

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Produto Educacional

O uso do software “GeoGebra” no ensino das funções trigonométricas no ensino médio

Autor: Luis Eduardo Nogueira
Orientador: Mehran Sabeti

**FLORESTAL - MINAS GERAIS
2025**

RESUMO

NOGUEIRA, Luis Eduardo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, janeiro de 2025. **O uso do software “GeoGebra” no ensino das funções trigonométricas no ensino médio.** Orientador: Mehran Sabeti.

O *GeoGebra* é um *software* de Matemática dinâmica gratuito e multiplataforma, projetado para apoiar o ensino de diferentes áreas da Matemática, como geometria, álgebra, cálculo, estatística e gráficos, em uma única aplicação interativa. Criado por Markus Hohenwarter em 2001, o programa ganhou popularidade mundial, sendo utilizado em mais de 190 países e traduzido para 55 idiomas. Gratuito e de código aberto, o *GeoGebra* é uma ferramenta essencial para inovar no ensino público, oferecendo recursos de alta qualidade e acessíveis, especialmente em contextos com restrições financeiras.

A Trigonometria, por sua vez, é uma área Matemática fundamental com raízes na antiguidade, surgindo entre os gregos e desenvolvida ao longo dos séculos por matemáticos e astrônomos como Hiparco e Ptolomeu. Inicialmente usada na Astronomia, a Trigonometria expandiu-se para outras áreas, como engenharia e medicina, sendo essencial para cálculos em circuitos elétricos, refração de luz e análise estrutural. Conceitos fundamentais, como seno, cosseno e tangente, originados do triângulo retângulo, tornaram-se essenciais para resolver problemas complexos.

Neste trabalho, propomos uma aplicação do *GeoGebra* em sala de aula, com o objetivo de analisar como o *software* auxilia o processo de ensino-aprendizagem. A experiência permitirá que alunos visualizem e manipulem gráficos de funções trigonométricas e explorem suas aplicações, incentivando a construção do conhecimento de forma dinâmica e interativa. A análise dos resultados destacará a importância do uso do *software* para promover uma compreensão mais profunda e intuitiva dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: geogebra; trigonometria; ensino

Lista de Figuras

2.1	Tela Inicial <i>GeoGebra</i>	20
2.2	Tela Inicial <i>GeoGebra</i> , após inicialização do programa.	22
2.3	Detalhe do ícone ‘Gráfico’, após clicar na barra de menus.	23
2.4	Entrada da função $f(x) = \sin(x)$ e plotagem do gráfico na janela de visualização.	24
3.1	Figura de uma parte de uma tradução do <i>Almagesto</i> em latim, de 1451. Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Almagesto	28
3.2	Triângulo Retângulo.	31
3.3	Inserindo as coordenadas de um ponto.	33
3.4	Construindo o Círculo Trigonométrico.	34
3.5	Preenchimento dos dados.	35
3.6	Círculo de Centro A e Raio 1.	35
3.7	Pontos A , B e C como lugares Geométricos da Circunferência.	37
3.8	Ângulo α gerado pelo <i>GeoGebra</i> após execução dos comandos.	38
3.9	Ângulo no 3º quadrante, após <i>zoom</i>	39
3.10	Gráfico da função $f(\alpha) = \sin(\alpha)$	40
3.11	Valor de Seno Positivo.	41
3.12	Valor de Seno Negativo.	42
3.13	Seno e Cosseno de α negativos no 3º quadrante.	43
3.14	Representação das funções $\sin^2(\alpha)$ e $\cos^2(\alpha)$	44

3.15	Representação das Funções funções $\sin^2(a)$ e $\cos^2(a)$ com pontos de interseção D e E.	45
3.16	Reta $y = 1$, representando graficamente equação 3.6 - Relação Fundamental da Trigonometria.	46
3.17	Inserindo a reta perpendicular para auxiliar na visualização.	47
3.18	Deslocamentos de B pela circunferência no instante 1.	48
3.19	Deslocamentos de B pela circunferência no instante 2.	48
3.20	Deslocamentos de B pela circunferência no instante 3.	49
3.21	Reta auxiliar β interceptando a função $\tan(\alpha)$	51
3.22	Valor da $\tan(\alpha)$ representado graficamente para um instante no 1º quadrante.	53
3.23	Valor da $\tan(\alpha)$ representado graficamente para um instante no 2º quadrante.	53
3.24	$\tan(\alpha)$ representada no Círculo Trigonométrico.	54
3.25	Círculo Trigonométrico centralizado na Origem.	55
3.26	Representação gráfica da Tangente no 2º quadrante.	57
3.27	Representação gráfica da Tangente no 3º quadrante.	57
3.28	Representação da Cotangente no 1º quadrante.	60
3.29	Representação da Cotangente no 2º quadrante.	61
3.30	Representação da Cotangente no 3º quadrante.	61
3.31	Representação da Cotangente no 4º quadrante.	62
3.32	Interpretação Geométrica da Cotangente no Círculo Trigonométrico.	63
3.33	Círculo trigonométrico com centro na Origem (A), para representar a Cotangente graficamente.	64
3.34	Cotangente (segmento h) para um ângulo no 2º quadrante	65
3.35	Cotangente (segmento h) para um ângulo no 3º quadrante.	66
3.36	Círculo Trigonométrico para representar a função Secante.	67

3.37	Função Secante de um ângulo qualquer no 2º quadrante.	69
3.38	Representação Geométrica da Secante.	70
3.39	Representação da inserção de uma reta Tangente.	71
3.40	Representação da interseção entre 2 objetos.	72
3.41	Representação do segmento \overline{AD}	73
3.42	Representação do segmento \overline{AD} , quando o ponto C está formando um ângulo no 2º quadrante.	74
3.43	Representação do segmento \overline{AD} , quando o ponto C está formando um ângulo no 1º quadrante.	74
3.44	Círculo trigonométrico a ser utilizado para a representação da função Cossecante.	75
3.45	Função Cossecante de α	76
3.46	Função Cossecante de α no 2º quadrante.	78
3.47	Função Cossecante de α no 3º quadrante.	78
3.48	Representação Geométrica da função Cossecante de α	79
3.49	Inserindo comando ‘retas tangentes’.	80
3.50	Interseção da Reta Tangente e o eixo Y	81
3.51	Cossecante - Segmento \overline{AD}	82
3.52	Representação Geométrica da Cossecante no 2º quadrante.	83
3.53	Representação Geométrica da Cossecante no 3º quadrante.	83
3.54	$f(x) = \cos(x)$ representada no <i>GeoGebra</i>	85
3.55	$g(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$ representada no <i>GeoGebra</i>	86
3.56	Variação do parâmetro ‘a’ representado no <i>GeoGebra</i>	87
3.57	Variação do parâmetro ‘b’ representado no <i>GeoGebra</i>	87
3.58	Variação do parâmetro ‘c’ representado no <i>GeoGebra</i>	88
3.59	Variação do parâmetro ‘d’ representado no <i>GeoGebra</i>	89

Sumário

1	Introdução	16
2	História do <i>GeoGebra</i>	17
2.1	A Interface do <i>GeoGebra</i>	18
2.1.1	Onde fazer o <i>download</i>	18
2.1.2	Apresentação Inicial	19
2.1.3	Funcionamento do Programa	21
3	Trigonometria	26
3.1	Relação Fundamental da Trigonometria	30
3.2	Procedimento de Construção 1 - Demonstração da Relação Fundamental da Trigonometria no <i>GeoGebra</i>	33
3.3	Procedimento de Construção 2 - Tangente de um Ângulo	49
3.4	Procedimento de Construção 3 - Representação Geométrica da Tangente de um Ângulo no Círculo Trigonométrico	54
3.5	Procedimento de Construção 4 - Cotangente de um Ângulo	58
3.6	Procedimento de Construção 5 - Representação Geométrica da Cotangente de um ângulo no Círculo Trigonométrico.	62
3.7	Procedimento de Construção 6 - Secante de um ângulo.	66
3.8	Procedimento de Construção 7 - Representação Geométrica da Secante de um ângulo no Círculo Trigonométrico.	69
3.9	Procedimento de Construção 8 - Cossecante de um ângulo.	75

3.10 Procedimento de Construção 9 - Representação Geométrica da Cossecante de um ângulo no Círculo Trigonométrico.	79
3.11 Procedimento de Construção 10 - Representação Genérica da Função Cosseno.	84

Introdução

Este trabalho objetiva elaborar um plano de aula voltado ao ensino da Trigonometria, focando na utilização de um recurso computacional dinâmico, bastante conhecido no meio matemático, chamado *GeoGebra*. Buscando despertar nos alunos o interesse pela Trigonometria e auxiliá-los na compreensão desses conceitos, que frequentemente são abstratos, por meio de uma abordagem interativa.

Faremos uma abordagem histórica sobre o *software* a ser utilizado e sobre a parte teórica da Trigonometria que será abordada, além de apresentar um passo a passo de como o professor irá desenvolver este conteúdo através do *GeoGebra*, expondo os aspectos teóricos considerados na construção desse plano de aula, com uma descrição detalhada da estrutura ser utilizada.

Além disso, faremos uma aplicação deste produto em sala de aula detalhando os principais resultados observados, com o intuito de promover, entre professores de Matemática, possíveis articulações pedagógicas envolvendo a Trigonometria e as novas tecnologias educacionais disponíveis. Dessa forma, busca-se consolidar a proposta deste mestrado profissional, que prioriza ações voltadas para intervenções nas práticas de sala de aula e contribui para a solução de desafios dos sistemas educativos.

História do GeoGebra

O *GeoGebra* é um *software* de Matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação (GEOGEBRA, 2024).

Ainda de acordo com GEOGEBRA (2024), o *software GeoGebra* foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade cresceu desde então. Atualmente, o *GeoGebra* é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 *downloads* mensais, 62 Institutos *GeoGebra* em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de *software* educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de *laptops* em vários países ao redor do mundo.

O *GeoGebra* apresenta algumas características importantes, onde pode-se destacar:

- Gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas. Ou seja, quando um parâmetro ou objeto é alterado, todos os elementos relacionados se ajustam em tempo real, permitindo explorar propriedades matemáticas de forma visual e intuitiva.
- Interface amigável, com vários recursos sofisticados.
- Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB.

- Disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo.
- Software gratuito e de código aberto.

Por ser livre, o *software GeoGebra* vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático (GEOGEBRA, 2024).

Além disso, ao representar o gráfico de uma função na tela do computador, outras janelas se abrem apresentando a correspondente expressão algébrica e, por vezes, outra janela com uma planilha contendo as coordenadas de alguns pontos pertencentes ao gráfico. As alterações no gráfico imediatamente são visíveis na janela algébrica e na planilha de pontos. É a apresentação do dinamismo de situações que permitem ao professor e aluno levantar conjecturas e testar hipóteses.

2.1 A Interface do *GeoGebra*

Uma importante característica do *GeoGebra* é que ele é um *software* livre, tornando-o um recurso computacional importante para democratizar e promover a inovação no ensino público, visto que muitas vezes a educação pública enfrenta desafios financeiros. Isso contribui para elevar a qualidade do ensino público e aumentar as oportunidades educacionais para todos os alunos independentemente de sua origem socioeconômica.

2.1.1 Onde fazer o *download*

Para baixar e utilizar o programa, deve-se acessar o site oficial do *GeoGebra* e seguir os passos detalhados a seguir.

1. Acesse o site oficial do *GeoGebra* em: <https://www.GeoGebra.org/>.
2. No menu principal do site, você verá uma opção ‘Baixar’. Clique nela.

3. Você será redirecionado para a página de *download*, onde verá opções para diferentes versões do *GeoGebra*, incluindo *GeoGebra Classic*, *GeoGebra 3D*, *GeoGebra Graphing Calculator* e muito mais.
4. Escolha a versão do *GeoGebra* que deseja baixar. Utilizaremos neste trabalho a versão clássica. Clique em ‘*GeoGebra Classic 6*’. Dependendo do seu sistema operacional (Windows, macOS, Linux, Android ou iOS), clique na opção correspondente para iniciar o *download*.
5. Siga as instruções de instalação para concluir a instalação do *GeoGebra* em seu dispositivo.

Além disso, o *GeoGebra* também está disponível como um aplicativo para dispositivos móveis, então você pode baixá-lo na loja de aplicativos do seu dispositivo, como a *App Store* (iOS) ou *Google Play Store* (Android).

2.1.2 Apresentação Inicial

A interface do *GeoGebra* é intuitiva e amigável, permitindo que estudantes, professores e profissionais da Matemática utilizem suas poderosas funcionalidades com facilidade.

Na Figura 2.1, temos a tela inicial do *GeoGebra*, dando destaque às principais ferramentas disponíveis na tela inicial, as quais serão detalhadas na sequência.

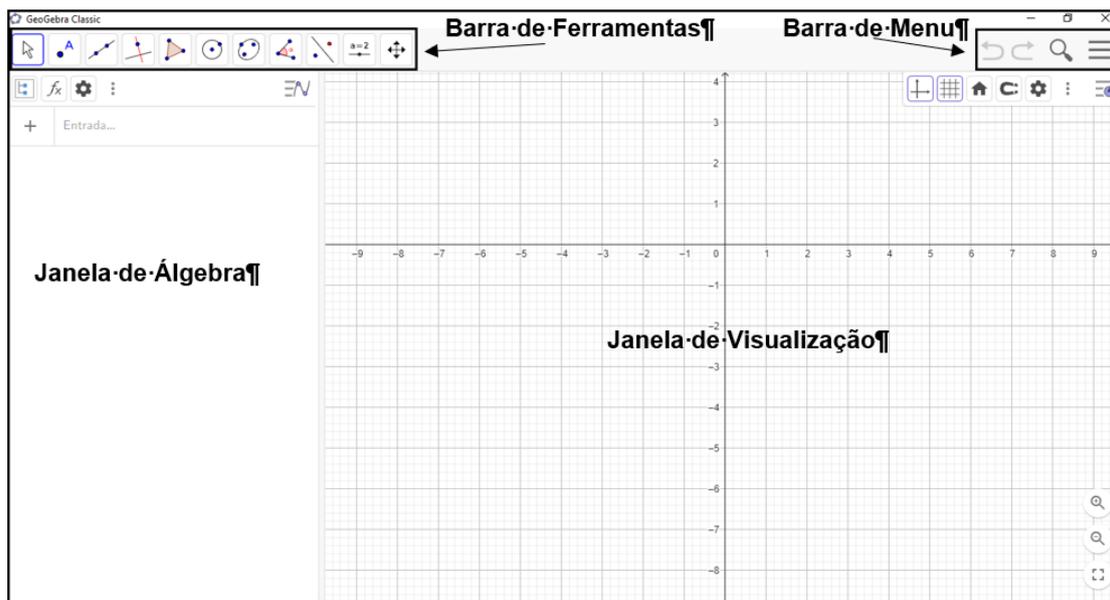


Figura 2.1: Tela Inicial *GeoGebra*.

- Barra de Ferramentas: A barra de ferramentas é a área onde você encontra as ferramentas de desenho e manipulação, como pontos, retas, círculos, funções, entre outras, localizada na parte superior da janela principal.
- Barra de Menus: A Barra de Menus é o local onde se concentram diversas funcionalidades do *GeoGebra*, onde é possível salvar o projeto ou até mesmo alterar as configurações gerais do programa.
- Janela de Álgebra: Na Janela de Álgebra são exibidas as coordenadas, equações e medidas dos objetos criados na janela de visualização. É uma representação textual de todos os objetos matemáticos criados. Isso inclui equações, coordenadas e fórmulas. Você pode interagir com esses objetos diretamente na área da álgebra.
- Janela de Visualização: A Janela de Visualização é o local em que são criadas as representações gráficas, a partir da seleção dos comandos na Barra de

Ferramentas. A maior parte da interface é ocupada pela área de visualização, onde você cria, desenha e explora objetos matemáticos.

As ferramentas que serão utilizadas para a elaboração deste estudo serão detalhadas minuciosamente, para que os professores que tiverem acesso a este material, consigam implementá-lo em suas aulas. Este detalhamento será exposto nos capítulos destinados aos Procedimentos.

2.1.3 Funcionamento do Programa

Vamos exemplificar algumas utilizações básicas do programa. É importante ressaltar que as funções inseridas no *software* foram utilizadas em seu idioma original, visto que a versão disponível para uso estava configurada em inglês. Para calcular o valor de um seno de um ângulo qualquer e exibir o gráfico da função seno, você pode seguir as seguintes etapas no *GeoGebra*:

1. Abra o *GeoGebra*: Inicie o aplicativo *GeoGebra* no seu computador ou acesse a versão online no seu navegador.

A Figura 2.2, apresenta a tela inicial do *GeoGebra*, ao ligar o *software* .

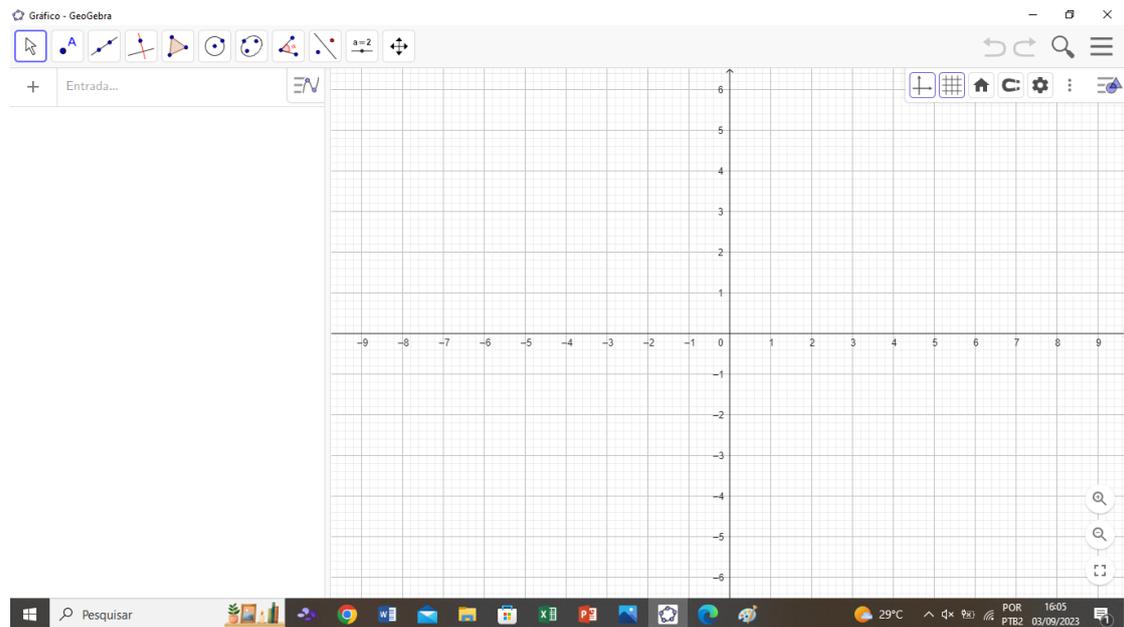


Figura 2.2: Tela Inicial *GeoGebra*, após inicialização do programa.

2. Crie um gráfico: Clique na barra de menus, e selecione o ícone de gráficos. Na janela de gráficos, crie um gráfico vazio ou selecione um gráfico existente onde deseja traçar a função seno.
Na Figura 2.3, está apresentando o ícone 'gráfico', após clicar na barra de menus .

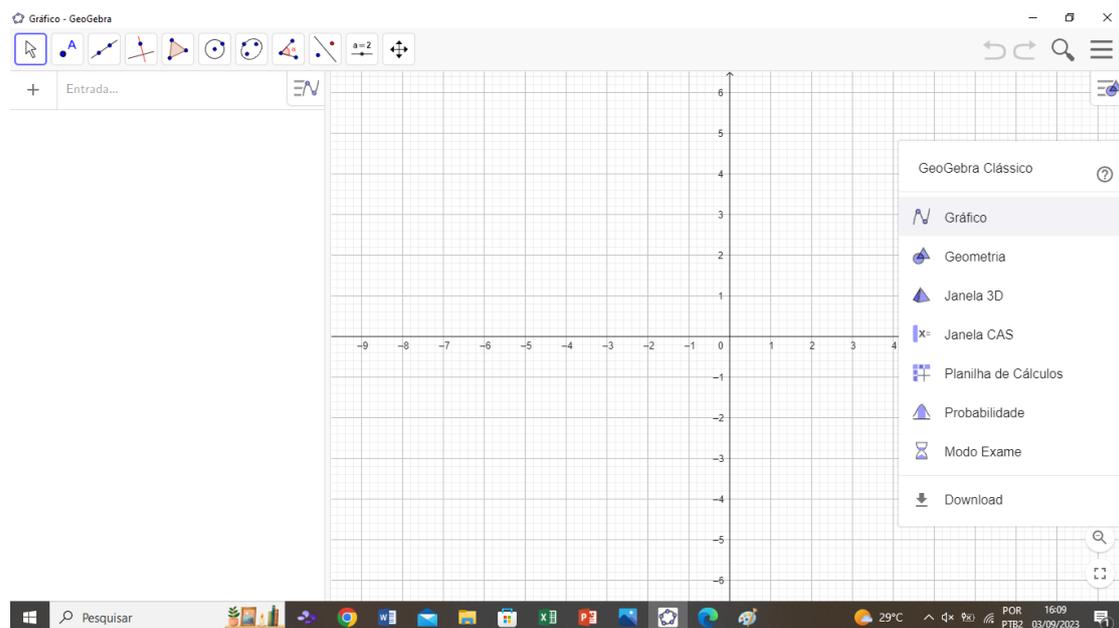


Figura 2.3: Detalhe do ícone ‘Gráfico’, após clicar na barra de menus.

3. Defina a Função Seno: Na barra de entrada (onde digita-se os comandos), insira a função seno com uma variável, por exemplo, digitando o comando $\sin(x)$. Automaticamente, a função $f(x) = \sin(x)$ é criada.

O próprio programa já entende que na variável x serão os valores das abscissas do plano cartesiano. Caso a função definida fosse $\sin(\alpha)$, teríamos que definir este ângulo α .

O *software GeoGebra* oferece diversas formas de inserir e manipular ângulos. A definição de ângulos pode ser realizada tanto em graus quanto em radianos, permitindo flexibilidade na representação e nos cálculos. Para definir um ângulo de forma direta, o usuário pode inseri-lo na barra de entrada do software da seguinte maneira: $\alpha = 45$. Para o caso de ângulos em radianos pode-se digitar na janela de entrada da seguinte forma: $\alpha = \pi/2$.

Nos próximos tópicos, faremos estas representações mais específicas.

A Figura 2.4, apresenta a inserção da função $f(x) = \sin(x)$ na janela de

entrada. Automaticamente, o gráfico é plotado na janela de visualização.

