

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

**Abordando a propriedade refletora da parábola por meio de materiais
concretos**

Jéssica Cristina Franco Soares
Magister Scientiae

**FLORESTAL - MINAS GERAIS
2025**

JÉSSICA CRISTINA FRANCO SOARES

Abordando a propriedade refletora da parábola por meio de materiais concretos

Dissertação Mestrado Profissional apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (Profissionalizante), para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Lucas Carvalho Silva

**FLORESTAL - MINAS GERAIS
2025**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

S676a
2025 Soares, Jéssica Cristina Franco, 1989-
Abordando a propriedade refletora da parábola por meio de materiais concretos / Jéssica Cristina Franco Soares. – Florestal, MG, 2025.

1 dissertação eletrônica (102 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Lucas Carvalho Silva.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2025.

Referências bibliográficas: f.100-102.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvcaf.2025.010>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Parabolóide. 2. GeoGebra (Software). I. Silva, Lucas Carvalho , 1983-. II. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 23. ed. 515.3534

JÉSSICA CRISTINA FRANCO SOARES

Abordando a propriedade refletora da parábola por meio de materiais concretos

Dissertação Mestrado Profissional apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (Profissionalizante), para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de fevereiro de 2025.

Assentimento:

Jéssica Cristina Franco Soares
Autora

Lucas Carvalho Silva
Orientador

Essa dissertação mestrado profissional foi assinada digitalmente pela autora em 16/05/2025 às 14:54:03 e pelo orientador em 16/05/2025 às 15:27:03. As assinaturas têm validade legal, conforme o disposto na Medida Provisória 2.200-2/2001 e na Resolução nº 37/2012 do CONARQ. Para conferir a autenticidade, acesse <https://siadoc.ufv.br/validar-documento>. No campo 'Código de registro', informe o código **IFU6.VFFH.PGDL** e clique no botão 'Validar documento'.

Dedico este trabalho às minhas filhas Laura e Luíse, que são minha força diária;
ao meu marido Joardson Junio, que sempre motivou e acreditou em mim;
aos meus pais Fátima e Libério, meus maiores exemplos de vida;
àqueles estudantes que um dia compartilhei ou compartilharei conhecimentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos; ao professor Lucas, pela orientação, dedicação, atenção e por ter guiado meu aprendizado até aqui; aos que me ajudaram na confecção dos materiais concretos: meu pai Libério, meu marido Joardson Junio e a família da loja de artigos Bilhares Sayonara Ltda; aos amigos e familiares que apoiaram e incentivaram o desenvolvimento deste trabalho.

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

RESUMO

SOARES, Jéssica Cristina Franco, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2025. **Abordando a propriedade refletora da parábola por meio de materiais concretos**. Orientador: Lucas Carvalho Silva.

Este trabalho explora a Propriedade Refletora da Parábola em superfícies parabólicas, ressaltando aspectos geométricos, analíticos e aplicações acerca dessa propriedade. Iniciamos com um estudo detalhado da parábola, ao discutirmos seus aspectos históricos e equações que descrevem sua forma, além de demonstrarmos a sua Propriedade Refletora. Em seguida, analisamos os paraboloides de revolução, em que destacamos suas representações gráficas, suas equações e como a Propriedade Refletora se aplica a essas superfícies. A aplicação prática dessa propriedade é evidenciada em diversas tecnologias modernas, como em antenas parabólicas, telescópios e faróis de automóveis, que utilizam a reflexão de ondas para otimizar seu funcionamento. Para uma abordagem de tal propriedade em sala de aula propomos atividades práticas, de forma lúdica, por meio de materiais concretos e também utilizando-se do *software* GeoGebra. As atividades com materiais concretos envolvem o uso de uma mesa de bilhar cujas bordas têm formatos parabólicos. Além disso, sugerimos atividades com o uso do *software* GeoGebra para simulações interativas, proporcionando uma abordagem visual e dinâmica dos conceitos e propriedades. Por meio desse estudo, buscamos não apenas aprofundar o entendimento da Propriedade Refletora da Parábola, mas também estimular o aprendizado ativo e o interesse por aplicações matemáticas em contextos reais.

Palavras-chave: parábola; paraboloides de revolução; propriedade refletora da parábola

ABSTRACT

SOARES, Jéssica Cristina Franco, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2025. **The reflective property of the parabola through concrete materials.** Adviser: Lucas Carvalho Silva.

This work explores the Reflective Property of the Parabola on parabolic surfaces, highlighting geometric and analytical aspects and applications of this property. We begin with a detailed study of the parabola, discussing its historical aspects and equations that describe its shape, in addition to demonstrating its Reflective Property. Next, we analyze the paraboloids of revolution, highlighting their graphical representations, their equations and how the Reflective Property is applied to these surfaces. The practical application of this property is evidenced in several modern technologies, such as parabolic antennas, telescopes and car headlights, which use wave reflection to optimize their operation. For an approach to such property in the classroom, we propose practical activities, in a playful way, through concrete materials and also using the GeoGebra software. The activities with concrete materials involve the use of a billiard table whose edges have parabolic shapes. In addition, we suggest activities using the GeoGebra software for interactive simulations, providing a visual and dynamic approach to concepts and properties. Through this study, we seek not only to deepen the understanding of the Reflective Property of the Parabola, but also to stimulate active learning and interest in mathematical applications in real contexts.

Keywords: parable; paraboloid of revolution; reflective property of the parabola

Lista de Figuras

2.1	Interseções de um cone com um plano	18
2.2	Esquema da construção da parábola feita por Apolônio	19
2.3	Triângulo TVW	19
2.4	Construção da parábola em um sistema de coordenadas	21
2.5	$dist(P, F) = dist(P, d)$	22
2.6	Esfera de Dandelin para a seção cônica parábola	22
2.7	Elementos da parábola	23
2.8	Rotação dos eixos coordenados	24
2.9	Foco $(0, p)$ “acima” da diretriz $y = -p$	25
2.10	Foco $(0, -p)$ “abaixo” da diretriz $y = p$	25
2.11	Foco $(p, 0)$ “à direita” da diretriz $x = -p$	26
2.12	Foco $(-p, 0)$ “à esquerda” da diretriz $x = p$	26
2.13	Foco F “acima” da diretriz d	27
2.14	Foco F “abaixo” da diretriz d	28
2.15	Foco F “à direita” da diretriz d	28
2.16	Foco F “à esquerda” da diretriz d	29
2.17	Todos os demais pontos da parábola estão em um dos semiplanos determinados pela reta tangente em P	30
2.18	Ângulos entre retas concorrentes não perpendiculares	30
2.19	Ângulo entre uma reta e uma parábola	31
2.20	Reta normal à parábola	31
2.21	Ângulo entre uma reta que pertence ao eixo de simetria e a parábola	32
2.22	Propagação das semirretas na parábola	32
2.23	Tangente no ponto de incidência	33
2.24	Proposição 2.1	34
2.25	$dist(D, F) \neq dist(D, d)$	34
2.26	Propriedade de Reflexão da Parábola	35
3.1	Traço de uma superfície quádrlica no plano $z = 0$	37
3.2	Exemplo de cônica degenerada (ponto O) em uma superfície quádrlica no plano $z = 0$	37
3.3	Exemplo de cônica degenerada (par de retas) em uma superfície quádrlica no plano $z = 0$	38

3.4	Parabolóide elíptico	39
3.5	Parabolóide hiperbólico	39
3.6	Parabolóide de revolução (Enem 2013)	40
3.7	Representação gráfica da forma canônica de eixo OX	41
3.8	Representação gráfica da forma canônica de eixo OY	41
3.9	Representação gráfica da forma canônica de eixo OZ	42
3.10	Parabolóide elíptico de equação $z = 9x^2 + y^2$	43
3.11	Superfície gerada pela parábola $z = y^2$	44
3.12	Superfície gerada pela revolução da parábola $y^2 = 3x$	46
3.13	Superfície gerada pela revolução da parábola $z^2 = 2y$	46
3.14	Definição do parabolóide de revolução	47
3.15	Plano diretriz	48
3.16	Definição do plano tangente ao parabolóide	48
3.17	Definição do plano mediador de um segmento de reta	49
3.18	Ângulo entre a reta secante e o plano	49
3.19	O plano tangente τ ao parabolóide no ponto P é o plano mediador do segmento FP'	50
3.20	Ângulo de incidência i é igual ao ângulo de reflexão r	51
3.21	Propriedade Refletora no Parabolóide de Revolução	52
4.1	Lei de reflexão	54
4.2	Sinais enviados pelo satélite	55
4.3	Raios incidentes na antena parabólica	55
4.4	Antena parabólica com formato menor	56
4.5	Trecho do parabolóide	56
4.6	Curvatura das antenas	57
4.7	Raios chegam ao mesmo tempo no foco e se somam	57
4.8	Esquema - Telescópio refletor	59
4.9	Telescópio Espacial Hubble	60
4.10	Esquema do funcionamento de um radiotelescópio	60
4.11	Observatório ALMA - Chile	61
4.12	FAST - Maior radiotelescópio do mundo	61
4.13	Farol de automóvel	62
4.14	Fogão solar	62
4.15	Gigante forno solar parabólico localizado na França	63
4.16	Esquema do grande forno solar e seus 63 heliostatos	63
4.17	Microfone parabólico	63
4.18	Projector com refletor parabólico	64
5.1	Mesa de bilhar parabólica	66
5.2	Mesa parabólica ilustrativa	66
5.3	Construção da mesa parabólica para o ensino	67
5.4	Esboço para os cortes das peças da mesa parabólica 1	68
5.5	Mesa parabólica 1 montada	69
5.6	Ajustamento e junção das peças	69

5.7	Esboço para os cortes das bordas/tabelas mesa 2	71
5.8	Cortes da mesa 2	71
5.9	Junção das peças e fixação dos pezinhos	72
5.10	Mesa parabólica 2 montada	72
5.11	Bola de borracha - mesa 2	73
5.12	Trajectoria da bola paralela ao eixo de simetria - mesa 1	74
5.13	Raios de luz passando no foco em direção a um ponto da borda parabólica - mesa 1	75
5.14	Raios de luz passando no foco em direção a um ponto da borda parabólica - mesa 2	75
5.15	$\alpha = \beta$	76
5.16	Comandos da interface	77
5.17	Interface do GeoGebra	77
5.18	Ícone mover	78
5.19	Retirando a malha e os eixos	78
5.20	Construindo a reta diretriz	79
5.21	Reta diretriz	79
5.22	Criando o ponto focal	80
5.23	Ponto focal	80
5.24	Traçando a parábola	81
5.25	Parábola	81
5.26	Traçando o eixo de simetria	82
5.27	Eixo de simetria	82
5.28	Ponto P	83
5.29	Traçando a reta paralela ao eixo de simetria	83
5.30	Reta paralela ao eixo de simetria	84
5.31	Traçando a reta tangente à parábola no ponto P	84
5.32	Reta tangente à parábola no ponto P	85
5.33	Criando a reta de reflexão	85
5.34	Reta de reflexão	86
5.35	Mostrando o ângulo de incidência	86
5.36	Ângulo de incidência	87
5.37	Ângulo de reflexão	87
5.38	Ângulo incidente e ângulo de reflexão	88
5.39	Plotagem da equação $(x + 2)^2 = 4(y + 1)$	89
5.40	Janela de visualização 3D	89
5.41	Controle deslizante (ângulo β)	90
5.42	Girar em torno de uma reta	90
5.43	Girar em torno de uma reta	91
5.44	Visualização 3D	91
5.45	Movimentando o controle deslizante	92
5.46	Movimentando a parábola	92
5.47	Exibir rastro	93
5.48	Superfície gerada	93

5.49 Criando um ponto sobre a superfície	94
5.50 Criando uma reta paralela ao eixo	95
5.51 Criando o segmento PF	95
5.52 Criando o plano diretriz	96
5.53 Criando a reta normal	96
5.54 Criando ângulos	97
5.55 Plano tangente e elementos no parabolóide	97

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α	Letra grega Alfa minúscula	$dist(A, B)$	Distância entre os pontos A e B
β	Letra grega Beta minúscula	$\hat{A}BC$	Ângulo com vértice em B
Δ	Letra grega Delta maiúscula	γ	Letra grega Gama minúscula
$\triangle ABC$	Triângulo de vértices A , B e C	δ	Letra grega Delta minúscula
AB	Segmento de reta com extremidades em A e B	τ	Letra grega Tau minúscula
\overline{AB}	Comprimento do segmento de reta de extremidades em A e B	$ang(FP, \tau)$	Ângulo entre o segmento de reta FP e o plano τ
		π	Letra grega Pi minúscula

Sumário

1	Introdução	14
2	Um Estudo da Parábola	16
2.1	Aspectos históricos	16
2.2	Definição e elementos da parábola	21
2.3	Equação reduzida da parábola	24
2.4	Uma propriedade importante da parábola	29
3	Paraboloides de Revolução	36
3.1	Paraboloides	36
3.2	Paraboloide elíptico: forma canônica	40
3.3	Paraboloide de revolução: propriedades, gráficos e equações	43
3.4	Equação reduzida do paraboloide de revolução	45
3.5	A Propriedade Refletora da Parábola presente no paraboloide de revolução	47
4	Aplicações dos Paraboloides de Revolução e sua Propriedade Refletora	53
4.1	Antenas parabólicas	54
4.2	Telescópios refletores	58
4.3	Radiotelescópios	60
4.4	Faróis de automóveis	61
4.5	Fornos solares parabólicos	62
4.6	Microfones parabólicos	63
4.7	Iluminação direcional de projetores	63
5	Metodologia	65
5.1	Proposta de Atividades com Material Concreto	65
5.1.1	Processo de construção da mesa parabólica 1	67
5.1.2	Processo de construção da mesa parabólica 2	70
5.1.3	Descrição das atividades	72
5.2	Proposta de Atividades no GeoGebra	76
5.2.1	Atividade 1: parábola e sua Propriedade Refletora	77
5.2.2	Atividade 2: construção do paraboloide de revolução a partir da parábola	88
5.2.3	Atividade 3: paraboloide de revolução e planos tangentes	94

Introdução

A Propriedade Refletora da Parábola, *grosso modo*, afirma que toda reta paralela ao eixo de simetria da parábola ao “encontrar” a parábola é refletida e direcionada para um único ponto: o foco [25].

Já sabemos que o estudo das funções polinomiais do 2° grau e sua representação geométrica, descrita pela parábola, tem uma enorme relevância na matemática, pois possui aplicações em diversas áreas, o que possibilita a modelagem e resolução de problemas. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) trata esse tema em um conjunto de habilidades, dentre elas, destacamos:

Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2° grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais [5].

Sendo importante a relevância teórica e prática do tema em sala de aula, além da necessidade do crescimento profissional através de novos conhecimentos, faremos um estudo aprofundado sobre as parábolas, destacando seus aspectos históricos e geométricos. Com enfoque na geometria analítica, apresentaremos as suas equações, para em seguida demonstrarmos a Propriedade Refletora da Parábola.

Trataremos das estruturas matemáticas dos paraboloides e aprofundaremos na formação e propriedades dos paraboloides de revolução. Além do mais, será mostrado várias aplicações para explorar o estudo dessas superfícies, com o intuito de introduzir e correlacionar conceitos no ensino médio, em que se destaca a sua importância em várias áreas.

Em um estudo feito por [15] constatamos que o uso de materiais concretos em sala de aula proporciona um aprendizado lúdico e “pode favorecer o estabelecimento de relações lógicas além de habilidades relacionadas à criação de estratégias para solução de questões matemáticas”. Dessa forma, objetivamos aqui desenvolver métodos por meio de materiais concretos para proporcionar aos estudantes do ensino médio, de forma lúdica, a compreensão teórica e prática da Propriedade Refletora das Parábolas, fazendo uma discussão sobre as possíveis aplicações dos paraboloides de revolução

na vida cotidiana. Esperamos que isso possibilite um aprendizado mais significativo das funções polinomiais do 2º grau em sala de aula.

Uma das grandes preocupações relativas ao ensino da matemática é evidenciar como ela se relaciona com as demais áreas do conhecimento, bem como com o mundo ao nosso redor. Assim, para promover o pensamento crítico e a aplicação do conhecimento em situações do mundo real, apresentaremos uma proposta de construção de uma mesa de bilhar parabólica e atividades para a utilização da mesma. Complementaremos o conteúdo estudado ao propor atividades por meio do *software* GeoGebra para estimular o uso tecnologias digitais e consolidar os conceitos matemáticos envolvidos.

Um Estudo da Parábola

Neste capítulo, resgataremos inicialmente um pouco da história das seções cônicas, limitando-se nas referências [33] e [13]. Abordaremos o desenvolvimento desse assunto na geometria grega, destacando especialmente o modo como Apolônio obteve as parábolas por construções geométricas pelo método euclidiano de aplicação de áreas, nada algébrico na época. Apolônio foi muito importante no estudo sobre as cônicas, introduzindo concepções que utilizamos até hoje. Outros avanços significativos da parábola e das outras cônicas (elipse e hipérbole) tiveram relevâncias no estudo da geometria analítica, que aconteceu a partir do século XVII.

Em outra seção do capítulo, apresentaremos os aspectos geométricos da parábola em sua definição e seus elementos. Posteriormente, trataremos a parábola com enfoque na geometria analítica, apresentando as formas canônicas da mesma, chegando por fim na seção 2.4 a uma importante propriedade da parábola, explorada em aplicações práticas que serão apresentadas em outro capítulo do trabalho.

2.1 Aspectos históricos

As figuras geométricas formadas pela interseção de um plano com um cone, denominadas seções cônicas, foram descobertas por alguns matemáticos da escola de Eudoxo em tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo [33], que era um problema geométrico na Grécia Antiga de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado, utilizando-se apenas régua e compasso [13].

Uma redução do problema da duplicação do cubo foi feita por Hipócrates (c. 440 a.C.) à construção de duas médias proporcionais x e y entre dois segmentos de reta de comprimentos, s e $2s$, ou seja, considerando-se um cubo de aresta s , teríamos:

$$\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s}.$$

Dessas proporções, obtém-se $x^2 = sy$ e $xy = 2s^2$, daí, resulta que $x^3 = 2s^3$, em que x é a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo de aresta s .

Hipócrates trouxe assim, um outro problema, pois os matemáticos gregos não conseguiram inserir duas médias proporcionais entre s e $2s$ usando somente régua e

compasso. Logo depois, Arquitas (c. 400 a.C.), achou uma solução notável para o problema usando seções cônicas e cilindros, mas que mostra uma expansão além do uso da régua e do compasso.

Menaecmo (c. 350 a.C.) deu duas soluções do problema e, tanto quanto se sabe, inventou as seções cônicas para esse propósito. Em uma dessas soluções, ele sugere a construção de curvas até então desconhecidas (a parábola e a hipérbole). O ponto de interseção dessas curvas resolve o problema de inserir as duas médias proporcionais, tudo feito geometricamente, sem solução analítica na época [13].

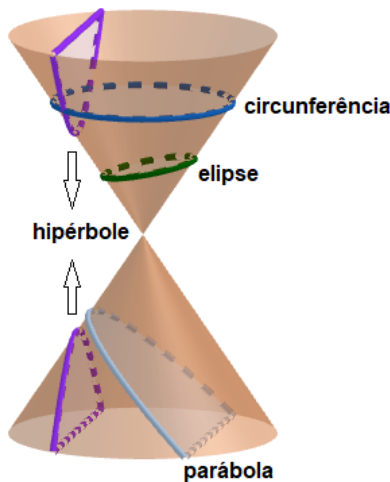
Foi através de Apolônio (c. 225 a.C.) a unificação do estudo das cônicas. Desde Menaecmo, passando por Euclides (seu livro sobre cônicas se perdeu), a obra “Secções cônicas” de Apolônio foi mais usada, por já ser considerado superior ao de Euclides, com cerca de 400 proposições em seus oito livros, chegando-se os primeiros 7 livros até nós. Hoje temos traduções confiáveis que não tem o vício de tentar traduzir o que ele fez em linguagem algébrica, retomando a maneira bem geométrica de como Apolônio pensava [13].

Antes de Apolônio os gregos tiravam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da secção meridiana fosse menor que, igual a ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole. Só se considerava um ramo da hipérbole. Apolônio, porém, no Livro I de seu tratado, obtinha todas as secções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo [14].

Assim, para Menaecmo, Aristeu e outros matemáticos, como Euclides e Arquimedes a interseção de um cone com o plano perpendicular à sua geratriz resultava em uma cônica. Para eles, a elipse era obtida quando o ângulo do vértice era agudo, a parábola quando o ângulo do vértice era reto e a hipérbole quando o ângulo do vértice era obtuso [33].

Apolônio solidifica então o estudo das cônicas, considerando uma superfície cônica circular (ou cone de duas folhas), não necessariamente reta. Intersectando essa superfície por um plano não necessariamente perpendicular à geratriz, e, dependendo da inclinação desse plano com a geratriz, é possível obtermos os seguintes tipos de cônicas possíveis: elipse, hipérbole e parábola. A elipse é obtida quando o plano intersecta todas as geratrizes de uma das folhas do cone, já a hipérbole é obtida quando o plano intersecta as duas folhas do cone e a parábola quando o plano intersecta paralelamente a uma das geratrizes. Veja a Figura 2.1.

Figura 2.1: Interseções de um cone com um plano



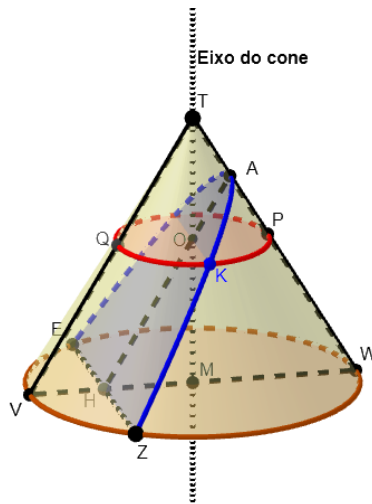
Fonte: Elaboração própria

Para definir as cônicas, Apolônio utilizou aplicação de áreas, em que o problema consiste em aplicar uma figura poligonal a um segmento de reta dado, ou seja, construir a figura dada, de forma que um de seus lados esteja nesse segmento de reta, exigindo-se que a figura construída preencha algumas exigências. Havia três tipos de aplicação de áreas: parabólica, elíptica e hiperbólica, conforme o referido lado da figura fosse coincidente ao segmento dado, fosse menor do que ele ou o excedesse, respectivamente. A solução desses problemas usa a teoria de proporcionalidade de grandezas, em particular das figuras planas [33].

Vejamos a seguir, uma construção no caso da aplicação parabólica para chegarmos à forma como Apolônio caracterizava uma parábola. Na Figura 2.2, temos um cone (que não precisa ser necessariamente de revolução) de vértice T , que corta um plano em um círculo $EVZW$. Temos também um plano que corta a superfície ao longo da reta AH , paralelo a TV . Esse corte gera exatamente a parábola $EAKZ$. O triângulo $\triangle TVW$ está em outro plano, que corta o cone em seu eixo TM , sendo EZ um segmento perpendicular ao segmento VW , que corresponde à interseção desse plano com a base. O ponto H é interseção de EZ e VW . Seja um plano paralelo ao plano da base que corta a superfície cônica em um círculo QPK , de centro O , de modo que AH corta o plano desse círculo em O . Essa circunferência tem diâmetro PQ e além disso, OK está na interseção dos dois planos (que contêm a circunferência e a parábola). O ponto K é um ponto da parábola, pois sabemos que a mesma é definida pela interseção do cone com o plano de seção. Utilizando uma das relações métricas do triângulo retângulo no triângulo $\triangle QPK$ inscrito na circunferência, chegamos à relação:

$$\overline{KO}^2 = \overline{QO} \times \overline{PO}. \tag{2.1}$$

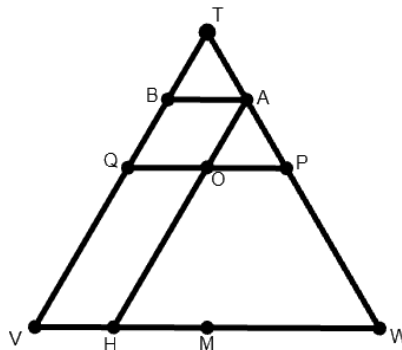
Figura 2.2: Esquema da construção da parábola feita por Apolônio



Fonte: Elaboração própria

Dessa construção, observaremos agora o triângulo $\triangle TVW$ na Figura 2.3 a seguir.

Figura 2.3: Triângulo TVW



Fonte: Elaboração própria

O segmento BA é paralelo a VW e \overline{BA} é igual a \overline{QO} . Verificamos também que os triângulos $\triangle TBA$, $\triangle TVW$ e $\triangle AOP$ são semelhantes, daí, chegamos às relações:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{VW}}{\overline{TW}} \quad (\text{semelhança entre os triângulos } \triangle TBA \text{ e } \triangle TVW)$$

e

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{VW}}{\overline{TV}} \quad (\text{semelhança entre os triângulos } \triangle AOP \text{ e } \triangle TVW).$$

Como $\overline{BA} = \overline{QO}$, temos:

$$\frac{\overline{QO}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{VW}}{\overline{TW}} \Rightarrow \frac{\overline{QO} \times \overline{PO}}{\overline{TA} \times \overline{AO}} = \frac{\overline{VW}^2}{\overline{TW} \times \overline{TV}}. \quad (2.2)$$

Observamos que, $\frac{\overline{VW}^2}{\overline{TW} \times \overline{TV}}$ e \overline{TA} são constantes, pois não dependem do ponto K pertencente à parábola. Construímos agora um segmento de comprimento N no plano da seção cônica, tal que:

$$\frac{N}{\overline{TA}} = \frac{\overline{VW}^2}{\overline{TW} \times \overline{TV}}.$$

Da segunda igualdade 2.2, temos:

$$\frac{N}{\overline{TA}} = \frac{\overline{QO} \times \overline{PO}}{\overline{TA} \times \overline{AO}}.$$

Multiplicando as frações por \overline{TA} , obtemos:

$$\frac{N \times \overline{TA}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{QO} \times \overline{PO}}{\overline{AO}} \Rightarrow N = \frac{\overline{QO} \times \overline{PO}}{\overline{AO}}.$$

Da relação 2.1, temos:

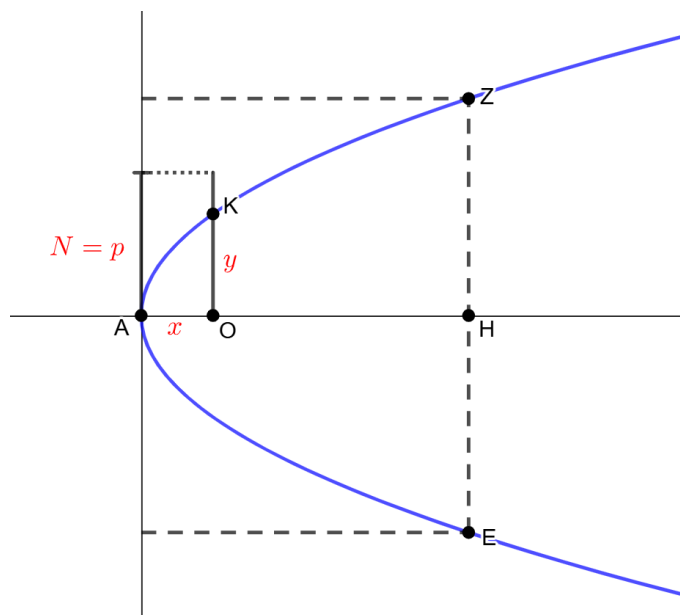
$$N = \frac{\overline{OK}^2}{\overline{AO}} \Rightarrow \overline{OK}^2 = N \times \overline{AO}. \quad (2.3)$$

Mostramos aqui um modo próximo ao que Apolônio fazia, entretanto, aperfeiçoando-se didaticamente aos modos atuais. Essa última equação 2.3 é chamada *sintoma*. Ela caracteriza os pontos da cônica por uma relação entre grandezas. Logo, a parábola é o lugar geométrico dos pontos K , tais que

$$\overline{OK}^2 = N \times \overline{AO}. \quad (2.4)$$

Apolônio não utilizava linguagem algébrica, isso quer dizer que, para obter uma parábola, ele construiu um retângulo de base \overline{AO} situada em AH , cujo outro lado desse retângulo está sobre N coincidindo com o mesmo e de modo que sua área seja \overline{OK}^2 . Em outras palavras, para ele, o quadrado de lado \overline{OK} aplicado exatamente (termo que corresponde parabolicamente) sobre N resulta em um retângulo de lado \overline{AO} . Em linguagem algébrica seria um sistema de coordenadas oblíquo de origem A dado por AH e EZ . Essa igualdade 2.4 poderia ser escrita como $y^2 = px$, fazendo $N = p$ (constante), e sendo as coordenadas $\overline{AO} = x$ e $\overline{OK} = y$. Veja esse fato mostrado em um sistema de coordenadas adequado na Figura 2.4 a seguir.

Figura 2.4: Construção da parábola em um sistema de coordenadas



Fonte: Elaboração própria

Outras novidades surgiram a partir do século XVII, passando os problemas a serem lidos algebricamente com a descoberta da geometria analítica. Os nomes René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) merecem destaque com a invenção dessa nova geometria. Fermat tratou em linguagem algébrica os problemas geométricos da obra de Apolônio, objetivando um estudo geral dos lugares geométricos. Ele foi pioneiro em encontrar o lugar geométrico dos pontos que satisfazem uma equação e Descartes procurou encontrar a equação que seus pontos satisfazem, dado um lugar geométrico. Outros matemáticos também trabalharam com as cônicas considerando uma interseção de uma superfície cônica com o plano que a secciona. Passando também a tratar as cônicas no plano, definindo-as por meio dos focos e contruindo a ideia como fazemos hoje [13].

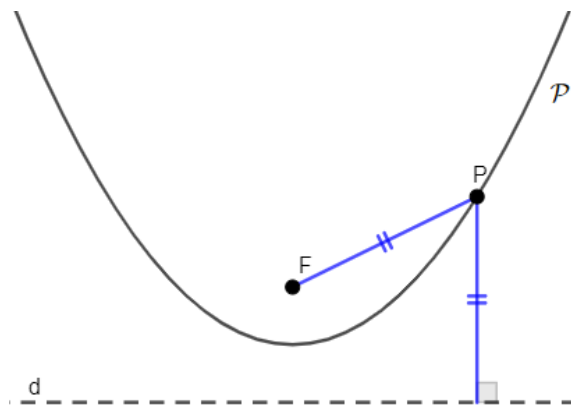
2.2 Definição e elementos da parábola

A definição a seguir trata de uma definição analítica usual para a parábola.

