

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Matrizes, autovalores, autovetores e sua importância na procura de uma resposta para encontrar a melhor escolha em um problema de tomada de decisão multicritério.

Taísa Pereira Lima

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Taísa Pereira Lima

Matrizes, autovalores, autovetores e sua importância na procura de uma resposta para encontrar a melhor escolha em um problema de tomada de decisão multicritério.

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Américo López Gálvez

USP – São Carlos
Novembro de 2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P436m	Pereira Lima , Taísa Matrizes, autovalores, autovetores e sua importância na procura de uma resposta para encontrar a melhor escolha em um problema de tomada de decisão multicritério. / Taísa Pereira Lima ; orientador Américo López Gálvez. -- São Carlos, 2025. 67 p. Trabalho de conclusão de curso (Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2025. 1. Matrizes. 2. Autovalores e Autovetores. 3. Teorema de Perron. 4. Tomada de Decisão Multicritério. 5. Método AHP. I. López Gálvez, Américo, orient. II. Título.
-------	---

Taísa Pereira Lima

Matrices, eigenvalues, eigenvectors and their importance in finding an answer to find the best choice in a multicriteria decision-making problem.

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Américo López Gálvez

USP – São Carlos
November 2025

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar forças e serenidade em cada etapa dessa jornada.

Ao meu orientador, Américo López, por sua orientação precisa, paciência e dedicação ao longo de todo este trabalho. Sua contribuição foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho e para o meu crescimento acadêmico.

À minha família, pelo apoio incondicional em todos os momentos.

Ao meu marido, pela compreensão, incentivo e amor constantes, especialmente nos dias mais difíceis.

E, com um carinho especial, agradeço à minha filha, que ainda está no ventre, mas já me inspira e me motiva todos os dias a ser melhor. Este trabalho também é por ela e para ela.

RESUMO

LIMA, T. P. **Matrizes, autovalores, autovetores e sua importância na procura de uma resposta para encontrar a melhor escolha em um problema de tomada de decisão multicritério..** 2025. 67 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

Este estudo aborda o papel fundamental das matrizes, autovalores e autovetores na resolução de problemas de classificação multicritério, especialmente na busca pela melhor alternativa entre várias opções. Através da análise matricial, é possível representar relações complexas entre critérios e alternativas. Os autovalores e autovetores, por sua vez, permitem extrair informações estruturais importantes dessas relações, contribuindo para a ordenação e priorização das alternativas. Essa abordagem é amplamente utilizada em métodos multicritério de apoio à decisão, como o AHP (Analytic Hierarchy Process), em que a escolha ideal é guiada por fundamentos matemáticos precisos.

Palavras-chave: Matrizes, Autovalores, Autovetores, Classificação, Tomada de Decisão Multicritério, AHP.

ABSTRACT

LIMA, T. P. **Matrices, eigenvalues, eigenvectors and their importance in finding an answer to find the best choice in a multicriteria decision-making problem..** 2025. 67 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

This study explores the fundamental role of matrices, eigenvalues, and eigenvectors in solving classification problems, particularly in identifying the best choice among several alternatives. Matrix analysis allows the representation of complex relationships between criteria and alternatives. Eigenvalues and eigenvectors, in turn, help extract key structural information from these relationships, supporting the ranking and prioritization of options. This approach is widely applied in multi-criteria decision-making methods, such as the Analytic Hierarchy Process (AHP), where mathematically grounded principles guide the selection of the optimal alternative.

Keywords: Matrices, Eigenvalues, Eigenvectors, Classification, Multi-criteria Decision-Making, AHP.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Fluxograma geral do AHP	27
Figura 2 – Estrutura Hierárquica Básica do Método AHP	28
Figura 3 – Escala de Razão (Escala Fundamental de Saaty).	30
Figura 4 – Exemplo de Estrutura Hierárquica do AHP	30
Figura 5 – Questionário para Comparações entre os Critérios	31
Figura 6 – Questionário para Comparações entre as Alternativas	31
Figura 7 – Questionário para Comparações entre os Critérios	48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	CONCEITOS E RESULTADOS MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA LINEAR	17
2.1	Autovalor e Autovetor	17
3	MÉTODO DE ANÁLISE HIERÁRQUICA DE PROCESSOS (AHP)	25
3.1	Sistematização do AHP	26
3.2	Estruturação Hierárquica do Problema de Decisão	27
3.3	Comparação Pareada	28
3.4	Escala Fundamental de Saaty	29
3.5	Solução do Método AHP utilizando autovalores e autovetores . . .	29
3.5.1	<i>Comparação Pareada e Escala Fundamental de Saaty</i>	<i>29</i>
3.5.2	<i>Método do Autovalor</i>	<i>32</i>
3.6	Autovetor associado ao maior autovalor de uma matriz inconsistente	36
3.7	Determinação da Consistência	38
4	APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE HIERÁRQUICA (AHP)	45
4.1	Etapas do Processo de Análise Hierárquica (AHP)	45
4.2	Aplicação do Método AHP para Escolha da Melhor Sala de Recurso Escolar	46
4.2.0.1	<i>Matriz de Comparação dos Critérios</i>	<i>53</i>
4.2.0.2	<i>Matriz de Comparação entre Alternativas pelo Critério 1</i>	<i>55</i>
4.2.0.3	<i>Matriz de Comparação entre Alternativas pelo Critério 2</i>	<i>57</i>
4.2.0.4	<i>Matriz de Comparação entre Alternativas pelo Critério 3</i>	<i>58</i>
4.2.0.5	<i>Matriz de Comparação entre Alternativas pelo Critério 4</i>	<i>60</i>
4.2.0.6	<i>Matriz de Comparação entre Alternativas pelo Critério 5</i>	<i>61</i>
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
	REFERÊNCIAS	67

INTRODUÇÃO

A tomada de decisão em contextos complexos, nos quais múltiplos critérios precisam ser avaliados simultaneamente, é um desafio recorrente em diversas áreas do conhecimento, como engenharia, economia, administração, entre outras. Diante da necessidade de classificar ou escolher a melhor alternativa entre várias opções possíveis, torna-se fundamental adotar métodos analíticos capazes de lidar com os julgamentos pessoais, a hierarquização de preferências e a estruturação lógica do problema.

Nesse cenário, as matrizes, os autovalores e os autovetores surgem como ferramentas matemáticas essenciais para representar e processar as relações existentes entre critérios e alternativas. Esses conceitos, originários da Álgebra Linear, encontram aplicação prática em métodos de apoio multicritério à decisão, como o Processo de Hierarquização Analítica (AHP - Analytic Hierarchy Process), desenvolvido por Saaty, [Saaty \(1990\)](#), onde a estruturação hierárquica do problema e as comparações par a par são modeladas matematicamente por meio de matrizes. A obtenção de autovalores e autovetores, por sua vez, possibilita a obtenção de prioridades relativas entre os elementos avaliados, permitindo determinar de forma fundamentada a melhor escolha.

Neste contexto, o presente trabalho visa apresentar os processos matemáticos que fundamentam o método AHP, apresentando ao leitor os conceitos essenciais envolvidos. Destaca-se a importância de compreender os fundamentos matemáticos para garantir a correta aplicação da metodologia, especialmente quando se busca solucionar problemas reais de forma eficaz. Ainda neste trabalho, o método é aplicado em um contexto da escola relativo à tomada de decisão da melhor escolha de um espaço de recurso a ser desenvolvido em prol dos alunos.

CONCEITOS E RESULTADOS MATEMÁTICOS DA ÁLGEBRA LINEAR

Nesta seção lembraremos alguns conceitos e resultados elementares da Álgebra Linear encontrados no livro [Poole \(2016\)](#), *Álgebra Linear: uma introdução moderna*, para uma melhor compreensão e entendimento do princípio teórico matemático da metodologia AHP.

2.1 Autovalor e Autovetor

Definição 1. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um *autovalor* de A se existir um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av = \lambda v$. O vetor v é chamado de *autovetor* de A associado a λ .

Exemplo 1. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ então $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 1$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$. De fato:

Para o autovalor $\lambda = 1$ e autovetor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ verifica-se que:

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda v_1$$

Portanto, o vetor v_1 é de fato um autovetor correspondente a $\lambda = 1$.

De maneira análoga, para o autovalor $\lambda = 3$ e autovetor $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ verifica-se que:

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda v_2$$

Logo, o vetor $\mathbf{v}_2$ é um autovetor associado a $\lambda = 3$.

Definição 2. Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de A . O *autoespaço* associado ao autovalor λ , denotado por E_λ , é definido como o conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a equação:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Ou equivalentemente:

$$E_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$$

Esse conjunto forma um *subespaço vetorial* de $\mathbb{R}^n$, contendo todos os autovetores associados a λ , juntamente com o vetor nulo.

Exemplo 2. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 3$ então é fácil verificar que o autoespaço E_3 é o conjunto de todos os múltiplos de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$E_3 = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

Definição 3. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que A é *invertível* (ou *não singular*) se existe uma matriz B da mesma ordem tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n . A matriz B é chamada de *matriz inversa* de A . É possível provar que quando a matriz B existir, ela será única. A matriz inversa de A , quando existir, será denotada por A^{-1} .

Exemplo 3. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

De fato, vamos verificar que $A \cdot A^{-1} = I$, ou seja:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1)(-2) + (2)(1.5) & (1)(1) + (2)(-0.5) \\ (3)(-2) + (4)(1.5) & (3)(1) + (4)(-0.5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 + 3 & 1 - 1 \\ -6 + 6 & 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Portanto, confirmamos que:

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

o que comprova que a matriz A^{-1} é a matriz inversa de A .

Lembremos que dado um sistema linear de m equações com n incógnitas pode ser escrito como

$$Ax = b \quad (2.1)$$

onde A é uma matriz $m \times n$, x é a matriz coluna $n \times 1$ das incógnitas e b é uma matriz coluna $m \times 1$. Se b é a matriz coluna nula então dizemos que o sistema é homogêneo. Uma solução do sistema [Equação 2.1](#) é um vetor x_0 em $\mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação ao substituir cada entrada de x por cada coordenada de x_0 . Sabemos também que dado um sistema linear de equações só temos três possibilidades: o sistema possui infinitas soluções, uma única solução, ou nenhuma solução. No caso particular do sistema linear homogêneo

$$A \cdot x = 0$$

o conjunto solução é um espaço vetorial também chamado do espaço anulado da matriz A . Dizemos que este espaço é trivial se $x = 0$ é a única solução do sistema linear homogêneo.

Teorema 1 (Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis). Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes.

1. A é invertível.
2. O sistema linear $Ax = b$ tem solução única para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
3. O sistema homogêneo $Ax = 0$ possui apenas a solução trivial $x = 0$.
4. A forma escalonada reduzida de A é I_n .
5. A é um produto de matrizes elementares.

Demonstração. Ver livro [Poole \(2016, p. 172\)](#), capítulo 3.

□

Propriedade: Uma matriz A , $n \times n$, é invertível se, e somente se, o seu determinante for diferente de zero.

Demonstração. Ver livro "Álgebra Linear: uma introdução moderna" de David Poole, capítulo 4, página 272. $\square$

Desse modo, o Teorema Fundamental das Matrizes invertíveis garante que a matriz é não invertível, se e somente se, a matriz determina um espaço anulado não trivial. Podemos então afirmar que para algum $x \neq 0$,

$$\lambda \text{ é autovalor de } A \Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

$\Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow Ax - \lambda Ix = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ e portanto $A - \lambda I$ é não invertível. Sendo assim, λ é autovalor de A se, e somente se,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Sabe-se que $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio de grau n na indeterminada λ , chamado de polinômio característico da matriz A . Assim, A possui autovetor $\lambda \in \mathbb{R}$ se λ é uma raiz real de $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Exemplo 4. Considere a matriz quadrada A de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Cálculo dos autovalores:

Os autovalores são obtidos resolvendo a equação característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda)(3 - \lambda) - (2)(1) = 0$$

$$(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0$$

$$(12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2$$

2. Cálculo dos autovetores:

Para $\lambda_1 = 5$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha: $-x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$

Um autovetor associado é:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha: $2x + 2y = 0 \Rightarrow x = -y$

Um autovetor associado é:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Definição 4. A multiplicidade algébrica de um autovalor é dado pela sua multiplicidade como raiz da equação $\det(A - \lambda I) = 0$. E a multiplicidade geométrica de um autovalor é a dimensão do autoespaço associado a λ .