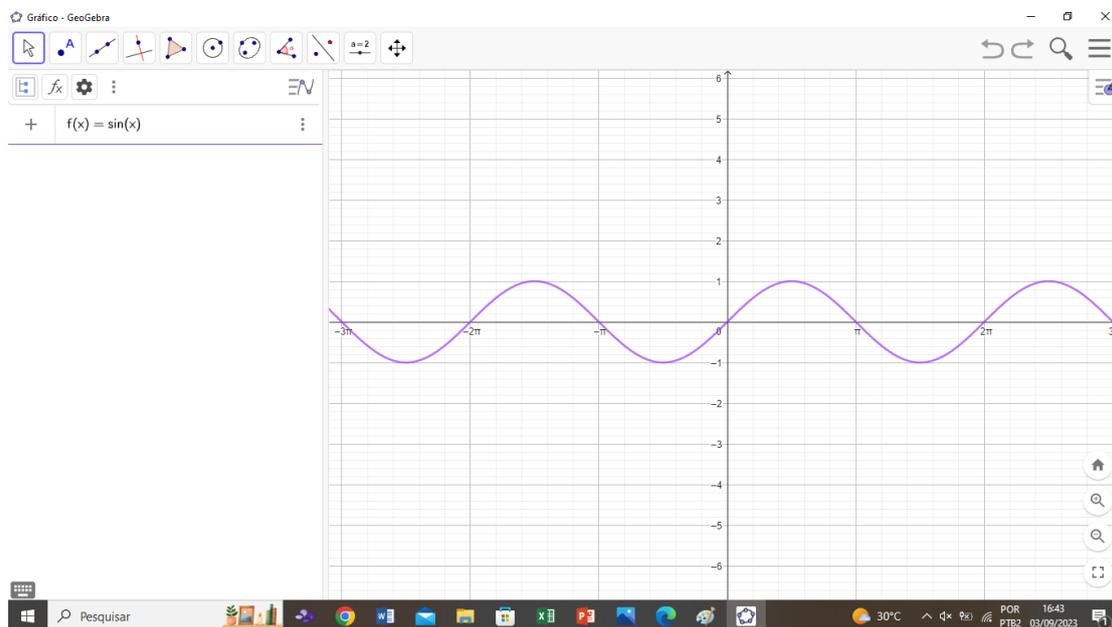


Figura 2.4: Entrada da função $f(x) = \sin(x)$ e plotagem do gráfico na janela de visualização.

4. Escala do Gráfico: Ajuste a escala do gráfico conforme desejado. Isso é importante para garantir que o gráfico exiba a função seno de maneira apropriada. Você pode fazer isso clicando com o botão direito do mouse no eixo x e selecionando 'Configurações do Eixo' para definir os limites e o passo do eixo.
5. Traçar o Gráfico: Pressione 'Enter' após inserir a função seno ' $f(x) = \sin(x)$ '. O *GeoGebra* traçará automaticamente o gráfico da função seno no gráfico que você criou.

Você verá o gráfico da função seno exibido na janela de gráficos. O eixo x representa o ângulo (em radianos), e o eixo y representa o valor do seno desse ângulo. Você pode interagir com o gráfico ajustando a escala, aproximando ou afastando, e assim

por diante, conforme necessário. Lembre-se de que você pode alterar a função para calcular o seno de ângulos diferentes ou usar outras funções trigonométricas da mesma maneira, substituindo $\sin(x)$ por $\cos(x)$, $\tan(x)$, etc., para calcular e exibir seus gráficos correspondentes.

Trigonometria

Trigonometria é uma palavra de origem grega que remete à medida de três ângulos, onde: TRI significa três, GONO significa ângulo e METRIEN significa medida. Trata-se assim do estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo (SILVA, 2024).

Os egípcios e os babilônios utilizavam as relações existentes entre lados e ângulos dos triângulos para resolver problemas, mas apesar disso foi o interesse pelo movimento dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria. Daí que, historicamente, a Trigonometria apareça muito cedo associada à Astronomia (CORREIA, 2009).

Os primeiros relatos apontam que a Trigonometria nasceu no ano 300 a.C. entre os gregos, e suas primeiras aplicações práticas ocorreram com ptolomaicos 150 d.C. que, além de continuar aplicando-a nos estudos astronômicos, a usou para determinar a latitude e longitude de cidades e de outros pontos geográficos em seus mapas (CORREIA, 2009).

Os gregos antigos, como Tales de Mileto, foram pioneiros na abordagem geométrica da Trigonometria, estabelecendo seus fundamentos. Tales, ao trazer a Matemática para a Grécia, iniciou um modo de cultivo sistemático do conhecimento matemático, o que lhe proporcionou uma maior precisão para os estudos astronômicos e lhe permitiu formular o Teorema de Tales, cálculo que na época

permitia descobrir a altura de uma pirâmide a partir do comprimento de retas paralelas e das retas transversais da construção (PORFÍRIO, 2024).

Acredita-se que Tales, por volta de 585 a.C. (quando tinha cerca de 40 anos), tenha conseguido prever o momento exato de um eclipse solar. Ele teria realizado essa proeza com base em observações diretas dos movimentos da Terra, da Lua e do Sol, combinadas com conhecimentos astronômicos e cálculos matemáticos. Para muitos historiadores, esse episódio marca um ponto alto em sua trajetória intelectual, simbolizando também o surgimento da Filosofia como um esforço racional e sistemático nesse período (PORFÍRIO, 2024).

Hiparco, assim como Tales, um matemático e astrônomo grego, deu um passo importante ao criar a primeira tabela trigonométrica conhecida, chamada ‘Tabela de Cordas’. Essa tabela relacionava os comprimentos das cordas em um círculo com os ângulos correspondentes, permitindo cálculos mais precisos em Astronomia e geodésia. Assim, Hiparco representou um grande avanço na Astronomia e por isso recebeu o título de “Pai da Trigonometria” (PORFÍRIO, 2024).

Hiparco desempenhou um papel crucial como elo entre a tradição astronômica babilônica e a obra monumental de Cláudio Ptolomeu (Klaudius Ptolemaios). Este último, no século II d.C., em Alexandria, escreveu a *Syntaxis Mathematica*, uma compilação abrangente em treze volumes que se tornou referência essencial em Trigonometria e Astronomia na Antiguidade. A obra, mais tarde conhecida como Almagesto – termo derivado do árabe *al-majisti*, que significa ‘a maior’ –, recebeu esse título devido à elevada consideração dos tradutores árabes, que a viam como o principal tratado científico de sua época (PORFÍRIO, 2024). A Figura 3.1 apresenta uma parte de uma tradução do Almagesto em latim de 1951.

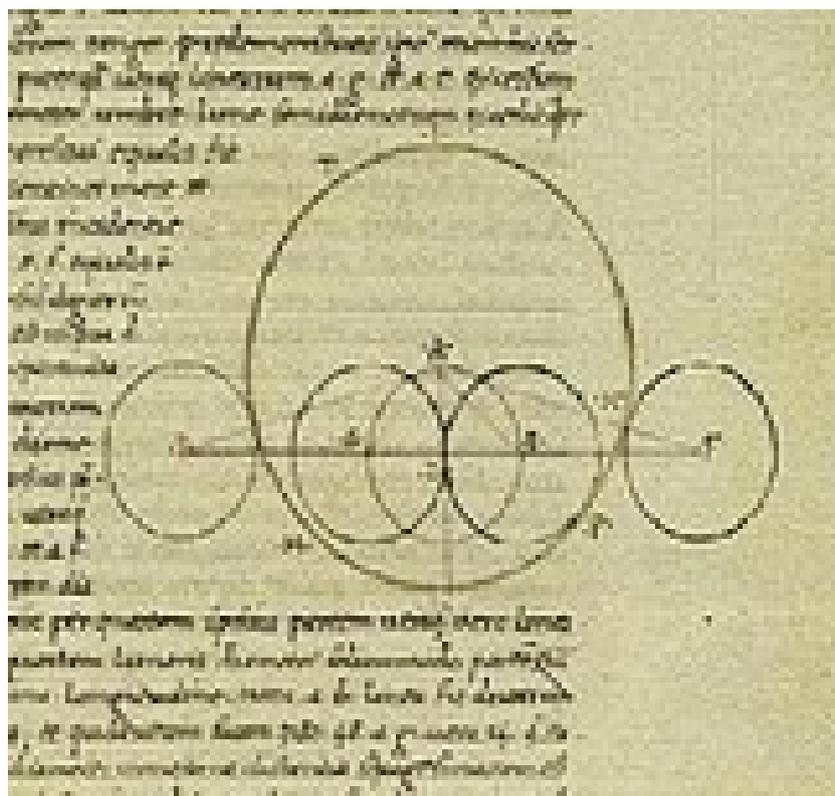


Figura 3.1: Figura de uma parte de uma tradução do Almagesto em latim, de 1451. Fonte:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Almagesto>.

CORREIA, 2009 ainda afirma que foi Ptolomeu (séc. II d.C.) quem influenciou o desenvolvimento da Trigonometria, durante muitos séculos, onde sua obra Almagesto contém uma tabela de cordas correspondentes a diversos ângulos, por ordem crescente e em função da metade do ângulo, que é equivalente a uma tabela de senos, bem como uma série de proposições da atual disciplina. No Almagesto reuniu os conhecimentos existentes na época sobre Astronomia e Trigonometria e a que os árabes tiveram acesso. Estes introduziram os conhecimentos de Trigonometria para a Europa através de Espanha.

A aplicação da Trigonometria e utilização do círculo trigonométrico para a resolução de problemas algébricos foi feita por Viète – séc. XVI – que estabeleceu também alguns resultados importantes. Contudo, foi Euler (séc. XVIII) que,

ao usar invariavelmente o círculo de raio um, introduziu o conceito de seno, de cosseno e de tangente como números, bem como as notações atualmente utilizadas (CORREIA, 2009).

O primeiro vestígio do tratamento funcional da Trigonometria surgiu em 1635, quando Gilles Personne de Roberval, um matemático francês do século XVII, fez um dos primeiros esboços da curva do seno. Embora a função seno já fosse conhecida na trigonometria desde os tempos antigos (em particular, pelos astrônomos e matemáticos hindus e árabes), Roberval foi um dos primeiros a representar graficamente essa função de forma precisa. Mas, a ligação da Trigonometria à Análise só foi feita por Fourier (séc. XIX), como consequência do estudo dos movimentos periódicos por ele efetuado (CORREIA, 2009).

A Trigonometria é uma disciplina Matemática que se dedica ao estudo das relações entre ângulos e os lados de triângulos, a qual desempenha um papel fundamental em várias áreas da Ciência, Engenharia e Matemática, sendo uma das mais antigas e essenciais ao longo da história. Encontramos aplicações na Mecânica, Eletricidade, Acústica, Música, Astronomia, Engenharia, Medicina e em muitos outros campos da atividade humana.

Dentre as aplicações na Engenharia, podemos destacar a aplicabilidade na engenharia elétrica, onde as funções trigonométricas são essenciais para analisar circuitos de corrente alternada, sendo que a relação entre tensão e corrente em componentes como resistores, indutores e capacitores são descritas usando funções trigonométricas, como por exemplo a função secante (STEWART, 2007).

Além disso, podemos citar também um importante papel na Ótica, contribuindo na descrição de fenômenos como a refração da luz e ajudando a entender a mudança de direção e velocidade da luz ao atravessar superfícies de diferentes meios (HALLIDAY et al., 2013).

Outra aplicabilidade interessante é a utilização das funções Trigonométricas

na Engenharia Civil. Elas são utilizadas principalmente em problemas de análise estrutural para determinar a distribuição de tensões em vigas, pórticos e outros elementos estruturais sujeitos a flexão (HIBBELER, 2016).

Essas aplicações envolvem conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria.

3.1 Relação Fundamental da Trigonometria

Para abordarmos a relação Fundamental da Trigonometria, temos que conhecer algumas relações importantes do Triângulo Retângulo. Dentre estas relações, podemos citar o Seno, o Cosseno e a Tangente de um ângulo. Estas relações são chamadas de razões trigonométricas, pois resultam da divisão entre as medidas dos seus lados.

O triângulo retângulo é aquele que apresenta um ângulo interno reto (igual a 90°). O lado oposto ao ângulo de 90° é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos.

Os valores do seno, do cosseno e da tangente são calculados em relação a um determinado ângulo agudo (ângulo cuja medida está entre 0° e 90°) do triângulo retângulo.

De acordo com a posição dos catetos em relação ao ângulo, ele pode ser oposto ou adjacente.

Na Figura 3.2, está representado um triângulo retângulo, onde pode-se observar os catetos adjacente e oposto e a Hipotenusa. Em seguida, exemplificaremos as razões seno e cosseno, que serão denotadas como $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ ao longo deste trabalho. Optamos por essa notação devido ao uso do GeoGebra, no qual muitos comandos estão em inglês, facilitando a compreensão.

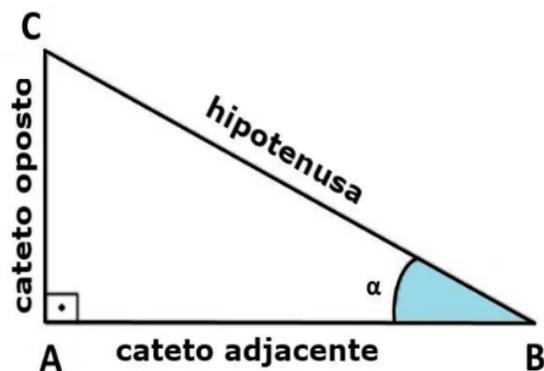


Figura 3.2: Triângulo Retângulo.

- Seno ($\sin(\alpha)$)

É a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo agudo e a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo. Essa relação é calculada através da fórmula:

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad (3.1)$$

- Cosseno ($\cos(\alpha)$) É a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo agudo e a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo. Essa relação é calculada através da fórmula:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \quad (3.2)$$

Relacionando estes conceitos com o teorema de Pitágoras, encontra-se uma importante identidade Matemática, chamada de relação Fundamental da Trigonometria. Vale ressaltar, que pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \quad (3.3)$$

Da equação 3.1, temos:

$$\overline{AB} = \cos \alpha \cdot \overline{BC} \quad (3.4)$$

Da equação 3.2, temos:

$$\overline{AC} = \sin \alpha \cdot \overline{BC} \quad (3.5)$$

Logo, combinando a equação 3.5 e a equação 3.4 através da equação 3.3, teremos:

$$\begin{aligned} (\overline{BC} \cdot \sin \alpha)^2 + (\overline{BC} \cdot \cos \alpha)^2 &= (\overline{BC})^2 \\ \overline{BC}^2 \cdot \sin^2 \alpha + \overline{BC}^2 \cdot \cos^2 \alpha &= \overline{BC}^2 \\ \overline{BC}^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) &= \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da equação por $(\overline{BC})^2$, chegamos à Relação Fundamental da Trigonometria:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (3.6)$$

Levando em consideração o que foi exposto, muitos alunos apresentam dificuldades no aprendizado, seja pela complexidade ou abstração dos conceitos. Para tanto, iremos mostrar uma abordagem desta relação Fundamental da Trigonometria no *software GeoGebra*.

O *GeoGebra* nos permitirá abordar estes conceitos abstratos de Trigonometria possibilitando uma visualização dinâmica de conceitos trigonométricos. Em vez de depender apenas de explicações teóricas, os alunos poderão interagir com modelos visuais em tempo real. Poderão variar os ângulos ou coordenadas dos pontos para ver como isso afeta as funções trigonométricas, facilitando uma compreensão mais profunda.

3.2 Procedimento de Construção 1 - Demonstração da Relação Fundamental da Trigonometria no *GeoGebra*

Para iniciar este procedimento, vamos seguir os passos:

1. Abrir o *GeoGebra* e selecionar a Função Ponto, na barra de Ferramentas, como está apresentado na Figura 3.3. Na própria entrada da janela de álgebra, deve-se colocar a coordenada do ponto. Para este exemplo específico, colocaremos a coordenada $(3,3)$, que foi escolhida aleatoriamente neste exemplo, para permitir uma boa visualização na janela de entrada. Ao digitar “ $(3,3)$ ” na janela entrada, o ponto já aparecerá definido.

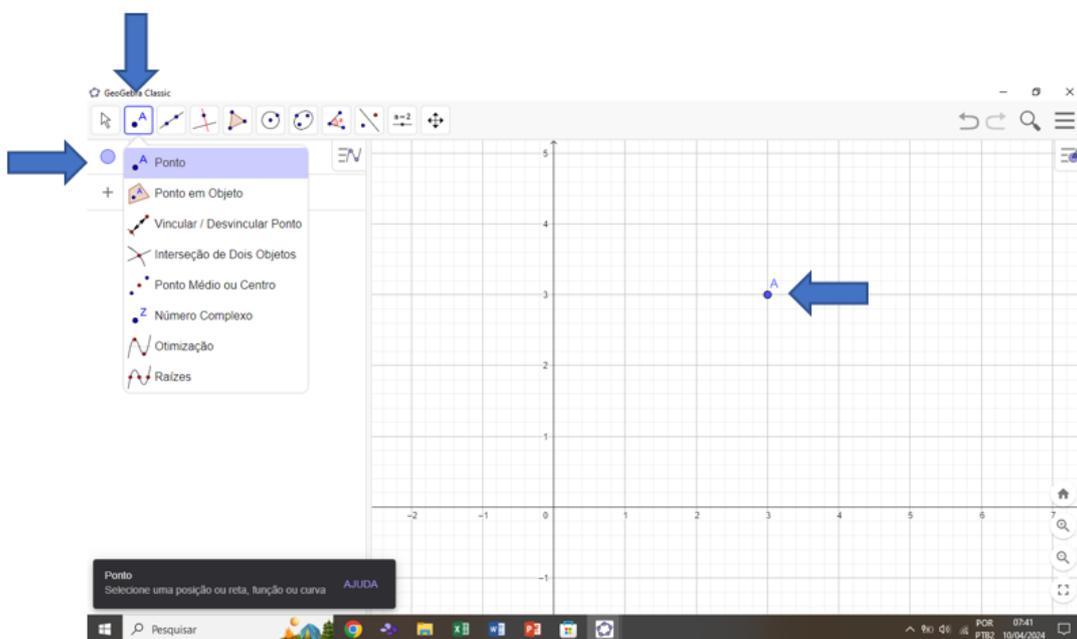


Figura 3.3: Inserindo as coordenadas de um ponto.

2. Agora, vamos agora construir o Círculo Trigonométrico com o centro no Ponto

A. Para isso vamos selecionar a Função Círculo, na barra de Ferramentas, para construir o mesmo, conforme apresentado na Figura 3.4.

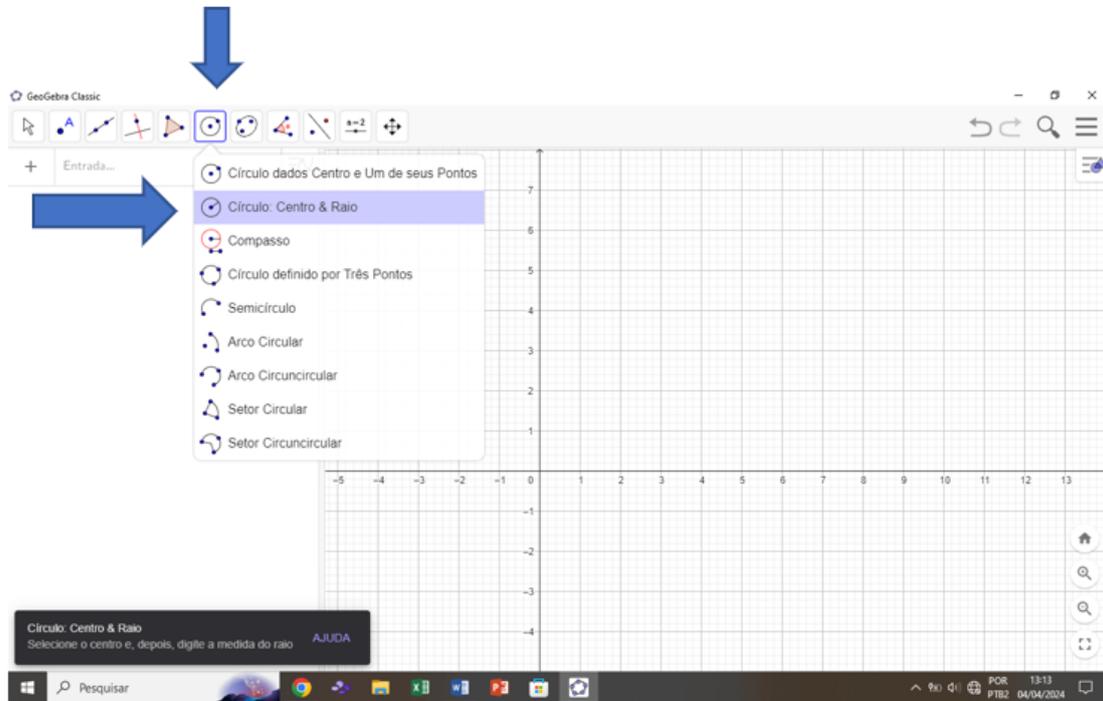


Figura 3.4: Construindo o Círculo Trigonométrico.

Selecionaremos a opção Círculo: Centro e Raio. Ao selecionar, basta clicarmos em um ponto qualquer, e no nosso caso específico selecionaremos o ponto A , e em seguida basta digitar valor do raio $= 1$. (Visto que estamos trabalhando com o círculo trigonométrico).

Na Figura 3.5 está apresentado como é intuitivo e fácil o preenchimento dos dados. Em seguida ao preenchimento, basta clicar em 'ok'.

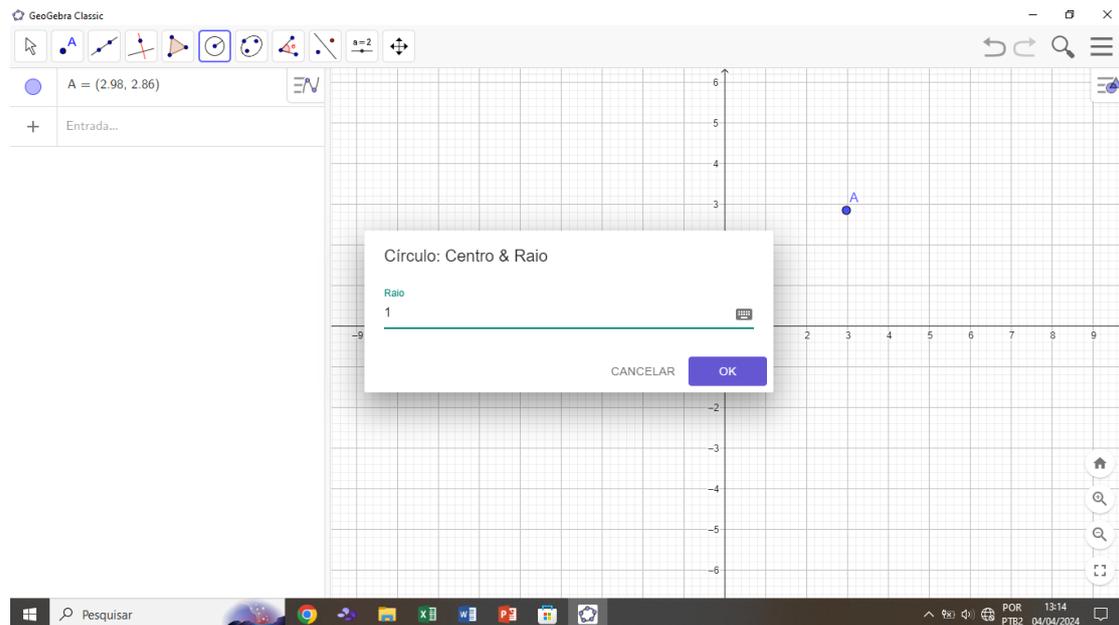


Figura 3.5: Preenchimento dos dados.