Definição 2.1: Uma parábola \mathcal{P} é o conjunto dos pontos do plano cujas distâncias a um ponto fixo F (denominado foco) e uma reta fixa d (chamada diretriz) são iguais. Veja a Figura 2.5.

$$\mathcal{P} = \{P \mid dist(P, F) = dist(P, d)\}; P \text{ um ponto do plano.}$$

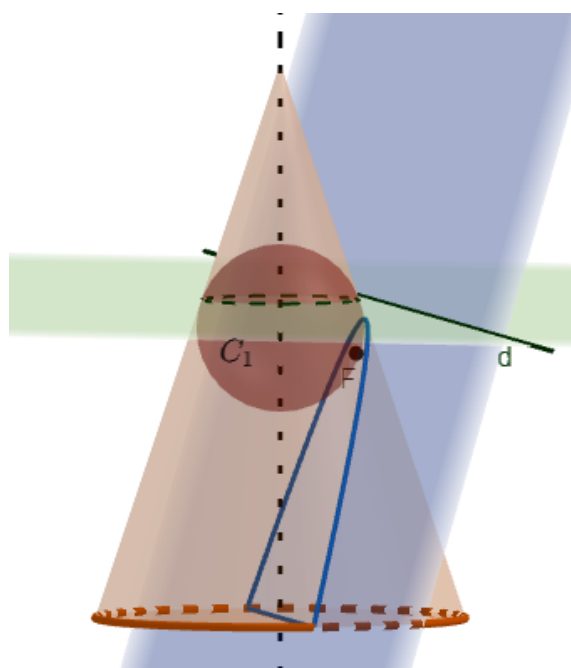
Figura 2.5: $dist(P, F) = dist(P, d)$



Fonte: Elaboração própria

Importante destacarmos que no século XIX, dois matemáticos belgas, Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) e Adolphe Quetelet (1796-1874) tiveram uma contribuição fundamental para a compreensão moderna das seções cônicas, especialmente do ponto de vista da geometria espacial no que diz respeito à conexão entre a definição geométrica (seção cônica por interseção de um plano) e a definição usual analítica/lugar geométrico. Foi introduzido uma construção geométrica engenhosa usando esferas inscritas nos cones, hoje chamadas “Esferas de Dandelin”, mostrando a equivalência entre as definições. Para a parábola, há uma única esfera C_1 que tangencia o cone e o plano da parábola no cone. Veja a Figura 2.6 a seguir.

Figura 2.6: Esfera de Dandelin para a seção cônica parábola



Fonte: Elaboração própria

O ponto de tangência entre a esfera e esse plano é o foco F . Essa esfera toca o cone ao longo de uma circunferência, cuja interseção entre o plano que a contém e o

plano da seção cônica é a reta diretriz d da parábola, tais que, para todo ponto P da parábola vale:

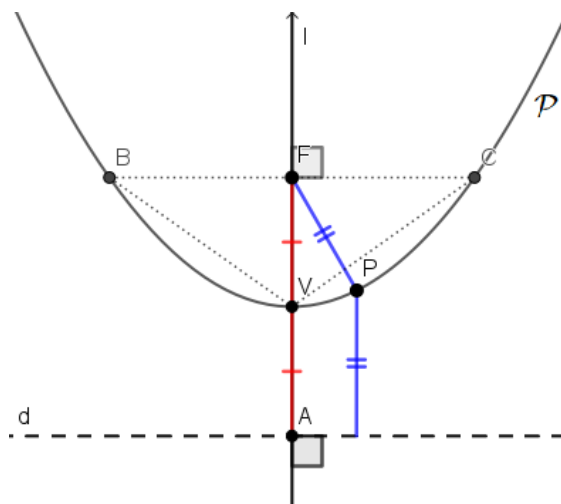
$$\frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, d)} = 1.$$

Essa construção e demonstração é apresentada com mais detalhes em [21].

Partiremos agora, ao conhecimento dos elementos que constituem uma parábola. Apoiando-se em [27], temos os seguintes elementos presentes na parábola:

- A *reta focal* l , da parábola \mathcal{P} , é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz d .
- A distância $2p = \text{dist}(F, d)$ é o *parâmetro da parábola*.
- O ponto V da parábola \mathcal{P} , interseção da parábola com a reta focal, é chamado de *vértice da parábola*. Se A é o ponto onde d intersecta l , então V é o ponto médio do segmento de reta \overline{AF} ;
- A reta focal l é o *eixo de simetria da parábola*.
- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre \mathcal{P} é denominado *corda da parábola*;
- Tomando B e C os extremos da corda que contém F e é paralela à diretriz d , obtemos o triângulo $\triangle VBC$ denominado *triângulo fundamental da parábola*.

Figura 2.7: Elementos da parábola



Fonte: Elaboração própria

2.3 Equação reduzida da parábola

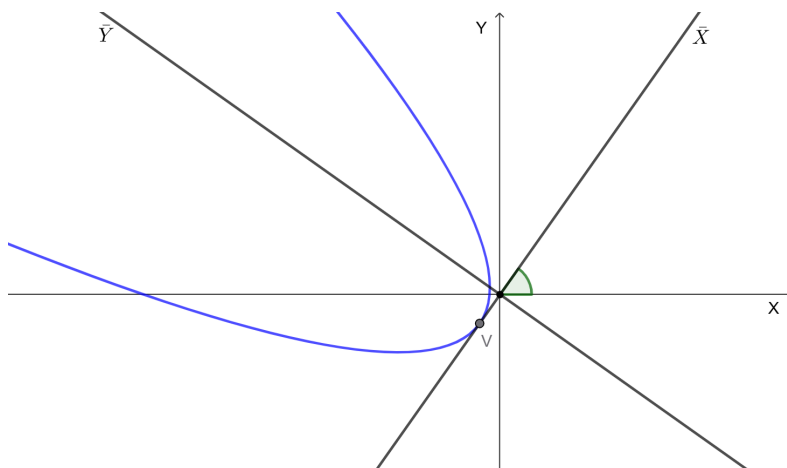
A equação de qualquer seção cônica resulta de uma equação geral do segundo grau com duas variáveis, que pode ser escrita como:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \tag{2.5}$$

em que A , B ou C deve ser não nulo.

O intuito aqui é mostrar equações das parábolas em relação a um sistema de coordenadas OXY , não considerando outro sistema de eixos coordenados obtidos pela rotação dos eixos OX e OY . Não utilizaremos aqui as técnicas de rotação no plano, casos esses explorados quando o valor de B é não nulo. Veja como exemplo, a Figura 2.8, que mostra uma parábola de equação $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$, com sistema de eixos ortogonais \overline{OXY} obtido ao girar os eixos OX e OY .

Figura 2.8: Rotação dos eixos coordenados



Fonte: Elaboração própria

Assim, consideraremos $B = 0$ na equação 2.5, resultando a forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{2.6}$$

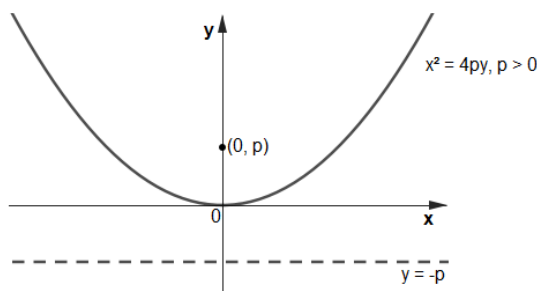
Baseando-se em [12], nosso objetivo é estudar e analisar casos em que exatamente um dos coeficientes A ou C na equação 2.6 é nulo, dando uma visão analítica das equações das parábolas. Em relação a um sistema de coordenadas OXY , mostraremos as equações reduzidas das parábolas, que são aquelas que possuem a reta diretriz d paralela a um dos eixos ortogonais. Em um primeiro caso, obteremos as equações reduzidas quando a reta focal é um dos eixos coordenados e o vértice da parábola é a origem. Em um segundo caso, obteremos as equações reduzidas quando a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados e o vértice é um ponto qualquer.

Caso 1: Reta focal é um dos eixos coordenados e o vértice da parábola é a origem.

Caso 1.1. Suponha que a reta focal seja coincidente com o eixo OY . Em uma primeira situação, o foco F está “acima” da diretriz d . Nesse caso, se o foco for o ponto $F = (0, p)$, então a diretriz tem equação $y = -p$, onde $p = \text{dist}(F, d)/2$, veja a Figura 2.9. Logo, se $P = (x, y)$ for um ponto qualquer na parábola, então:

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p| \Leftrightarrow x^2 = 4py.$$

Figura 2.9: Foco $(0, p)$ “acima” da diretriz $y = -p$



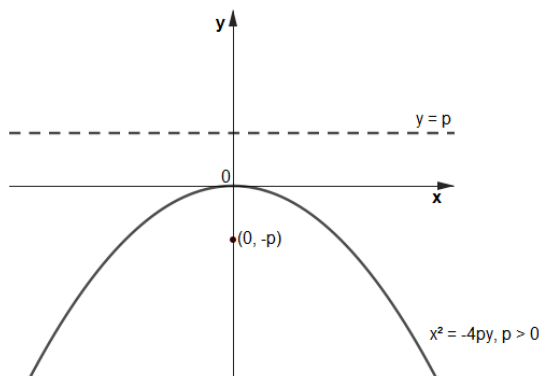
Fonte: Elaboração própria

Em uma segunda situação, o foco F está “abaixo” da diretriz d . Nesse caso, se o foco for o ponto $F = (0, -p)$, então a diretriz tem equação $y = p$, onde $p = \text{dist}(F, d)/2$, veja a Figura 2.10. Logo, se $P = (x, y)$ for um ponto qualquer na parábola, então:

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + p)^2} = |y - p| \Leftrightarrow x^2 = -4py.$$

□

Figura 2.10: Foco $(0, -p)$ “abaixo” da diretriz $y = p$

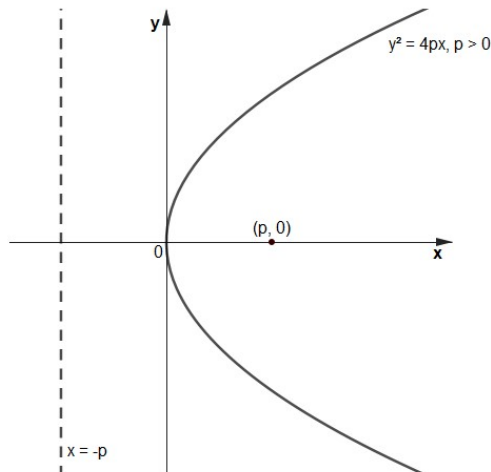


Fonte: Elaboração própria

Caso 1.2. Suponha que a reta focal seja coincidente com o eixo OX . Em uma primeira situação, o foco F está “à direita” da diretriz d . Nesse caso, se o foco for o ponto $F = (p, 0)$, então a diretriz tem equação $x = -p$, onde $p = \text{dist}(F, d)/2$, veja a Figura 2.11. Logo, se $P = (x, y)$ for um ponto qualquer na parábola, então:

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d) \Leftrightarrow \sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p| \Leftrightarrow y^2 = 4px.$$

Figura 2.11: Foco $(p, 0)$ “à direita” da diretriz $x = -p$



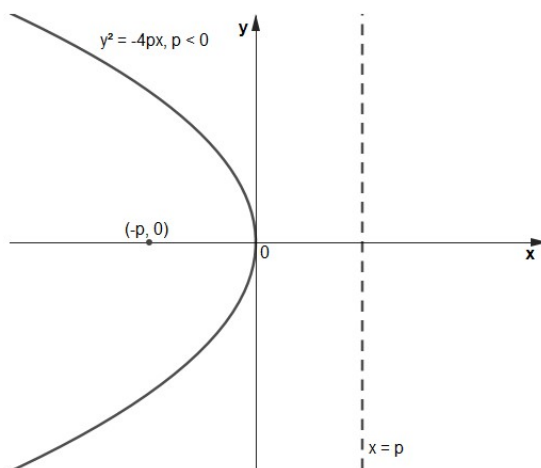
Fonte: Elaboração própria

Em uma segunda situação, o foco F está “à esquerda” da diretriz d . Nesse caso, se o foco for o ponto $F = (-p, 0)$, então a diretriz tem equação $x = p$, veja a Figura 2.12. Logo, se $P = (x, y)$ for um ponto qualquer na parábola, então:

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d) \Leftrightarrow \sqrt{(x + p)^2 + y^2} = |x - p| \Leftrightarrow y^2 = -4px.$$

□

Figura 2.12: Foco $(-p, 0)$ “à esquerda” da diretriz $x = p$



Fonte: Elaboração própria

Até o momento consideramos um sistema de coordenadas bastante amigável, com a origem no vértice da parábola, mas o que acontece se esse não for o caso? A seguir, iniciaremos considerando o caso onde a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados.

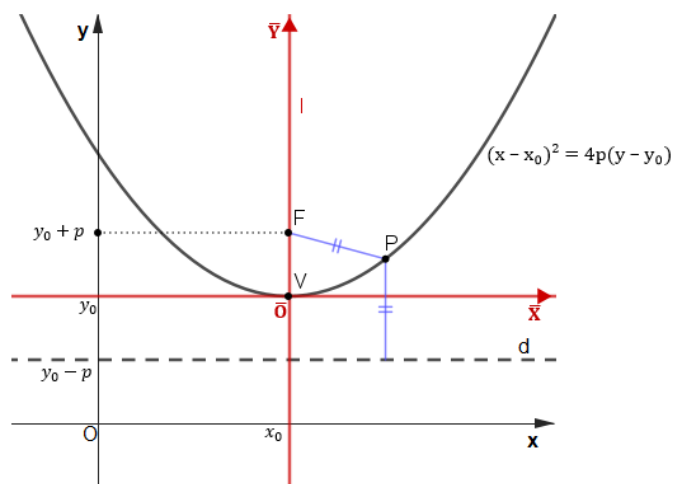
Caso 2: Reta focal é paralela a um dos eixos coordenados e o vértice é um ponto qualquer.

Vamos considerar um novo sistema de eixos ortogonais \overline{OXY} de origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$, sendo que os eixos desse novo sistema têm a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos do sistema original OXY . Como $x = \bar{x} + x_0$ e $y = \bar{y} + y_0$, podemos, a partir daí, obter as equações da parábola, substituindo $\bar{x} = x - x_0$ e $\bar{y} = y - y_0$ nas equações obtidas no novo sistema, como mostrado a seguir.

Caso 2.1. Suponha a reta focal paralela ao eixo OY . Em uma primeira situação, o foco F está “acima” da diretriz d , veja a Figura 2.13. Nesse caso, a equação da parábola no sistema \overline{OXY} é $(\bar{x})^2 = 4p\bar{y}$ e no sistema OXY será:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Figura 2.13: Foco F “acima” da diretriz d



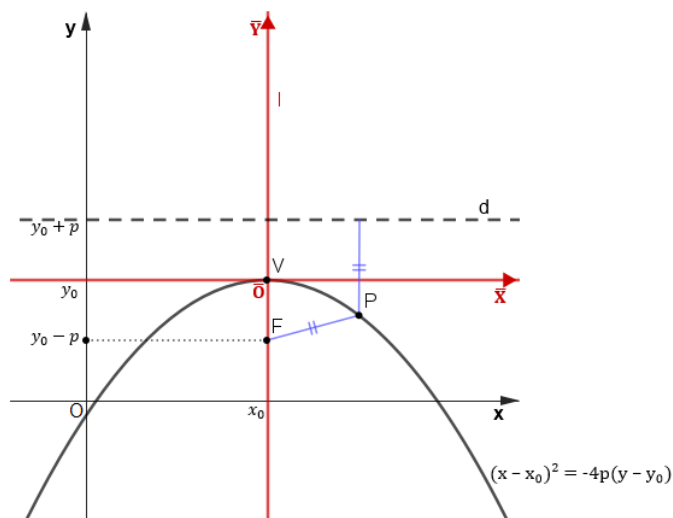
Fonte: Elaboração própria

Em uma segunda situação, o foco F está “abaixo” da diretriz d , veja a Figura 2.14. Nesse caso, a equação da parábola no sistema \overline{OXY} é $(\bar{x})^2 = -4p\bar{y}$ e no sistema OXY será:

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0).$$

□

Figura 2.14: Foco F “abaixo” da diretriz d

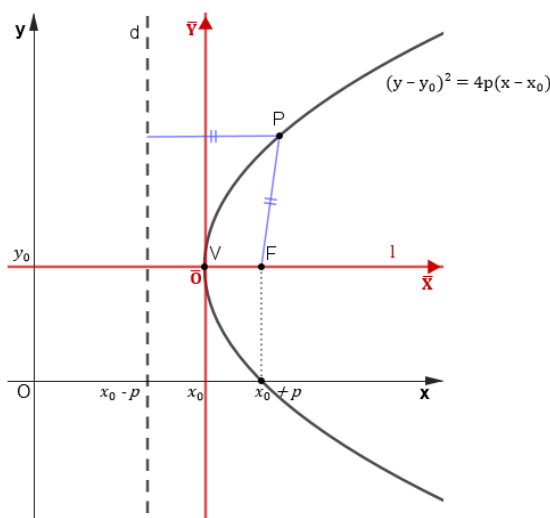


Fonte: Elaboração própria

Caso 2.2. Suponha a reta focal paralela ao eixo OX . Em uma primeira situação, o foco F está “à direita” da diretriz d , veja a Figura 2.15. Nesse caso, a equação da parábola no sistema $\overline{O\bar{X}\bar{Y}}$ é $(\bar{y})^2 = 4p\bar{x}$ e no sistema OXY será:

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

Figura 2.15: Foco F “à direita” da diretriz d



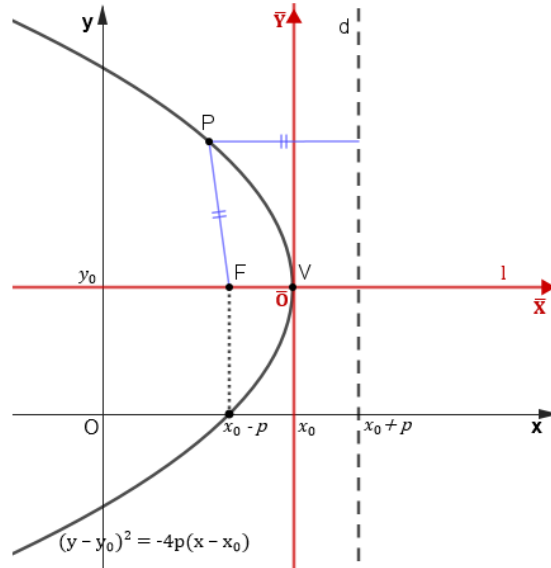
Fonte: Elaboração própria

Em uma segunda situação, o foco F está “à esquerda” da diretriz d , veja a Figura 2.16. Nesse caso, a equação da parábola no sistema $\overline{O\bar{X}\bar{Y}}$ é $(\bar{y})^2 = -4p\bar{x}$ e no sistema OXY será:

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0).$$

□

Figura 2.16: Foco F “à esquerda” da diretriz d



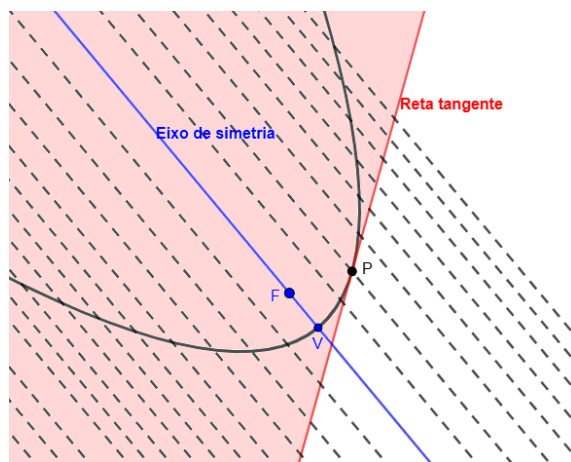
Fonte: Elaboração própria

2.4 Uma propriedade importante da parábola

Assim como as outras cônicas, a parábola possui uma propriedade refletora. Fundamentaremos aqui na análise matemática da propriedade feita por [25] e acrescentaremos algumas proposições trazendo as ideias de [21] para justificar tal propriedade. Primeiro, nos apoiaremos nas definições a seguir.

Definição 2.2: A reta tangente a uma parábola no ponto P é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto P e tal que todos os demais pontos da parábola estão em somente um dos semiplanos determinados por essa reta. Veja a Figura 2.17 a seguir em que a parte pintada representa um dos semiplanos.

Figura 2.17: Todos os demais pontos da parábola estão em um dos semiplanos determinados pela reta tangente em P

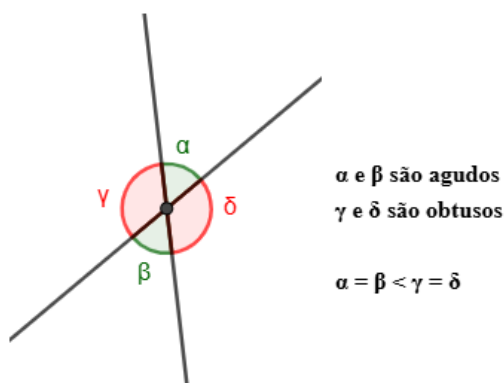


Fonte: Elaboração própria

Observação: Todas as retas que são paralelas ao eixo de simetria (representadas por retas tracejadas na figura 2.17 anterior) vão tocar a parábola em um único ponto, porém essas retas não são tangentes à parábola porque elas não atendem à outra condição (alocar a parábola em apenas um dos dois semiplanos determinados pela reta tangente).

Definição 2.3: Duas retas não paralelas e não perpendiculares entre si que se intersectam em um ponto sempre formam quatro ângulos dois a dois opostos pelo vértice e consequentemente congruentes entre si, sendo dois deles agudos de mesma medida e os outros dois obtusos, também de mesma medida. Veja a Figura 2.18.

Figura 2.18: Ângulos entre retas concorrentes não perpendiculares

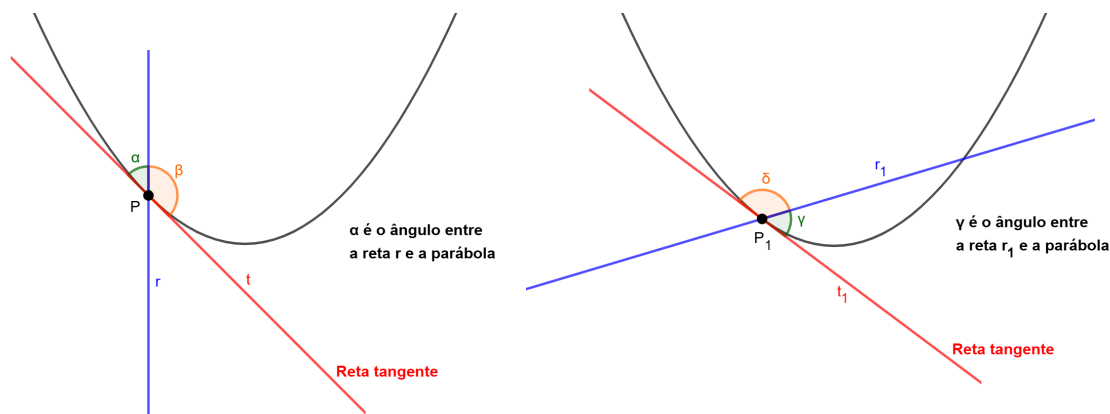


Fonte: Elaboração própria

Definição 2.4: O ângulo entre uma reta (ou semirreta ou segmento de reta) r qualquer e uma parábola que se intersectam no ponto P é o menor ângulo formado entre essa reta e a reta tangente t à parábola traçada pelo ponto de interseção.

Na Figura 2.19 apresentamos como exemplos duas parábolas. Na primeira, a reta r intersecta a parábola em P e o ângulo entre essa reta e a reta tangente t está do lado esquerdo em relação à reta r , já na segunda parábola, a reta r_1 intersecta a parábola em P_1 e o ângulo entre essa reta e a reta tangente t_1 está do lado direito em relação à reta r_1 .

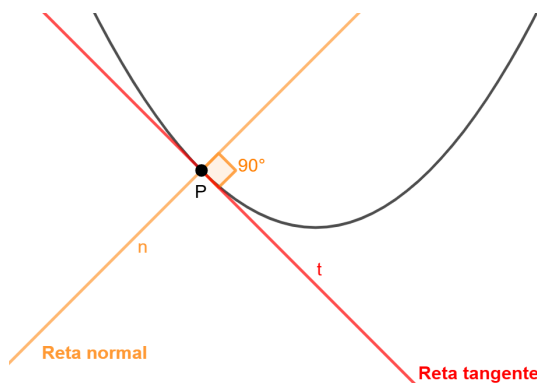
Figura 2.19: Ângulo entre uma reta e uma parábola



Fonte: Elaboração própria

Definição 2.5: A reta que é perpendicular à reta tangente t à parábola no ponto P e contém este ponto é a reta n , normal à parábola em P . Veja a Figura 2.20.

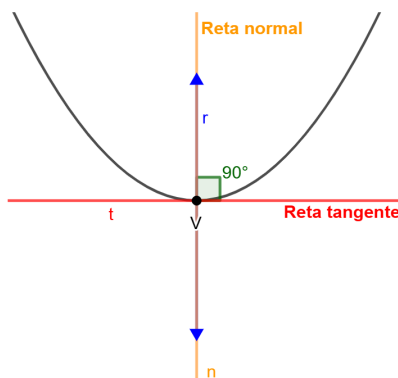
Figura 2.20: Reta normal à parábola



Fonte: Elaboração própria

Observação: Uma reta (ou semirreta ou segmento de reta) r que pertence ao eixo de simetria e passa no vértice V da parábola é coincidente à reta normal à parábola em V . Portanto, o ângulo entre essa reta e a parábola é reto. Veja a Figura 2.21.

Figura 2.21: Ângulo entre uma reta que pertence ao eixo de simetria e a parábola

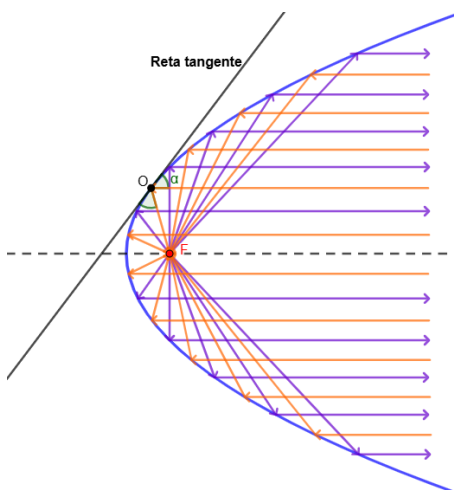


Fonte: Elaboração própria

Considere uma parábola de foco F , diretriz d e um ponto O pertencente à parábola. Considere também o semiplano da parábola determinado pela reta tangente ao ponto O . Seja uma semirreta pertencente a esse semiplano que se propaga paralelamente ao eixo de simetria da parábola e que possui origem no ponto O sobre a parábola. Seja α o ângulo em que essa semirreta forma com a parábola, agora trace uma outra semirreta com origem no mesmo ponto O fazendo também um ângulo α com a parábola, mas que não seja paralela à semirreta anterior. Então essa nova semirreta necessariamente passará pelo foco da parábola. Chamamos a primeira semirreta de incidente e a segunda de refletida.

Em outras palavras, podemos enunciar a Propriedade Refletora da Parábola da seguinte forma: *se em uma parábola de foco F e diretriz d , toda semirreta pertencente ao semiplano da parábola que se propaga paralelamente ao seu eixo de simetria incidir em um ponto da mesma, essa semirreta é refletida exatamente sobre seu foco.* Também, semirretas coplanares à parábola saindo de seu foco, ao incidir na parábola, refletem paralelamente ao seu eixo de simetria, veja a Figura 2.22.

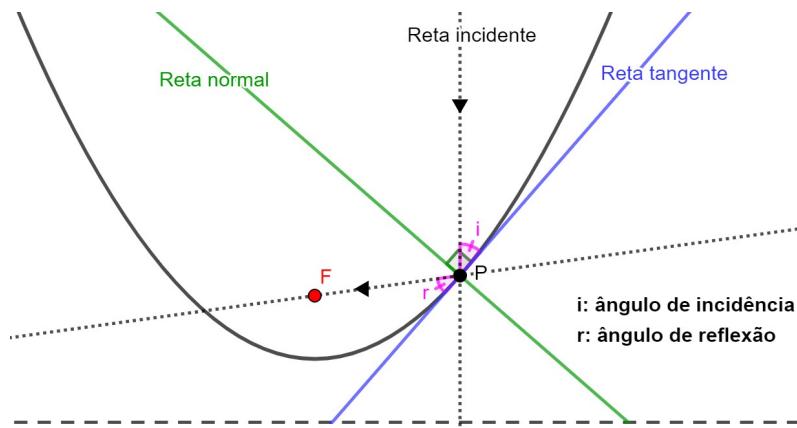
Figura 2.22: Propagação das semirretas na parábola



Fonte: Elaboração própria

Assim, a ideia de refletir está ligada ao fato do ângulo formado pela semirreta incidente com a reta tangente à parábola em um ponto (chamamos ângulo de incidência) ser igual ao ângulo de reflexão. As definições anteriores e a ideia dessa propriedade da parábola estão sintetizadas na Figura 2.23 a seguir.

Figura 2.23: Tangente no ponto de incidência



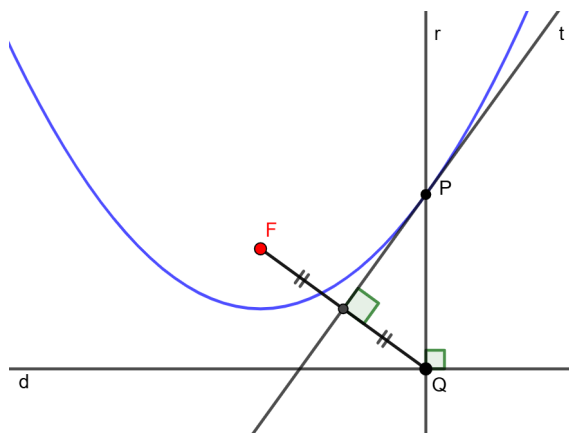
Fonte: Elaboração própria

Com base em uma justificativa de construção da parábola com régua e compasso apresentada em [21] enunciaremos a proposição 2.1 como apoio à proposição seguinte 2.2. Em seguida, concluiremos nosso propósito que é justificar a Propriedade Refletora na proposição 2.3.