Exemplo 5. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Autovalores e multiplicidades algébricas

Como A é uma matriz diagonal, é fácil verificar que, seus autovalores são os elementos da diagonal:

$$\lambda_1 = 2 \quad (\text{multiplicidade algébrica } 2), \quad \lambda_2 = 3 \quad (\text{multiplicidade algébrica } 1)$$

2. Autovetores e multiplicidades geométricas

Para $\lambda = 2$, temos:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Isso gera o sistema:

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \text{ são duas variáveis livres}$$

Portanto, o espaço nulo de $A - 2I$ é:

$$E_2 = \{ x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$$

Como a dimensão de E_2 é 2 então a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é 2.

Autovetores associados:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 3$:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_3 \text{ é variável livre}$$

Portanto, $E_3 = \{ x_3(0, 0, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$. Assim, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 3$ é 1.

Autovetor associado:

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicidade geométrica de $\lambda = 3$ é 1.

Conclusão:

$\lambda = 2$: multiplicidade algébrica é 2, geométrica é 2

$\lambda = 3$: multiplicidade algébrica é 1, geométrica é 1

Dizemos que $v_1, v_2, \dots, v_m$, conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$, são *linearmente independentes*, se a equação

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

admite como única solução a solução trivial, ou seja,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Caso contrário, dizemos que os vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ são *linearmente dependentes*.

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n . O *traço* de A , denotado por $\text{tr}(A)$, é definido como a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz. O *posto* (ou *rank*) de A , denotado por $\text{rank}(A)$, é definido como sendo o número máximo de vetores linhas de A que são linearmente independentes. Equivalente a isso, é a dimensão do espaço gerado pelos vetores linha de A . É possível provar (veja livro David Poole) que o número máximo de vetores linha de A que são linearmente independentes coincide como o número máximo de vetores coluna de A que são linearmente independentes, assim, se denotarmos por $\text{Lin}(A)$ (respectivamente $\text{Col}(A)$) o espaço gerado pelos vetores linha de A (respectivamente, espaço gerado pelos vetores coluna de A) então

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Lin}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$$

Definição 5. Dizemos que uma matriz $A = [a_{ij}]$ (respectivamente um vetor $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) é positiva se for verdade que $a_{ij} > 0, \forall i, j$ (respectivamente $x_i > 0, \forall i$).

Teorema 2. (Teorema de Perron) Seja A uma matriz quadrada positiva $n \times n$. Então, A tem um autovalor real λ_1 com as seguintes propriedades:

1. $\lambda_1 > 0$;
2. λ_1 tem um autovetor associado que é um vetor positivo;
3. Se λ é qualquer outro autovalor de A , então $|\lambda| \leq \lambda_1$

Demonstração. Ver livro [Poole \(2016, p. 333\)](#), capítulo 4.

□

MÉTODO DE ANÁLISE HIERÁRQUICA DE PROCESSOS (AHP)

O método AHP (*Analytic Hierarchy Process*) foi desenvolvido por Thomas L. Saaty na década de 1970 e é utilizado para classificar, ranquear ou selecionar alternativas. O método tem a capacidade de decompor um problema em uma estrutura hierárquica atribuindo a cada alternativa um peso representante de sua importância para o objetivo/meta do estudo.

Exemplo 6. Objetivo: Escolher o melhor meio de transporte urbano.

Critérios:

- C1: Custo
- C2: Tempo de deslocamento
- C3: Conforto
- C4: Impacto ambiental

Alternativas:

- A1: Carro particular
- A2: Transporte público
- A3: Bicicleta

Assim, o método AHP busca encontrar qual a melhor alternativa para escolher o meio de transporte urbano.

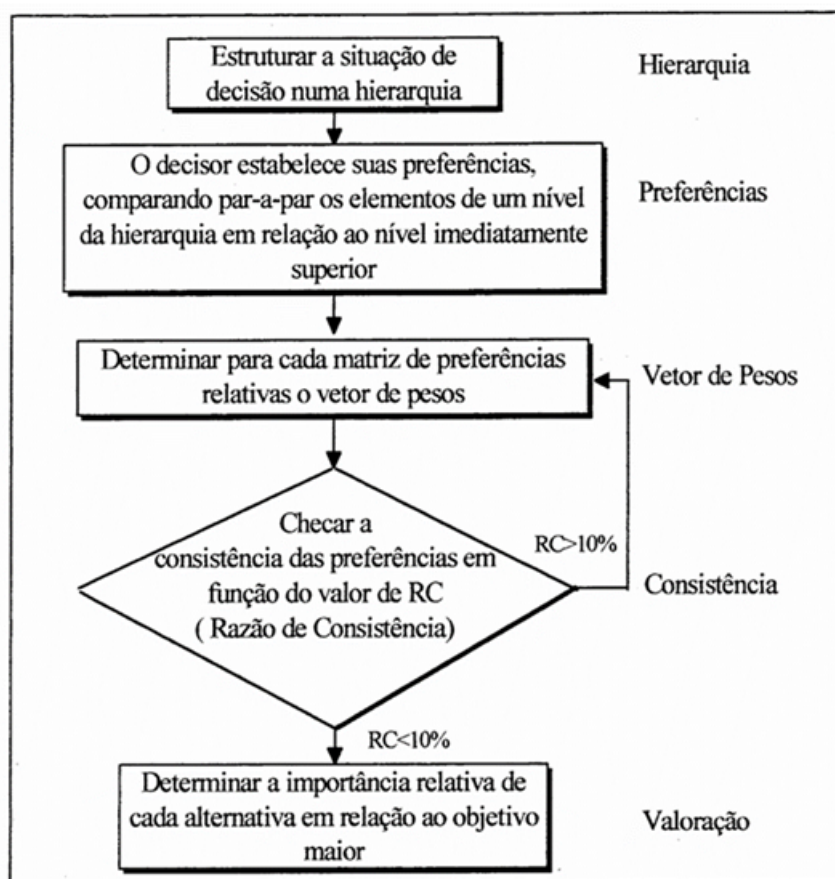
3.1 Sistematização do AHP

Por [Saaty \(2001\)](#), a aplicação do método AHP deve contemplar a compreensão e a observação das seguintes etapas:

1. **Estruturação hierárquica do problema de decisão** (representação da hierarquia): Desenvolvimento da hierarquia do problema decisório em seus vários níveis de elementos inter-relacionados. Após a definição do problema, formulação dos objetivos ou definição do tipo de conhecimento procurado, nesta etapa o problema é subdividido em múltiplas partes e a hierarquia é construída. Essa etapa facilita a compreensão e a avaliação do problema.
2. **Comparações Pareadas:** Avaliações das preferências relativas do decisor com relação a cada elemento de decisão em um dado nível da hierarquia. Nesta etapa, é construída uma matriz comparação entre pares para os elementos de um mesmo nível. Essas matrizes de julgamento, que deverão ser quadradas, serão utilizadas basicamente para a obtenção do vetor prioridades locais das alternativas.
3. **Solução usando autovalores e autovetores:** Estimativa dos pesos relativos dos elementos de decisão em um dado nível da hierarquia. Nesta etapa, a partir de uma escala pré-definida (que possibilita transformar os juízos dos decisores em valores numéricos), o decisor deve representar suas preferências entre os elementos comparados, tendo como referência os elementos do nível superior. Por exemplo, em um problema composto apenas por critérios e alternativas, para o nível de critérios, cada par de critérios será comparado entre si com relação ao objetivo e, analogamente, cada par de alternativas, do nível das alternativas, será comparado entre si sob cada critério. Contudo, julgamentos pessoais ou subjetivos podem provocar inconsistências nesta etapa.
4. **Determinação da consistência:** Avaliação da consistência e mensuração da inconsistência da matriz de comparações pareadas construída nas etapas anteriores.
5. **Agregação das prioridades e escolha final:** Agregação das prioridades de modo a avaliar o resultado referente ao objetivo. Nesta etapa ocorre a obtenção das prioridades locais das alternativas e síntese global dos resultados.

Além das etapas descritas em que o método AHP é constituído, o método ainda precisa ser iterativo, ou seja, permitir a identificação de uma nova alternativa ou a introdução de um novo critério não considerado anteriormente. As etapas referentes à estruturação AHP podem ser caracterizadas em um fluxograma geral como indica a [Figura 1](#). As etapas do método AHP serão abordadas e explicadas nas seções subsequentes.

Figura 1 – Fluxograma geral do AHP

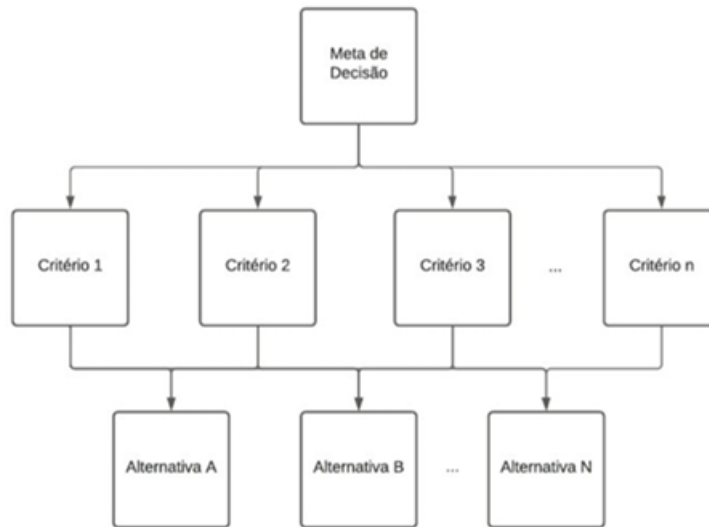


Fonte: Schmidt (1995)

3.2 Estruturação Hierárquica do Problema de Decisão

Inicialmente, é necessário definir o problema cuidadosamente, incluindo todos os detalhes, partes afetadas, viabilidade de resolução e informações possíveis. Após a definição do problema e formulação dos objetivos, é preciso fazer uma modelagem ou estruturação da hierarquia do problema, que além de essencial, talvez seja a parte mais importante. No método AHP, o problema será estruturado hierarquicamente, seguido de um processo de priorização das alternativas. A priorização envolve fazer um levantamento de julgamentos em resposta a questões relacionadas à dominância de um elemento sobre o outro, quando esses são comparados com respeito a um determinado critério. Desta forma, o problema é subdividido em múltiplas partes e a hierarquia é construída: no topo, situa-se o o objetivo de decisão; nos níveis intermediários se encontram os critérios (para os quais os elementos subsequentes dependem). Os critérios são definidos pelos tomadores de decisão e que terão influência direta no resultado final, com diferentes níveis de relevância. E por último, no nível mais baixo, aparecem as alternativas, que serão as medidas possíveis a serem tomadas para alcançar o objetivo principal. As alternativas serão hierarquizadas, compondo assim o resultado final. A Figura 2 apresenta a estrutura hierárquica básica do método AHP.