Ao executar estes comandos, obteremos a configuração apresentada na Figura 3.6, sendo este um Círculo de Raio 1 e centro em $A(3,3)$.

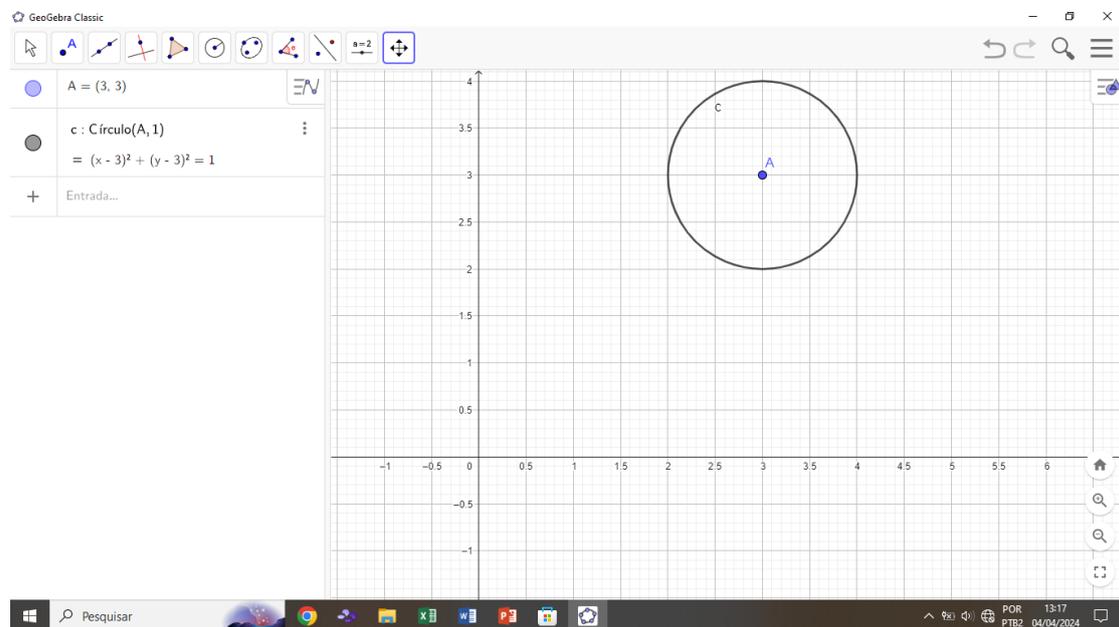


Figura 3.6: Círculo de Centro A e Raio 1.

Além de intuitivo, percebe-se que os comandos executados vão ficando disponíveis na janela de visualização, os quais podem ser ocultados ou mostrados de acordo com a necessidade de visualização.

Para nosso objetivo, que é utilizar o *GeoGebra* para facilitar o ensino da Trigonometria, vamos estabelecer alguns parâmetros, os quais poderão ser mudados de maneira dinâmica, permitindo visualizar o que acontece quando variamos os ângulos no círculo trigonométrico.

3. Para auxiliar nesta dinâmica, iremos inserir mais um ponto, sendo este o ponto C , com a coordenada $(4,3)$. Esta coordenada foi escolhida, por pertencer à circunferência e para o segmento \overline{AC} ficar paralelo ao eixo x .
4. Vamos inserir também um ponto aleatório B sobre qualquer ponto da circunferência.

Como este ponto B já está sobre a circunferência, o próprio *software*, já entende que a circunferência é o lugar geométrico onde estão os pontos B e C . Portanto, ao finalizar estes comandos, percebe-se que na janela de comando aparece um botão (*play*), ao lado da função na janela de entrada. Este botão, ao ser acionado, permite que o ponto se locomova sobre a circunferência. É a dinâmica que ajudará a visualizar o que ocorre com as funções trigonométricas ao variar o ponto B sobre a circunferência. Na Figura 3.7 estão representados os pontos A , B e C na Janela de Visualização, e em destaque o botão ‘*play*’ na janela de álgebra.

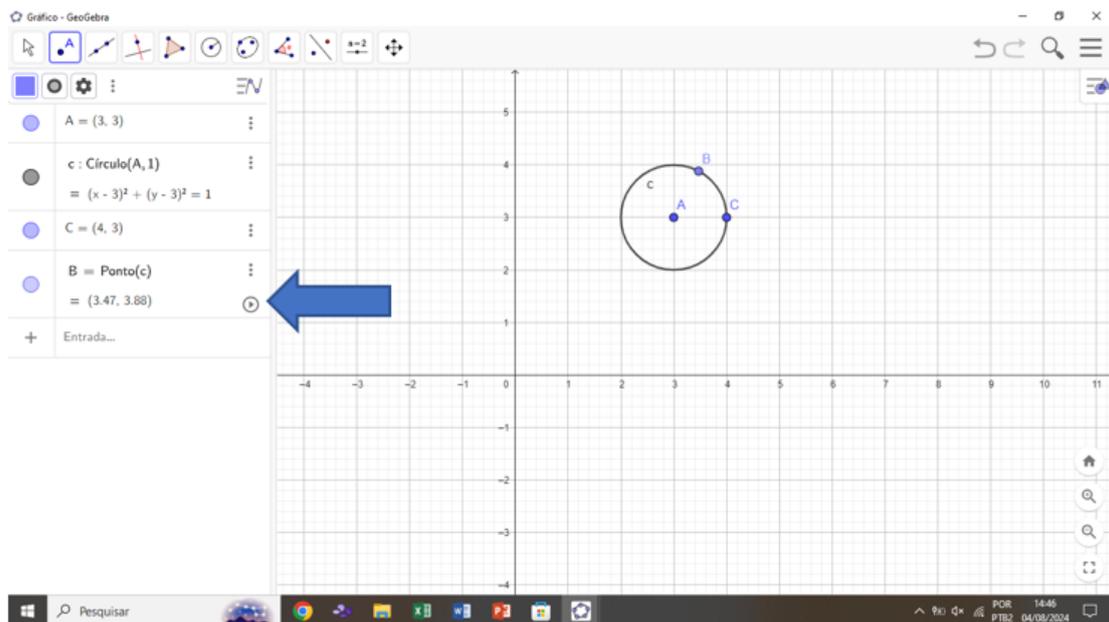


Figura 3.7: Pontos A , B e C como lugares Geométricos da Circunferência.

5. Para melhorar a interação, e visualizarmos melhor o que está ocorrendo, vamos definir um ângulo $B\hat{A}C$, o qual permitirá visualizar na própria janela de visualização a variação do ângulo à medida que o ponto B será deslocado pela circunferência. A figura 3.8 exemplifica a inserção do ângulo através da função ângulo na janela de ferramentas. Para concluir esta entrada, bastará clicar em ângulo, na Janela de Ferramentas, e em seguida selecionar os três pontos (C , A , B) e apertar a tecla *enter* para concluir a ação.

A Figura 3.8 também apresenta o ângulo que foi gerado ao fazer este comando, o qual foi denominado pelo programa de ângulo α .

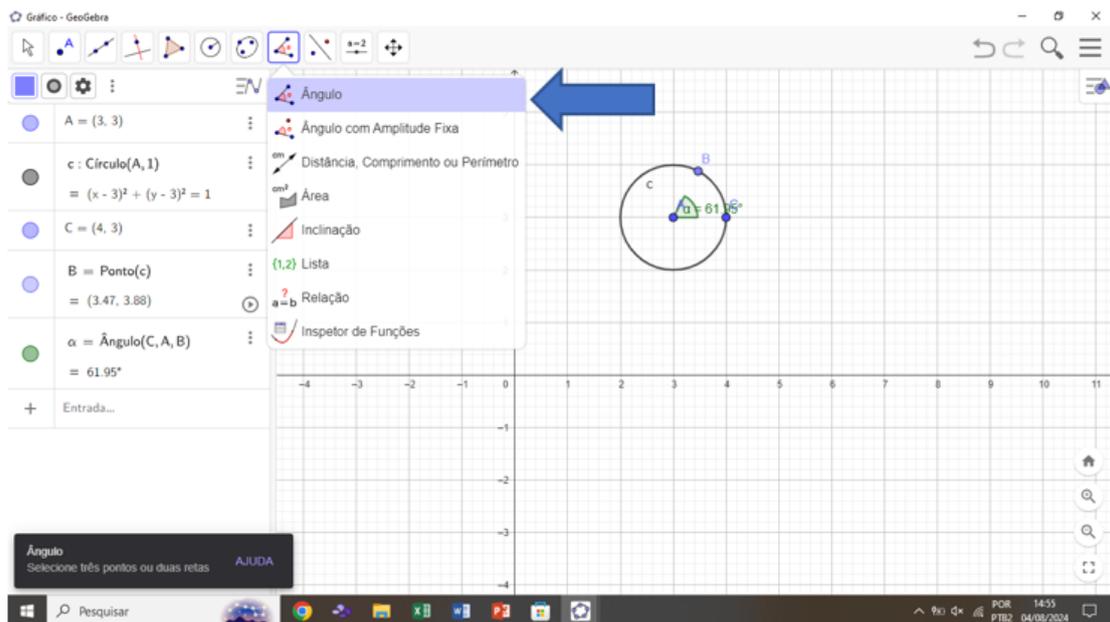


Figura 3.8: Ângulo α gerado pelo *GeoGebra* após execução dos comandos.

Portanto, temos agora um círculo bem definido, com um ponto B que pode se deslocar pela circunferência, mostrando a variação do ângulo α na própria circunferência. Na Janela de visualização, ainda há a configuração das entradas, as quais podem ser modificadas para melhorar a visualização das funções inseridas. Permitindo colocar cores mais vivas, ou até mesmo deixar funções translúcidas, para objetos menos importantes.

A Figura 3.9 apresenta um ângulo no terceiro quadrante, após o deslocamento de B sobre a circunferência. A visualização do ângulo foi ampliada para ficar melhor visualmente.

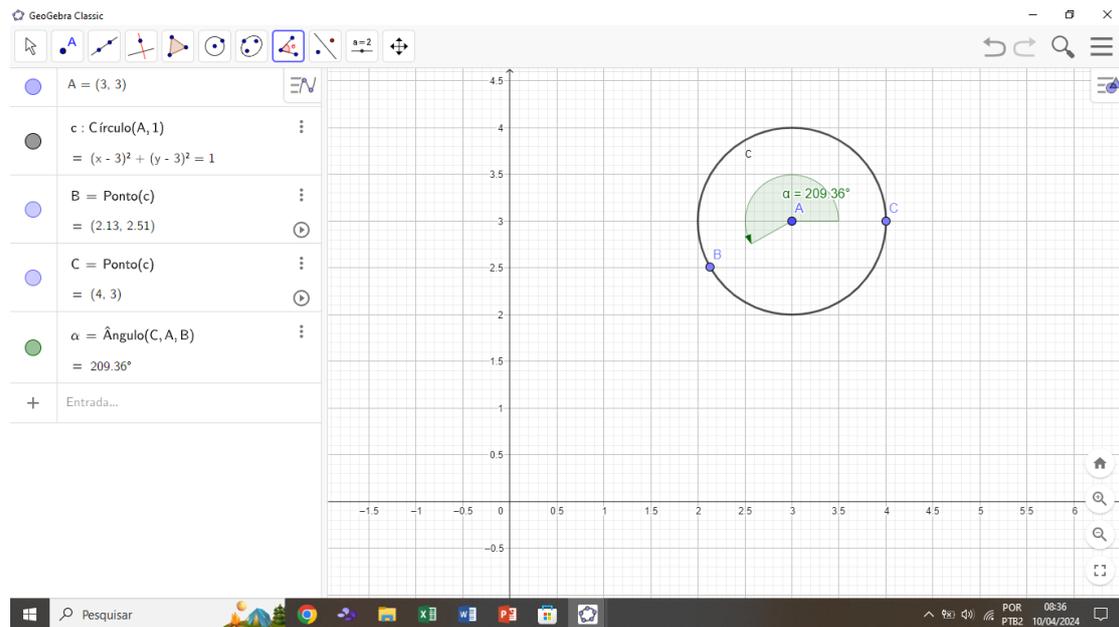


Figura 3.9: Ângulo no 3^o quadrante, após zoom.

6. Vamos agora inserir a função seno, através da ‘Entrada’ da Janela de Álgebra. Para isto, bastará inserir o comando $f(\alpha) = \sin(\alpha)$ e clicar *enter*. O gráfico da função aparecerá automaticamente na janela de visualização.

Na Figura 3.10 está apresentado o gráfico da função seno do ângulo α , após a execução dos comandos.

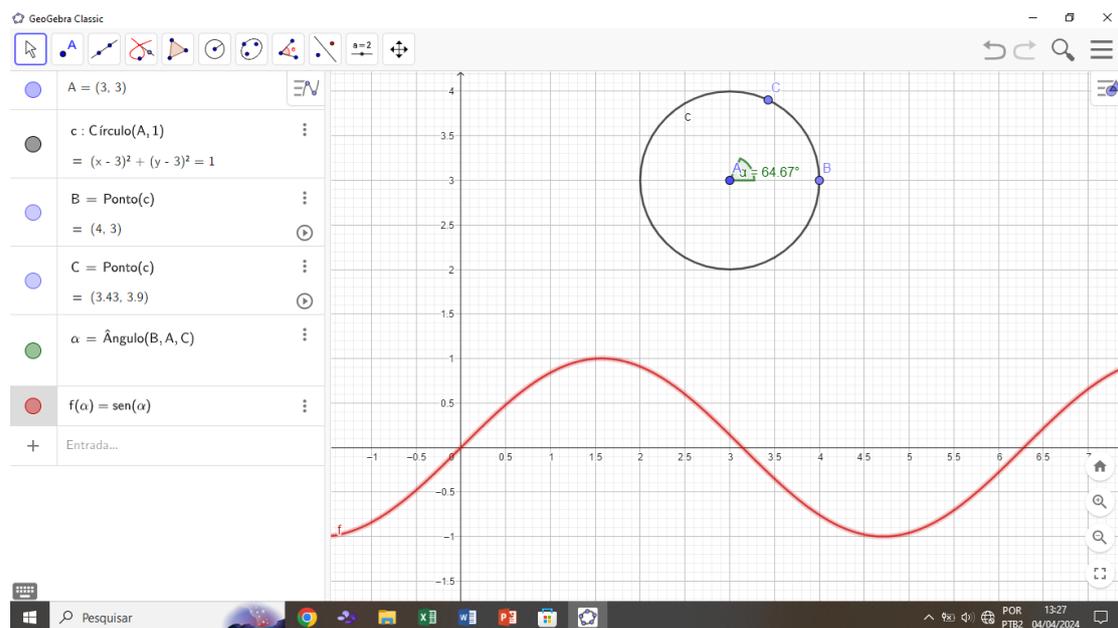


Figura 3.10: Gráfico da função $f(\alpha) = \sin(\alpha)$.

7. Para observar com mais dinamicidade o que acontece com o seno do ângulo α , à medida que B se locomove sobre a circunferência, iremos colocar uma reta auxiliar em função do ângulo α . Chamaremos esta reta de Beta ' β ', e para inseri-la basta colocar o seguinte comando na Entrada da Janela de Álgebra: ' $\beta : x = \alpha$ '. Este comando representará a equação da reta β , para $x = \alpha$ (ângulo representado no círculo Trigonométrico).

Este comando, irá inserir a reta verde (a qual está apresentada na Figura 3.11, paralela ao eixo Y , a qual se deslocará sobre o eixo X , à medida que varia o ângulo α . Ressaltamos que esta reta auxiliar, expressará o ângulo em radianos. O valor do seno será exatamente a projeção no eixo Y do ponto de interseção entre a reta auxiliar β e a função seno (ou qualquer outra que queiramos avaliar).

É importante observar que para inserir uma letra grega no comando de Entrada na Janela de Álgebra, basta apertar e segurar a tecla ' alt ' e apertar

a letra que se queira utilizar do alfabeto grego. Por exemplo:

‘alt’ + ‘A’ retorna α ;

‘alt’ + ‘B’ retorna β ;

‘alt’ + ‘M’ retorna μ , e assim sucessivamente.

Na Figura 3.11 e na Figura 3.12 está apresentado um ângulo no 1° e 4° quadrantes, respectivamente, permitindo a visualização dos respectivos valores do seno graficamente. Nota-se claramente que esta ferramenta permite de maneira rápida perceber que o seno no primeiro quadrante apresenta um valor positivo (acima do eixo X), enquanto que no quarto quadrante apresenta um valor negativo (abaixo do eixo X).

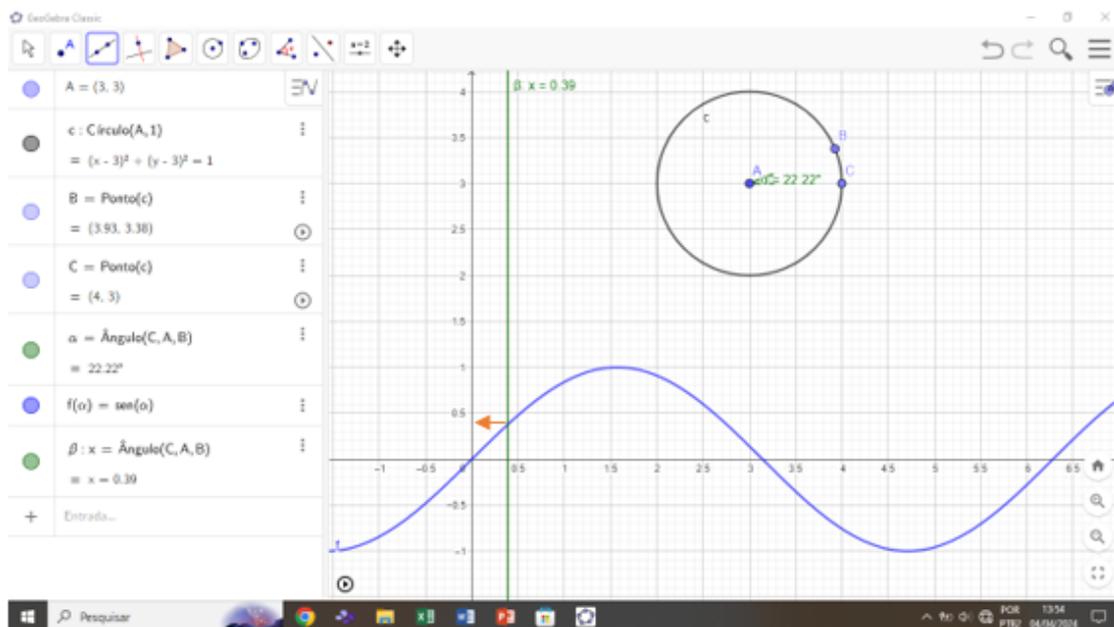


Figura 3.11: Valor de Seno Positivo.

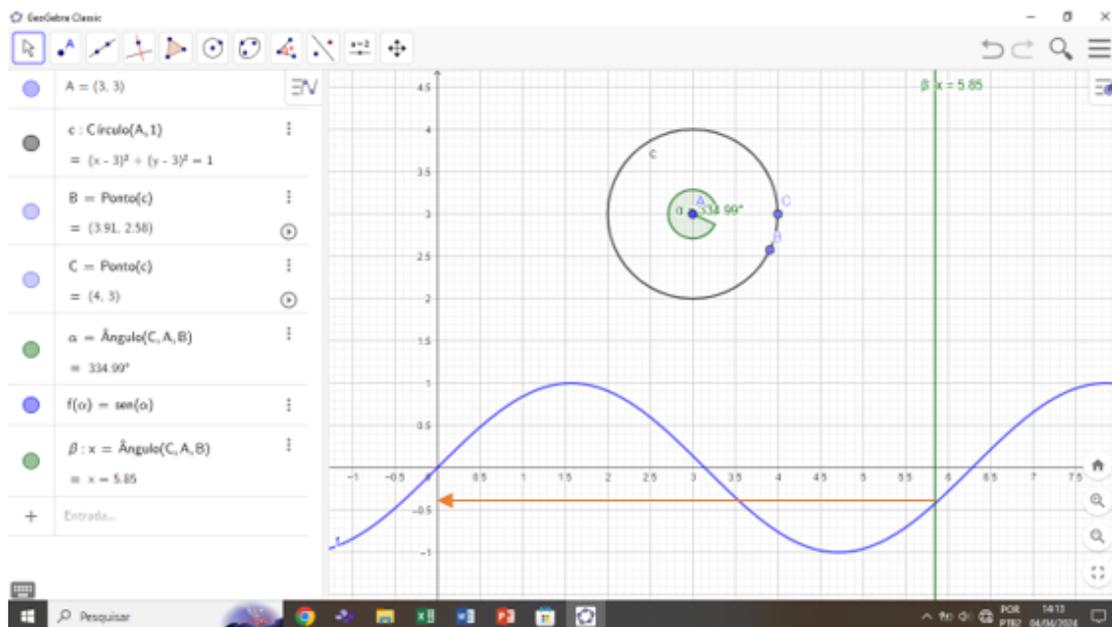


Figura 3.12: Valor de Seno Negativo.

8. Como iremos trabalhar com o Teorema Fundamental da Trigonometria, vamos inserir no programa de maneira análoga a função Cosseno de α através do comando ' $g(\alpha) = \cos(\alpha)$ ' na janela de álgebra e em seguida teclando *enter* para executar o comando. Após a execução destes comandos, conseguiremos observar na janela de visualização os dois gráficos, os quais estão defasados de $\pi/2$ unidades, conseguindo observar os valores de $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ através das respectivas projeções no eixo Y dos pontos de interseção da reta β com as funções $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$. A Figura 3.13 exemplifica esta situação, onde o ângulo α está no 3º quadrante, em que a função seno e a função cosseno apresentam valores negativos.

