenta os valores obtidos por Euler e os respectivos erros absolutos.

Tabela 3.4: Erro absoluto em função de h para o método de Euler aplicado ao sistema com solução exata $x_1(1) \approx 78,2026$ e $x_2(1) \approx 70,8135$.

h	N	$x_{1,N}^{(h)}$ (Euler)	$x_{2,N}^{(h)}$ (Euler)	$e_1 = x_1 - x_{1,N}^{(h)} $	$e_2 = x_2 - x_{2,N}^{(h)} $
0,1	10	57,02844	49,59835	21,17416	21,21515
0,01	100	75,09295	67,70341	3,10965	3,11089
0,001	1000	77,87684	70,48778	0,32576	0,325717
0,0001	10000	78,16996	70,78090	0,03264	0,032601

A seguir, comparamos graficamente as soluções exatas de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ com as aproximações fornecidas pelo método de Euler para dois diferentes passos: $h = 0,1$ e $h = 0,01$.

Observa-se que, para ambos os casos, a aproximação com $h = 0,01$ se mantém muito mais próxima da solução exata, enquanto o erro com $h = 0,1$ se torna mais evidente à medida que t cresce. Isso reforça a análise teórica realizada anteriormente, que aponta que a precisão do método melhora proporcionalmente à redução do tamanho do passo.

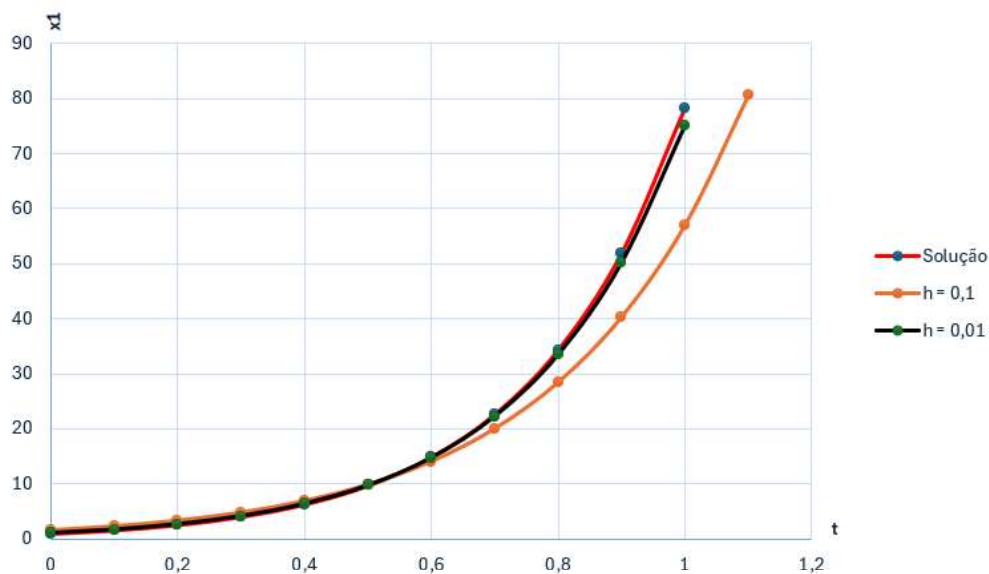


Figura 3.13: Comparação da solução $x_1(t)$ com as aproximações usando $h = 0,1$ e $h = 0,01$.

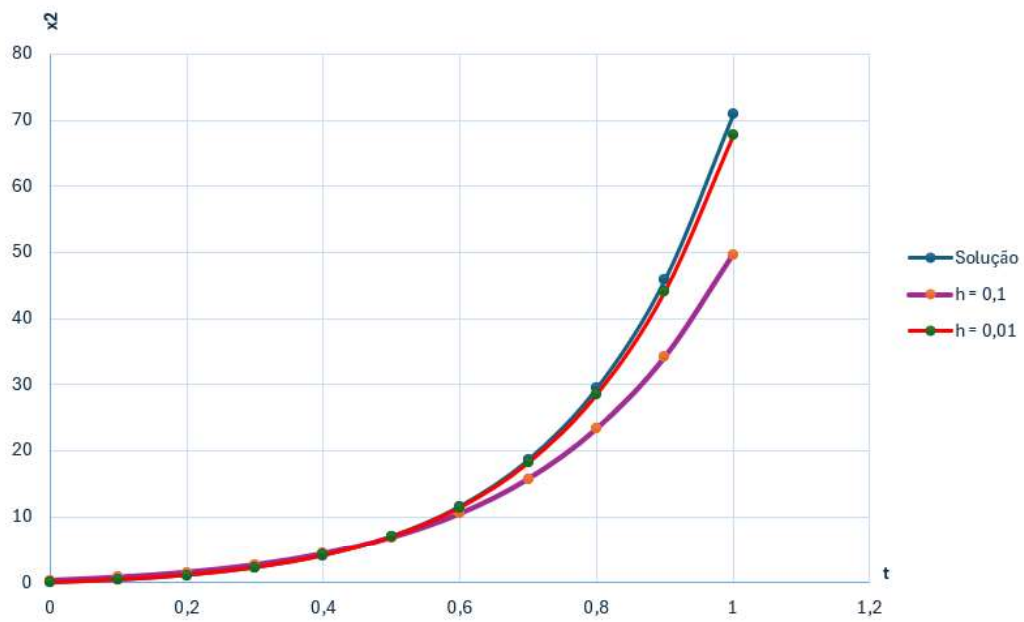


Figura 3.14: Comparação da solução $x_2(t)$ com as aproximações usando $h = 0,1$ e $h = 0,01$.

