

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede

Aurenilson de Matos Lima

**A MODELAGEM COMO MÉTODO DE ENSINO E UMA PROPOSTA DE
PROBLEMAS REAIS POR MEIO DE AJUSTE DE CURVAS**

Teófilo Otoni

2024

Aurenilson de Matos Lima

**A MODELAGEM COMO MÉTODO DE ENSINO E UMA PROPOSTA DE
PROBLEMAS REAIS POR MEIO DE AJUSTE DE CURVAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Elson Leal de Moura

Teófilo Otoni

2024

Catálogo na fonte - Sisbi/UFVJM

L696a Lima, Aurenilson de Matos
2025 A MODELAGEM COMO MÉTODO DE ENSINO E UMA PROPOSTA DE
PROBLEMAS REAIS POR MEIO DE AJUSTE DE CURVAS [manuscrito] /
Aurenilson de Matos Lima. -- Teófilo Otoni, 2025.
91 p.

Orientador: Prof. Elson Leal de Moura.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) --
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teófilo Otoni, 2024.

1. Modelagem Matemática. 2. Ajuste de Curvas. 3. Método
dos Mínimos Quadrados. 4. Modelos Matemáticos. 5. Funções. I.
Moura, Elson Leal de . II. Universidade Federal dos Vales do
Jequitinhonha e Mucuri. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFVJM com os
dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Este produto é resultado do trabalho conjunto entre o bibliotecário Rodrigo Martins Cruz/CRB6-
2886
e a equipe do setor Portal/Diretoria de Comunicação Social da UFVJM

AURENILSON DE MATOS LIMA

**A MODELAGEM COMO MÉTODO DE ENSINO E UMA PROPOSTA DE PROBLEMAS
REAIS POR MEIO DE AJUSTE DE CURVAS**

Dissertação apresentada ao
MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL, nível de MESTRADO,
como parte dos requisitos para
obtenção do título de MESTRE EM
MATEMÁTICA.

Orientador: Prof. Dr. ELSON LEAL
DE MOURA

Data da aprovação: 06/12/2024

Prof. Dr. ELSON LEAL DE MOURA (Orientador)

Prof.^a Dr.^a SILVIA SWAIN CANOAS (UFVJM)

Prof. Dr. JOSÉ CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR (UFT)

Prof. Dr. AILTON LUIZ VIEIRA (UFVJM)

Documento assinado digitalmente



ELSON LEAL DE MOURA
Data: 11/12/2024 12:40:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente



SILVIA SWAIN CANOAS
Data: 11/12/2024 15:17:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente



JOSE CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR
Data: 11/12/2024 22:50:26-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Documento assinado digitalmente



AILTON LUIZ VIEIRA
Data: 13/12/2024 09:27:05-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

À minha amada esposa, Márcia; ao meu filho, Athos, inspiração constante e melhor capítulo de minha vida; aos meus pais, Aurino e Margarida, eternos exemplos; à minha prima Nery, sempre ao meu lado; aos meus irmãos; aos meus professores ao longo da minha trajetória de estudante; e aos meus amigos da Escola Estadual de Carai - MG, pelo incentivo e apoio durante esta jornada.

AGRADECIMENTO

A Deus pela minha vida, saúde, força, resiliência e sabedoria, que tornaram possível chegar até aqui e realizar esta conquista profissional e sonho pessoal.

À minha amada esposa Márcia e ao meu querido filho Athos, razões da minha vida, que sempre estiveram ao meu lado, apoiando, incentivando e buscando soluções para as dificuldades e momentos árduos ao longo dessa trajetória.

À minha família, pela qual tenho amor e orgulho. Em especial aos meus pais, Aurino e Margarida, amores da minha vida, pelo incentivo durante toda a minha jornada de estudante e por serem meus eternos exemplos de resiliência, persistência, dignidade, honestidade e fé em Deus. À minha maravilhosa prima, Nery, pelo cuidado, zelo, incentivo, conselhos, e por ser essa referência de caridade, bondade, justiça e desprendimento. Aos meus queridos irmãos e adorável irmã, pelo apoio e carinho em todos os momentos de minha vida. À minha sogra, Alzira, pelo carinho e cuidados como se eu fosse um filho. Ao meu sobrinho Henrique e sua esposa, Sabrina, pelo apoio logístico durante o curso de verão.

Ao Programa de Pós-Graduação, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) / Campus Teófilo Otoni, pela oportunidade de proporcionar este momento ímpar na minha vida.

À CAPES, pois este trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ao Estado de Minas Gerais, nas pessoas de Ângela Ferraz (37ª SRE / Teófilo Otoni-MG) e do Diretor da Escola Estadual de Caraí – MG, Luciano Ribeiro, por terem possibilitado e viabilizado meu afastamento de um dos meus cargos de professor ao longo do curso.

Aos meus professores do PROFMAT, por me incentivarem durante todos os momentos, principalmente pela dedicação e pelos ensinamentos durante as aulas, aos quais serei eternamente grato. Aos meus coordenadores, Prof. Dr. Weversson Dalmaso Sellin e Prof. Dr. Alexandre Faissal Brito, e ao pessoal técnico e administrativo, pelas instruções

importantes durante todo este período.

Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Elson Leal de Moura, pela paciência, confiança, ensinamentos, incentivos e pela colaboração decisiva para a conclusão deste trabalho. Tenho gratidão eterna e imenso orgulho de ter sido orientado por um profissional exemplar como o senhor, de sabedoria e inteligência extraordinárias.

Aos meus colegas que estiveram ao meu lado nessa trajetória e que, para sempre, farão parte da minha vida: Antônio Carlos, Jaqueline, Letícia, Katharina, Odair, Paula e Socorro.

Especialmente, agradeço aos meus colegas e amigos Fernando e Charles pelo companheirismo, apoio incondicional nos momentos difíceis (e foram muitos), pelos momentos descontraídos compartilhados e pela amizade sincera e respeitosa. Vocês foram verdadeiros enviados de Deus que estiveram firmes e fortes comigo durante toda essa jornada.

Por fim, expresso meus agradecimentos a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para que eu pudesse transformar este sonho em realidade.

“A Modelagem Matemática é o conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões”.

Burak (1992, p. 62).

RESUMO

Nesta dissertação, a Modelagem Matemática foi apresentada como uma proposta alternativa de ensino para conteúdos matemáticos do Ensino Médio, com o objetivo de possibilitar ao aluno o protagonismo no processo de ensino e aprendizagem. Foram feitas breves considerações históricas, além de apresentadas algumas possibilidades de utilizar a modelagem em sala de aula, discriminando concepções e estratégias de pesquisadores da Educação Matemática. A revisão literária sobre a modelagem evidencia sua importância como recurso no ensino da Matemática, pois permite aos estudantes aprender conteúdos matemáticos a partir de fenômenos e problemas reais. A teoria do ajuste de curvas foi abordada, utilizando o método dos Mínimos Quadrados no estudo das funções polinomiais e exponenciais, com ênfase na construção de modelos lineares simples, polinomiais, exponenciais e logísticos, sendo este último desenvolvido por meio do método de Ford-Walford. Além disso, foram sugeridas duas atividades em que os alunos poderão aplicar o ajuste de curva na construção de modelos matemáticos, reconhecendo a importância da Matemática como meio para levantar hipóteses a partir de sua experiência e vivência, além de interagir com problemas reais e sociais.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Ajuste de Curvas; Método dos Mínimos Quadrados; Modelos Matemáticos.

ABSTRACT

In this dissertation, Mathematical Modeling was presented as an alternative teaching proposal for mathematical content in high school, with the aim of enabling students to take a leading role in the teaching and learning process. Brief historical considerations were made, in addition to presenting some possibilities for using modeling in the classroom, discriminating concepts and strategies of Mathematics Education researchers. The literary review on modeling highlights its importance as a resource in teaching Mathematics, as it allows students to learn mathematical content based on real phenomena and problems. The theory of curve fitting was addressed, using the Least Squares method in the study of polynomial and exponential functions, with an emphasis on the construction of simple linear, polynomial, exponential and logistic models, the latter being developed using the Ford-Walford method . Furthermore, two activities were suggested in which students can apply curve adjustment in the construction of mathematical models, recognizing the importance of Mathematics as a means of raising hypotheses based on their experience and experience, in addition to interacting with real and social problems.

Keywords: Mathematical Modeling; Curve Fitting; Least Squares Method; Mathematical Models.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Sistema Planetário de Ptolomeu.	6
2.2	O esquema de pontes da cidade de Königsberg no século XVIII. . .	6
2.3	O Modelo Matemático das pontes de Königsberg.	7
2.4	Esquema do processo de Modelagem Matemática segundo Biembengut e Hein.	16
3.1	100 simulações do deslocamento da mola e a força correspondente para $k = 5$	24
3.2	O diagrama de dispersão Custo X Quantidade	28
3.3	Gráfico do Ajuste Linear Simples: Custo Total X Quantidade. . . .	35
3.4	O diagrama de dispersão Quantidade demandada X Preço de venda.	37
3.5	Gráfico do Ajuste Quadrático: Quantidade demandada X Preço de venda.	40
3.6	O diagrama de dispersão Tamanho da célula X Temperatura.	42
3.7	Gráfico do Ajuste Exponencial: Tamanho da célula X Temperatura.	45
3.8	O gráfico representativo da solução $P(x)$ para um modelo logístico.	46
3.9	Os elementos consecutivos da sequência y_n e y_{n+1} muito próximos.	47
3.10	O método de Ford-Walford.	49
3.11	O diagrama de dispersão dos dados da Tabela 3.7.	51
3.12	O diagrama de dispersão dos dados da Tabela 3.7.	52
4.1	Diagrama de dispersão da População de Teófilo Otoni – MG de 2011 a 2019.	55
4.2	Modelo Linear Simples da População de Teófilo Otoni - MG de 2011 a 2019.	58

4.3	Modelo Exponencial da População de Teófilo Otoni - MG de 2011 a 2019.	61
4.4	Passo 1 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico. . .	62
4.5	Passo 2 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico. . .	63
4.6	Passo 3 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico. . .	63
4.7	Passo 4 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico. . .	64
4.8	Passo 5 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico. . .	64
4.9	Passo 6 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico. . .	65
4.10	Passo 7 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico. . .	66
4.11	Passo 7 para o ajuste exponencial usando o GeoGebra Clássico. . .	66
4.12	Ajuste polinomial linear da população(y_i) e $g(y_i) = y_{i+1}$ para o método-Walford - GeoGebra Clássico.	69
4.13	Capacidade de Suporte da População de Teófilo Otoni – MG: Método de Ford-Walford - GeoGebra Clássico.	70
4.14	O resultado do ajuste linear dos dados (x_i, Y_i) - Método de Ford-Walford - GeoGebra Clássico.	71
4.15	Modelo Logístico da População de Teófilo Otoni – MG de 2011 a 2019.	72
5.1	Passo 1 para o diagrama de dispersão usando o GeoGebra Clássico.	79
5.2	Passo 2 para o diagrama de dispersão usando o GeoGebra Clássico.	80
5.3	Modelo discreto de Malthus da População de Minas Gerais – década de 70.	81

LISTA DE TABELAS

3.1	Quantidade produzida X Custo total.	27
3.2	Tabela auxiliar Quantidade X Custo Total	33
3.3	Preço de venda X Quantidade vendida.	36
3.4	Tabela auxiliar Preço de venda X Quantidade demandada.	38
3.5	Temperatura X Tamanho.	42
3.6	Temperatura X Tamanho.	43
3.7	Evolução da reprodução das algas no mar Adriático.	50
4.1	População do município de Teófilo Otoni - MG.	55
4.2	Ajuste Linear da População de Teófilo Otoni - MG.	57
4.3	Ajuste Exponencial da População de Teófilo Otoni - MG. Foi considerado apenas as quatro primeiras casas decimais de cada $\ln(y_i)$	60
4.4	Crescimento relativo da População de Teófilo Otoni – MG no período 2012-2019.	68
4.5	Ajuste Logístico da População de Teófilo Otoni – MG.	69
4.6	Erro entre os valores obtidos pelos modelos e as projeções apresentadas pelo IBGE de 2011 a 2019 (período de realização dos ajustes).	73
4.7	Erro entre os valores obtidos pelos modelos e as projeções apresentadas pelo IBGE de 2020 e 2021 e Censo de 2022.	73
5.1	Erro entre os valores obtidos pelo modelo discreto de Malthus e os censos demográficos realizados pelo IBGE em 1970, 1980 e 2000.	84
5.2	Erro entre os valores obtidos pelos modelos de Malthus e os censos demográficos realizados pelo IBGE em 1970, 1980 e 2000.	85

LISTA DE SIGLAS

MEC - Ministério da Educação.

UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

MG - Minas Gerais.

ICTMA – International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications.

ICMI – International Commission on Mathematical Instruction.

ICME - International Congress Mathematics Education.

DCNEB - Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica.

BNCC – Base Nacional Comum Curricular.

ANPED – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação.

UFU – Universidade Federal de Uberlândia.

UNESP – Universidade Estadual Paulista.

FURB – Fundação Universidade Regional de Blumenau.

DF – Distrito Federal.

CNMEM - Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática.

UEFS – Universidade Estadual de Feira de Santana.

CIBEM – Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.	2
2 MODELAGEM MATEMÁTICA	5
2.1 Um pouco de Modelagem Matemática ao longo da História	5
2.2 A Modelagem Matemática nas Salas de Aulas Brasileiras: Quatro Concepções e Várias Possibilidades	10
3 A MODELAGEM MATEMÁTICA E A TEORIA SOBRE AJUSTE DE CURVAS.	22
3.1 Regressão ou Ajuste de Curvas.	23
3.2 Conceitos Estatísticos Importantes para compreensão do Método de Ajuste de Curvas.	25
3.3 Tipos de Ajustes de Curvas	26
3.3.1 Ajuste Linear Simples	27
3.3.1.1 - O Método dos Mínimos Quadrados	28
3.3.1.2 - Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para obter o Ajuste Linear Simples	33
3.3.2 - Ajuste por Funções Polinomiais	35
3.3.3 - Ajuste por Funções Exponenciais.	40
3.3.4 - Ajuste por Modelos Logísticos	45
4 - PROPOSTA DE APLICAÇÃO DE ATIVIDADE UTILIZANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA	53
4.1 - Construções dos Modelos.	54
4.2 - Ajuste por modelo linear simples.	56
4.3 - Ajuste por modelo linear exponencial.	58
4.4 - Modelo linear simples da evolução da população teófilo-otonense no período de 2011 a 2019 pelo GeoGebra Clássico.	62
4.5 - Modelo exponencial da evolução da população teófilo-otonense no período de 2011 a 2019 pelo GeoGebra Clássico.	66
4.6 - Ajuste por modelo logístico.	67
4.7 - Análise dos modelos.	72
5 - PROPOSTA DE ATIVIDADE UTILIZANDO O MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DE MALTHUS.	75
5.1 - Modelo Malthusiano.	75

	1
5.2 - Atividade sobre a evolução da população de Minas Gerais a partir de 1970 segundo o Modelo de Malthus.	77
6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS.	87
REFERÊNCIAS	89

1 INTRODUÇÃO.

Um dos questionamentos frequentemente dirigidos aos professores e profissionais da área de ensino da Matemática é: “por que e como ensinar Matemática?” É importante que essa reflexão seja feita em todos os níveis do ensino-aprendizagem. No próprio contexto da atividade de ensino, tanto no ensino fundamental quanto no médio, o porquê de se ensinar Matemática deve ser questionado. Infortunadamente, ainda hoje, essa disciplina é vista como uma das mais complexas, e, na maioria das vezes, os alunos não se sentem motivados ou estimulados a aprender. Isso ocorre, em grande parte, porque os conteúdos são, predominantemente, ministrados com técnicas tradicionais, baseadas na memorização e repetição de exercícios, distantes de aplicações em situações e problemas reais.

A Modelagem Matemática, segundo Bassanezi (2002), pode ser considerada tanto como um método científico de pesquisa quanto uma estratégia de ensino-aprendizagem. Ela consiste na “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Essa abordagem apresenta-se como uma possibilidade no ensino dos conteúdos matemáticos.

Nesse cenário, alinhados às novas propostas curriculares, que destacam a importância da contextualização e da interdisciplinaridade no ensino de Matemática para promover o protagonismo estudantil, buscamos apresentar a Modelagem Matemática, por meio do Ajuste de Curva, como um método de ensino *sui generis*, atraente e repleto de significados para os alunos.

À vista disso, apresentamos, por meio de exemplos e representações matemáticas, a utilização da Modelagem Matemática ao longo da história da humanidade para abordar e resolver problemas, utilizando modelos ilustrativos ou fórmulas analíticas. Sugerimos que os problemas reais sejam um ponto de partida para uma aprendizagem significativa de Matemática, pois o processo de construção das hipóteses e soluções potencializa a participação dos alunos, especialmente quando estes são instigados a testar e generalizar as soluções encontradas.

Confeccionamos um breve histórico da Modelagem Matemática nas escolas brasileiras, no qual relatamos as experiências iniciais e os precursores desse método, além de

discorrermos sobre algumas concepções acerca da modelagem e de como praticá-la em sala de aula. É crucial mencionar que não estamos preocupados em determinar qual é a melhor abordagem, mas sim em indicar possibilidades aos professores, para que a matemática seja abordada de forma conectada com a realidade do aluno e integrada a outras possibilidades de conhecimento.

Também descrevemos a teoria referente ao ajuste de curvas, enfatizando os tipos de ajuste e as aplicações do método dos Mínimos Quadrados em uma abordagem sobre as funções polinomiais e exponenciais. Apresentamos situações e exemplos que possibilitam ao aluno sugerir e resolver problemas reais utilizando diversos recursos matemáticos, relacionados a conteúdos do Ensino Médio, como: sistemas lineares e matriciais, matrizes, determinantes, estatística básica, logaritmos, entre outros.

Ademais, apresentamos uma proposta de atividade utilizando a modelagem matemática em um cenário integrado e interdisciplinar, no qual é necessário o uso de diversas ferramentas e procedimentos, tais como: coleta de dados, interpretação de informações, uso de recursos tecnológicos e condições suficientes para solucionar as questões impostas pelo problema proposto: a evolução populacional de um município. Em nossa proposta, desenvolvemos os passos e procedimentos, utilizando como referência as projeções da população de Teófilo Otoni – MG, disponibilizadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE (PROJEÇÕES, 2024) . Esse tema, além de proporcionar aos alunos experiências durante a construção dos modelos, também os coloca na posição de verificar os resultados encontrados e discutir, de forma crítica, as possibilidades de aplicá-los para indicar projeções futuras relacionadas à dinâmica populacional da sua cidade.

Com o intuito de apresentar o primeiro modelo que utilizou a matemática para estabelecer um modelo de crescimento de uma população humana, propomos como atividade a obtenção dos modelos referentes à dinâmica populacional do estado de origem do estudante, utilizando os Modelos de Malthus e as informações dos censos demográficos do estado de Minas Gerais nos procedimentos. A sugestão dessa atividade justifica-se pelo fato de reforçar o estudo da função exponencial, por ser uma maneira interessante de introduzir o estudo dos logaritmos e por intensificar os ensinamentos da atividade do capítulo quatro, especialmente na interpretação e aplicação dos modelos obtidos.

Enfim, no último capítulo, apresentamos breves observações sobre as propostas de atividades sugeridas e refletimos acerca do papel integrador da Modelagem Matemática entre a pesquisa e o ensino, além de discutir como ela pode ser uma possibilidade de consolidar conceitos e conteúdos matemáticos por meio de problemas reais relacionados aos alunos.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 Um pouco de Modelagem Matemática ao longo da História

Pensar na Modelagem Matemática como algo incipiente é, de fato, incorreto e incoerente. São comuns situações, ilustradas em livros e artigos sobre a História da Matemática, que nos remetem a inúmeros problemas reais, cujas soluções exigem o uso de procedimentos e ferramentas matemáticas. Existem relatos de situações cotidianas, desde tempos remotos, em que claramente se identifica um problema e sugere-se uma abordagem matemática para solucioná-lo.

No século V a.C., por exemplo, os egípcios, segundo o grego Heródoto, usavam conceitos de geometria plana para que, após as enchentes do rio Nilo, os agrimensores determinassem a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara.(SILVEIRA; FERREIRA; SILVA, 2013, p.2876).

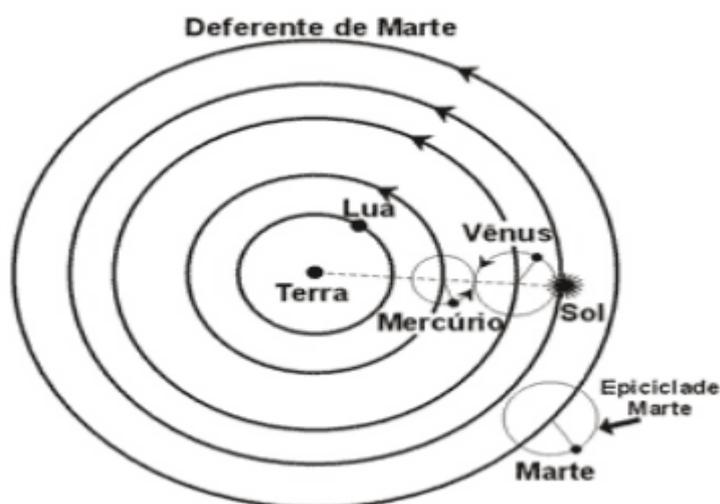
Segundo Silveira, Pereira e Andrade (2013, p. 2876), muitos são os pesquisadores que associam a evolução da Modelagem Matemática à própria História da Matemática. Nessa perspectiva, Biembengut e Hein afirmam que “a modelagem é tão antiga quanto a própria matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos”(Biembengut; Hein, 2003, p. 8). Para endossar essa afirmação, os autores Silveira, Pereira e Andrade (2013, p. 2876-2878) apresentam três episódios da História da Matemática nos quais se identifica com facilidade a utilização da Modelagem Matemática como ferramenta para resolver uma situação-problema.

(I) Arquimedes e a coroa do rei Hieron: nesse episódio, segundo o engenheiro e arquiteto romano Marcus Vitruvius (século I a.C.), Arquimedes, para atender ao desejo do rei Hieron de colocar no templo uma coroa de ouro como oferta aos deuses, solucionou um erro do ourives que misturou ouro e prata na confecção da coroa, utilizando um modelo matemático.

(II) O modelo planetário de Cláudio Ptolomeu: o modelo geocêntrico do sistema planetário, apresentado por Ptolomeu no século II d.C., é um exemplo de modelo matemático que prevaleceu na astronomia por quatorze séculos, até ser refutado por Nicolau Copérnico (1473-1543) e seus sucessores.

A Figura 2.1 a seguir ilustra o modelo planetário de Cláudio Ptolomeu.

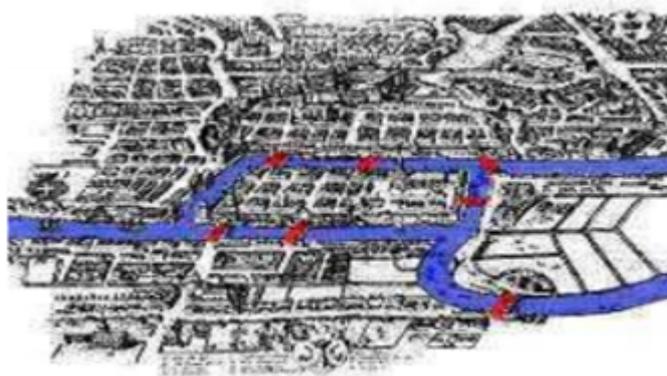
Figura 2.1: Sistema Planetário de Ptolomeu.



Fonte: SILVEIRA; PEREIRA; ANDRADE (2013, p. 2877).

(III) Euler e as Pontes de Königsberg: em Königsberg, na Prússia (atualmente Kaliningrado, na Rússia), os habitantes, durante seus passeios pelas ruas, tentavam atravessar as sete pontes que ligavam o Rio Pregel à cidade.

Figura 2.2: O esquema de pontes da cidade de Königsberg no século XVIII.

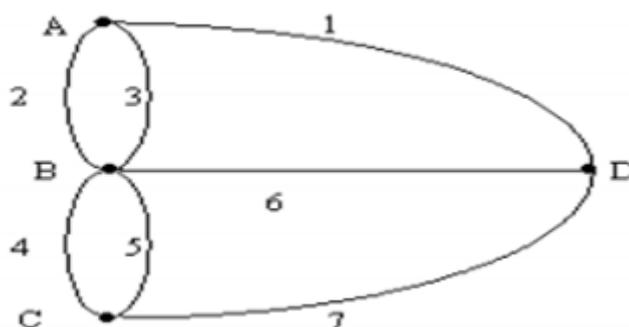


Fonte: SILVEIRA; PEREIRA; ANDRADE (2013, p. 2878).