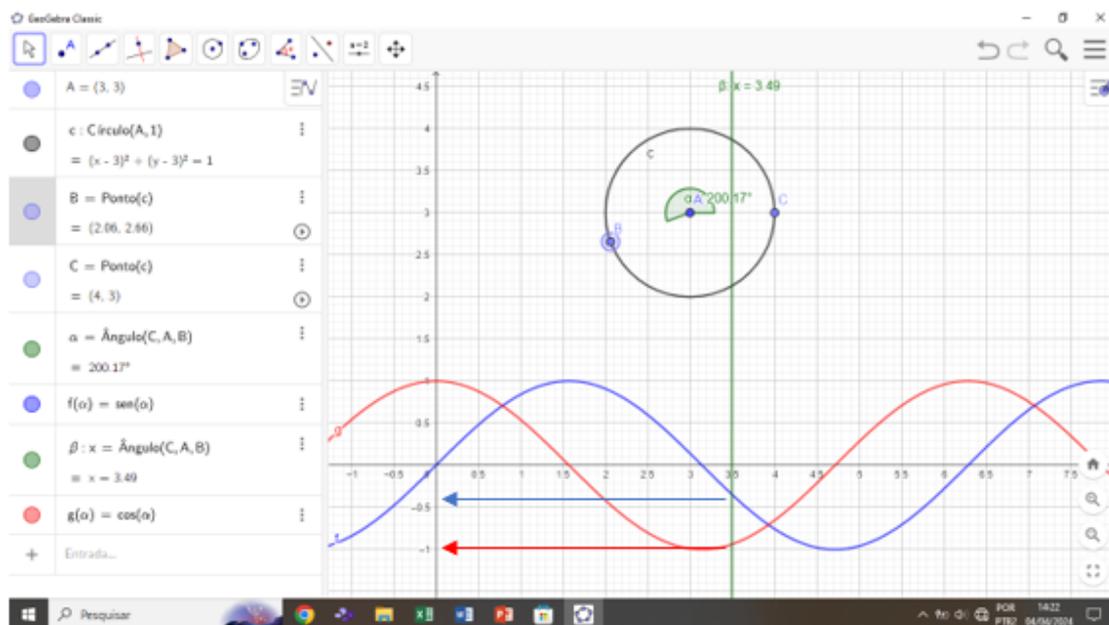


Figura 3.13: Seno e Cosseno de α negativos no 3º quadrante.

9. Para continuar a demonstrar graficamente a Relação Fundamental da Trigonometria, precisamos encontrar as funções: $\sin^2(\alpha)$ e $\cos^2(\alpha)$. Como já temos as funções $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ definidas, as quais foram chamadas de $f(\alpha)$ e $g(\alpha)$ no exemplo anterior. basta inserir na janela de álgebra, no comando de entrada, uma nova função. Por exemplo:

$$h(\alpha) = f(\alpha)^2 \text{ e em seguida teclar enter.}$$

Analogamente:

$$p(\alpha) = g(\alpha)^2 \text{ e em seguida e teclar enter.}$$

Com isso teremos criado as duas novas funções, $p(\alpha)$ e $h(\alpha)$, as quais serão respectivamente as funções $\sin^2(\alpha)$ e $\cos^2(\alpha)$.

Assim conseguiremos visualizar estas funções conforme a Figura 3.14.

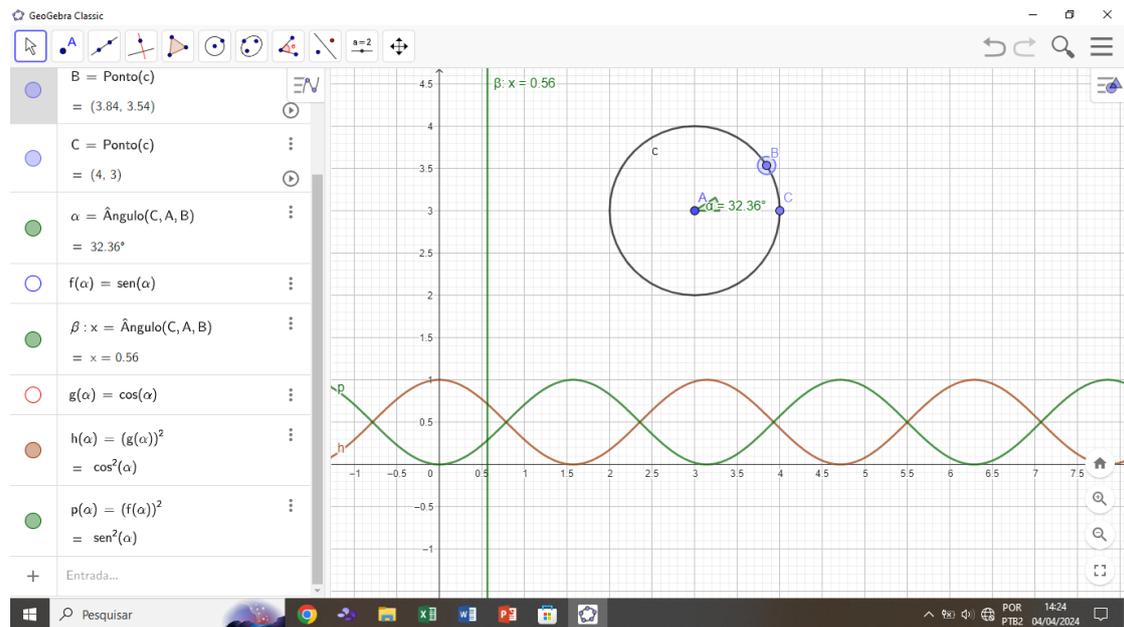


Figura 3.14: Representação das funções $\text{sen}^2(\alpha)$ e $\text{cos}^2(\alpha)$.

10. Para melhorar ainda mais a visualização, vamos inserir um ponto de interseção entre a reta auxiliar β e a função $p(\alpha)$ e entre a reta auxiliar β e a função $h(\alpha)$.

Para este comando, basta clicar em ‘ponto’ na janela de ferramentas, selecionar a opção ‘interseção de 2 objetos’ e em seguida selecionar os objetos aos quais pretende-se obter a interseção. Para nosso caso, selecionaremos reta auxiliar β e a função $p(\alpha)$ e em seguida repetiremos este comando selecionando como pontos de interseção reta auxiliar β e a função $h(\alpha)$. Com isso teremos os pontos de interseção D e E , em que suas projeções no eixo Y serão exatamente os valores das funções $p(\alpha)$ e $h(\alpha)$, que estão representados na Figura 3.15.

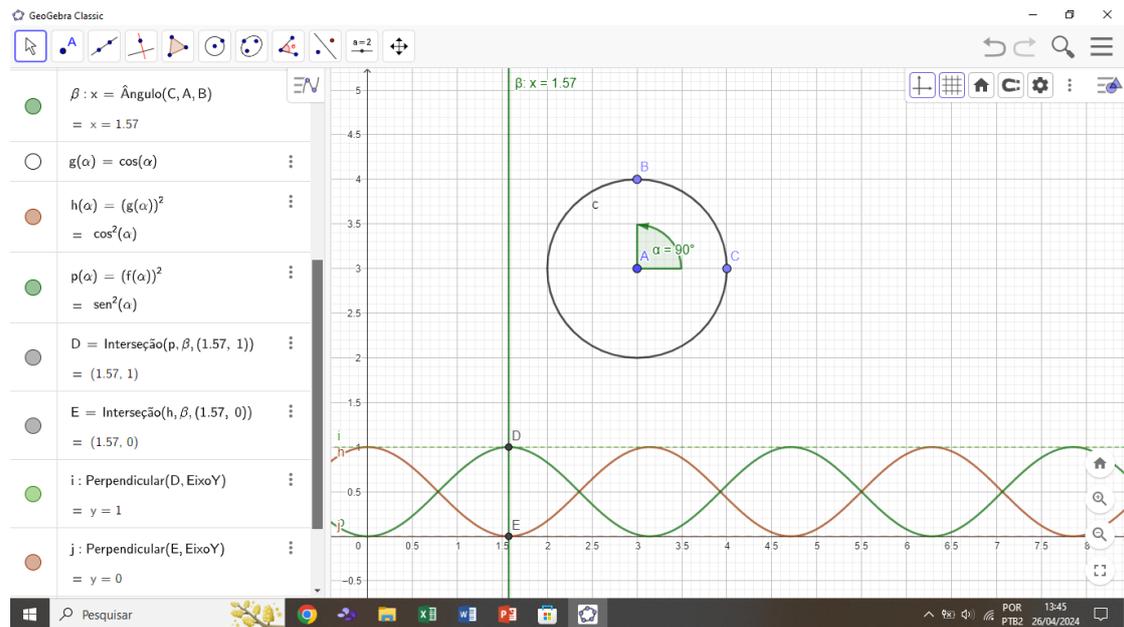


Figura 3.15: Representação das Funções $\sin^2(a)$ e $\cos^2(a)$ com pontos de interseção D e E.

11. Em seguida, vamos inserir uma nova função através da barra de ferramentas, bastando inserir na janela de álgebra em ‘entrada’ a função $r(\alpha) = p(\alpha) + h(\alpha)$, o que nos retornará uma nova função $r(\alpha)$, que é exatamente a Relação Fundamental da Trigonometria. Na Figura 3.16, poderemos visualizá-la como a reta paralela ao eixo x (reta $y = 1$) e destacada na cor azul, mostrando graficamente que a soma $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

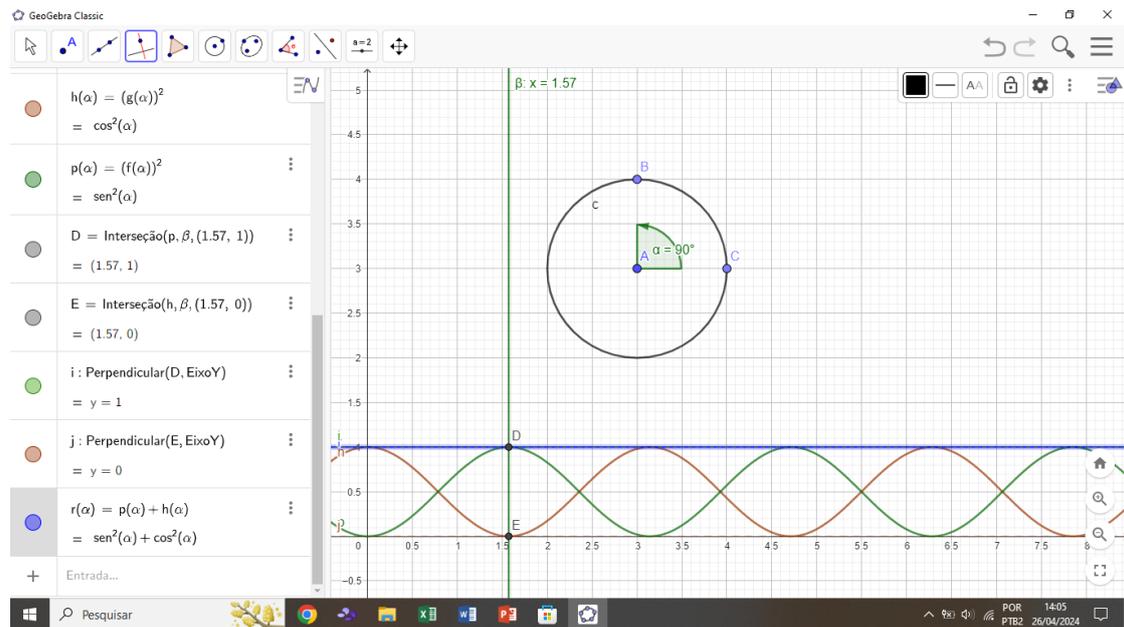


Figura 3.16: Reta $y = 1$, representando graficamente equação 3.6 - Relação Fundamental da Trigonometria.

12. Além disso, para melhorar ainda mais a visualização, vamos inserir mais 2 retas auxiliares, as quais permitirão observar os valores de $\sin^2(\alpha)$ e $\cos^2(\alpha)$ à medida que o ponto B se desloca pela circunferência. Para isto, será necessário clicar em ‘reta’ na barra de ferramentas e selecionar a opção de ‘reta perpendicular’ e em seguida selecionar o ponto de interseção D e o eixo Y . Em seguida repetiremos o procedimento com o ponto C e o eixo Y . A Figura 3.17 apresenta a execução do comando ‘inserir reta perpendicular’.

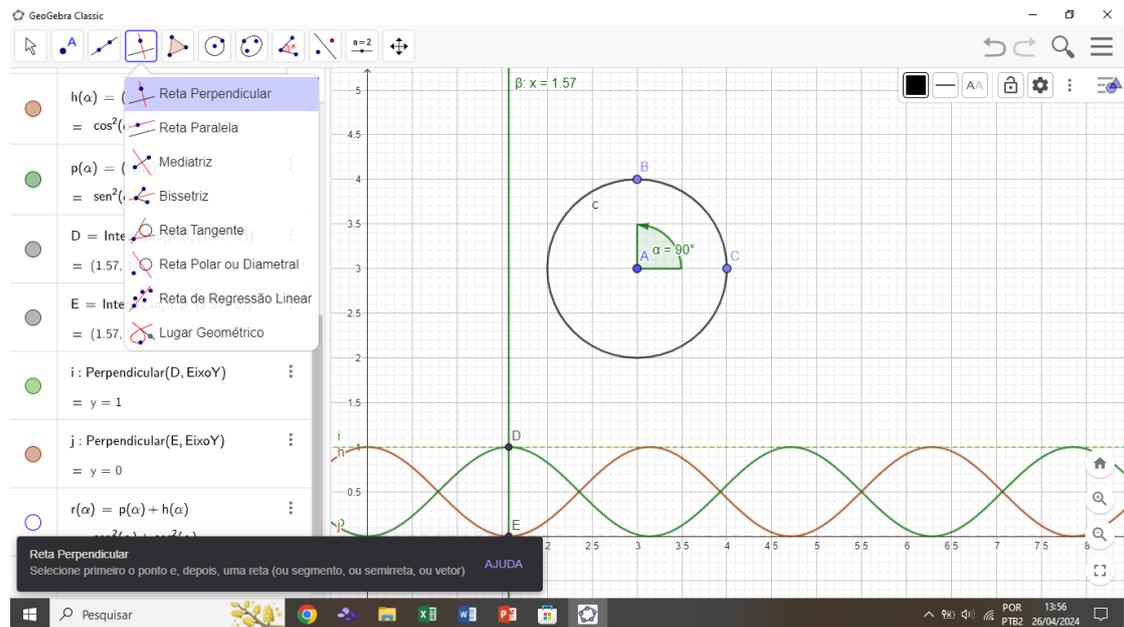


Figura 3.17: Inserindo a reta perpendicular para auxiliar na visualização.

Neste momento, poderemos fazer o ponto B percorrer a circunferência, clicando no ícone *play*, para observar o que acontecerá com cada função. Isso possibilita uma visualização dinâmica instantânea à medida que o ponto B percorre a circunferência e o ângulo varia, o que auxilia na fixação destes conceitos de maneira mais palpável. A Figura 3.18, Figura 3.19 e a Figura 3.20 estão mostrando os deslocamentos de B pela circunferência, permitindo uma visualização instantânea dos valores das funções descritas anteriormente.

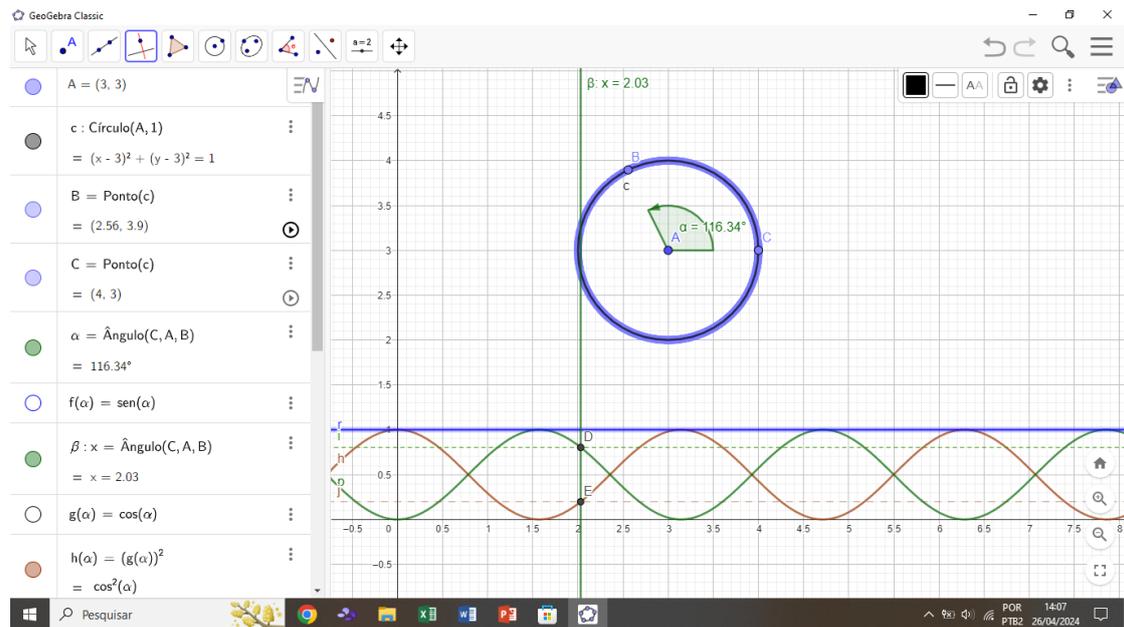


Figura 3.18: Deslocamentos de B pela circunferência no instante 1.

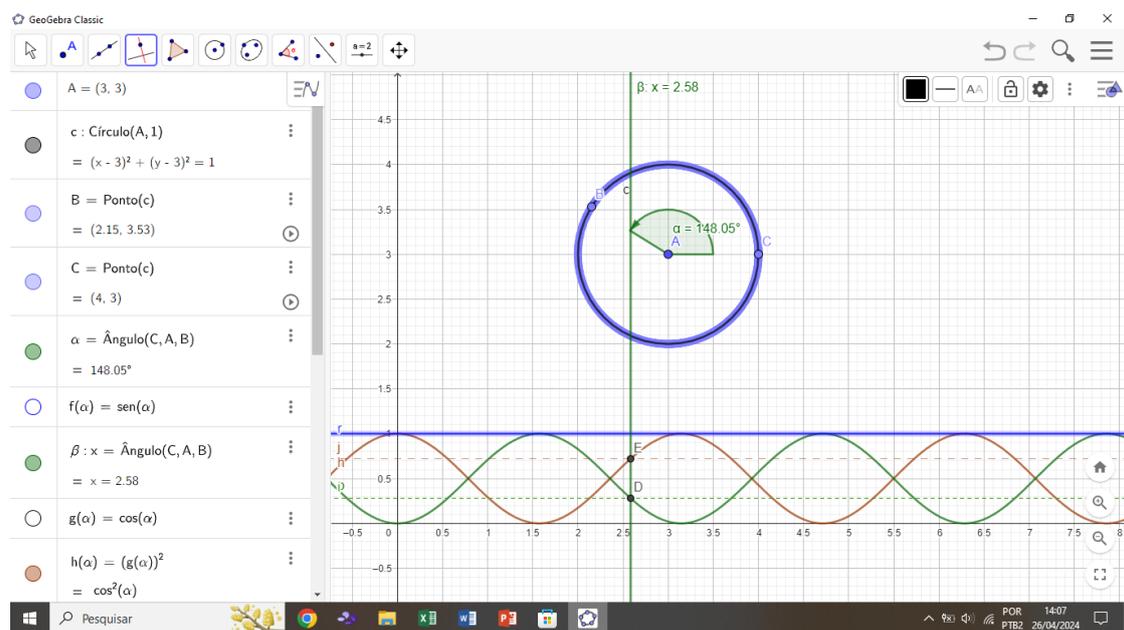


Figura 3.19: Deslocamentos de B pela circunferência no instante 2.

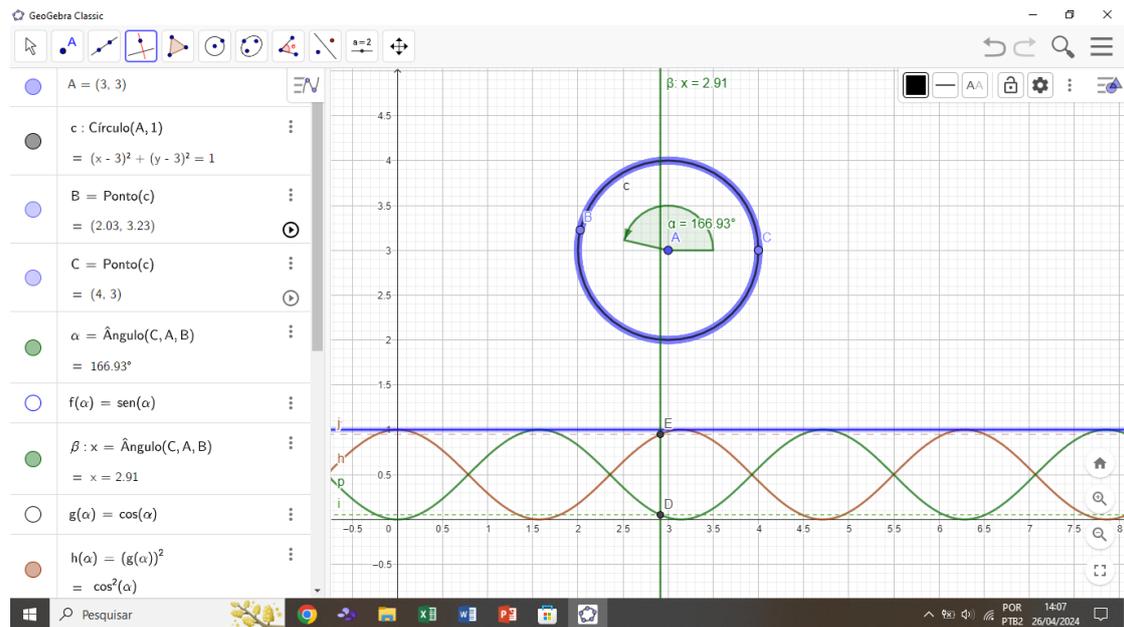


Figura 3.20: Deslocamentos de B pela circunferência no instante 3.

3.3 Procedimento de Construção 2 - Tangente de um Ângulo

Nesta seção iremos abordar o processo de construção da tangente no *GeoGebra*. A tangente de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo agudo de um triângulo retângulo. Essa relação é calculada através da fórmula:

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \quad (3.7)$$

Para um ângulo α qualquer, a tangente também pode ser expressa como a razão entre o seno de α e o cosseno de α , em que cosseno de α necessariamente tem que ser diferente de 0.

É importante observar que, se α é um ângulo do 1º ou do 3º quadrante, a

tangente terá sinal positivo; mas, se α é um ângulo do 2º ou do 4º quadrante, a tangente terá sinal negativo. Essa relação resulta diretamente da regra de sinais entre os sinais do seno e do cosseno para cada α .

Em seguida, faremos um passo a passo de como observar a tangente de um ângulo qualquer, de maneira similar ao que foi feito com a relação fundamental da Trigonometria e com as funções seno e cosseno.

1. Iniciaremos de forma análoga, criando um círculo trigonométrico, conforme descrito nos passos 1 a 5 da seção anterior.
2. Em seguida iremos inserir a função tangente digitando ' $f(\alpha) = \tan(\alpha)$ ' em 'entrada' na janela de álgebra. Automaticamente o gráfico da função tangente poderá ser visualizado na janela de visualização.
3. Em seguida iremos colocar uma reta auxiliar em função do ângulo α . Chamaremos esta reta de β , e para inseri-la basta colocar o seguinte comando na Entrada da Janela de Álgebra: ' $\beta : x = \alpha$ ', onde esta é equação da reta β , para $x = \alpha$ (ângulo representado no círculo Trigonométrico). Este comando, irá inserir a reta β (alaranjada) paralela ao eixo Y , a qual se deslocará sobre o eixo X à medida que o ponto C percorre a circunferência, variando o ângulo α . Ressaltamos que esta reta auxiliar expressará o ângulo em radianos. O valor do seno será exatamente a projeção no eixo Y do ponto de interseção entre a reta auxiliar β e a função seno (ou qualquer outra que queiramos avaliar).