Proposição 2.1: Considere uma parábola de foco F e diretriz d . Tome um ponto Q qualquer sobre d . Sejam a reta r , perpendicular à d passando por Q e a reta t , mediatriz do segmento FQ . Então o ponto P , interseção das retas r e t , será um ponto da parábola de foco F e diretriz d . Veja a construção na Figura 2.24.

Demonstração. Mostraremos que para todo ponto P da curva obtida, ao variarmos o ponto Q sobre a reta d , temos $dist(P, F) = dist(P, d)$. Como r passa por Q e é perpendicular à d , temos que $dist(P, d) = \overline{PQ}$. Uma vez que o ponto P pertence à reta t , mediatriz do segmento FQ , temos que P é equidistante de F e de Q . Portanto $d(P, F) = d(P, d) = \overline{PQ}$. Daí, concluímos pela definição da parábola que o ponto P é um ponto da parábola de foco F e diretriz d . \square

Figura 2.24: Proposição 2.1

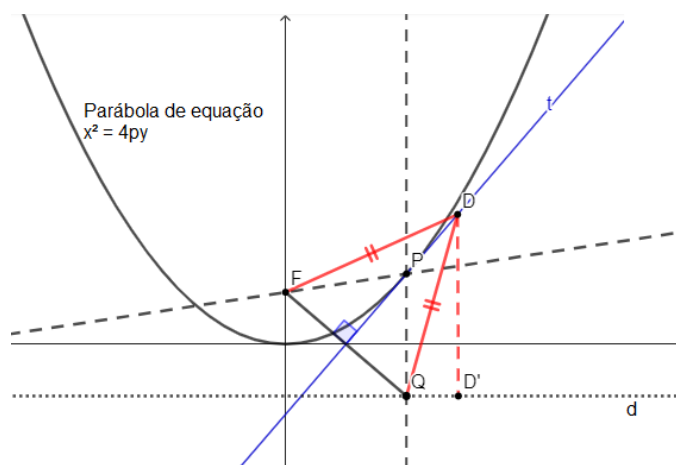


Fonte: Elaboração própria

Proposição 2.2: Seja P um ponto da parábola de foco F e diretriz d . Se Q é o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz, então a mediatriz do segmento FQ , é tangente à parábola em P .

Demonstração. A demonstração dessa proposição é consequência da proposição 2.1 em que demonstramos que a reta t , mediatriz do segmento FQ contém um ponto P pertencente à parábola de foco F e diretriz d . Concluiremos que essa mediatriz é tangente à parábola no ponto P , mostrando que nenhum outro ponto dessa mediatriz pertence à parábola. Seja D um ponto da mediatriz, $D \neq P$ e D' o pé da perpendicular baixada de D . Temos que $\overline{DF} = \overline{DQ}$. Além disso, DQ é hipotenusa do triângulo $\triangle DD'Q$, sendo que $\overline{DQ} = \overline{DF} > \overline{DD'}$. Logo, como $dist(D, F) \neq dist(D, d)$, temos que D não pertence à parábola, portanto apenas o ponto P da mediatriz pertence à parábola. Veja a Figura 2.25. \square

Figura 2.25: $dist(D, F) \neq dist(D, d)$



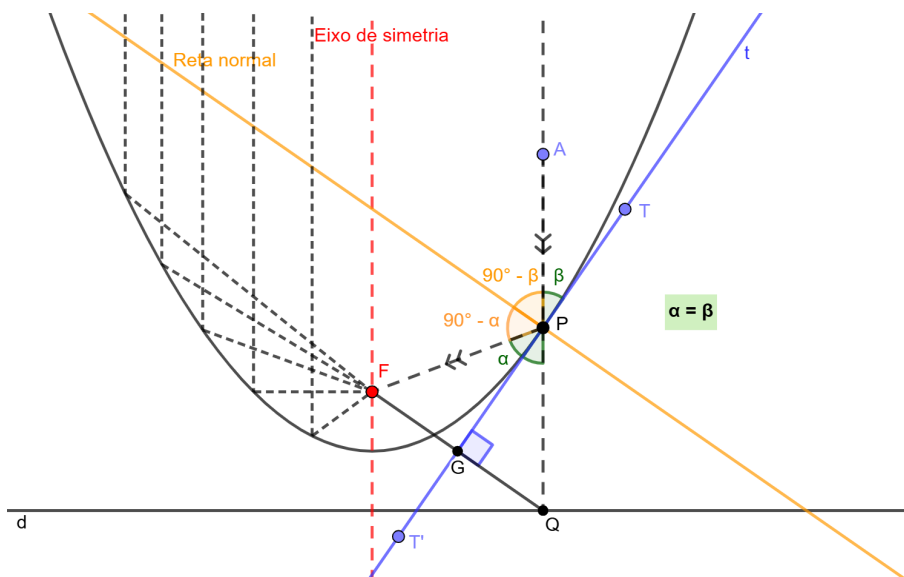
Fonte: Elaboração própria

Proposição 2.3: (Propriedade de Reflexão da Parábola): Seja P um ponto da parábola de foco F e diretriz d . Se Q é o pé da perpendicular baixada de P sobre

a diretriz, então a tangente t à parábola no ponto P é bissetriz do ângulo formado pelos segmentos FP e PQ .

Demonstração. Como Q é o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz d , pela definição da parábola, temos que $\overline{FP} = \overline{PQ}$, logo, o triângulo $\triangle FPQ$ é isósceles. Através da proposição 2.2, FQ é perpendicular à tangente t em G . Temos que PG é altura do triângulo isósceles $\triangle FPQ$ e com isso, bissetriz de \widehat{FPQ} . Portanto, $\widehat{GPQ} = \widehat{GPF} = \alpha$. Observe a Figura 2.26 a seguir. \square

Figura 2.26: Propriedade de Reflexão da Parábola



Fonte: Elaboração própria

Consideremos um ponto A do prolongamento do segmento PQ e os pontos T e T' pertencentes à reta tangente t (veja a Figura 2.26). Como $\widehat{APT} = \beta$ é oposto pelo vértice a $\widehat{T'PQ}$, concluímos que $\widehat{APT} = \widehat{T'PF}$, ou seja, $\alpha = \beta$. Dessa forma, a reta normal à parábola em P é bissetriz de \widehat{FPA} . Esse fato e as leis de reflexão comprovam a Propriedade Refletora da Parábola. Mostramos assim, que o ângulo de incidência formado pela semirreta incidente AP e a reta tangente t , é igual ao ângulo de reflexão formado pela semirreta de reflexão PF e a reta tangente t .

Paraboloides de Revolução

Na busca pelo estudo dos paraboloides de revolução, passaremos aqui por um pequeno estudo sobre os paraboloides, um dos tipos de superfícies quádricas correspondentes das cônicas no espaço. Atentaremos a responder as seguintes perguntas: Como obtemos paraboloides? Quais são os tipos de paraboloides? Quais cônicas estão presentes em um parabolóide? Como chegamos a um parabolóide de revolução? Quais as propriedades presentes no parabolóide de revolução?

Estando de posse do conhecimento desse tipo de superfície quádrica (parabolóide de revolução), trataremos em última seção da Propriedade Refletora da Parábola no parabolóide de revolução.

3.1 Paraboloides

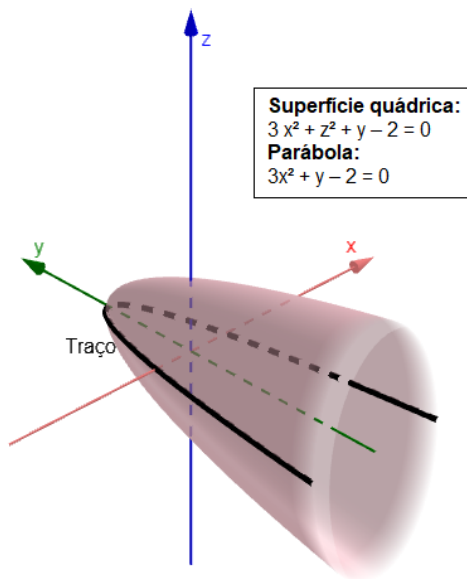
Um parabolóide é uma superfície quádrica. Superfícies quádricas são as correspondentes tridimensionais das cônicas no plano. Esse tipo de superfície representa o gráfico de uma equação do segundo grau nas três variáveis x , y e z , cuja forma mais geral dessa equação é dada por:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \quad (3.1)$$

onde A, B, C, \dots, J são números reais, sendo pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F não-nulo. Quando essa superfície for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção, chamada de *traço* da superfície no plano, será uma seção cônica. O traço da superfície quádrica no plano $z = 0$, por exemplo, é representada por uma elipse, uma hipérbole ou por uma parábola no plano xy (veja a Figura 3.1), cujas equações gerais são do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + Gx + Hy + J = 0. \quad (3.2)$$

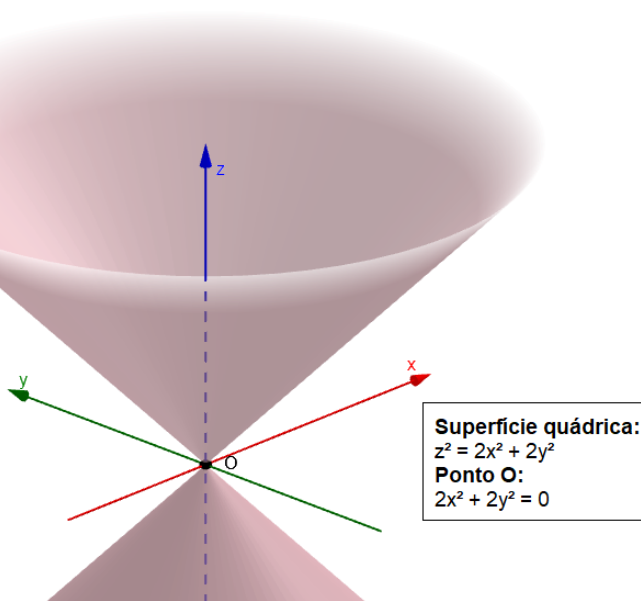
Figura 3.1: Traço de uma superfície quádrlica no plano $z = 0$



Fonte: Elaboração própria

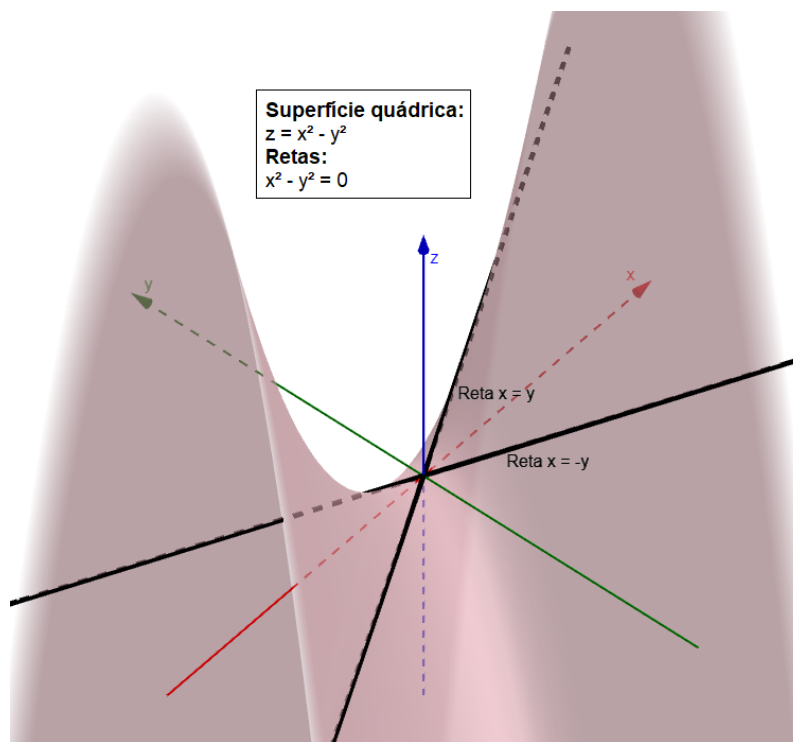
Vale ressaltar que, em alguns casos, a equação 3.2 pode representar uma reta, ou duas retas, ou um ponto, ou um conjunto vazio. Dizemos que esses constituem as cônicas *degeneradas* [38]. Em primeiro exemplo, na Figura 3.2 temos o gráfico de um cone e uma cônica degenerada representada pelo ponto O . Em segundo exemplo, na Figura 3.3 temos o gráfico de um parabolóide hiperbólico e uma cônica degenerada representada por um par de retas.

Figura 3.2: Exemplo de cônica degenerada (ponto O) em uma superfície quádrlica no plano $z = 0$



Fonte: Elaboração própria

Figura 3.3: Exemplo de cônica degenerada (par de retas) em uma superfície quádrlica no plano $z = 0$



Fonte: Elaboração própria

Por rotação ou translação dos eixos coordenados qualquer equação do segundo grau 3.1 é transformada em uma das formas [11]:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R \quad (\text{Quádrlica Cêntrica}) \quad (3.3)$$

ou

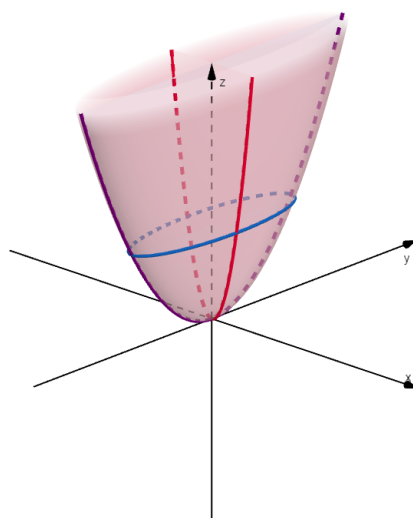
$$Ax^2 + By^2 = Sz \quad (\text{Quádrlica não-Cêntrica}), \quad (3.4)$$

onde A , B , C e R são números reais.

Daremos atenção à equação 3.4, pois dela obteremos os paraboloides. Supondo, sem perda de generalidade, que $S \geq 0$, ao analisar os sinais dos coeficientes A , B e S nessa equação verificamos que se $S > 0$ e os coeficientes A e B :

- têm o mesmo sinal: a superfície quádrlica é um parabolóide elíptico (quando a superfície é cortada por planos horizontais seus traços são elipses e quando a superfície é cortada por planos verticais seus traços são parábolas). Observe a Figura 3.4.

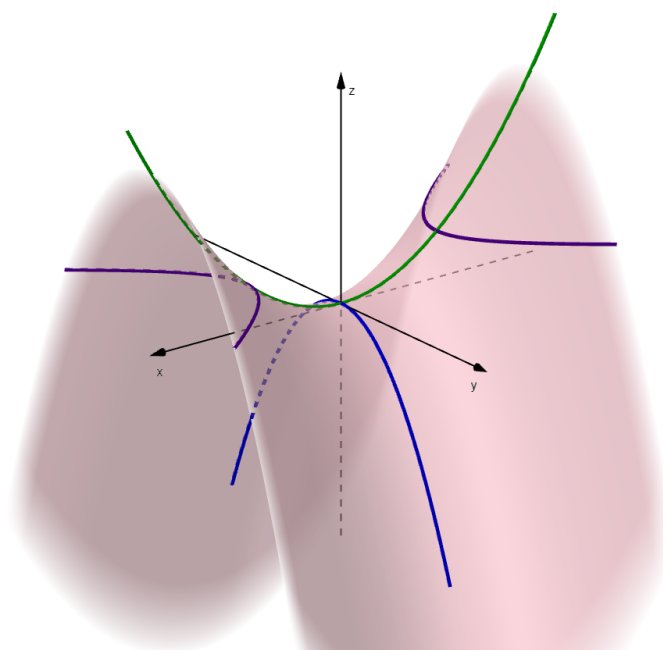
Figura 3.4: Paraboloide elíptico



Fonte: Elaboração própria

- têm sinais opostos: a superfície quádrlica é um parabolóide hiperbólico (quando a superfície é cortada por planos horizontais seus traços são hipérbolas e quando a superfície é cortada por planos verticais seus traços são parábolas). Observe a Figura 3.5.

Figura 3.5: Paraboloide hiperbólico

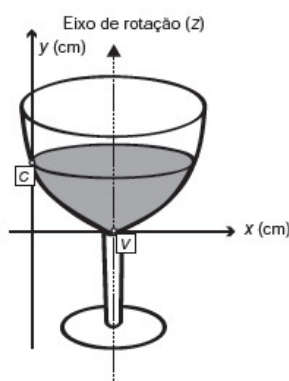


Fonte: Elaboração própria

Assim, há dois tipos de paraboloides: elíptico e hiperbólico. Direcionaremos aos paraboloides elípticos, em que possuem um formato de uma taça e possuem um ponto máximo ou mínimo. Especificamente faremos um estudo aprofundado do *paraboloide de revolução*, também conhecido como *paraboloide circular*: superfície obtida através da rotação de uma parábola ao redor de seu eixo, que é um tipo de paraboloide elíptico.

Como exemplo, observamos, na Figura 3.6 a seguir, a rotação de uma parábola de vértice V em torno de seu eixo de simetria (ou eixo focal). Esta imagem foi retirada de uma questão do Enem 2013 [6], onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Na questão foi dada a lei de formação da parábola em que o candidato deveria encontrar o valor de C . Daí percebemos, mais uma vez, a importância de inserir o estudo dos paraboloides circulares, uma vez que é de grande relevância o estudo das aplicações das parábolas no ensino médio, evidenciando que é possível trabalhar questões relativas a algumas superfícies e mostrando como podemos estudar questões relativas ao paraboloide, conhecendo as propriedades da parábola.

Figura 3.6: Paraboloide de revolução (Enem 2013)



Fonte:[6]

3.2 Paraboloide elíptico: forma canônica

Os paraboloides elípticos estudados em [11], na forma canônica (ou reduzida), são superfícies dadas pelas equações de segundo grau:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad (3.5)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by, \quad (3.6)$$

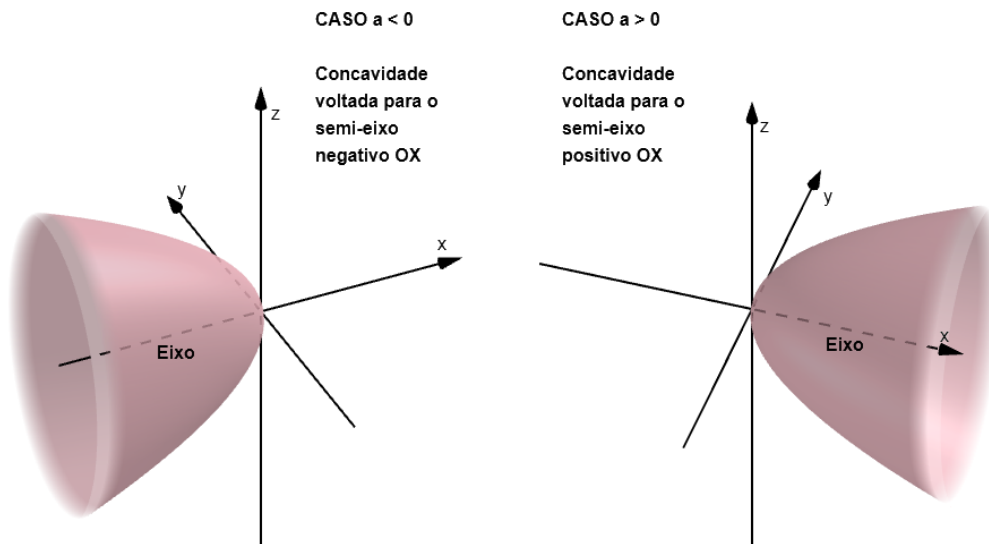
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad (3.7)$$

onde a , b , c são números reais não-nulos.

Vejamos agora, segundo [19] como estão voltadas as concavidades das parábolas descritas por cada equação.

A equação 3.5 tem a forma canônica de eixo OX , ou seja, as parábolas das seções obtidas têm concavidade voltada para o semi-eixo OX negativo quando $a < 0$ ou positivo quando $a > 0$. Veja a Figura 3.7 a seguir.

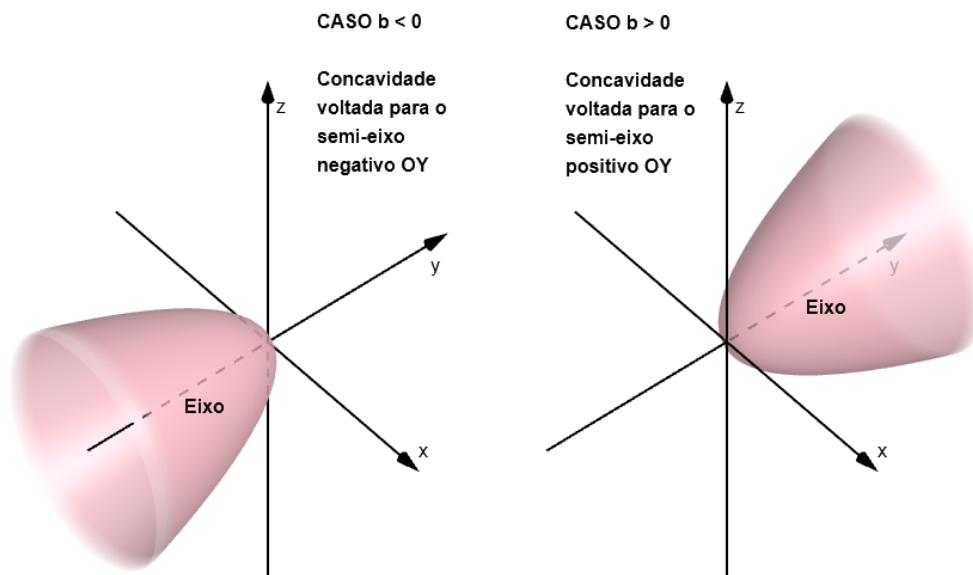
Figura 3.7: Representação gráfica da forma canônica de eixo OX



Fonte: Elaboração própria

A equação 3.6 tem a forma canônica de eixo OY , ou seja, as parábolas das seções obtidas têm concavidade voltada para o semi-eixo OY negativo quando $b < 0$ ou positivo quando $b > 0$. Veja a Figura 3.8 a seguir.

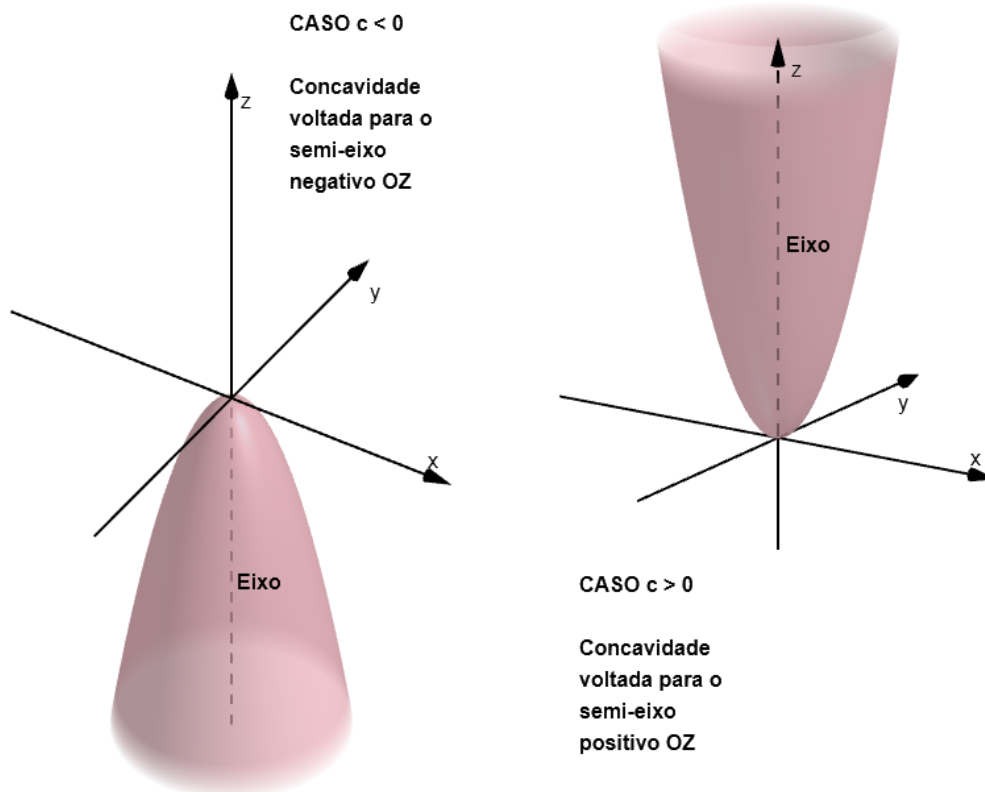
Figura 3.8: Representação gráfica da forma canônica de eixo OY



Fonte: Elaboração própria

A equação 3.7 tem a forma canônica de eixo OZ , ou seja, as parábolas das seções obtidas têm concavidade voltada para o semi-eixo OZ negativo quando $c < 0$ ou positivo quando $c > 0$. Veja a Figura 3.9 a seguir.

Figura 3.9: Representação gráfica da forma canônica de eixo OZ



Fonte: Elaboração própria

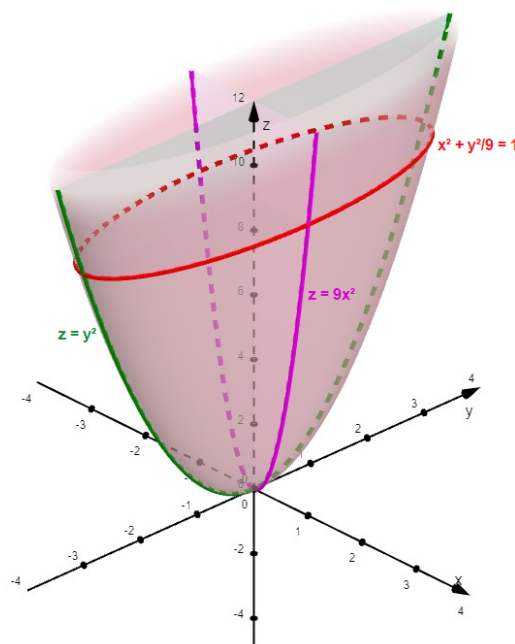
Desenvolvendo a equação 3.7, verificamos a forma padrão da equação 3.4 descrita anteriormente de uma superfície quádrica, que se trata de um paraboloides elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2cz = 0 \Rightarrow Ax^2 + By^2 - Sz = 0 \Rightarrow Ax^2 + By^2 = Sz.$$

Essa equação 3.7 mostra que o traço do paraboloides no plano xy ($z = 0$) é a origem $(0, 0, 0)$, os traços nos planos $z = k > 0$ são elipses, nos planos $z = k < 0$ são vazios e nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

Veja na Figura 3.10 a seguir, um paraboloides elíptico de equação $z = 9x^2 + y^2$ ou $\frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{1} = z$ ao longo do eixo OZ .

Figura 3.10: Paraboloide elíptico de equação $z = 9x^2 + y^2$



Fonte: Elaboração própria

Observamos que no plano $z = 9$ está a elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$, e as parábolas, nos planos $x = 0$ e $y = 0$ são $z = y^2$, $x = 0$ e $z = 9x^2$, $y = 0$, respectivamente.

3.3 Parabolóide de revolução: propriedades, gráficos e equações

Sobre as superfícies de revolução, encontramos:

Superfície de revolução é a superfície gerada por uma curva plana (chamada geratriz) que gira 360° em torno de uma reta (chamada eixo) situada no plano da curva. Nesse caso, o traço da superfície em um plano perpendicular ao eixo é uma circunferência e a equação da superfície de revolução é obtida pela equação da geratriz [38].

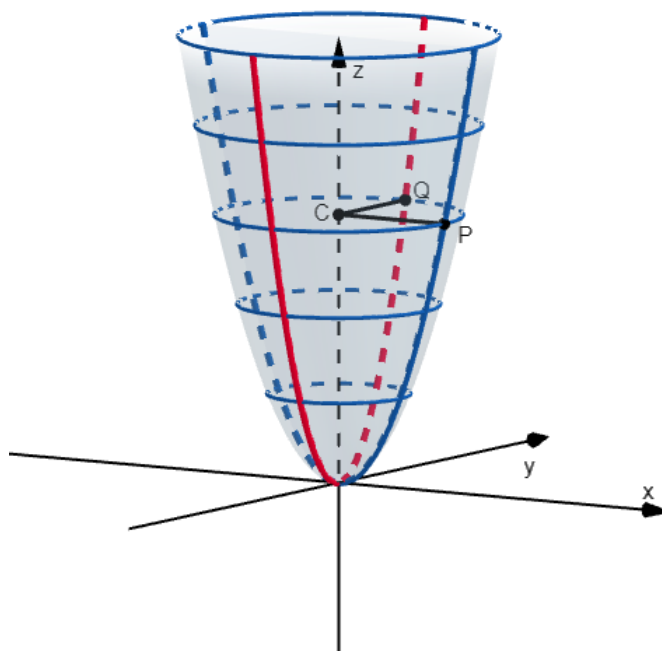
Podemos então, definir um parabolóide de revolução da seguinte forma:

Definição 3.1: Um parabolóide de revolução é uma superfície de revolução gerada por uma parábola (chamada geratriz do parabolóide) que gira 360° em torno de uma reta (chamada eixo de revolução do parabolóide) situada no plano da parábola.

Como exemplo, vamos considerar a parábola $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ ilustrada a seguir em 3.11, no sistema xyz . Imaginemos uma superfície obtida pela revolução dessa parábola em torno do eixo z , ou seja, a parábola é girada em torno do eixo z . Obteremos assim, uma superfície chamada parabolóide de revolução.

Encontraremos agora a equação dessa superfície. Seja $P = (x, y, z)$ um ponto desse parabolóide. Como cada ponto da parábola quando a giramos em torno de z formará uma circunferência, este ponto P pertence a uma circunferência de centro $C = (0, 0, z)$, de modo que o ponto $Q = (0, y', z)$ também pertence a essa circunferência e está sobre a parábola $z = y'^2$ (podemos afirmar que $z = y'^2$, pois o ponto Q atende à equação da parábola). Os pontos P , Q e C estão representados na Figura 3.11 a seguir.