Figura 2 – Estrutura Hierárquica Básica do Método AHP



Fonte: Ávila (2021)

3.3 Comparação Pareada

Após a definição da hierarquia, o responsável pela decisão deve proceder com a comparação entre os n elementos de um determinado nível, sempre tomando como base os critérios estabelecidos no nível imediatamente superior. Nessa fase, é necessário que o decisor manifeste suas preferências, avaliando os elementos par a par. Esse processo exige do tomador de decisão a aplicação de sua experiência, intuição e conhecimento técnico sobre o problema em questão, especialmente quando estiver lidando com critérios de natureza qualitativa. No método AHP, há diferentes formas de atribuir valores às alternativas disponíveis. Quando existe uma função analítica ou de valor, basta calcular essa função para cada alternativa. Na ausência dessa função, o decisor pode expressar seus julgamentos por meio de avaliações verbais, que são posteriormente convertidas em valores numéricos com o uso da Escala de Razão- também conhecida como Escala Fundamental de Saaty- permitindo a ordenação das alternativas conforme suas preferências. As preferências expressas pelo decisor devem ser inseridas em uma matriz de comparação par a par. Essa matriz A quadrada, $n \times n$, é denominada matriz de comparação pareada ou matriz dominante e apresenta-se da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Os elementos a_{ij} representam os valores obtidos a partir das comparações par a par realizadas entre as alternativas $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Esses valores indicam quantas vezes a alternativa A_i domina ou é dominada pela alternativa A_j . Em outras palavras, cada elemento a_{ij} , localizado na linha i e

na coluna j da matriz, expressa o grau de dominância da alternativa A_i em relação à alternativa A_j . Assim, se $w_1, w_2, \dots, w_n$ são os respectivos pesos do conjunto de elementos (alternativas) então $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$. A matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ deverá ser positiva, recíproca e consistente. *Positiva*, pois a matriz será composta por elementos positivos, isto é, $a_{ij} > 0$. Além disso, o elemento a_{ii} é igual a 1 pois $a_{ii} = \frac{w_i}{w_i} = 1$, de fato, ao comparar um elemento com ele mesmo, não se estabelece preferência, já que ambos possuem importância equivalente por definição. *Recíproca*, porque $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$, isto é, se x denota a preferência de A em relação a B , então $\frac{1}{x}$ deve denotar a preferência de B em relação a A (comparação recíproca). *Consistente*, isto é, se o decisor for consistente nas escolhas então devemos ter que $a_{ik} = a_{ij} \cdot a_{jk}$ para $\forall i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Devemos observar que na prática esta propriedade de transitividade nem sempre será satisfeita pois está condicionada entre outros aspectos, à precisão com que o decisor realiza suas comparações e justamente aí que o método fica interessante.

3.4 Escala Fundamental de Saaty

As comparações par a par permitem identificar o grau de dominância em relação a outra, com base em um critério específico. Essa dominância é expressa por meio de uma escala numérica. Segundo Saaty (1991), os indivíduos são capazes de qualificar suas percepções em três níveis básicos de intensidade: alta, média e baixa. Ao detalhar essas categorias, obtêm-se nove níveis distintos, que compõem a chamada Escala Fundamental de Saaty ou Escala de Razão. A Figura 3 ilustra o significado atribuído a cada um dos valores dessa escala. Após concluir todas as comparações necessárias, o decisor define o grau de dominância entre os elementos e utiliza a Escala de Saaty - composta por valores inteiros de 1 a 9 - para representar essas relações. Em vez de calcular diretamente a razão entre dois pesos ($\frac{w_i}{w_j}$) (na prática os w_i serão desconhecidos), o decisor atribui um valor numérico da escala que mais se aproxima, de forma inteira, desse quociente, refletindo a intensidade relativa da preferência entre os elementos analisados.

3.5 Solução do Método AHP utilizando autovalores e autovetores

3.5.1 Comparação Pareada e Escala Fundamental de Saaty

Para formalizar a matriz de comparações par a par, consideremos $x_1, x_2, \dots, x_n$ como o conjunto de elementos a serem comparados (sejam eles alternativas, subcritérios ou critérios) e $w_1, w_2, \dots, w_n$ (cujos valores, numa primeira etapa, são desconhecidos) como os respectivos pesos atribuídos a cada um. Desta forma, para cada par de elementos (x_i, x_j) , a razão $\frac{w_i}{w_j}$ expressa o valor relativo da prioridade do elemento x_i em relação ao elemento x_j , naturalmente assumiremos que cada peso w_i do objetivo x_i é positivo e a soma dos pesos é igual a 1. O número

Figura 3 – Escala de Razão (Escala Fundamental de Saaty).

Intensidade de importância	Definição	Explicação
1	mesma importância	as duas atividades contribuem igualmente para o objetivo
3	importância pequena de uma sobre a outra	a experiência e o julgamento favorecem levemente uma atividade em relação a outra
5	importância grande ou essencial	a experiência e o julgamento favorecem fortemente uma atividade em relação a outra
7	importância grande ou demonstrada	uma atividade é muito fortemente favorecida em relação a outra; sua dominação de importância é demonstrada na prática
9	importância absoluta	a evidência favorece uma atividade em relação a outra com o mais alto grau de certeza
2, 4, 6, 8	valores intermediários entre os valores adjacentes	quando se procura uma condição de compromisso entre duas definições
recíprocos dos valores acima de zero	se a atividade i recebe uma das designações diferentes acima de zero, quando comparada com a atividade j, então tem o valor recíproco quando comparada com i	uma designação razoável
Racionais	razões resultantes da escala	se a consistência tiver que ser forçada para obter valores numéricos n, para completar a matriz.

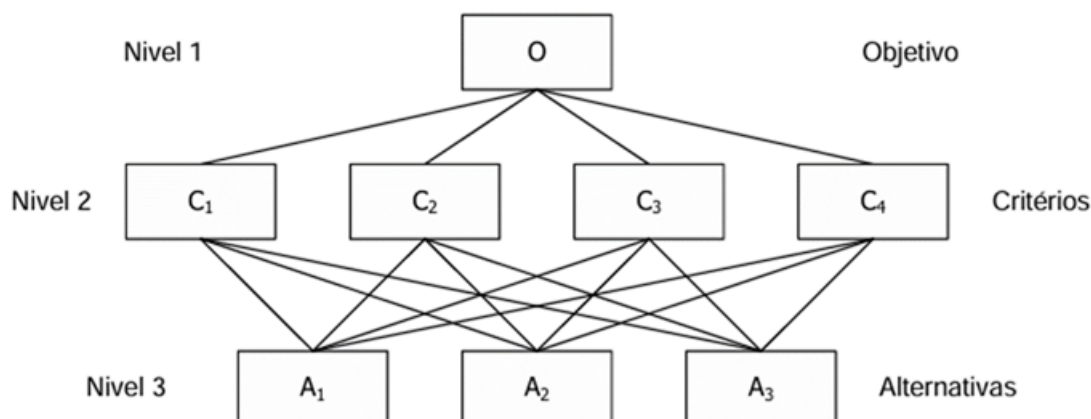
Fonte: Saaty (1991)

de comparações a serem realizadas é dependente do número de combinações possíveis entre os elementos. Como no caso do método AHP as comparações são pareadas, isto é, realizadas tomando-se os elementos 2 a 2, o número de combinações possíveis será definido por

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exemplo 7. A Figura 4 exemplifica a estrutura de um problema onde são considerados quatro critérios $[C_1, C_2, C_3, C_4]$ e três alternativas $[A_1, A_2, A_3]$, relacionados a um objetivo O. Assim,

Figura 4 – Exemplo de Estrutura Hierárquica do AHP



Fonte: Madrid (2009)

nessa hierarquia, todos os critérios - C_1, C_2, C_3, C_4 , no nível 2- serão comparados entre si, a fim de estimar o grau de influência que cada um exerce sobre o objetivo- nível 1, imediatamente acima na estrutura. De modo análogo, as alternativas A_1, A_2, A_3 , no nível 3, serão comparadas

entre si, de modo a obter a influência de cada uma sobre cada um dos critérios. Um método para se obter suas comparações, uma vez definida a escala, é através de questionários como na Figura 5. No questionário acima podem ser realizadas as comparações entre os quatro critérios

Figura 5 – Questionário para Comparações entre os Critérios

	Absoluta		Muito Forte		Forte		Fraca		Igual ou Indiferente		Fraca		Forte		Muito Forte		Absoluta	
C1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C2
C1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C3
C1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C4
C2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C3
C2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C4
C3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C4

Fonte: Madrid (2009)

do exemplo. Porém, são necessários ainda outros quatro questionários similares para realizar as comparações entre as alternativas, cada um medindo a influência dessas com relação a um dos quatro critérios, conforme a Figura 6

Figura 6 – Questionário para Comparações entre as Alternativas

	Absoluta		Muito Forte		Forte		Fraca		Igual ou Indiferente		Fraca		Forte		Muito Forte		Absoluta	
A1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	A2
A1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	A3
A2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	A3

Fonte: Madrid (2009)

Portanto, podemos concluir que, a partir da realização de $\frac{n(n-1)}{2}$ julgamentos, onde n é o número total de elementos, é possível construir uma matriz de comparações par a par A , de ordem $n \times n$, definida em:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Observe que a matriz em (3.1) representa, de forma quantitativa, a intensidade da preferência do decisor ao realizar comparações entre pares de elementos. É possível, também, denotar a_{ij} como a razão entre os pesos w_i e w_j , ou seja, $a_{ij} = w_i/w_j$, o que permite reformular (3.1) conforme (3.2). Vale ressaltar que a_{ij} indica o grau em que o elemento x_i é mais (ou menos) relevante do que o elemento x_j , considerando um critério pertencente ao nível imediatamente superior da

estrutura hierárquica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \frac{1}{a_{13}} & \frac{1}{a_{23}} & 1 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \frac{1}{a_{3n}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Agora, com a construção da matriz recíproca, positiva e consistente torna-se necessária a determinação do vetor prioridades (autovetor) associado a ela. Uma observação importante é notar que na prática a expressão (3.2) será obtida via o questionário de observação. O desafio é encontrar os pesos w_i de cada objetivo que permite obter (3.1).

3.5.2 Método do Autovalor

Considere a matriz recíproca, positiva e consistente construída em 3.1 e o vetor de pesos

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz A pelo vetor w , temos:

$$A \cdot w = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} \cdot w_1 + \frac{w_1}{w_2} \cdot w_2 + \cdots + \frac{w_1}{w_n} \cdot w_n \\ \frac{w_2}{w_1} \cdot w_1 + \frac{w_2}{w_2} \cdot w_2 + \cdots + \frac{w_2}{w_n} \cdot w_n \\ \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} \cdot w_1 + \frac{w_n}{w_2} \cdot w_2 + \cdots + \frac{w_n}{w_n} \cdot w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{w_1}{w_j} w_j \\ \sum_{j=1}^n \frac{w_2}{w_j} w_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{w_n}{w_j} w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \cdot \sum_{j=1}^n 1 \\ w_2 \cdot \sum_{j=1}^n 1 \\ \vdots \\ w_n \cdot \sum_{j=1}^n 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = n \cdot w$$

Isto é, a matriz coluna de pesos procurada

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

é um autovetor da matriz de comparação consistente A cujo o autovalor é igual a n (número de alternativas). A solução de $Aw = nw$ é chamada de autovetor direito principal de A , consiste de entradas positivas e é única salvo múltiplos dele. Para tomar w única, normaliza-se suas entradas, dividindo pela sua soma.

Proposição 1. Seja A a matriz quadrada $n \times n$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix},$$

onde $w_i, w_j > 0$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$. Então:

1.