A Figura 3.21 apresenta esta sequência de comandos que acabamos de realizar. Pode-se observar a reta auxiliar β na cor laranja, a função tangente de α em azul e o círculo trigonométrico.

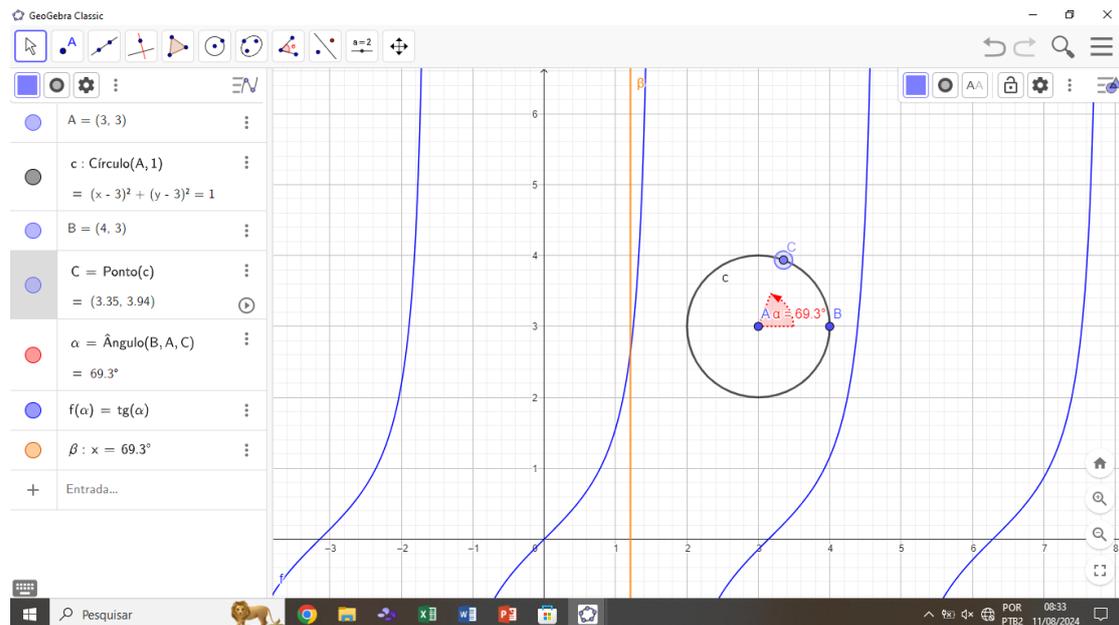


Figura 3.21: Reta auxiliar β interceptando a função $\tan(\alpha)$.

4. Os valores da função tangente serão representados pela projeção em Y da intersecção da reta auxiliar β com a função $\tan(\alpha)$. Logo iremos utilizar o comando intersecção de dois objetos. Para este comando, basta clicar em 'ponto' na janela de ferramentas, selecionar a opção 'intersecção de 2 objetos' e em seguida selecionar os objetos aos quais pretende-se obter a intersecção. Para nosso caso, selecionaremos reta auxiliar β e a função $\tan(\alpha)$. Com isso o programa nos retornará como resultado a intersecção destas duas funções, que foi denominada como ponto D .
5. Para melhorar ainda mais a visualização, iremos traçar outra reta auxiliar, a qual será perpendicular ao eixo Y e passará pelo ponto D . Para este comando basta passar o mouse sobre o ícone 'reta' na janela de ferramentas e em seguida selecionar a opção 'reta perpendicular'. Em seguida basta clicar no ponto e no eixo Y . Com isso temos exatamente a projeção no eixo Y , que é exatamente o valor da tangente de α . Para melhorar a visualização, vamos

inserir o comando ‘interseção de 2 objetos’ novamente. Seleccionaremos a reta auxiliar perpendicular ao eixo Y e o eixo Y . O comando nos retornará o ponto de interseção E . Com isso podemos esconder a reta auxiliar perpendicular ao eixo Y , clicando no ícone ao lado da mesma. Faremos isso apenas para deixar a figura menos carregada.

6. Em seguida passaremos o mouse sobre o ícone ‘reta’ na barra de ferramentas e seleccionaremos a opção ‘segmento’. Para utilizar este comando bastará seleccionar os 2 pontos ao qual queremos obter o segmento. No nosso caso seleccionaremos os pontos D e E . Como resultado, temos a projeção no eixo Y de maneira mais limpa o que permitirá uma melhor visualização dos alunos. Ao realizar todas estas etapas, basta clicar no botão ‘play’ ao lado do ponto C para o mesmo começar a se locomover sobre a circunferência. Assim, poderemos visualizar o que ocorre com a tangente do ângulo à medida que variamos o ângulo α . Na Figura 3.22 e na Figura 3.23 estão apresentados os resultado desta sequência de comandos que foram utilizados. Sendo que a Figura 3.22 mostra um instante no 1^o quadrante e a Figura 3.23 mostra um instante no 2^o quadrante.

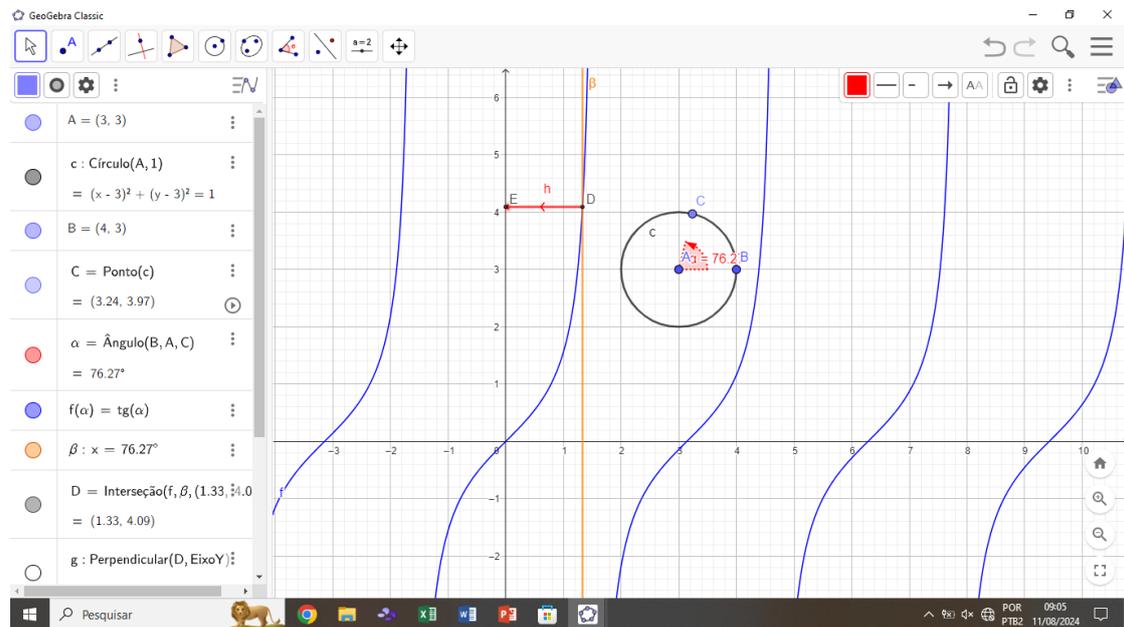


Figura 3.22: Valor da $\tan(\alpha)$ representado graficamente para um instante no 1º quadrante.

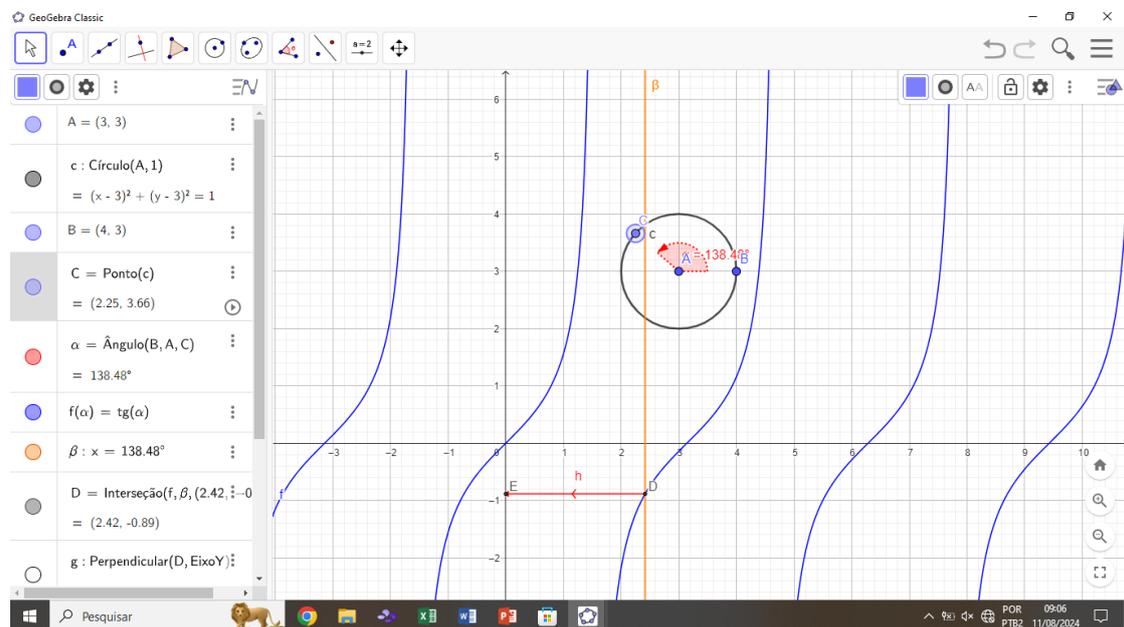


Figura 3.23: Valor da $\tan(\alpha)$ representado graficamente para um instante no 2º quadrante.

3.4 Procedimento de Construção 3 - Representação Geométrica da Tangente de um Ângulo no Círculo Trigonométrico

Nesta seção iremos abordar o processo de construção da representação geométrica tangente no *GeoGebra*. A medida da tangente de um ângulo no ciclo trigonométrico pode ser definida a partir de uma reta tangente ao ciclo trigonométrico, paralela ao eixo Y . Na Figura 3.24 está representada a $\tan(\alpha)$ graficamente.

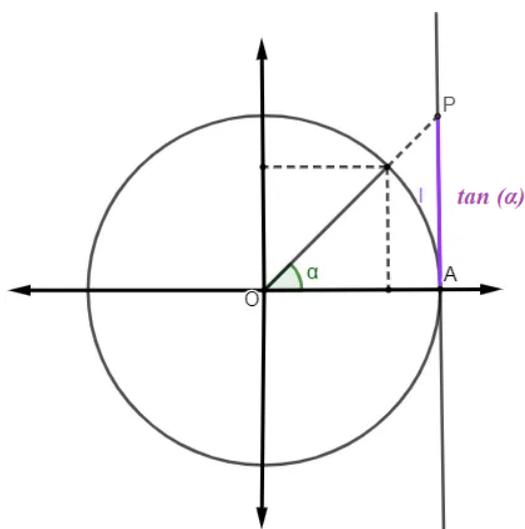


Figura 3.24: $\tan(\alpha)$ representada no Círculo Trigonométrico.

Visualmente, podemos perceber que foi traçada uma reta que liga o ponto do ciclo e a origem do sistema e observamos onde esta reta cruza a reta tangente. A tangente do ângulo será a distância (considerando sinal) deste ponto P que está apresentado na Figura 3.24 até o eixo horizontal (ponto A). Para fazer esta representação e refinar ainda mais o conhecimento sobre tangentes, iremos refazer os passos para construção do Círculo Trigonométrico. Iremos construí-lo agora na origem, para melhorar ainda mais a visualização. Seguindo os passos da

seção anterior e colocando o centro do círculo na origem, teremos a representação apresentada na Figura 3.25.

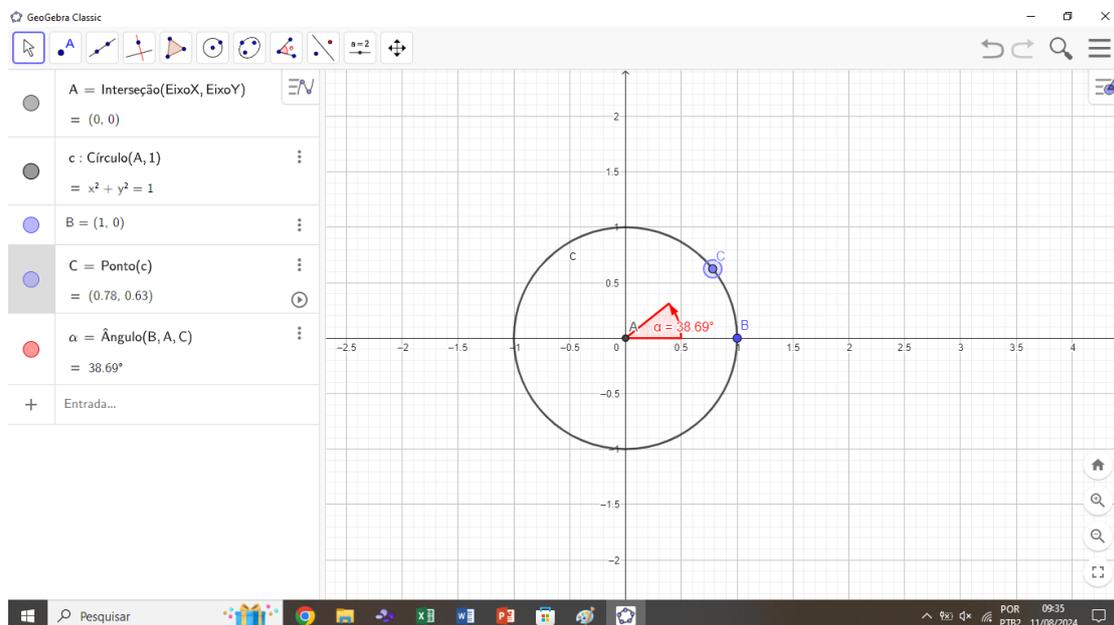


Figura 3.25: Círculo Trigonométrico centralizado na Origem.

Após esta etapa de construção do círculo, que já foi descrita nas seções anteriores, iremos seguir os seguintes passos:

1. Primeiramente iremos inserir uma reta tangente ao círculo passando pelo ponto B . Para isto, basta passar o mouse sobre retas na janela de ferramentas e selecionar a opção 'reta tangente'. Após escolher este comando, basta selecionar o ponto B e clicar no círculo. Assim será criada na janela de visualização a reta tangente ao círculo trigonométrico passando pelo ponto B .
2. Em seguida, selecionaremos a função 'reta', na janela de ferramentas. Para executar esta função, basta selecionar 2 pontos para defini-la. Selecionaremos os pontos A (origem) e C (ponto do círculo que está formando o ângulo α). Após a execução, a reta ' g ' será apresentada na janela de visualização

3. A próxima etapa, consistirá em encontrar o ponto de interseção entre a reta 'g' e a reta tangente 'f'. Para isso deve-se passar o mouse sobre o ícone 'ponto' na janela de ferramentas e selecionar 'interseção entre 2 objetos'. Clicando em seguida na reta 'g' e 'f'. O *software* gerará automaticamente o ponto de interseção E na janela de visualização.
4. O valor da tangente será exatamente o comprimento do segmento EB considerando o sinal. Para visualizá-lo melhor iremos inserir o comando 'segmento' na janela de ferramentas e selecionar os pontos E e B . Assim aparecerá automaticamente na janela de visualização o segmento 'h', que corresponde ao valor da tangente de α .
5. A projeção do ponto E sobre o eixo Y , corresponderá ao valor da tangente. Para melhor visualizá-lo iremos traçar uma reta auxiliar perpendicular ao eixo Y passando por E , através do comando 'reta tangente'. O *software* nos retornará a reta perpendicular 'i'.
6. Em seguida definiremos a interseção da reta auxiliar 'i' com o eixo Y através do comando 'interseção de 2 objetos', selecionando os mesmos. Teremos então o ponto F .
7. Para a visualização não ficar muito sobrecarregada, iremos esconder a reta auxiliar 'i' e iremos inserir o comando 'segmento' selecionando os pontos E e F . O *software* nos retornará o segmento 'j'. É interessante modificar este segmento nas configurações, deixando um pouco mais translúcido ou pontilhado, visto que é apenas a indicação do valor da tangente.
8. Após estes passos, basta colocar o ponto C para se mover, e observar graficamente o valor da tangente. Na Figura 3.26 está representado graficamente o valor da tangente no 2º quadrante e na Figura 3.27 está representado graficamente o valor da tangente no 3º quadrante.

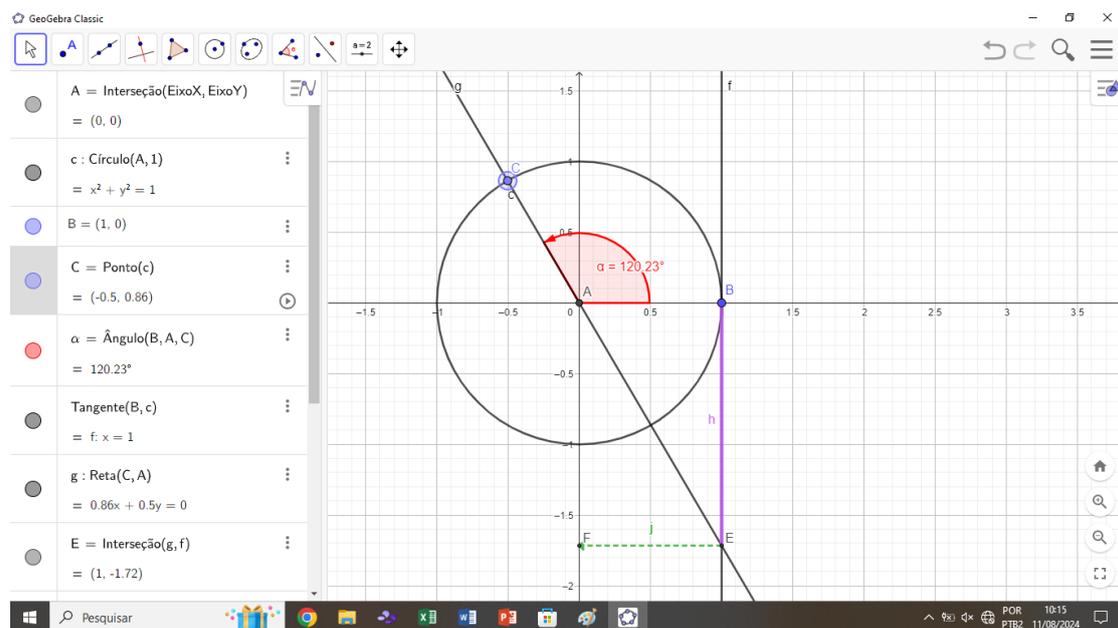


Figura 3.26: Representação gráfica da Tangente no 2º quadrante.

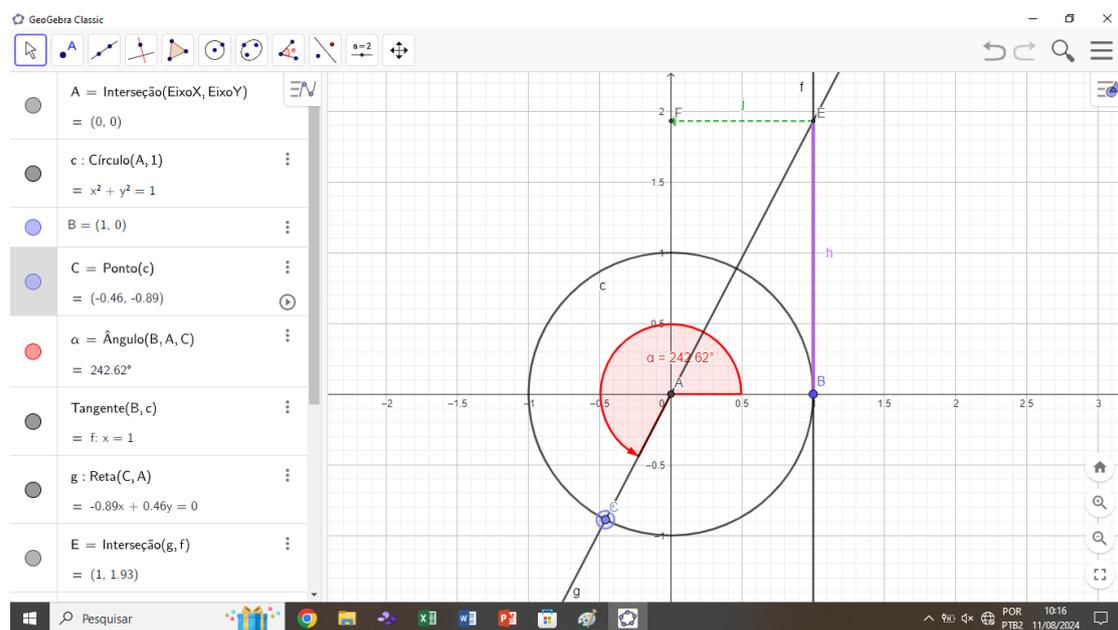


Figura 3.27: Representação gráfica da Tangente no 3º quadrante.

3.5 Procedimento de Construção 4 - Cotangente de um Ângulo

Nesta seção iremos abordar o processo de construção da Cotangente de um ângulo no *GeoGebra*. Conhecida como a razão trigonométrica inversa multiplicativa da tangente (ou seja, $\tan(x) \cdot \cot(x) = 1$), a cotangente está definida para ângulos cuja tangente é diferente de zero. Para encontrarmos a cotangente de um ângulo qualquer, basta calcularmos o inverso do valor de sua tangente.

$$\cot \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} \quad (3.8)$$

Para fazer a demonstração da cotangente de um ângulo qualquer no *GeoGebra*, seguiremos os seguintes passos:

1. Para visualizarmos a cotangente no *GeoGebra*, iremos seguir os mesmos passos iniciais para a construção do círculo trigonométrico, conforme descrito nas seções anteriores.
2. Após desenhar o círculo trigonométrico, iremos inserir a função cotangente através da entrada na janela de álgebra. Para isto, basta inserir o comando ' $f(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$ ', que é a função cotangente, a qual aparecerá automaticamente na janela de visualização.
3. Para ver com mais dinamismo e interação o que está ocorrendo à medida que o ângulo varia, basta inserirmos uma reta auxiliar β em função do ângulo, como no exemplo capítulo anterior. Para nosso exemplo, digitaremos na janela de álgebra em 'entrada' as teclas 'alt' + 'b' para chamar nossa reta de β . Em seguida digitamos ':' e digitamos a equação da reta. Para nosso caso, será 'x = alt + a' (este comando retornará o ângulo α). Portanto, teremos a

reta β definida, a qual se deslocará ao longo de x , mostrando o que ocorre com os valores da cotangente de α à medida que o ângulo varia na circunferência.