Figura 3.11: Superfície gerada pela parábola $z = y^2$



Fonte: Elaboração própria

Temos então que $dist(C, P) = dist(C, Q)$, pois $dist(C, P)$ e $dist(C, Q)$ são raios da mesma circunferência. Dessa forma, sendo $P = (x, y, z)$, $C = (0, 0, z)$ e $Q = (0, y', z)$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y'^2}$$

$$x^2 + y^2 = y'^2, \text{ ou seja,}$$

$$x^2 + y^2 = z, \text{ que é a equação desta superfície.}$$

Essa equação pode ser obtida substituindo-se y na equação geratriz $z = y^2$ por $\sqrt{x^2 + y^2}$, considerando que $z \geq 0$. Porém, é importante destacar que, para termos uma superfície completa poderíamos substituir y por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, o que não alteraria a equação da superfície.

Podemos utilizar esse procedimento para demais casos, já que a seção dessa superfície de revolução com um plano perpendicular ao eixo é uma circunferência, ou seja, se o parabolóide de revolução é obtido através da rotação de 360° de uma geratriz contida em um dos planos coordenados, então, quando a curva gira em torno:

- a) do eixo dos x , substitui-se y ou z na equação da parábola geratriz por $\sqrt{y^2 + z^2}$;

- b) do eixo dos y , substitui-se x ou z na equação da parábola geratriz por $\sqrt{x^2 + z^2}$;
 c) do eixo dos z , substitui-se x ou y na equação da parábola geratriz por $\sqrt{x^2 + y^2}$.

3.4 Equação reduzida do parabolóide de revolução

De uma forma geral, vamos considerar no plano yz a parábola de equação $cz = \frac{y^2}{b^2}$, $x = 0$. Obtemos um parabolóide de revolução ao rotacionar essa parábola em torno do eixo OZ , cuja equação pode ser obtida pelo procedimento descrito anteriormente, ou seja, da equação geratriz, podemos substituir y por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Assim:

- Equação reduzida do parabolóide com revolução em torno do eixo OZ :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz. \quad (3.8)$$

Percebemos que o parabolóide de revolução é um caso particular do parabolóide elíptico, uma vez que, basta que a seja igual a b na forma canônica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ do parabolóide elíptico para obtermos a equação do parabolóide de revolução. Analisando o caso em que $c > 0$ nessa equação, um parabolóide elíptico será uma superfície de revolução quando as seções planas obtidas pela interseção da superfície com $z = k$, $k > 0$ forem círculos, isto é, quando $a = b$.

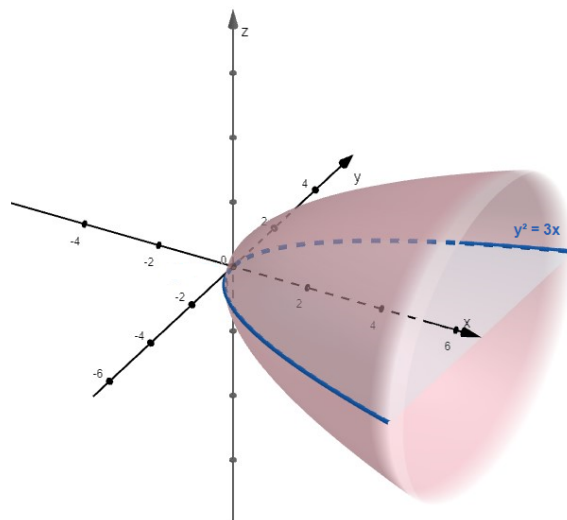
Considerando as equações geratrizes das parábolas nos outros planos, temos também, pelo mesmo procedimento:

- Equação reduzida do parabolóide com revolução em torno do eixo OX :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = ax. \quad (3.9)$$

Como exemplo, na Figura 3.12 a seguir temos a superfície gerada pela revolução da parábola $y^2 = 3x$, $z = 0$ em torno do eixo OX , cuja equação da superfície é $y^2 + z^2 = 3x$.

Figura 3.12: Superfície gerada pela revolução da parábola $y^2 = 3x$



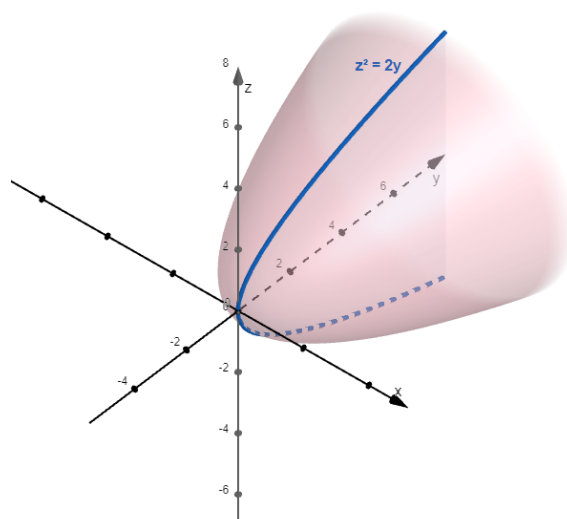
Fonte: Elaboração própria

- Equação reduzida do paraboloides com revolução em torno do eixo OY :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = by. \quad (3.10)$$

Como exemplo, na Figura 3.13 a seguir temos a superfície gerada pela revolução da parábola $z^2 = 2y$, $x = 0$ em torno do eixo OY , cuja equação da superfície é $x^2 + z^2 = 2y$.

Figura 3.13: Superfície gerada pela revolução da parábola $z^2 = 2y$



Fonte: Elaboração própria

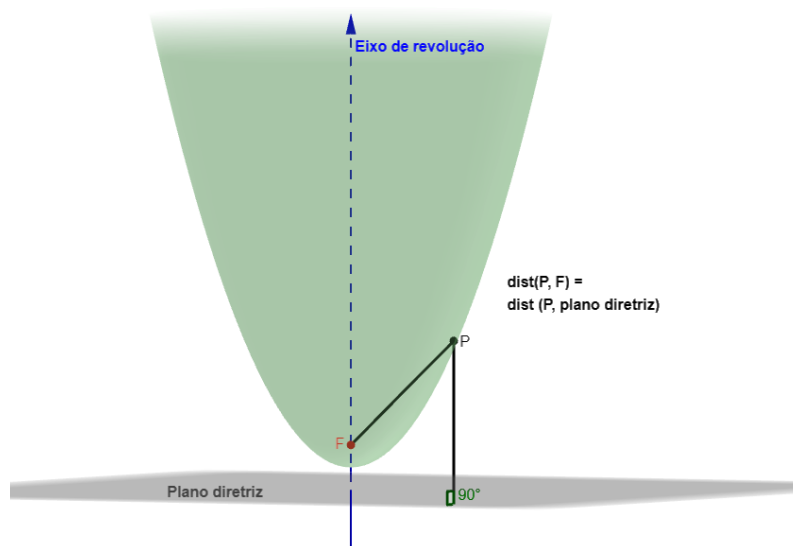
3.5 A Propriedade Refletora da Parábola presente no paraboloides de revolução

Nesta seção retomaremos à Propriedade Refletora da Parábola, mostrando que a mesma está presente nos paraboloides de revolução, uma vez que estes são gerados pela rotação das parábolas em torno de seus eixos focais. Com o intuito de caracterizar essa propriedade, será abordada uma ideia apresentada por [32], em que definiremos alguns novos elementos nos paraboloides de revolução e acrescentaremos alguns conceitos da geometria espacial.

Anteriormente, na seção 3.3 definimos o paraboloides de revolução como uma superfície de revolução gerada por uma parábola (chamada geratriz do paraboloides) que gira 360° em torno de uma reta (chamada eixo de revolução do paraboloides) situada no plano da parábola. Mas, será importante caracterizá-lo também de outra forma:

Definição 3.2: Um paraboloides de revolução é o lugar geométrico dos pontos P do espaço equidistantes de seu foco F , que está sobre o eixo de revolução, e do plano diretriz perpendicular ao mesmo eixo. Veja a Figura 3.14.

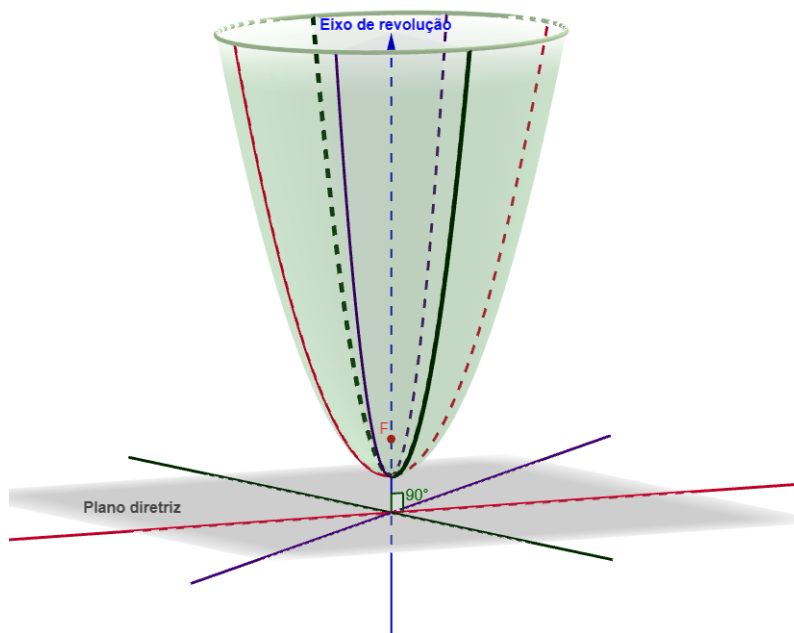
Figura 3.14: Definição do paraboloides de revolução



Fonte: Elaboração própria

Entendemos como *plano diretriz* o plano perpendicular ao eixo de revolução do paraboloides que contém todas as retas diretrizes (as diretrizes de todas as parábolas geradoras do paraboloides), observe a Figura 3.15. O *foco* F do paraboloides de revolução é o foco da parábola geradora, ou seja, é o ponto fora do plano diretriz localizado no eixo de revolução do paraboloides tal que qualquer ponto da parábola geradora tem a mesma distância desse ponto F e do plano diretriz.

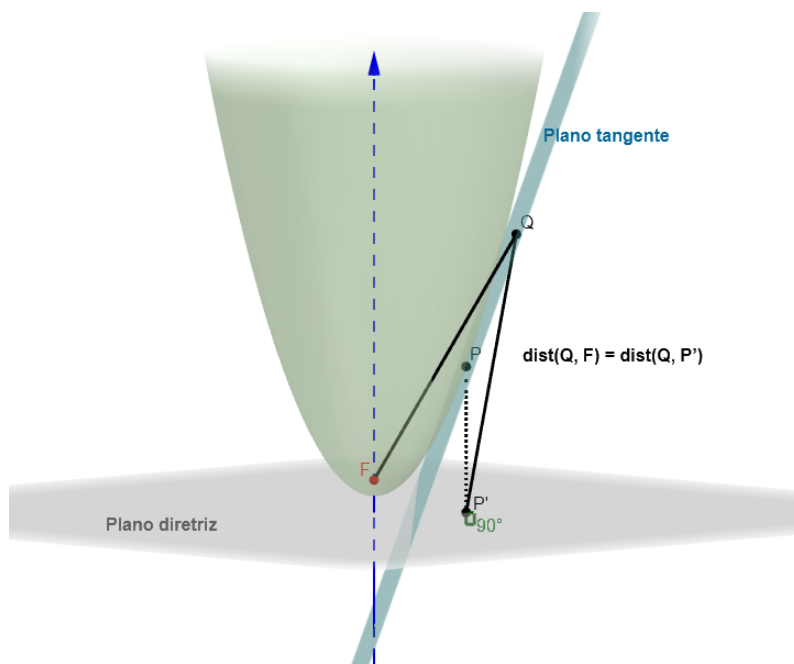
Figura 3.15: Plano diretriz



Fonte: Elaboração própria

Proposição 3.1: O plano tangente ao parabolóide num determinado ponto P é o lugar dos pontos Q equidistantes do foco F e do pé da perpendicular baixada do ponto P de tangência ao plano diretriz. Veja a Figura 3.16.

Figura 3.16: Definição do plano tangente ao parabolóide



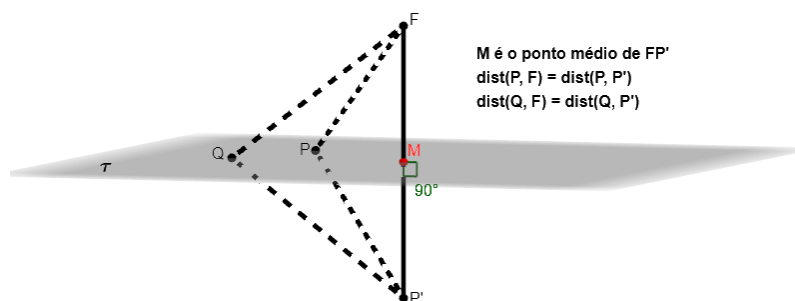
Fonte: Elaboração própria

Assim, sendo P' o pé da perpendicular baixada de P sobre o plano diretriz, temos que o plano tangente a P é o conjunto dos pontos Q do espaço tais que

$dist(Q, F) = dist(Q, P')$. Para justificar, consideremos o plano de todos os pontos equidistantes de F e de P' . Esse plano tem apenas um ponto em comum com o parabolóide (ponto P), pois qualquer outro ponto deste plano está mais distante do pé da perpendicular baixada de P e do foco F , do que do plano diretriz, contrariando a definição 3.2 do parabolóide de revolução.

Definição 3.3: O plano mediador de um segmento de reta FP' é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes dos extremos do segmento de reta. Em outras palavras, o plano mediador τ é o plano perpendicular ao segmento de reta FP' e que contém o ponto médio M desse segmento de reta. Veja a Figura 3.17.

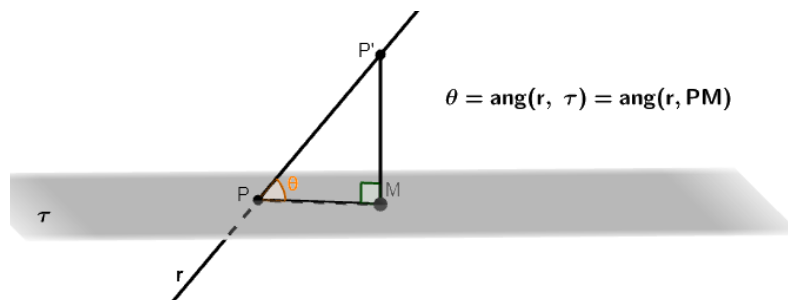
Figura 3.17: Definição do plano mediador de um segmento de reta



Fonte: Elaboração própria

Definição 3.4: O ângulo entre uma reta (ou segmento de reta ou semirreta) r secante ao plano τ em P e o plano τ é o ângulo θ que a reta r forma com a sua projeção ortogonal PM . Veja a Figura 3.18.

Figura 3.18: Ângulo entre a reta secante e o plano



Fonte: Elaboração própria

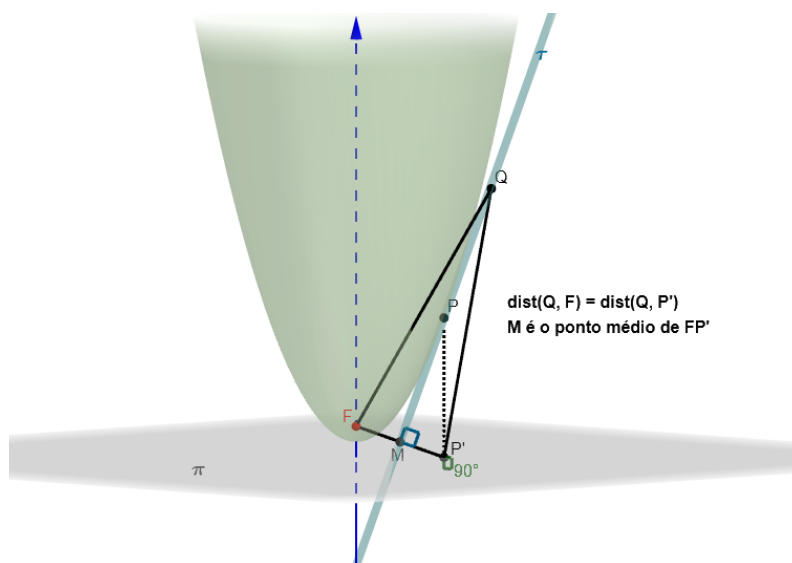
Definição 3.5: Uma reta (ou segmento de reta ou semirreta) concorrente com um plano, num determinado ponto, é perpendicular ao plano quando é perpendicular a todas as retas (ou segmentos de retas ou semirretas) do plano que passam pelo ponto determinado.

Proposição 3.2: Seja P um ponto do parabolóide de foco F e plano diretriz π . Se P' é o pé da perpendicular baixada de P sobre o plano diretriz, então o plano

tangente τ ao parabolóide no ponto P é o plano mediador do segmento FP' . Observe a Figura 3.19.

Demonstração. Como P' é o pé da perpendicular baixada de P sobre o plano diretriz, pela definição do parabolóide, temos que o plano tangente a P é o conjunto dos pontos Q do espaço tais $dist(Q, F) = dist(Q, P')$, logo o plano tangente τ obedece a definição 3.3, uma vez que é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes dos extremos do segmento de reta FP' . \square

Figura 3.19: O plano tangente τ ao parabolóide no ponto P é o plano mediador do segmento FP'



Fonte: Elaboração própria

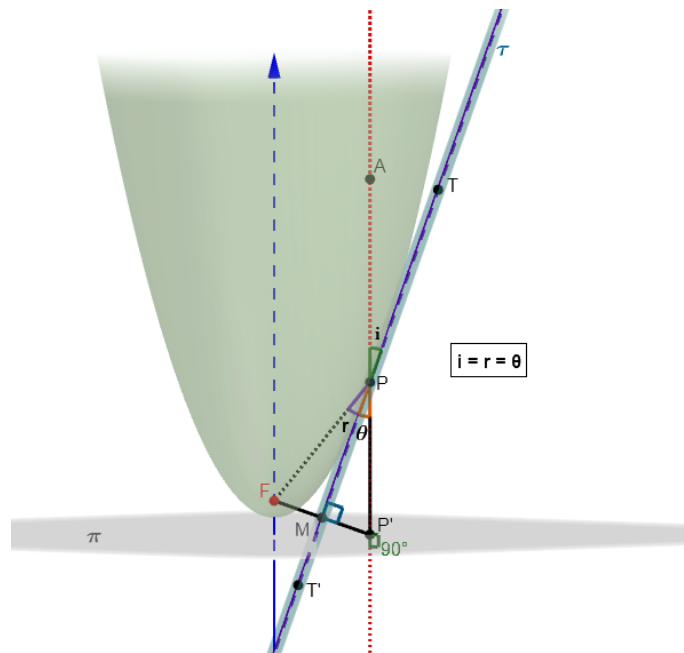
Proposição 3.3: (Propriedade de Reflexão no Parabolóide de Revolução): Seja P um ponto do parabolóide de foco F e plano diretriz π . Se P' é o pé da perpendicular baixada de P sobre o plano diretriz, então o plano tangente τ ao parabolóide no ponto P faz ângulos iguais com o segmento de reta FP e o segmento de reta $P'P$.

Demonstração. Da proposição 3.2 temos que o plano tangente a um dado ponto P é o plano mediador do segmento FP' , logo, esse plano mediador é perpendicular ao segmento de reta FP' e contém o ponto médio M desse segmento. Da definição 3.4, o ângulo entre o plano tangente e o segmento PF é dado pelo ângulo entre os segmentos PF e PM e o ângulo entre o plano tangente e o segmento PP' é dado pelo ângulo entre os segmentos PP' e PM . Da definição 3.5 como PM é um segmento do plano tangente, ele é perpendicular ao segmento FP' , logo, é altura do triângulo isósceles $\triangle FPP'$ e portanto, é bissetriz de $\hat{F}PP'$. Com isso, temos $ang(FP, \tau) = ang(P'P, \tau) = \theta$. Veja a Figura 3.20. \square

Dessa forma, consideremos um ponto A do prolongamento do segmento PP' e os pontos T e T' pertencentes ao prolongamento de PM (observe a Figura 3.20). Como $\hat{APT} = i$ é oposto pelo vértice a $\hat{MPP}' = \theta$, concluímos que $i = \theta$. Isso

possibilita um funcionamento da Propriedade Refletora da Parábola em todos os pontos P do parabolóide em que a semirreta incidente AP que propaga paralelamente ao eixo de revolução do parabolóide ao incidir o ponto P da mesma é refletida exatamente sobre seu foco.

Figura 3.20: Ângulo de incidência i é igual ao ângulo de reflexão r

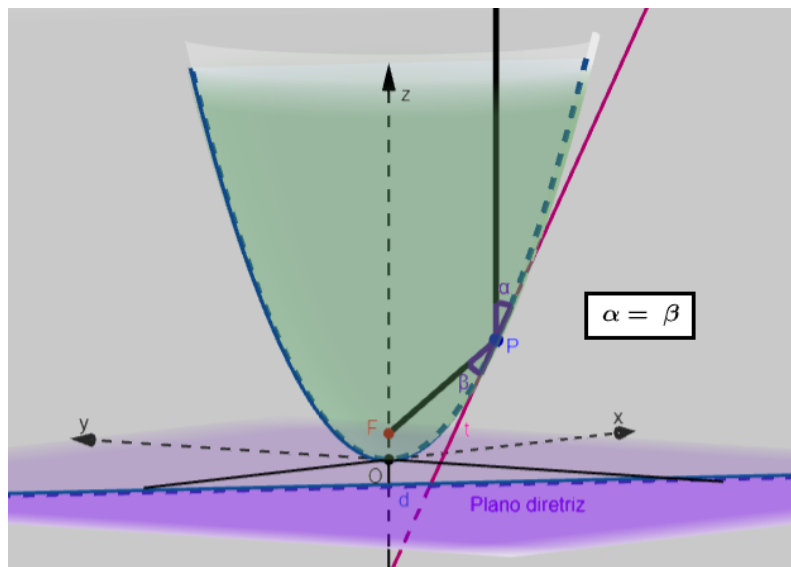


Fonte: Elaboração própria

Podemos ainda, sem perda de generalidade, analisar a Propriedade Refletora no parabolóide de revolução, da seguinte forma:

Consideremos o parabolóide de revolução de equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$. Ao seccionarmos essa superfície no plano $x = 0$, obtemos seu traço representado pela parábola de equação $cz = \frac{y^2}{b^2}$, ou seja, esse parabolóide pode ser obtido pela rotação dessa curva em torno do eixo dos z . Seja um ponto P dessa parábola de foco F e diretriz d . Vimos que a Propriedade Refletora da Parábola tratada em 2.3 se aplica em qualquer ponto P dessa parábola geradora. Como o foco F do parabolóide de revolução é o foco dessa parábola geradora e a reta diretriz d está contida no plano diretriz do parabolóide, a Propriedade Refletora em qualquer ponto do parabolóide de revolução de equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ é descrita por sua parábola geradora de equação $cz = \frac{y^2}{b^2}$. Veja a Figura 3.21.

Figura 3.21: Propriedade Refletora no Paraboloide de Revolução



Fonte: Elaboração própria

Aplicações dos Paraboloides de Revolução e sua Propriedade Refletora

Agora que definimos, equacionamos, conhecemos uma propriedade importante da parábola, e, para além disso, estudamos os paraboloides, podemos apresentar algumas aplicações importantes que envolvem o estudo de um parabolóide de revolução. Algumas antenas, espelhos dos telescópios e dos faróis de automóveis são parabólicos e há um motivo para isso [37].

Veremos que a Propriedade Refletora da Parábola é bastante útil em várias aplicações práticas do cotidiano. Essas aplicações se baseiam justamente na capacidade da parábola de concentrar ou direcionar ondas de forma eficiente para um ponto focal, o que é explorado para otimizar o desempenho de diversos dispositivos. Devido a isso, essa Propriedade Refletora é utilizada em várias situações em que se referem nas aplicações dos paraboloides de revolução, ou podemos dizer, superfícies parabólicas, uma vez que obtemos essa superfície ao girarmos uma parábola em torno de seu eixo de simetria e, também, é possível verificar que ao seccionarmos um parabolóide de revolução por um plano contendo o seu eixo de simetria, a seção obtida é uma parábola.

Trataremos neste capítulo de alguns termos usados na física. Segundo [29], *onda* é “qualquer efeito (perturbação) que se transmite de um ponto a outro de um meio. Em geral, fala-se de onda quando a transmissão do efeito entre dois pontos distantes ocorre sem que haja transporte direto de matéria de um desses pontos a outro”. Resumindo, as ondas se propagam pelo espaço sem transporte de matéria (apenas de energia) em um meio que pode ser material ou não.

Em um estudo sobre as ondas em [22], podemos classificá-las com base no que está “ondulando” em:

ondas mecânicas: são aquelas que necessitam de um meio material para propagar-se, ou seja, não se propagam no vácuo, como as ondas sonoras e as ondas na água;

ondas eletromagnéticas: são aquelas que não necessitam de um meio material e podem se propagar no vácuo, como as ondas de rádio à luz visível e os raios X;

ondas de matéria: constituem a base da física quântica, uma descoberta do século XX, de que as partículas de matérias (elétrons e átomos) têm características

semelhantes às de ondas.

Os sinais captados de satélites que chegam até as antenas, os raios provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planeta, etc.), os raios de luz dos faróis e dos projetores, que serão citados neste capítulo, são exemplos de ondas eletromagnéticas. As ondas eletromagnéticas, propagam-se na velocidade da luz, cerca de $3,0 \cdot 10^8$ m/s, ou seja, todas “viajam” na mesma velocidade, cerca de um milhão de vezes mais rápido do que a velocidade do som no ar [23]. Citaremos também, as ondas sonoras, que são ondas mecânicas, cuja velocidade depende das propriedades do meio, entretanto, não nos aprofundaremos, é possível ver com mais detalhes em [24].

Vamos associar agora os termos ângulo de incidência e de reflexão, retas incidentes e refletidas tratados em capítulos anteriores com as famosas leis de reflexão estudada na física:

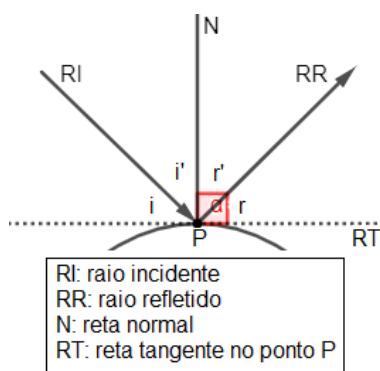
1ª Lei da Reflexão: o raio incidente, a reta normal à superfície refletora no ponto de incidência e o raio refletido estão situados no mesmo plano.

2ª Lei da Reflexão: o ângulo de incidência i' é igual ao ângulo de reflexão r' .

Assim, o ângulo i' que o raio de luz incidente faz com a normal à curva é igual ao ângulo r' que o raio de luz refletido faz com a normal, observe na Figura 4.1 a seguir, que $i' = r'$ [34].

Observação: No capítulo 2 interpretamos os ângulos de incidência e reflexão por meio do ângulo entre uma reta e uma curva (parábola) que se interceptam no ponto P como o menor ângulo entre essa reta e a tangente traçada pelo ponto de interseção. Esses ângulos na Figura 4.1 a seguir correspondem aos ângulos i e r . Como $r = 90^\circ - r'$ e $i = 90^\circ - i'$, concluímos também que $i = r$.

Figura 4.1: Lei de reflexão



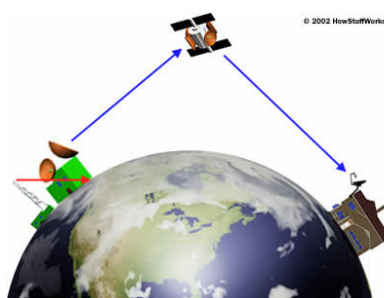
Fonte: Elaboração própria

4.1 Antenas parabólicas

Rastrear satélites em órbita na terra era uma atividade restrita, com intuito científico. A evolução nas comunicações possibilitou a disseminação das antenas parabólicas domésticas, ganhando impulso no Brasil em 1983.

Sabemos que as antenas parabólicas são muito usadas e conhecidas, servindo para emitir e receber sinais. Além do mais, percebemos que algumas delas têm uma aparência diferente, mas, como elas funcionam? Primeiro, para receber sinais, a parabólica precisa estar localizada dentro de uma faixa de alcance do satélite e não são todos os satélites em órbita na terra que alcançam as antenas em determinado país. As ondas partem da estação em direção ao espaço, atingindo o satélite que as reflete para a terra, sendo captadas pelo “prato” da antena parabólica da residência. As imagens via satélite podem ser transportadas por micro-ondas, que são ondas eletromagnéticas [18]. Veja a Figura 4.2.

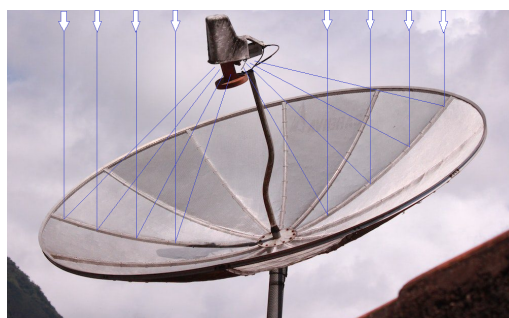
Figura 4.2: Sinais enviados pelo satélite



Fonte: [28]

Mas, por que essas antenas são parabólicas? Como os sinais que recebemos são muito fracos, é necessário captá-los em uma superfície específica para concentrá-los em um único ponto para que os sinais sejam amplificados. A parábola possui essa propriedade [37]. As micro-ondas que atingem essas superfícies parabólicas são refletidas para o “centro” em que há um componente eletrônico chamado alimentador [18]. Observe a Figura 4.3.