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad \text{é um autovetor de } A \text{ com autovalor } \lambda = n.$$

2. A multiplicidade algébrica de $\lambda = n$ é igual a 1;

3. Todos os demais autovalores de A são zero.

Demonstração. O item 1 já foi verificado acima. Vejamos agora que a multiplicidade algébrica de $\lambda = n$ é 1. Sabemos que

$$A \cdot w = n \cdot w$$

onde $w = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]^T$ é o vetor peso da matriz $A = [\frac{w_i}{w_j}]_{n \times n}$. Como é fácil de verificar ao multiplicar as matrizes teremos

$$A \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 - w_1 \\ w_2 - w_2 \\ \vdots \\ w_n - w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -w_n \end{bmatrix}$$

então $[w_1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -w_n]^T$ é um autovetor de A com autovalor $\lambda = 0$. De maneira similar é fácil verificar que

$$\begin{bmatrix} w_1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -w_n \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 \ w_2 \ 0 \ \dots \ 0 \ -w_n \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 \ 0 \ w_3 \ 0 \ \dots \ 0 \ -w_n \end{bmatrix}^T, \dots, \begin{bmatrix} 0 \ 0 \ \dots \ w_{n-1} \ -w_n \end{bmatrix}^T$$

são $n - 1$ autovetores de A com o mesmo autovalor $\lambda = 0$. Como estes $n - 1$ autovetores são claramente linearmente independentes então o autoespaço gerado pelo autovalor $\lambda = 0$ da matriz A tem dimensão maior ou igual a $n - 1$ (multiplicidade geométrica maior ou igual a $n - 1$). Como por teoria, a multiplicidade algébrica é sempre maior ou igual

a multiplicidade geométrica, então podemos concluir que $\lambda = 0$ tem multiplicidade algébrica igual a $n - 1$ pois $\lambda = n$ é também autovalor. Assim $\lambda = n$ só pode ter multiplicidade algébrica igual a 1. Em particular,

$$P_A(\lambda) = \lambda^{n-1} \cdot (\lambda - n)$$

é o polinômio característico da matriz $A = [\frac{w_i}{w_j}]_{n \times n}$ provando deste modo os itens 2 e 3.

□

Exemplo 8. Seja a matriz de comparação:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- Essa matriz é consistente, pois satisfaz a condição:

$$a_{ik} = a_{ij} \cdot a_{jk}, \quad \text{para todos } i, j, k$$

- Verificação de que $\lambda = 3$ é Autovalor

Vamos calcular o determinante de $A - 3I$. Seja:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -2 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante:

$$\det(A - 3I) = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -2 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix}$$

Usando a primeira linha:

$$\begin{aligned} \det &= -2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & -2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= -2((-2)(-2) - (2)(\frac{1}{2})) - 2\left(\frac{1}{2} \cdot (-2) - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - (-2) \cdot \frac{1}{4}\right) \\ &= -2(4 - 1) - 2(-1 - 0.5) + 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \\ &= -2(3) - 2(-1.5) + 4 \cdot \frac{3}{4} \\ &= -6 + 3 + 3 = 0 \end{aligned}$$

Como:

$$\det(A - 3I) = 0$$

Concluimos que:

$$\lambda = 3 \text{ é autovalor de } A$$

- Autovetor associado

Buscamos um vetor $w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tal que:

$$A \cdot w = \lambda \cdot w, \quad \text{com } \lambda = 3$$

Multiplicando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 4z \\ \frac{1}{2}x + y + 2z \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + z \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Igualando as componentes:

$$x + 2y + 4z = 3x \Rightarrow x = y + 2z \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}x + y + 2z = 3y \Rightarrow x = 4y - 4z \quad (2)$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + z = 3z \Rightarrow x = 8z - 2y \quad (3)$$

Escolhendo $z = 1$, das equações (1) e (2):

$$x = y + 2x = 4y - 4$$

Igualando as expressões:

$$y + 2 = 4y - 4 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, o autovetor associado é:

$$w = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Normalização do Autovetor

Soma dos elementos:

$$4 + 2 + 1 = 7$$

Autovetor normalizado:

$$w_{\text{normalizado}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,571 \\ 0,286 \\ 0,143 \end{bmatrix}$$

- Conclusão

A matriz A é consistente, tem autovalor dominante $\lambda = 3$, com autovetor associado

$$w = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ cuja versão normalizada representa os pesos relativos das alternativas.}$$

Se a matriz A , consistente, representa a comparação de C critérios em relação aos objetivos, é correto afirmar que $n = C$. E o Teorema de Perron para matrizes composta por elementos positivos, isto é, $a_{ij} > 0, \forall i, j$, garante que sempre existirá solução única (autovalor e autovetor, ambos reais e positivos) para a equação $Aw = nw$. Por outro lado, nota-se que para a matriz de comparação $A = [\frac{w_i}{w_j}]$, cada vetor coluna tem a forma $\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_j} & \frac{w_2}{w_j} & \dots & \frac{w_n}{w_j} \end{bmatrix}^T$. Logo, cada vetor coluna de A é um múltiplo do vetor de pesos $w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix}^T$. Em resumo, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3. A forma normalizada de qualquer vetor coluna da matriz $A = [\frac{w_i}{w_j}]$ é a solução do problema $Aw = n.w$ onde $w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix}^T$ é o vetor peso procurado e n é o número de objetivos.

Vale destacar que, ao utilizar o método AHP, é necessário considerar que a pessoa responsável por tomar a decisão ainda não conhece o vetor de pesos w no momento em que preenche a matriz de comparações pareadas. Por esse motivo, é comum que a matriz apresente algum grau de inconsistência.

3.6 Autovetor associado ao maior autovalor de uma matriz inconsistente

Vimos na seção anterior que se $A = [\frac{w_i}{w_j}]$ é a matriz $n \times n$ de comparação então $\lambda = n$ é um autovalor de multiplicidade algébrica 1 com autovetor $w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix}^T$ e todos os

outros autovalores de A são iguais a zero, mais ainda, seus respectivos autovetores são vetores não positivos. Todas estas conclusões se originam pelo fato da matriz de comparação A ser consistente. Como na prática sabemos que a matriz de comparação não é consistente, veremos agora como o método funciona nesse caso, isto é, a matriz de comparação A ser quase consistente. Sob esta suposição devemos esperar que o único maior autovalor de A esteja próximo de n e seu respectivo autovetor, digamos w_0 , esteja próximo do vetor peso w . Mas precisamente, o problema agora consiste em achar o vetor peso w_0 que deverá satisfazer

$$A \cdot w_0 = \lambda_{\max} \cdot w_0$$

onde $\lambda_{\max}$ é o único maior autovalor de A . Nota-se que, pelo fato de A ser matriz positiva, o Teorema de Perron garante a existência da solução única de $\lambda_{\max}$.

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de comparação $n \times n$, positiva, recíproca, e seja $e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ o vetor coluna com todos os elementos iguais a 1:

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considere:

- A matriz A^k é a multiplicação sucessiva da matriz A por ela mesma k vezes;
- O vetor e^T é a transposta de e .

Assim, $e^T A^k e$ é a soma de todos os elementos do vetor $A^k e$ pois $A^k e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (vetor coluna) e $e^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (vetor linha), então o produto

$$e^T A^k e \in \mathbb{R}$$

isto é, um número real (escalar).

Sabemos, pelo Teorema de Perron, que:

- A matriz A possui um autovalor dominante $\lambda_{\max} > |\lambda_i|, \forall i \neq \max$;
- Existe um autovetor positivo w tal que $Aw = \lambda_{\max} w$;
- O método das potências converge para esse autovetor dominante.

Assim, no método AHP, é preciso encontrar o vetor de pesos $w \in \mathbb{R}^n$ associado ao maior autovalor λ_{max} , tal que,

$$Aw = \lambda_{max}w$$

No trabalho [Saaty \(1990\)](#), é provado que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k e}{e^T A^k e} = w_1$$

onde w_1 é o autovetor normalizado procurado que corresponde ao autovalor λ_{max} , é a forma teórica do método das potências no AHP, e permite encontrar o autovetor dominante normalizado (os pesos), usando apenas multiplicações sucessivas da matriz sobre o vetor de uns.

3.7 Determinação da Consistência

Seja A matriz $n \times n$, positiva, recíproca e *quase consistente*. Entende-se por uma matriz quase consistente, uma matriz $A = [a_{ij}]$ que é uma pequena perturbação multiplicativa de uma matriz consistente $W = [\frac{w_i}{w_j}]$, e tem um autovetor x , que é próximo do autovalor w da matriz consistente. Quando as matrizes apresentam alto grau de inconsistência, geralmente os julgamentos foram aleatórios, por isso tais julgamentos, nesses casos, deveriam ser refeitos ou passar por métodos de melhoria de inconsistência. Assim, se A é uma matriz $n \times n$, positiva, recíproca e quase consistente podemos considerar $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \cdot \epsilon_{ij}$, sendo ϵ_{ij} a perturbação pois

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} + \alpha_{ij} = \frac{w_i}{w_j} + \frac{w_i}{w_j} \cdot \frac{w_j}{w_i} \cdot \alpha_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \cdot (1 + \frac{w_j}{w_i} \cdot \alpha_{ij}), \text{ onde } \epsilon_{ij} = 1 + \frac{w_j}{w_i} \cdot \alpha_{ij}.$$

Lembrando que $\epsilon_{ij} = 1$ quando a matriz for consistente.

Sabemos que, $Aw = \lambda_{max} \cdot w$, logo substituindo $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ temos

$$A \cdot w = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \lambda_{max} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{aligned} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1n}w_n &= \lambda_{max} \cdot w_1 \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{2n}w_n &= \lambda_{max} \cdot w_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \dots + a_{nn}w_n &= \lambda_{max} \cdot w_n \end{aligned}$$

Logo, para cada linha $i = 1, 2, \dots, n$ obtemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot w_j = \lambda_{max} \cdot w_i$$

Mais precisamente, como $w_i \neq 0$, $\forall i$, pelo Teorema de Perron, temos

$$\frac{1}{w_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot w_j \right) = \lambda_{\max}.$$

Como w_i é constante no somatório obtemos

$$\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} = a_{i1} \cdot \frac{w_1}{w_i} + a_{i2} \cdot \frac{w_2}{w_i} + \dots + a_{in} \cdot \frac{w_n}{w_i} = a_{i1} \cdot \frac{w_1}{w_i} + a_{i2} \cdot \frac{w_2}{w_i} + \dots + a_{ii} \cdot \frac{w_i}{w_i} + \dots + a_{in} \cdot \frac{w_n}{w_i}$$

$$\lambda_{\max} = a_{i1} \cdot \frac{w_1}{w_i} + a_{i2} \cdot \frac{w_2}{w_i} + \dots + 1 + \dots + a_{in} \cdot \frac{w_n}{w_i} = \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} + 1, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n.$$

Isto é,

$$\lambda_{\max} = \sum_{j \neq 1}^n a_{1j} \cdot \frac{w_j}{w_1} + 1, \text{ para } i = 1$$

$$\lambda_{\max} = \sum_{j \neq 2}^n a_{2j} \cdot \frac{w_j}{w_2} + 1, \text{ para } i = 2$$

$$\lambda_{\max} = \sum_{j \neq n}^n a_{nj} \cdot \frac{w_j}{w_n} + 1, \text{ para } i = n$$

Somando membro a membro, obtemos:

$$n \cdot \lambda_{\max} = \sum_{j \neq 1}^n a_{1j} \cdot \frac{w_j}{w_1} + 1 + \sum_{j \neq 2}^n a_{2j} \cdot \frac{w_j}{w_2} + 1 + \dots + \sum_{j \neq n}^n a_{nj} \cdot \frac{w_j}{w_n} + 1$$

$$n \cdot \lambda_{\max} = \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} + \sum_{1 \leq j < i \leq n}^n a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} + n$$

$$n \cdot \lambda_{\max} = \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n \left(a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} + a_{ji} \cdot \frac{w_i}{w_j} \right) + n \quad (3.3)$$

Logo, obtemos que

$$n \cdot \lambda_{\max} - n = \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n \left(a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} + a_{ji} \cdot \frac{w_i}{w_j} \right).$$