4. Para melhorar ainda mais a visualização, podemos adicionar um ponto de interseção entre a função cotangente e a reta auxiliar β . Para executar esta função, basta clicar no ícone ‘interseção entre dois objetos’, presente na barra de ferramentas e selecionar respectivas funções. Com isso o programa nos retornará o ponto de interseção D .
5. Criaremos uma nova reta auxiliar, para mostrar a interseção no eixo Y . Para isso, basta criarmos uma nova reta na função ‘reta’ na barra de ferramentas. Selecionaremos a opção ‘reta perpendicular’, e selecionaremos o ponto D e o eixo Y . Após esta etapa poderemos criar o ponto de interseção E , através do comando ‘interseção entre dois objetos’, na barra de ferramentas, selecionando a reta auxiliar ‘g’ e o eixo Y .
6. Para melhorar o aspecto da visualização, iremos esconder a reta ‘g’, desmarcando o círculo ao lado da reta (na janela de visualização) e iremos inserir um segmento de reta do ponto D ao ponto E , clicando na barra de ferramentas em ‘segmento de reta’ e selecionando a opção ‘2 pontos’, e em seguida selecionaremos os pontos D e E . Após este procedimento, a visualização na janela de visualização estará limpa e conseguiremos observar claramente o que ocorre com a função cotangente de α à medida que o ângulo varia no círculo trigonométrico. O círculo trigonométrico é dividido em quatro quadrantes, cada um com características específicas em relação aos sinais das funções trigonométricas. No **primeiro quadrante** (0° a 90° ou 0 a $\frac{\pi}{2}$ radianos), tanto o seno quanto o cosseno são positivos, tornando todas as funções trigonométricas também positivas. No **segundo quadrante** (90° a 180° ou $\frac{\pi}{2}$ a π radianos), o seno continua positivo, mas o cosseno se torna negativo,

resultando em uma tangente negativa. No **terceiro quadrante** (180° a 270° ou π a $\frac{3\pi}{2}$ radianos), tanto o seno quanto o cosseno são negativos, fazendo com que a tangente seja positiva. Já no **quarto quadrante** (270° a 360° ou $\frac{3\pi}{2}$ a 2π radianos), o cosseno é positivo e o seno negativo, o que torna a tangente negativa. Nas Figuras 3.28, 3.29, 3.30 e 3.31 estão as representações para os 1° , 2° , 3° e 4° quadrantes, onde conseguimos observar claramente os sinais da cotangente de um ângulo. O sinal da cotangente é positivo para os quadrantes ímpares (1° e 3°) e negativo para os quadrantes pares (2° e 4°).

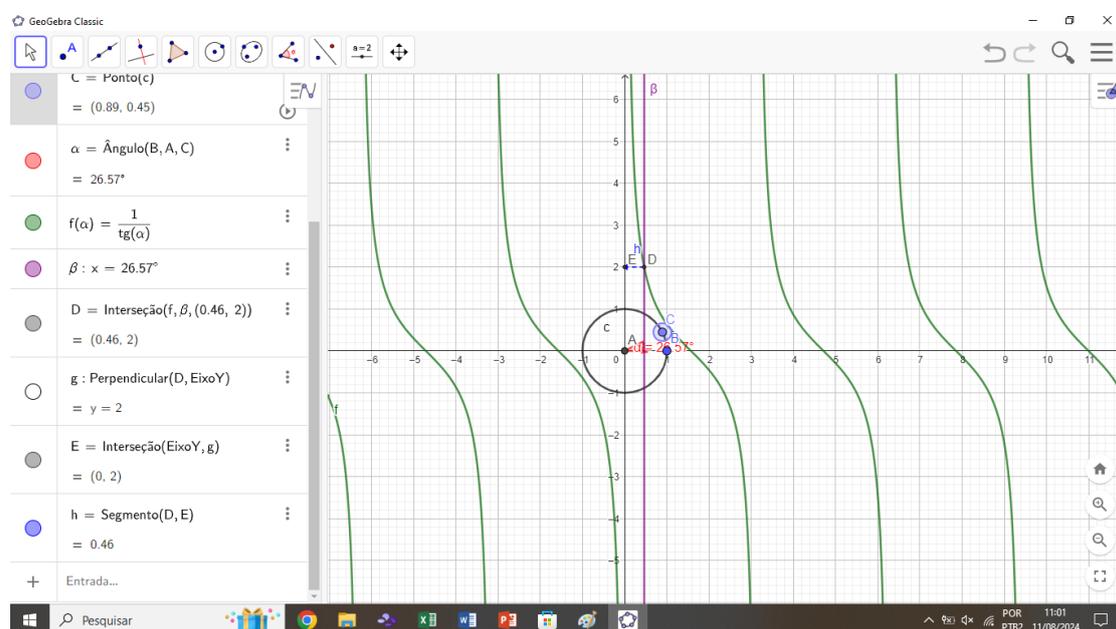


Figura 3.28: Representação da Cotangente no 1° quadrante.

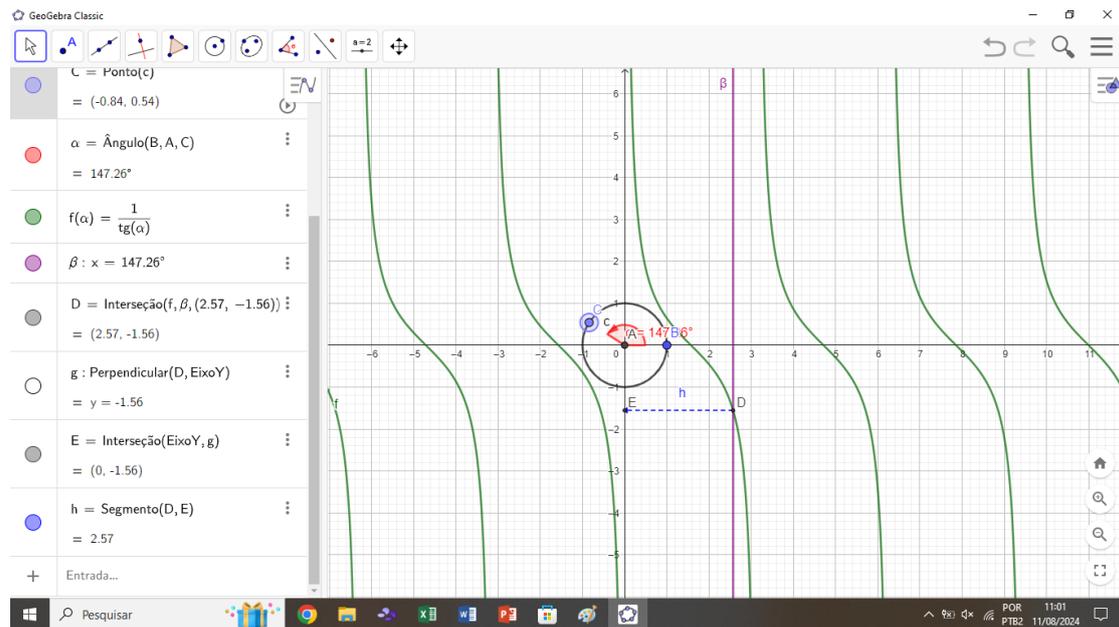


Figura 3.29: Representação da Cotangente no 2º quadrante.

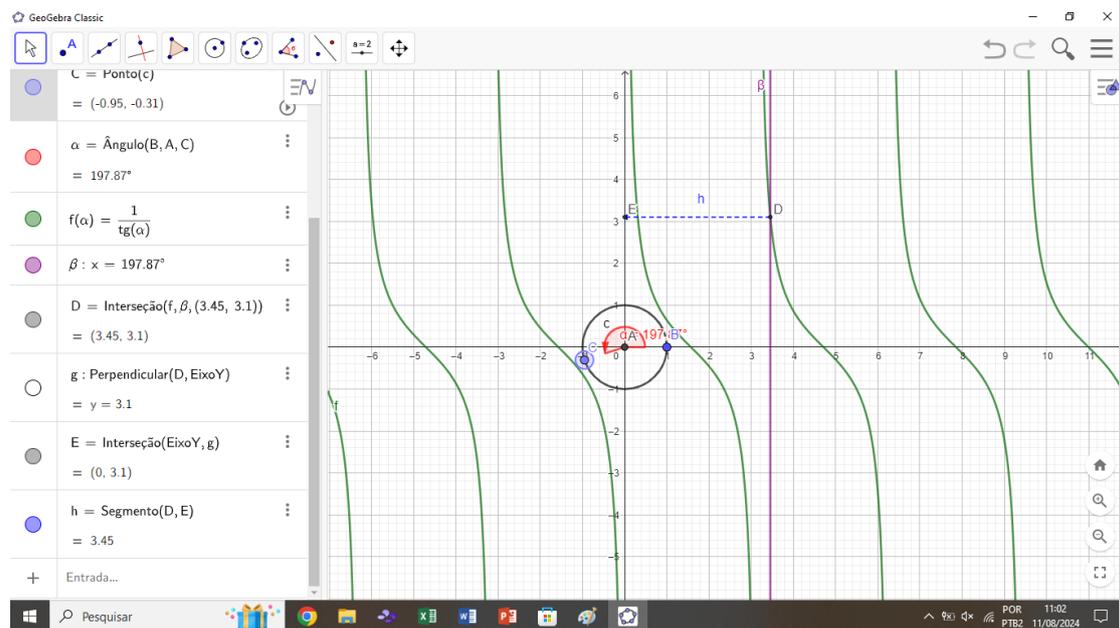


Figura 3.30: Representação da Cotangente no 3º quadrante.

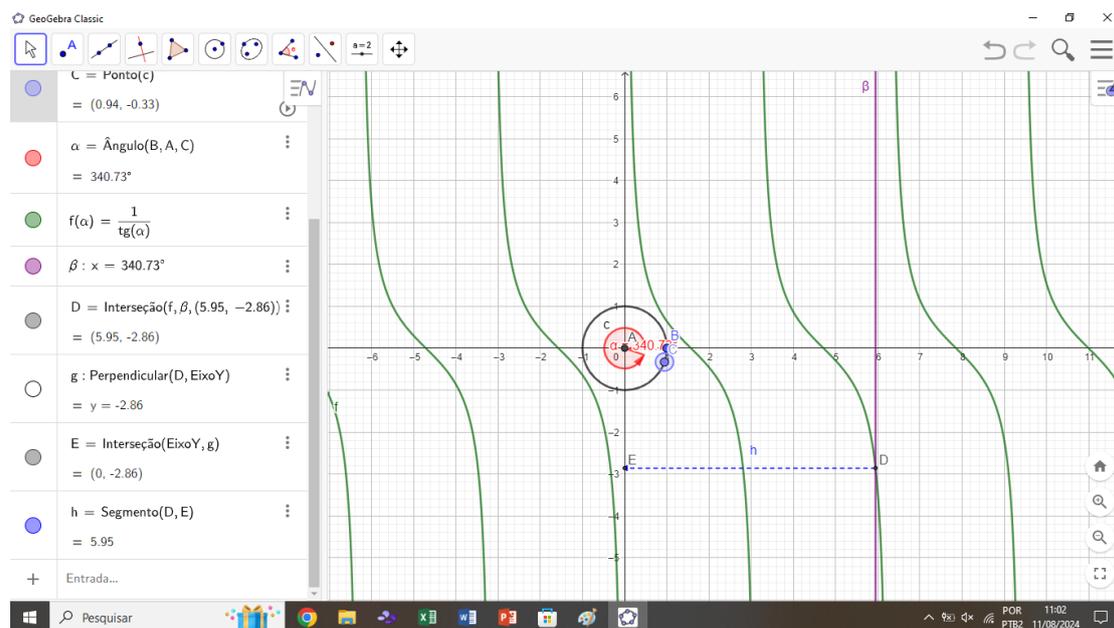


Figura 3.31: Representação da Cotangente no 4^o quadrante.

3.6 Procedimento de Construção 5 - Representação Geométrica da Cotangente de um ângulo no Círculo Trigonométrico.

Também podemos interpretar geometricamente a cotangente no círculo trigonométrico. Na Figura 3.32 está representada sua interpretação geométrica.

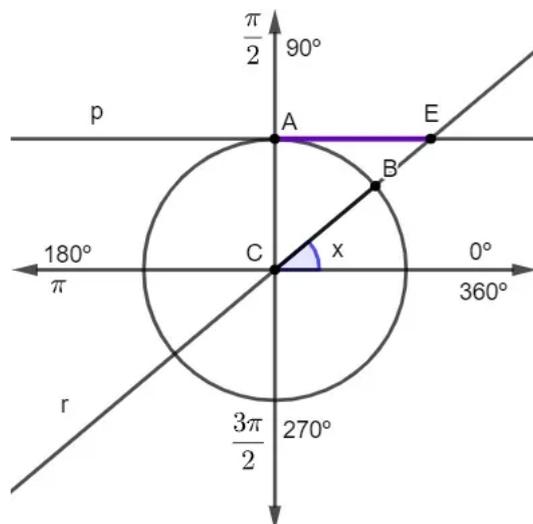


Figura 3.32: Interpretação Geométrica da Cotangente no Círculo Trigonométrico.

Para fazer esta representação, observamos que foi traçada uma reta p , paralela ao eixo horizontal no ponto A , tangente ao círculo trigonométrico. Depois, ao construir o ângulo x , traçou-se a reta r , que passa pelo centro C e pelo ponto B , para encontrar o ponto E , que é o ponto de encontro entre as retas p e r .

O segmento AE é exatamente a cotangente do ângulo x (este valor pode ser facilmente deduzido através das semelhanças de triângulos encontrados nesta representação).

Para visualizar esta representação geometricamente no *GeoGebra*, seguiremos os seguintes passos:

1. Iremos iniciar construindo o círculo trigonométrico conforme descrito nos passos anteriores, conforme Figura 3.33.

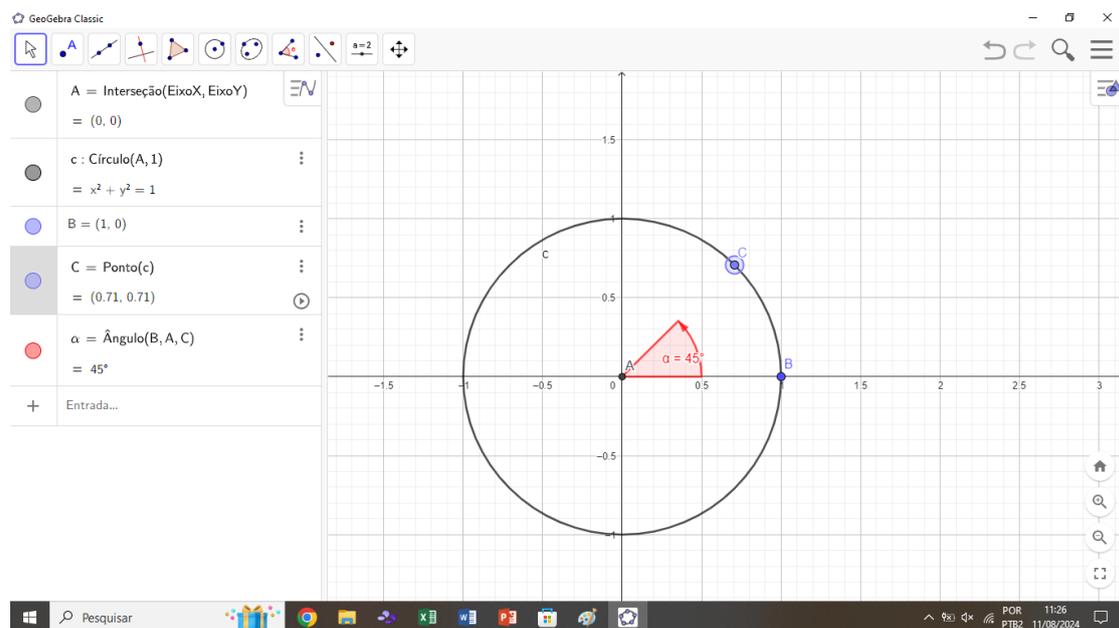


Figura 3.33: Círculo trigonométrico com centro na Origem (A), para representar a Cotangente graficamente.

2. Em seguida criaremos o ponto $D(0,1)$, através do ícone ponto da barra de ferramentas, o qual será uma interseção entre o eixo Y e o círculo trigonométrico.
3. O próximo passo será criar uma reta tangente ao ponto D e perpendicular ao eixo Y . Pode-se fazer isto utilizando o comando ‘reta perpendicular’, na barra de ferramentas e selecionando o ponto D e o eixo Y , criando assim uma reta f .
4. Traçaremos agora uma reta que passará pelos pontos A e C , utilizando o comando ‘reta’ da barra de ferramentas, bastando selecionar estes 2 pontos. Esta reta interceptará a reta f .
5. Utilizaremos o comando ‘interseção de 2 objetos’, na barra de ferramentas, e selecionaremos as retas f e g , encontrando assim o ponto de interseção E .

6. Após estas etapas, utilizaremos o comando ‘segmento’, e selecionaremos os pontos D e E , o que nos retornará o segmento ‘ h ’. Este segmento será exatamente o valor (tamanho) da cotangente. Ao variar o ponto C sobre a circunferência, podemos observar a cotangente aumentando ou diminuindo de tamanho. A Figura 3.34 apresenta a cotangente (segmento h) para um ângulo no 2º quadrante, enquanto que a Figura 3.35 apresenta a cotangente (segmento h) para um ângulo no 3º quadrante.

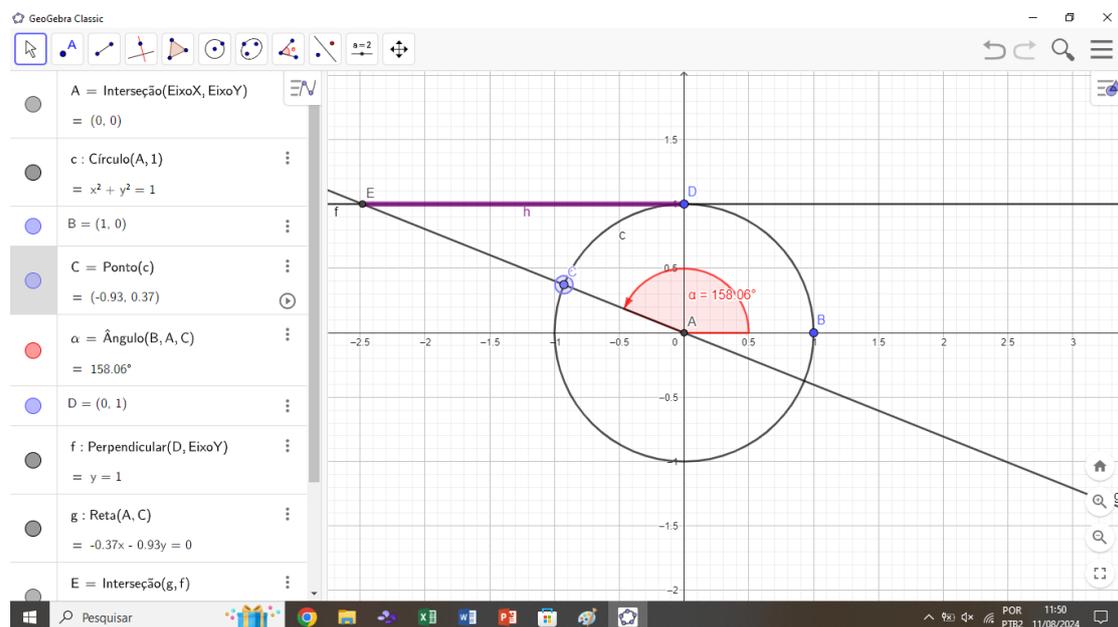


Figura 3.34: Cotangente (segmento h) para um ângulo no 2º quadrante

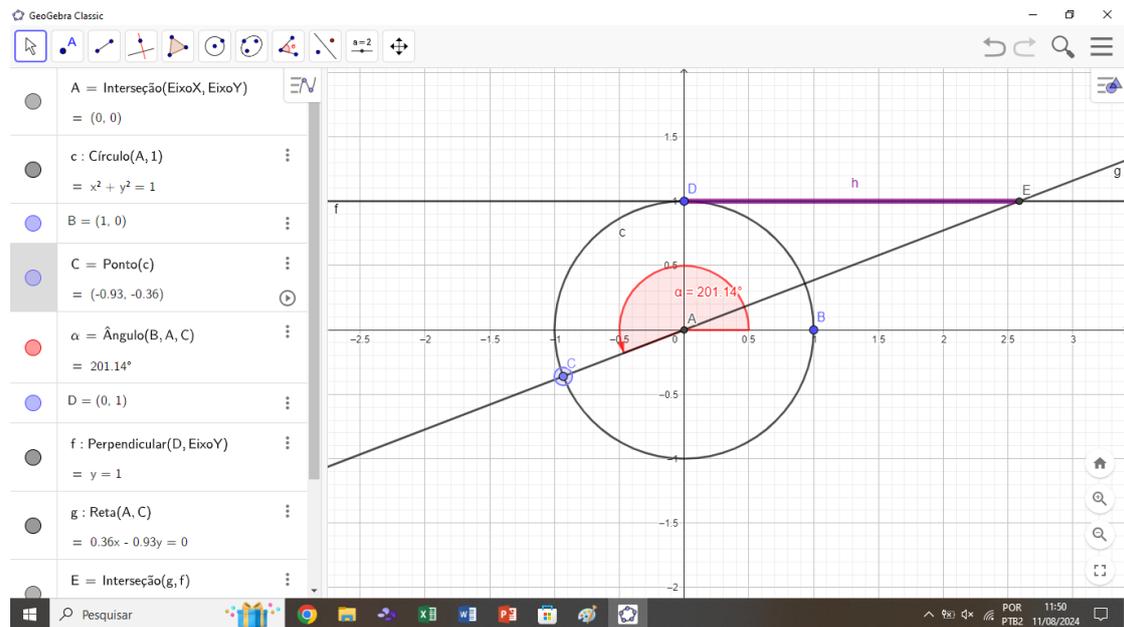


Figura 3.35: Cotangente (segmento h) para um ângulo no 3º quadrante.

3.7 Procedimento de Construção 6 - Secante de um ângulo.

A secante é conhecida como a razão trigonométrica inversa multiplicativa do cosseno (ou seja, $\cos(x) \cdot \sec(x) = 1$), estando definida para ângulos cujo cosseno é diferente de zero. Para encontrarmos a secante de um ângulo qualquer, basta calcularmos o inverso do valor de seu cosseno. Logo, temos:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (3.9)$$

Para trabalhar com a função secante no *GeoGebra*, vamos seguir os mesmos passos usados para demonstração da relação fundamental da Trigonometria. Primeiramente vamos construir o círculo trigonométrico (passos 1 a 5 do seção anterior), que terá uma representação como na Figura 3.36.