Capítulo 4

Roteiro do itinerário pedagógico

Neste capítulo, apresentamos um roteiro de itinerário pedagógico baseado nos conceitos vistos nos capítulos anteriores. A proposta é voltada para turmas do 3º ano do Ensino Médio e tem como público-alvo estudantes que demonstram interesse em matemática e desejam ampliar seus conhecimentos, com a oportunidade de aprender conceitos introdutórios de Cálculo Diferencial e Integral.

A sugestão é que o itinerário tenha, no mínimo, 13 aulas de 50 minutos, permitindo ao professor abordar os conteúdos necessários com profundidade e proporcionando aos alunos uma introdução às com ênfase em derivação, EDOs, métodos numéricos, sistemas, ferramentas digitais, buscando sempre uma aplicação e contextualização em problemas práticos com assunto do conhecimento dos alunos.

Dividimos o capítulo em duas seções a primeira para o cronograma que norteia o itinerário e a segunda que detalha aula a aula a assunto a ser tratado pelo ministrante do itinerário, juntamente com sugestões de aplicações possíveis para aquela aula.

4.1 Cronograma

Abaixo, apresentamos uma tabela com a proposta de 13 aulas para o desenvolvimento desse itinerário.

Tabela 4.1: Cronograma do itinerário.

Aula	Tema / Atividade	Conteúdos / Habilidades	Tipo de Atividade
1	Problemas de provocação: pensar soluções para desafios reais	Resolução de problemas, raciocínio lógico e modelagem inicial	Discussão em grupo
2	Ferramentas eletrônicas – Parte 1	Uso de planilhas e software matemático	Oficina prática
3	Ferramentas eletrônicas – Parte 2	Análise gráfica, organização de dados, simulação computacional	Estudo em laboratório

Aula	Tema / Atividade	Conteúdos / Habilidades	Tipo de Atividade
4	Introdução à derivação	Conceito de taxa de variação e derivada de funções	Aula expositiva
5	Aplicação de derivadas em máximos e mínimos de funções quadráticas	Otimização, interpretação geométrica da derivada	Problemas contextualizados
6	Introdução às EDOs de 1ª ordem	Equações diferenciais simples: taxa de variação instantânea, resfriamento, crescimento populacional	Aula teórica e exemplos motivadores
7	Campos de direções de EDOs de 1ª ordem	Representação gráfica de soluções aproximadas de EDOs simples	Atividade gráfica com papel ou software
8	Sistemas de EDOs e seus campos de direções	Interpretação gráfica de sistemas lineares de EDOs em duas variáveis	Oficina com GeoGebra ou Excel
9	Entendendo o Método de Euler	Cálculo aproximado de soluções de EDOs por método numérico	Aula passo a passo
10	Aplicando o Método de Euler	Comparação entre soluções numéricas e analíticas; análise de erro	Estudo de caso com problemas reais
11	Planilhas eletrônicas para o Método de Euler	Automação de cálculos iterativos e construção de gráficos	Oficina prática com planilhas
12	Preparação dos projetos finais	Organização, escolha de temas e orientação de grupos	Aula de projeto orientado
13	Apresentação de projetos	Comunicação matemática e síntese do aprendizado	Seminário final com avaliação entre pares

4.2 Elaboração e desenvolvimento de aulas

Aula 1: Problemas de provocação — pensar soluções para desafios reais

A primeira aula será dedicada à apresentação de problemas motivadores para despertar a curiosidade dos alunos e introduzir situações em que fórmulas matemáticas representam a variação de grandezas ao longo do tempo. O objetivo é promover reflexões iniciais que futuramente serão formalizadas por meio de EDOs.

Alguns exemplos de situações que podem ser exploradas são:

- A **Segunda Lei de Newton**, que relaciona a força resultante aplicada a um corpo com a variação de sua velocidade ao longo do tempo: $F = m \cdot a$, onde a aceleração pode ser descrita por uma função da velocidade.

- O **crescimento populacional**, discutindo o aumento de uma população ao longo do tempo em proporção ao número atual de habitantes: $\frac{dP}{dt} = kP$.
- A **velocidade de reação química**, em que a taxa de transformação de um reagente depende da quantidade atual da substância presente: $\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$.
- A **variação da temperatura de um corpo**, utilizando a Lei do Resfriamento de Newton, que afirma que a taxa de variação da temperatura é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do ambiente: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{amb}})$.
- A **variação da altura de um líquido em um reservatório**, considerando um orifício na base, onde a velocidade de escoamento depende da altura atual do líquido.
- A **depreciação de um bem**, como um carro, cuja perda de valor ao longo do tempo é proporcional ao valor atual.