Por outro lado, define-se

$$\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}.$$

$$\mu = \frac{\lambda_{\max} - 1 + 1 - n}{n - 1} = \frac{\lambda_{\max} - 1}{n - 1} + \frac{1 - n}{n - 1} = \frac{n \cdot (\lambda_{\max} - 1)}{n(n - 1)} - 1 = \frac{n \lambda_{\max} - n}{n(n - 1)} - 1$$

Substituindo a 3.3 obtemos:

$$\mu = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n (a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i} + a_{ji} \cdot \frac{w_i}{w_j}).$$

Por outro lado temos que

- $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ pois A é matriz recíproca;
- $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \cdot \epsilon_{ij}$ pois A é inconsistente, assim também, $a_{ji} = \frac{w_j}{w_i} \cdot \frac{1}{\epsilon_{ij}}$

Utilizando isso na última igualdade temos,

$$\mu = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n [(\frac{w_i}{w_j} \cdot \epsilon_{ij}) \cdot \frac{w_j}{w_i} + (\frac{w_j}{w_i} \cdot \frac{1}{\epsilon_{ij}}) \cdot \frac{w_i}{w_j}]$$

Simplificando,

$$\mu = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n (\epsilon_{ij} + \frac{1}{\epsilon_{ij}}) \quad (3.4)$$

Note-se também que

$$\lim_{\epsilon_{ij} \rightarrow 1} \mu = \lim_{\epsilon_{ij} \rightarrow 1} (-1 + \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n (\epsilon_{ij} + \frac{1}{\epsilon_{ij}})) = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n 2$$

$$\lim_{\epsilon_{ij} \rightarrow 1} \mu = -1 + \frac{2}{n(n-1)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n 1 = -1 + \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = -1 + 1 = 0$$

Conclusão:

$$\lim_{\epsilon_{ij} \rightarrow 1} \mu = 0$$

lembrando que $\mu = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$.

Para compreendermos melhor o estudo de quanto uma matriz está "longe" de ser consistente, apresentaremos os próximos teoremas.

Teorema 4. Para $[a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ positiva ($a_{ij} > 0$), recíproca ($a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$) e quase consistente, então o seu maior autovalor será $\lambda_{max} \geq n$.

Demonstração. Sabemos que

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \cdot \epsilon_{ij}$$

e vimos que se ε_{ij} se aproxima de um então $\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$ se aproxima de zero. Definiremos

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij} - 1, & \text{se } \varepsilon_{ij} \geq 1 \\ \varepsilon_{ji} - 1, & \text{se } \varepsilon_{ij} < 1 \end{cases}$$

Desta definição podemos observar que:

- $\delta_{ij} \geq 0$ para $\forall i, j = 1, \dots, n$ (pois se $\varepsilon_{ij} < 1$ então $\varepsilon_{ji} = \frac{1}{\varepsilon_{ij}} > 1$).
- $\delta_{ij} = 0$ então A é consistente (pois $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = 1$).

Usando 3.4 teremos que

$$\mu = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n \left(\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} \right) - 1 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n \left(\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} - \frac{2n(n-1)}{2} \right)$$

Por outro lado,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n}^n 2 = \frac{2n(n-1)}{2}$$

Então,

$$\mu = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n \left(\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} - 2 \right)$$

Mas,

- Se $\varepsilon_{ij} > 1$ então $\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} = 1 + \delta_{ij} + \frac{1}{1 + \delta_{ij}}$
- Se $\varepsilon_{ij} < 1$ então usando o fato de A ser matriz recíproca teremos

$$\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\varepsilon_{ji}} + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{ji}}} = \frac{1}{\varepsilon_{ji}} + \varepsilon_{ji} = \frac{1}{1 + \delta_{ij}} + 1 + \delta_{ij}$$

Logo, independente do caso $\varepsilon_{ij} > 1$ ou $\varepsilon_{ij} < 1$ teremos sempre que

$$\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} = 1 + \delta_{ij} + \frac{1}{1 + \delta_{ij}}.$$

Podemos afirmro então que,

$$\mu = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n \left(\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} - 2 \right) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n \left(1 + \delta_{ij} + \frac{1}{1 + \delta_{ij}} - 2 \right)$$

Simplificando,

$$\mu = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\delta_{ij} - 1 + \frac{1}{1 + \delta_{ij}}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\frac{(\delta_{ij})^2 - 1 + 1}{1 + \delta_{ij}})$$

$$\mu = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\delta_{ij})^2}{1 + \delta_{ij}}$$

Assim, podemos concluir que

$$\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\delta_{ij})^2}{1 + \delta_{ij}}$$

Lembrando que $\delta_{ij} \geq 0$ então necessariamente $\mu \geq 0$ isto é $\lambda_{\max} - n \geq 0$

Portanto, $\lambda_{\max} \geq n$.

□

Teorema 5. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$, positiva e recíproca. Então A é consistente se, e somente se, $\lambda_{\max} = n$.

Demonstração. Considere A uma matriz consistente, então $\varepsilon_{ij} = 1$ logo, $\delta_{ij} = 0$. Assim,

$\mu = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\frac{(\delta_{ij})^2}{1 + \delta_{ij}}) = 0$ mas, $\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$ então $\lambda_{\max} = n$, como queríamos provar.

Agora, considere $\lambda_{\max} = n$, então $\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = 0$. Mas como $\mu = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\frac{(\delta_{ij})^2}{1 + \delta_{ij}})$ então necessariamente $\delta_{ij} = 0, \forall i, j$. Logo, A é consistente, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 6. Seja $\delta = \max_{i,j} \delta_{ij}$. Então

$$\lambda_{\max} - n < \frac{(n-1)}{2} \delta^2$$

Demonstração. Como $\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\delta_{ij})^2}{1 + \delta_{ij}}$ então

$$\lambda_{\max} - n = \frac{1}{n} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\delta_{ij})^2}{1 + \delta_{ij}} \right) < \frac{1}{n} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\delta_{ij})^2 \right) \text{ pois } \frac{1}{1 + \delta_{ij}} < 1$$

Assim,

$$\lambda_{max} - n \leq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n \delta^2, \text{ pois } \delta = \max \delta_{ij}. \text{ Assim,}$$

$$\lambda_{max} - n \leq \frac{\delta^2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n 1 = \frac{\delta^2}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}, \text{ isto é,}$$

$$\lambda_{max} - n \leq \frac{(n-1)}{2} \delta^2.$$

□

Assim por Saaty (1990), por meio da expressão, $\frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$ propõe uma forma de avaliar o nível de consistência dos julgamentos realizados pelo tomador de decisão. O valor teórico ideal de λ_{max} é igual a n , de modo que qualquer desvio em relação a esse valor é expresso por $\lambda_{max} - n$. Esse desvio é então ajustado pelo número de graus de liberdade da matriz, dado por $n - 1$. Com base nessa relação, define-se o Índice de Consistência (IC), calculado da seguinte forma:

$$IC = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

Note que, no caso da matriz A ser perfeitamente consistente $\lambda_{max} = n$ tem-se o $IC = 0$.

Apesar de o Índice de Consistência (IC) ser útil para avaliar a coerência dos julgamentos, ele tende a aumentar com a dimensão da matriz (n), tornando-se insuficiente como critério isolado. Para resolver essa limitação, Saaty propôs a Razão de Consistência (RC), que permite analisar o grau de inconsistência dos julgamentos em contextos com matrizes maiores.

$$RC = \frac{IC}{RI}$$

A fórmula do RC incorpora o Índice Randômico (RI), que corresponde à média dos valores de IC obtidos a partir de simulações com um grande número de matrizes aleatórias de diferentes ordens. Essa comparação com valores esperados ao acaso permite uma análise mais precisa da consistência dos julgamentos.

Tabela 1 – Índice Randômico (RI) segundo Saaty ([Saaty \(1990\)](#))

Ordem da Matriz (<i>n</i>)	RI
1	0.00
2	0.00
3	0.58
4	0.90
5	1.12
6	1.24
7	1.32
8	1.41
9	1.45
10	1.49

Para que uma matriz de comparação pareada seja considerada aceitável, ou seja, sem necessidade de revisar os julgamentos do decisor, o valor de *RC* deve ser inferior a 0,1. Para mais detalhes sobre a fundamentação e uso da fórmula da Razão de Consistência na avaliação de matrizes de comparação, ver [Saaty \(1990\)](#).

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ANÁLISE HIERÁRQUICA (AHP)

4.1 Etapas do Processo de Análise Hierárquica (AHP)

De acordo com [Elacoste, Azambuja e Machado \(2014\)](#), o processo de Análise Hierárquica consiste em sete passos principais, que estruturam a tomada de decisão de forma lógica e sistemática. A seguir, cada etapa é descrita:

Passo 1 – Definição do Problema e Elementos Decisórios

O primeiro passo consiste na análise criteriosa do problema, com o objetivo de identificar claramente o objetivo da decisão, os critérios e subcritérios relevantes, bem como as alternativas disponíveis. Essa definição deve considerar os valores, crenças e convicções do decisor, pois esses fatores influenciam diretamente as prioridades estabelecidas no processo decisório.

Passo 2 – Estruturação Hierárquica do Problema

Após a definição do objetivo e dos elementos decisórios, o problema deve ser organizado em uma estrutura hierárquica com múltiplos níveis. A hierarquia geralmente é composta pelo objetivo no nível superior, os critérios e subcritérios nos níveis intermediários, e as alternativas de decisão no nível inferior. Essa organização facilita a compreensão do problema e orienta as comparações a serem feitas posteriormente.

Passo 3 – Construção das Matrizes de Comparação Par a Par

Nesta etapa, são elaboradas as matrizes de comparação par a par entre os elementos de um mesmo nível hierárquico, sempre em relação a um elemento do nível imediatamente superior. As comparações são feitas utilizando a escala fundamental proposta por Saaty, que varia de 1 (importância igual) a 9 (importância extrema), permitindo avaliar a importância relativa de cada par de critérios ou alternativas.

Passo 4 – Cálculo dos Vetores de Prioridades (Pesos Relativos)

A partir das matrizes de comparação, calcula-se o vetor de prioridades (ou pesos relativos) de cada elemento comparado. Esse vetor representa a importância relativa dos critérios, subcritérios ou alternativas. O cálculo neste trabalho será feito pelo método iterativo das potências, no qual se utiliza a expressão:

$$\frac{A^k e}{e^T A^k e}$$

para obter uma aproximação do autovetor dominante normalizado.

Passo 5 – Verificação da Consistência dos Julgamentos

É essencial avaliar se as comparações feitas nas matrizes são logicamente consistentes. Para isso, calcula-se o Índice de Consistência (IC) e, a partir dele, o Índice de Razão de Consistência (RC). Um valor de $RC < 0,10$ indica que os julgamentos são aceitavelmente consistentes. Caso contrário, recomenda-se revisar as comparações para evitar distorções no resultado final.

Passo 6 – Agregação das Prioridades

Com os pesos relativos já definidos e validados, procede-se à agregação das prioridades. Essa etapa consiste em combinar os pesos locais obtidos em cada nível da hierarquia, multiplicando-os de forma apropriada, até que se obtenham os pesos globais das alternativas em relação ao objetivo principal.

Passo 7 – Síntese e Escolha da Alternativa Mais Adequada

Na etapa final, realiza-se a síntese da decisão, comparando os pesos globais das alternativas. A alternativa que apresentar o maior valor será considerada a mais adequada, de acordo com os critérios definidos e as preferências do decisor. Assim, o AHP oferece uma base estruturada, transparente e justificada para a tomada de decisão.