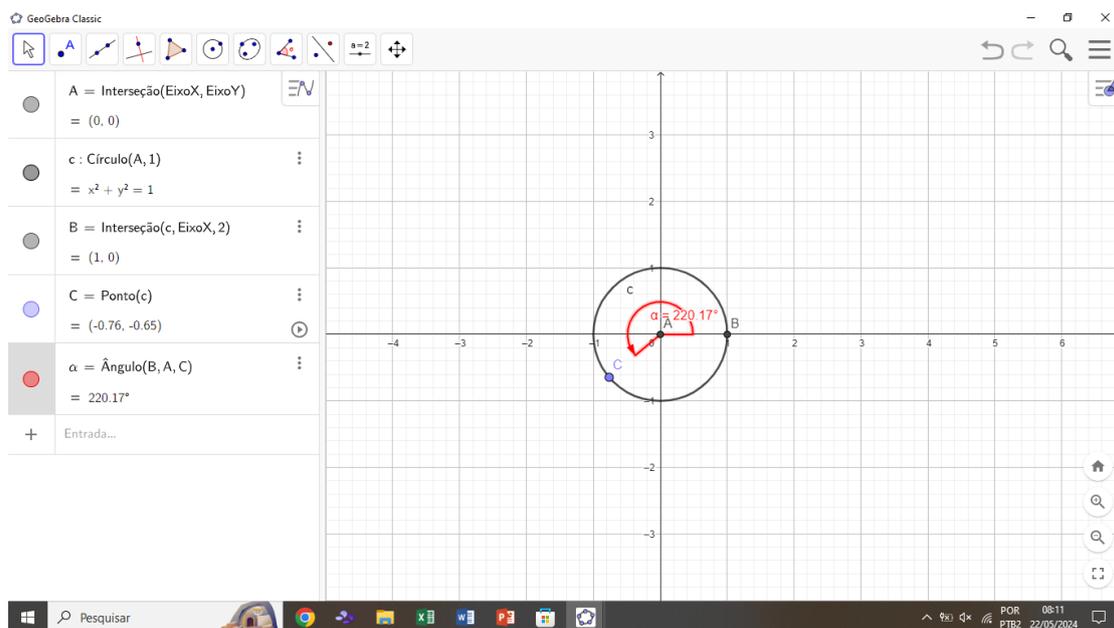


Figura 3.36: Círculo Trigonométrico para representar a função Secante.

Conforme observado na figura acima, iremos inserir a função secante seguindo o passo a passo a seguir:

1. Em ‘entrada’ na janela de álgebra, basta inserir o comando $f(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$, que é a função secante, a qual aparecerá automaticamente na janela de visualização. Obs: Para inserir a letra grega α no *GeoGebra*, basta apertar a tecla ‘Alt + A’.
2. Para visualizar com mais dinamismo e interação o que está ocorrendo à medida que o ângulo varia, basta inserirmos uma reta auxiliar em função do ângulo, como no exemplo da seção anterior. Para nosso exemplo, digitaremos ‘Alt + B’ para chamar nossa reta de β . Em seguida, digitamos ‘:’ e a equação da reta. Para nosso caso, será ‘x = Alt + A’ (este comando retornará o ângulo α). Portanto, teremos a reta β definida, a qual se deslocará ao longo do eixo X, mostrando o que ocorre com os valores da secante de α à medida que o ângulo varia na circunferência.

3. Para melhorar ainda mais a visualização, podemos adicionar um ponto de interseção entre a função secante e a reta auxiliar β . Para executar esta função, basta clicar no ícone ‘interseção entre dois objetos’, presente na barra de ferramentas. Com isso, o programa nos retornará o ponto de interseção D .
4. Criaremos uma nova reta auxiliar para mostrar a interseção no eixo Y . Para isso, basta criar uma nova reta na função ‘reta’ na barra de ferramentas. Selecionaremos a opção ‘reta perpendicular’ e selecionaremos o ponto D e o eixo Y . Após esta etapa, poderemos criar o ponto de interseção E através do comando ‘interseção entre dois objetos’ na barra de ferramentas, selecionando a reta auxiliar g e o eixo Y .
5. Para melhorar o aspecto da visualização, iremos esconder a reta g , desmarcando o círculo ao lado da reta (na janela de visualização) e inseriremos um segmento de reta do ponto D ao ponto E . Para isso, clicamos na barra de ferramentas em ‘segmento de reta’, selecionamos a opção ‘2 pontos’ e, em seguida, escolhemos os pontos D e E . Após este procedimento, a visualização na janela de visualização estará limpa, e conseguiremos observar claramente o que ocorre à medida que o ângulo varia no círculo trigonométrico, como está representado na Figura 3.37.

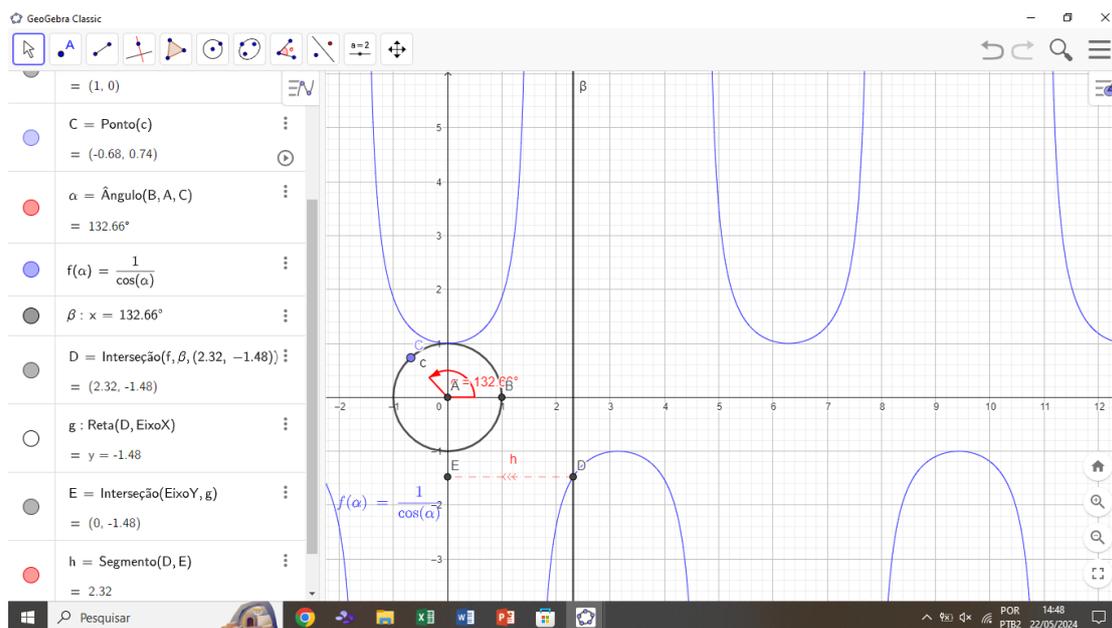


Figura 3.37: Função Secante de um ângulo qualquer no 2º quadrante.

3.8 Procedimento de Construção 7 - Representação Geométrica da Secante de um ângulo no Círculo Trigonométrico.

Além de conseguir visualizar o que ocorre com os valores da função secante à medida que o ângulo varia no círculo trigonométrico, também podemos fazer a interpretação geométrica da secante no círculo trigonométrico. Na Figura 3.38, está representada a função secante de um ângulo qualquer.

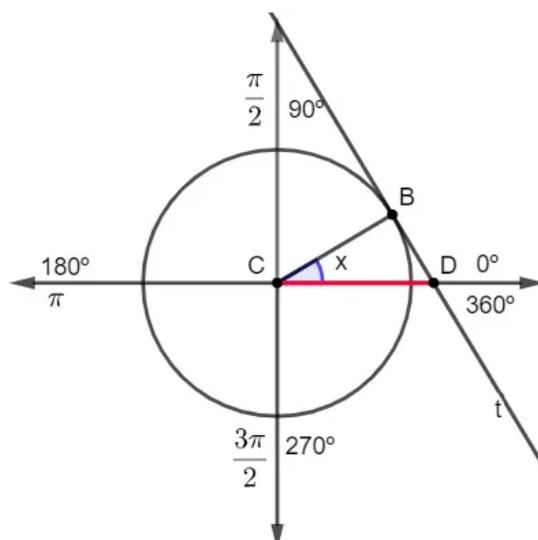


Figura 3.38: Representação Geométrica da Secante.

Observa-se na Figura 3.38, que para obter a secante geometricamente de um ângulo qualquer (x), precisa-se traçar a reta t , tangente ao ponto B . A secante de x será o seguimento que liga o centro até o ponto em que a reta t intercepta o eixo horizontal, representado por CD na Figura 3.38. Iremos mostrar o passo a passo de como desenhar geometricamente a secante e o que acontece graficamente com seus valores à medida que alteramos o ângulo no círculo trigonométrico. Com o desenho do círculo trigonométrico já construído, basta seguir os seguintes passos:

1. Clicar em barra de ferramentas, no ícone 'reta' e selecionar 'retas tangentes'. Após esta seleção, selecionar o ponto por onde passará a reta tangente (ponto C) e em seguida selecionar o círculo trigonométrico (círculo c) ou qualquer outra função em que se deseja traçar a reta tangente. Automaticamente será gerada a reta tangente ao nosso círculo, conforme Figura 3.39.

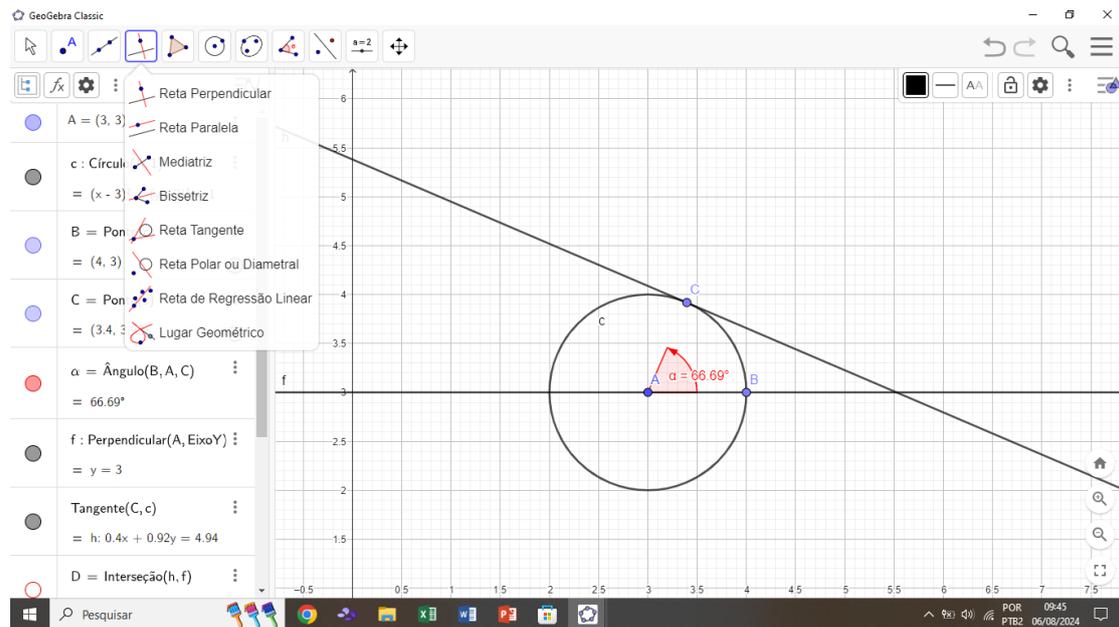


Figura 3.39: Representação da inserção de uma reta Tangente.

2. O segundo passo será fazer a interseção entre a reta tangente e o eixo x . Para isso, basta passar o *mouse* em barra de ferramentas no comando ‘ponto’ e seleccionar ‘interseção entre 2 objetos’. Em seguida seleccionar a reta tangente e o eixo x . O ponto D , será criado automaticamente conforme mostrado na Figura 3.40.

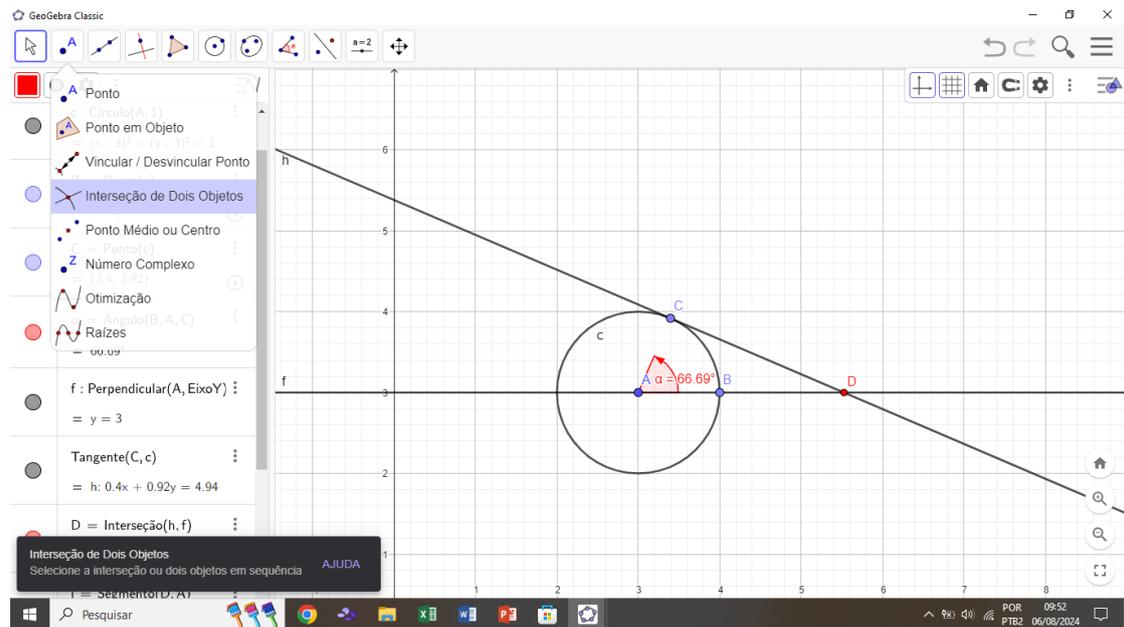


Figura 3.40: Representação da interseção entre 2 objetos.

3. Como sabemos que o segmento \overline{AD} será nossa secante, basta passar o mouse na barra de ferramentas e selecionar a opção 'segmento', para em seguida selecionar os pontos A e D. A Figura 3.41 apresenta a execução destas etapas.

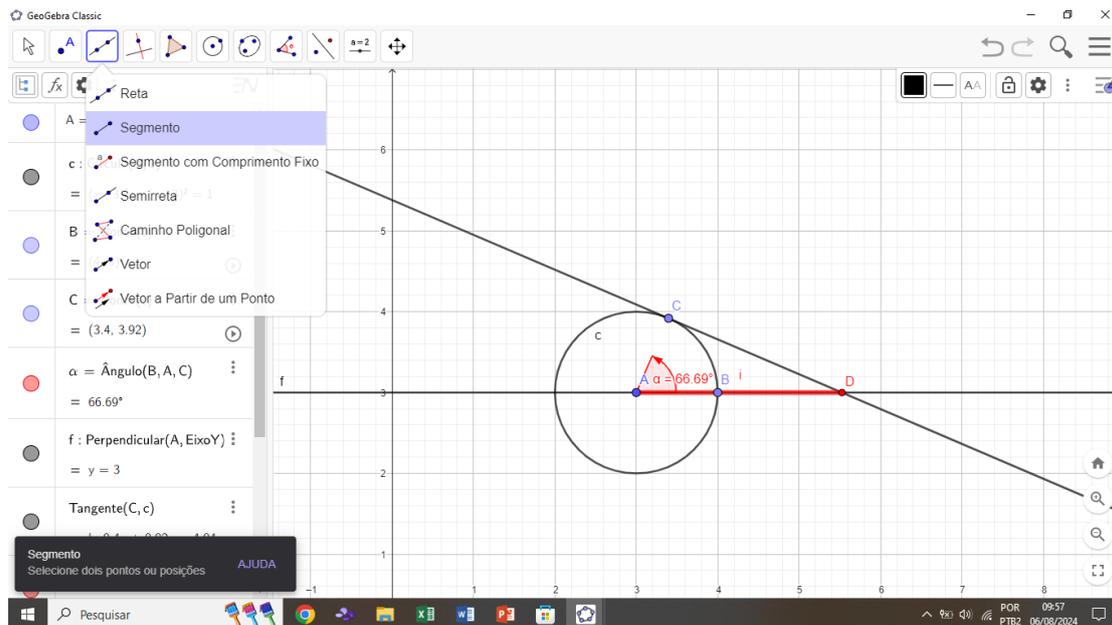


Figura 3.41: Representação do segmento \overline{AD} .

4. Para verificar o comportamento deste segmento à medida que variamos o ângulo, basta clicar na função *play*, ao lado do ponto C . Este ponto percorrerá a circunferência e poderemos observar geometricamente o comportamento da função secante. Na Figura 3.42 e na Figura 3.43 estão representados os segmentos \overline{AD} para o 2º e 1º quadrante, respectivamente. Nota-se também que há um ícone acima do botão *play*, que serve para aumentar ou diminuir a velocidade com que o ponto C percorre a circunferência. Essa função é importante, pois ao diminuir a velocidade consegue-se captar mais detalhes, principalmente para alunos que nunca tiveram acesso a este conteúdo anteriormente.

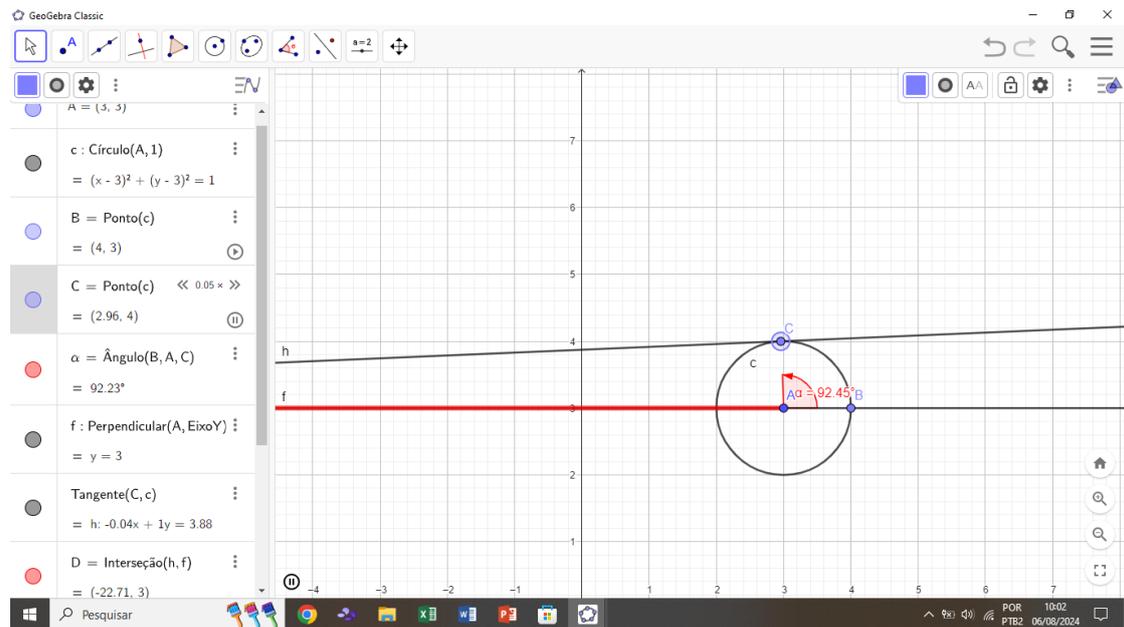


Figura 3.42: Representação do segmento \overline{AD} , quando o ponto C está formando um ângulo no 2º quadrante.

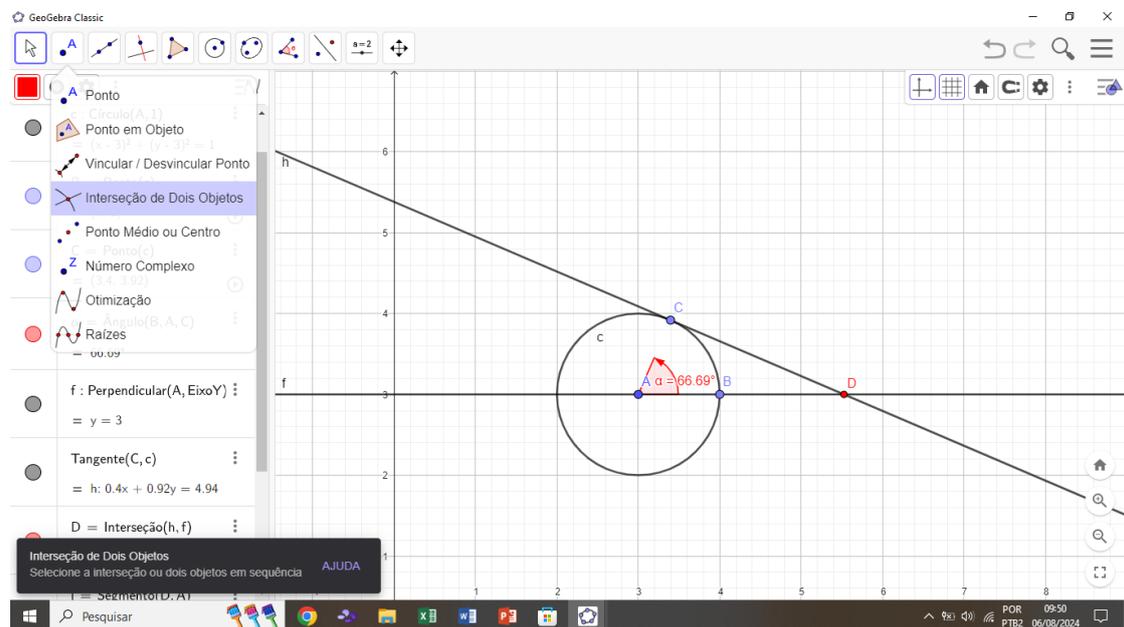


Figura 3.43: Representação do segmento \overline{AD} , quando o ponto C está formando um ângulo no 1º quadrante.

3.9 Procedimento de Construção 8 - Cossecante de um ângulo.

A cossecante é conhecida como a razão trigonométrica inversa multiplicativa do seno (ou seja, $\sin(x) \cdot \csc(x) = 1$), está definida para ângulos cujo seno é diferente de zero. Para encontrarmos a cossecante de um ângulo qualquer, basta calcularmos então o inverso do valor de seu seno.

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (3.10)$$

Para trabalhar com a função cossecante no *GeoGebra*, vamos seguir os mesmos passos usados para demonstração da Relação Fundamental da Trigonometria. Primeiramente vamos construir o círculo trigonométrico (passos 1 a 5 da seção 3.2) apresentado na Figura 3.44.