Esses exemplos permitem discutir de forma intuitiva a ideia de que muitas situações reais envolvem uma quantidade que muda em função do tempo ou de outra variável — exatamente o que pretendemos que seja aprofundado ao longo do itinerário com o estudo das EDOs.

Aula 2: Ferramentas eletrônicas – Parte 1

Nesta aula sugerimos que sejam introduzidos aos alunos os conceitos iniciais de uso de planilhas eletrônicas, que serão fundamentais ao longo do itinerário para a criação de tabelas, organização de dados e automação de cálculos.

É importante que, ao final da aula, os alunos compreendam e pratiquem os seguintes pontos:

1. Como se deslocar em uma planilha eletrônica, utilizando teclas de navegação e cliques do mouse.
2. Inserção de linhas e colunas, bem como sua exclusão e redimensionamento.
3. Formatação básica de células, linhas e colunas (alinhamento, cor, bordas, tipo de dado etc.).
4. Uso de fórmulas simples como =SOMA(), =MÉDIA() e introdução de fórmulas diretamente em células.
5. Compreensão dos conceitos de copiar e colar fórmulas, utilizando referências relativas e absolutas.

Esses conhecimentos servirão de base para que, nas aulas seguintes, os alunos possam construir campos de direções, simular soluções numéricas e representar graficamente funções e suas variações ao longo do tempo.

Aula 3: Ferramentas eletrônicas – Parte 2

Nesta aula, os conceitos relacionados ao uso de planilhas eletrônicas serão aprofundados, com foco na automação de cálculos e na construção de gráficos a partir de conjuntos de dados. O objetivo é fornecer aos alunos ferramentas que os ajudem a visualizar padrões e interpretar resultados matemáticos por meio de representações gráficas.

É importante que os alunos pratiquem e desenvolvam as seguintes habilidades:

1. Elaboração de diferentes tipos de gráficos, com ênfase nos gráficos de dispersão com linhas suaves, que serão úteis para representar variações de grandezas ao longo do tempo.
2. Uso de recursos mais avançados, como:

- A função condicional

`=SE(condição; valor_se_verdadeiro; valor_se_falso),`

por exemplo: `=SE(A1>10;"Alto";"Baixo");`

- A função

`=SE(E(condição1; condição2); ...),`

combinando múltiplas condições;

- A fixação de células com o símbolo \$, como em \$A\$1 para impedir o deslocamento relativo ao copiar fórmulas;
 - Uso de referências mistas, como A\$1 ou \$A1, quando apenas linha ou coluna devem ser fixadas.
3. Capacidade de automatizar cálculos, utilizando fórmulas aplicadas a intervalos e replicadas com eficiência, promovendo agilidade e precisão no tratamento de dados.

O domínio dessas ferramentas será essencial para as etapas posteriores do itinerário, especialmente na representação gráfica de campos de direções e na simulação numérica de soluções aproximadas para EDOs.

Aula 4: Introdução à derivação

Nesta aula, o objetivo é introduzir de forma intuitiva o conceito de derivada, a partir da ideia de taxa de variação. Os alunos serão convidados a analisar situações do cotidiano em que uma grandeza varia em relação a outra, como a posição de um objeto ao longo do tempo ou a temperatura de um corpo que está sendo aquecido.

Inicialmente, será feita a distinção entre taxa média e taxa instantânea de variação, utilizando gráficos e dados reais. Em seguida, será discutido como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto representa a taxa de variação naquele instante.

A aula pode incluir os seguintes recursos:

- Análise gráfica de funções como $f(x) = x^2$ e $f(x) = \sin x$, com observação do comportamento das tangentes.
- Comparação de variações médias com intervalos cada vez menores, aproximando o conceito de limite.
- Aplicação do conceito a problemas simples, como velocidade instantânea e aquecimento de líquidos.

Essa base conceitual permitirá, nas aulas seguintes, aplicar a derivação à resolução de problemas de otimização e iniciar a modelagem de situações com equações diferenciais.

Aula 5: Aplicação de derivadas em máximos e mínimos de funções quadráticas

Nesta aula, os alunos serão apresentados ao uso da derivada na resolução de problemas de otimização, ou seja, problemas que envolvem a busca por valores máximos ou mínimos de uma função. Essa aplicação é uma das mais úteis e acessíveis do cálculo, permitindo conexões com contextos reais e interdisciplinaridade com Física, Economia e Biologia.

A ideia central é que os valores máximos e mínimos de uma função (em um intervalo ou domínio) ocorrem nos pontos em que sua derivada se anula ou muda de sinal.

Exemplos a serem explorados:

- Economia de materiais: Dado um perímetro fixo, qual deve ser a forma de um campo retangular que maximize a área?
- Construção de embalagem: Qual deve ser a altura de uma lata cilíndrica de volume fixo que minimize o uso de material (área da superfície)?
- Lucro máximo: Suponha que a função lucro de uma empresa seja $L(x) = -2x^2 + 40x - 150$. Qual o número de unidades x que maximiza o lucro?
- Altura máxima de um projétil: Se a altura de uma bola arremessada for dada por $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$, em que instante a bola atinge a altura máxima?