4.2 Aplicação do Método AHP para Escolha da Melhor Sala de Recurso Escolar

Neste trabalho, adota-se o *Método de Análise Hierárquica* (AHP – *Analytic Hierarchy Process*) como ferramenta de apoio à decisão no contexto educacional. Desenvolvido por Thomas L. Saaty, o AHP é amplamente utilizado em situações que envolvem múltiplos critérios e exige a ponderação de fatores subjetivos e objetivos. Sua aplicação permite organizar e analisar decisões complexas por meio de uma estrutura hierárquica, facilitando a comparação entre alternativas e a definição de prioridades com base em julgamentos consistentes.

O objetivo deste estudo é auxiliar na **escolha da melhor sala de recurso** a ser implementada em um determinado espaço escolar, considerando os benefícios que tal ambiente poderá oferecer aos alunos. A decisão precisa levar em conta tanto os aspectos pedagógicos quanto os

fatores estruturais e financeiros, garantindo que a escolha final esteja alinhada às necessidades e possibilidades da instituição.

Após a definição do objetivo, foram estabelecidos os seguintes **critérios de avaliação**:

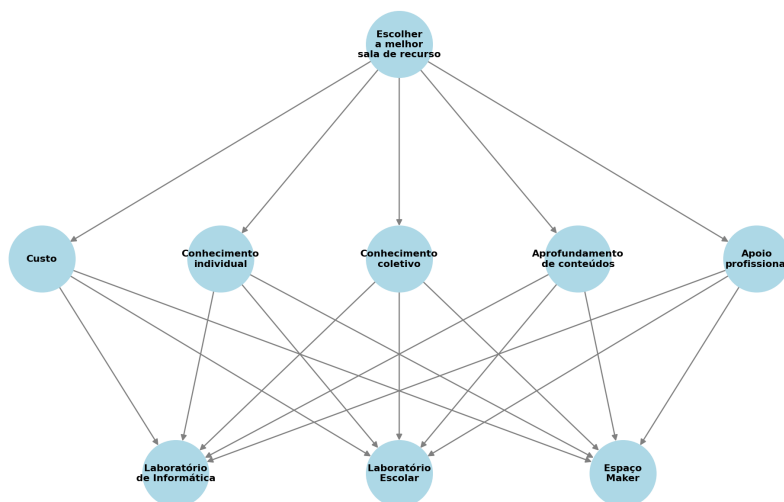
- **Critério 1: Custo** – Refere-se ao valor financeiro necessário para a implantação e manutenção do ambiente proposto;
- **Critério 2: Construção do conhecimento individual** – Avalia o potencial do espaço para favorecer o desenvolvimento cognitivo e a autonomia do aluno;
- **Critério 3: Construção do conhecimento coletivo** – Considera as oportunidades de trabalho colaborativo e desenvolvimento de habilidades sociais;
- **Critério 4: Aprofundamento de conteúdos** – Relaciona-se ao aproveitamento pedagógico, considerando a possibilidade de retomar ou aprofundar assuntos já trabalhados em sala de aula;
- **Critério 5: Apoio profissional** – Analisa a disponibilidade e o preparo de profissionais para atuar no ambiente, garantindo suporte adequado ao desenvolvimento das atividades.

Com base nesses critérios, foram definidas as seguintes **alternativas de ambientes educacionais** a serem consideradas no processo decisório:

- **Alternativa 1: Laboratório de Informática** – Espaço equipado com computadores e recursos digitais para apoio às práticas pedagógicas;
- **Alternativa 2: Laboratório Escolar** – Espaço multidisciplinar voltado à realização de atividades práticas relacionadas a diversas áreas do conhecimento;
- **Alternativa 3: Espaço Maker** – Ambiente destinado à experimentação e à criação de projetos, com uso de ferramentas, materiais diversos e tecnologias interativas.

Como ilustrado na [Figura 7](#), a estrutura do problema foi organizada hierarquicamente para este problema de decisão.

Figura 7 – Questionário para Comparações entre os Critérios



Fonte: Elaborada pelo autor

Após a construção da estrutura hierárquica do problema, é elaborado as matrizes comparativas com os valores obtidos através de uma pesquisa realizada com uma professora atuante na escola a ser decidido a sala de recurso. A professora realizou todas as comparações necessárias e definiu o grau de dominância entre os elementos utilizando a Escala de Saaty (Figura 3).

Matriz de Comparação dos Critérios

Tabela 2 – Matriz de comparação entre os critérios

	C1	C2	C3	C4	C5
C1	1	1/3	1/2	1/4	1/3
C2	3	1	2	3	2
C3	2	1/2	1	2	2
C4	4	1/3	1/2	1	1/2
C5	3	1/2	1/2	2	1

A interpretação dos elementos da matriz de comparação acima é feito da seguinte maneira:

- $a_{1,2} = \frac{1}{3}$: C_1 é moderadamente menos importante que C_2 .
- $a_{1,3} = \frac{1}{2}$: C_1 é levemente menos importante que C_3 .
- $a_{1,4} = \frac{1}{4}$: C_1 é consideravelmente menos importante que C_4 .
- $a_{1,5} = \frac{1}{3}$: C_1 é moderadamente menos importante que C_5 .
- $a_{2,1} = 3$: C_2 é moderadamente mais importante que C_1 .

- $a_{2,3} = 2$: C_2 é levemente mais importante que C_3 .
- $a_{2,4} = 3$: C_2 é moderadamente mais importante que C_4 .
- $a_{2,5} = 2$: C_2 é levemente mais importante que C_5 .
- $a_{3,1} = 2$: C_3 é levemente mais importante que C_1 .
- $a_{3,2} = \frac{1}{2}$: C_3 é levemente menos importante que C_2 .
- $a_{3,4} = 2$: C_3 é levemente mais importante que C_4 .
- $a_{3,5} = 2$: C_3 é levemente mais importante que C_5 .
- $a_{4,1} = 4$: C_4 é fortemente mais importante que C_1 .
- $a_{4,2} = \frac{1}{3}$: C_4 é moderadamente menos importante que C_2 .
- $a_{4,3} = \frac{1}{2}$: C_4 é levemente menos importante que C_3 .
- $a_{4,5} = \frac{1}{2}$: C_4 é levemente menos importante que C_5 .
- $a_{5,1} = 3$: C_5 é moderadamente mais importante que C_1 .
- $a_{5,2} = \frac{1}{2}$: C_5 é levemente menos importante que C_2 .
- $a_{5,3} = \frac{1}{2}$: C_5 é levemente menos importante que C_3 .
- $a_{5,4} = 2$: C_5 é levemente mais importante que C_4 .

Os elementos na diagonal principal ($a_{ii} = 1$) indicam a comparação de um critério com ele mesmo, que resulta sempre em importância igual.

Matrizes de Comparação entre Alternativas por Critério

Critério 1: Custo

Tabela 3 – Comparação das alternativas segundo o critério Custo

	A1	A2	A3
A1	1	3	4
A2	1/3	1	2
A3	1/4	1/2	1

A interpretação de cada elemento da matriz é a seguinte: cada elemento a_{ij} da matriz representa a avaliação do quão mais custosa é a alternativa A_i em relação à alternativa A_j segundo o critério C_1 (Custo). Desse modo:

- $a_{12} = 3$: O Laboratório de Informática (A_1) é 3 vezes mais custoso do que o Laboratório Escolar (A_2).
- $a_{13} = 4$: O A_1 é 4 vezes mais custoso do que o Espaço Maker (A_3).
- $a_{21} = \frac{1}{3}$: O A_2 é menos custoso que o A_1 (especificamente, 3 vezes menos custoso).
- $a_{32} = \frac{1}{2}$: O A_3 é 2 vezes menos custoso que o A_2 .

Os elementos da diagonal são iguais a 1, pois cada alternativa comparada com ela mesma tem importância igual.

Critério 2: Conhecimento individual

Tabela 4 – Comparação das alternativas segundo o critério Conhecimento individual

	A1	A2	A3
A1	1	1/2	1/3
A2	2	1	1/2
A3	3	2	1

A interpretação de cada elemento da matriz é a seguinte:

- $a_{12} = \frac{1}{2}$: A_1 (Laboratório de Informática) é levemente menos favorável ao desenvolvimento do conhecimento individual do que A_2 (Laboratório Escolar).
- $a_{13} = \frac{1}{3}$: A_1 (Laboratório de Informática) é moderadamente menos favorável ao desenvolvimento do conhecimento individual do que A_3 (Espaço Maker).
- $a_{21} = 2$: A_2 (Laboratório Escolar) é duas vezes mais favorável ao desenvolvimento do conhecimento individual do que A_1 (Laboratório de Informática).
- $a_{23} = \frac{1}{2}$: A_2 (Laboratório Escolar) é levemente menos favorável ao conhecimento individual do que A_3 (Espaço Maker).
- $a_{31} = 3$: A_3 (Espaço Maker) é três vezes mais favorável ao desenvolvimento do conhecimento individual do que A_1 (Laboratório de Informática).
- $a_{32} = 2$: A_3 (Espaço Maker) é duas vezes mais favorável ao desenvolvimento do conhecimento individual do que A_2 (Laboratório Escolar).

Observação: os elementos da diagonal são 1, pois cada alternativa comparada consigo mesma tem importância igual.

Critério 3: Conhecimento coletivo

Tabela 5 – Comparação das alternativas segundo o critério Conhecimento coletivo

	A1	A2	A3
A1	1	1/3	1/4
A2	3	1	2
A3	4	1/2	1

A interpretação de cada elemento da matriz é a seguinte:

- $a_{12} = \frac{1}{3}$: O Laboratório de Informática (A_1) é moderadamente menos favorável ao desenvolvimento do conhecimento coletivo do que o Laboratório Escolar (A_2).
- $a_{13} = \frac{1}{4}$: O Laboratório de Informática (A_1) é fortemente menos favorável ao desenvolvimento do conhecimento coletivo do que o Espaço Maker (A_3).
- $a_{21} = 3$: O Laboratório Escolar (A_2) é moderadamente mais favorável ao desenvolvimento do conhecimento coletivo do que o Laboratório de Informática (A_1).
- $a_{23} = 2$: O Laboratório Escolar (A_2) é levemente mais favorável ao desenvolvimento do conhecimento coletivo do que o Espaço Maker (A_3).
- $a_{31} = 4$: O Espaço Maker (A_3) é fortemente mais favorável ao desenvolvimento do conhecimento coletivo do que o Laboratório de Informática (A_1).
- $a_{32} = \frac{1}{2}$: O Espaço Maker (A_3) é levemente menos favorável ao desenvolvimento do conhecimento coletivo do que o Laboratório Escolar (A_2).

Os elementos da diagonal principal são iguais a 1, pois cada alternativa é igualmente importante quando comparada com ela mesma.

Critério 4: Aprofundamento de conteúdos

Tabela 6 – Comparação das alternativas segundo o critério Aprofundamento de conteúdos

	A1	A2	A3
A1	1	1/9	1/9
A2	9	1	1/2
A3	9	2	1

A interpretação de cada elemento da matriz é a seguinte:

- $a_{12} = \frac{1}{9}$: O Laboratório de Informática (A_1) é extremamente menos adequada que o Laboratório Escolar (A_2).

- $a_{13} = \frac{1}{9}$: O Laboratório de Informática (A_1) é extremamente menos adequada que o Espaço Maker (A_3).
- $a_{21} = 9$: O Laboratório Escolar (A_2) é extremamente mais adequada que o Laboratório de Informática (A_1).
- $A_{23} = \frac{1}{2}$: O Laboratório Escolar (A_2) é ligeiramente menos adequada que o Espaço Maker (A_3).
- $A_{31} = 9$: O Espaço Maker (A_3) é extremamente mais adequada que o Laboratório de Informática (A_1).
- $A_{32} = 2$: O Espaço Maker (A_3) é duas vezes mais adequada que o Laboratório Escolar (A_2).

Os elementos da diagonal principal são iguais a 1, pois cada alternativa é igualmente importante quando comparada com ela mesma.