Um enigma local perguntava se era possível fazer um passeio em Königsberg, partindo de qualquer região, de modo que cada ponte fosse atravessada uma vez e somente uma vez até o retorno ao ponto de partida. Leonhard Euler (1707-1783) foi o grande

matemático que resolveu esse enigma em 1736, apresentando a solução à Academia de Ciências Russa de São Petersburgo com rigor matemático. Usando definições, postulados e teoremas, Euler demonstrou que tal passeio era impossível e, com isso, lançou as bases da Teoria dos Grafos, um campo da matemática dedicado ao estudo das relações entre elementos em um conjunto específico.

Figura 2.3: O Modelo Matemático das pontes de Königsberg.



Fonte: SILVEIRA; PEREIRA; ANDRADE (2013, p. 2878).

Nos exemplos supramencionados, percebe-se facilmente que a modelagem matemática tem como objetivo central matematizar uma situação ou um problema proposto, criando um modelo que, em alguns casos, aparentemente não é matemático. Contudo, acreditar que o matemático busca, de maneira científica, representar o problema apenas por meio de uma linguagem e expressões matemáticas é uma visão ingênua da realidade, que contraria o “uso” da matemática no processo.

O objetivo fundamental do “uso” de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI, 2002, p.18).

Assim como Euler fez com o Problema das Pontes de Königsberg ao modelar a situação-problema e generalizá-la, dando início à Teoria dos Grafos, qualquer processo de modelagem matemática de cunho científico deve vir acompanhado de análises e de um conjunto de tentativas no sentido de generalizar a situação-problema, levantar os procedimentos e as estruturas matemáticas que, possivelmente, estão inseridos na concepção e resolução do problema.

Nesse cenário, a Modelagem Matemática se revela como uma ferramenta vigorosa em todas as ciências, cujo caráter interdisciplinar relaciona a matemática com outras áreas do conhecimento humano, atendendo às tendências pedagógicas atuais e às novas reformas curriculares para o Ensino da Matemática. Esse caráter interdisciplinar e contextualizado da Modelagem Matemática está inserido na corrente de pensamento denominada estruturalismo e integra um conjunto de fatores que contribuiu para o surgimento da Matemática Aplicada. A Matemática Aplicada não é “uma matemática inferior, em que os problemas são abordados com técnicas modestas ou métodos computacionais que desvalorizam esta ciência”(Bassanezi, 2002, p. 15). Ao contrário, Bassanezi (2002) acredita que a Matemática Aplicada, com seus estímulos e interesses oriundos do “mundo real”, é o caminho para que o indivíduo passe a gostar mais de Matemática. Nesse sentido, Silveira, Pereira e Andrade (2013) afirmam que, na Matemática Aplicada

os matemáticos emprestam sua capacidade de generalização para a criação de modelos que possam explicar fenômenos aparentemente não matemáticos. Assim, uma vez que as estruturas são identificadas, destacamos as vantagens do uso de modelos sustentados por alguma teoria matemática: informações novas sobre a situação problema; previsões e projeções; estratégias; economia, já que situações diferentes podem admitir um mesmo modelo.(SILVEIRA; FERREIRA; SILVA, 2013, p.2879)

Como se pode perceber, o ideário da Modelagem Matemática se manifesta em diversos momentos da História da Matemática. No entanto, segundo Silveira, Pereira e Andrade (2013, p. 2879), “a expressão, em seu conceito moderno, surgiu durante o Renascimento, especialmente após Galileu Galilei (1564-1642) criar o novo método científico, combinando experimentação e teorização matemática”. Nesse contexto, para reforçar a ideia de que a compreensão da concepção moderna da Modelagem Matemática surgiu nesse período, é pertinente reproduzir a observação de Maria Ângela Miorim em seu livro Introdução à “História da Educação Matemática”.

Com o início da ciência moderna, que combinou pela primeira vez os métodos experimental e indutivo com a dedução matemática, ou seja, que rompeu a barreira existente entre a tradição artesanal e a culta, entre a razão e a experiência, que teria em Galileu Galilei (1564- 1642) e em Isaac Newton (1642-1727) seus principais representantes, **as matemáticas passaram a desempenhar um novo e importante papel: o de ferramenta necessária à explicação dos fenômenos.**(MIORIM, 1998, p.41-grifo nosso).

Então, o marco inicial do processo de Modelagem Matemática é a Idade Moderna, embora possamos identificá-lo de forma rudimentar nos períodos anteriores, quando o homem, movido por sua capacidade de pensar, questionar e criar, utilizava-se de processos

investigativos e de procedimentos matemáticos para modelar o seu meio, buscando conhecê-lo melhor e explorá-lo de forma mais eficiente. É importante compreender que a Modelagem Matemática é um processo essencial na construção da Matemática, pois

na tentativa de representar fatos e fenômenos observados na realidade, por meio de símbolos e relações que pudessem ser socialmente compartilhados, a humanidade foi, aos poucos, criando seus modelos matemáticos, ao mesmo tempo em que, forçava o desenvolvimento da Matemática.(CHAVES; SANTO, 2008, p.154).

Nessa perspectiva, ao estudar a linha do tempo da evolução da Matemática desde a antiguidade até os dias atuais, é impossível não identificar a presença da Modelagem Matemática na proposição de problemas e suas soluções, contribuindo para a afirmação do método científico e para o desenvolvimento da Matemática como uma ciência capaz de apresentar soluções para diversas situações, sejam elas de ordem prática ou científica.

Um conceito ou ideia intrinsecamente associado à Modelagem Matemática, utilizado para apresentar soluções de problemas tanto no campo prático quanto científico, é a ideia de Modelo Matemático, que, de acordo com (FILHO, 2008, p.15), “vem sendo amplamente usada por engenheiros, físicos, estatísticos e economistas desde a década de 1940, pelo menos”. Assim, no século XX, conforme apontado por Silveira, Pereira e Andrade (2013), verifica-se “um crescente interesse dos matemáticos profissionais na Matemática Aplicada, e os modelos ganharam mais precisão e confiabilidade, tornando-se essenciais nas estruturas das ciências ditas não exatas”.

Neste cenário, em que é necessário expressar uma teoria científica por meio de uma linguagem matemática para buscar o seu reconhecimento, a Modelagem Matemática se apresentou e se consolidou como uma concepção na evolução substancial da própria Matemática, a fim de atender às demandas das diversas áreas de pesquisa. Nesse contexto, Bassanezi afirma que

pode-se dizer que as ciências naturais como Física, a Astrofísica e a Química já estejam hoje amplamente matematizadas em seus aspectos teóricos. As ciências biológicas, apoiadas inicialmente nos paradigmas da Física e nas analogias consequentes foram ficando cada vez mais matematizadas. Nesta área a matemática tem servido de base para modelar, por exemplo, os mecanismos que controlam a dinâmica de populações, a epidemiologia, a ecologia, a neurologia, a genética e os processos fisiológicos.(BASSANEZI, 2002, p.19).

Segundo Bassanezi (2002), “o advento dos computadores digitais favoreceu o desenvolvimento e a aplicação da matemática em quase todos os campos do conhecimento”, o que tem embasado estratégias de ação nos meios comerciais, políticos e

econômicos, utilizando a Modelagem Matemática como proposta importante nesses processos estratégicos.

Dessa forma, cientes de que vivemos em um mundo dinâmico, onde as informações circulam instantaneamente e a Matemática é utilizada como método científico para desenvolver e ampliar as pesquisas em diversas áreas do conhecimento, inclusive nas Ciências Sociais, é justificável conceber a Modelagem Matemática e seus processos como uma estratégia no processo de ensino-aprendizagem. Além de colaborar na assimilação dos conteúdos da própria Matemática, ela proporcionará a formação ampla dos estudantes, desenvolvendo o senso crítico, a consciência cidadã e promovendo a condução de atividades em sala de aula em um ambiente construtivista e livre de amarras.

2.2 A Modelagem Matemática nas Salas de Aulas Brasileiras: Quatro Concepções e Várias Possibilidades

Segundo Biembengut (2009), o debate sobre modelagem e suas aplicações na Educação Matemática no cenário internacional iniciou-se na década de 1960, com um movimento chamado 'utilitarista', que foi estabelecido como sendo a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade. Esse movimento impulsionou a formação de grupos e encontros de pesquisadores sobre modelagem, com destaque para o Lausanne Symposium, em 1968, na Suíça, cujo tema foi

como ensinar matemática de modo que seja útil, com situações do cotidiano do estudante e não aplicações 'padronizadas', mas que favorecessem a habilidade para matematizar e modelar problemas e situações da realidade. (BIEMBENGUT, 2009, p.8).

Esse simpósio, juntamente com outros dois realizados com o mesmo intuito na Holanda e na Dinamarca, culminou na realização do Congresso de Roskilde (Dinamarca) em 1978, sobre o tema "Matemática e Realidade", que

contribuiu para a consolidação, em 1983, do Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações – ICTMA – filiado ao ICMI, que além de fazer parte dos grupos do International Congress Mathematics Education – ICME, tem realizado bi-anualmente o evento internacional conforme D'Ambrosio [...]. (BIEMBENGUT, 2009, p.8).

Simultaneamente a esses movimentos educacionais, segundo Biembengut (2009), influenciaram a aplicação da modelagem matemática na Educação Matemática Brasileira e teve como principais referências e impulsionadores, pelos eventos e ações realizadas no

final dos anos 1970 e início dos anos 1980, os professores e pesquisadores: Aristides Carmagos Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Carlos Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani. Nesse sentido, Biembengut (2009) afirma que

graças a esses precursores, discussões desde como se faz um modelo matemático e como se ensina matemática ao mesmo tempo permitiram emergir a linha de pesquisa de modelagem matemática no ensino brasileiro. (BIEMBENGUT, 2009, p.8).

Neste período, a forma imparcial com que o processo de modelagem promove a matemática e as diversas formas de construção da ciência, ao apresentar uma situação-problema como estratégia para inserir conteúdos em sala de aula, alinhou-se ao ideário socioconstrutivista da época. Foi a partir daí que se iniciou a utilização da Modelagem Matemática como ferramenta de ensino-aprendizagem no contexto da Educação Matemática no Brasil, o que gerou o surgimento de diversos procedimentos e concepções, revelando quatro tendências de Modelagem Matemática no ensino. Que, sob o ponto de vista de Silveira, Pereira e Andrade (2013, p. 2876), são:

- I. Aspectos teóricos da Modelagem Matemática: em um primeiro momento, os artigos apresentam uma preocupação com o aprofundamento teórico que contribua para a aplicação da Modelagem Matemática.
- II. Modelagem e prática de sala de aula: aqui, são apresentadas as pesquisas de campo tanto no Ensino Básico quanto no Ensino Superior. É o momento em que as estratégias são testadas.
- III. Modelagem Matemática e as tendências da informação e da comunicação: nessa tendência, os artigos defendem o uso da Modelagem Matemática por meio dos ambientes virtuais de aprendizagem.
- IV. Modelagem Matemática e formação de professores: A Modelagem Matemática é apresentada aqui como uma estratégia de ensino tanto para o educador quanto para o educando.

Nessa direção, com o objetivo de apresentar aos professores e especialistas da área interessados em trabalhar com a modelagem em sala de aula, apresentaremos tendências e concepções distintas acerca da Modelagem Matemática e suas aplicações no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, com base no trabalho de quatro autores que desenvolveram estudos reconhecidos sobre Modelagem Matemática: Ademir Donizeti Caldeira, Maria Salett Biembengut, Jonei Cerqueira Barbosa e Dionísio Burak.

Na compreensão de Caldeira, a modelagem é pensada como advinda de projetos, sem a preocupação de produzir os conteúdos colocados no currículo, mas sem perder os conceitos universais da matemática. Ao democratizar e flexibilizar os conteúdos curriculares, resguardando a essencialidade conceitual da matemática, na aplicação da modelagem, pode-se “oferecer aos professores e alunos um sistema de aprendizagem como uma nova forma de entendimento das questões educacionais da Matemática”(CALDEIRA, 2005, p.3). Portanto, para o autor, a Modelagem Matemática nos remete a um processo dinâmico da realidade, contrariando a estagnação predominante dos currículos escolares atuais e assim

o conteúdo deixa de ser totalmente previsível dependendo da direção tomada pelos alunos na solução de problemas propostos e da capacidade do professor em direcionar a discussão. Portanto é flexível e poderá não seguir rigorosamente a ordem em que aparece nos livros-textos, como também pode aparecer algum conteúdo não programado para a série em que o professor estiver trabalhando.(CALDEIRA, 2004, p.4).

Assim, Caldeira compreende que o conhecimento matemático é 'vivo', dinâmico e que a Modelagem Matemática não se restringe a um método para comprovar a visão absolutista sobre a matemática imposta pelo currículo escolar; ao contrário, deve ser um instrumento para que possamos buscar significado nas particularidades, problemas e hábitos de uma cultura, e não apenas uma justificativa para uma matemática pronta e acabada.

Nessa visão do autor, a utilização da Modelagem Matemática em sala de aula pode gerar uma certa insegurança no processo de ensino e aprendizagem, devido ao hábito de aplicar práticas tradicionais, que cristalizam uma zona de conforto e visam à aceitação da realidade imposta pelo currículo escolar, já que

a modelagem exige outra conduta, o professor não trabalha com resultados previsíveis, os temas podem ser abertos, as questões podem estar relacionadas com fatores econômicos, culturais, sociais, etc.; o professor está sempre numa zona de risco e de busca.(CEOLIM; CALDEIRA, 2014, p.7).

Uma vez que Cambi e Caldeira (2023) expõem que, na Modelagem Matemática, o aluno assume um papel de protagonismo, propondo temas e problemas da realidade como possibilidades de discussão e estudo em sala de aula e em pesquisas de campo. E nesse sentido “[...] ao dirigir sua aprendizagem, o aluno é colocado no controle do processo de ensino, estimulado por atividades que têm como base a sua interação com o meio, com o professor e com os demais alunos”(CAMBI; CALDEIRA, 2023, p.16).

Diante disso, Cambi e Caldeira (2023) destacam que, na Modelagem Matemática, o papel do professor deve ser composto pelos atributos colaborativos, de mediação e orientação, sempre visando criar condições que propiciem circunstâncias que permitam aos alunos desenvolverem integralmente suas competências e habilidades, respeitando as etapas do desenvolvimento cognitivo de cada um.

Por tudo o que foi exposto, Caldeira evidencia que a Modelagem extrapola a ideia de um método ou metodologia estática, que visaria apenas reproduzir um conjunto de procedimentos estabelecidos dentro de um padrão. Antagonicamente, ela produziria um processo extremamente dinâmico e democrático, construído a partir de práticas que estimulem o caráter de liberdade e autonomia, conduzido por um espírito crítico e investigativo, estabelecendo, com isso, a sua concepção de Modelagem Matemática.

Ainda se ressalta que a Modelagem Matemática, pela sua dinamicidade, é um processo criativo que garante formas diferentes de conceber a matemática e “permite ao estudante criar, [...] inventar algoritmos de resolução ou criar algum procedimento matemático, oriundo de sua vida fora da escola, para resolver determinadas situações” (CALDEIRA, 2009, p.46). E enfatiza que essa concepção de ensino se fundamenta epistemologicamente nas práticas cotidianas dos agentes envolvidos, considerando sempre fatos e acontecimentos da realidade.

Nessa mesma direção, Biembengut classifica a Modelagem Matemática como um conjunto de procedimentos que busca “[...] traduzir a linguagem do mundo real para o mundo matemático”(BIEMBENGUT, 1990, p.10). A autora, influenciada por Bassanezi, seu orientador no mestrado, tem como ponto de partida nesse processo a Matemática Aplicada. Nesse viés, ela concebe a Modelagem Matemática como uma metodologia que visa encontrar um modelo matemático que, para Biembengut e Hein (2016), deve ser uma representação abstrata e simplificada da situação real, mas que ainda capture os principais aspectos do fenômeno em estudo. Em consonância, Biembengut (2012) ressalta que

Modelagem é um conjunto de procedimentos requeridos na feitura de um modelo, e, modelo é um conjunto de símbolos que interagem entre si representando alguma coisa. Esta representação pode se dar por meio de um desenho ou imagem, um projeto, um esquema, um gráfico, uma lei matemática, dentre outras formas. A noção de modelo se faz presente em todas as áreas.(BIEMBENGUT, 2012, p.30).

Na matemática, a autora exemplifica que “um modelo é um conjunto de símbolos

e relações matemáticas que traduzem, de alguma forma, um fenômeno em questão” (BIEMBENGUT, 2004, p.20). Ou seja, esse o modelo deve ter a capacidade de expressar as interpretações da realidade, o objetivo da sua aplicação e a ilustração do problema em estudo.

Ainda sob a influência dos estudos de Bassanezi, seguindo o viés da Matemática Aplicada, a autora enfatiza que os procedimentos usados em um modelo “perpassam pela observação cuidadosa da situação ou fenômeno a ser modelado, pela interpretação da experiência realizada, pela captação do significado do que produz”(BIEMBENGUT, 2012, p.30).

Nesse diapasão, Biembengut (2012) destaca que a Modelagem Matemática é um processo composto por procedimentos, análogos aos utilizados em pesquisas científicas, empregados com o objetivo de traduzir um problema do mundo real em um modelo matemático que pode ser analisado e resolvido. Esses procedimentos são essencialmente: (1º) reconhecimento da situação-problema, (2º) familiarização com o assunto a ser modelado, (3º) formulação do problema, (4º) formulação de um modelo, (5º) resolução do problema a partir do modelo e (6º) validação do modelo.

A autora ressalta que, apesar de a Modelagem percorrer o caminho da investigação científica, ela não é um esquema utilizado exclusivamente pelos cientistas e, frequentemente, no dia a dia, em muitas situações, é “evocado”o processo de modelagem para auxiliar na resolução de empecilhos encontrados.

Para percorrer os seis procedimentos elencados no processo de modelagem, a autora aponta que os agentes envolvidos no estudo da situação-problema devem ter uma capacidade artística, pois, de certa forma, esse processo

pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador, precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis(BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p.12).

Nessa perspectiva, segundo Biembengut, para se obter o modelo, é necessário concluir o processo de Modelagem Matemática, que é composto pelos procedimentos supracitados, que a autora agrupou em três etapas:

1) **interação** – reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto a

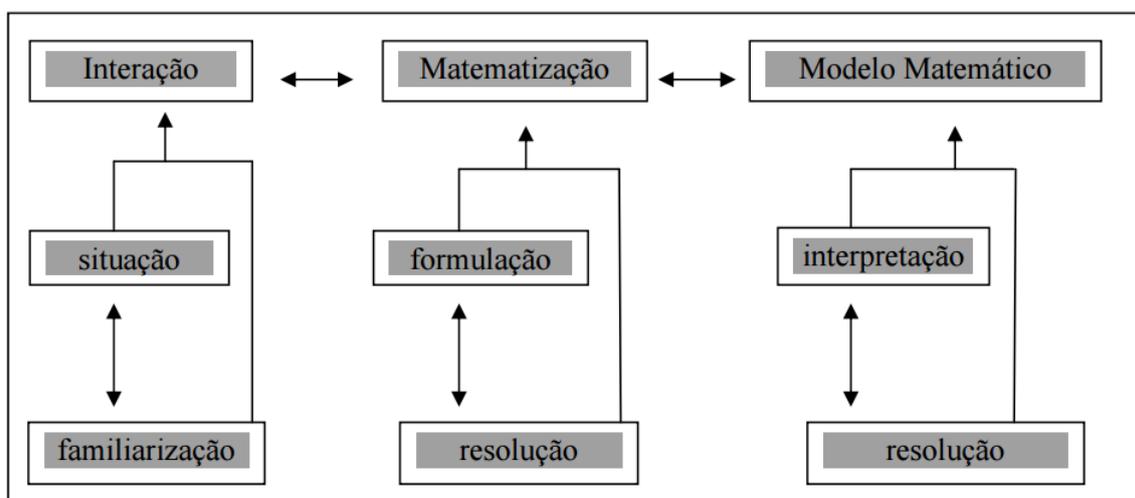
ser modelado: nesta etapa, os estudantes, seja por meio de pesquisas em livros, jornais, revistas, sites oficiais, dados coletados com estudiosos e especialistas da área de estudo, ou por meio de informações e dados obtidos via pesquisa de campo, devem delimitar a situação-problema a ser discutida;

2) **matematização** – formulação e resolução do problema matematicamente: esta etapa, segundo Biembengut e Hein (2000), é revestida de desafios, tornando-se extremamente complexa, o que vai requerer a capacidade de intuir e criar dos alunos, pois é o momento de formulação do problema e eles usarão os seus conhecimentos e conceitos matemáticos já adquiridos, bem como os que vão alcançar no processo, para traduzir a situação-problema em uma linguagem matemática. Esta etapa do processo de modelagem tem como principal objetivo a obtenção de uma coleção de expressões aritméticas, podendo ser equações algébricas, fórmulas, gráficos ou mesmo programas e aplicativos computacionais que conduzem a uma solução ou proporcionam inferir uma solução. Por fim, resta resolver a situação-problema formulada por meio dos recursos matemáticos usados na formulação;

3) **Modelo Matemático** – interpretação do resultado e validação do modelo: esta é a etapa de questionar e validar o modelo obtido na solução da situação-problema, é quando se certifica se o mesmo é aplicável ou não. Neste momento, se o modelo não satisfaz a hipótese levantada, é necessário estudar os procedimentos realizados na matematização para ajustar ou até mesmo construir outro modelo, ou seja, “se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa – matematização – mudando-se ou ajustando hipóteses, variáveis, etc”. (BIEMBENGUT e HEIN, 2000, p. 15).

A ilustração a seguir retrata a disposição das três etapas mencionadas conforme Biembengut e Hein (2007).

Figura 2.4: Esquema do processo de Modelagem Matemática segundo Biembengut e Hein.



Fonte: Biembengut e Hein (2000, p. 15).

A partir do que foi exposto, infere-se que Biembengut compreende a Modelagem Matemática como um processo cíclico, no qual a matemática pode ser aplicada para solucionar problemas reais e, assim, facilitar uma transformação bidirecional entre o mundo matemático e o mundo real.

Além disso, segundo Biembengut e Hein (2000), na concepção da autora, a Modelagem Matemática estimula a colaboração e o trabalho em equipe, à medida que os alunos se envolvem em atividades que requerem discussões, análises e tomada de decisões conjuntas. Isso reflete a natureza interdisciplinar e colaborativa da modelagem matemática, que frequentemente exige a aplicação de conhecimentos de várias disciplinas para resolver diversas situações-problemas.

Na revisão bibliográfica dos estudos de Burak, extrai-se de sua tese defendida em 1992 que a Modelagem Matemática é entendida como um "conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões" (BURAK, 1992, p.62). Já, segundo Klüber e Burak (2008), na fase de seu mestrado, em 1987, Burak propõe o trabalho em termos de construção de modelo, inferido que as "variáveis devem ser relacionadas para melhor exprimir o problema a ser estudado;

esta é a construção do modelo”(KLÜBER; BURAK, 2008, p.19).

Então, depreende-se dos apontamentos de Klüber e Burak (2008) que, em 1987, quando a normatização da educação matemática por meio da modelagem estava na fase embrionária, Burak priorizou a construção de modelos pela perspectiva da matemática aplicada, referencial teórico predominante naquele momento. Nesse sentido, o ideário de modelagem do autor, em 1987, ano da defesa de sua dissertação de mestrado

conservava ideias fixas, como a obrigatoriedade da construção de modelos e as etapas propostas nos mesmos moldes da ciência moderna, de cunho positivista, que priorizava o método em relação aos objetos. Portanto, as atividades de modelagem eram pré-definidas pelo pesquisador (KLÜBER; BURAK, 2008, p.20).

Contudo, apesar de a modelagem matemática inicialmente restringir ao processo utilizado pelos pesquisadores das ciências naturais na transferência da modelagem, o que distanciava das ciências humanas, como é asseverado por Klüber e Burak (2008), destaca-se que

um mérito do trabalho de Burak era a preocupação em considerar a Modelagem como um conjunto de procedimentos que não fosse apenas técnico, mas que ocorresse de uma forma mais aberta e contextualizada, dando significado aos conteúdos matemáticos (KLÜBER; BURAK, 2008, p.20).

Nesse ponto, percebe-se a inquietação e a inconformidade do autor quanto às formas e às práticas iniciais de utilização da modelagem na educação matemática brasileira. Assim, já em sua tese de doutorado, de 1992, ele acrescenta como necessários, fundamentais e básicos, em seu entendimento de Modelagem Matemática, dois princípios: 1) o interesse do grupo e 2) a obtenção de informações e dados do ambiente em que se encontra o interesse do grupo. A inclusão desses princípios nos procedimentos de modelagem, especialmente do segundo, fez emergir, na concepção de Burak, “maiores influências das ciências humanas e do próprio método etnográfico, que se distancia da epistemologia da matemática aplicada, procurando levar em conta os sujeitos, o ambiente social, cultural e outras variáveis”(KLUBER; BURAK, 2008, p. 20).

Certamente, em virtude das suas pesquisas sobre modelagem matemática na área educacional durante o doutorado, Burak passou a direcionar seus encaminhamentos pela perspectiva da etnografia, com ênfase na participação ativa, interação e

interesse dos participantes da atividade e o envolvimento dos grupos em busca de dados do ambiente e argumenta que esses procedimentos são capazes de dar significado, bem como desenvolver a autonomia dos participantes, de forma a torna-los agentes do processo de construção do conhecimento matemático (KLUBER; BURAK, 2008, p. 20).