Durante a aula, os alunos serão incentivados a:

- Calcular a derivada da função associada ao problema.
- Identificar os pontos críticos (onde $f'(x) = 0$).
- Analisar o comportamento da derivada antes e depois do ponto crítico para confirmar se é máximo ou mínimo.
- Interpretar os resultados no contexto do problema.

Esse conteúdo aprofunda a ideia de taxa de variação, consolidando o papel da derivada como ferramenta para tomada de decisão baseada em modelos matemáticos.

Aula 6: Introdução às equações diferenciais ordinárias

A proposta desta aula é levar os alunos a compreender como modelar a variação de grandezas em situações reais, ampliando a aplicação da matemática para além das funções já conhecidas. Para isso, retomaremos os conceitos de derivada, máximos e mínimos, bem como as funções motivadoras trabalhadas nas aulas anteriores, destacando que, ao invés de partirmos de uma função pronta, agora buscaremos descobrir a função a partir de sua taxa de variação — esse é justamente o papel de uma EDO.

Podemos mostrar, por exemplo, que alguns dos problemas apresentados já na Aula 1 envolvem esse tipo de estrutura:

- No crescimento populacional, a taxa de crescimento é proporcional à própria população: $\frac{dP}{dt} = kP$.
- A temperatura de um corpo varia proporcionalmente à diferença entre a temperatura do corpo e a do ambiente: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{amb}})$.
- A velocidade de resfriamento também depende diretamente dessa diferença de temperatura.

Esses modelos mostram como EDOs podem representar, de forma mais realista, processos dinâmicos do cotidiano. Como exemplo prático, podemos abordar a evolução da população de uma colônia de bactérias, onde se assume que a taxa de crescimento é proporcional à quantidade atual da população. Partindo de um valor inicial e de uma constante de crescimento k , é possível calcular os valores futuros da população utilizando a fórmula:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + kP(t)\Delta t.$$

Nesta aula, os alunos utilizarão planilhas eletrônicas para simular a evolução da população ao longo do tempo com base nessa equação, sem ainda aplicar o Método de Euler formalmente. A ideia é observar, de forma empírica, como a taxa de variação influencia a curva de crescimento e construir intuições visuais e numéricas sobre o comportamento da solução.

Essa atividade serve como transição entre a modelagem teórica e os métodos numéricos que serão abordados nas aulas seguintes.

Aula 7: Campos de direções de EDOs de 1ª ordem

Nesta aula, os alunos aprenderão a utilizar o campo de direções para analisar as soluções de uma EDO. Para estruturar o gráfico do campo de direções, os alunos serão orientados a utilizar recursos básicos disponíveis em planilhas eletrônicas. Dentre esses recursos, destacam-se o comando \$ para fixação de linhas e colunas em fórmulas, a função =SE(E()), que permite a criação de condições lógicas, e o gráfico de dispersão XY, que possibilita a representação gráfica dos vetores. Essas ferramentas, quando combinadas, garantem precisão e clareza na elaboração do campo de direções.

O comando \$ será utilizado para fixar referências de células nas fórmulas, garantindo que, ao copiar ou arrastar a fórmula para outras células, a referência especificada permaneça inalterada. Esse recurso é fundamental no trabalho, pois permite acelerar

os cálculos necessários para mais de 100 vetores. Por exemplo, ao usar o símbolo \$, é possível fixar tanto as coordenadas de células específicas quanto elementos que se repetem nas fórmulas, como valores constantes ou referências a determinadas colunas ou linhas. Essa abordagem garante consistência nos cálculos e reduz significativamente o esforço manual, otimizando o tempo de elaboração do campo de direções.

Outra função importante que será utilizada é =SE(E()), que combina a validação de múltiplas condições lógicas com a estrutura condicional da função SE(). Nesse trabalho, ela será usada para verificar se determinadas condições são verdadeiras simultaneamente, como validar se os valores de entrada são iguais a zero, garantindo assim que o cálculo dos versores dos vetores seja realizado corretamente. O versor de um vetor, por definição, é um vetor unitário que mantém a mesma direção e sentido do vetor original, sendo calculado pela normalização, ou seja, dividindo o vetor original por seu módulo. Essa abordagem automatiza o tratamento de casos específicos, como quando o módulo de um vetor é zero, evitando erros nos cálculos e assegurando resultados consistentes em todo o processo.

No trabalho com os alunos, será utilizada a seguinte fórmula:

$$=SE(E(P8=0;Q8=0);0;P8/(P8^2+Q8^2)^{0,5})$$

para calcular o componente x do versor. Nesse caso, a função E() avalia simultaneamente se os valores P8 e Q8 são iguais a zero, o que indicaria um vetor nulo. Se as condições forem verdadeiras, a função SE() retorna 0, prevenindo erros nos cálculos. Caso contrário, o componente x é calculado dividindo P8 pelo módulo do vetor, dado por $(P8^2 + Q8^2)^{0,5}$.