Critério 5: Apoio profissional

Tabela 7 – Comparação das alternativas segundo o critério Apoio profissional

	A1	A2	A3
A1	1	1/2	1/4
A2	2	1	1/3
A3	4	3	1

A interpretação de cada elemento da matriz é a seguinte:

- $a_{12} = \frac{1}{2}$: A_1 (Laboratório de Informática) é um pouco menos adequado que A_2 (Laboratório Escolar).
- $a_{13} = \frac{1}{4}$: A_1 (Laboratório de Informática) é consideravelmente menos adequado que A_3 (Espaço Maker).
- $a_{21} = 2$: A_2 (Laboratório Escolar) é duas vezes mais adequado que A_1 (Laboratório de Informática).
- $a_{23} = \frac{1}{3}$: A_2 (Laboratório Escolar) é menos adequado que A_3 (Espaço Maker).
- $a_{31} = 4$: A_3 (Espaço Maker) é quatro vezes mais adequado que A_1 (Laboratório de Informática).
- $a_{32} = 3$: A_3 (Espaço Maker) é três vezes mais adequado que A_2 (Laboratório Escolar).

Os elementos da diagonal principal são iguais a 1, pois cada alternativa é igualmente importante quando comparada com ela mesma.

A partir dessas matrizes construídas, calcula-se a seguir o vetor de prioridades (ou pesos relativos) de cada elemento comparado, através da expressão

$$\frac{A^k e}{e^T A^k e}$$

para obter uma aproximação do autovetor dominante normalizado. Uma vez encontrado o vetor peso, podemos encontrar o valor de λ_{max} e assim medir o nível de consistência da matriz. Então:

4.2.0.1 Matriz de Comparação dos Critérios

Cálculo para encontrar o vetor peso

Considere a matriz de comparação dos critérios , positiva, recíproca mas inconsistente que obtivemos na seção anterior.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 \\ 4 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Através dos cálculos pode-se obter:

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{A^1 e}{e^T A^1 e} &= \begin{bmatrix} 0.07056 \\ 0.32117 \\ 0.21898 \\ 0.18491 \\ 0.20438 \end{bmatrix} & w_2 = \frac{A^2 e}{e^T A^2 e} &= \begin{bmatrix} 0.07330 \\ 0.35318 \\ 0.23723 \\ 0.14349 \\ 0.19280 \end{bmatrix} & w_3 = \frac{A^3 e}{e^T A^3 e} &= \begin{bmatrix} 0.07775 \\ 0.35358 \\ 0.23393 \\ 0.14598 \\ 0.18876 \end{bmatrix} \\ w_4 = \frac{A^4 e}{e^T A^4 e} &= \begin{bmatrix} 0.07756 \\ 0.35208 \\ 0.23264 \\ 0.14801 \\ 0.18972 \end{bmatrix} & w_5 = \frac{A^5 e}{e^T A^5 e} &= \begin{bmatrix} 0.07732 \\ 0.35204 \\ 0.23286 \\ 0.14784 \\ 0.18993 \end{bmatrix} & w_6 = \frac{A^6 e}{e^T A^6 e} &= \begin{bmatrix} 0.07733 \\ 0.35213 \\ 0.23293 \\ 0.14773 \\ 0.18987 \end{bmatrix} \\ w_7 = \frac{A^7 e}{e^T A^7 e} &= \begin{bmatrix} 0.07735 \\ 0.35213 \\ 0.23292 \\ 0.14774 \\ 0.18986 \end{bmatrix} & w_8 = \frac{A^8 e}{e^T A^8 e} &= \begin{bmatrix} 0.07735 \\ 0.35212 \\ 0.23291 \\ 0.14775 \\ 0.18987 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O vetor peso, após 8 iterações até quatro casas decimais, já apresenta convergência. O vetor peso final (normalizado) é aproximadamente:

$$w = \begin{bmatrix} 0.07735 \\ 0.35212 \\ 0.23291 \\ 0.14775 \\ 0.18987 \end{bmatrix}$$

Conclusão:

Peso do critério 2 > peso do critério 3 > peso do critério 5 > peso do critério 4 > peso do critério 1.

Cálculo do Autovalor Máximo

O autovalor associado ao vetor peso é calculado através da fórmula

$$A.w = \lambda_{max}.w$$

onde w é o vetor de pesos. Lembremos que provamos que desta igualdade ao igualar componente a componente obtemos

$$\lambda_{max} = \frac{(Aw)_i}{w_i} \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Da nossa matriz temos:

$$\frac{(Aw)_1}{w_1} = \sum_{j=1}^5 a_{1j} \frac{w_j}{w_1} = 5.31876$$

$$\frac{(Aw)_2}{w_2} = 5.31915$$

$$\frac{(Aw)_3}{w_3} = 5.31926$$

$$\frac{(Aw)_4}{w_4} = 5.31921$$

$$\frac{(Aw)_5}{w_5} = 5.31909$$

Podemos então tomar $\lambda_{max} = 5,319$

Cálculo do Índice de Consistência (CI)

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{5.31909 - 5}{4} = 0.07977$$

Cálculo do Índice de Razão de Consistência (CR)

O índice aleatório (RI) para $n = 5$ é: (veja Tabela 1)

$$RI = 1.12$$

Logo,

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.07977}{1.12} = 0.07123$$

Conclusão

Como $CR < 0.10$, a matriz de comparação é considerada aceitável (quase consistente) segundo o método AHP. De modo similar, veremos para as outras matrizes.

4.2.0.2 Matriz de Comparação entre Alternativas pelo Critério 1

Cálculo para encontrar o vetor peso Considere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Através dos cálculos pode-se obter:

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{A^1 e}{e^T A^1 e} &= \begin{bmatrix} 0.61146 \\ 0.25478 \\ 0.13376 \end{bmatrix} & w_2 = \frac{A^2 e}{e^T A^2 e} &= \begin{bmatrix} 0.62630 \\ 0.23800 \\ 0.13570 \end{bmatrix} & w_3 = \frac{A^3 e}{e^T A^3 e} &= \begin{bmatrix} 0.62509 \\ 0.23839 \\ 0.13652 \end{bmatrix} \\ w_4 = \frac{A^4 e}{e^T A^4 e} &= \begin{bmatrix} 0.62500 \\ 0.23849 \\ 0.13650 \end{bmatrix} & w_5 = \frac{A^5 e}{e^T A^5 e} &= \begin{bmatrix} 0.62501 \\ 0.23849 \\ 0.13650 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O vetor peso tende a convergir após 5 iterações. O vetor peso final (normalizado) é aproximadamente:

$$w = \begin{bmatrix} 0.62501 \\ 0.23849 \\ 0.13650 \end{bmatrix}$$

Conclusão: Alternativa 1 > Alternativa 2 > Alternativa 3 em relação ao critério 1.

Cálculo do Autovalor Máximo

Lembremos que o autovalor associado ao vetor peso pode ser calculado através da fórmula

$$A \cdot w = \lambda_{max} \cdot w$$

onde w é o vetor de pesos. Lembremos que provamos que desta igualdade ao igualar componente a componente obtemos

$$\lambda_{max} = \frac{(Aw)_i}{w_i} \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Da nossa matriz temos:

$$\frac{(Aw)_1}{w_1} = \sum_{j=1}^3 a_{1j} \frac{w_j}{w_1} = 3.01832$$

$$\frac{(Aw)_2}{w_2} = 3.01827$$

$$\frac{(Aw)_3}{w_3} = 3.01830$$

Podemos então tomar $\lambda_{max} = 3.01829$

Cálculo do Índice de Consistência (CI)

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} = \frac{3.01829 - 3}{2} = 0.00915$$

Cálculo do Índice de Razão de Consistência (CR)

O índice aleatório (RI) para $n = 3$ é: (veja Tabela 1)

$$RI = 0.58$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.00915}{0.58} \approx \boxed{0.01577}$$

Conclusão

Como $CR < 0.10$, a matriz tem inconsistência aceitável segundo o método AHP.

4.2.0.3 Matriz de Comparação entre Alternativas pelo Critério 2

Cálculo para encontrar o vetor peso Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Através dos cálculos pode-se obter:

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{A^1 e}{e^T A^1 e} &= \begin{bmatrix} 0.16176 \\ 0.30882 \\ 0.52941 \end{bmatrix} & w_2 = \frac{A^2 e}{e^T A^2 e} &= \begin{bmatrix} 0.16302 \\ 0.29684 \\ 0.54015 \end{bmatrix} & w_3 = \frac{A^3 e}{e^T A^3 e} &= \begin{bmatrix} 0.16343 \\ 0.29693 \\ 0.53964 \end{bmatrix} \\ w_4 = \frac{A^4 e}{e^T A^4 e} &= \begin{bmatrix} 0.16343 \\ 0.29696 \\ 0.53961 \end{bmatrix} & w_5 = \frac{A^5 e}{e^T A^5 e} &= \begin{bmatrix} 0.16342 \\ 0.29696 \\ 0.53961 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O vetor peso tende a convergir após 5 iterações. O vetor peso final (normalizado) é aproximadamente:

$$w = \begin{bmatrix} 0.16342 \\ 0.29696 \\ 0.53961 \end{bmatrix}$$

Conclusão: Alternativa 3 > Alternativa 2 > Alternativa 1 em relação ao critério 2.

Cálculo do Autovalor Máximo

O autovalor associado ao vetor peso com é calculado através da fórmula

$$A \cdot w = \lambda_{max} \cdot w$$

onde w é o vetor de pesos. Lembremos que provamos que desta igualdade ao igualar componente a componente obtemos

$$\lambda_{max} = \frac{(Aw)_i}{w_i} \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Da nossa matriz temos:

$$\frac{(Aw)_1}{w_1} = \sum_{j=1}^3 a_{1j} \frac{w_j}{w_1} = 3.00924$$

$$\frac{(Aw)_2}{w_2} = 3.00918$$

$$\frac{(Aw)_3}{w_3} = 3.00919$$

Podemos então tomar $\lambda_{\max} = 3.00920$

Cálculo do Índice de Consistência (CI)

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3.00920 - 3}{2} = 0.00460$$

Cálculo do Índice de Razão de Consistência (CR)

O índice aleatório (RI) para $n = 3$ é: (veja Tabela 1)

$$RI = 0.58$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.00460}{0.58} \approx 0.00793$$

Conclusão

Como $CR < 0.10$, a matriz tem inconsistência aceitável segundo o método AHP.

4.2.0.4 Matriz de Comparação entre Alternativas pelo Critério 3

Cálculo para encontrar o vetor peso Considere

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Através dos cálculos pode-se obter:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{A^1 e}{e^T A^1 e} = \begin{bmatrix} 0.12102 \\ 0.45860 \\ 0.42038 \end{bmatrix} & w_2 &= \frac{A^2 e}{e^T A^2 e} = \begin{bmatrix} 0.11936 \\ 0.52357 \\ 0.35707 \end{bmatrix} & w_3 &= \frac{A^3 e}{e^T A^3 e} = \begin{bmatrix} 0.12459 \\ 0.51892 \\ 0.35649 \end{bmatrix} \\ w_4 &= \frac{A^4 e}{e^T A^4 e} = \begin{bmatrix} 0.12447 \\ 0.51685 \\ 0.35868 \end{bmatrix} & w_5 &= \frac{A^5 e}{e^T A^5 e} = \begin{bmatrix} 0.12429 \\ 0.51708 \\ 0.35863 \end{bmatrix} \\ w_6 &= \frac{A^6 e}{e^T A^6 e} = \begin{bmatrix} 0.12430 \\ 0.51715 \\ 0.35855 \end{bmatrix} \\ w_7 &= \frac{A^7 e}{e^T A^7 e} = \begin{bmatrix} 0.12431 \\ 0.51714 \\ 0.35856 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O vetor peso tende a convergir após 7 iterações. O vetor peso final (normalizado) é aproximadamente:

$$w = \begin{bmatrix} 0.12431 \\ 0.51714 \\ 0.35856 \end{bmatrix}$$

Conclusão: Alternativa 2 > Alternativa 3 > Alternativa 1 em relação ao critério 3.