Nesse mesmo sentido, em seu artigo intitulado “Modelagem em Sala de Aula”, Burak (2004) frisa que, na Modelagem Matemática, diferentemente do habitual, o processo de ensino não é iniciado pelo professor, mas sim compartilhado com o grupo de alunos, uma vez que a motivação pelo processo é fruto do interesse pelo assunto em estudo. Ressalta também que

para a aprendizagem, o procedimento gerado a partir do interesse do grupo ou dos grupos, parece resultar em ganho, pois o grupo ou os grupos de alunos trabalham com aquilo que gostam, aquilo que para eles apresenta significado, por isso tornam-se corresponsáveis pela aprendizagem (BURAK, 2004, p.2).

No mesmo artigo mencionado, bem como em outro publicado em 1998, Burak estabelece que, para desenvolver uma atividade ou trabalho com Modelagem Matemática em sala de aula, são necessárias cinco etapas: 1) escolha do tema; 2) pesquisa exploratória; 3) levantamento de problemas; 4) resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema; e 5) análise crítica das soluções.

Nesse contexto de reflexões acerca do uso da modelagem no ensino, BURAK (2004) estabelece, como ponto de partida, a escolha do tema que deve ser proposto pelo grupo de alunos, de modo que o ensino de Matemática valorize a dinamicidade, tornando-se mais vivo e constituído de significância para os mesmos, facilitando a construção do conhecimento dos grupos acerca dos conteúdos a serem estudados e da compreensão das relações matemáticas necessárias, dando significado ao contexto.

Quanto ao professor, atribui-se a ele o papel de mediador entre o conhecimento desenvolvido e o conhecimento de cada aluno e dos grupos. Ele deve garantir um debate democrático durante o processo de escolha do tema, criando um ambiente de ação que envolva cada aluno, buscando sempre a construção e socialização do conhecimento dentro de todos os grupos.

Determinado o tema, passa-se para a segunda etapa: a pesquisa exploratória, que é realizada por meio de pesquisas de campo. Estas pesquisas irão determinar os conteúdos matemáticos a serem trabalhados, conforme os problemas identificados. Diferentemente do ensino tradicional, no qual o conteúdo definido no programa curricular impõe os problemas a serem abordados.

Após a coleta de dados, informações e o conhecimento sobre as várias dimensões

ou aspectos que constituem a realidade dos estudantes, levantadas na pesquisa de campo, passa-se para a terceira etapa: o levantamento de problemas. Nesta fase, as experiências de campo, com seus elementos descritivos, qualitativos e quantitativos, instigam os grupos de alunos - sempre sob a supervisão do professor - a definirem possíveis conceitos e conteúdos matemáticos que poderão ser ensinados para responder ou solucionar as questões suscitadas nos trabalhos de campo.

Em sequência, inicia-se a quarta etapa, que é a resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema. É quando os conceitos e conteúdos matemáticos utilizados para responder ou solucionar as questões e problemas levantados no contexto da escolha do tema ganham sentido para os estudantes. É o momento de oportunizar aos grupos de alunos a elaboração dos modelos matemáticos que resultarão na formação do pensamento matemático e proporcionarão a eles soluções para os problemas levantados.

A última etapa, análise crítica das soluções, é quando se busca validar o modelo matemático elaborado, verificando sua aplicabilidade no contexto considerado. Pode-se, inclusive, devido a hipóteses novas levantadas nesse momento, em virtude da obtenção de soluções estranhas ao contexto do problema, suscitar a necessidade de construir outro modelo.

Pelo percurso exposto, pode-se concluir que Burak (2004) compreende a modelagem como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática na Educação Básica, baseada na interação entre os estudantes e o seu meio ambiente. Iniciada a partir do interesse destes, essa abordagem pode facilitar o alcance dos objetivos do processo de ensino-aprendizagem, criando nos discentes um ambiente propício para atitudes positivas em relação à Matemática.

Dentro do escopo do ambiente de aprendizagem, Barbosa (2001) entende que as atividades desenvolvidas com Modelagem oportunizam aos alunos, utilizando procedimentos flexíveis e sem caráter impositivo, a possibilidade de questionar, por meio da matemática, situações cujos conceitos e ideias matemáticas abordadas são produtos do encaminhamento tomado pelos alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades, o que pode, inclusive, resultar na obtenção do modelo matemático. Nesse sentido, o autor

formula, de forma sintética, que “modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001, p.6).

Sob o ideário da corrente sócio - crítica, a concepção de Barbosa sobre os procedimentos desenvolvidos nas atividades de Modelagem na educação matemática leva a explorar o posicionamento da matemática na sociedade contemporânea. Nesse aspecto, ele ressalta que

nem matemática nem Modelagem são “fins”, mas sim “meios” para questionar a realidade vivida. Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a matemática no mundo social, mas que a Modelagem possui potencial de gerar algum nível de crítica. É pertinente sublinhar que necessariamente os alunos não transitam para dimensão do conhecimento reflexivo, de modo que o professor possui grande responsabilidade para tal (BARBOSA, 2001, p. 4).

Nessa perspectiva de concepção “aberta” de modelagem proposta por Barbosa, o professor não impõe barreiras à capacidade criativa e crítica do aluno, contribuindo para o seu interesse e participação ativa no processo de ensino-aprendizagem, além de criar elementos capazes de romper com a linearidade do currículo. Isso ocorre porque a forma como é apresentada não se limita nem aos conteúdos programáticos, nem ao objetivo específico da construção de modelos.

Assim, esse caráter flexível e democrático da Modelagem Matemática, de Barbosa, que busca significado e contexto para o estudo da matemática no processo de ensino, onde o professor é um “co-participante”, impõe uma configuração curricular que pode ser visualizada em três casos para a organização curricular da Modelagem, segundo o autor:

Caso 1. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução. [...]

Caso 2. O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações à sua resolução. [...]

Caso 3. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problemas. [...] (BARBOSA, 2001, p. 9).

Nesse contexto de reflexões, pressupõe-se, conforme os apontamentos de Barbosa (2001), que a modelagem é uma atividade na qual os alunos discutem e abordam conceitos e conteúdos matemáticos de forma contextualizada e reflexiva, utilizando problemas cotidianos e reais, distantes de configurações estanques e nunca restritos a uma área específica. Os professores devem estar abertos a práticas pedagógicas inovadoras que

afastem os alunos da frieza da letra do programa escolar e da busca restrita por modelos matemáticos, conduzindo-os pelas necessidades surgidas durante as atividades desenvolvidas.

Nas interpretações e concepções dos autores apresentadas nesta seção sobre Modelagem Matemática, podemos observar algumas diferenças, seja no embasamento teórico utilizado, nos encaminhamentos e procedimentos dos trabalhos realizados em sala de aula, ou até mesmo na abordagem dos conceitos e conteúdos matemáticos estudados. Entretanto, nas quatro concepções, constata-se a necessidade de contextualização e de integração da matemática com outras áreas do conhecimento, a fim de que a Modelagem Matemática, enquanto alternativa e estratégia de ensino escolar, seja introduzida e produza resultados satisfatórios no processo de aprendizagem.

3 A MODELAGEM MATEMÁTICA E A TEORIA SOBRE AJUSTE DE CURVAS.

Em um estudo minucioso das concepções de Modelagem Matemática abordadas no capítulo anterior e das diversas aplicações dessa metodologia de ensino na Educação Básica, especialmente no Ensino Médio, observa-se, em muitos relatos, que

a maior dificuldade que notamos para a adoção do processo de modelagem, pela maioria dos professores de matemática, é a transposição da barreira naturalmente criada pelo ensino tradicional onde o objeto de estudo apresenta-se quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência de pré-requisitos e que vislumbra um horizonte claro de chegada – tal horizonte é muitas vezes o cumprimento do programa da disciplina. (BASSANEZI, 2002, p.43).

Nesse contexto, ao iniciar um processo de modelagem, o educador deve ter consciência de que, inicialmente, o tema de estudo proposto, em um cenário ideal, pelos alunos pode levar ao surgimento de diversos conteúdos matemáticos para responder ao fenômeno ou ao problema em análise. O educador deve orientar os alunos a começar, inicialmente, contando ou medindo, o que geralmente gera como produto uma tabela de dados, que pode ser o ponto de partida para a modelagem.

Desde que a modelagem matemática é um recurso que auxilia na reprodução e compreensão de problemas do mundo real, oriundos, em alguns casos, de outras áreas do conhecimento, e que, essencialmente, no início do processo, quase sempre surge uma tabela de dados, a disposição desses dados em um sistema cartesiano e o ajuste conveniente de seus valores por meio de uma curva facilitam interpretações e a obtenção de uma lei de formação. Isso permite aos estudantes observar comportamentos e apresentar soluções para variados problemas por meio de processos criativos e intuitivos, que requerem ferramentas matemáticas e tecnológicas. Nesse cenário, apresentamos, dentro da Modelagem Matemática, o ajuste de curvas como uma ótima alternativa a ser implementada no Ensino Médio.

Acrescenta-se como justificativa para o uso dessa proposta o fato de que, nas atividades de modelagem por meio do ajuste de curvas, os estudantes utilizam conceitos, procedimentos e estratégias, inclusive recursos computacionais, não apenas na resolução de problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, construir e avaliar modelos matemáticos, identificar padrões e fazer previsões por meio de diferentes conceitos e propriedades matemáticas. Isso cria um ambiente propício para que os estudantes te-

tenham uma visão mais integrada da Matemática com outras áreas do conhecimento e de sua aplicação à realidade.

Ainda como sustentação da regressão ou ajuste de curvas, como uma alternativa importante no arsenal de possibilidades de utilização da Modelagem Matemática, vale citar a competência específica 3 da BNCC e duas de suas habilidades cobradas dos alunos para o ensino da Matemática e suas Tecnologias:

Competência específica 3: utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2017, p.535).

[...]

Habilidade EM13MAT301: Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Habilidade EM13MAT302: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.(BRASIL, 2017, p.536).

No decorrer deste trabalho, evidenciaremos como as atividades desenvolvidas no estudo e na aplicação do Ajuste de Curvas poderão favorecer o desenvolvimento, pelos alunos, não apenas dessas duas habilidades, mas também de outras relacionadas a diversos conceitos e conteúdos matemáticos constantes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

3.1 Regressão ou Ajuste de Curvas.

No século XIX, o antropólogo, meteorologista, matemático e estatístico inglês Sir Francis Galton estudou a relação entre a altura de pais e filhos e, durante as suas observações, usou pela primeira vez o termo “regressão” quando percebeu um decréscimo nos valores das médias encontradas entre as duas gerações.

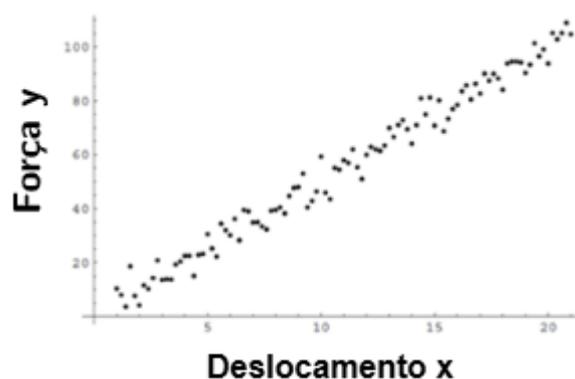
Essa tendência foi considerada pelo estudioso como uma regressão genética e, sem especificar os motivos, ele denominou esse fenômeno de “regression to mediocrity”(regressão à mediocridade). Contudo, formalmente, uma regressão ou ajuste de curvas é um artifício matemático utilizado para representar uma relação entre uma variável dependente y_i e ou-

tra independente x_i , produzindo uma relação do tipo $y_i = f(x_i)$, quando existe uma relação estatística entre elas. O ajuste de curvas é extremamente útil para verificar tendências entre essas variáveis ou, simplesmente, para apresentar os dados coletados de forma simplificada. Além disso, o ajuste de curvas é funcional, pois, além de descrever e apresentar as tendências dos dados numéricos coletados, uma curva de regressão $y = f(x)$ também pode ser utilizada para fazer previsões e identificar padrões sobre a variável y quando a variável x está fora do intervalo considerado durante a coleta.

Para compreendermos a definição formal de ajuste de curvas, que, em muitas situações, é oriunda de uma tabela de pontos (x_i, y_i) , onde cada y_i é obtido experimentalmente, e deseja-se obter a expressão analítica de uma dada curva que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos, vamos analisar um exemplo apresentado por (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2019, p.50).

Exemplo 4.1.1 - Uma força y de uma mola depende linearmente do deslocamento x da mola da forma $y = kx$, onde k é a constante da mola. Para testar essa proposta pela teoria, os pesquisadores vão para o laboratório para medir a força correspondente a vários deslocamentos. Assim, se reúnem dados e um formulário que contém valores a (x_i, y_i) correspondentes à $i = 1, 2, 3, \dots, n$ observando onde y_i é a força medida em newtons quando a mola é deslocada x_i centímetros.

Figura 3.1: 100 simulações do deslocamento da mola e a força correspondente para $k = 5$



Fonte: Adaptado de Bertone; Bassanezi; Jafelice (2019, p.50).

Na análise do gráfico que contém a disposição das 100 simulações, visualmente intuímos relacionar a figura com uma reta, como é sugerido pelo enunciado teórico do

modelo. Contudo, duas razões não corroboram essa impressão: a primeira deve-se ao erro experimental e a segunda é que o relacionamento teórico entre a força e o deslocamento não é linear, mas apenas “aproximadamente linear”. Assim, para compreender melhor o método de ajuste de curvas, é indispensável estudar e entender conceitos estatísticos abordados na educação básica.

3.2 Conceitos Estatísticos Importantes para compreensão do Método de Ajuste de Curvas.

Essa seção tem por objetivo fazer uma revisão sucinta de algumas definições e conceitos estatísticos imprescindíveis para que o aluno compreenda o Método de Ajuste de Curvas e adquira as ferramentas necessárias para aplicá-lo em um processo de modelagem matemática.

Definição 4.2.1 - Apresentada uma lista de dados x_1, \dots, x_n define-se como **valor esperado**, que denotamos por \bar{x} , à média desses números, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Para apresentarmos a próxima definição, observe o exemplo abaixo, em que é calculada a média aritmética dos valores dados.

Exemplo 4.2.1 - As listas $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4\}$ tem como valor esperado o mesmo número $\bar{x} = 4$. Vejamos:

Lista A:

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Lista B:

$$\bar{x} = \frac{4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Percebemos que o primeiro grupo apresenta uma variação maior em relação ao valor esperado do que o da segunda lista, o que nos direciona à próxima definição, que qualifica quanto o conjunto de dados se desvia do valor esperado.

Definição 4.2.2 - Apresentada uma lista de dados x_1, \dots, x_n cujo valor esperado é dado por \bar{x} , define-se como **variança** o número $\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, que é a medida de dispersão que mostra o quão distante cada valor da lista de dados está do valor esperado \bar{x} e **desvio padrão**, definido por $\sigma = \sqrt{\delta}$, é a medida de dispersão capaz de identificar o “erro” na lista de dados, caso seja necessário substituir um dos valores pelo valor esperado \bar{x} .

Apresentadas essas definições elementares provenientes da estatística, já podemos reformular o entendimento de como ajustar pontos de um conjunto de dados a uma curva. O método mais adequado para trabalhar no ensino médio é o Método dos Mínimos Quadrados, que apresentaremos adiante no ajuste linear simples. Esse método, além de exercitar os conceitos de estatística já mencionados, remete os alunos ao estudo de sistemas lineares, matrizes, equações matriciais, determinantes, funções polinomiais e exponenciais.

3.3 Tipos de Ajustes de Curvas

Inicialmente, para construir um programa de ajuste de curvas, é primordial optar pelo tipo de curva que expressará a relação funcional entre as variáveis do problema ou fenômeno em estudo, a fim de, posteriormente, obter os parâmetros dessa curva e garantir condições mínimas para que ela possa ser utilizada na identificação de padrões e na realização de previsões futuras sobre o relacionamento dessas variáveis.

Acontece que, em alguns casos, em virtude da própria natureza do fenômeno ou problema, a expressão matemática que representa a curva produzida no processo pode não ser um modelo satisfatório para estabelecer previsões futuras seguras, restringindo-se, nesse caso, a descrever um comportamento no intervalo considerado no estudo. Isso exige a necessidade de ajustar a situação por outro tipo de curva. Portanto, é importante que o aluno conheça e busque obter vários modelos matemáticos para um fenômeno ou problema real em análise.

3.3.1 Ajuste Linear Simples

Diversos problemas decorrentes de fenômenos naturais ou mesmo de atividades humanas podem ser modelados por meio de uma relação linear simples entre variáveis.

Vejamos o exemplo: o departamento de uma empresa elaborou uma tabela contendo os valores do custo total $y_i = f(x_i)$ de um determinado produto em função da quantidade x_i de produção, conforme indicado na tabela 3.1 a seguir:

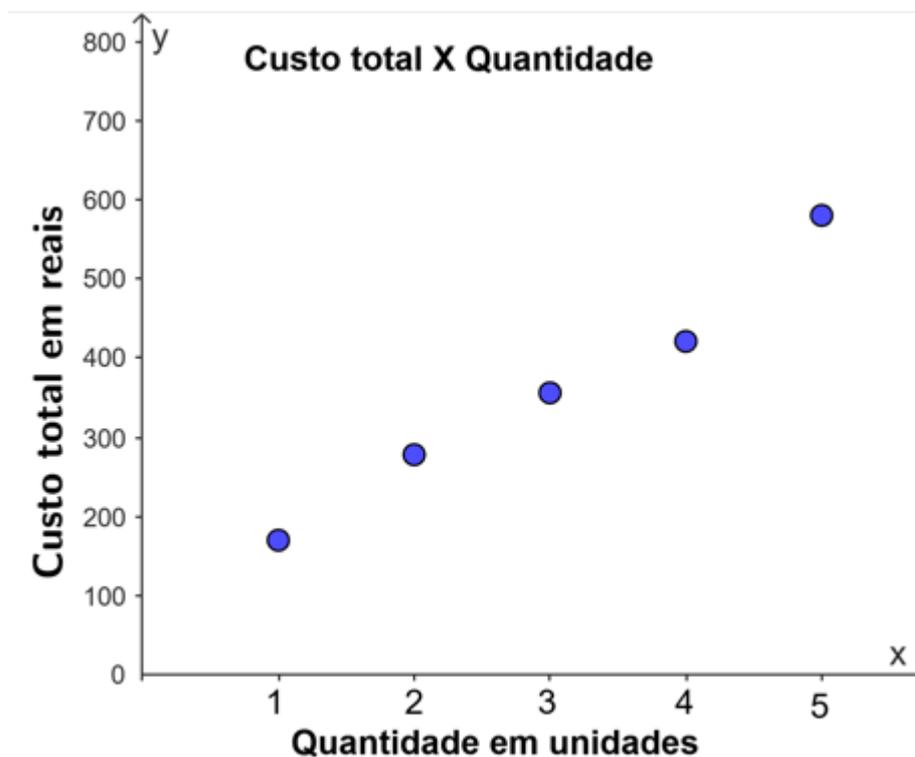
Tabela 3.1: Quantidade produzida X Custo total.

Quantidade (x_i)	Custo total $y_i = f(x_i)$
1	170
2	278
3	356
4	421
5	580

Fonte: Aatoria Própria.

Fazendo o diagrama de dispersão da relação entre o custo total do produto e da quantidade produzida conforme a Tabela 3.1, temos:

Figura 3.2: O diagrama de dispersão Custo X Quantidade



Fonte: Autoria Própria..

Note, pela dispersão dos pontos acima, que eles não estão alinhados, mas percebe-se que a relação aceita um ajuste linear simples devido à disposição dos pontos no gráfico, o que nos induz a visualizar uma reta. Tendo isso como referência, podemos nos questionar qual seria a expressão matemática ou função do tipo $y = f(x) = ax + b$ que melhor se ajustaria ao conjunto de pontos (x_i, y_i) e como poderíamos obtê-la para projetarmos, por exemplo, o custo total para 10 unidades do produto. Essas perguntas podem ser respondidas utilizando o Método dos Mínimos Quadrados a seguir.

3.3.1.1 - O Método dos Mínimos Quadrados

O Método dos Mínimos Quadrados surgiu no início do século XIX, como consequência do intenso debate e das descobertas sobre fenômenos astronômicos da época, especialmente devido à necessidade urgente de calcular os parâmetros das órbitas de cometas e asteroides recém-descobertos a partir das observações pontuais, feitas em momentos diferentes.

Segundo (CRATO, 2000), Giuseppi Piazzi (1746-1826), diretor do Observatório de Palermo na época, após descobrir o asteroide Ceres e supor tratar-se de um planeta anão ainda desconhecido em nosso sistema solar, recorreu ao jovem Carl Friedrich Gauss (1777-1855) depois de efetuar algumas anotações e perder o asteroide de vista. Isso ocorreu porque, naquela época, os métodos matemáticos para calcular com precisão as órbitas de corpos celestes requeriam um grande número de observações verificadas ao longo de um período suficientemente longo. .

Gauss, que há anos se dedicava ao estudo do cálculo de órbitas de corpos celestes, sem recorrer a conjecturas ou pressupostos teóricos, e utilizando apenas medições feitas em um período relativamente curto, conseguiu determinar a órbita de Ceres. Além disso, embora não tenha divulgado seus resultados, estabeleceu um método para manipular dados e estimar os parâmetros de uma função: o Método dos Mínimos Quadrados.

Isso foi confirmado quando o astrônomo húngaro Franz Xaver Von Zach (1754 – 1832), então diretor do observatório de Seeburgo, publicou as posições orbitais de Ceres, onde constava uma posição futura calculada por Gauss, que diferia radicalmente das outras, corroborando os estudos do jovem, que é considerado o “pai do Método dos Mínimos Quadrados”.

O Método dos Mínimos Quadrados continua tendo, na atualidade, grande importância no campo da astronomia no cálculo de órbitas de corpos estelares, especialmente na descoberta de planetas que não pertencem ao sistema solar. Além disso, o método é aplicado em diversas outras áreas, pois, quando um pesquisador se depara com uma relação estatística em que aparentemente não se verifica de imediato uma expressão matemática característica que passe pelos pontos ou, pelo menos, se aproxime dos pontos obtidos com os dados observados, o Método dos Mínimos Quadrados se apresenta como uma excelente alternativa.

A grande vantagem do Método dos Mínimos Quadrados é que sua aplicação consegue obter uma função cuja curva passe próxima dos pontos observados, com uma expressão matemática de fácil manipulação, facilitando as previsões futuras do pesquisador e/ou aluno em relação ao problema em estudo.

O Método dos Mínimos Quadrados é um instrumento adequado para ser utili-

zados pelos alunos do Ensino Médio na construção de modelos matemáticos por meio do ajuste de curvas. Bassanezi (2002), nos seus estudos, estabelece que, ao ser considerado um conjunto de n dados observados $\{\bar{x}_i, \bar{y}_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e uma função $y(x) = f(x; a_1; a_2; \dots; a_k)$ o método dos mínimos quadrados consiste em encontrar os parâmetros a_j , $j = 1, 2, \dots, k$, de modo a minimizar o valor de

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i; a_1; \dots; a_k) - \bar{y}_i]^2,$$

ou seja, temos que minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores \bar{y}_i , observados e os valores $y_i = f(\bar{x}_i, a_1, \dots, a_k)$ ajustados.

Assim, um ajuste de curva é classificado como ajuste linear simples quando ele for do tipo

$$y(x) = f(x; a, b) = ax + b$$

Segundo Bertone et al.(2019) nesse modelo, se a teoria tem que combinar com a prática para o conjunto de dados coletados: $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ devemos encontrar valores a e b , coeficiente angular e independente da reta $y = ax + b$ tais que o desvio padrão da lista de diferenças: $(x_1, y_1 - (ax_1 + b)), \dots, (x_n, y_n - (ax_n + b))$, seja a menor possível, ou seja, estamos interessados em minimizar o erro e procuramos os valores a e b para os quais

$$\delta(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2, \quad (4.1)$$

seja mínimo.