Figura 4.3: Raios incidentes na antena parabólica



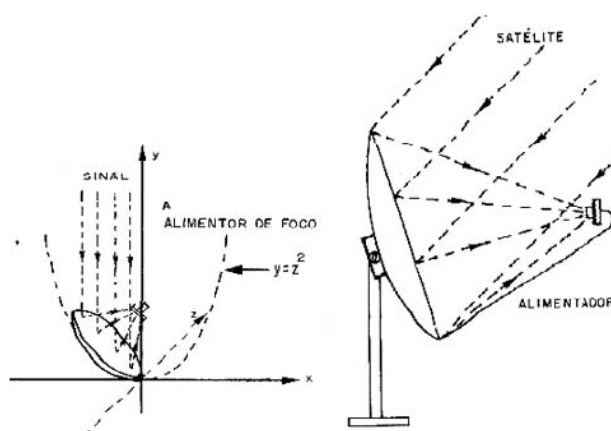
Fonte: Elaboração própria

Dessa forma, a superfície dessas antenas possuem um formato de parabolóide, devido à Propriedade Refletora da Parábola, uma propriedade importante estudada nos capítulos anteriores. As ondas eletromagnéticas emitidas por um satélite incidem sobre a antena parabólica, paralelamente ao eixo de simetria do parabolóide e são refletidas para o foco do parabolóide.

A posição correta do foco (comumente citado como alimentador) nas antenas parabólicas é essencial para um bom funcionamento. No caso das novas antenas (conhecida como *assimétrica* por não possuir o foco no centro do prato), em formato menor, é feito um corte inclinado na superfície parabólica em que o funcionamento é o mesmo da antenna tradicional [4].

Essa antenna, possui algumas vantagens, pois o sinal não é bloqueado pelo próprio alimentador, como ocorre na antenna antiga, uma vez que o mesmo se encontra lateralmente. Além do mais, ela evita acumular água, sujeira ou neve. Podemos observar isso na Figura 4.4 a seguir.

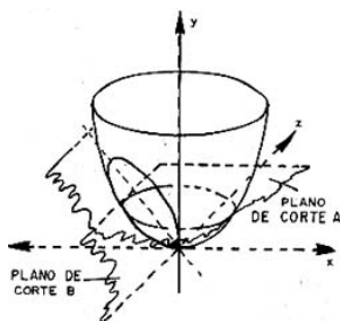
Figura 4.4: Antena parabólica com formato menor



Fonte: [4]

Sendo assim, o importante é que a superfície que gere a antenna seja parabólica, ou seja, podemos tomar qualquer trecho desse parabolóide, como mostra a Figura 4.5.

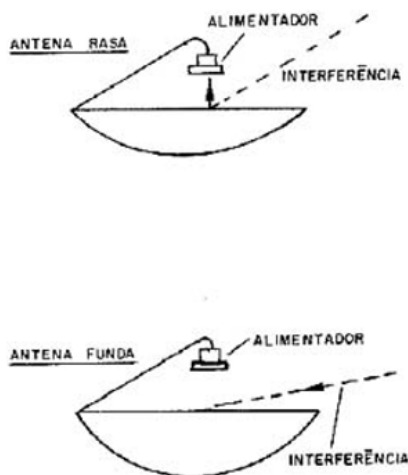
Figura 4.5: Trecho do parabolóide



Fonte: [4]

Então, é possível obter antenas mais abertas ou mais fechadas, como apresentado na Figura 4.6 a seguir. Há antenas mais profundas, ou seja, com uma curvatura maior e há antenas mais rasas [4]. Vale salientar que o conteúdo de curvatura de uma superfície é também estudado dentro da matemática, em uma área denominada Geometria Diferencial. Não entraremos nesse assunto. O Brasil é pioneiro em pesquisas nessa área e detalhes sobre o assunto pode ser encontrado em [9].

Figura 4.6: Curvatura das antenas

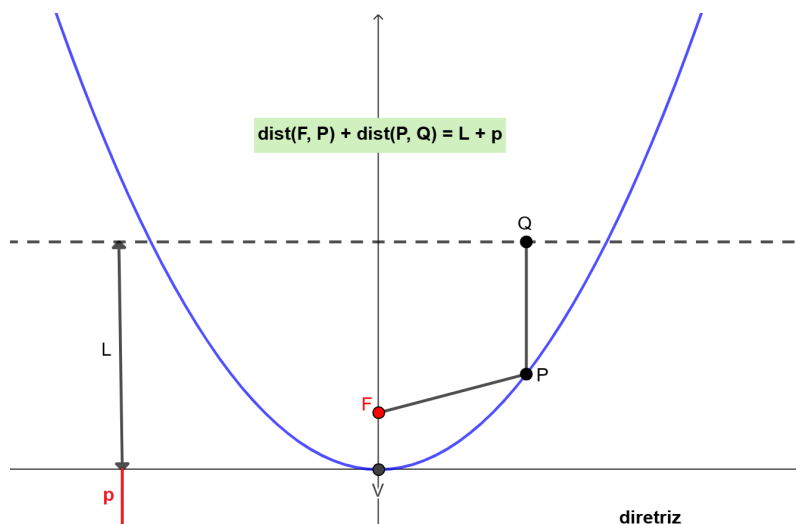


Fonte: [4]

A prova da proposição a seguir mostra que raios paralelos ao eixo de simetria da superfície parabólica que estão a uma mesma distância da reta diretriz ao incidirem na superfície, após serem refletidos, convergem ao mesmo tempo no foco e portanto se somam.

Proposição 4.1: Consideremos uma reta de altura L perpendicular ao eixo de simetria da parábola de equação $x^2 = 4py$ com vértice V e foco $F = (0, p)$, veja a Figura 4.7 a seguir. Considere também, um ponto P pertencente à parábola e um ponto Q pertencente à reta de altura L , de modo que \overline{PQ} seja um segmento paralelo ao eixo de simetria da parábola. Então, o comprimento $\overline{PQ} + \overline{PF}$ é igual a $L + p$. Veja a Figura 4.7.

Figura 4.7: Raios chegam ao mesmo tempo no foco e se somam



Fonte: Elaboração própria

Demonstração. Sejam o ponto $P = (x, y)$ pertencente à parábola, o ponto $Q = (x, L)$ pertencente à reta de altura L e o ponto focal $F = (0, p)$, de modo que \overline{PQ} seja um segmento paralelo ao eixo de simetria da parábola. Provaremos que $dist(F, P) + dist(P, Q) = L + p$.

Temos:

$$\begin{aligned} dist(F, P) + dist(P, Q) &= \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 2yp + p^2} + (L - y) &= \\ \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16p^2} + p^2} + \left(L - \frac{x^2}{4p}\right) &= \\ \sqrt{\left(\frac{x^2}{4p} + p\right)^2} + \left(L - \frac{x^2}{4p}\right) &= \end{aligned}$$

Como $\frac{x^2}{4p} + p$ no radicando é um número positivo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4p} + p + L - \frac{x^2}{4p} &= \\ L + p. & \end{aligned}$$

□

Em outras palavras, o que provamos matematicamente na prática significa que se a “linha de onda” desses sinais no instante em que estão nos pontos Q (formando a reta de altura L) for perpendicular ao eixo de simetria da parábola, em outro instante eles estarão alinhados em outra “linha de onda”, numa outra altura, uma vez que todos estão na mesma velocidade, com isso, o tempo que todos eles chegam até o foco é o mesmo. Isso pode sinalizar o ganho proporcionado por um refletor parabólico.

4.2 Telescópios refletores

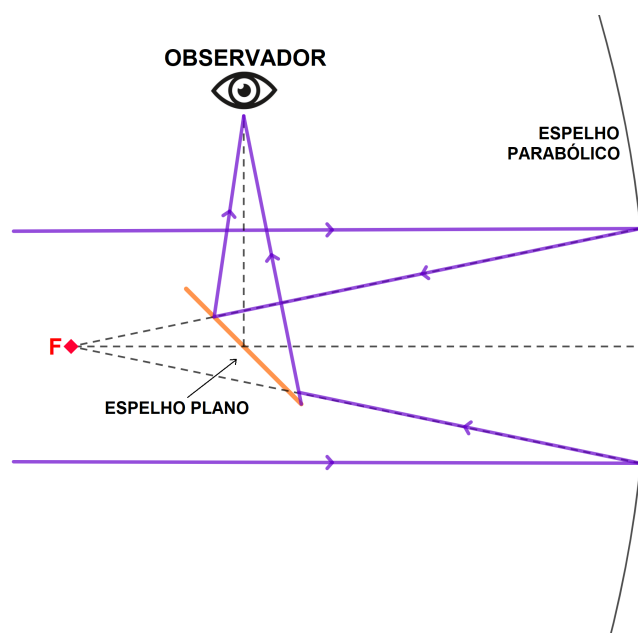
Na construção de telescópios, o princípio de reflexão das cônicas é explorado há muito tempo, desde o século XVII [12].

Os primeiros telescópios funcionavam com base na refração da luz e foram construídos com lente. Porém, as lentes produziam efeitos indesejáveis na imagem visualizada, além de deformações nas imagens. Galileu Galilei (1564-1642) foi o primeiro a construir esse tipo de telescópio. Isaac Newton (1642-1727), por sua vez, inventou o primeiro telescópio refletor prático. Nesse telescópio há um espelho parabólico no fundo de um tubo e um espelho plano colocado entre esse espelho parabólico e o foco F . Daí, os raios que incidem no espelho parabólico, são

direcionados ao foco F , só que eles são refletidos novamente no espelho plano e vão formar a imagem onde se posiciona o observador, fora do tubo [3]. Veja a Figura 4.8.

Com base em [3] “Os raios provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planeta, etc.) formam um feixe praticamente paralelo, que se reflete no espelho e vai formar a imagem do objeto no foco F ”. Dessa forma, os telescópios refletores revolucionaram a astronomia, permitindo observações cada vez mais detalhadas e profundas do cosmos, e continuam a ser a base para muitos dos avanços em nosso entendimento do Universo.

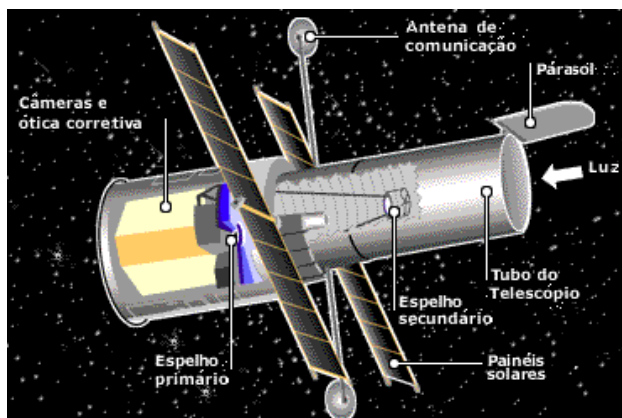
Figura 4.8: Esquema - Telescópio refletor



Fonte: Elaboração própria

O Telescópio Espacial Hubble (veja a Figura 4.9), lançado em 1990, opera fora da atmosfera terrestre, proporcionando imagens extremamente nítidas. É um telescópio refletor de 13 metros de comprimento, 4,3 metros de diâmetro e pesa 11,6 toneladas [8]. Ele tem um espelho primário parabólico e um espelho secundário hiperbólico, modelo inventado pelo francês Guillaume Cassegrain no ano de 1672 [12].

Figura 4.9: Telescópio Espacial Hubble

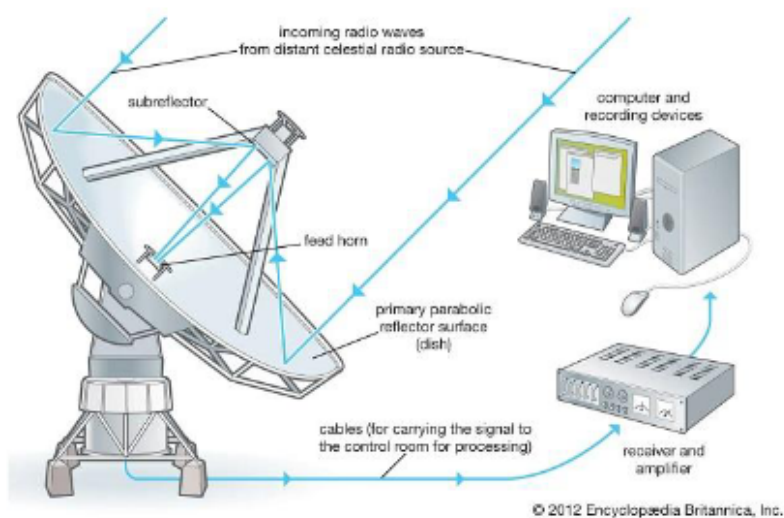


Fonte: [8]

4.3 Radiotelescópios

Em 1938 foi construído por Grote Reber (1911-2002) o primeiro telescópio que capta ondas de rádio, ao invés de luz visível, conhecido como radiotelescópio. Esse tipo de telescópio é uma grande antena receptora em forma de paraboloide. Quando as estrelas, planetas, galáxias e os demais elementos do Universo emitem um ruído, os sinais são captados por essa antena (dish), em seguida os raios são refletidos para um refletor secundário (subrefletor), depois, a radiação chega numa trompa de alimentação (feed horn). Os sinais captados são enviados para um receptor externo que amplifica esses sinais e, após esse procedimento, eles são armazenados na memória de um computador para uma análise posterior [31]. Veja o esquema na Figura 4.10 a seguir.

Figura 4.10: Esquema do funcionamento de um radiotelescópio



Fonte: [31]

A Figura 4.11 a seguir mostra a imagem do Observatório ALMA localizado no

Chile, ele é composto por 66 antenas de alta precisão. "O propósito do ALMA é estudar a formação de estrelas, nuvens moleculares e o Universo primitivo, aproximando-se de seu objetivo principal: descobrir nossas origens cósmicas"[1].

Figura 4.11: Observatório ALMA - Chile



Fonte: [1]

O maior radiotelescópio do mundo (veja a Figura 4.12), chamado Telescópio de Abertura Esférica de 500 metros e conhecido como FAST (sigla em inglês) é um gigantesco disco metálico que se encontra na China e tem 500 metros de diâmetro, um tamanho aproximado de 30 campos de futebol. O mesmo é capaz de capturar ondas de rádio em grande área e fica em uma localidade estratégica, pois o relevo ao redor da antena favorece para não haver perturbações eletromagnéticas [7].

Figura 4.12: FAST - Maior radiotelescópio do mundo



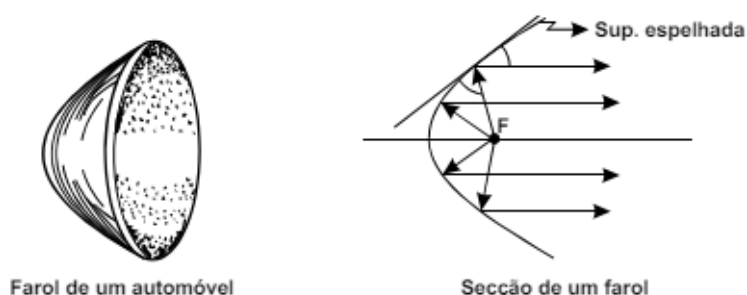
Fonte: [7]

4.4 Faróis de automóveis

Sistemas de faróis de automóveis e lanternas utilizam refletores parabólicos para direcionar a luz de forma mais eficiente, melhorando a visibilidade da estrada para o motorista. Uma lâmpada, localizada no foco da superfície espelhada parabólica emite

luz em direção à superfície e a mesma reflete propagando os raios de luz paralelamente ao eixo de simetria da parábola [36]. Veja a Figura 4.13.

Figura 4.13: Farol de automóvel



Fonte: [36]

4.5 Fornos solares parabólicos

Alguns fogões solares utilizam refletores parabólicos para concentrar a luz solar em um ponto focal, onde uma panela ou outro recipiente é colocado. Essa concentração de luz permite cozinhar alimentos, fritar, assar comidas e aquecer água usando apenas a energia solar, sendo a energia térmica igual ou superior à chama de fogão a gás convencional. Porém, esses fornos parabólicos devem ser monitorados sempre durante o cozimento, para evitar queimar os alimentos no fundo da panela, devido à sua concentração focal [26]. Veja a Figura 4.14.

Figura 4.14: Fogão solar



Um gigante forno solar parabólico opera desde 1968, em Odeillo, nos Pirineus franceses. A instalação deste forno permite trabalhar em processos inovadores de aproveitamento da energia solar. O forno recolhe a energia solar graças a 63 heliostatos (2835m² de superfície total de espelhos) colocados em fileiras escalonadas e depois concentrando-a em um espelho parabólico com 9000 facetas (área de abertura de 1830 m²) dentro de uma torre que abriga a instalação experimental e a sala de controle. Cada heliostato é um espelho que se move, servindo para direcionar os raios do sol que incidem sobre ele em uma determinada direção, ou seja, ele envia a energia solar perfeitamente para iluminar a área da parábola que a concentrará no

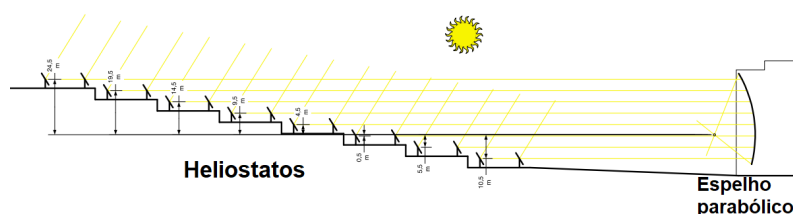
ponto focal, chegando a altas temperaturas. [20]. Veja a Figura 4.15 a seguir que mostra a imagem do forno solar e na Figura 4.16 temos um esquema em que mostra os heliostatos direcionando à superfície parabólica raios de luz solar paralelos.

Figura 4.15: Gigante forno solar parabólico localizado na França



Fonte: [20]

Figura 4.16: Esquema do grande forno solar e seus 63 heliostatos



Fonte: [20]

4.6 Microfones parabólicos

São microfones direcionais, utilizados para captar som em longas distâncias. O refletor parabólico capta ondas sonoras e as concentra em um microfone localizado no foco, permitindo captar sons em boa resposta com mais de 80 metros de distância, onde a direção do som é um problema. Podendo ser utilizado para gravação de canto de pássaros, sons em estádio de futebol, entre outros [35]. Veja a Figura 4.17.

Figura 4.17: Microfone parabólico



Fonte: [35]

4.7 Iluminação direcional de projetores

Certos projetores que possuem refletores parabólicos são utilizados em shows e iluminação cênica de palco. Nestes refletores há um feixe de luz concentrado e

direcional, ou seja, a lâmpada é colocada no foco do refletor parabólico, que direciona a luz de forma precisa [10]. Veja a Figura 4.18.

Figura 4.18: Projetor com refletor parabólico



Fonte: [10]

Metodologia

Para que os estudantes visualizem e experimentem os conceitos e as propriedades que envolvem a parábola, em especial a Propriedade Refletora da Parábola, propomos atividades por meio do uso de materiais concretos através da construção de duas mesas parabólicas. Com essa experiência os estudantes podem experimentar na prática as diversas aplicações da propriedade refletora em superfícies parabólicas, observando como as ondas eletromagnéticas são refletidas por uma curva descrita pela parábola.

Complementaremos com atividades dinâmicas e interativas por meio de tecnologias digitais através da plataforma GeoGebra, em que é possível simular por exemplo, o funcionamento dos dispositivos citados nas aplicações em capítulo anterior, compreendendo assim o conceito matemático nas diversas áreas da tecnologia e do cotidiano.

5.1 Proposta de Atividades com Material Concreto

O uso de materiais concretos no processo de ensino/aprendizagem na matemática se faz muito importante, uma vez que o aluno articula melhor o cotidiano com a sua vivência escolar e se aproxima mais do universo matemático. Ao manipular esses materiais, os estudantes conseguem visualizar e experimentar a matemática de forma mais prática, o que facilita a internalização do conteúdo criando uma ligação entre teoria/prática [17].

Segundo [15] “o uso de materiais concretos representa uma boa alternativa e que dessa forma pode ajudar a aprimorar a compreensão de alguns conceitos matemáticos, além de incentivar a interação social, fomentar o trabalho em equipe e tornar a sala de aula um ambiente de aprendizagem propício ao desenvolvimento integral dos alunos”. A partir da utilização de jogos e materiais concretos o aluno se torna o agente central no processo de ensino, se sentindo capaz e motivado, além do mais, a aula se torna mais inclusiva, favorecendo a aprendizagem dos estudantes com

diferentes necessidades.

Partindo dessas ideias, na busca por um processo de ensino/aprendizagem da matemática mais efetivo, propomos nesta seção, atividades em sala de aula com o uso de material concreto para auxiliar o entendimento dos conceitos e propriedades que envolvem as parábolas e suas equações. As mesmas serão propostas a partir da apresentação de duas mesas de bilhares parabólicas.

Um tipo de mesa de bilhar parabólica é construída com apenas uma tabela (borda) no formato de uma parábola e sua caçapa é localizada no foco dessa curva côncava, como mostra a Figura 5.1 a seguir. Para realizar o jogo precisamos de uma bola e um taco. Cada jogada é realizada numa única tacada na bola.

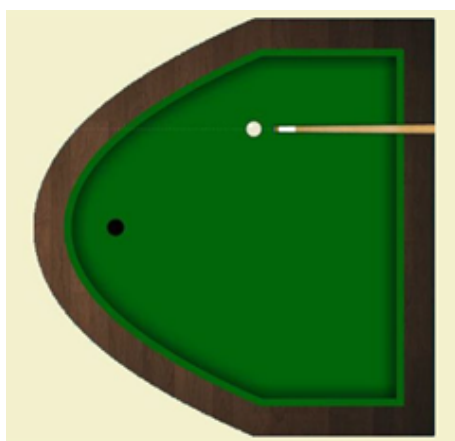
Figura 5.1: Mesa de bilhar parabólica



Fonte: [2]

Considere uma mesa de bilhar parabólica, suponhamos que seja obrigatório fazer a bola bater em alguma parte na borda, de que forma podemos atingir a caçapa? Pela Propriedade Refletora da Parábola, atingiremos a caçapa se a tacada for paralela ao eixo de simetria dessa parábola, veja uma mesa ilustrativa na Figura 5.2 e uma mesa construída para o ensino na Figura 5.3.

Figura 5.2: Mesa parabólica ilustrativa



Fonte: [2]

Figura 5.3: Construção da mesa parabólica para o ensino

Fonte: [30]

Apresentamos neste trabalho duas mesas similares, porém, com duas tabelas (bordas parabólicas), conforme descrevem as seções a seguir.

5.1.1 Processo de construção da mesa parabólica 1

Inicialmente a ideia foi construir uma mesa de tamanho acessível de forma a aproveitar o máximo de uma chapa MDF de 275cm x 185cm com espessura 6mm (a espessura será justificada adiante). Ao adquirirmos a peça, solicitamos a divisão da chapa em quatro peças retangulares de 110cm x 90cm, sendo três peças para a borda da mesa, que contém as parábolas, e uma peça para a base (campo de jogo), onde nela furamos apenas a caçapa. Veja um esboço na Figura 5.4, onde a parte cinza representa a borda da mesa e a parte branca representa a base.

Optamos fazer os cortes em um serviço de marcenaria por meio de uma máquina a laser, chamada CNC (Controle Numérico Computadorizado), uma vez que a mesma faz cortes bem precisos e dentro da escala solicitada, ou seja, elas utilizam tecnologia CNC para receber informações digitais, como o ângulo, a distância e a temperatura necessários para cortar o material. Para não correremos o risco de queimar nosso material, a orientação foi adquirirmos as peças MDF com espessuras de até 6mm para realização dos cortes.

Contudo, antes foi construído um esboço do projeto por meio do *software* GeoGebra *on-line*, para disponibilizar ao marceneiro, possibilitando assim os cortes nas medidas corretas, ou seja, com o esboço do desenho da mesa foi possível solicitar ao *software* de *desing* gráfico para a máquina um corte semelhante dentro das medidas que queríamos.

A Figura 5.4 a seguir mostra o esboço que foi disponibilizado para o corte das peças. Em três peças foi cortado as partes que iriam compor a borda da mesa (em cada peça utilizamos a parte que está pintada na figura e descartamos a parte branca). Na outra peça foi cortada e descartada apenas a área da circunferência da caçapa de diâmetro 6cm e centro no foco F_2 . As equações utilizadas para as bordas parabólicas foram:

$$y^2 + 8x = 40, \tag{5.1}$$

$$-y^2 + 8x = -40. \tag{5.2}$$

Desenvolvendo a equação 5.1 para obtermos sua forma canônica:

$$y^2 = -8x + 40 \Rightarrow y^2 = -8(x - 5).$$

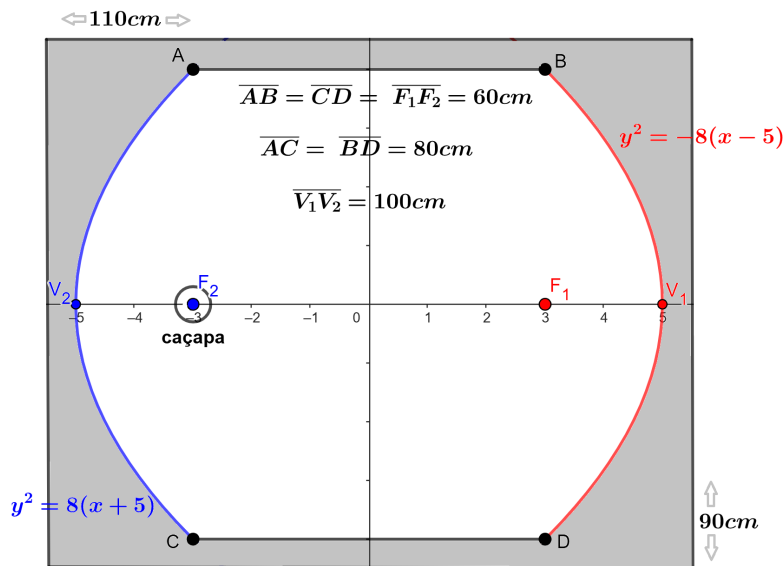
Verificamos que a forma canônica da equação é do tipo $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$, logo, a reta focal está no eixo coordenado x , o parâmetro é $2p = 4$, o foco $F_1 = (x_0 - p, y_0) = (3, 0)$ está à “esquerda” da diretriz ($x = x_0 + p = 7$) e o vértice é um ponto qualquer fora da origem do sistema ($V_1 = (x_0, y_0) = (5, 0)$).

Desenvolvendo agora a equação 5.2 para obtermos sua forma canônica:

$$-y^2 = -8x - 40 \Rightarrow y^2 = 8(x + 5).$$

Verificamos que a forma canônica da equação é do tipo $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$, logo, a reta focal está no eixo coordenado x , o parâmetro é $2p = 4$, o foco $F_2 = (x_0 + p, y_0) = (-3, 0)$ está à “direita” da diretriz ($x = x_0 - p = -7$) e o vértice é um ponto qualquer fora da origem do sistema ($V_2 = (x_0, y_0) = (-5, 0)$).

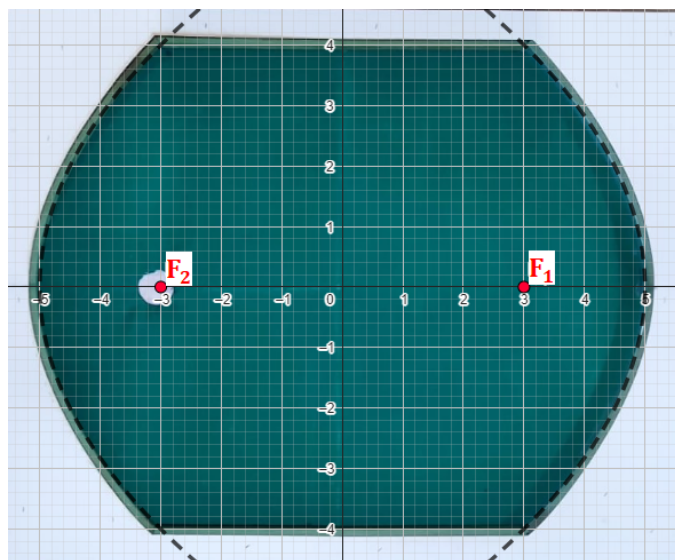
Figura 5.4: Esboço para os cortes das peças da mesa parabólica 1



Fonte: Elaboração própria

A equação 5.1 está representada pela parábola de foco F_1 e a equação 5.2 está representada pela parábola de foco F_2 . Veja a Figura 5.5 a seguir.

Figura 5.5: Mesa parabólica 1 montada



Fonte: Elaboração própria

Posteriormente, em uma loja de bilhares cobrimos a base da mesa (campo de jogo) com um tecido verde usado, próprio para mesas de sinucas. Essa base corresponde à peça em que foi cortada apenas a circunferência da caçapa. Em seguida, juntamos todas as quatro peças (a peça forrada ficou abaixo das outras três), tudo por meio de um grampeador para o tipo de material. Veja o momento desse procedimento na Figura 5.6. Em seguida, colocamos uma borracha nas tabelas da mesa parabólica. O forro e a borracha possibilitaram uma aderência melhor para o lançamento e o impacto da bola. Para ficar mais interessante, revestimos uma das bordas internas com uma fita espelhada para observarmos a reflexão de um feixe de luz (apresentaremos esse fenômeno na subseção 5.1.3).

Figura 5.6: Ajustamento e junção das peças



Fonte: Elaboração própria

Verificamos que para garantir que o lançamento incida perpendicularmente à

reta diretriz (ou podemos dizer, paralelamente ao eixo de simetria) da parábola de foco F_2 e atinja a caçapa, é necessário: regularidade na superfície plana da mesa e laterais, ajuste de uma bola com peso ideal e controle da sua velocidade (precisão na tacada), e claro, precisão do corte em formato parabólico. Finalizamos a mesa colocando essa junção de peças em um pé de mesa usado de altura 76cm, em que realizamos nivelamentos que foram necessários para o funcionamento correto.

5.1.2 Processo de construção da mesa parabólica 2

Com a experiência da construção da mesa de bilhar parabólica 1, construímos outra com a sobra da chapa MDF, dessa vez, optamos por uma mesa de tamanho menor, mais leve e de uso acessível para o manuseio em sala de aula. Solicitamos agora os cortes de quatro peças retangulares de 60cm x 40cm, sendo três peças para a borda da mesa e uma peça para a base (campo de jogo), onde nela furamos apenas a caçapa.