Esse mesmo raciocínio é aplicado para calcular o componente y dos versores, garantindo que cada vetor seja devidamente normalizado, ou seja, reduzido a um vetor unitário que mantém a direção e o sentido do vetor original. O uso dessa abordagem não apenas automatiza o tratamento de casos específicos, como também elimina inconsistências nos cálculos, especialmente para vetores de módulo zero. Dessa forma, é possível realizar, de maneira eficiente e confiável, a análise e a normalização de mais de 100 vetores, otimizando significativamente o processo.

O uso do gráfico de dispersão XY, combinado com linhas retas e setas formatadas para indicar as direções desejadas, possibilita a construção de um campo de direções adequado à análise de EDOs.

Aula 8: Sistemas de EDOs e seus campos de direções

Nesta aula, os alunos serão introduzidos ao conceito de sistemas de EDOs de 1ª ordem, e como ele modela a variação simultânea de duas grandezas relacionadas. A proposta é aprofundar a compreensão de dinâmicas interdependentes por meio da construção e análise de campos de direções em duas variáveis.

Para isso, será apresentado um sistema simples de duas equações diferenciais acopladas, como

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1,1x - 0,4xy, \\ \frac{dy}{dt} = 0,1xy - 0,4y. \end{cases}$$

Como já mostrado esse sistema pode representar, por exemplo, a interação entre duas espécies — uma presa (x) e um predador (y). Os alunos serão incentivados a interpretar qualitativamente o comportamento desse sistema por meio do campo de direções vetorial.

A atividade prática envolverá:

- Montagem de uma malha de pontos no plano xy , utilizando planilhas eletrônicas;
- Cálculo, para cada ponto (x, y) , do vetor (x', y') com base no sistema proposto;
- Normalização dos vetores (cálculo dos versores) para melhor visualização;
- Representação do campo de direções bidimensional com vetores desenhados sobre o plano, usando gráficos de dispersão XY com setas estilizadas;
- Discussão sobre regiões de crescimento, estabilidade e comportamento oscilatório.

A utilização de recursos como as funções `=SE()`, `=E()`, e fixação de células com o símbolo $\$$ será fundamental para automatizar os cálculos e manipular grandes quantidades de vetores com eficiência. Ao final da aula, os alunos terão compreendido como campos de direções permitem analisar qualitativamente as trajetórias de soluções de sistemas de EDOs, mesmo sem resolver as equações de forma analítica.

Essa abordagem amplia o repertório matemático dos alunos, ao mesmo tempo em que fortalece a articulação entre modelagem, tecnologia e análise gráfica.

Aula 9: Entendendo o método de Euler

Nesta aula, os alunos serão introduzidos ao Método de Euler, e entender a técnica numérica para a aproximação de soluções de EDOs. O foco será compreender o raciocínio por trás do método, sua estrutura e suas limitações.

Será mostrado que, dado um problema da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

é possível aproximar valores sucessivos de $y(t)$ usando:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

onde h é o passo (incremento em t) e (t_n, y_n) é o ponto atual.

Os alunos irão:

- Visualizar o método como uma sucessão de passos tangentes à curva da solução.
- Comparar a solução exata (quando conhecida) com a aproximação feita pelo método.
- Avaliar como o valor do passo h influencia a precisão.
- Realizar cálculos manuais com 3 ou 4 iterações para compreender o processo.

Essa aula é teórica e exploratória, servindo de preparação para a aplicação prática que será feita na próxima etapa.

Aula 10: Aplicando o método de Euler

Nesta aula, os alunos aplicarão o método de Euler de forma manual, por meio de cálculos realizados com papel e lápis, com o objetivo de consolidar a compreensão conceitual da técnica. Após terem compreendido a estrutura do método na aula anterior, eles serão orientados a realizar iterações do método em problemas simples de EDOs de 1ª ordem.

O foco será a execução detalhada do procedimento para aproximar soluções numéricas, sem o uso de recursos digitais, permitindo que os alunos entendam cada etapa envolvida nos cálculos.

Atividades previstas:

- Escolha de uma equação diferencial simples, como $\frac{dy}{dt} = 0,2y$, com condição inicial $y(0) = 10$;
- Definição de um passo h (ex: 0,5) e cálculo dos valores sucessivos de y para os primeiros 3 ou 4 pontos;
- Construção de uma tabela com colunas para t_n , y_n , $f(t_n, y_n)$ e y_{n+1} ;
- Comparação com a solução exata (quando possível), para avaliar o erro da aproximação;
- Discussão sobre como o tamanho do passo influencia a precisão dos resultados.

Ao final da aula, os alunos terão compreendido o funcionamento do método por meio de cálculos diretos, preparando-se para automatizar o processo nas planilhas eletrônicas na próxima etapa do itinerário.

Aula 11: Planilhas eletrônicas para o método de Euler

Nesta aula, os alunos utilizarão planilhas eletrônicas para automatizar o método de Euler e construir gráficos que representem as soluções aproximadas de equações diferenciais. A proposta é oferecer autonomia na construção das tabelas e gráficos, consolidando os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores sobre campos de direções e o próprio funcionamento do método.