Para minimizar a expressão (4.1) devemos recorrer ao cálculo de várias variáveis. Os candidatos a valores de a e b são aqueles para os quais o vetor gradiente da função de duas variáveis $\delta(a, b)$ é nulo, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial a} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-2)x_i(y_i - (ax_i + b)) = 0 \\ &e \\ \frac{\partial \delta}{\partial b} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-2)(y_i - (ax_i + b)) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Notando que

$$\sum_{i=1}^n x_i(y_i - (ax_i + b)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i,$$

e que

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) = \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - b \sum_{i=1}^n 1,$$

o sistema (4.2) de incógnitas a e b é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (4.3)$$

O sistema (4.3) pode ser escrito na forma de equação matricial:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

de forma que o sistema (4.3) tem solução nas incógnitas a e b se, e somente se, o determi-

nante da matriz dos coeficiente $C = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix}$ for diferente de zero. Calculando

$d =$ determinante C , obtemos que

$$\begin{aligned} d &= n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i \\ &= n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(n^2 \cdot \frac{1}{n^2} \right) \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i \\ &= n \sum_{i=1}^n x_i^2 - n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Desde que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}. \quad (4.6)$$

Segue por (4.5) e (4.6) que

$$d = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - n^2 \bar{x}^2. \quad (4.7)$$

A seguir, vamos provar que

$$d = n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (4.8)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) + \sum_{i=1}^n n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) + \sum_{i=1}^n n\bar{x}^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

como $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} (n \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot n(\bar{x}^2)) \\ &= \frac{1}{n} (n \sum_{i=1}^n x_i^2 - n^2(\bar{x}^2)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como $d = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - n^2 \bar{x}^2$ fica demonstrada a igualdade (4.8).

Observe que o número d não será nulo, desde que os dados x_i não sejam todos iguais. Assim, para dados experimentais ou coletados, com x_i diferentes, o sistema (4.4) tem solução.

Com o objetivo de resolver o sistema (4.4) e encontrar o valor de a , e, em seguida o valor de b , usamos a regra de Cramer, da qual obtemos que

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{d} = n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n^2 \bar{x} \bar{y}}{d} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (4.11)$$

destacando que usamos a expressão de d em (4.8).

3.3.1.2 - Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para obter o Ajuste Linear Simples

Para facilitar a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados ao exemplo dado na subsecção 3.3.1, construímos a tabela a seguir, na qual y representa o custo total e x representa a quantidade de produtos produzidos. Também calculamos os valores de \bar{x} e \bar{y} .

Tabela 3.2: Tabela auxiliar Quantidade X Custo Total

	x	y	$x.y$	x^2	$(x - \bar{x})^2$
	1	170	170	1	4
	2	278	556	4	1
	3	356	1068	9	0
	4	421	1684	16	1
	5	580	2900	25	4
Somatório = Σ	15	1805	6378	55	10

Fonte: Autoria Própria.

Obtemos que

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{15}{5} = 3 \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{1805}{5} = 361$$

Como já foi verificado, o gráfico de dispersão da relação custo total e quantidade produzida nos remete a uma expressão matemática ou função do tipo $y = f(x) = ax + b$, como a melhor aproximação para o conjunto de pontos dados.

Pelo Método dos Mínimos Quadrados, conforme **(4.11)**,

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

onde n é o conjunto de dados observados.

Logo,

$$a = \frac{6378 - 5 \cdot 3.361}{10} = \frac{6378 - 5415}{10} = 96,3.$$

Utilizando o sistema (4.3)

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i, \end{cases}$$

encontramos o valor de b na segunda equação:

$$\begin{aligned} 15a + 5b &= 1805 \\ \Rightarrow 15(96,3) + 5b &= 1805 \\ \Rightarrow 5b &= 1805 - 1444,5 \\ \Rightarrow b &= \frac{360,5}{5} \\ \Rightarrow b &= 72,10. \end{aligned}$$

Susbtituindo os valores de a e b em $y = f(x) = ax + b$, respondemos ao primeiro questionamento, obtendo que a equação da reta que aproxima os pontos contidos na Tabela 3.1 é:

$$y = f(x) = 96,3x + 72,10.$$

Quanto ao segundo questionamento, a previsão de custo para a quantidade $x = 10$ unidades é dada por:

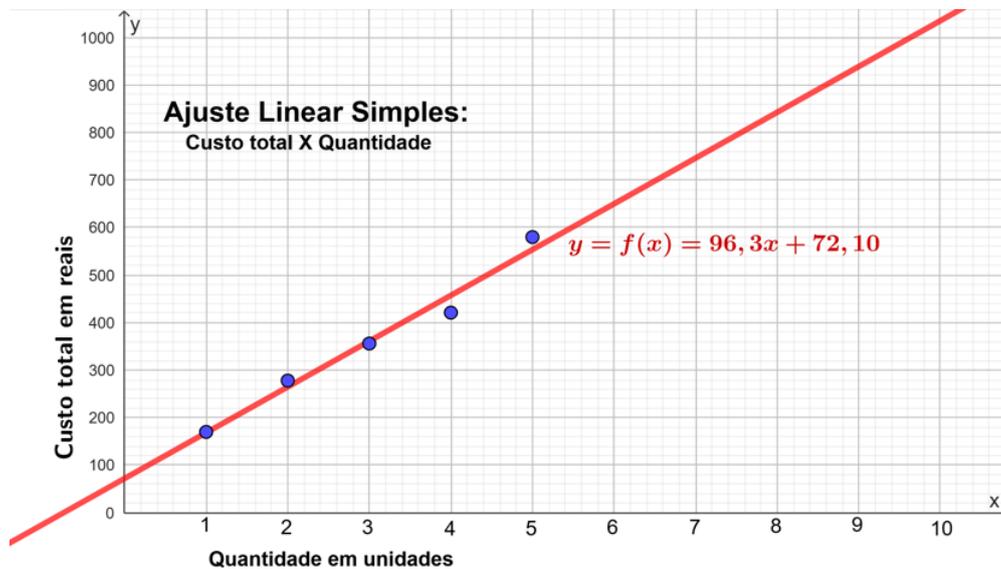
para $x = 10$:

$$y = 96,3 \cdot (10) + 72,10 = 1.035,10.$$

Portanto, o custo em reais estimado na subseção 3.3.1 para dez unidades do produto é R\$ 1.035,10.

A seguir, temos o gráfico mostrando a dispersão dos pontos e a reta referente ao ajuste linear simples calculado pelo Método dos Mínimos Quadrados, que representa a relação entre o custo total do produto e a quantidade produzida.

Figura 3.3: Gráfico do Ajuste Linear Simples: Custo Total X Quantidade.



Fonte: Autoria Própria.

3.3.2 - Ajuste por Funções Polinomiais

No estudo de alguns problemas ou fenômenos, nem sempre o ajuste linear simples será a “melhor” função que se ajusta em um determinado conjunto de dados. São muitas as situações em que o modelo obedece a um comportamento polinomial, sendo necessário proceder ao ajuste por meio de uma função polinomial de grau superior a um.

Definição 4.3.2.1 - Denomina-se f de **ajuste polinomial** quando $y = f(x)$ é uma função polinomial de grau superior a um. Neste caso, procura-se calcular os valores de $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ tais que os dados coletados ou experimentais sejam ajustados por uma função do tipo

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (4.12)$$

O ajuste linear de tendência polinomial é usado quando os dados flutuam, por exemplo, para analisar grandes oscilações em um conjunto de dados, verificando-se no gráfico de dispersão o surgimento de colinas (valores máximos) ou vales (valores mínimos).

Generalizando o procedimento do Método dos Mínimos Quadrados usado no ajuste linear simples para uma regressão polinomial de grau maior, obtemos, para um conjunto de n dados coletados (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, um sistema linear da forma

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^n \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{i=1}^n x_i^n & \sum_{i=1}^n x_i^{n+1} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^n \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Nesse sentido, apresentaremos o exemplo de um comerciante que deseja analisar os valores da quantidade demandada de um produto e os preços pelos quais ele foi vendido em um determinado período. O comerciante fez suas anotações durante o período e obteve a Tabela 3.3:

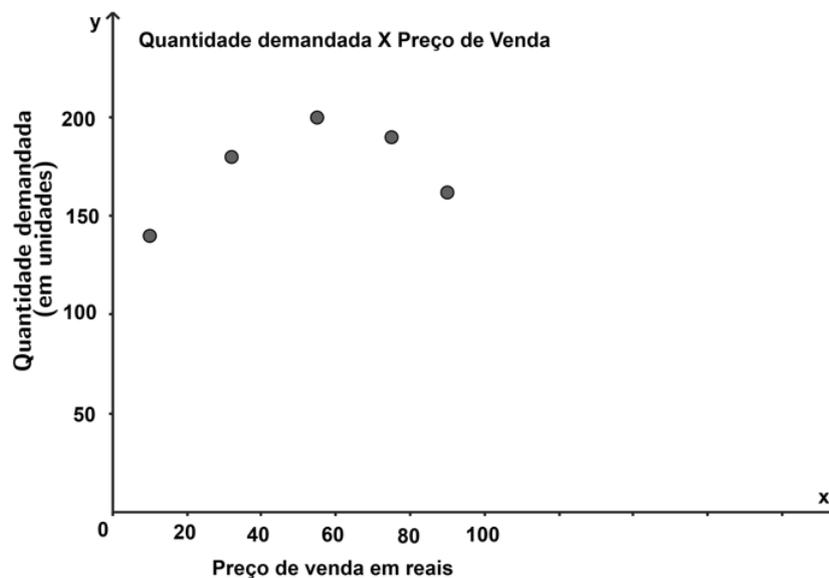
Tabela 3.3: Preço de venda X Quantidade vendida.

Preço de venda em reais	Quantidade vendida em unidades
14	140
32	180
55	200
75	190
90	162

Fonte: Autoria Própria.

Suponhamos ainda que o comerciante de posse dos dados coletados pretenda estimar qual seria a quantidade vendida do produto para um preço de venda igual R\$ 100,00. Para encontrar essa quantidade devemos encontrar a curva que melhor se ajusta aos dados coletados no período e para isso é interessante construir o diagrama de dispersão dos pontos constantes na Tabela 3.3.

Figura 3.4: O diagrama de dispersão Quantidade demandada X Preço de venda.



Fonte: Autoria Própria.

Podemos observar, nesse exemplo, que a relação entre a quantidade demandada e o preço de venda apresenta um comportamento análogo ao de uma função polinomial, mais precisamente a uma função polinomial de segundo grau, sugerindo a utilização do modelo de ajuste quadrático aos dados coletados. Assim, devemos encontrar uma curva de ajuste do tipo $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. E o sistema linear (4.14) obtido é:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

onde n equivale a quantidade de observações realizadas.

Para facilitar a resolução do sistema (4.14), construímos uma tabela auxiliar contendo os elementos do ajuste do modelo quadrático, onde y representa a quantidade demandada e x o preço de venda do produto. A última linha corresponde aos somatórios de cada coluna.

Tabela 3.4: Tabela auxiliar Preço de venda X Quantidade demandada.

x	y	$x.y$	x^2	x^3	x^4	$y.x^2$
10	140	1400	100	1000	10000	14000
32	180	5760	1024	32768	1048576	184320
55	200	11000	3025	166375	9150625	605000
75	190	14250	5625	421875	31640625	1068750
90	162	14580	8100	729000	65610000	1312200
262	872	46990	17874	1351018	107459826	3184270

Fonte: Autoria Própria.

Susbtituindo os valores constantes na tabela no sistema (4.14) temos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 262 & 17874 \\ 262 & 17874 & 1351018 \\ 17874 & 1351018 & 107459826 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 872 \\ 46990 \\ 3184270 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

cujo desenvolvimento resulta no sistema

$$\begin{cases} 5a_0 + 262a_1 + 17874a_2 = 872 \\ 262a_0 + 17874a_1 + 1351018a_2 = 46990 \\ 17874a_0 + 1351018a_1 + 107459826a_2 = 3184270 \end{cases} \quad (4.16)$$

E resolvendo o sistema (4.16) pela Regra de Cramer¹, temos que:

$$a_0 = \frac{D_{a_0}}{D}, a_1 = \frac{D_{a_1}}{D} \text{ e } a_2 = \frac{D_{a_2}}{D}.$$

Como

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 262 & 17874 \\ 262 & 17874 & 1351018 \\ 17874 & 1351018 & 107459826 \end{vmatrix} = 44.183.032.000,$$

¹Detalhes sobre a aplicação da Regra de Cramer na resolução de sistemas lineares podem ser verificados no livro do ensino médio: Matemática Volume Único (IEZZI et al., 2002, p.327).

$$D_{a_0} = \begin{vmatrix} 872 & 262 & 17874 \\ 46990 & 17874 & 1351018 \\ 3184270 & 1351018 & 107459826 \end{vmatrix} = 4.820.595.852.800,$$

$$D_{a_1} = \begin{vmatrix} 5 & 872 & 17874 \\ 262 & 46990 & 1351018 \\ 17874 & 3184270 & 107459826 \end{vmatrix} = 143.632.300.960 \quad e$$

$$D_{a_2} = \begin{vmatrix} 5 & 262 & 872 \\ 262 & 17874 & 46990 \\ 17874 & 1351018 & 3184270 \end{vmatrix} = -1.298.368.480.$$

Logo

$$a_0 = \frac{482059585280}{44183032000} = 109,1051;$$

$$a_1 = \frac{143632300960}{44183032000} = 3,2508$$

e

$$a_2 = \frac{-1298368480}{44183032000} = -0,0294.$$

Conseqüentemente, a equação analítica que representa o ajuste quadrático dos pontos do problema proposto pelo comerciante é

$$y = f(x) = -0,0294x^2 + 3,2508x + 109,1051.$$

Realizando os cálculos para a projeção da quantidade a ser vendida quando o preço for igual a R\$ 100,00, temos:

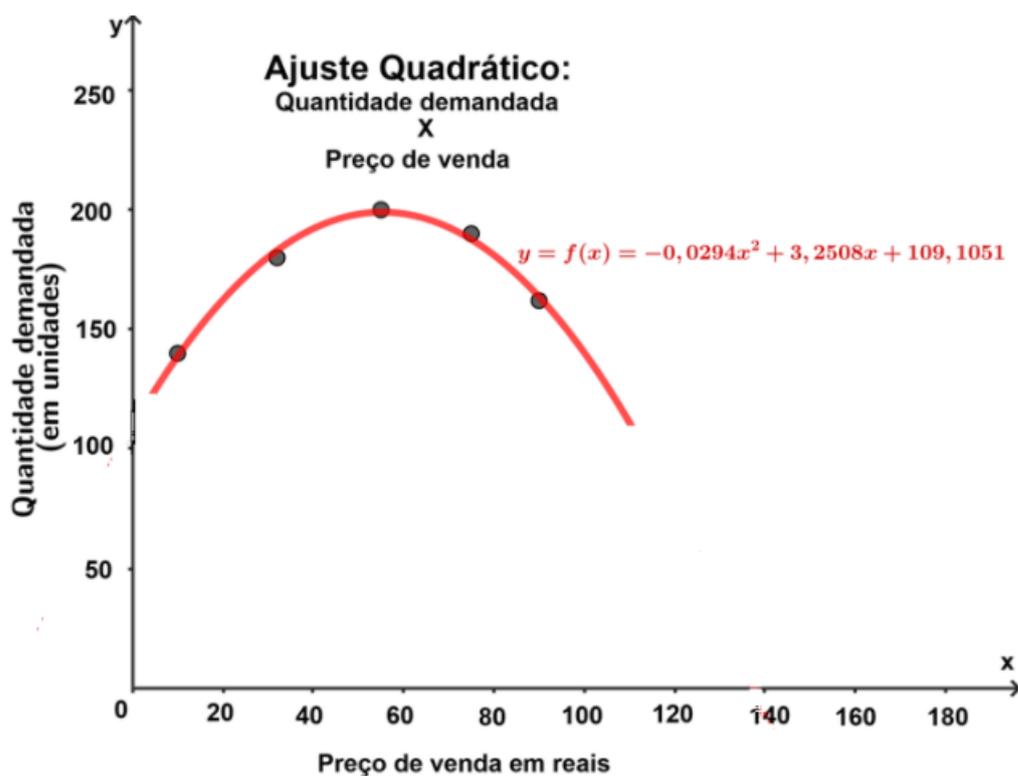
para $x = 100$:

$$y = -0,0294.(100)^2 + 3,2508.(100) + 109,1051 = 140,1451.$$

Concluimos que a quantidade demandada do produto para o preço de venda igual a R\$ 100,00 é de 140,1451 unidades.

A seguir, apresentamos o gráfico com a dispersão dos pontos e a curva referente ao ajuste quadrático, calculado pelo método dos mínimos quadrados, que representa a relação entre a quantidade demandada do produto e o seu preço de venda.

Figura 3.5: Gráfico do Ajuste Quadrático: Quantidade demandada X Preço de venda.



Fonte: Autoria Própria.

Não representaremos o processo de obtenção do ajuste de curva para funções polinomiais de grau superior a dois, mas o procedimento é análogo e também pode ser obtido pelo Método dos Mínimos Quadrados.

3.3.3 - Ajuste por Funções Exponenciais.

Cabe enfatizar que os modelos exponenciais são amplamente utilizados por pesquisadores em laboratórios, especialmente por profissionais da saúde, na análise da evolução de organismos como bactérias, vírus e células, ou mesmo na construção de curvas que indiquem o número de infectados por um determinado vírus ao longo do tempo.

Existem situações em que as funções polinomiais não são adequadas para ajustar a relação entre duas variáveis, e, com base no comportamento das observações, pode-se concluir que a função exponencial é o modelo adequado para o ajuste dos dados, ou seja, as curvas são do tipo exponencial

$$y(x) = be^{ax}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Assim, aplicando o logaritmo neperiano em ambos os membros da equação (4.17), note que

$$\ln(y) = \ln(be^{ax}) = \ln(b) + \ln(e)^{ax} = \ln(b) + ax.$$

Usando a mudança de variável $c = \ln(b)$, obtemos um modelo linear dado por

$$z = \ln(y) = c + ax, \quad (4.18)$$

com esse recurso expressivo, podemos proceder usando as mesmas técnicas implementadas no processo de construção dos modelos das funções polinomiais vistas anteriormente.

Para elucidar esse assunto, suponhamos que um pesquisador está investigando o desenvolvimento, em milímetros, de certo tipo de bactéria conforme a temperatura, em graus Celsius, à qual ela é exposta. Após algumas medições, o pesquisador construiu a Tabela 3.5 com os dados coletados.

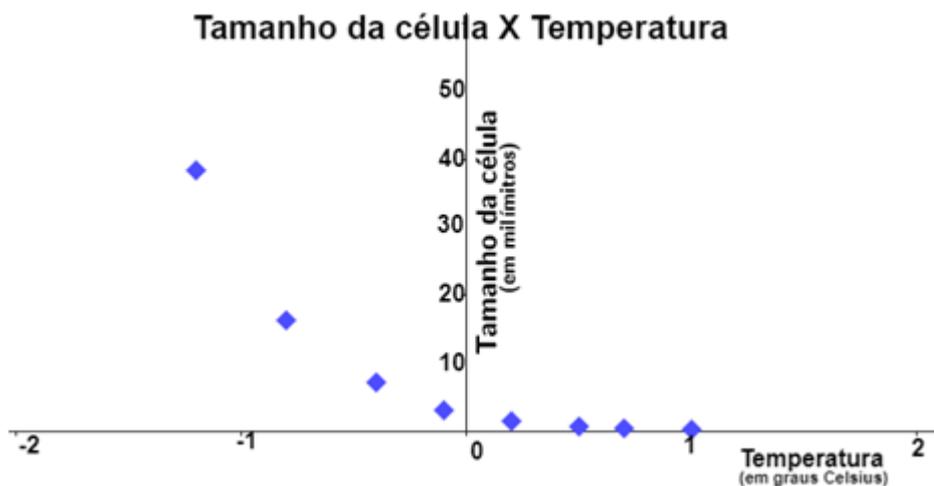
Tabela 3.5: Temperatura X Tamanho.

Temperatura x em graus Celsius	Tamanho y em milímetros
-1,2	38,347
-0,8	16,264
-0,4	7,122
-0,1	3,022
0,2	1,420
0,5	0,628
0,7	0,360
1,0	0,190

Fonte: Autoria Própria.

A disposição das informações coletadas resulta no diagrama de dispersão mostrado na Figura 3.6.

Figura 3.6: O diagrama de dispersão Tamanho da célula X Temperatura.



Fonte: Autoria Própria..

A disposição dos pontos no gráfico de dispersão evidencia que a relação entre o tamanho da célula e a temperatura apresenta um comportamento exponencial, sugerindo a utilização do modelo exponencial como a curva que melhor ajusta os dados coletados

pelo pesquisador. Devemos, então, encontrar uma curva de ajuste do tipo $f(x) = y = be^{ax}$, com $b > 0$, onde esperamos que a seja negativo.

Usando a linearização (4.18), podemos realizar o ajuste linear simples pelo Método dos Mínimos Quadrados e, em seguida, retroceder ao modelo exponencial. O sistema linear do ajuste terá a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \ln(y_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i \ln(y_i) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

A tabela auxiliar abaixo contém os dados necessários para compor o sistema, sendo que y representa o tamanho da bactéria e x a temperatura de exposição. A última linha corresponde aos somatórios de cada coluna.

Tabela 3.6: Temperatura X Tamanho.

x	y	$x \cdot y$	x^2	$\ln(y)$	$x \ln(y)$
-1,2	38,347	-46,0164	1,44	3,6466	-4,3759
-0,8	16,264	-13,0112	0,64	2,7889	-2,2311
-0,4	7,122	-2,8488	0,16	1,9631	-0,7852
-0,1	3,022	-0,3022	0,01	1,1059	-0,1105
0,2	1,420	0,284	0,04	0,3506	0,0701
0,5	0,628	0,314	0,25	-0,4652	-0,2326
0,7	0,360	0,252	0,49	-1,0216	-0,7151
1,0	0,190	0,190	1,0	-1,6607	-1,6607
0,1	67,353	-61,1386	4,03	6,7076	-10,041

Fonte: Autoria Própria.

Efetando as devidas substituições no sistema (4.19), obtemos:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0,1 \\ 0,1 & 4,03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,7076 \\ -10,041 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Que resulta em

$$\begin{cases} 8c + 0,1a = 6,7076 & (I) \\ 0,1c + 4,03a = -10,041 & (II) \end{cases} \quad (4.21)$$

Resolvendo o sistema (4.21), multiplicamos a equação (I) por 40,3, obtendo

$$\begin{cases} 322,4c + 4,03a = 270,3162 & (I) \\ 0,1c + 4,03a = -10,041 & (II) \end{cases}$$

Em seguida fazemos (I) – (II), encontrando que

$$\begin{aligned} 322,3c &= 280,3572 \\ \Rightarrow c &= \frac{280,3572}{322,3} \\ \Rightarrow c &= 0,8698 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de c encontrado na equação (II), temos

$$\begin{aligned} (0,1) \cdot (0,8698) + 4,03a &= -10,041 \\ \Rightarrow 0,08698 + 4,03a &= -10,041 \\ \Rightarrow 4,03a &= -10,041 - 0,08698 \\ \Rightarrow 4,03a &= -10,12798 \\ \Rightarrow a &= \frac{-10,12798}{4,03} \\ \Rightarrow a &= -2,513 \end{aligned}$$

Desde que $c = \ln(b) \Rightarrow b = e^c \Rightarrow b = e^{0,8698} \Rightarrow b = 2,386$.

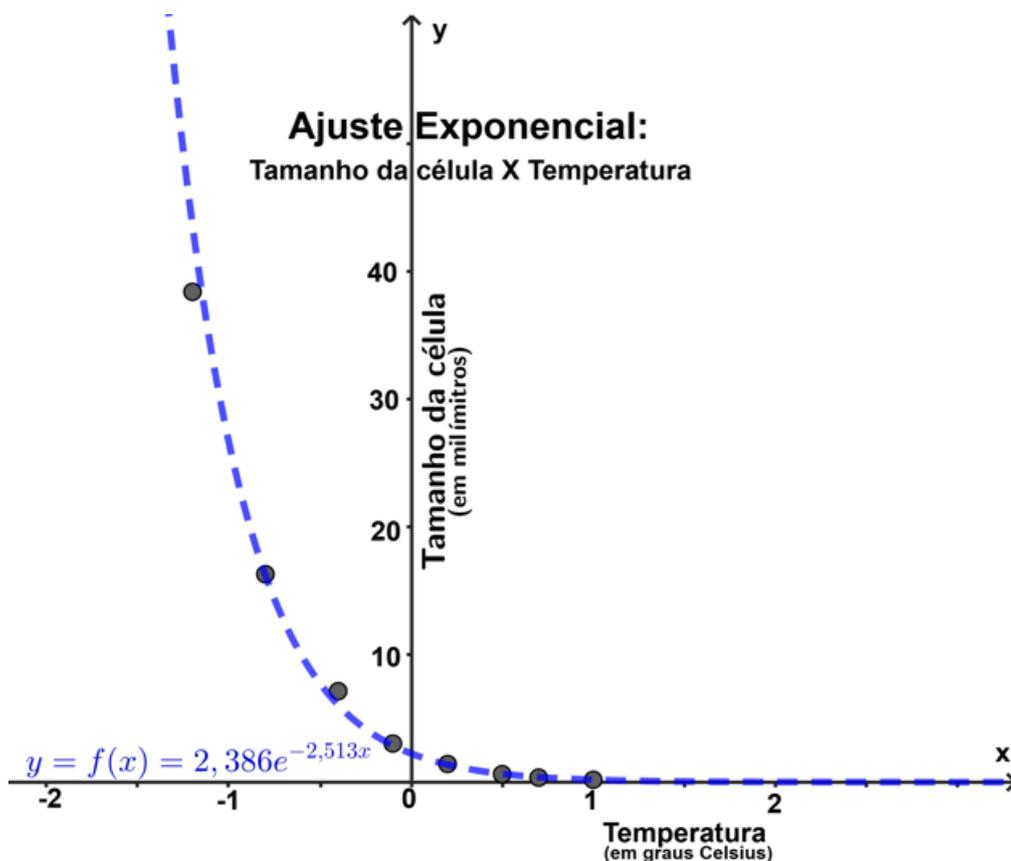
Consequentemente, o modelo de ajuste exponencial que representa o tamanho da bactéria y conforme a temperatura x em que ela é exposta é dado por

$$y = f(x) = 2,386e^{-2,513x},$$

dando ao pesquisador um mecanismo para projetar a evolução da bactéria quando ela é exposta a determinada temperatura.