O procedimento para os cortes foi realizado da mesma forma, disponibilizando também um esboço do projeto através do *software* GeoGebra *on-line*. A Figura 5.7 a seguir mostra um esboço feito para o corte dessas peças. Como a distância da diretriz ao foco de cada parábola desta mesa é menor que da outra mesa, foi possível colocar a diretriz das parábolas nos segmentos extremos da mesa. Porém, as equações utilizadas para o traço das parábolas foram:

$$y^2 + 2x = 5, \quad (5.3)$$

$$y^2 - 2x = 5. \quad (5.4)$$

O intuito de alterar as equações das parábolas foi pensando na possibilidade do estudante observar o mesmo fenômeno em um traço diferente, instigando assim, a curiosidade em um processo dedutivo. Dessa forma, ao observar a outra mesa, o estudante é capaz de seguir um caminho lógico e sequencial, onde cada passo pode ser justificado e baseado em algo que já foi realizado ou aceito como verdadeiro.

Desenvolvendo a equação 5.3 para obtermos sua forma canônica:

$$y^2 = -2x + 5 \Rightarrow y^2 = -2(x - 2.5).$$

Verificamos que a forma canônica da equação é do tipo $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$, logo, a reta focal está no eixo coordenado x , o parâmetro é $2p = 1$, o foco $F_1 = (x_0 - p, y_0) = (2, 0)$ está à “esquerda” da diretriz ($x = x_0 + p = 3$) e o vértice é um ponto qualquer fora da origem do sistema ($V_1 = (x_0, y_0) = (2.5, 0)$).

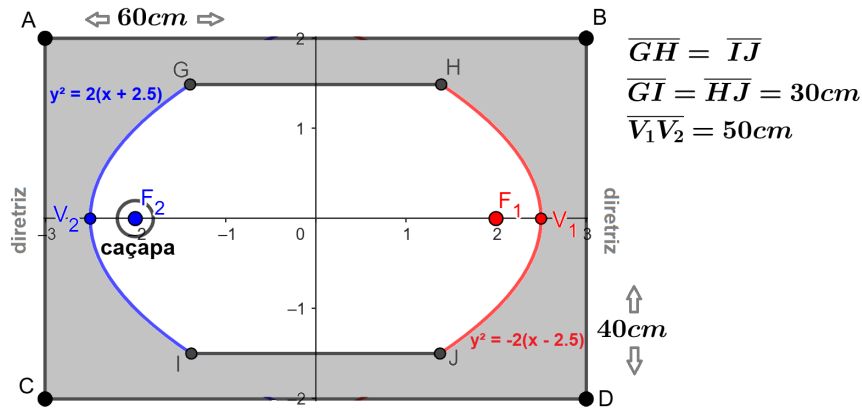
Desenvolvendo agora a equação 5.4 para obtermos sua forma canônica:

$$y^2 = 2x + 5 \Rightarrow y^2 = 2(x + 2.5).$$

Verificamos que a forma canônica da equação é do tipo $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$, logo, a reta focal está no eixo coordenado x , o parâmetro é $2p = 1$, o foco $F_2 =$

$(x_0 + p, y_0) = (-2, 0)$ está à “direita” da diretriz ($x = x_0 - p = -3$) e o vértice é um ponto qualquer fora da origem do sistema ($V_2 = (x_0, y_0) = (-2.5, 0)$).

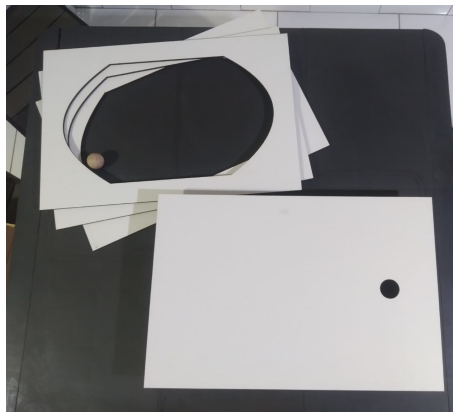
Figura 5.7: Esboço para os cortes das bordas/tabelas mesa 2



Fonte: Elaboração própria

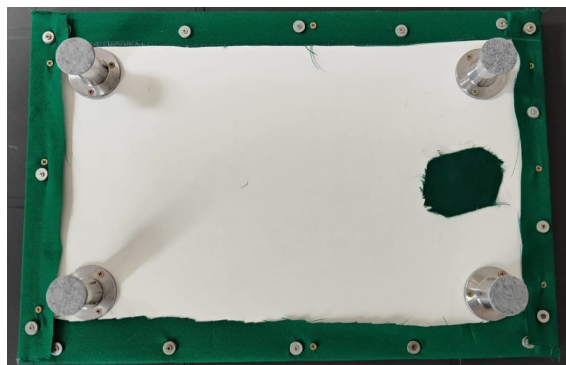
Veja as peças cortadas na Figura 5.8 a seguir.

Figura 5.8: Cortes da mesa 2



Fonte: Elaboração própria

Diferente da primeira experiência, fizemos a junção das peças da seguinte forma: em primeiro momento colamos as três peças que compõem a borda da mesa (as peças que possuem os cortes parabólicos) por meio de uma cola de secagem rápida para MDF, em segundo momento, depois de prendermos o forro na quarta peça com pequenos parafusos e arruelas em disponibilidade no momento, pressionamos todas as peças com a fixação dos pezinhos. Veja na Figura 5.9 como ficou a parte de baixo da mesinha.

Figura 5.9: Junção das peças e fixação dos pezinhos

Fonte: Elaboração própria

Nesse experimento de construção da segunda mesa, optamos por não colocar a borracha nas bordas internas parabólicas, pelo fato dessa mesa possuir um formato menor e também pelo fato de cada foco estar mais próximo do vértice de sua parábola, o que poderia contribuir para um erro no experimento. Contudo, apenas fixamos a haste flexível metálica por meio de uma fita dupla face em ambas as bordas.

Na Figura 5.10 a seguir temos a mesinha pronta para o manuseio.

Figura 5.10: Mesa parabólica 2 montada

Fonte: Elaboração própria

5.1.3 Descrição das atividades

Apresentaremos algumas atividades que podem ser desenvolvidas com o uso das mesas de bilhar construídas. De forma interativa, o aluno observará na prática o fenômeno de reflexão da parábola. Contudo, é importante frisarmos aqui que a Propriedade Refletora seria constatada sem indução ao erro caso a bola fosse uma partícula sem dimensões, ou seja, caso fosse um ponto, assim como o foco da parábola, o que não é o caso.

Atividade 1: jogo com a bola

- Objetivo: verificar a Propriedade Refletora da Parábola por meio do jogo de bilhar.
- Público alvo: alunos do ensino médio.

- Pré-requisitos: conhecer a definição, os elementos e a Propriedade Refletora da Parábola; conhecer os elementos primitivos da geometria plana.

- **Descrição da atividade:** consiste em tacar a bola conforme as Figuras 5.1 e 5.2 mostradas anteriormente. Inicialmente, o professor explicará aos alunos a seguinte regra do jogo: o jogador deve estar próximo ao vértice V_1 da parábola de foco F_1 e com o taco de sinuca atingir a bola na caçapa (onde está o foco F_2 da outra parábola), mas, é obrigatório fazer essa bola bater em alguma parte da borda. Neste momento é possível transformar o aprendizado em uma competição divertida com a seguinte pergunta: de que forma podemos atingir a caçapa? O professor pode também propor desafios onde os alunos devem calcular ou prever o trajeto de uma bola depois de uma reflexão na borda, com as seguintes perguntas: se eu lançar a bola de bilhar a partir deste ponto e ela atingir essa borda, qual direção ela tomará depois? A bola vai em direção ao foco? Essas perguntas iniciais podem cativar e aguçar os estudantes fazendo com que eles realmente visualizem e compreendam que o comportamento das bolas no jogo pode ser diretamente relacionado à forma como as ondas eletromagnéticas se refletem em uma parábola. Por fim, o aluno constatará que, para acertar a bola na caçapa, ele deve tacar a bola de forma precisa em uma trajetória paralela ao eixo de simetria das parábolas, objetivando atingir um ponto da curva da parábola de foco F_2 , para que ela seja “repelida” em direção à caçapa.

Observação: como nas bordas parabólicas internas da mesa 2 não afixamos uma borracha, é necessário adquirirmos uma bolinha de borracha “pula pula” para o aluno realizar as atividades. Assim, não corremos o risco da mesma deslizar na parábola e não cair na caçapa. Veja a Figura 5.11 a seguir.

Figura 5.11: Bola de borracha - mesa 2



Fonte: Elaboração própria

Atividade 2: jogo com o auxílio de canaletas

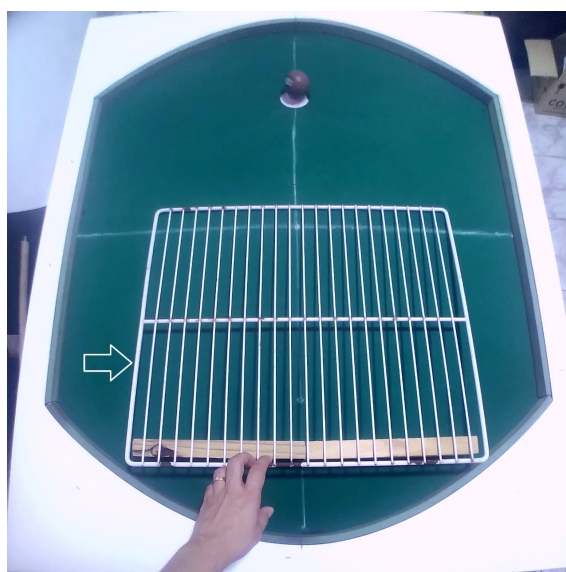
- Objetivo: verificar a Propriedade Refletora da Parábola por meio de outro recurso para direcionar o movimento correto da bola e atingir a caçapa.

- Público alvo: alunos do ensino médio.

- Pré-requisitos: conhecer a definição, os elementos e a Propriedade Refletora da Parábola; conhecer os elementos primitivos da geometria plana.

• **Descrição da atividade:** consiste na mesma regra do jogo da atividade anterior, porém, o professor mostrará um outro recurso no lugar do taco de sinuca para facilitar a trajetória da bola até a caçapa. Assim, para garantir que o lançamento da bola incida na parábola perpendicularmente à reta diretriz, o aluno agora pode lançar a bola com o auxílio de canaletas, ou, com o auxílio de uma grade, como mostrado na Figura 5.12 a seguir. Por meio dessa atividade e a anteriormente descrita, o professor pode associar e verificar juntamente com o aluno o fenômeno que ocorre por exemplo nas antenas parabólicas, em que a trajetória paralela da bola incidirá a borda parabólica e refletirá em seu foco (caçapa).

Figura 5.12: Trajetória da bola paralela ao eixo de simetria - mesa 1



Fonte: Elaboração própria

Atividade 3: reflexão da luz

• **Objetivo:** verificar a Propriedade Refletora da Parábola por meio da reflexão da luz.

• **Público alvo:** alunos do ensino médio.

• **Pré-requisitos:** conhecer a definição, os elementos e a Propriedade Refletora da Parábola; conhecer os elementos primitivos da geometria plana.

• **Descrição da atividade:** consiste a utilização de um laser que emitirá luz a partir do foco de uma das parábolas (parábola de foco F_1) em direção à borda parabólica da mesma. Nesta atividade, o professor pode contextualizar com exemplos do mundo real, associando o fenômeno apresentado com o que ocorre nos faróis de automóveis, em que os raios saem do foco, incidem a superfície parabólica e refletem paralelamente ao eixo de simetria. Podemos observar esse fenômeno na mesa 1 (veja a Figura 5.13) e na mesa 2 (veja a Figura 5.14).

Figura 5.13: Raios de luz passando no foco em direção a um ponto da borda parabólica - mesa 1



Fonte: Elaboração própria

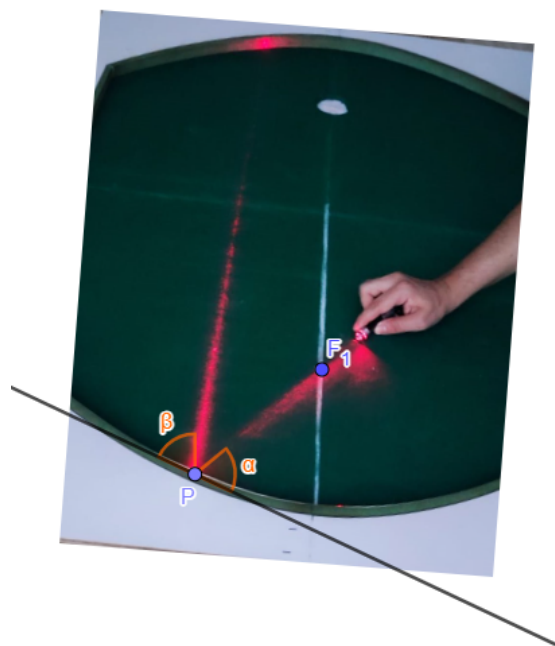
Figura 5.14: Raios de luz passando no foco em direção a um ponto da borda parabólica - mesa 2



Fonte: Elaboração própria

Observação: na Figura 5.14 observamos que na mesa de bilhar menor (mesa 2), os raios se direcionam à caçapa, uma vez que a haste metálica está presente nas duas parábolas.

De acordo com a Propriedade Refletora da Parábola, direcionando a luz emitida pelo laser no foco F_1 para um ponto P da parábola de foco F_1 espelhada, o segmento formado por esse ponto P e o seu foco F_1 e a reta paralela ao eixo de simetria passando por P , formarão com a reta tangente nesse ponto P o mesmo ângulo (ângulo de incidência e reflexão), como mostrado na Figura 5.15.

Figura 5.15: $\alpha = \beta$ 

Fonte: Elaboração própria

Atividade 4: definição, elementos e equação da parábola

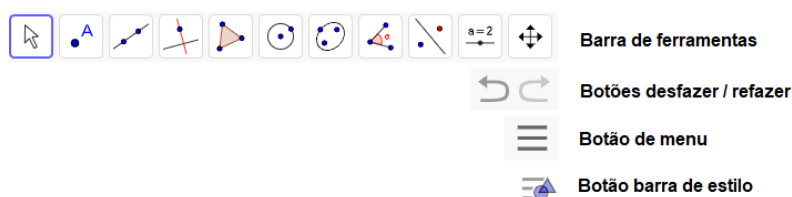
- Objetivos: verificar a definição da parábola e encontrar a equação da mesma.
- Público alvo: alunos do ensino médio.
- Pré-requisitos: conhecer a definição e os elementos da parábola; conhecer as formas canônicas da parábola; conhecer os elementos primitivos da geometria plana.
- **Descrição da atividade:** através de medições, por meio de uma régua ou de um barbante, o aluno pode verificar em cada mesa parabólica se a distância do foco até um ponto da parábola é a mesma distância desse ponto à sua diretriz, atestando assim a perfeição de cada curva parabólica. Também, traçando os eixos coordenados e fazendo as devidas medições com a régua ou com a fita métrica em cada mesa parabólica, os alunos podem obter as coordenadas de cada foco e a medida de cada parâmetro, obtendo a partir daí, as equações das parábolas.

5.2 Proposta de Atividades no GeoGebra

Além dos conceitos iniciais, elementos e propriedades da parábola apresentados em sala de aula, propomos nesta seção atividades com o auxílio da plataforma GeoGebra *on-line*, um *software* de matemática dinâmica. O GeoGebra “tornou-se o fornecedor líder de software de matemática dinâmica, apoiando a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo”[16].

Essas atividades vêm complementar a atividade com material concreto, em consonância com a BNCC que reforça que “os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais”[5]. Ao apresentar a plataforma *on-line* é importante a apresentação do ambiente. Sua interface é composta pela barra de ferramentas, botão da barra de estilo, botão de menu, botões desfazer/refazer. Veja a Figura 5.16 a seguir.

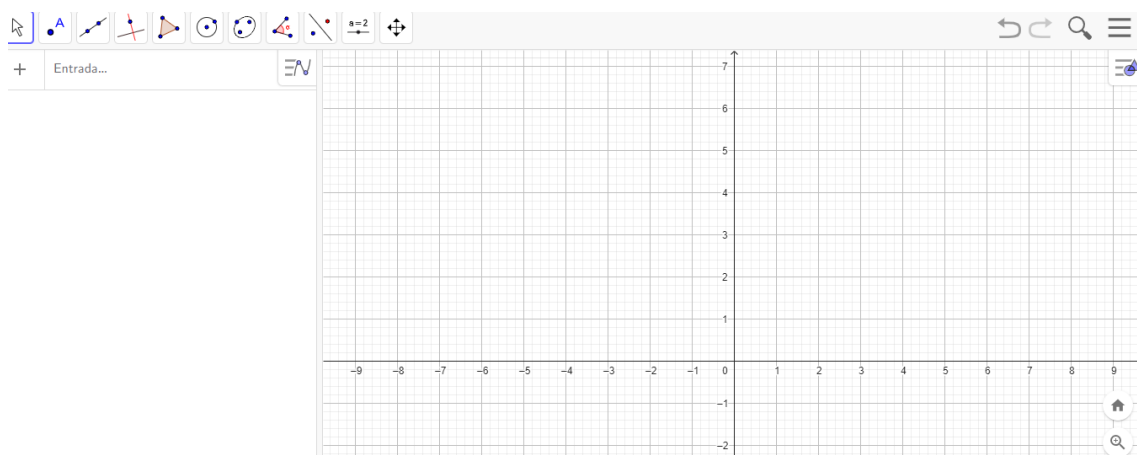
Figura 5.16: Comandos da interface



Fonte: GeoGebra

O GeoGebra possibilita uma visualização algébrica e geométrica em sua interface, observe a Figura 5.17. Em seu campo de entrada, é possível inserir comandos, fórmulas, funções, coordenadas, equações e demais entradas algébricas com o uso do teclado. Acompanhamos as coordenadas e equações em sua janela de visualização algébrica, enquanto acompanhamos os gráficos e construções geométricas em sua janela de visualização gráfica.

Figura 5.17: Interface do GeoGebra



Fonte: GeoGebra

5.2.1 Atividade 1: parábola e sua Propriedade Refletora

Nesta atividade construiremos uma parábola sinalizando seus elementos, sua reta tangente em um ponto P , seus ângulos de incidência e reflexão.

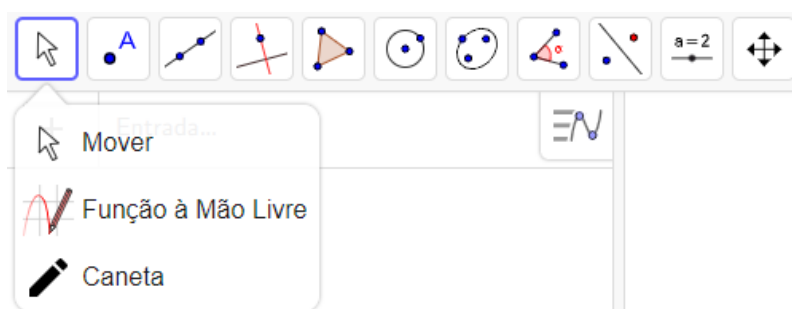
- Objetivo: construir uma parábola com seus elementos para uma melhor compreensão da propriedade refletora.

- Público alvo: alunos do ensino médio.
- Pré-requisitos: conhecer a definição, os elementos e a Propriedade Refletora da Parábola; conhecer os elementos primitivos da geometria plana.

- **Descrição da atividade:**

PASSO 1. Primeiramente, para uma visualização gráfica limpa, podemos retirar a malha e os eixos. Na barra de ferramentas, com o ícone mover selecionado (Figura 5.18), clicamos no botão barra de estilo e em seguida nos ícones indicados pelas setas da Figura 5.19 a seguir.

Figura 5.18: Ícone mover



Fonte: GeoGebra

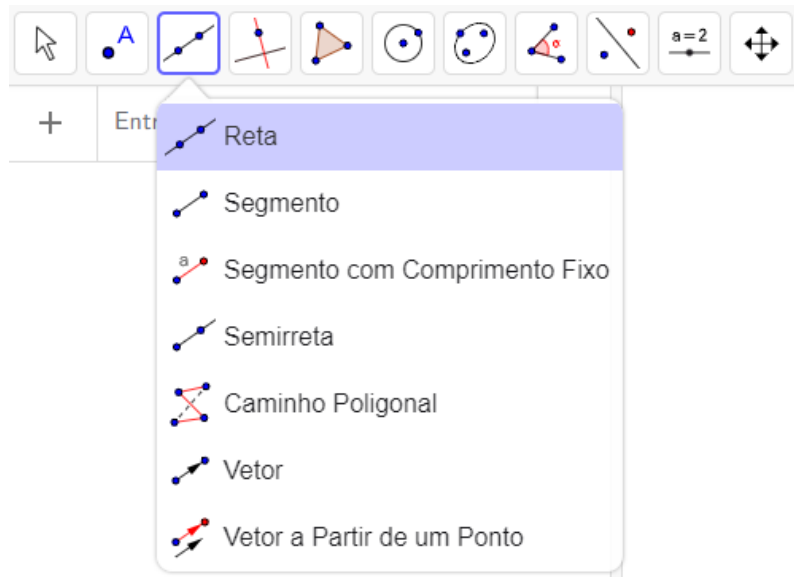
Figura 5.19: Retirando a malha e os eixos



Fonte: GeoGebra

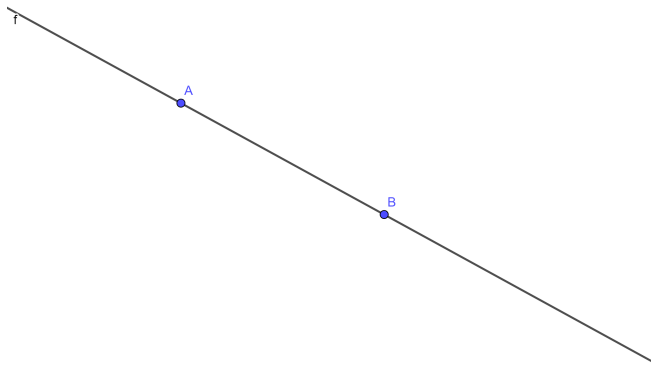
PASSO 2. Construindo a reta diretriz: direcionando o *mouse* no terceiro ícone da barra de ferramentas, clicamos em reta e selecionamos dois pontos para a construção da reta. Veja a Figura 5.20 para identificar como executar o comando e na Figura 5.21 a reta construída .

Figura 5.20: Construindo a reta diretriz



Fonte: GeoGebra

Figura 5.21: Reta diretriz

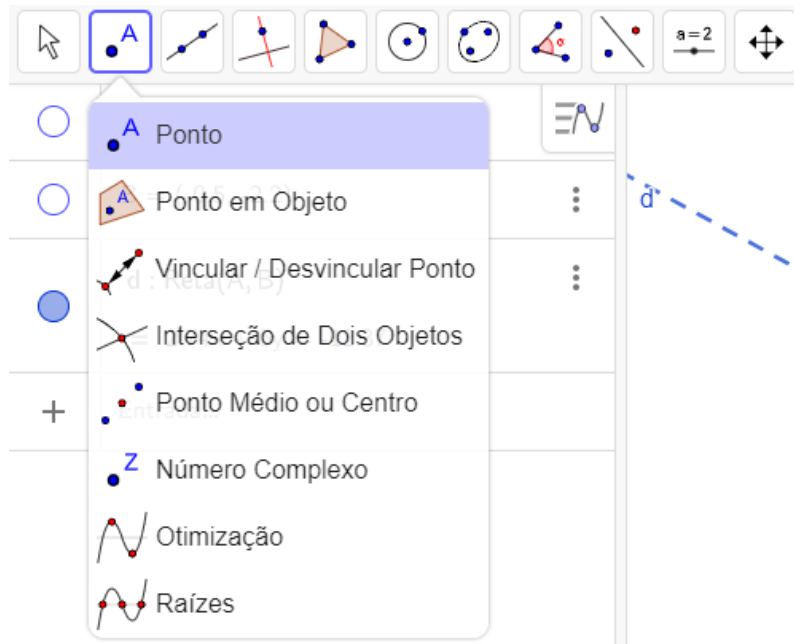


Fonte: GeoGebra

PASSO 3. Com o botão direito do *mouse*, clicamos sobre a reta e selecionamos a opção configurações para alterar o nome, a cor e o estilo da reta. Em seguida, com o botão direito sobre cada ponto, clicamos em exibir rótulo para retirar a visualização dos pontos.

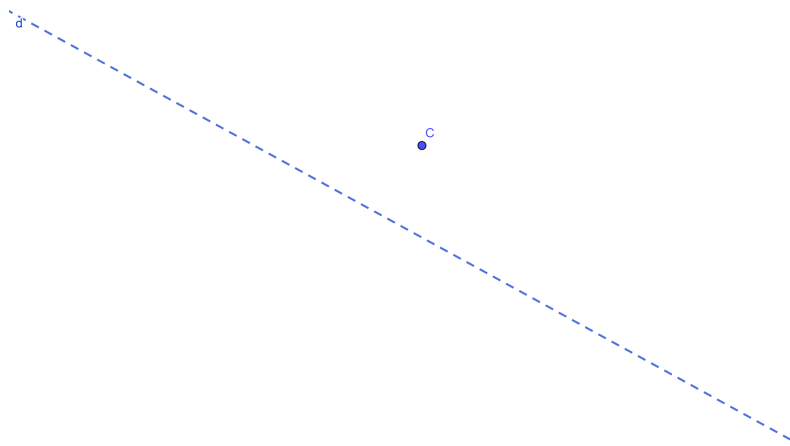
PASSO 4. Criando o ponto focal: no segundo ícone da barra de ferramentas, clicamos na opção ponto e em seguida selecionamos uma posição fora da reta diretriz para a construção gráfica. Veja a Figura 5.22 para identificar como executar o comando e na Figura 5.23 o ponto focal construído.

Figura 5.22: Criando o ponto focal



Fonte: GeoGebra

Figura 5.23: Ponto focal

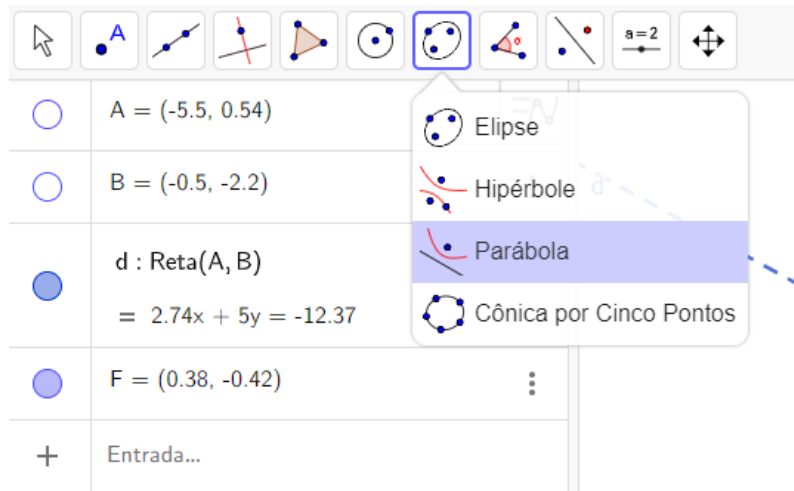


Fonte: GeoGebra

PASSO 5. Com o botão direito do *mouse*, clicamos sobre o ponto focal e selecionamos a opção configurações para alterar o nome para F .

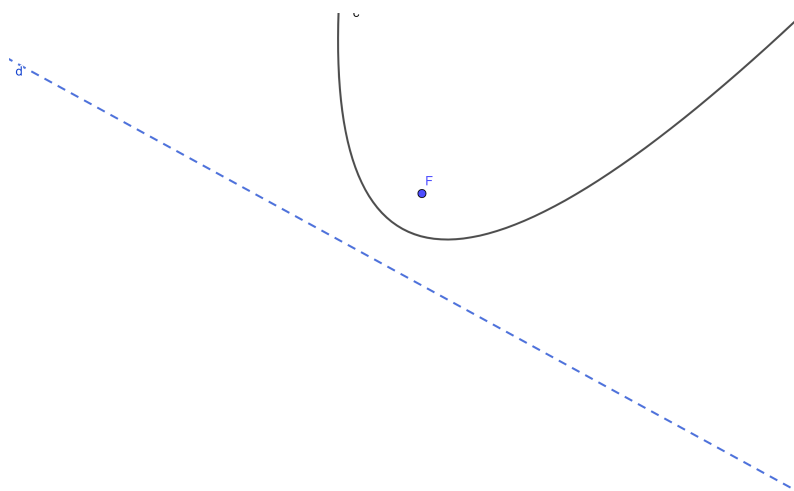
PASSO 6. Traçando a parábola: no sétimo ícone da barra de ferramentas a opção parábola. Em seguida, selecionamos o foco F e depois a diretriz. Veja a Figura 5.24 para identificar como executar o comando e na Figura 5.25 a parábola traçada construída.