A aula será conduzida de forma prática e investigativa, com foco em:

- Criação de tabelas com colunas para t_n , y_n , $f(t_n, y_n)$, e y_{n+1} , utilizando fórmulas automáticas;
- Uso de funções como =SE(), operadores de referência \$, e preenchimento automático;
- Elaboração de gráficos de dispersão XY conectados por linhas, representando a trajetória da solução;
- Exploração de diferentes valores de passo h para comparar a precisão da aproximação;

- Discussão sobre a utilidade da abordagem numérica em contextos onde a solução analítica não é viável.

Por já terem experiência com a criação de campos de direções e compreensão do método, os alunos serão incentivados a conduzir as atividades com autonomia, desenvolvendo suas próprias simulações e explorando diferentes cenários. O papel do professor será o de orientador e facilitador, intervindo apenas quando necessário para esclarecer dúvidas conceituais ou técnicas.

Ao final da aula, os alunos terão desenvolvido um modelo funcional do Método de Euler em planilhas e visualizado graficamente as soluções aproximadas, fortalecendo a conexão entre teoria, tecnologia e aplicação.

Aula 12: Preparação dos projetos finais

Nesta aula, os alunos iniciarão a elaboração dos projetos finais do itinerário, colocando em prática os conceitos de modelagem, derivação, EDOs e métodos numéricos explorados ao longo das aulas. A proposta é que escolham uma problemática real ou simulada que envolva variação de grandezas e construam uma abordagem matemática baseada em equações diferenciais.

Cada grupo de alunos será orientado a:

- Escolher um tema que envolva modelagem com EDOs (ex.: crescimento populacional, resfriamento, dinâmica presa-predador, etc.);
- Justificar o modelo escolhido com base na realidade observada;
- Representar graficamente os dados obtidos por meio de planilhas;
- Utilizar o Método de Euler para simular as soluções aproximadas, quando for o caso;
- Preparar uma apresentação clara, coerente e bem estruturada.

O professor atuará como orientador, circulando entre os grupos para tirar dúvidas, sugerir ajustes e garantir que todos os conceitos essenciais estejam sendo aplicados corretamente. Esta aula serve como ponte entre o conteúdo técnico aprendido e sua aplicação prática e comunicativa.

Aula 13: Apresentação de projetos

Nesta aula final do itinerário, os alunos apresentarão seus projetos para a turma, compartilhando os processos de modelagem, os resultados obtidos, os gráficos produzidos e as interpretações feitas a partir das equações utilizadas.

A apresentação deverá contemplar:

- A contextualização do problema escolhido;
- O modelo matemático utilizado e suas justificativas;
- A construção e interpretação do campo de direções ou gráfico de solução;

- A aplicação do Método de Euler, se pertinente;
- As conclusões extraídas a partir do estudo.

O objetivo é desenvolver a capacidade de comunicação matemática, o pensamento crítico e a autonomia dos alunos, além de possibilitar uma avaliação ampla do aprendizado desenvolvido ao longo do itinerário. As apresentações poderão ser realizadas em formato de seminário, feira ou banca avaliadora, de acordo com a realidade da escola.

Ao final da aula, é esperado que os alunos reconheçam a potência da matemática como ferramenta de interpretação e intervenção no mundo real.

Capítulo 5

Conclusões

O conteúdo estudado, apesar de ser ensinado no Ensino Superior, se bem limitado e simplificado, torna-se acessível a alunos do Ensino Médio, em especial, àqueles que têm facilidade e interesse pela área de exatas.

A escolha de trabalhar com equações diferenciais permite propor atividades interdisciplinares. Embora o foco inicial tenha sido a integração entre conteúdos de Física, Química e Biologia, o desenvolvimento da pesquisa evidenciou também um potencial significativo de aplicação no campo da Matemática Financeira, especialmente em temas como aplicações financeiras, cálculo de juros instantâneos e análise de títulos negociados no mercado de capitais. Aplicações essas que despertam curiosidade nos alunos do Ensino Médio.

O método de Euler se mostrou adequado para a proposta do itinerário, pois sua formulação simples pode ser usada tanto em cálculos manuais quanto na automatização usando um software computacional.

Por fim, a utilização de planilhas eletrônicas básicas, como Microsoft Excel, Google Planilhas e LibreOffice Calc, revelou-se adequada para o traçado dos gráficos das soluções, dos campos de direções e dos planos de fase. A parte gráfica também foi útil para a interpretação geométrica de derivada e para a construção do método de Euler. O Excel não exige conhecimento aprofundado de programação, possui uma sintaxe bastante intuitiva e favorece a democratização do ensino, dado que essas ferramentas são gratuitas ou de fácil acesso, tanto em escolas particulares quanto na maioria das escolas públicas.

Apesar de não termos implantado a proposta em sala de aula, devido às limitações de tempo impostas pelo cronograma do mestrado, acreditamos que a abordagem interdisciplinar adotada pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, promovendo uma formação mais integrada e contextualizada para os estudantes. Deixamos aqui a implementação do itinerário como proposta de continuidade deste trabalho.