O gráfico de dispersão dos pontos, juntamente com a curva referente ao ajuste exponencial da relação entre o tamanho da bactéria observado pelo pesquisador conforme a temperatura de exposição, é dado por:

Figura 3.7: Gráfico do Ajuste Exponencial: Tamanho da célula X Temperatura.



Fonte: Autoria Própria..

3.3.4 - Ajuste por Modelos Logísticos

Ocorrem situações, especialmente na descrição de modelos que descrevem a dinâmica de uma população, de uma espécie, em que o crescimento linear ou exponencial não se sustenta em virtude de depender de uma quantidade infinita de recursos, que normalmente não existe no ambiente onde a espécie habita.

Segundo (LEITE; SILVA; SOUSA, 2011, p.934), a formulação do Modelo Logístico sugere, ao contrário dos modelos linear e exponencial, que a população sofre inibições naturais em seu crescimento. Inicialmente, quando não há escassez de recursos, o modelo se comporta de forma semelhante ao modelo exponencial. No entanto, neste modelo, admite-se que existe um nível populacional máximo, que representa a capacidade de suporte do meio. Assim, uma vez atingido esse nível, a população se estabiliza.

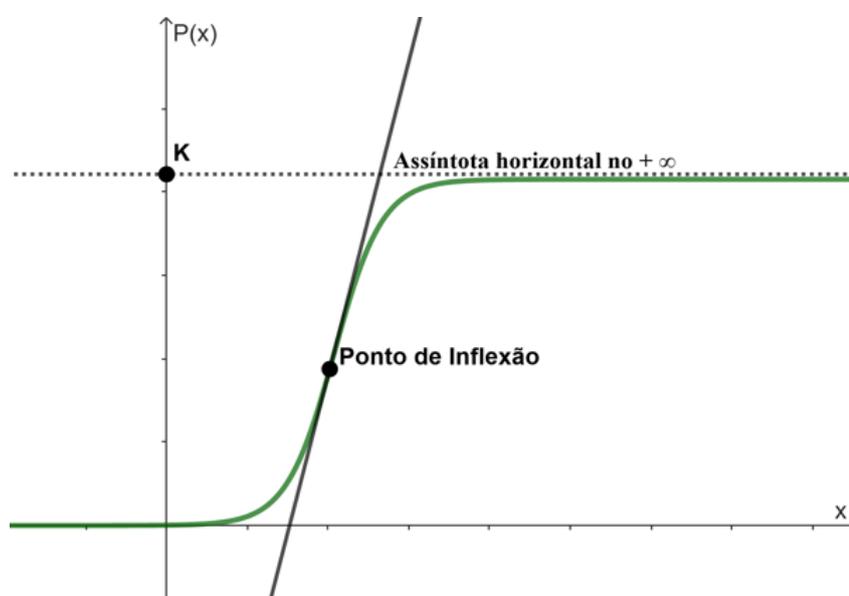
Os autores BERTONE et al. (2019) afirmam que a função que descreve este mo-

delo é dada por

$$P(x) = \frac{K}{1 + Ce^{-rx}},$$

onde K é o parâmetro que representa a capacidade suporte da população estudada, r é a taxa de crescimento e C é uma constante. O gráfico da solução $P(x)$ é mostrado na Figura 3.8. Note que a solução tem um ponto de inflexão² e tem como assíntota³ horizontal no infinito positivo a reta $y = K$, enquanto x cresce indefinidamente.

Figura 3.8: O gráfico representativo da solução $P(x)$ para um modelo logístico.



Fonte: Autoria Própria..

O ajuste de curva para os dados tem, portanto, a expressão

$$y = \frac{K}{1 + be^{ax}}, \quad b > 0, a < 0, \quad (4.22)$$

onde o parâmetro K será calculado a partir dos próprios dados coletados. Para que seja possível fazer a linearização do modelo logístico (4.22), que é equivalente para $y > 0$ segue de (4.22) que

²Um ponto de inflexão ou simplesmente inflexão, é um ponto sobre uma curva na qual a curvatura troca de sinal. A curva muda de ter curvatura côncava para cima (positiva) para concavidade para baixo (curvatura negativa), ou vice-versa.

³Assíntota é um conceito usado no âmbito da Matemática para designar uma linha (reta) que, se prolongada de forma indefinida, tende a aproximar-se a uma curva ou função, embora sem alcançá-la.

$$\frac{K-y}{y} = be^{ax},$$

e aplicando o logaritmo neperiano a ambos os membros obtemos que

$$\ln\left(\frac{K-y}{y}\right) = \ln(b) + ax.$$

Assim, fazendo uma mudança de variável

$$Y = \ln\left(\frac{K-y}{y}\right), \quad (4.23)$$

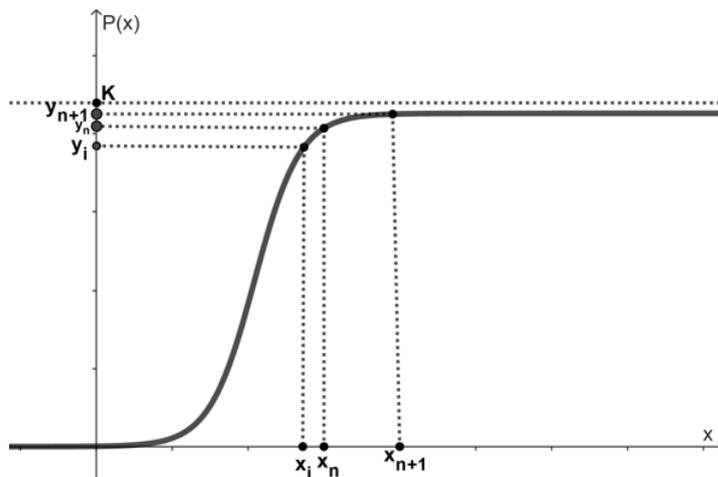
obtemos que a linearização é dada por $Y = ax + \ln(b)$.

Inicialmente, surge neste modelo a dificuldade de obter o valor do parâmetro K a partir dos dados coletados. Para contornar este problema, usamos o conhecido método de Ford-Walford. Para poder entender melhor o método, observe que, se uma sequência de dados (x_i, y_i) tem as características da curva logística $P(x)$, isto é,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = K,$$

sendo $(y_i), i \in \mathbb{N}$, uma sequência monótona, então existe um índice k a partir do qual dois termos consecutivos, y_n e y_{n+1} estão muito próximos para n suficientemente grande, como mostra a Figura 3.9.

Figura 3.9: Os elementos consecutivos da sequência y_n e y_{n+1} muito próximos.



Fonte: Autoria Própria..

Este fato, além de intuitivo, tem fundamentos teóricos como se pode verificar nos Teoremas 2 e 4 do livro *Análise Real* volume 1 de (LIMA, 2004):

Teorema 2: *Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a .*

Teorema 4: *Toda seqüência monótona limitada é convergente.*

Segue do **Teorema 4**, que se a seqüência (y_i) , $i \in \mathbb{N}$, monótona, não-decrescente é convergente (por ser limitada superiormente com supremo K), então toda subsequência de (y_i) , $i \in \mathbb{N}$, terá o mesmo limite K , pelo **Teorema 2**, o que nos leva a afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = K. \quad (4.24)$$

Consideremos agora uma função g que ajusta os pares (y_i, y_{i+1}) isto é, $g(y_i) = y_{i+1}$.

Temos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g(y_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{i+1} = K.$$

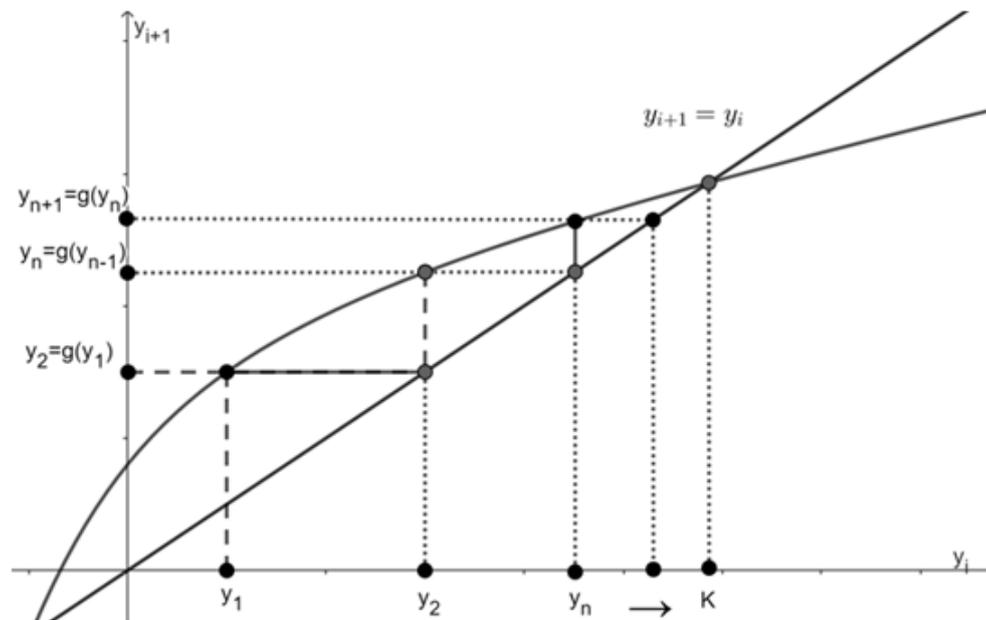
Logo, de (4.24), podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, g(y_n)) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} \right) = (K, K),$$

ou seja, (K, K) é um ponto chamado de ponto fixo da função de ajuste, isto é, $g(K) = K$.

A dinâmica do método de Ford-Walford é mostrada na Figura 3.10.

Figura 3.10: O método de Ford-Walford.



Fonte: Autoria Própria..

Como exemplo de um modelo logístico, apresentaremos um problema de origem ecológica relacionado à proliferação de algas no mar Adriático, descrito por BERTONE et al. (2019, p. 72). Para este caso, restringiremos a apresentação à tabela dos dados coletados e aos gráficos ilustrativos da dispersão dos dados e da curva logística obtida. As rotinas necessárias, que podem ser vistas em BERTONE et al. (2019, p. 75-76), serão realizadas na aplicação que desenvolveremos no Capítulo 4 como proposta de aula.

A Tabela 3.7 a seguir mostra os dados coletados por um pesquisador durante um período de 74 dias, analisando a superfície coberta pela biomassa criada pelas algas numa amostra microscópica.

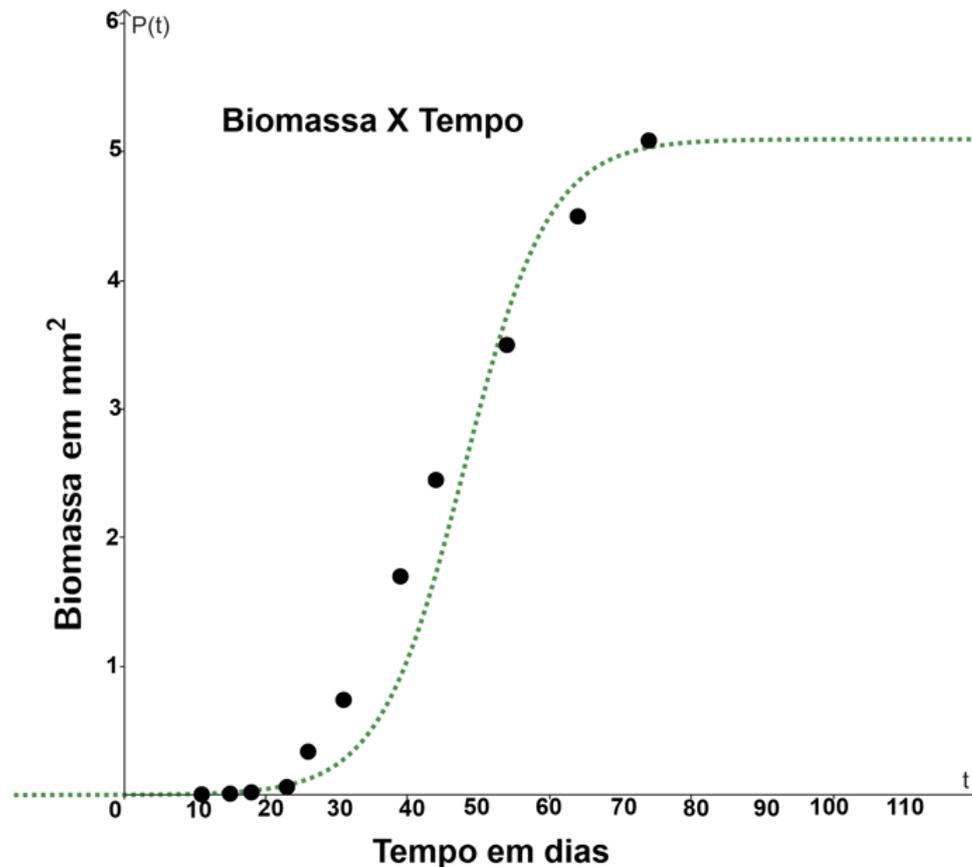
Tabela 3.7: Evolução da reprodução das algas no mar Adriático.

Tempo em dias	Biomassa em mm^2
11	0,00476
15	0,0105
18	0,0207
23	0,0619
26	0,337
31	0,74
39	1,7
44	2,45
54	3,5
64	4,5
74	5,09

Fonte: Adaptado de: BERTONE et al.(2019, p. 72).

Utilizando os pontos constantes na Tabela 3.7 o pesquisador construiu o diagrama de dispersão mostrado na Figura 3.11, a seguir.

Figura 3.11: O diagrama de dispersão dos dados da Tabela 3.7.



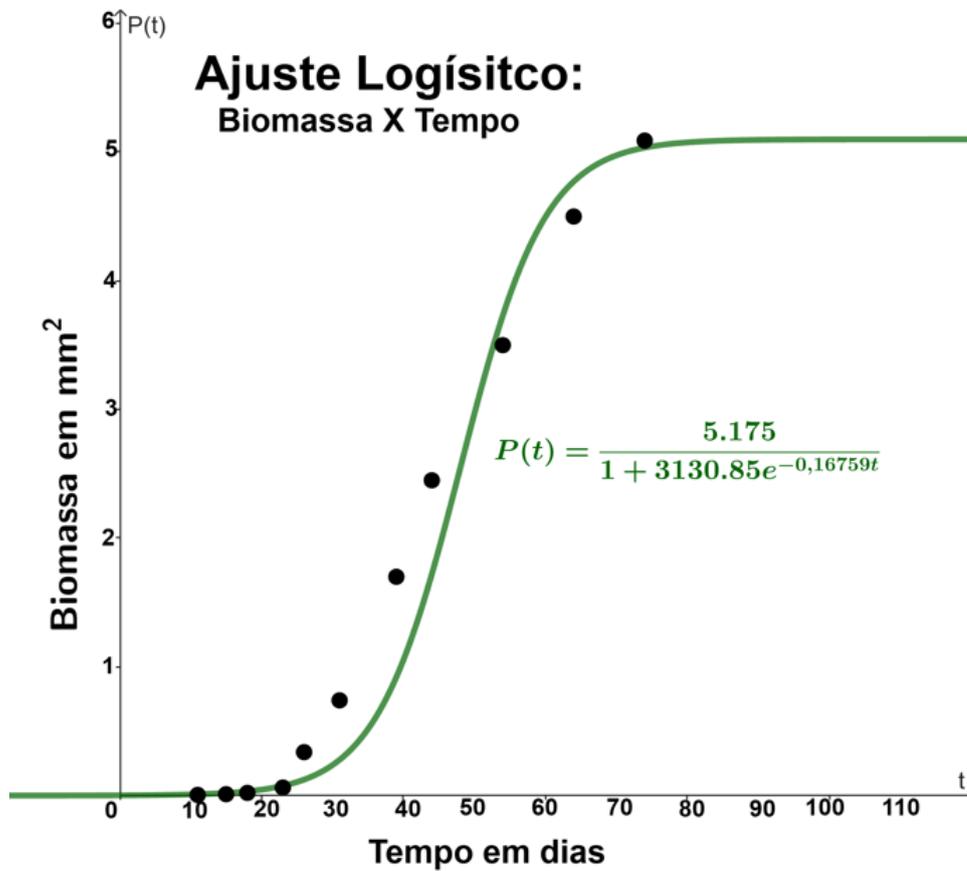
Fonte: Adaptado de: BERTONE et al.(2019, p.72).

A disposição dos pontos no diagrama de dispersão sugere ao pesquisador a utilização de um ajuste de curva não-exponencial, mas que se adapta ao modelo logístico, pois o traço que melhor aproxima os pontos tem o formato de um S , que corresponde à curva referente aos dados. Como solução final do ajuste, o pesquisador encontrou uma curva do tipo (4.22), sendo $x = t$ e $y = P(t)$.

$$y = \frac{K}{1 + be^{at}}, \quad b > 0, \quad a < 0,$$

mostrada na Figura 3.12.

Figura 3.12: O diagrama de dispersão dos dados da Tabela 3.7.



Fonte: Adaptado de: BERTONE et al.(2019, p.72).

4 - PROPOSTA DE APLICAÇÃO DE ATIVIDADE UTILIZANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos uma sugestão de atividade que utiliza a modelagem matemática para abordar um problema real: a evolução populacional. Essa atividade pode ser desenvolvida com alunos da Educação Básica, especialmente com os do 1º Ano do Ensino Médio, visto que é nesta etapa escolar que se aprofunda o estudo das funções.

O objetivo principal é apresentar os dispositivos, técnicas, procedimentos e etapas que possibilitem aos alunos a produção dos modelos matemáticos linear simples, exponencial e logístico, aplicados aos dados públicos disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em um determinado período para seu município de origem, além de comparar, analisar e discernir qual curva melhor se ajusta ao conjunto de dados estudados ao longo do tempo.

Ressalta-se que esta proposta se harmoniza com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como pode ser observado no seguinte trecho

[...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Conseqüentemente, quando a realidade é referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio. (BRASIL, 2017, p.528)

Como proposta, apresentaremos toda a sequência referente à elaboração e análise dos modelos linear, exponencial e logístico para a evolução da população teófilo-otonense, conforme as projeções realizadas pelo IBGE no período de 2011 a 2019.

Para comprovar os modelos obtidos por meio da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados, utilizaremos o software GeoGebra Clássico¹, disponível gratuitamente em <https://www.geogebra.org/classic>. Serão indicados os passos e comandos dentro do programa para gerar os gráficos e as funções correspondentes aos modelos.

O objetivo dessa sequência é reproduzir os passos que os alunos deverão seguir na execução da atividade em sala de aula e/ou no laboratório de informática de sua escola. Para isso, é importante que o professor aborde o tema da dinâmica populacional com seus estudantes anteriormente. Em seguida, após consulta no site do IBGE, o professor deve disponibilizar aos alunos uma tabela com os dados referentes à quantidade de habitantes

¹Pacote gratuito de aplicações on-line do GeoGebra: software de matemática dinâmica que integra geometria, álgebra, planilhas eletrônicas, gráficos, estatística e cálculo em um único ambiente.

da cidade no período em que serão construídos os modelos, proporcionando as condições necessárias para o início da atividade. Essa é a fase de interação com o tema, na qual o processo de modelagem matemática será desenvolvido.

Cabe enfatizar, também, que temas como derivadas de funções, vetor gradiente, sequências monótonas e limites, necessários para a sustentação teórica dos modelos logísticos, não serão abordados aqui, uma vez que são conteúdos estudados em nível superior. O intuito precípuo deste trabalho é apresentar uma proposta atraente e diferenciada no processo de ensino de conteúdos matemáticos do ensino médio, incentivando o protagonismo e a participação efetiva dos estudantes na educação matemática por meio da discussão de problemas reais.

Feita esta consideração, restringiremos ao desenvolvimento da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados, apresentado em 3.3.1.1, à obtenção das fórmulas analíticas (funções) referentes aos modelos matemáticos, à construção dos gráficos de dispersão e seus respectivos modelos, à comparação dos modelos e à apresentação dos passos e comandos para o uso do GeoGebra Clássico.

4.1 - Construções dos Modelos.

Os dados utilizados para a construção dos modelos foram coletados no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE)² e utilizaremos como base o estudo do comportamento da população de Teófilo Otoni - MG no período de 2011 a 2019.

Na Tabela 4.1 estão os dados que foram coletados no site do IBGE.

²As projeções populacionais de um município podem ser consultadas em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?edicao=17283t=downloads>.

Tabela 4.1: População do município de Teófilo Otoni - MG.

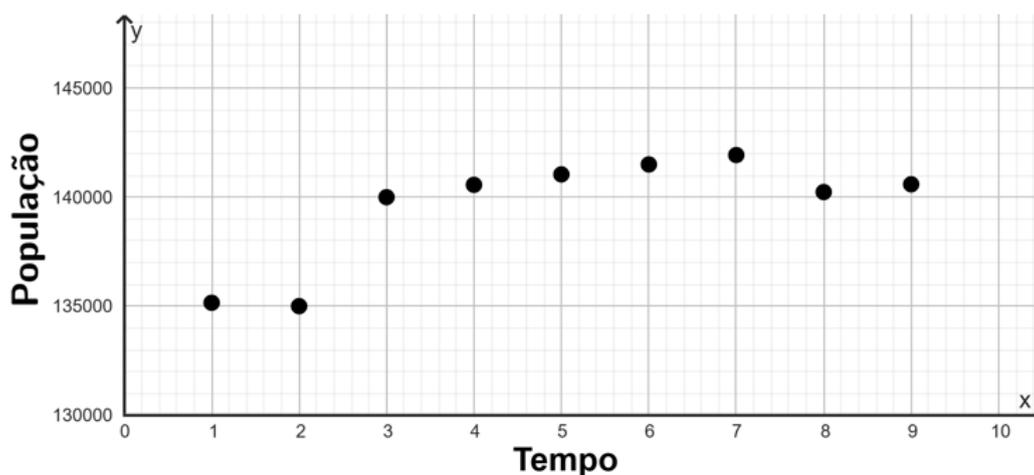
Ano	Tempo	Número de habitantes
2011	1	135.154
2012	2	135.549
2013	3	140.067
2014	4	140.567
2015	5	141.046
2016	6	141.502
2017	7	141.934
2018	8	140.235
2019	9	140.592

Fonte: Autoria Própria - Dados de Projeções Demográficas - IBGE

Nessa fase, supõe-se a interação e familiarização com a situação; os dados já foram coletados e as variáveis para o estudo — tempo e população — já foram definidas.

Em seguida, segue a fase de matematização, formulação e resolução dos modelos matemáticos, começando com a construção do diagrama de dispersão dos dados, conforme ilustrado na Figura 4.1 a seguir.

Figura 4.1: Diagrama de dispersão da População de Teófilo Otoni – MG de 2011 a 2019.



Fonte: Autoria Própria.

4.2 - Ajuste por modelo linear simples.

O ajuste linear simples, como foi visto anteriormente, é caracterizado pela fórmula

$$y = ax + b. \quad (5.1)$$

Então, o próximo passo é obter os parâmetros a e b utilizando o método dos mínimos quadrados, de modo que tais parâmetros minimizem os valores das somas dos desvios. Na aplicação do método dos mínimos quadrados, como descrito em 3.3.1.1, para encontrar os parâmetros a e b , é preciso resolver o sistema

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^2 a + (\sum_{i=1}^n x_i) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^n x_i) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.11)$$

Para auxiliar na composição do sistema (4.3) é conveniente construir a Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Ajuste Linear da População de Teófilo Otoni - MG.

Ano	x_i	POPULAÇÃO (y_i)	$x_i \cdot y_i$	$(x_i)^2$	$(x_i - \bar{x}_i)^2$
2011	1	135.154	135.154	1	16
2012	2	135.549	271.098	4	9
2013	3	140.067	420.201	9	4
2014	4	140.567	562.268	16	1
2015	5	141.046	705.230	25	0
2016	6	141.502	849.012	36	1
2017	7	141.934	993.538	49	4
2018	8	140.235	1.121.880	64	9
2019	9	140.592	1.265.328	81	16
Somatório = Σ	45	1.256.646	6.323.709	285	60

Fonte: Autoria Própria - Dados de Projeções Demográficas - IBGE.