Figura 5.24: Traçando a parábola



Fonte: GeoGebra

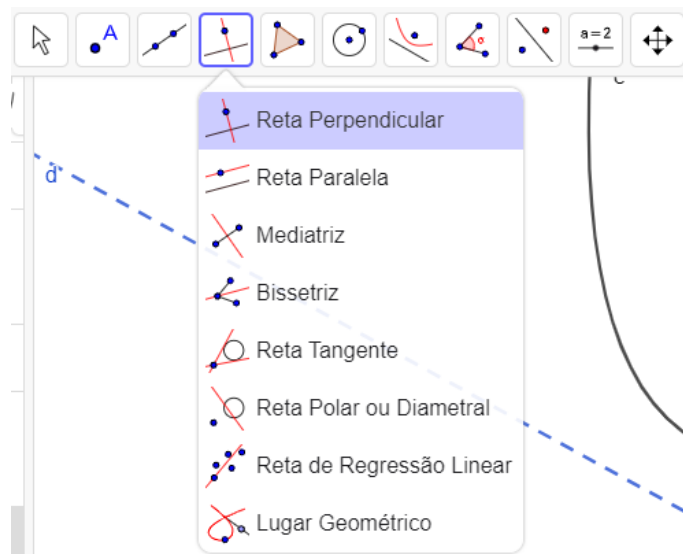
Figura 5.25: Parábola



Fonte: GeoGebra

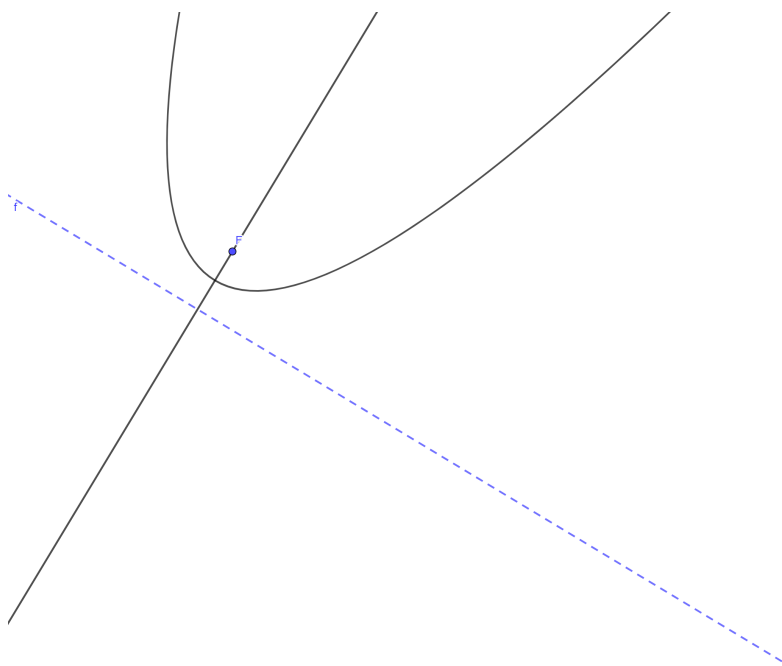
PASSO 7. Traçando o eixo de simetria: no quarto ícone da barra de ferramentas, selecionamos a opção reta perpendicular. Em seguida, selecionamos o ponto F e depois a reta diretriz. Veja a Figura 5.26 para identificar como executar o comando e na Figura 5.27 o eixo de simetria construído.

Figura 5.26: Traçando o eixo de simetria



Fonte: GeoGebra

Figura 5.27: Eixo de simetria

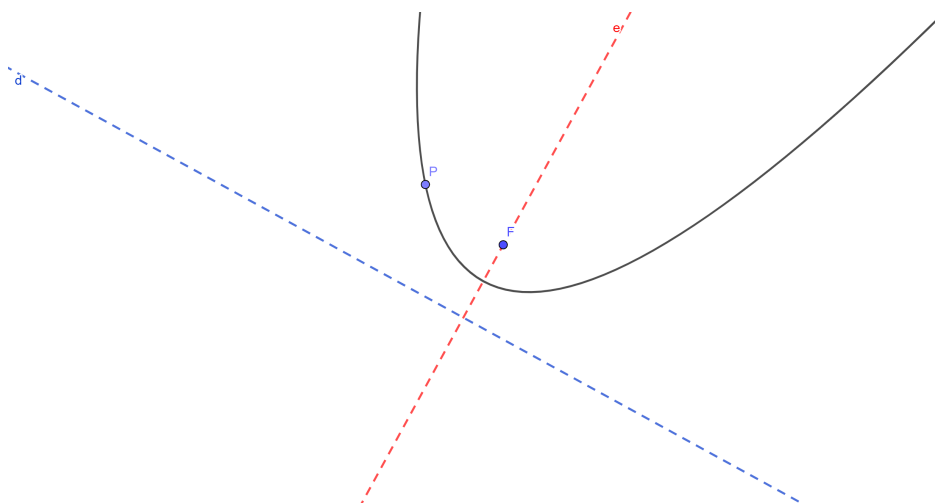


Fonte: GeoGebra

PASSO 8. Com o botão direito do *mouse*, clicamos sobre o eixo de simetria e selecionamos a opção configurações para alterar o nome, a cor e o estilo da reta.

PASSO 9. Criando um ponto *P* na parábola: no segundo ícone da barra de ferramentas, selecionamos a opção ponto, em seguida escolhemos uma posição para o mesmo sobre a parábola e clicamos. Alteramos agora seu nome para *P*, ao clicar com o botão direito sobre o ponto criado e selecionando a opção renomear. Veja o ponto *P* criado na Figura 5.28.

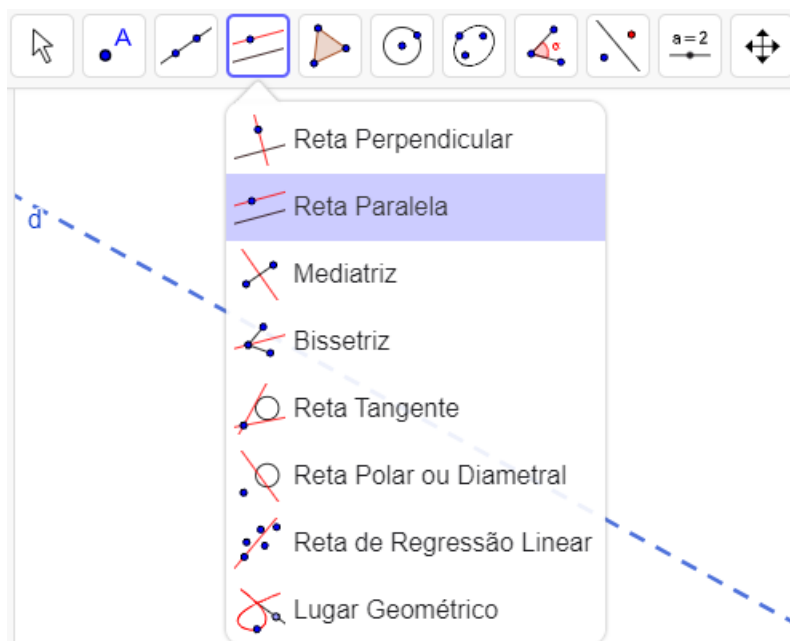
Figura 5.28: Ponto P



Fonte: GeoGebra

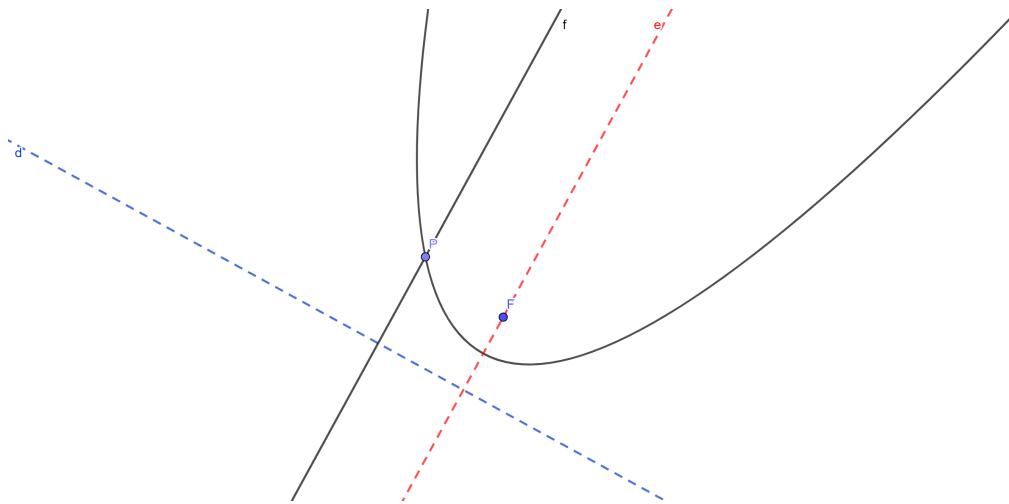
PASSO 10. Traçando uma reta paralela ao eixo de simetria passando pelo ponto P : no quarto ícone da barra de ferramentas, selecionamos a opção reta paralela, em seguida selecionamos o ponto P e depois o eixo de simetria. Veja a Figura 5.29 para identificar como executar o comando e na Figura 5.30 a reta paralela construída.

Figura 5.29: Traçando a reta paralela ao eixo de simetria



Fonte: GeoGebra

Figura 5.30: Reta paralela ao eixo de simetria

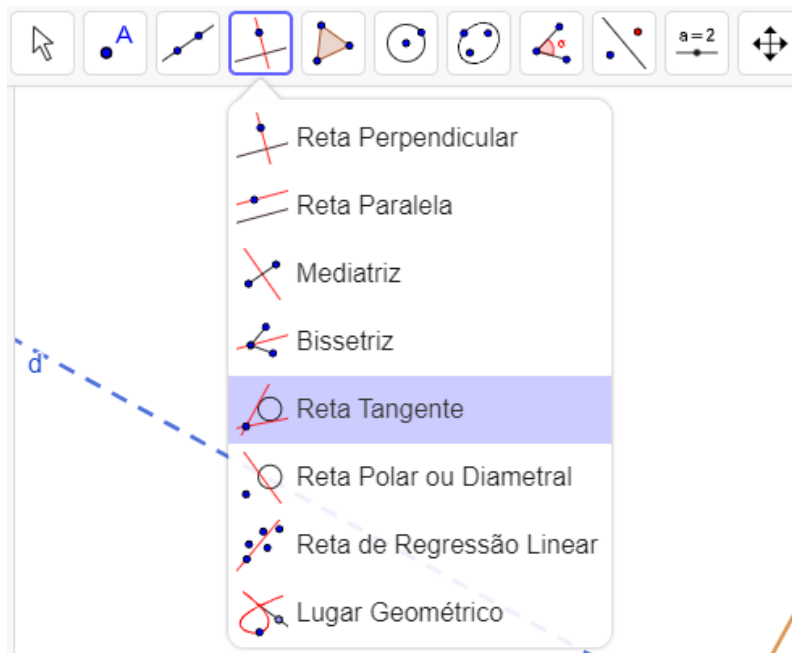


Fonte: GeoGebra

PASSO 11. Clicamos com o botão direito do *mouse* sobre a reta paralela criada no item anterior e selecionamos a opção configurações para alterar a cor e o nome da reta.

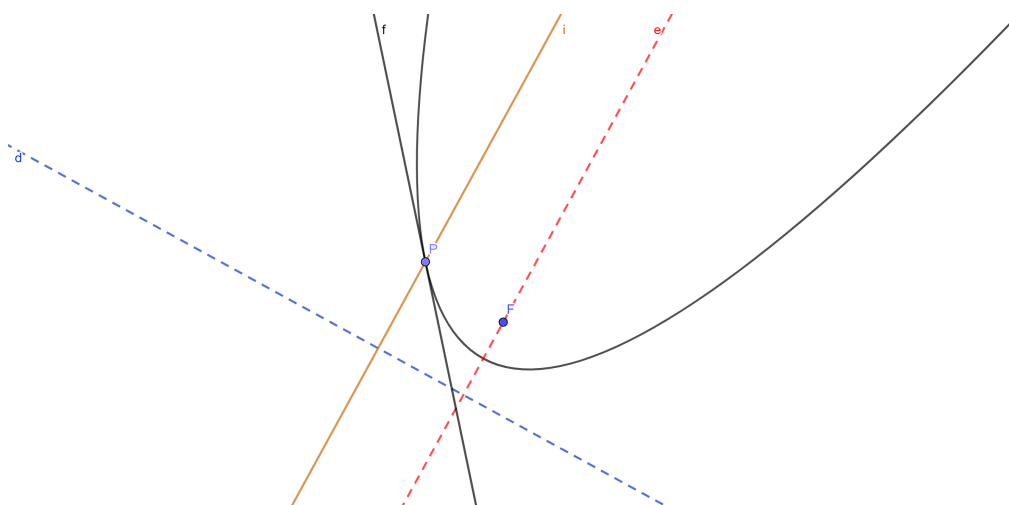
PASSO 12. Traçando a reta tangente à parábola no ponto P : no quarto ícone da barra de ferramentas, selecionamos a opção reta tangente. Em seguida, selecionamos o ponto P e a curva da parábola. Veja a Figura 5.31 para identificar como executar o comando e na Figura 5.32 a reta tangente construída.

Figura 5.31: Traçando a reta tangente à parábola no ponto P



Fonte: GeoGebra

Figura 5.32: Reta tangente à parábola no ponto P



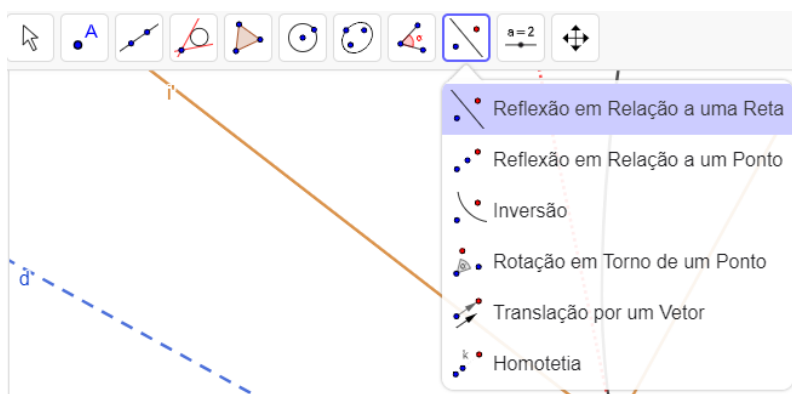
Fonte: GeoGebra

PASSO 13. Clicamos com o botão direito do *mouse* sobre a reta tangente criada no item anterior e selecionamos a opção configurações para alterar a cor, o nome e o estilo da reta.

PASSO 14. Criando uma reta simétrica à reta i (reta paralela ao eixo de simetria pelo ponto P) com eixo de simetria na reta t (reta tangente pelo ponto P): no nono ícone da barra de ferramentas, selecionamos a opção reflexão em relação a uma reta. Em seguida, selecionamos a reta i e depois a reta t . Veja a Figura 5.33 para identificar como executar o comando e na Figura 5.34 a reta simétrica construída.

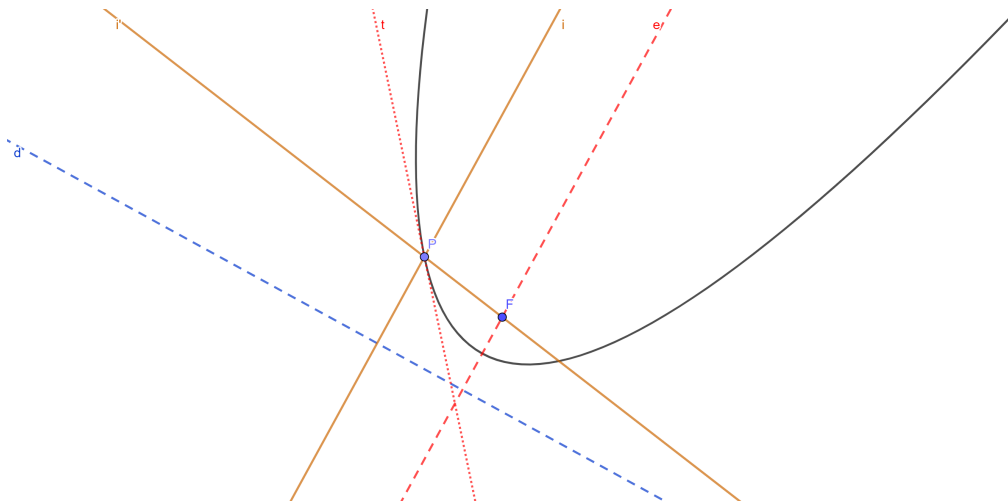
Observação: criamos uma reta simétrica a i em relação a t porque ela forma com a reta t o mesmo ângulo que a reta t forma com i . Ou seja, isso garante que o ângulo de incidência seja igual ao ângulo de reflexão.

Figura 5.33: Criando a reta de reflexão



Fonte: GeoGebra

Figura 5.34: Reta de reflexão

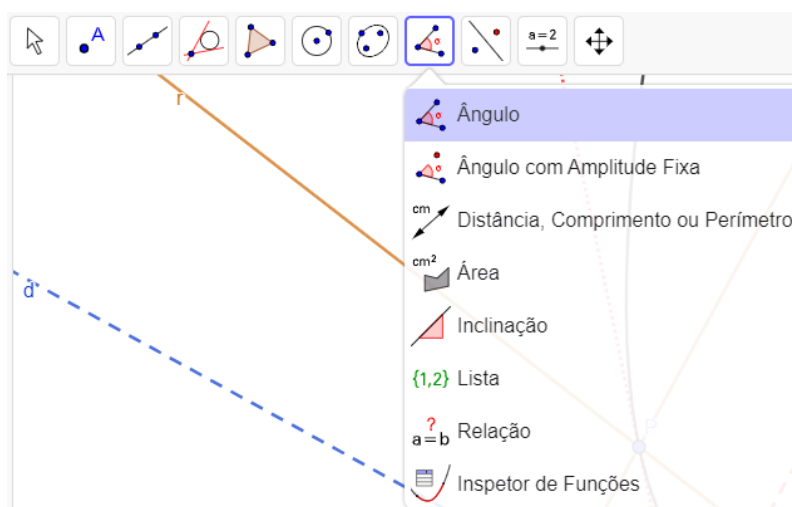


Fonte: GeoGebra

PASSO 15. Clicamos com o botão direito do *mouse* sobre a reta de reflexão criada no item anterior e selecionamos a opção renomear para alterar o nome da reta para *r*.

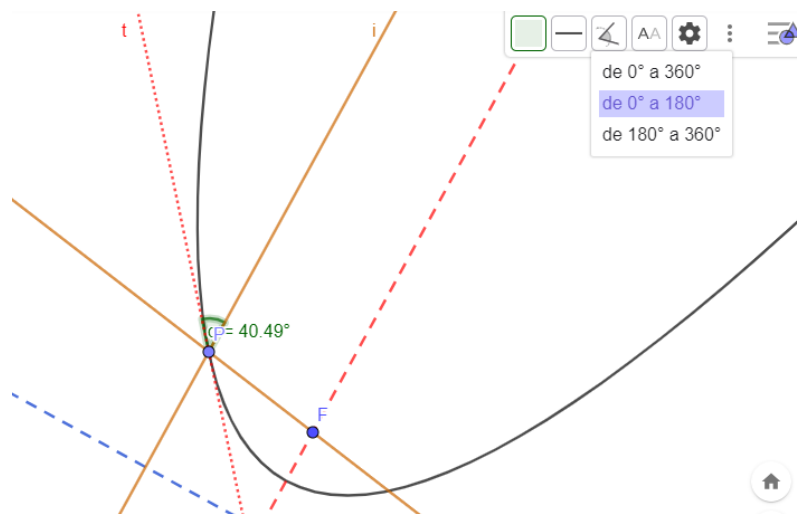
PASSO 16. Mostrando o ângulo de incidência: no oitavo ícone da barra de ferramentas, selecionamos a opção ângulo e em seguida selecionamos as retas *i* e *t*. Clicamos no botão barra de estilo e selecionamos o segundo ícone para visualizar o ângulo entre as retas de 0° a 180°. Veja a Figura 5.35 para identificar como executar o comando e na Figura 5.36 o ângulo de incidência destacado.

Figura 5.35: Mostrando o ângulo de incidência



Fonte: GeoGebra

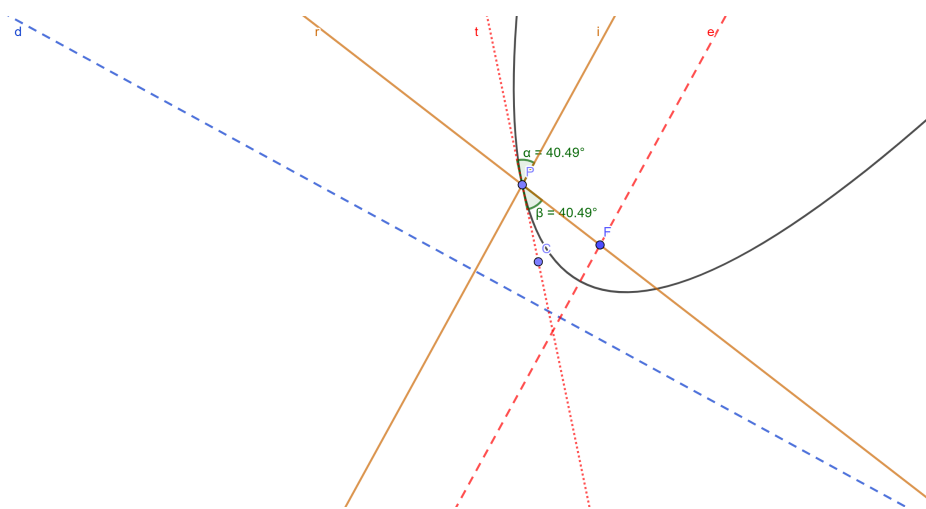
Figura 5.36: Ângulo de incidência



Fonte: GeoGebra

PASSO 17. Mostrando o ângulo de reflexão: criamos um ponto C na reta t , depois, no oitavo ícone da barra de ferramentas, selecionamos a opção ângulo e em seguida clicamos nos pontos C , P e F . Veja na Figura 5.37 o ângulo de reflexão destacado.

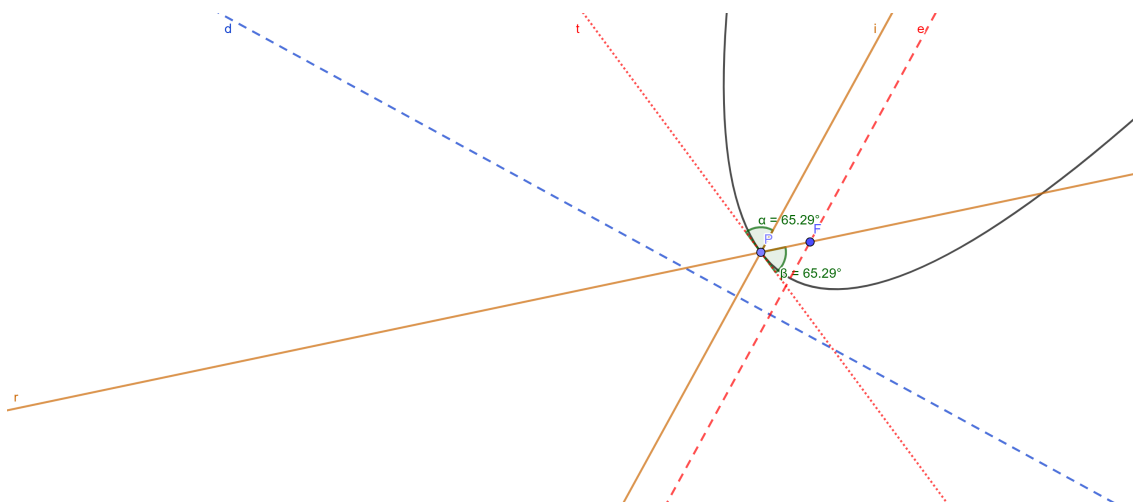
Figura 5.37: Ângulo de reflexão



Fonte: GeoGebra

PASSO 18. Por fim, clicamos com o botão direito do *mouse* no ponto C e selecionamos a opção exibir objeto para apagar a visualização deste ponto. Agora, com a primeira opção da barra de ferramentas selecionada, podemos movimentar o ponto P e observar o comportamento da reta incidente sobre a curva, evidenciando a Propriedade Refletora da Parábola, onde o ângulo de incidência é sempre igual ao ângulo de reflexão. Veja a Figura 5.38.

Figura 5.38: Ângulo incidente e ângulo de reflexão



Fonte: GeoGebra

5.2.2 Atividade 2: construção do parabolóide de revolução a partir da parábola

Esta atividade propõe obtermos um parabolóide a partir de uma parábola. Ou seja, através da rotação da parábola em torno de seu eixo de simetria chegaremos a uma superfície quádrica, conhecida como parabolóide de revolução.

- **Objetivo:** construir um parabolóide de revolução a partir da rotação de uma parábola em torno de seu eixo de simetria.
- **Público alvo:** alunos do ensino médio.
- **Pré-requisitos:** conhecer a definição, os elementos e a equação na forma canônica de uma parábola; conhecer os elementos primitivos da geometria plana e espacial.
- **Descrição da atividade:**

PASSO 1. Consideremos a parábola de equação $x^2 + 4x = 4y$. Colocando a equação em sua forma canônica $(x + 2)^2 = 4(y + 1)$, identificamos os seus elementos:

*Parâmetro: $p = 1$

*Foco: $F = (-2, 0)$

*Vértice: $V = (-2, -1)$

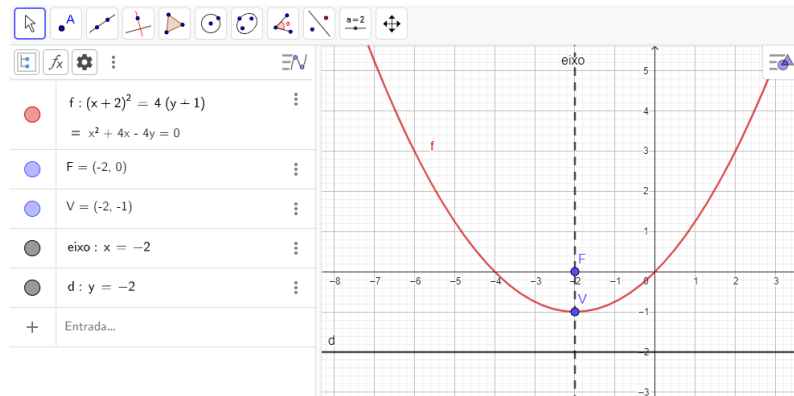
*Diretriz: $y = -2$

*Eixo de simetria: $x = -2$

No campo de entrada do GeoGebra inserimos sua equação e seus elementos (foco, vértice, eixo de simetria, diretriz). Veja a Figura 5.39.

Observação: vale lembrar que podemos alterar cor e/ou estilo dos pontos e curvas clicando com o botão direito do *mouse* sobre o objeto e selecionando a opção configurações.

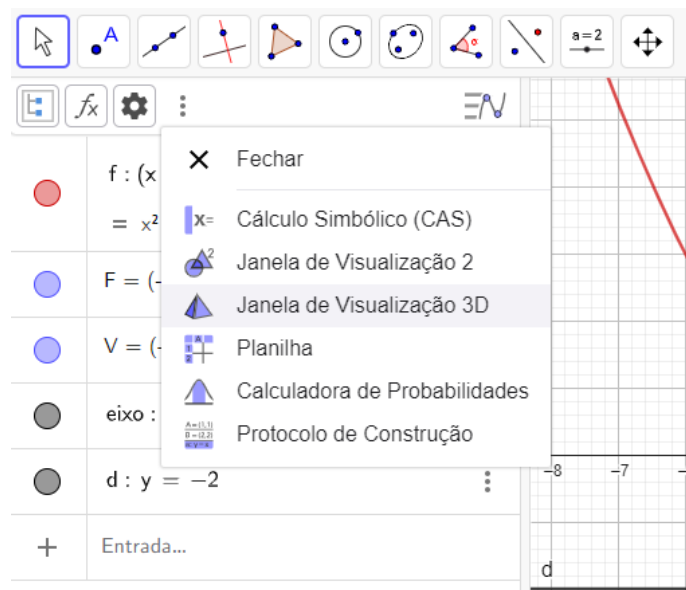
Figura 5.39: Plotagem da equação $(x + 2)^2 = 4(y + 1)$



Fonte: GeoGebra

PASSO 2. Abrimos a janela de visualização 3D clicando nos três pontos alinhados verticalmente indicados na Figura 5.40 a seguir.

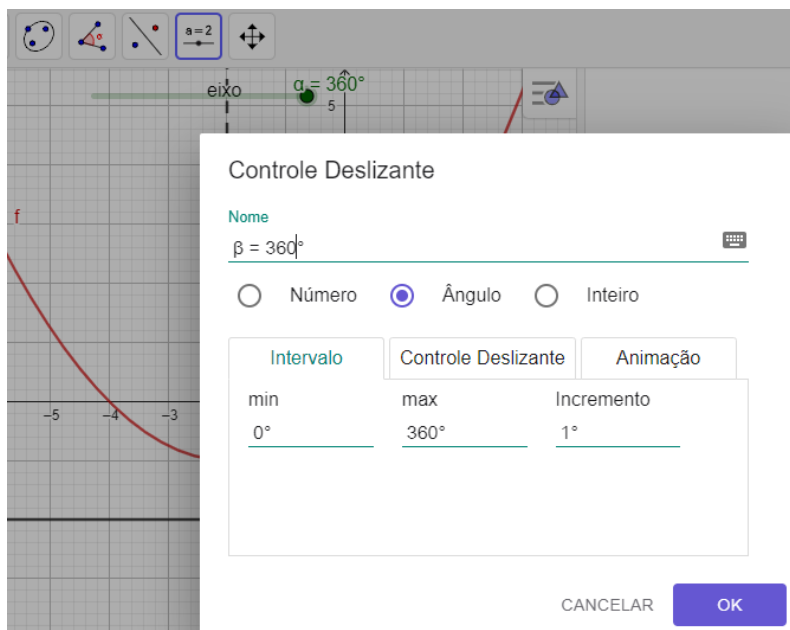
Figura 5.40: Janela de visualização 3D



Fonte: GeoGebra

PASSO 3. Criamos agora dois controles deslizantes α e β para visualizarmos em movimento a formação do parabolóide. Para isso, clicamos no décimo ícone da barra de ferramentas como indicado para na Figura 5.41 o procedimento para o ângulo β . O mesmo procedimento é feito para o ângulo α .

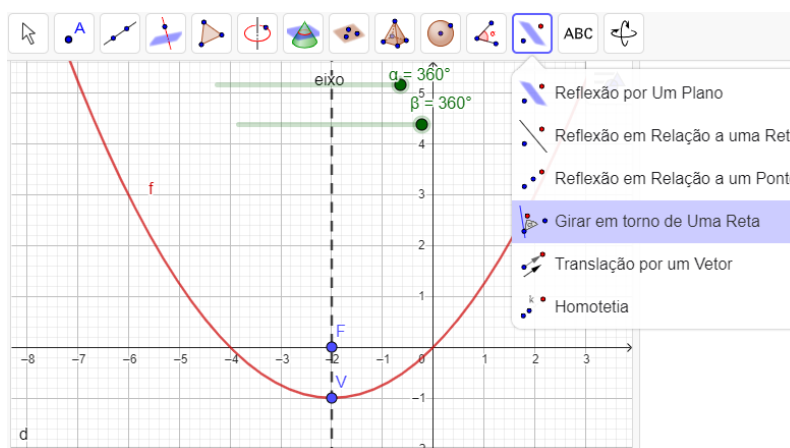
Figura 5.41: Controle deslizante (ângulo β)



Fonte: GeoGebra

PASSO 4. Clicamos agora na janela de visualização 3D, em seguida, na barra de ferramentas, clicamos no décimo segundo ícone, selecionando a opção girar em torno de uma reta. Observe a Figura 5.42 para identificar como executar o comando.