Apêndice A

Resolução da equação logística

Seja o modelo logístico

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{k}\right), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Inicialmente, reescrevemos a equação de forma a isolar as variáveis y e t :

$$\frac{dy}{y \left(1 - \frac{y}{k}\right)} = r dt.$$

Para integrar o lado esquerdo, fazemos a decomposição em frações parciais:

$$\frac{1}{y \left(1 - \frac{y}{k}\right)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1 - \frac{y}{k}}.$$

Multiplicando ambos os lados por $y \left(1 - \frac{y}{k}\right)$, obtemos:

$$1 = A \left(1 - \frac{y}{k}\right) + By.$$

Escolhendo valores convenientes para y , encontramos $A = 1$ e $B = \frac{1}{k}$. Assim, temos:

$$\frac{1}{y \left(1 - \frac{y}{k}\right)} = \frac{1}{y} + \frac{1/k}{1 - \frac{y}{k}}.$$

Obtemos então

$$\frac{1}{y} + \frac{1/k}{1 - \frac{y}{k}} dy = r dt.$$

Agora, integramos ambos os lados da equação:

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1/k}{1 - \frac{y}{k}} \right) dy = \int r dt.$$

A primeira integral é imediata:

$$\int \frac{1}{y} dy = \ln |y|.$$

Para a segunda integral, fazemos a substituição $u = 1 - \frac{y}{k}$, cuja derivada é $du = -\frac{1}{k} dy$, e obtemos:

$$\int \frac{1/k}{1 - \frac{y}{k}} dy = -\ln \left| 1 - \frac{y}{k} \right|.$$

Portanto, a equação se torna:

$$\ln |y| - \ln \left| 1 - \frac{y}{k} \right| = rt + c, \quad (\text{A.2})$$

onde c é a constante arbitrária de integração a ser determinada pela condição inicial $y(0) = y_0$. Já observamos que, se $0 < y_0 < k$, então y permanece nesse intervalo para todo o tempo. Assim, nesse caso, podemos remover o módulo da Equação (A.2)

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{y}{1 - \frac{y}{k}} \right) &= rt + c \\ \frac{y}{1 - \frac{y}{k}} &= e^{rt+c} \end{aligned}$$

Para $e^c = C$

$$\frac{y}{1 - \frac{y}{k}} = Ce^{rt} \quad (\text{A.3})$$

Aplicando a condição inicial na Equação (A.3) temos,

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{k}} &= Ce^{r0} \\ \frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{k}} &= C \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Substituindo Equação (A.4) na Equação (A.3) temos

$$\begin{aligned} \frac{y}{1 - \frac{y}{k}} &= \frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{k}} e^{rt} \\ y \left(1 - \frac{y_0}{k} \right) &= y_0 \left(1 - \frac{y}{k} \right) e^{rt} \\ y - \frac{yy_0}{k} &= y_0 e^{rt} - \frac{y_0 y}{k} e^{rt} \\ y \left(1 - \frac{y_0}{k} + \frac{y_0}{k} e^{rt} \right) &= y_0 e^{rt} \\ y &= \frac{ky_0 e^{rt}}{k - y_0 + y_0 e^{rt}} \end{aligned}$$

Apêndice B

Cálculos dos autovalores e autovetores da Seção 2.2

Caso 1

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2. \end{cases}$$

Os autovalores λ e os autovetores \mathbf{x} satisfazem a equação

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0. \tag{B.1}$$

Determinamos os autovalores resolvendo

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1)(3) = (5 - \lambda)(1 - \lambda) + 3 \\ &= (5 - \lambda)(1 - \lambda) + 3 = (5 \cdot 1 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2) + 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8. \end{aligned}$$

As raízes da equação característica $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Calculamos agora os autovetores associados.

Para $\lambda = 2$, substituímos na Equação (B.1)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 - 2 & -1 \\ 3 & 1 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ambas as linhas resultam na equação $3x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_1$. Portanto, o autovetor associado é

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 4$, substituímos na Equação (B.1)

$$\begin{bmatrix} 5 - 4 & -1 \\ 3 & 1 - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ambas as linhas resultam em $x_2 = x_1$. Logo, o autovetor associado é

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de onde obtemos a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Caso 2

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + \sqrt{3}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \sqrt{3}x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - (\sqrt{3})^2 = -(1 - \lambda)(1 + \lambda) - 3 \\ &= -(1 - \lambda)(1 + \lambda) - 3 = -(1 - \lambda)(1 + \lambda) - 3 = -(1 - \lambda^2) - 3 = \lambda^2 - 4. \end{aligned}$$

As raízes da equação característica $\lambda^2 - 4 = 0$ são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$. Calculamos agora os autovetores associados.

Para $\lambda = -2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 - (-2) & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A primeira equação é $3x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x_2$. Escolhendo $x_2 = 1$, temos o autovetor

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 2$,

$$\begin{bmatrix} 1 - 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A primeira equação é $-x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}x_2$. Escolhendo $x_2 = 1$, temos o autovetor

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema é dada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Caso 3

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \sqrt{3} e^{2t} - c_2 \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-2t} \\ x_2(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(-3 - \lambda) - (0 \cdot 1) \\ &= (6 + 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2) = \lambda^2 + 5\lambda + 6. \end{aligned}$$

As raízes da equação característica $\lambda^2 + 5\lambda + 6$ são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$. Calculamos agora os autovetores associados.