Transformando cada ano em seu respectivo x_i , encontramos os valores das médias aritméticas \bar{x}_i e \bar{y}_i ,

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{45}{9} = 5 \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{1256646}{9} = 139627,3333,$$

e utilizando a equação (4.11) e a segunda equação do sistema (4.3), encontraremos os parâmetros a e b que melhor ajustam os valores da população teófilo-otonense.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{6323709 - 9 \cdot (5) \cdot (139627,3333)}{60} = 674,65.$$

Desde que $(\sum_{i=1}^n x_i)a + nb = \sum_{i=1}^n y_i$, segue que

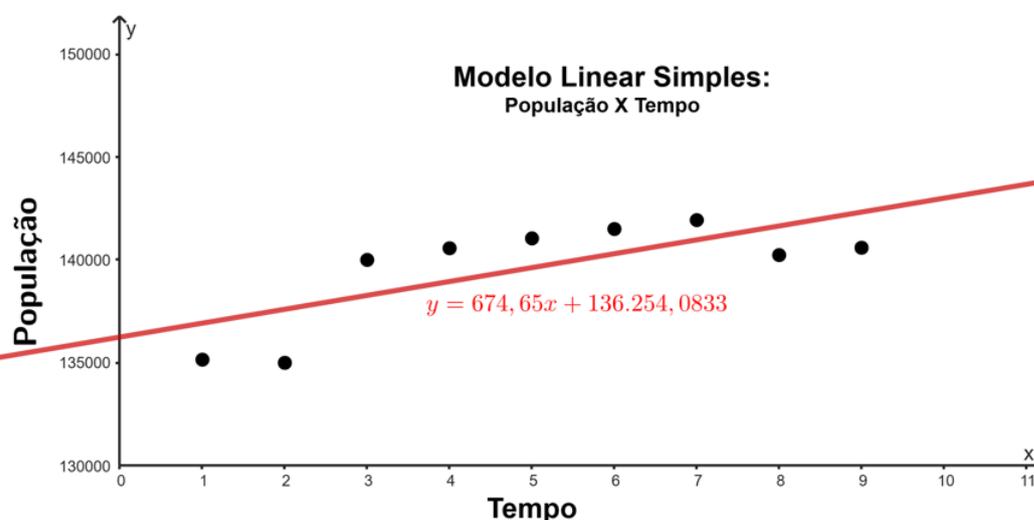
$$\begin{aligned} 45a + 9b &= 1256646 \\ \Rightarrow 45 \cdot (674,65) + 9b &= 1256646 \\ \Rightarrow 9b &= 1256646 - 30359,25 \\ \Rightarrow b &= \frac{1226286,75}{9} \\ \Rightarrow b &= 136254,0833. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (5.1) os resultados encontrados de a e b , obtemos a função de ajuste linear relativa aos dados populacionais de Teófilo Otoni - MG no período de 2011 a 2019:

$$y = 674,65x + 136.254,0833. \quad (5.2)$$

O gráfico da Figura 4.2 corresponde à dispersão dos pontos e à reta referente ao ajuste linear simples calculado pelo método dos mínimos quadrados para a população teófilo-otonense no período de 2011 a 2019.

Figura 4.2: Modelo Linear Simples da População de Teófilo Otoni - MG de 2011 a 2019.



Fonte: Autoria Própria.

Em uma análise do gráfico, o modelo linear não é o melhor ajuste para representar esses dados demográficos.

4.3 - Ajuste por modelo linear exponencial.

Na subseção 3.3.3, vimos que, para os modelos exponenciais, o ajuste é feito através de curvas do tipo

$$y = be^{ax}, \text{ com } b > 0. \quad (5.3)$$

Contudo, para utilizar o método dos mínimos quadrados, uma mudança de variável deve ser realizada conforme apresentado na subseção 3.3.3.

Recapitulando, aplicamos o logaritmo neperiano em ambos os lados da equação (5.3), e obtemos

$$\ln(y) = \ln(be^{ax}) = \ln(b) + \ln(e)^{ax} = \ln(b) + ax.$$

Usando a mudança de variável $c = \ln(b)$, obtemos um modelo linear dado por

$$z = \ln(y) = c + ax. \quad (4.18)$$

Feito isso, podemos proceder utilizando as mesmas técnicas implementadas no processo de construção do modelo linear simples. Ao aplicarmos o logaritmo neperiano para a população y , c e a da equação (4.17), podemos empregar o método dos mínimos quadrados no ajuste, onde o sistema linear correspondente terá a forma

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \ln(y_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i \ln(y_i) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Em vista disso, para auxiliar na composição do sistema (4.19), é conveniente construir a Tabela 4.3, transformando cada ano no seu respectivo x_i .

Tabela 4.3: Ajuste Exponencial da População de Teófilo Otoni - MG. Foi considerado apenas as quatro primeiras casas decimais de cada $\ln(y_i)$.

Ano	x_i	POPULAÇÃO (y_i)	$x_i \cdot y_i$	$(x_i)^2$	$\ln(y_i)$	$x_i \ln(y_i)$
2011	1	135.154	135.154	1	11,8141	11,8141
2012	2	135.549	271.098	4	11,8170	23,6340
2013	3	140.067	420.201	9	11,8498	35,5494
2014	4	140.567	562.268	16	11,8534	47,4136
2015	5	141.046	705.230	25	11,8568	59,2840
2016	6	141.502	849.012	36	11,8600	71,1600
2017	7	141.934	993.538	49	11,8631	83,0417
2018	8	140.235	1.121.880	64	11,8510	94,8080
2019	9	140.592	1.265.328	81	11,8536	106,6824
Somatório = Σ	45	1.256.646	6.323.709	285	106,6188	533,3872

Fonte: Autoria Própria - Dados de Projeções Demográficas - IBGE.

Efetuada as devidas substituições no sistema (4.19) obtemos

$$\begin{pmatrix} 9 & 45 \\ 45 & 285 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106,6188 \\ 533,3872 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

cujo o desenvolvimento nos dá que

$$\begin{cases} 9c + 45a = 106,6188 & (I) \\ 45c + 285a = 533,3872 & (II) \end{cases}. \quad (5.5)$$

Resolvendo o sistema (5.5) fazendo $(II) - 5 \cdot (I)$, encontramos

$$\begin{aligned} 60a &= 0,2932 \\ \Rightarrow a &= \frac{0,2932}{60} \\ \Rightarrow a &\approx 0,0049. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 9c + 45 \cdot (0,0049) &= 106,6188 \\
 \Rightarrow 9c &= 106,6188 - 0,2205 \\
 \Rightarrow c &= \frac{106,3983}{9} \\
 \Rightarrow c &\approx 11,8221
 \end{aligned}$$

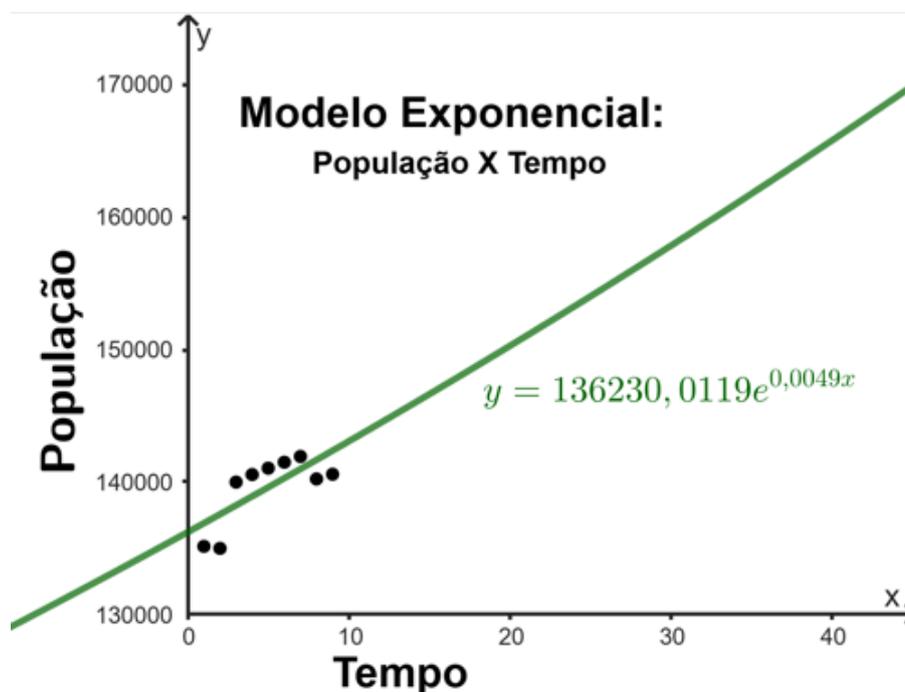
Como $c = \ln(b) \Rightarrow b = e^c \therefore b = 136.230,0119$.

Em seguida, devemos substituir os parâmetros encontrados na equação (5.3) para obter o modelo de ajuste exponencial que melhor representa a evolução populacional de Teófilo Otoni - MG no período de 2011 a 2019, com aproximação de quatro casas decimais para os valores de $\ln(y_i)$:

$$y = 136.230,0119e^{0,0049x}.$$

O gráfico da Figura 4.3 corresponde à dispersão dos pontos e à curva referente ao ajuste exponencial calculado pelo método dos mínimos quadrados para a população teófilo-otonense no período de 2011 a 2019.

Figura 4.3: Modelo Exponencial da População de Teófilo Otoni - MG de 2011 a 2019.



Fonte: Autoria Própria.

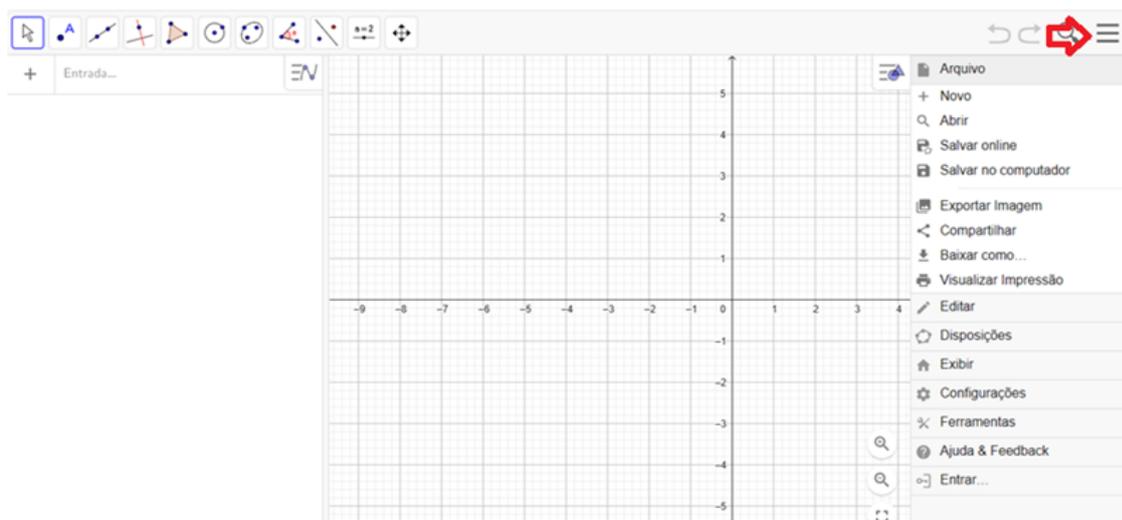
Antes de prosseguir com a exibição das etapas de construção do modelo logístico

para a população de Teófilo Otoni - MG no período de estudo, é necessário apresentar os passos para os ajustes linear simples e exponencial, por meio do método dos mínimos quadrados utilizando o GeoGebra Clássico, para que o aluno possa comparar os resultados obtidos. A seguir, com o auxílio de imagens para facilitar a assimilação, apresentamos o passo a passo.

4.4 - Modelo linear simples da evolução da população teófilo-otonense no período de 2011 a 2019 pelo GeoGebra Clássico.

Passo 1: Com o GeoGebra aberto na janela inicial, clique no ícone Menu como indicado na Figura 4.4 a seguir.

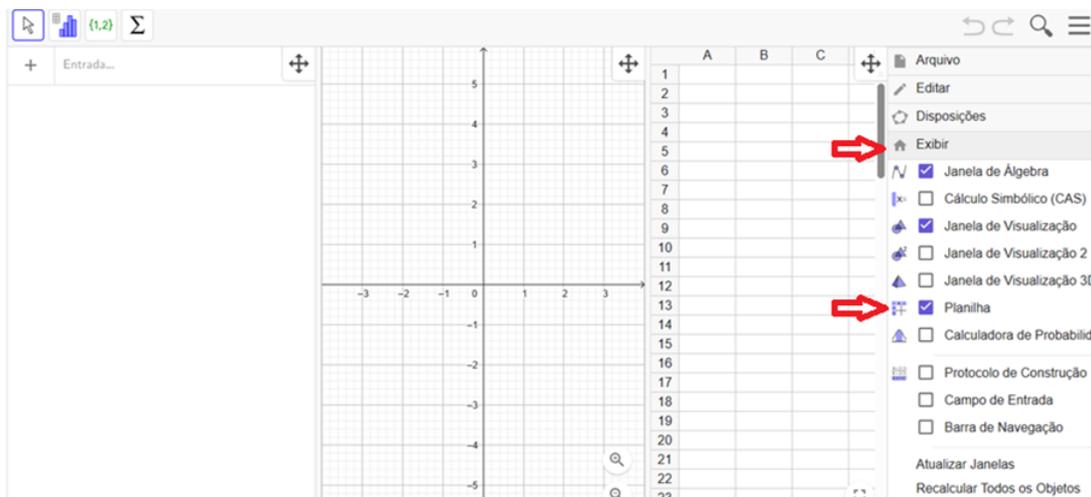
Figura 4.4: Passo 1 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Passo 2: Feito o passo 1, aparecerá uma janela a direita com várias opções. Clique no botão Exibir e em seguida no botão planilha como indicado na Figura 4.5, a seguir.

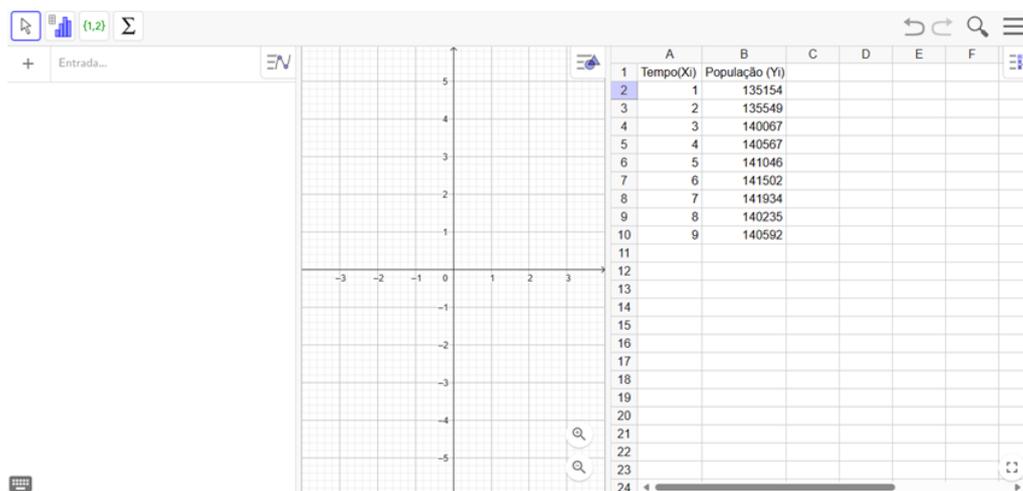
Figura 4.5: Passo 2 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Passo 3: Feito o passo 2, aparecerá uma janela constando uma planilha para inserção de dados. Copie os dados (x_i, y_i) da tabela original ou introduza manualmente os dados na planilha, conforme a Figura 4.6, a seguir.

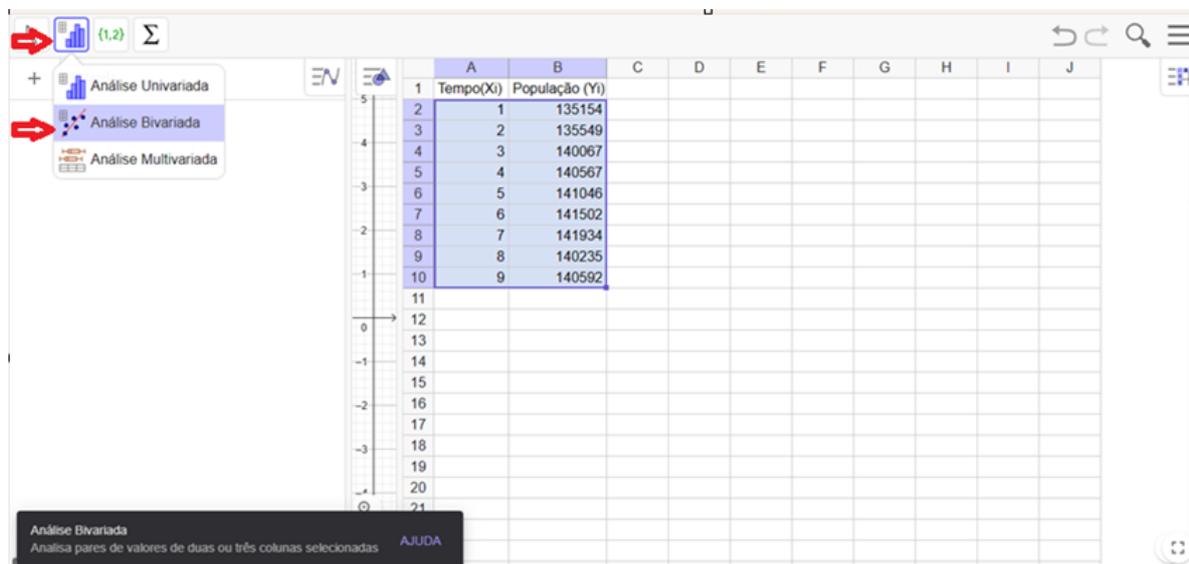
Figura 4.6: Passo 3 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Passo 4: Feito o passo 3, com o mouse selecione as entradas das duas colunas (x_i) e (y_i) , clique no ícone indicado e escolha a opção Análise Bivariada, como se vê na Figura 4.7, a seguir.

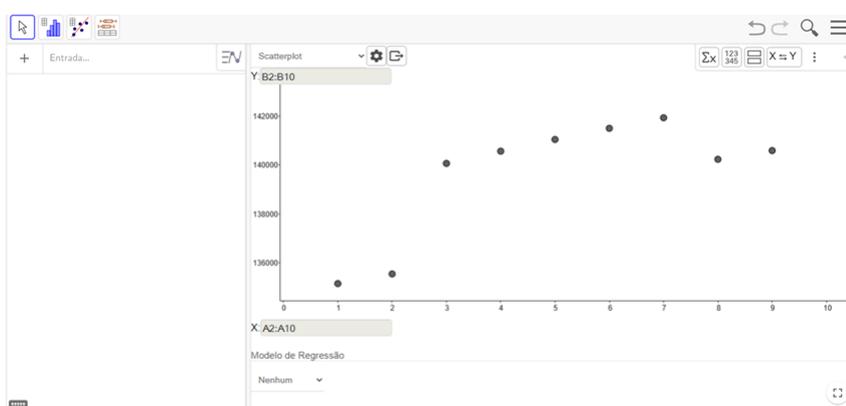
Figura 4.7: Passo 4 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Passo 5: Feito o passo 4, aparecerá um diagrama de dispersão dos pontos da relação do problema, como evidencia a Figura 4.8, a seguir.

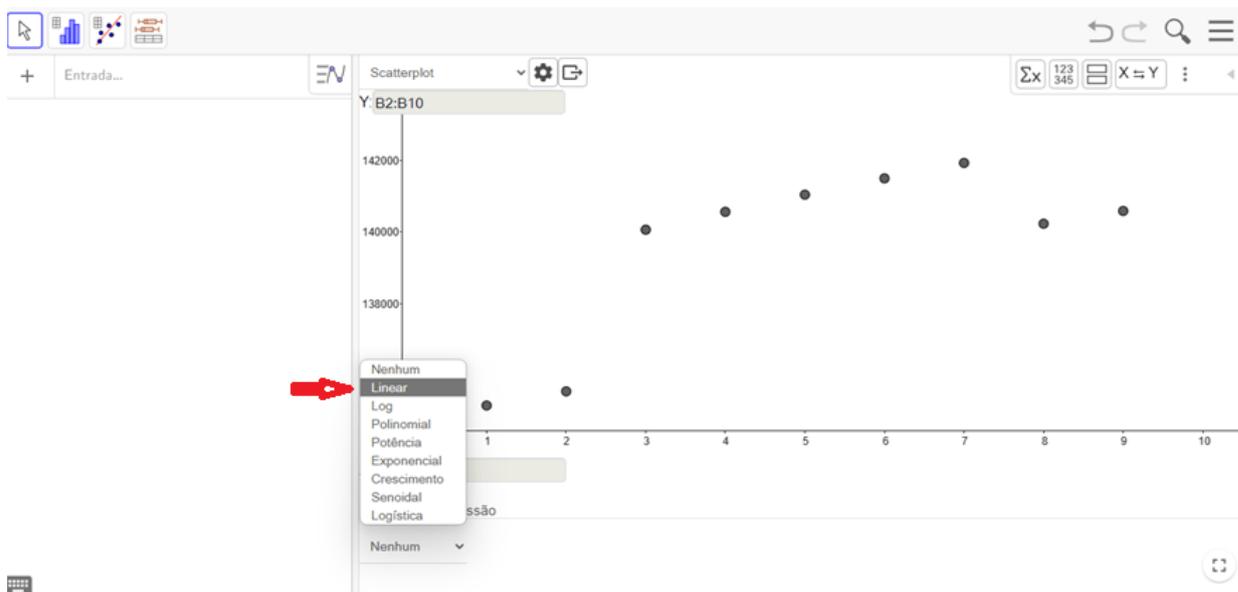
Figura 4.8: Passo 5 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Passo 6: Feito o passo 5, na janela de apresentação do diagrama de dispersão clique em Modelo de Regressão, na parte inferior da janela, e escolha a opção Linear, para que você tenha acesso às informações do ajuste, conforme mostra a Figura 4.9, a seguir.

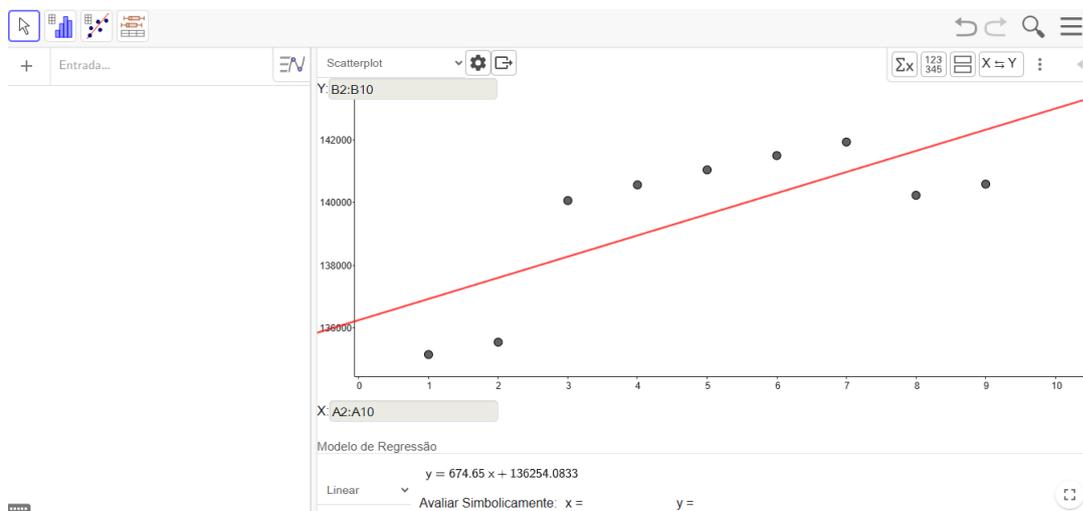
Figura 4.9: Passo 6 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Passo 7: Feito o passo 6, você tem acesso ao gráfico do ajuste no diagrama de dispersão e a fórmula matemática do ajuste linear simples referente a população Teófilotonense no período de 2011 a 2019, que deu exatamente igual a equação (5.2) encontrada na seção 4.2, $y = 674,65x + 136.254,0833$, conforme mostra a Figura 4.10, a seguir.

Figura 4.10: Passo 7 para o ajuste linear simples usando o GeoGebra Clássico.