Cálculo do Autovalor Máximo

O autovalor associado ao vetor peso com é calculado através da fórmula

$$A.w = \lambda_{max}.w$$

onde w é o vetor de pesos. Lembremos que provamos que desta igualdade ao igualar componente a componente obtemos

$$\lambda_{max} = \frac{(Aw)_i}{w_i} \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Da nossa matriz temos:

$$\frac{(Aw)_1}{w_1} = \sum_{j=1}^3 a_{1j} \frac{w_j}{w_1} = 3.10780$$

$$\frac{(Aw)_2}{w_2} = 3.10784$$

$$\frac{(Aw)_3}{w_3} = 3.10790$$

Podemos então tomar $\lambda_{max} = 3.10785$

Cálculo do Índice de Consistência (CI)

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} = \frac{3.10785 - 3}{2} = 0.05392$$

Cálculo do Índice de Razão de Consistência (CR)

O índice aleatório (RI) para $n = 3$ é: (veja Tabela 1)

$$RI = 0.58$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.05392}{0.58} \approx 0.09297$$

Conclusão

Como $CR < 0.10$, a matriz tem inconsistência aceitável segundo o método AHP.

4.2.0.5 Matriz de Comparação entre Alternativas pelo Critério 4

Cálculo para encontrar o vetor peso Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{4} \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Através dos cálculos pode-se obter:

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{A^1 e}{e^T A^1 e} &= \begin{bmatrix} 0,05152 \\ 0,44262 \\ 0,50585 \end{bmatrix} & w_2 = \frac{A^2 e}{e^T A^2 e} &= \begin{bmatrix} 0,04948 \\ 0,36558 \\ 0,58493 \end{bmatrix} & w_3 = \frac{A^3 e}{e^T A^3 e} &= \begin{bmatrix} 0,05136 \\ 0,36537 \\ 0,58327 \end{bmatrix} \\ w_4 = \frac{A^4 e}{e^T A^4 e} &= \begin{bmatrix} 0,05136 \\ 0,36669 \\ 0,58195 \end{bmatrix} & w_5 = \frac{A^5 e}{e^T A^5 e} &= \begin{bmatrix} 0,05133 \\ 0,36667 \\ 0,58200 \end{bmatrix} & w_6 = \frac{A^6 e}{e^T A^6 e} &= \begin{bmatrix} 0,05133 \\ 0,36665 \\ 0,58202 \end{bmatrix} \\ w_7 = \frac{A^7 e}{e^T A^7 e} &= \begin{bmatrix} 0,05133 \\ 0,36665 \\ 0,58202 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O vetor peso tende a convergir após 7 iterações. O vetor peso final (normalizado) é aproximadamente:

$$w = \begin{bmatrix} 0,05133 \\ 0,36665 \\ 0,58202 \end{bmatrix}$$

Conclusão: Alternativa 3 > Alternativa 2 > Alternativa 1 em relação ao critério 4.

Cálculo do Autovalor Máximo

O autovalor associado ao vetor peso com é calculado através da fórmula

$$A \cdot w = \lambda_{\max} \cdot w$$

$$\lambda_{\max} \approx \frac{(Aw)_i}{w_i} \text{ para } i = 1, 2, 3 \Rightarrow \lambda_{\max} \approx 3,05362$$

Cálculo do Índice de Consistência (CI)

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3,05362 - 3}{2} = 0,02681$$

Cálculo do Índice de Razão de Consistência (CR)

O índice aleatório (RI) para $n = 3$ é:

$$RI = 0.58$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0,02681}{0,58} \approx 0,04623$$

Conclusão

Como $CR < 0,10$, a matriz apresenta um nível aceitável de inconsistência para a tomada de decisão segundo o método AHP.

4.2.0.6 Matriz de Comparação entre Alternativas pelo Critério 5**Cálculo para encontrar o vetor peso Considere**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Através dos cálculos pode-se obter:

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{A^1 e}{e^T A^1 e} &= \begin{bmatrix} 0,13376 \\ 0,25478 \\ 0,61146 \end{bmatrix} & w_2 = \frac{A^2 e}{e^T A^2 e} &= \begin{bmatrix} 0,13570 \\ 0,23800 \\ 0,62630 \end{bmatrix} & w_3 = \frac{A^3 e}{e^T A^3 e} &= \begin{bmatrix} 0,13652 \\ 0,23839 \\ 0,62509 \end{bmatrix} \\ w_4 = \frac{A^4 e}{e^T A^4 e} &= \begin{bmatrix} 0,13650 \\ 0,23849 \\ 0,62500 \end{bmatrix} & w_5 = \frac{A^5 e}{e^T A^5 e} &= \begin{bmatrix} 0,13650 \\ 0,23849 \\ 0,62501 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O vetor peso tende a convergir após 5 iterações. O vetor peso final (normalizado) é aproximadamente:

$$w = \begin{bmatrix} 0,13650 \\ 0,23849 \\ 0,62501 \end{bmatrix}$$

Conclusão: Alternativa 3 > Alternativa 2 > Alternativa 1 em relação ao critério 5.

Cálculo do Autovalor Máximo

O autovalor associado ao vetor peso com é calculado através da fórmula

$$A \cdot w = \lambda_{\max} \cdot w$$

$$\lambda_{\max} \approx \frac{(Aw)_i}{w_i} \text{ para } i = 1, 2, 3 \Rightarrow \lambda_{\max} \approx 3,01829$$

Cálculo do Índice de Consistência (CI)

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3,01829 - 3}{2} = 0,00915$$

Cálculo do Índice de Razão de Consistência (CR)

O índice aleatório (RI) para $n = 3$ é:

$$RI = 0.58$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0,00915}{0,58} = 0,01577$$

Conclusão

Como $CR < 0,10$, a matriz apresenta um nível aceitável de inconsistência para a tomada de decisão segundo o método AHP.

Cáculo do Vetor Peso Final

Após obter os vetores peso dos critérios e os vetores peso das alternativas com relação a cada critério, podemos calcular o vetor peso final (ou ranking global das alternativas) por meio do seguinte procedimento:

Denotamos por w_C o vetor de pesos dos critérios:

$$w_C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad \text{com } \sum_{i=1}^5 c_i = 1$$

Denotamos por W_A a matriz que contém os pesos das alternativas com relação a cada critério. Cada linha representa uma alternativa, e cada coluna representa um critério:

$$W_A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix}$$

onde b_{ij} é o peso da alternativa i com relação ao critério j .

Multiplicamos a matriz W_A pelo vetor w_C :

$$w_{\text{final}} = W_A \cdot w_C$$

$$w_{\text{final}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

O vetor w_{final} representa o ranking global das alternativas com base em todos os critérios considerados.

Assim, substituindo os valores temos:

$$w_C = \begin{bmatrix} 0.07735 \\ 0.35212 \\ 0.23291 \\ 0.14775 \\ 0.18987 \end{bmatrix}$$

,

$$W_A = \begin{bmatrix} 0.62501 & 0.16342 & 0.12431 & 0,05133 & 0,13650 \\ 0.23849 & 0.29696 & 0.51714 & 0,36665 & 0,23849 \\ 0.13650 & 0.53961 & 0.35856 & 0,58202 & 0,62501 \end{bmatrix}$$

obtemos:

$$w_{\text{final}} = W_A \cdot w_C$$

$$w_{\text{final}} = \begin{bmatrix} 0,16834 \\ 0,34291 \\ 0,48874 \end{bmatrix}$$

Conclusão

O vetor peso final indica a prioridade global de cada alternativa:

- Alternativa 1 (Laboratório de Informática): **16,83%**
- Alternativa 2 (Laboratório Escolar): **34,29%**
- Alternativa 3 (Espaço Maker): **48,87%**

Portanto, esses valores mostram o nível de atendimento de cada alternativa aos critérios definidos no estudo. Assim, se for necessário escolher apenas um dos três espaços para receber investimentos, equipamentos ou ser utilizado como sala de recursos, o Espaço Maker se destaca como a opção mais alinhada às necessidades pedagógicas segundo o método AHP, oferecendo uma base objetiva para a tomada de decisão da gestão escolar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi possível evidenciar a importância de matrizes, autovalores e autovetores, e o Teorema de Perron como fundamento matemático essencial para a aplicação correta do Método de Análise Hierárquica (AHP). Este teorema garante a existência e unicidade de um autovetor dominante associado à matriz de comparações pareadas, fornecendo base teórica para a obtenção dos vetores de prioridade que sustentam as decisões multicritério.

A utilização do método AHP mostrou-se eficaz para a estruturação, quantificação e hierarquização de critérios subjetivos em um problema real de tomada de decisão no contexto educacional. Ao definir critérios relevantes — como custo, construção do conhecimento individual e coletivo, aproveitamento do professor e apoio profissional — e compará-los de forma sistemática, foi possível garantir coerência lógica, transparência e racionalidade no processo decisório.

A aplicação prática do AHP permitiu resolver o problema de escolher, entre diferentes alternativas e dentro das considerações tomadas pelo decisor, qual seria a melhor sala de recurso a ser desenvolvida em um espaço escolar, com foco no benefício dos alunos. Os resultados apontaram a alternativa mais adequada, considerando todos os critérios previamente definidos, o que demonstra o potencial do método como uma ferramenta de suporte à decisão em ambientes escolares e educacionais.

Portanto, o AHP aliado ao Teorema de Perron proporciona uma metodologia robusta, confiável e justificável para decisões complexas, especialmente em contextos onde múltiplos fatores devem ser considerados de maneira integrada e ponderada. A contribuição deste trabalho, portanto, está na aplicação prática da teoria matemática para promover decisões mais justas, eficazes e embasadas em evidências quantitativas e qualitativas.

REFERÊNCIAS

ELACOSTE, T. S.; AZAMBUJA, A. M. V.; MACHADO, C. M. S. **Indicadores hierárquicos dos serviços aos navios: um estudo de caso aplicado ao Porto Novo do Rio Grande**. 70 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica)) — Fundação Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande, 2014. Citado na página 45.

MADRID, K. C. **A Teoria de Perron-Frobenius e Aplicações**. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Matemática) — Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2009. Orientadora: Miriam Abdon. Citado nas páginas 30 e 31.

POOLE, D. **Álgebra linear: uma introdução moderna**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. Citado nas páginas 17, 19 e 24.

SAATY, T. L. **The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation**. Pittsburgh, PA: RWS Publications, 1990. Analytic Hierarchy Process Series. Citado nas páginas 15, 38, 43 e 44.

_____. **Método de Análise Hierárquica**. São Paulo: Makron Books, McGraw-Hill, 1991. Citado nas páginas 29 e 30.

_____. **The seven pillars of the Analytic Hierarchy Process**. Pittsburgh: RWS Publications, 2001. Citado na página 26.

SCHMIDT, A. M. A. **Processo de apoio à tomada de decisão: abordagens AHP e MACBETH**. Florianópolis: [s.n.], 1995. Monografia (Especialização em Engenharia de Produção). Acesso em: 23 jul. 2025. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/157951/PEPS0434-D.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Citado na página 27.

ÁVILA, A. R. S. de. Monografia (Graduação em Matemática Aplicada), **Um estudo sobre os conceitos matemáticos que sustentam o método de análise hierárquica (AHP)**. Rio Grande: [s.n.], 2021. Acesso em: 23 jul. 2025. Disponível em: <https://imef.furg.br/images/documentos/matematica-aplicada/monografias/2022-Anderson_Roberto_Sevage_de_Avila.pdf>. Citado na página 28.