Para $\lambda = -2$, temos

$$\begin{bmatrix} -2 - (-2) & 0 \\ 1 & -3 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

O autovetor associado é

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = -3$, temos

$$\begin{bmatrix} -2 - (-3) & 0 \\ 1 & -3 - (-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira equação $x_1 = 0$. O autovetor associado é

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De forma explícita

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-2t} \\ x_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \end{cases}$$

Caso 4

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 4x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \end{cases}$$
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) - (-4)(1) = -(3 - \lambda)(1 + \lambda) + 4 \\ &= -[(3)(1 + \lambda) - \lambda(1 + \lambda)] + 4 = -[3 + 3\lambda - \lambda - \lambda^2] + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ &= (\lambda - 1)^2 = 0 \end{aligned}$$

O autovalor é $\lambda = 1$ (multiplicidade algébrica 2). Para $\lambda = 1$ temos

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 - 1 & -4 \\ 1 & -1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$2x_1 - 4x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2x_2$$

O autovetor associado é

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como o autovalor possui multiplicidade 2 e há apenas um autovetor, buscamos um vetor generalizado \mathbf{v}_2 tal que $(A - I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}^{(1)}$. Resolvendo

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2w_1 - 4w_2 = 2 \\ w_1 - 2w_2 = 1 \end{cases}$$

Da segunda equação $w_1 = 1 + 2w_2$. Substituindo na primeira

$$2(1 + 2w_2) - 4w_2 = 2$$

$$2 + 4w_2 - 4w_2 = 2$$

$$2 = 2 \text{ (sempre verdadeiro).}$$

Portanto, a solução é parametrizada. Escolhendo $w_2 = 0$, obtemos $w_1 = 1$, resultando no vetor generalizado

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \left[t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right].$$

De forma explícita $x_1(t) = e^t((2c_1 + c_2) + 2c_2t)$ e $x_2(t) = e^t(c_1 + c_2t)$.

Caso 5

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{3}{2}x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} - \lambda & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{2} - \lambda\right) \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) \quad (1)$$

$$= \left(\lambda + \frac{3}{2}\right) \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

O autovalor é $\lambda = -1$ (multiplicidade algébrica 2). Buscamos inicialmente um autovetor associado, resolvendo $(A + I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $y = \frac{1}{2}x$, escolhendo $x = 2$, obtemos $y = 1$, portanto o autovetor é

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como a multiplicidade é 2 e há apenas um autovetor, buscamos um vetor generalizado \mathbf{v}_2 tal que $(A + I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Resolvendo

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

da primeira equação $w_2 = 2 + \frac{1}{2}w_1$, substituindo na segunda $-\frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}w_1\right) = 1$

Portanto, o sistema é indeterminado. Escolhendo $w_1 = 0$, temos $w_2 = 2$, então o vetor generalizado é

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \left[t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right].$$

De forma explícita $x_1(t) = e^{-t}(2c_1 + 2c_2 t)$ e $x_2(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t + 2c_2)$.

Caso 6

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) - (-2)(4) \\ &= (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 8 = (-3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2) + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 \end{aligned}$$

As raízes são $\lambda = 1 \pm 2i$. Calculamos agora os autovetores. Para $\lambda = 1 + 2i$, temos

$$A - (1 + 2i)I = \begin{bmatrix} 2 - 2i & -2 \\ 4 & -2 - 2i \end{bmatrix}$$

A primeira equação do sistema é $(2 - 2i)x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = (1 - i)x_1$. O autovetor associado é

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - i \end{bmatrix}$$

Analogamente, para $\lambda = 1 - 2i$,

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + i \end{bmatrix}$$

A solução geral do sistema é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - i \end{bmatrix} + c_2 e^{(1-2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + i \end{bmatrix}.$$

Aplicamos a identidade $e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt))$ e calculando as partes real e imaginária da solução, obtemos duas soluções reais linearmente independentes:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = e^t \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução geral real é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix}.$$

De forma explícita $x_1(t) = e^t(c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t))$ e $x_2(t) = e^t(-c_1 \operatorname{sen}(2t) + c_2 \cos(2t))$.

Bibliografia

- [BDH] Blanchard P.; Devaney, R. L.; Hall, G. R. *Differential Equations*, 4 ed. Boston: Cengage Learning, 2012.
- [BD] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [F] Franco, N. B. *Cálculo Numérico*. São Paulo: Pearson, 2006.
- [SIL] Silva, L. H. *Equações diferenciais ordinárias e suas aplicações*. 2020. 133 p. Dissertação (Mestrado em Ciências - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 2020.
- [SW] Steinbruch, A.; Winterle, P. *Álgebra e geometria analítica*. São Paulo: Makron Books, 1993.
- [STW] Stewart, J. *Cálculo: Volume 1*, 7 ed, São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [TWH] Thomas, G. B.; Weir, M. D.; Hass, J. *Cálculo, Volume 1*. 11. ed. São Paulo: Pearson, 2006.