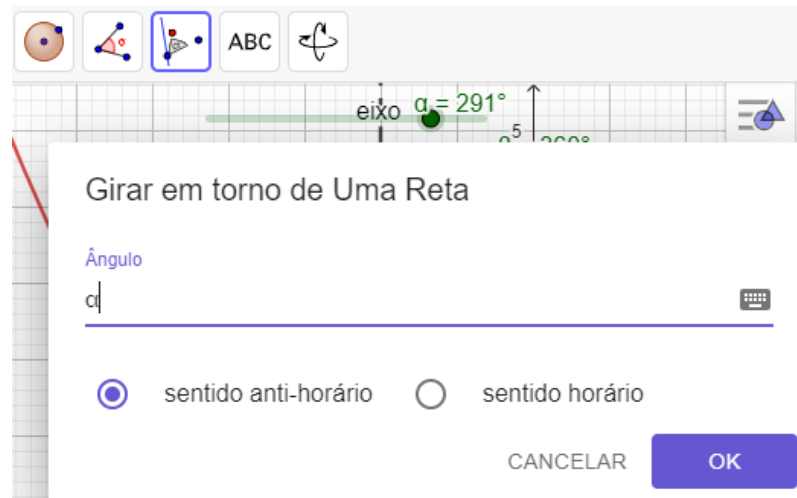
Figura 5.42: Girar em torno de uma reta



Fonte: GeoGebra

PASSO 5. Agora clicamos no objeto a ser girado, ou seja, na parábola e em seu eixo simetria. Feito isso, abrirá a janela apresentada na Figura 5.43 a seguir, agora alteramos o ângulo para α como indicado na Figura 5.43.

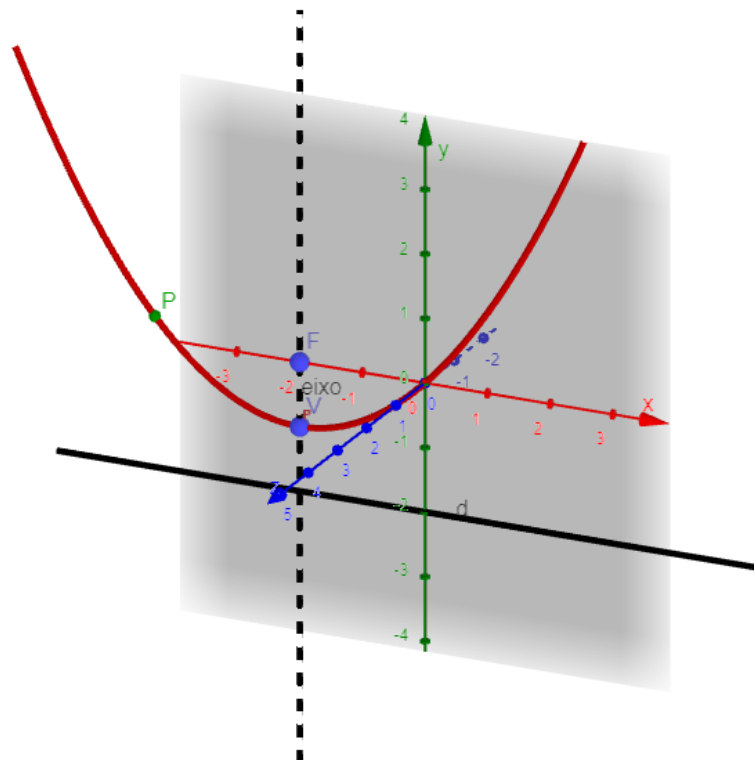
Figura 5.43: Girar em torno de uma reta



Fonte: GeoGebra

PASSO 6. Criamos um ponto P na parábola (Veja a Figura 5.44).

Figura 5.44: Visualização 3D

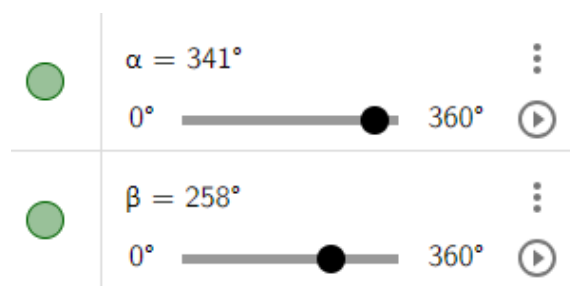


Fonte: GeoGebra

PASSO 7. Para mostramos a formação da circunferência, obtida pela movimentação de um ponto da parábola em torno do eixo, realizamos o mesmo procedimento do passo 4, em seguida clicamos no ponto P e depois no eixo de simetria. Feito isto, abrirá a janela apresentada na Figura 5.43 do passo 5. Dessa vez, alteramos o ângulo para β .

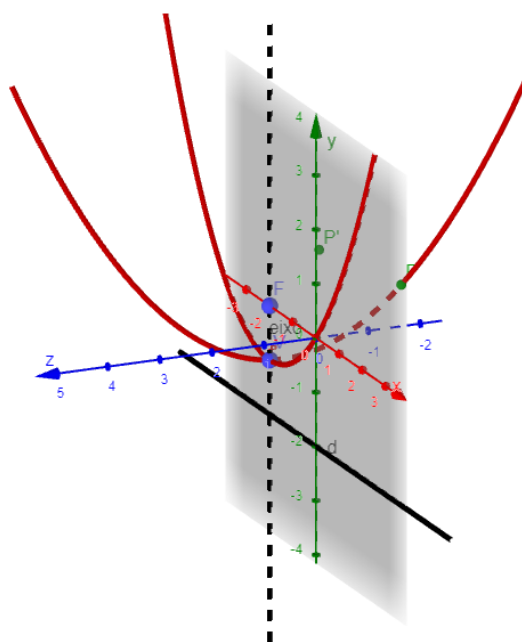
PASSO 8. Na janela de entrada, damos *play* nos controles deslizantes para visualizarmos a movimentação do ponto P e da parábola. Veja as Figuras 5.45 e 5.46.

Figura 5.45: Movimentando o controle deslizante



Fonte: GeoGebra

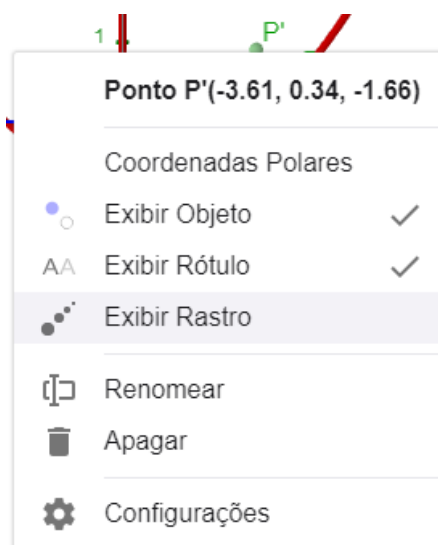
Figura 5.46: Movimentando a parábola



Fonte: GeoGebra

PASSO 9. Com o botão direito do *mouse*, clicamos sobre o ponto P' e selecionamos a opção exibir rastro. Fazemos o mesmo procedimento clicando na parábola. Observe a Figura 5.47 para identificar como executar o comando.

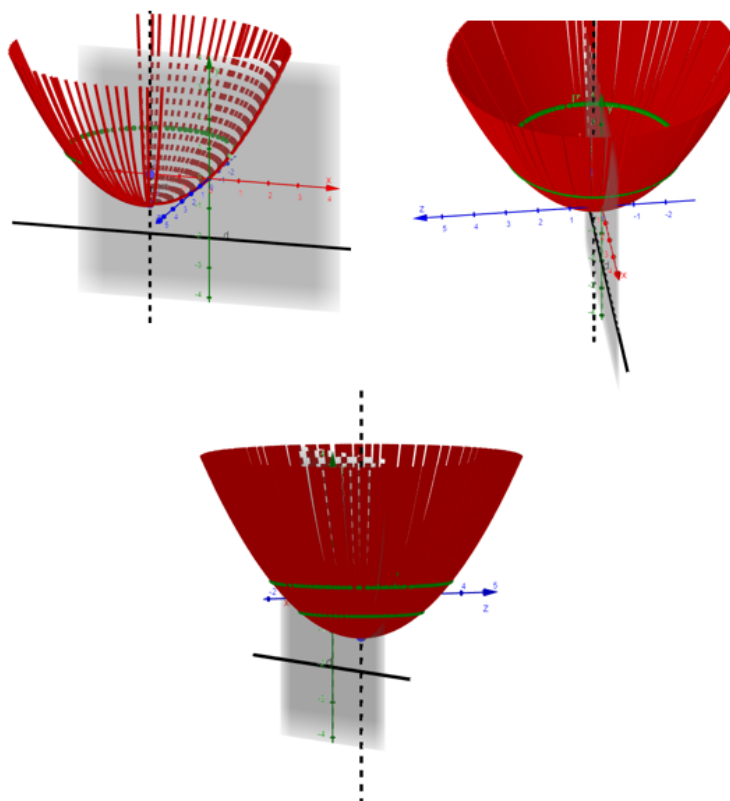
Figura 5.47: Exibir rastro



Fonte: GeoGebra

PASSO 10. Com a movimentação do controle deslizante de α e β , agora podemos visualizar a superfície gerada e as circunferências obtidas pelo movimento do ponto P sobre a parábola. Veja a superfície sendo gerada na Figura 5.48.

Figura 5.48: Superfície gerada



Fonte: GeoGebra

5.2.3 Atividade 3: parabolóide de revolução e planos tangentes

Esta atividade propõe uma análise da Propriedade Refletora da Parábola nos parabolóides de revolução, sendo possível observar essa propriedade em diferentes pontos da superfície parabólica como caracterizado e pontuado no capítulo 3.

- Objetivo: analisar o comportamento geométrico do plano tangente em um ponto P de um parabolóide de revolução.

- Público alvo: alunos do ensino médio.

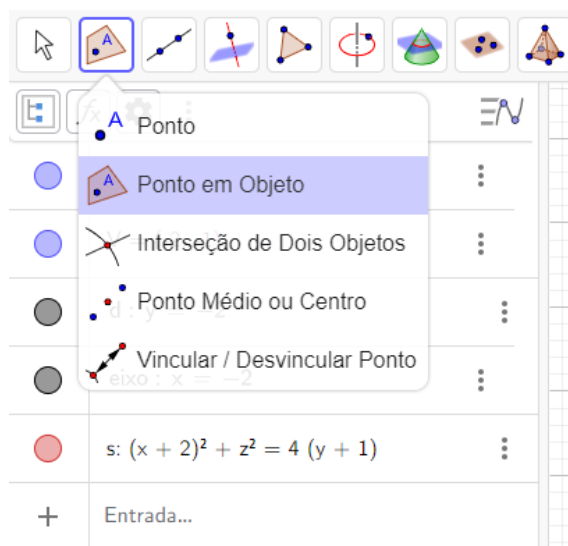
- Pré-requisitos: conhecer a definição, os elementos e a Propriedade Refletora da Parábola; conhecer os elementos primitivos da geometria plana e espacial.

- **Descrição da atividade:**

PASSO 1. Inserimos no campo de entrada a equação da superfície gerada na atividade 2. Digite $(x + 2)^2 + z^2 = 4(y + 1)$ e dê *enter*. Dê entrada também aos elementos $F = (-2, 0)$, $V = (-2, -1)$, $y = -2$ e $x = -2$.

PASSO 2. Criamos um ponto P na superfície. No segundo ícone da barra de ferramentas selecionamos ponto em objeto (veja a Figura 5.49) e clicamos sobre a superfície na janela de visualização 3D. Clicando com o botão direito sobre o ponto, renomeamos para P .

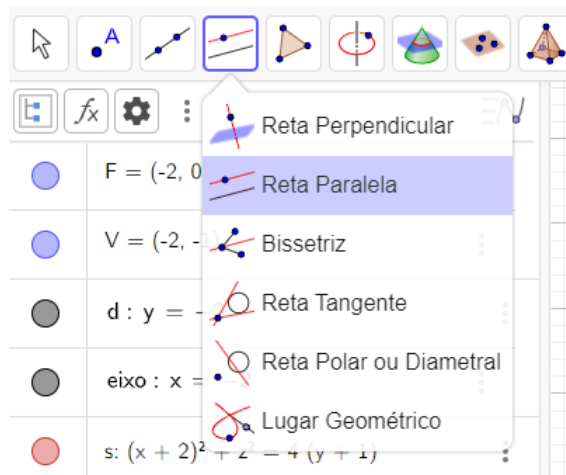
Figura 5.49: Criando um ponto sobre a superfície



Fonte: GeoGebra

PASSO 3. Criamos uma reta paralela ao eixo de simetria $x = -2$ da superfície passando pelo ponto P . Para isso, no quarto ícone da barra de ferramentas, selecionamos reta paralela. Essa reta representa o raio incidente. Veja a Figura 5.50 para identificar como executar o comando.

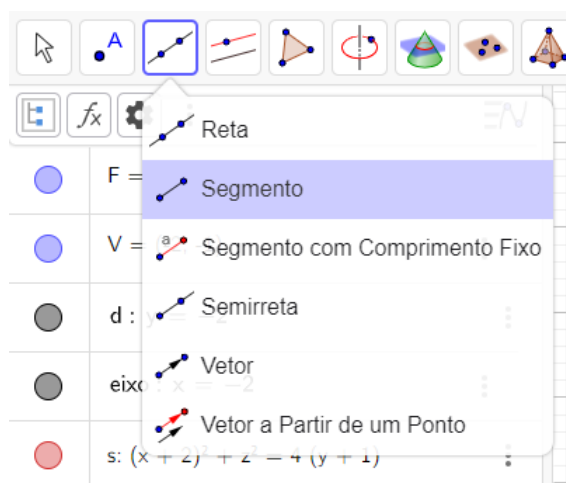
Figura 5.50: Criando uma reta paralela ao eixo



Fonte: GeoGebra

PASSO 4. Criamos o segmento PF . No terceiro ícone da barra de ferramentas, selecionamos segmento (Veja a Figura 5.51 para identificar como executar o comando). Em seguida, clicamos nos pontos P e F . Esse segmento representa o raio refletido.

Figura 5.51: Criando o segmento PF

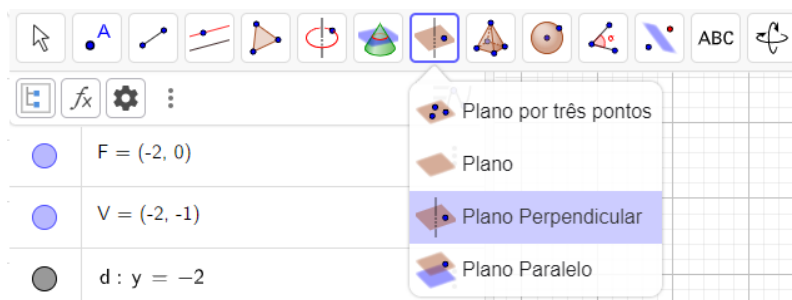


Fonte: GeoGebra

PASSO 5. Criamos um ponto O , interseção entre o eixo de simetria e a reta diretriz.

PASSO 6. Criamos o plano diretriz. No oitavo ícone da barra de ferramentas, selecionamos plano perpendicular (Veja na Figura 5.52 para identificar como executar o comando). Em seguida, selecionamos o ponto O e o eixo de simetria.

Figura 5.52: Criando o plano diretriz



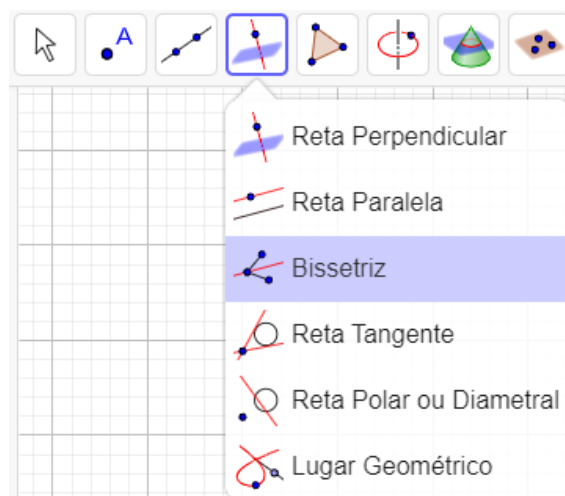
Fonte: GeoGebra

PASSO 7. Criamos o ponto P' , interseção da reta paralela ao eixo passando por P e o plano diretriz.

PASSO 8. Criamos o segmento $P'F$.

PASSO 9. Criamos a reta normal por P . No quarto ícone da barra de ferramentas selecionamos bissetriz (Veja a Figura 5.53 para identificar como executar o comando). Em seguida, clicamos no segmento PF e na reta paralela ao eixo por P .

Figura 5.53: Criando a reta normal



Fonte: GeoGebra

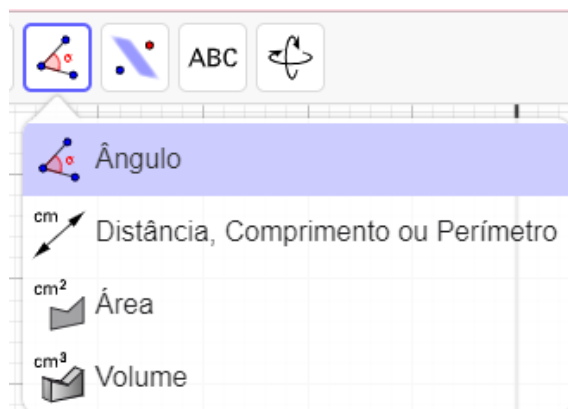
PASSO 10. Criamos um plano tangente por P . Através da opção plano perpendicular, selecionamos o ponto P e a reta normal para criar o plano.

PASSO 11. Criamos um outro ponto do plano tangente. Renomeamos para Q .

PASSO 12. Criamos os segmentos PP' , QP' e QF .

PASSO 13. Criamos agora a visualização dos ângulos de incidência e reflexão, seguindo o comando mostrado na Figura 5.54.

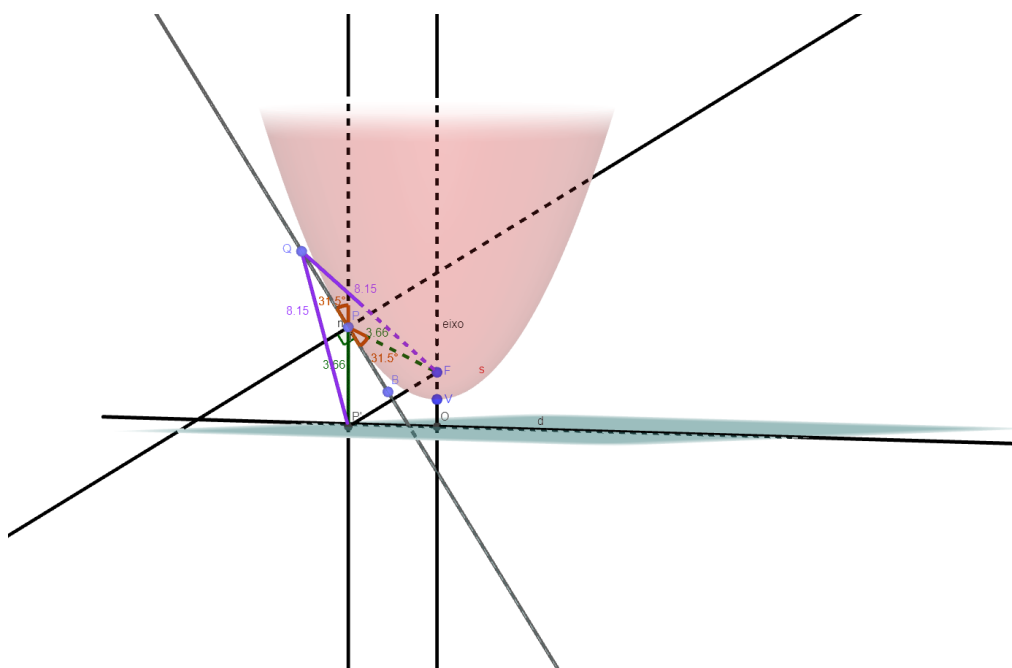
Figura 5.54: Criando ângulos



Fonte: GeoGebra

PASSO 14. Clicando com o botão direito do *mouse* sobre cada objeto, através das configurações alteramos cor e colocamos valor. O resultado é a Figura 5.55 a seguir. Podemos agora, observar a Propriedade Refletora movimentando o ponto *P* na superfície.

Figura 5.55: Plano tangente e elementos no parabolóide



Fonte: GeoGebra

Conclusões

Como fruto deste trabalho os professores e demais profissionais da educação básica têm à disposição um produto educacional que, além de possuir um caráter lúdico, ilustra algumas aplicações das funções polinomiais do segundo grau e da parábola em diversas situações do cotidiano. Evidenciando assim, uma articulação com a BNCC [5], cujo documento pauta a importância em organizar a preservação da proposta entre os vários campos da Matemática, com o intuito de construir uma visão integrada de Matemática e aplicada à realidade. Dessa forma, esperamos contribuir para que estudantes, professores e demais agentes educacionais percebam a beleza e aplicabilidade da matemática, aumentando assim seu interesse por essa área do conhecimento.

A construção da mesa de bilhar parabólica traz uma incrível experiência, pois ao elaborar e aplicar as atividades, é constatada a importância de ajustes corretos para o bom funcionamento da Propriedade Refletora da Parábola. Além disso, amplia-se o entendimento sobre metodologias de ensino e a importância de conectarmos a teoria à prática. Destacamos com este trabalho o enriquecimento da formação de professor e o preparo para um melhor enfrentamento dos desafios da educação matemática.

Com as duas mesas de bilhar à disposição, o professor pode mostrar ao aluno que, independentemente do tamanho da mesa, a curva côncava parabólica tem uma propriedade reflexiva em direção a um mesmo ponto. A expectativa ao construir cada mesa foi grande, entretanto, a construção da mesa 2 contribuiu para uma experiência melhor por possuir um tamanho menor, ser mais leve e de fácil manuseio.

A visualização do fenômeno em materiais concretos torna o aprendizado mais interessante e instigador. Além do mais, o professor pode apresentar as aplicações da Propriedade Refletora da Parábola concomitante ao desenvolvimento das atividades aqui propostas. É possível trabalhar também de forma interdisciplinar com as demais áreas do conhecimento, em especial com a física no estudo das ondas eletromagnéticas. Acreditamos que o aprendizado das funções quadráticas e sua representação geométrica de forma lúdica pode enriquecer as competências e as habilidades necessárias para a formação do estudante no ensino médio.

Contudo, reforçamos a relevância em apresentar as aplicabilidades da parábola em superfícies parabólicas, ou seja, em paraboloides de revolução, evidenciadas em

diversas situações do cotidiano, como em antenas parabólicas e refletores de luz para facilitar a compreensão do conceito, estimular a curiosidade e envolver mais os estudantes nas aulas de matemática.

Acreditamos que a proposta de atividades com material concreto e o uso do GeoGebra não apenas facilitam a compreensão do conceito, mas também estimulam a curiosidade e o envolvimento dos alunos. Essas ferramentas educativas são essenciais para tornar o aprendizado mais dinâmico e visual, permitindo que os estudantes experimentem na prática a matemática que estudam.

Em síntese, a Propriedade Refletora da Parábola se revela não apenas como um conceito matemático, mas como uma ferramenta poderosa em diversas áreas da ciência e tecnologia. Esperamos que as atividades propostas possam servir como base para futuros trabalhos e aprofundamentos neste fascinante tema.

Bibliografia

- [1] Array, A. L. M. *Sobre o ALMA, à primeira vista*. 2024. URL: <https://www.almaobservatory.org/en/about-alma/> (acesso em 21 de dez. de 2024).
- [2] Atractor. *Exposição Matemática Viva: Pavilhão do Conhecimento de 24/11/2000 a 30/08/2010*. URL: <https://www.atractor.pt/index.html> (acesso em 14 de abr. de 2024).
- [3] Ávila, G. *A Hipérbole e os Telescópios*. 34^a ed. RPM-Revista do Professor de Matemática, 2011.
- [4] Braga, N. C. *O Foco das Antenas Parabólicas (TEL021)*. URL: <https://www.newtonbraga.com.br/telecomunicacoes/2132-tel021.html> (acesso em 1 de mar. de 2024).
- [5] Brasil. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC): educação é a base*. 2018. URL: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br> (acesso em 10 de mar. de 2024).
- [6] Brasil. *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) - Ministério da Educação (MEC): Provas e gabaritos*. URL: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos> (acesso em 10 de mar. de 2024).
- [7] Brasil. *Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação: China finaliza o maior radiotelescópio do mundo*. 15 de jun. de 2020. URL: <https://www.gov.br/aeb/pt-br/assuntos/noticias/china-finaliza-o-maior-radiotelescopio-do-mundo> (acesso em 21 de dez. de 2024).
- [8] Brasil, B. *Hubble: Telescópio Espacial*. URL: https://www.bbc.com/portuguese/hubble_2000/hubble/default.htm (acesso em 30 de jul. de 2024).
- [9] Carmo, M. P. do. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [10] Chichorro, M. A. S. “A Luz e os Espaços: A influência da iluminação cênica na iluminação comercial de lojas”. Diss. de mest. Universidade de Lisboa: Faculdade de Belas - Artes, 2017.
- [11] Delgado, J. e Frensel, K. *Geometria Analítica II: Aula 10*. 30 de ago. de 2017. URL: <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wp-content/uploads/sites/115/2017/08/ga2-aula10.pdf> (acesso em 10 de fev. de 2024).
- [12] Delgado, J., Frensel, K. e Crissaff, L. *Geometria Analítica*. 2^a Ed. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- [13] Eves, H. *Introdução à história da matemática*. 5^a Ed. São Paulo: Campinas, 2011.
- [14] Eves, H. *Introdução à história da matemática*. 5^a Ed. São Paulo: Campinas, 2011, p. 199.
- [15] Ferreira, W. J. S. *Jogos e Materiais Concretos no Ensino de Matemática: o que dizem os documentos norteadores da educação*. 2023. URL: <http://hdl.handle.net/11612/6407> (acesso em 29 de set. de 2024).

- [16] GeoGebra. *O que é o GeoGebra?* 2024. URL: <https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT> (acesso em 31 de jul. de 2024).
- [17] Gervázio, S. N. *Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa*. V.9. C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, 2017. URL: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/111> (acesso em 27 de jan. de 2025).
- [18] Godoy, N. *De parabólicas ligadas*. 26 de set. de 2017. URL: <https://super.abril.com.br/tecnologia/de-parabolicas-ligadas> (acesso em 28 de jan. de 2025).
- [19] Gómez, J. J. D. *Geometria Analítica II v.único*. 3ª Ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.
- [20] Guillot, E. et al. "Some details about the third rejuvenation of the 1000 kWth solar furnace in Odeillo: Extreme performance heliostats". *AIP Conference Proceedings*. Vol. 2033. 1. AIP Publishing, 2018.
- [21] Junior, F. H. M. M. "Seções Cônicas". Diss. de mestr. UFV, Florestal, MG, mar. de 2018.
- [22] Knight, R. D. *Física - Uma abordagem estratégica: Termodinâmica, óptica (volume 2)*. 2ª Ed. Porto Alegre: Bookman, 2009, p. 603.
- [23] Knight, R. D. *Física - Uma abordagem estratégica: Termodinâmica, óptica (volume 2)*. 2ª Ed. Porto Alegre: Bookman, 2009, pp. 617, 618.
- [24] Knight, R. D. *Física - Uma abordagem estratégica: Termodinâmica, óptica (volume 2)*. 2ª Ed. Porto Alegre: Bookman, 2009, pp. 616, 617.
- [25] Lima, E. L. *Números e Funções Reais*. 2ª Ed. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [26] Macedo Neto, M. C. de. "Análise de desempenho de um fogão solar com parábola fabricada em material compósito". Diss. de mestr. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 30 de mai. de 2011. URL: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/15646>.
- [27] Miranda, D., Grisi, R. e Lodovici, S. *Geometria Analítica e Vetorial*. 9ª Versão. Santo André: Universidade Federal do ABC, 2015, p. 179.
- [28] Nice, K. e Harris, T. *How Satellite TV Works: Problems with Broadcast TV*. 2024. URL: <https://electronics.howstuffworks.com/satellite-tv1.htm> (acesso em 31 de jul. de 2024).
- [29] Nussenzveig, H. M. *Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor (volume 2)*. 5ª Ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2014, p. 125.
- [30] Oliveira, N. C. de. *Um estudo sobre a propriedade de reflexão dos bilhares cônicos*. 2019. URL: <http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/8375> (acesso em 14 de abr. de 2024).
- [31] Pereira, F. N. V., Santos Júnior, O. F. dos e Fernandes, I. F. de. *Uma cronologia sobre a evolução tecnológica de observatórios e telescópios astronômicos*. 20 de dez. de 2023. URL: <https://doi.org/10.13102/cad.fs.uefs.v21i01.10421> (acesso em 28 de jan. de 2025).
- [32] Ribeiro, G. A. L. e Barros, J. F. *As seções cônicas, as primeiras leis de Kepler e o parabolóide de revolução*. 10º V. Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. URL: <https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1010> (acesso em 5 de mai. de 2024).

- [33] Roque, T. e Carvalho, J. B. P. *Tópicos de História da Matemática*. 1ª Ed. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [34] Sousa, A. C. de e Rocha, A. S. *Física Óptica: Aprenda e faça você mesmo!* Universidade Federal do Tocantins: Campus de Araguaína, 2021. URL: <https://docs.uft.edu.br/share/s/kA36HUsQQIyeGRcA11HF6g> (acesso em 20 de set. de 2024).
- [35] Spada, E. A. L. *Microfones - Parte 03*. Attack do Brasil, 2024. URL: <https://www.attack.com.br/artigos-tecnicos> (acesso em 29 de jul. de 2024).
- [36] Venture, J. J. *Cônicas e Quádricas*. 5ª Ed. Curitiba, 2003.
- [37] Wagner, E. *Porque as Antenas são parabólicas?* RPM 33, 1997, p. 11.
- [38] Winterle, P. *Vetores e Geometria Analítica*. 2ª Ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014, p. 223.