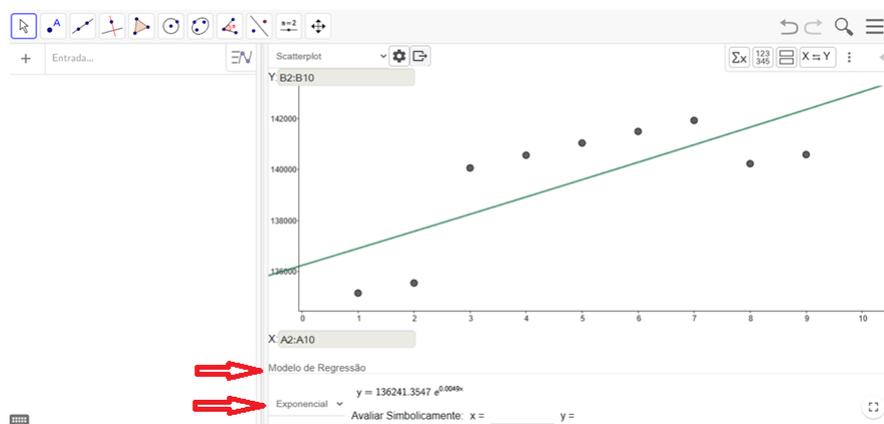
Fonte: Autoria Própria.

4.5 - Modelo exponencial da evolução da população teófilo-otonense no período de 2011 a 2019 pelo GeoGebra Clássico.

O passo a passo já foi explicitado na seção anterior, e aqui vamos, de imediato, para o Passo 6, fase em que o aluno deverá escolher, após clicar em Modelo de Regressão, a opção Exponencial.

Efetuada isso, temos como resultado o que podemos visualizar na Figura 4.11 a seguir.

Figura 4.11: Passo 7 para o ajuste exponencial usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Observe que, ao escolher a opção Exponencial, você teve acesso ao modelo de ajuste exponencial da população de Teófilo Otoni – MG no período de 2011 a 2019, onde a equação (5.3) obtida é $y = 136.241,3547e^{0,0049x}$. Podemos perceber uma ligeira diferença de onze habitantes a mais do valor de b obtido na subseção 4.3, devido às aproximações dos valores de $\ln(y_i)$, utilizadas na realização do sistema (5.4), e ao arredondamento aplicado no emprego do GeoGebra Clássico.

Desta forma, uma vez que o aluno tenha assimilado o uso do GeoGebra para obter modelos matemáticos, podemos avançar e realizar as rotinas, descritas na subseção 3.3.4, para obter o modelo logístico da evolução da população de Teófilo Otoni - MG no período de estudo.

4.6 - Ajuste por modelo logístico.

Como descrito na subseção 3.3.4, o ajuste de curva para o modelo logístico é dado pela expressão

$$y = \frac{K}{1 + be^{ax}}, \quad b > 0, \quad a < 0, \quad (5.6)$$

onde K é o parâmetro que representa a capacidade de suporte da população estudada, uma vez que, após um determinado intervalo de tempo, o número de indivíduos da população tende a se estabilizar; a é a taxa de crescimento e b é uma constante.

A primeira dificuldade que surge é estimar qual é a capacidade de suporte (K) da população em estudo, neste caso, do município de Teófilo Otoni - MG. Aqui, vamos utilizar o método Ford-Walford (BERTONE et al., 2019, p.73).

Este modelo pressupõe que, uma vez que a população esteja em equilíbrio, ela não varia mais, ou seja, $y_i = y_{i+1}$. Assim, a estimativa desse valor limite K pode ser obtida relacionando os valores das populações nos instantes i e $i + 1$.

Para que o método Ford-Walford forneça uma estimativa razoável para o valor de K , é conveniente considerar apenas os valores nos quais a taxa de crescimento apresenta redução. Observando a Tabela 4.4, constata-se que isso ocorre no período de 2013 a 2017.

Tabela 4.4: Crescimento relativo da População de Teófilo Otoni – MG no período 2012-2019.

Ano	População (y_i)	Crescimento relativo
2011	135.154	$\frac{135549-135154}{135154} = 0,0029225$
2012	135.549	$\frac{140067-135549}{135549} = 0,0333311$
2013	140.067	$\frac{140567-140067}{140067} = 0,0035697$
2014	140.567	$\frac{141046-140567}{140567} = 0,0034076$
2015	141.046	$\frac{141502-141046}{141046} = 0,0032329$
2016	141.502	$\frac{141934-141502}{141502} = 0,0030529$
2017	141.934	$\frac{140235-141934}{141934} = -0,0119703$
2018	140.235	$\frac{140592-140235}{140235} = 0,0025457$
2019	140.592	-

Fonte: Autoria Própria - Dados de Projeções Demográficas - IBGE.

Assim, nos cálculos dos valores de K , a e b da equação (5.6), consideraremos as informações populacionais de 2013 a 2017.

A partir dos pontos obtidos, ajusta-se uma função g para os pares (y_i, y_{i+1}) , ou seja, $g(y_i) = y_{i+1}$. Nesse caso, temos um ajuste linear simples, que será obtido utilizando o GeoGebra Clássico, mas que também poderia ser encontrado por meio dos procedimentos desenvolvidos em 3.3.1.2, com a aplicação do método dos mínimos quadrados para obter o ajuste linear simples.

Destarte, para facilitar a realização das rotinas constantes na subseção 3.3.4, utilizando o GeoGebra Clássico, é oportuno construir a Tabela 4.5.

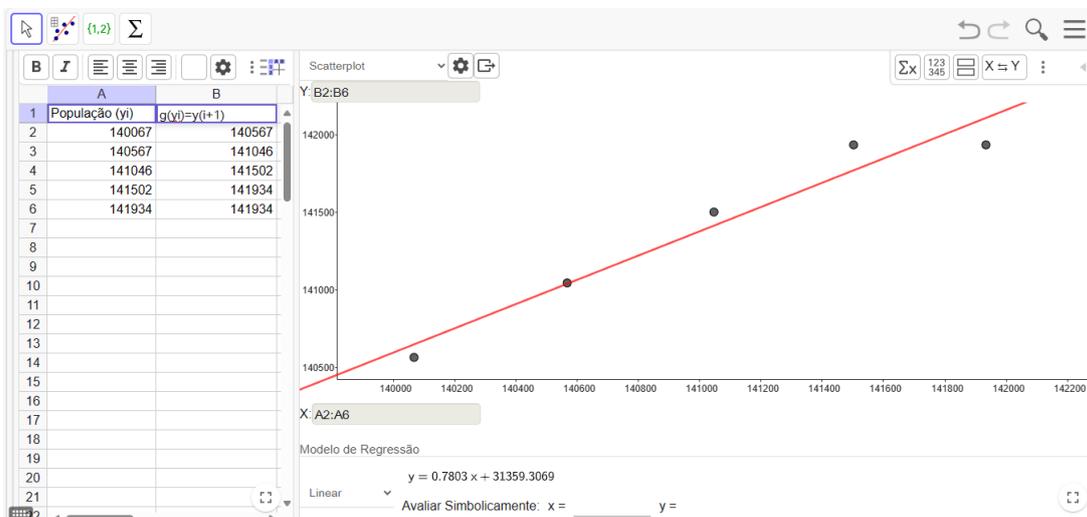
Tabela 4.5: Ajuste Logístico da População de Teófilo Otoni – MG.

Ano	x_i	População(y_i)	$g(y_i) = y_{i+1}$	$Y = \ln\left(\frac{K-y_i}{y_i}\right)$
2013	1	140.067	140.567	-3,96006
2014	2	140.567	141.046	-4,17098
2015	3	141.046	141.502	-4,42379
2016	4	141.502	141.934	-4,74128
2017	5	141.934	141.934	-5,17483

Fonte: Autoria Própria - Dados de Projeções Demográficas - IBGE.

Fazendo o ajuste no GeoGebra da lista de dados (y_i, y_{i+1}) , seguindo os mesmos passos da seção 4.4 e escolhendo, no passo 6, a opção Linear, obtém-se o ajuste polinomial de primeiro grau $g(y) = 0,7803y + 31.359,3069$, como mostra a Figura 4.12.

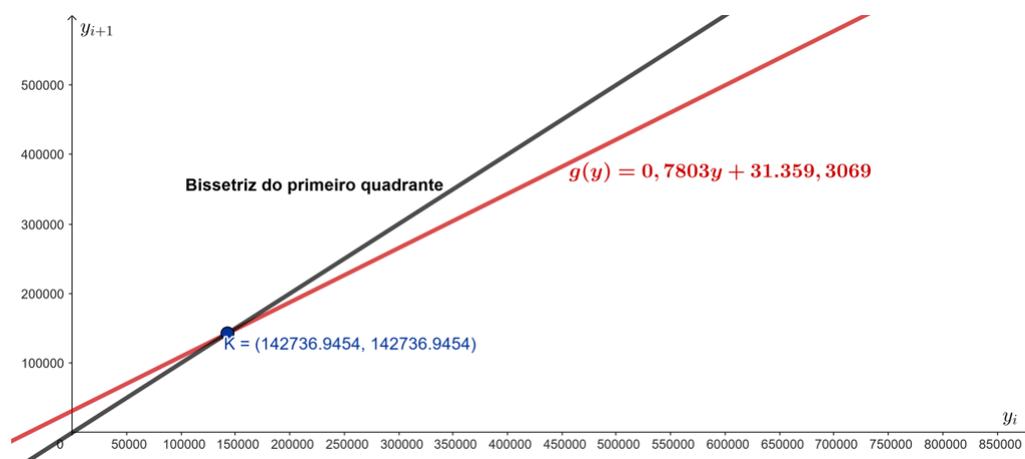
Figura 4.12: Ajuste polinomial linear da população(y_i) e $g(y_i) = y_{i+1}$ para o método-Walford - GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Para encontrarmos o valor de K , utilizamos o GeoGebra, reconstruindo a Figura 3.10 da subseção 3.3.4, conforme ilustrado na Figura 4.13.

Figura 4.13: Capacidade de Suporte da População de Teófilo Otoni – MG: Método de Ford-Walford - GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Observe que o valor encontrado para a capacidade de suporte da população de Teófilo Otoni - MG foi de $K = 142.736,9454$. Isso foi feito geometricamente, encontrando a interseção de $g(y) = 0,7803y + 31.359,3069$ e a bissetriz do primeiro quadrante, que corresponde a resolver a equação $g(y) = y$, ou seja,

$$y = 0,7803y + 31.359,3069. \quad (5.7)$$

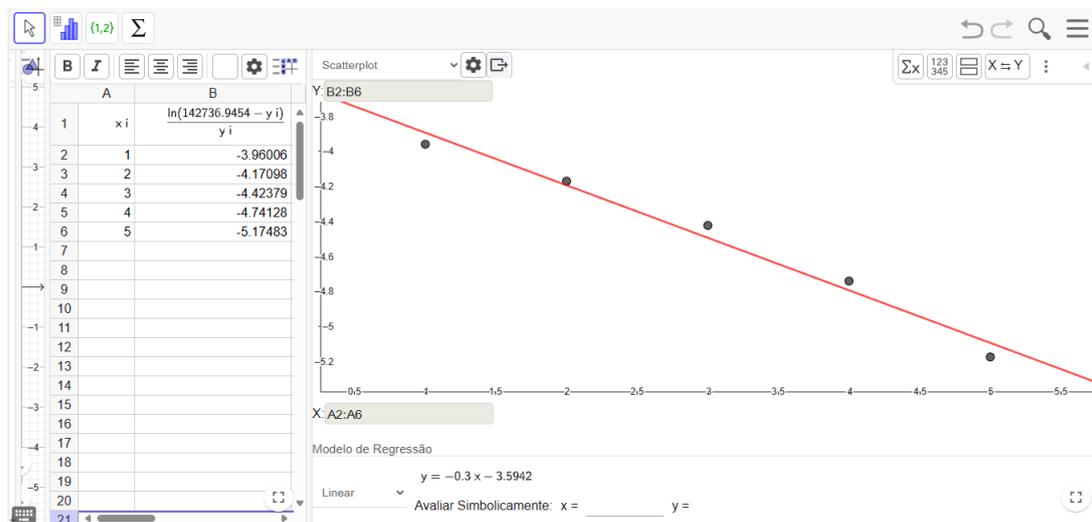
Portanto, resolvendo a equação (5.7), encontramos

$$K := y = \frac{31.359,3069}{1 - 0,7803} = 142.736,9454.$$

Determinado o valor da população limite K , passamos agora a obter os parâmetros a e b do modelo (5.6), utilizando a mudança de variáveis obtida na equação (4.23) da subseção 3.3.4, conforme a Tabela 4.5. Isso pode ser feito pelo GeoGebra.

Logo, ao realizar os procedimentos para o ajuste no GeoGebra com a lista de dados $[x_i, Y_i = \frac{\ln(K-y_i)}{y_i}]$, seguindo os mesmos passos da seção 4.4 e escolhendo novamente a opção linear no passo 6, obtém-se como resultado a regressão de análise mostrada na Figura 4.14.

Figura 4.14: O resultado do ajuste linear dos dados (x_i, Y_i) - Método de Ford-Walford - GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

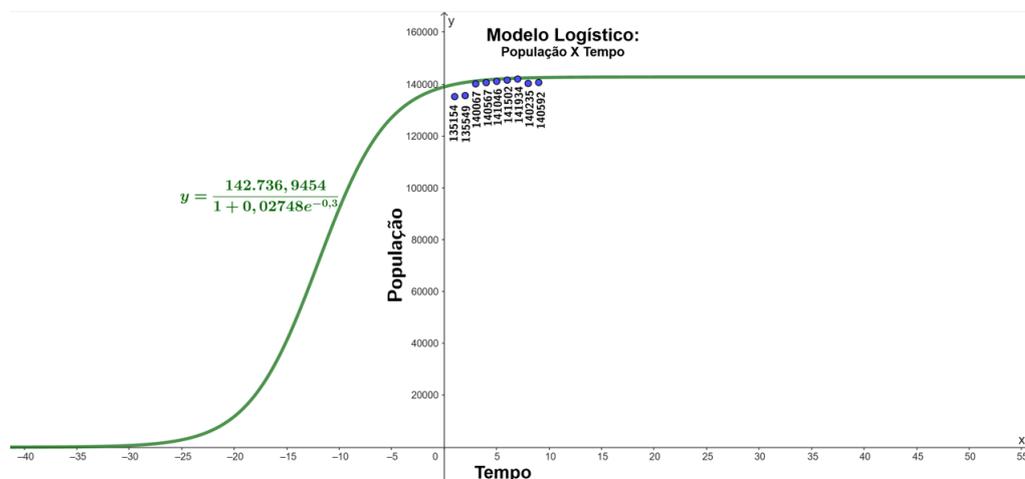
Conforme as informações do ajuste linear da Figura 4.14, obtemos a equação $Y = ax + \ln(b) = Y = -0,3x - 3,5942$. Assim, encontramos $a = -0,3$ e, ao fazer a mudança de base em b , obtemos $b = e^{-3,5942} \Rightarrow b = 0,02748$.

Outrossim substituindo os valores de K , a e b na equação (5.6), obtemos como modelo do ajuste logístico para a população de Teófilo Otoni – MG no período de estudo, a expressão

$$y = \frac{142.736,9454}{1 + 0,02748e^{-0,3x}}$$

O gráfico da Figura 4.15 mostra a dispersão dos pontos e a curva referente ao modelo de ajuste logístico da população de Teófilo Otoni de 2011 a 2019.

Figura 4.15: Modelo Logístico da População de Teófilo Otoni – MG de 2011 a 2019.



Fonte: Autoria Própria.

Finalizada a etapa da matematização, sugerimos que o aluno avance para a terceira e última fase, que é o Modelo Matemático e suas subetapas: interpretação e resolução. Essa fase busca validar os modelos, o que pode ser feito por meio da comparação entre os modelos, apurando e analisando os erros obtidos em relação aos dados reais projetados pelo IBGE no período de realização dos ajustes (2011 a 2019), e também com dados mais atuais, incluindo os verificados no Censo Demográfico de 2022.

Diante disso, na próxima seção, apresentamos a comparação sugerida entre os modelos obtidos para a população de Teófilo Otoni – MG no período de estudo e nos anos de 2020, 2021 e 2022, a fim de indicar uma possibilidade para o aluno avaliar os modelos e discutir aquele que melhor poderia ser utilizado para projetar a população da sua cidade no decorrer do tempo.

4.7 - Análise dos modelos.

A análise e a interpretação dos modelos foram feitas por meio de uma comparação basilar entre os três modelos, a partir da apuração do erro entre a diferença dos valores reais e os valores estimados pelos modelos, possibilitando um estudo mais crítico sobre as expressões matemáticas de cada um. Os resultados dos modelos:

linear ($y = 674,65x + 136.254,0833$), exponencial ($y = 136.230,0119e^{0,0049x}$) e logístico ($y = \frac{142.736,9454}{1+0,02748e^{-0,3x}}$) estão contidos nas Tabelas 4.6 e 4.7.

Tabela 4.6: Erro entre os valores obtidos pelos modelos e as projeções apresentadas pelo IBGE de 2011 a 2019 (período de realização dos ajustes).

x_i	Ano	Linear	Erro	Exponencial	Erro	Logístico	Erro	Observado
1	2011	136928,73	1774,73	136849,17	1695,17	139889,12	4735,12	135154
2	2012	137603,38	2054,38	137571,62	2022,62	140616,26	5067,26	135549
3	2013	138278,03	1788,97	138608,86	1458,14	141159,83	1092,83	140067
4	2014	138952,68	1614,32	138926,45	1640,55	141565,23	998,23	140567
5	2015	139627,33	1418,67	139608,86	1437,14	141867,07	821,07	141046
6	2016	140301,98	1200,02	140294,63	1207,37	142091,50	589,50	141502
7	2017	140976,63	957,37	140983,76	950,24	142253,57	319,57	141934
8	2018	141651,28	1416,28	141676,27	1441,27	142381,99	2146,99	140235
9	2019	142325,93	1733,93	142372,19	1780,19	142473,82	1881,82	140592

Fonte: Autoria Própria.

Tabela 4.7: Erro entre os valores obtidos pelos modelos e as projeções apresentadas pelo IBGE de 2020 e 2021 e Censo de 2022.

x_i	Ano	Linear	Erro	Exponencial	Erro	Logístico	Erro	Observado
10	2020	143000,58	2063,58	143071,53	2134,53	142541,92	1604,92	140937
11	2021	143675,23	2406,23	143774,30	2505,30	142592,42	1323,42	141269
12	2022	144349,88	6931,88	144480,52	7062,52	142629,85	5211,85	137418 ¹

Fonte: Autoria Própria.

Observe que, na Tabela 4.6, referente ao período de realização dos ajustes (2011 a 2019), o modelo que mais se repete como o que apresenta o menor erro nos dados projetados pelo IBGE é o logístico.

Percebe-se ainda que, em quatro anos, o modelo linear (2011 e 2012) e o exponencial (2018 e 2019) são aqueles que mais se aproximaram dos valores reais, indicando que, a curto prazo, até poderiam ser considerados adequados. Contudo, devido ao fato de admitirem um crescimento ilimitado — o que não é razoável para populações a longo

¹População de Teófilo Otoni - MG conforme o Censo Demográfico de 2022.

prazo — tornam-se inadequados para projeções populacionais futuras. Além disso, o fato de os erros do modelo logístico não serem absurdamente diferentes dos erros dos modelos linear (2011 e 2012) e exponencial (2018 e 2019) corrobora a tese da população limite calculada no modelo logístico.

Vale observar que a interpretação da Tabela 4.7 reforça o fato de que o modelo logístico é o mais adequado para representar a evolução da população teófilo-otonense ao longo dos anos, uma vez que, tanto nas projeções feitas pelo IBGE nos anos de 2020 e 2021, quanto no resultado apurado pelo Censo de 2022, este foi o modelo que apresentou o menor erro entre os três elaborados.

Cabe enfatizar aos alunos que a construção de modelos de dinâmica e evolução populacional, principalmente os modelos logísticos, depende da inserção de suposições específicas, variáveis e condições ambientais, o que pode ser aprofundado no Capítulo 6 do livro de Rodney Carlos Bassanezi (2002), *Ensino-aprendizagem como modelagem matemática*. O objetivo deste trabalho foi restrito ao uso do Método dos Mínimos Quadrados, a partir da coleta de dados, para construir modelos algébricos que caracterizam a função afim e exponencial, estudadas no ensino médio, indicando um caminho diferente para a aplicação desses conteúdos em sala de aula e reforçando a importância da matemática no estudo de fenômenos e problemas reais.

No próximo capítulo, apresentaremos uma proposta de atividade para o ensino de funções exponenciais e logaritmos, utilizando o modelo de crescimento populacional discreto de Malthus. Entendemos que, diante dos obstáculos impostos por esses conteúdos aos alunos e professores, seja pela complexidade ou pelas poucas possibilidades de aplicação no cotidiano do aluno, é importante apresentar essa aplicação.

Além da apresentação da atividade, também são sugeridas propostas de intervenções do professor, após cada questão, visando que o aluno obtenha êxito e encontre as respostas corretas.

5 - PROPOSTA DE ATIVIDADE UTILIZANDO O MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DE MALTHUS.

O processo de ensino das funções exponenciais e logaritmos no ensino médio se mostra desafiador tanto para o aluno quanto para o professor, inclusive na apresentação de situações reais para introduzi-los em sala de aula. A busca por contextualizar esses conteúdos por meio de uma abordagem prática e exemplos reais é importante para que o aluno consiga perceber o sentido e a aplicação no seu estudo.

A atividade a seguir busca apresentar uma proposta de introduzir esses conteúdos não por meio do estudo de fórmulas prontas e sem sentido imediato para o aluno, mas com o objetivo de levá-lo a perceber o quão importantes são na modelagem de situações e problemas reais.

Nesse sentido, com a proposta da atividade deste capítulo, visamos apresentar um problema contextualizado para tratar da função exponencial e dos logaritmos, utilizando o modelo do economista e matemático inglês Thomas Robert Malthus, que, segundo Basanezi (2002), foi quem propôs pela primeira vez, em 1798, a utilização da matemática para estabelecer um modelo de crescimento de uma população humana.

É importante, antes de apresentarmos a atividade proposta, expormos o modelo de Malthus.

5.1 - Modelo Malthusiano.

No estudo atual de dinâmica populacional, convencionou-se denominar de Modelo de Malthus o fato de que o crescimento de uma população, ou seja, a taxa de crescimento em um determinado instante, é proporcional à população total em cada instante (crescimento exponencial). Analiticamente, se, em um instante t , temos $P(t)$ como a população total, e considerando a clara dependência de $P(t)$ com o tempo decorrido, o modelo contínuo de Malthus pode ser descrito como

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad (6.1)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade ($k > 0$) e d se refere à derivada de P em

relação ao tempo t . Esse modelo é útil quando empregado para descrever o crescimento populacional em um intervalo curto de tempo, como, por exemplo, na evolução da população de um país ao longo de uma década, assumindo que as taxas de fertilidade e de mortalidade permaneçam constantes durante esse período.

A equação (6.1)

$$\frac{1}{P}dP = k.dt. \quad (6.2)$$

Integrando dos dois lados da igualdade (6.2)

$$\int \frac{1}{P}dP = \int k dt.$$

Resolvendo as integrais segue que

$$\ln P = k.t + c, \quad (6.3)$$

onde c é uma constante arbitrária de integração.

Como é conveniente isolarmos P , aplicamos na expressão (6.3) a propriedade inversa do logaritmo, ou seja, a exponencial:

$$\begin{aligned} e^{\ln P} &= e^{k.t+c} \\ \Rightarrow P &= e^{k.t} \cdot e^c. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Sendo o tempo $t = 0$, a população inicial será

$$P_0 := P(0) = e^{k \cdot 0} \cdot e^c = e^c \quad (6.5)$$

Substituindo as variáveis encontradas na equação (6.5) na equação (6.4) obtemos, que o modelo contínuo de Malthus é

$$P(t) = P_0 \cdot e^{k.t}. \quad (6.6)$$

No modelo de Malthus, temos que a taxa de crescimento populacional α (taxa de natalidade menos a de mortalidade) em um instante t específico, considerada constante, é dada por:

$$\alpha = R(t) = \frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)}. \quad (6.7)$$

A equação (6.7) indica que a variação relativa da população é constante, ou seja, que a variação da população é proporcional à população em cada período de tempo.

O modelo discreto de Malthus é dado por

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t). \quad (6.8)$$

Considerando dada a população no instante inicial $P(0) = P_0$, a solução de (6.8) é obtida por recorrência da expressão

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1 + \alpha)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (6.9)$$

O processo recursivo de (6.9) fornece:

$$\begin{aligned} P_1 &= (1 + \alpha)P_0 \\ P_2 &= (1 + \alpha)P_1 = (1 + \alpha)(1 + \alpha)P_0 = (1 + \alpha)^2 P_0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ P_t &= (1 + \alpha)P_{t-1} = (1 + \alpha)^t P_0, \end{aligned}$$

ou seja, o Modelo Discreto de Malthus é

$$P(t) = (1 + \alpha)^t P_0. \quad (6.10)$$

5.2 - Atividade sobre a evolução da população de Minas Gerais a partir de 1970 segundo o Modelo de Malthus.

Atividade - A população de Minas Gerais na década de 70 cresceu aproximadamente a uma taxa de 1,6% ao ano. Assim, considerando que a população mineira era de 11.646.095 habitantes em 1970, conforme o censo demográfico realizado pelo IBGE, responda às questões abaixo.

Questão 01 - Qual era a população mineira em:

a) 1971?

Solução: Em 1971, significa que terá passado o primeiro período de crescimento, pois a população inicial é a de 1970, que era de 11.646.095 habitantes. Se $P(t)$ é a população no instante t , temos $P(0) = 11.646.095$. Sabemos que o crescimento em determinado período é dado pela população do período anterior, acrescida de 1,6% a cada 1 ano decorrido. Assim, temos a equação:

$$P(t + 1) = P(t) + 0,016P(t) \Rightarrow P(t + 1) = 1,016P(t).$$

Como foi requisitado o cálculo da população depois de um ano:

$$P(0 + 1) = 1,016P \Rightarrow P(1) = 1,016P(0) = 1,016.11646095 = 11.832.432,52.$$

b) 1972?

Solução: Em 1972 equivale a afirmar que passou o segundo período de crescimento. Ou seja:

$$P(t + 1) = 1,016P(t) \Rightarrow P(2) = 1,016P(1) = 1,016.11832432,52 = 12.021.751,44.$$

c) 1973?

Solução: 1973 são 3 períodos depois. Logo:

$$P(t + 1) = 1,016P(t) \Rightarrow P(3) = 1,016P(2) = 1,016.12021751,44 = 12.214.099,46.$$

d) 1974?

Solução: 1974 corresponde ao intervalo de 4 períodos. Portanto

$$P(t + 1) = 1,016P(t) \Rightarrow P(4) = 1,016P(3) = 1,016.12214099,46 = 12.409.525,05.$$

e) 1975?

Solução: 1975 são 5 períodos depois. Assim

$$P(t + 1) = 1,016P(t) \Rightarrow P(5) = 1,016P(4) = 1,016.12409525,05 = 12.608.077,46.$$

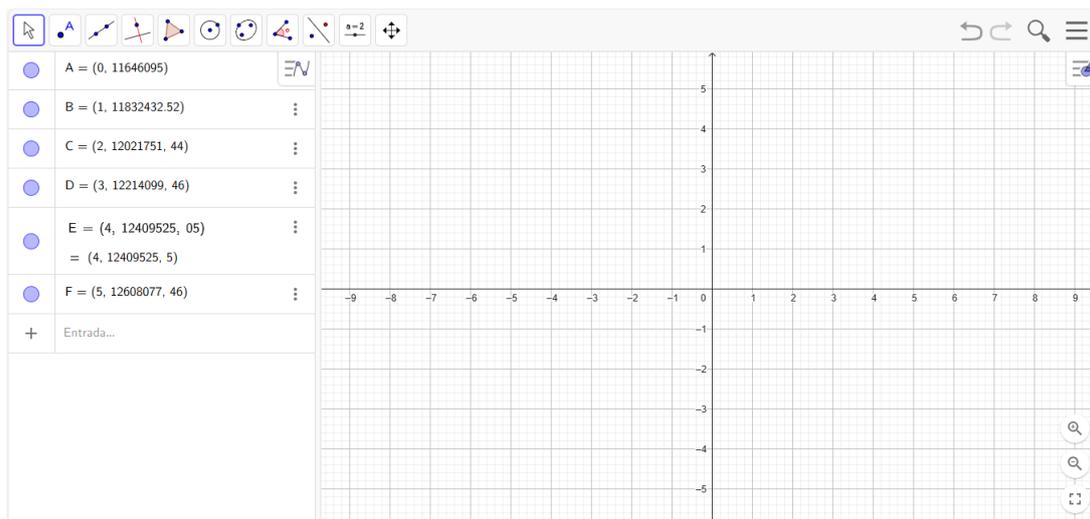
Observe que para calcular o número de habitantes a cada período de um ano, foi necessário multiplicar a população do ano anterior por 1,016, ou seja, $1 + 1,6\%$. De acordo o modelo e o que é proposto nesse trabalho, o professor deve orientar os alunos a discutir e consolidar essa conclusão.

Questão 02 – Com o auxílio do GeoGebra Clássico, elabore o diagrama de dispersão dos dados obtidos na questão 01.

Solução:

Passo 01: Com o GeoGebra Clássico aberto na janela inicial, insira os pontos obtidos na questão 01 no campo “entrada”, conforme mostrado na Figura 5.1 a seguir.

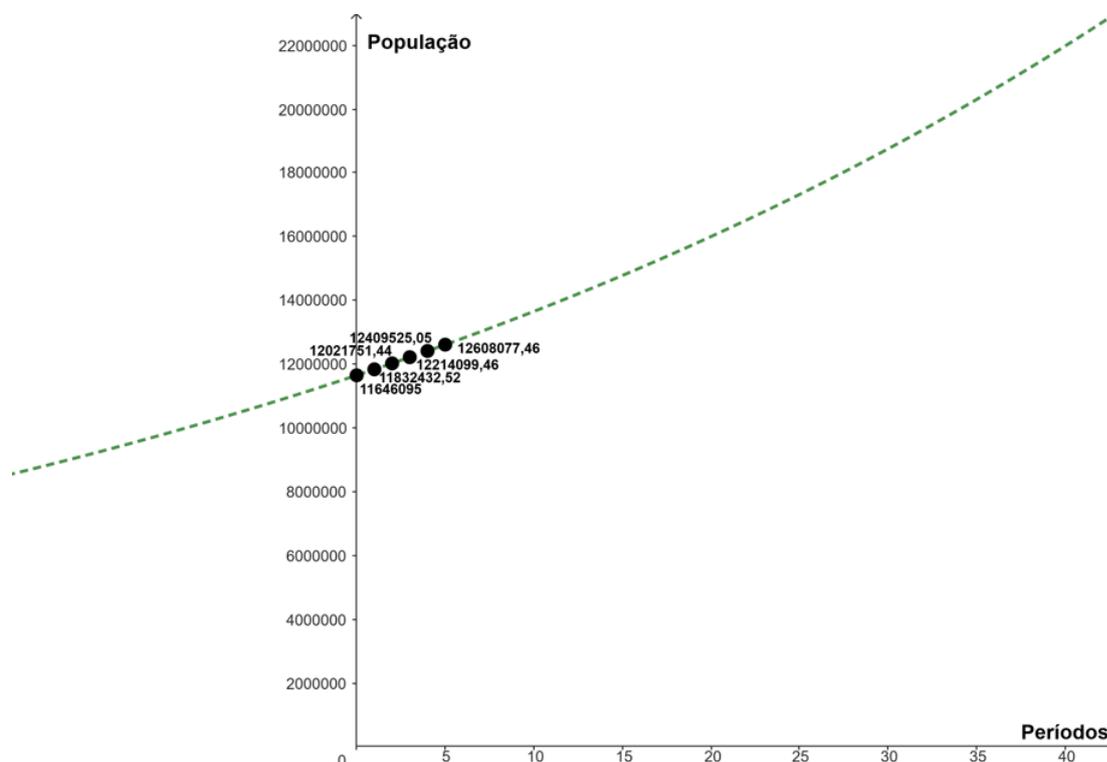
Figura 5.1: Passo 1 para o diagrama de dispersão usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Passo 02: Feito o passo 1, após as devida ampliações, o diagrama de dispersão é visualizado, como mostrado na Figura 5.2.

Figura 5.2: Passo 2 para o diagrama de dispersão usando o GeoGebra Clássico.



Fonte: Autoria Própria.

Note que, nesta questão, é importante que o aluno, com as orientações pertinentes do professor, perceba o formato ou tipo de curva que pode ser obtido fazendo a união pontilhada dos pontos localizados, pois t assume somente valores inteiros, caracterizando o emprego do modelo discreto de Malthus.

Questão 03 - Qual é a expressão que fornece o número de habitantes de Minas Gerais na década de 70 em função do número t de períodos de 1 ano?

Solução: Com base nas informações das questões 01 e 02, podemos agir da seguinte forma:

Se $P(t + 1) = 1,016P(t)$, temos

$$P(1) = 1,016P(0)$$

$$P(2) = 1,016P(1) = 1,016 \cdot 1,016P(0) = (1,016)^2P(0)$$

$$P(3) = 1,016P(2) = 1,016 \cdot (1,016)^2P(0) = (1,016)^3P(0)$$

$$P(4) = 1,016P(3) = 1,016 \cdot (1,016)^3P(0) = (1,016)^4P(0)$$

$$P(5) = 1,016P(4) = 1,016 \cdot (1,016)^4 P(0) = (1,016)^5 P(0)$$

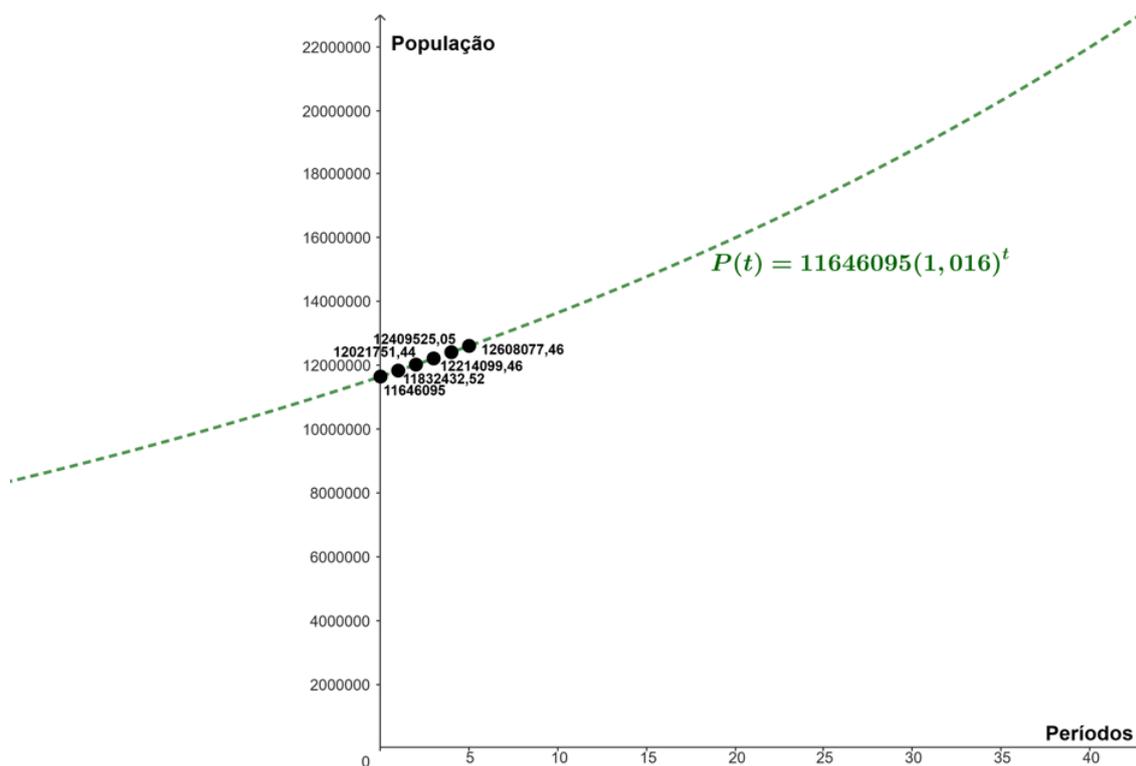
·
·
·

$$P(t) = (1,016)^t P(0).$$

Aqui, cabe enfatizar novamente a importância do professor para orientar o aluno a calcular $P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), \dots$, até que ele identifique o padrão e obtenha a expressão solicitada de forma intuitiva.

Questão 04 - A curva abaixo é a curva que representa a expressão obtida na questão 03.

Figura 5.3: Modelo discreto de Malthus da População de Minas Gerais – década de 70.



Fonte: Autoria Própria.

Utilizando a expressão encontrada na questão anterior, determine qual seria a população mineira no ano de 1980.

Solução: : Em 1980, $t = 10$, tem-se que se

$$P(t) = 11.646.095(1,016)^t, \text{ então } P(10) = 11.646.095(1,016)^{10} = 13.649.520,90.$$

Estima-se que o aluno, com a intervenção do professor, se necessário, possa inferir que encontrar a população em 1980 equivale a 10 períodos de tempo t , uma vez que a população inicial foi considerada a de 1970.

Questão 05 - Para análise do modelo de Malthus, determine a taxa de crescimento populacional relativa no instante t , $R(t)$, definida por:

$$R(t) = \frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)}$$

a) No instante $t = 0$.

Solução:

$$R(0) = \frac{P(1) - P(0)}{P(0)} = \frac{11832432,52 - 11646095}{11646095} = 0,016.$$

b) No instante $t = 1$.

Solução:

$$R(1) = \frac{P(2) - P(1)}{P(1)} = \frac{12021751,44 - 11832432,52}{11832432,52} = 0,015999.$$

c) No instante $t = 2$.

Solução:

$$R(2) = \frac{P(3) - P(2)}{P(2)} = \frac{12214099,46 - 12021751,44}{12021751,44} = 0,015999.$$

d) No instante $t = 3$.

Solução:

$$R(3) = \frac{P(4) - P(3)}{P(3)} = \frac{12409525,05 - 12214099,46}{12214099,46} = 0,015999.$$

e) No instante $t = 4$.

Solução:

$$R(4) = \frac{P(5) - P(4)}{P(4)} = \frac{12608077,46 - 12409525,05}{12409525,05} = 0,016.$$

Observe que o valor encontrado para a taxa de crescimento foi aproximadamente igual em todos os casos ($0,016 = 1,6\%$), evidenciando que o aluno obteve uma expressão correspondente ao modelo populacional de Malthus. Isso se deve ao fato de que uma característica muito importante desse modelo é que a taxa de crescimento populacional seja constante.

Questão 06 - Supondo que a população de Minas Gerais evolua conforme o modelo discreto de Malthus, obtido para a evolução populacional mineira na década de 70, responda em qual ano a população mineira alcançaria 18.749.581 habitantes?

O professor, como mediador, encontrará nessa questão um momento ideal para introduzir o conceito de logaritmo, pois, ao tentar resolvê-la analiticamente, utilizando equações exponenciais para responder ao que foi solicitado, o aluno encontrará dificuldades. Além disso, se optar por executar a rotina empregada na primeira questão, perceberá que o processo é exaustivo e possui grande potencial de erro.

Solução:

Note que, para alcançar 18.749.581 habitantes teríamos $P(t) = 18.749.581$, ou seja,

$$\begin{aligned} 11646095 \cdot (1,016)^t &= 18749581 \\ \Rightarrow (1,016)^t &= \frac{18749581}{11646095} \\ \Rightarrow (1,016)^t &= 1,609945737. \end{aligned}$$

Aplicando-se logaritmo de base $(1,016)$ a ambos os lados da equação $(1,016)^t = 1,609945737$ e utilizando as propriedades de logaritmo segue que:

$$\begin{aligned} \log_{1,016}(1,016)^t &= \log_{1,016}(1,609945737) \\ \Rightarrow t \log_{1,016}(1,016) &= \log_{1,016}(1,609945737) \\ \Rightarrow t &= \log_{1,016}(1,609945737). \end{aligned}$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos que $t = 30$ períodos depois, ou seja, a população de Minas Gerais alcançaria 18.749.581 habitantes no ano de 2000.

Sugerimos que conduza o professor a propor ao aluno que busque uma validação para o modelo de Malthus construído, analisando e comparando os números reais obtidos pelos censos demográficos brasileiros, constantes na Tabela 5.1 abaixo, com as populações encontradas a partir do modelo discreto de Malthus em 1980 e 2000.

Tabela 5.1: Erro entre os valores obtidos pelo modelo discreto de Malthus e os censos demográficos realizados pelo IBGE em 1970, 1980 e 2000.

Período	Censo demográfico	Modelo discreto de Malthus $[P(t) = (1,016)^t P(0)]$	Erro
1970	11.646.095	11.646.095	-
1980	13.651.852	13.649.520,90	-0,017%
2000	17.866.402	18.749.581	4,94%

Fonte: Autoria Própria - Dados dos Censos Demográficos - IBGE.

Observe que, para o ano de 1980, o modelo se mostrou satisfatório, como esperado, uma vez que a taxa de crescimento utilizada foi de 0,016%, a qual corresponde à taxa média apurada com base nos dados dos censos de 1970 e 1980, calculada pelo modelo malthusiano, como se vê:

$$\begin{aligned}
 P(t) = (1 + \alpha)^t P_0 \Rightarrow 13651852 = (1 + \alpha)^{10} 11646095 \Rightarrow (1 + \alpha)^{10} &= \frac{13651852}{11646095} \\
 \Rightarrow \alpha = \sqrt[10]{1,172225712} - 1 \cong 0,016.
 \end{aligned}$$

Quanto às populações verificadas para o ano de 2000, o modelo não se mostrou satisfatório, uma vez que a população mineira estimada pelo modelo naquele ano seria superior, em uma quantidade considerável de habitantes, à população real verificada pelo censo demográfico, indicando a necessidade de ajustar o modelo. Nesse momento, o professor poderá sugerir ao aluno ajustar o modelo discreto de Malthus para o modelo contínuo, sobretudo se o aluno já tiver assimilado o estudo de logaritmos.

Para isso, o professor poderia instruir o aluno a considerar os modelos abaixo:

Modelo Discreto: $P(t) = (1 + \alpha)^t P_0 = P_0(1,016)^t$.

Modelo Contínuo: $P(t) = P_0 e^{kt}$.

Encontrando que:

$$P_0(1,016)^t = P_0e^{kt} \Rightarrow (1,016)^t = e^{kt},$$

aplicando o logaritmo natural a ambos os lados da equação $(1,016)^t = e^{kt}$ e utilizando as propriedades de logaritmo, temos:

$$\begin{aligned} \ln(1,016)^t &= \ln e^{kt} \\ \Rightarrow t \cdot \ln(1,016) &= k \cdot t \cdot \ln e \\ \Rightarrow k &= \ln(1,016) \cong 0,016. \end{aligned}$$

Desde que $P(0) = 11.646.095$, o modelo contínuo de Malthus obtido é

$$P(t) = 11.646.095e^{0,016t}.$$

Para efeito de comparação e análise da eficiência ao aluno, sob a orientação do professor, sugerimos construir uma tabela contendo os cálculos com os dois modelos de Malthus e os resultados aferidos pelos censos demográficos, conforme mostrado na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Erro entre os valores obtidos pelos modelos de Malthus e os censos demográficos realizados pelo IBGE em 1970, 1980 e 2000.

Período	Censo demográfico	M.D.M.¹ $P(t) = (1,016)^t P(0)$	Erro	M.C.M.² $P(t) = 11646095e^{0,016t}$	Erro
1970	11.646.095	11.646.095	-	11.646.095	-
1980	13.651.852	13.649.520,90	-0,017%	13.666.819,09	0,109%
2000	17.866.402	18.749.581	4,94%	18.820.956,02	5,34%

Fonte: Autoria Própria - Dados dos Censos Demográficos - IBGE.

Após realizar os cálculos, espera-se que o discente perceba que os resultados encontrados são semelhantes. Se continuar utilizando esses modelos que adotam uma taxa de crescimento constante, ele chegará à conclusão de que a população aumentará indefinidamente, o que contraria a ideia de população limite apresentada na proposta de atividade

¹Modelo Discreto de Malthus.

²Modelo Contínuo de Malthus.

do capítulo anterior. Essa ideia sustenta os modelos logísticos, que são construídos com base no fato de que as taxas de crescimento de uma população tendem a diminuir com o passar do tempo.

6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS.

A primeira proposta de atividade apresentada indica que é possível trabalhar o Ajuste Linear no Ensino Médio, especificamente por meio do Método dos Mínimos Quadrados. É possível explorar o estudo das funções polinomiais do 1º e 2º graus, além das funções exponenciais, apresentando formas para que o aluno deduza os parâmetros e coeficientes das expressões matemáticas que representam os modelos obtidos e construa os respectivos gráficos representativos. O uso do GeoGebra Clássico permite aos alunos comprovar os modelos encontrados por meio de comparações entre as curvas características de cada um, consolidando, assim, os conceitos matemáticos estudados.

Cabe ressaltar que a construção de modelos matemáticos por meio da modelagem matemática facilita a integração entre pesquisa e ensino, dado o caráter investigativo das práticas de modelagem. Na proposta de atividade, o desenvolvimento com os alunos é fundamental, pois certamente surgirão muitos questionamentos e observações ao longo do processo. Com efeito, para Biembengut (2004):

como é essencialmente um método de pesquisa, no Ensino, a modelagem matemática pode tornar-se caminho para despertar no aluno interesse por assuntos de matemática e, também, de alguma área da ciência que ainda desconheça ao mesmo tempo em que ele aprende a arte de modelar, matematicamente. (BIEMBENGUT, 2004, p.23).

A segunda atividade, que utiliza o modelo de Malthus — ponto de partida para a evolução dos modelos de crescimento populacional — apresenta uma proposta interessante e acessível aos alunos para o estudo da função exponencial, além de ser uma oportunidade para introduzir o conceito de logaritmo. Isso ocorre por meio de uma aplicação real desses dois conteúdos, que geralmente são complexos e impõem obstáculos ao processo de aprendizagem.

Perante o exposto, e conscientes de que este trabalho apresenta como sugestão uma possibilidade de abordagem da modelagem matemática no ensino médio, estima-se que ele possa ser mais uma ferramenta para o professor utilizar em sala de aula, visando consolidar a assimilação de conceitos e conteúdos matemáticos por meio de problemas reais relacionados aos alunos.

Ademais, objetivamos que os conteúdos matemáticos sejam vistos pela sua dinamicidade e capacidade de indicar alternativas para problemas contemporâneos nos mais

variados contextos e não como conceitos estáticos e acabados.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. **Reunião anual da ANPED**, v. 24, n. 2001, p. 01–15, 2001.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. [S.l.]: Editora Contexto, 2002.
- BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. d. M. Modelagem matemática. UFU, 2019.
- BIEMBENGUT, M. S. Modelação matemática como método de ensino-aprendizagem de matemática em cursos de 1º e 2º graus. **Rio Claro: UNESP**, 1990.
- BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática & Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática**. [S.l.]: Ed. da FURB, 2004.
- BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 07–32, 2009.
- BIEMBENGUT, M. S. Perspectivas metodológicas em educação matemática: um caminho pela modelagem e etnomatemática. **Caderno Pedagógico**, v. 9, n. 1, 2012.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. [S.l.]: Editora Contexto, 2000.
- BRASIL, M. Base nacional comum curricular. **Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica**, 2017.
- BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. Tese (Doutorado) — [sn], 1992.
- BURAK, D. Modelagem matemática e a sala de aula. **Encontro paranaense de modelagem em Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 10, 2004.

- CALDEIRA, A. D. Modelagem matemática e a prática dos professores do ensino fundamental e médio. **Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática**, v. 1, 2004.
- CALDEIRA, A. D. A modelagem matemática e suas relações com o currículo. In: **IV Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática–CNMEM. Anais... Feira de Santana: UEFS–1CD-ROM**. [S.l.: s.n.], 2005.
- CALDEIRA, A. D. Modelagem matemática: um outro olhar. **Alexandria (Florianópolis)**, v. 2, n. 2, p. 33–54, 2009.
- CAMBI, B.; CALDEIRA, A. D. Modelagem matemática, professor mediador-orientador e construtivismo: entrelaçamentos discursivos na constituição da figura docente. **Revista Brasileira de Educação**, SciELO Brasil, v. 28, p. e280025, 2023.
- CEOLIM, A. J.; CALDEIRA, A. D. Por que a modelagem matemática não chega à sala de aula? In: **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática**. [S.l.: s.n.], 2014.
- CHAVES, M. I. de A.; SANTO, A. O. do E. Modelagem matemática: uma concepção e várias possibilidades. **Boletim de Educação Matemática**, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 21, n. 30, p. 149–161, 2008.
- CRATO, N. O papel dos mínimos quadrados na descoberta dos planetas. Researchgate.net, 2000.
- FILHO, E. L. Modelos matemáticos nas ciências não exatas. **Modelos matemáticos nas ciências não exatas: um volume em homenagem a Euclides Custódio de Lima Filho**. São Paulo: Blucher, 2008.
- IEZZI, G. et al. **Matemática: volume único**. [S.l.]: Atual, 2002.
- KLÜBER, T. E.; BURAK, D. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 10, n. 1, 2008.

LEITE, M. B. F.; SILVA, G. H. J. d.; SOUSA, L. F. d. Modelos matemáticos para o crescimento da população do estado de são paulo e a exploração de diferentes taxas de crescimento. **Ciência & Educação**, Graduação em Educação para a Ciência, v. 17, n. 04, p. 927–940, 2011.

LIMA, E. L. **Análise real**. [S.l.]: Impa Rio de Janeiro, 2004.

MIORIM, M. Â. **Introdução à história da educação matemática**. [S.l.]: Atual Editora, 1998.

PROJEÇÕES, I. estimativas da população do brasil e das unidades da federação, 2023 disponível em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao>. **Acesso em**, v. 6, 2024.

SILVEIRA, A.; FERREIRA, G. P.; SILVA, L. A. da. A evolução da modelagem matemática ao longo da história, o surgimento da modelagem no brasil e suas contribuições enquanto estratégia de ensino de matemática. **Actas del VII CIBEM ISSN**, v. 2301, n. 0797, p. 2875, 2013.



UFVJM