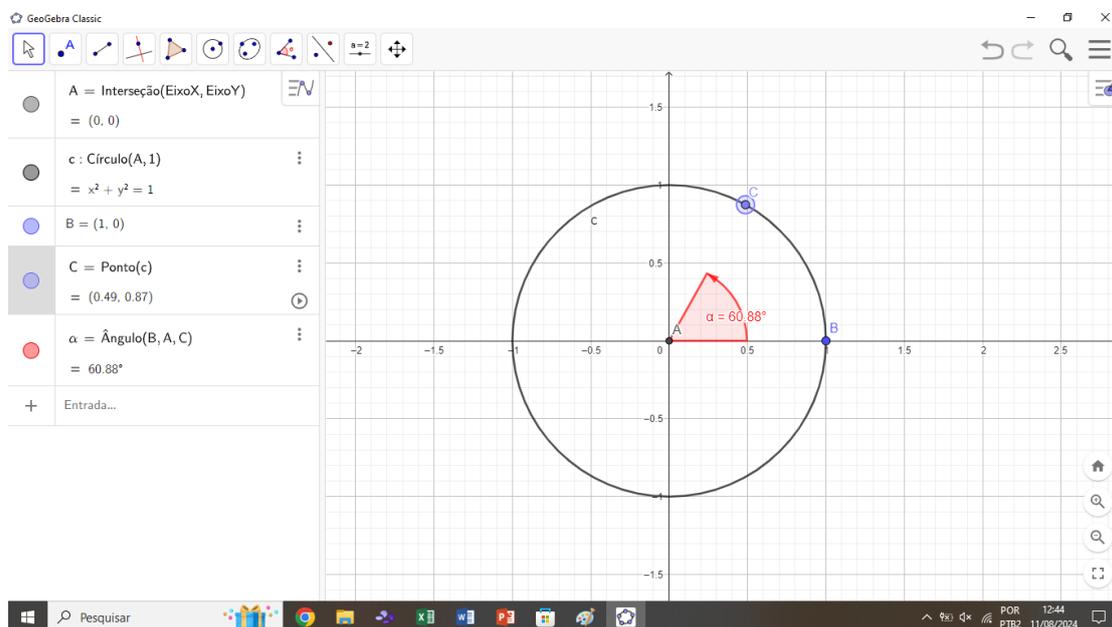


Figura 3.44: Círculo trigonométrico a ser utilizado para a representação da função Cossecante.

Após desenhar círculo trigonométrico conforme observado na Figura 3.44 iremos fazer os seguinte passos para representar a função cossecante no *GeoGebra*.

1. Inserir a função cossecante através da entrada na janela de álgebra. Para isto, basta inserir o comando $f(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$, que é a função cossecante, a qual aparecerá automaticamente na janela de visualização. Na Figura 3.45 está a representação da função cossecante.

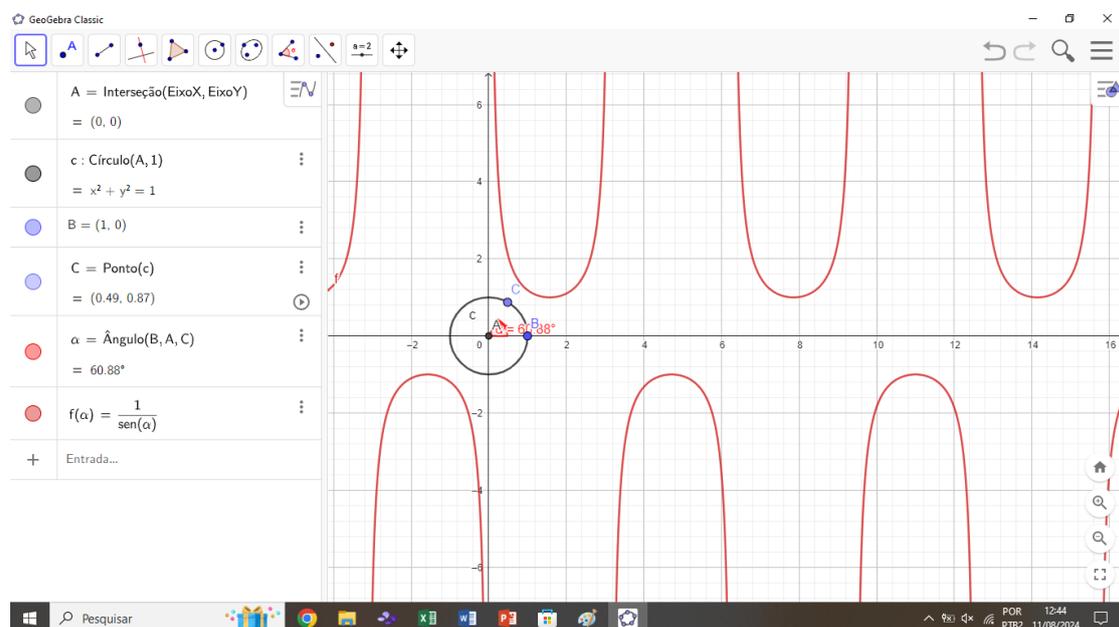


Figura 3.45: Função Cossecante de α .

2. Para ver como mais dinâmismo e interação o que está ocorrendo à medida que o ângulo varia, basta inserirmos uma reta auxiliar Beta β em função do ângulo. Bastando inserir na janela de álgebra a seguinte função: ' $\beta : x = \alpha$ '. Com isso teremos a reta beta ' β ' bem definida, a qual se deslocará ao longo de x, mostrando o que ocorre com os valores da secante de α à medida que o ângulo varia na circunferência.
3. Para melhorar ainda mais a visualização, podemos adicionar um ponto de

interseção entre a função secante e a reta auxiliar β . Para executar esta função, basta clicar no ícone ‘interseção entre dois objetos’, presente na barra de ferramentas. Com isso o programa nos retornará o ponto de interseção D .

4. Criaremos uma nova reta auxiliar, para mostrar a interseção no eixo Y . Para isso, basta criarmos uma nova reta na função ‘reta’ na barra de ferramentas. Selecionaremos a opção ‘reta perpendicular’, e selecionaremos o ponto D e o eixo Y . Após esta etapa, poderemos criar o ponto de interseção E , através do comando ‘interseção entre dois objetos’, na barra de ferramentas, selecionando a reta auxiliar ‘g’ e o eixo Y .
5. Para melhorar o aspecto da visualização, iremos esconder a reta ‘g’, desmarcando o círculo ao lado da reta (na janela de visualização) e iremos inserir um segmento de reta do ponto D ao ponto E , clicando na barra de ferramentas em ‘segmento de reta’ e selecionando a opção ‘2 pontos’, e em seguida selecionaremos os pontos D e E . Após este procedimento, a visualização na janela de visualização estará limpa e conseguiremos observar claramente o que ocorre à medida que o ângulo varia no círculo trigonométrico, como está representado na Figura 3.46 e Figura 3.47, para o 2^o e 3^o quadrantes respectivamente.

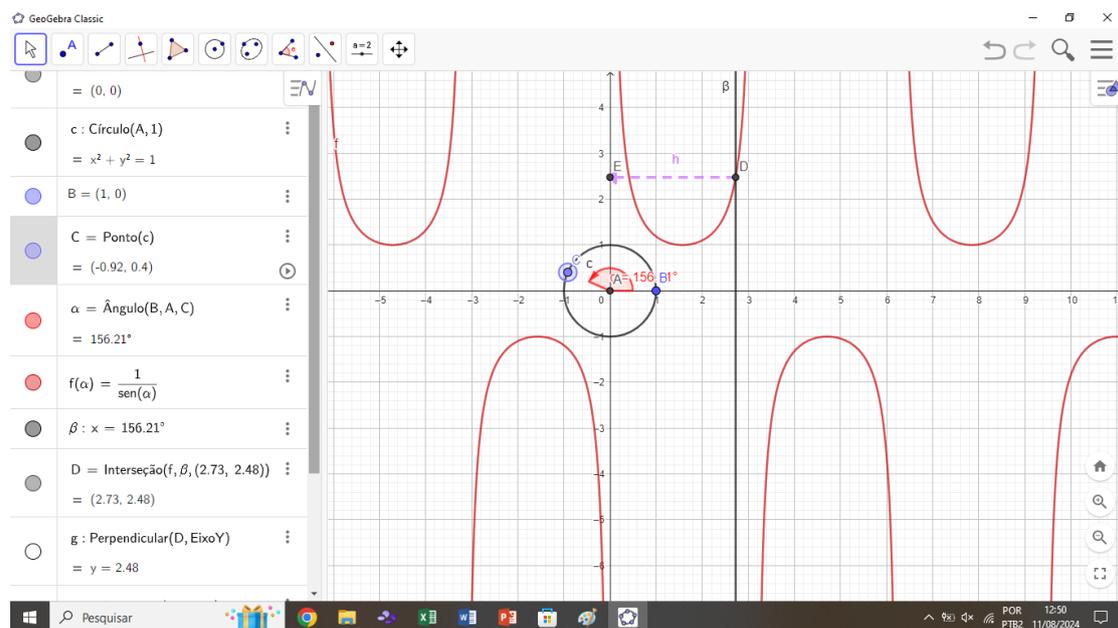


Figura 3.46: Função Cossecante de α no 2º quadrante.

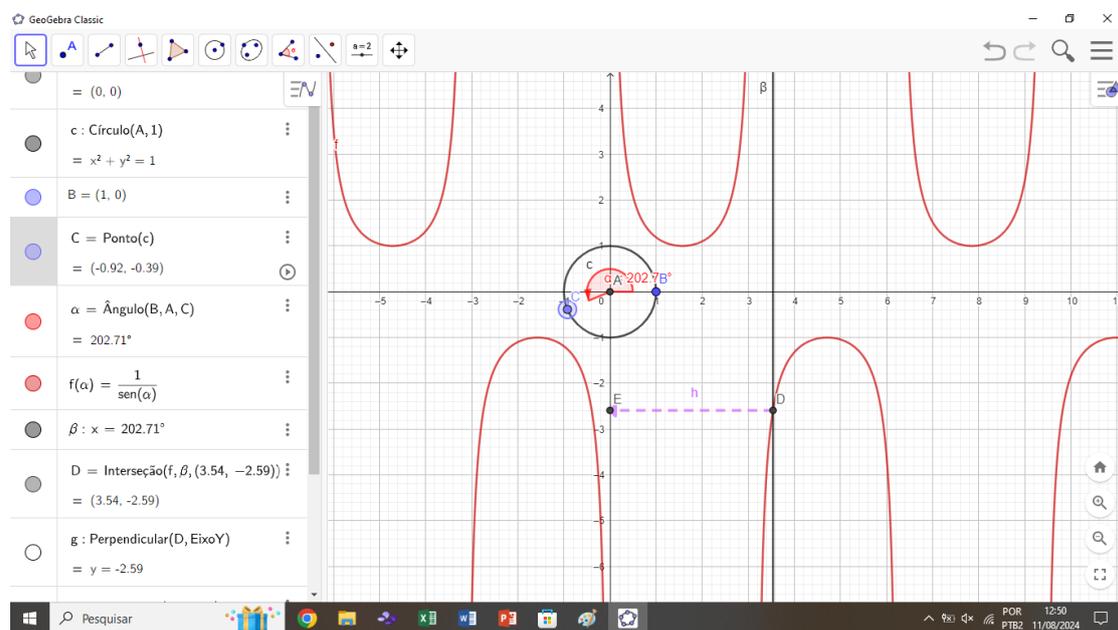


Figura 3.47: Função Cossecante de α no 3º quadrante.

3.10 Procedimento de Construção 9 - Representação Geométrica da Cossecante de um ângulo no Círculo Trigonométrico.

Além de conseguir visualizar o que ocorre com os valores da função cossecante à medida que o ângulo varia no círculo trigonométrico, também podemos fazer a interpretação geométrica da cossecante no círculo trigonométrico. Na Figura 3.48, o segmento \overline{AC} , representa geometricamente o valor da Cossecante do ângulo α .

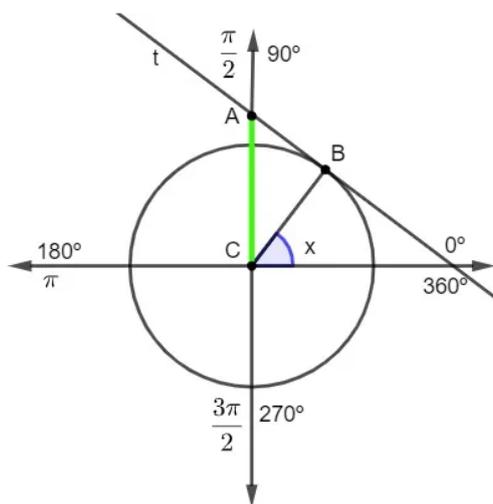


Figura 3.48: Representação Geométrica da função Cossecante de α .

Observa-se na Figura 3.48 que para obter a cossecante geometricamente de um ângulo qualquer x , precisa-se traçar a reta 't', tangente ao ponto B . A cossecante do ângulo x será o segmento que liga o centro até o ponto em que a reta 't' intercepta o eixo vertical, representado por \overline{AC} na imagem. Iremos mostrar o passo a passo de como desenhar geometricamente a cossecante e o que acontece graficamente com seus valores à medida que alteramos o ângulo no círculo trigonométrico. Com o desenho do círculo trigonométrico já construído, basta seguir os seguintes passos:

1. Clicar em barra de ferramenta, no ícone ‘reta’ e selecionar ‘retas tangentes’. Após esta seleção, selecionar o ponto por onde passará a reta tangente (ponto C) e em seguida selecionar o círculo trigonométrico (círculo c) ou qualquer outra função em que se deseja traçar a reta tangente. Automaticamente será gerada a reta tangente ao nosso círculo, conforme Figura 3.49.

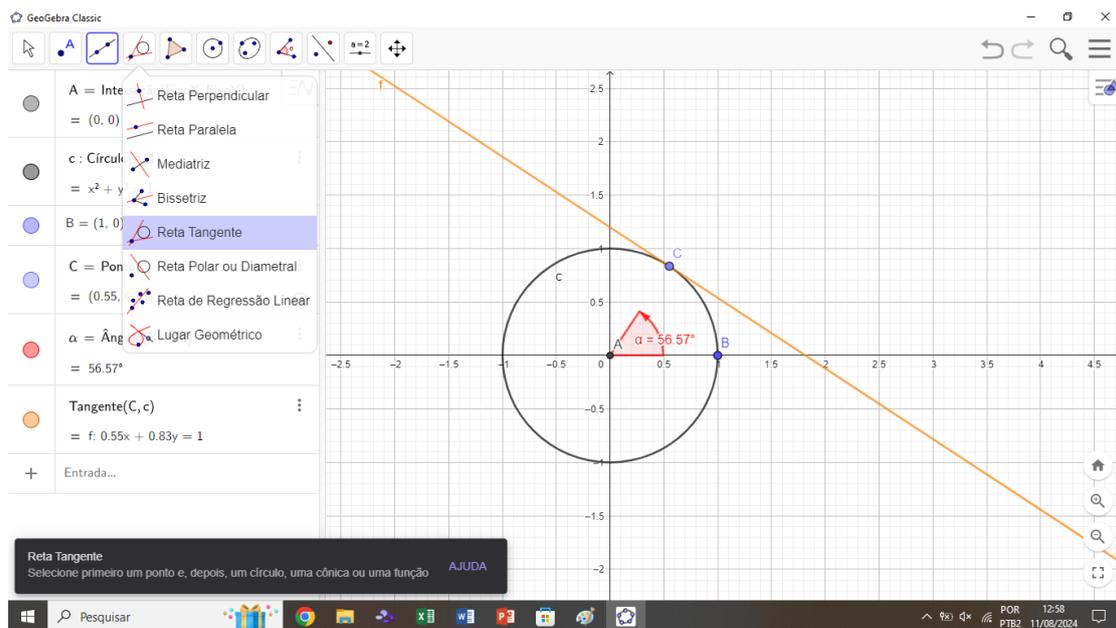


Figura 3.49: Inserindo comando ‘retas tangentes’.

2. O segundo passo, será fazer a interseção entre a reta tangente e o eixo Y . Para isso, basta passar o mouse em barra de ferramentas no comando ‘ponto’ e selecionar ‘interseção entre 2 objetos’. Em seguida selecionar a reta tangente e o eixo Y . O ponto D , será criado automaticamente. A Figura 3.50 apresenta a execução desta etapa.

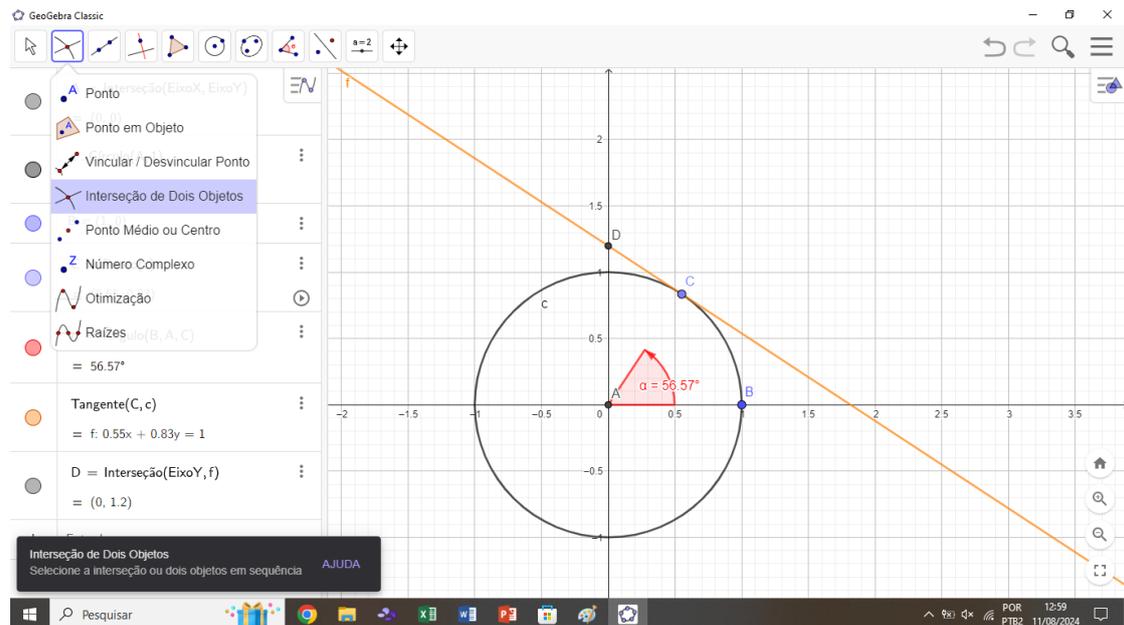


Figura 3.50: Interseção da Reta Tangente e o eixo Y .

3. Como sabemos que o segmento \overline{AD} será nossa cossecante, basta passar o mouse em barra de ferramentas e selecionar a opção 'segmento' e selecionar os pontos A e D . Com isso será criado o segmento $g = \overline{AD}$ automaticamente. A Figura 3.51 apresenta a Cossecante geometricamente.

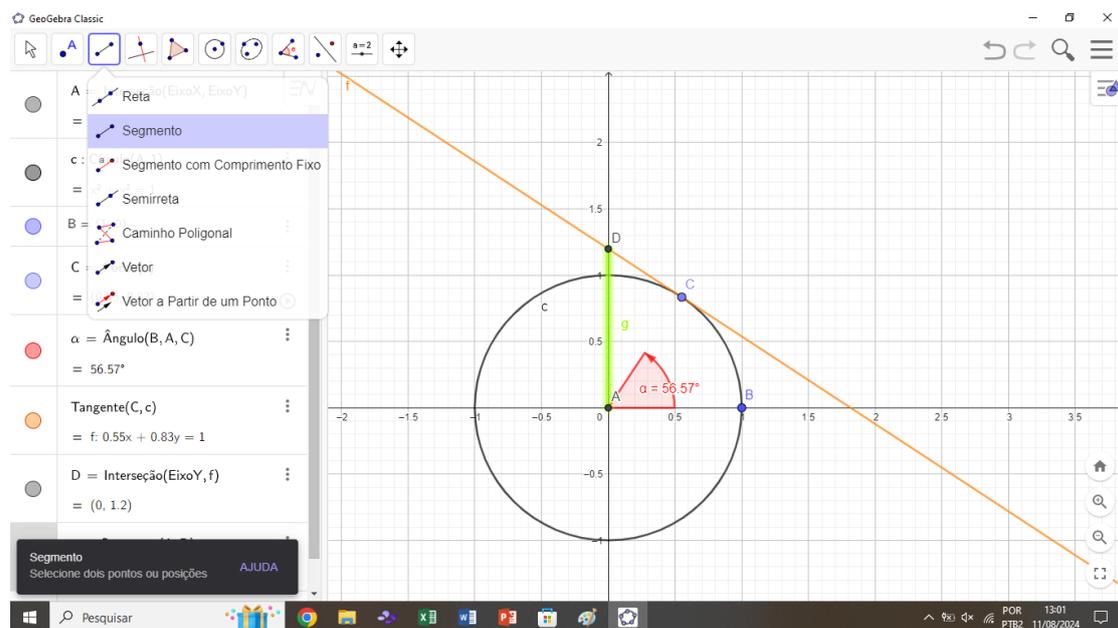


Figura 3.51: Cossecante - Segmento \overline{AD} .

4. Para verificar o comportamento deste segmento à medida que variamos o ângulo, basta clicar na função *play*, ao lado do ponto C . Este ponto percorrerá a circunferência e poderemos observar geometricamente o comportamento da função cossecante. Na Figura 3.52 e na Figura 3.53 estão apresentadas as cossecantes geometricamente para o 2º e 3º quadrantes respectivamente.

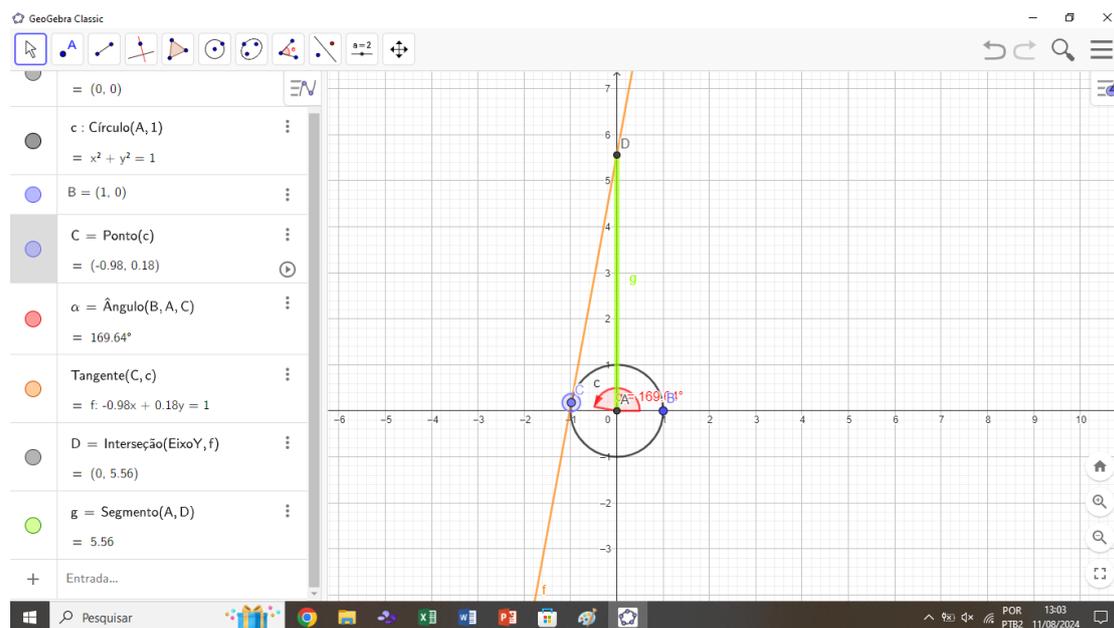


Figura 3.52: Representação Geométrica da Cossecante no 2º quadrante.

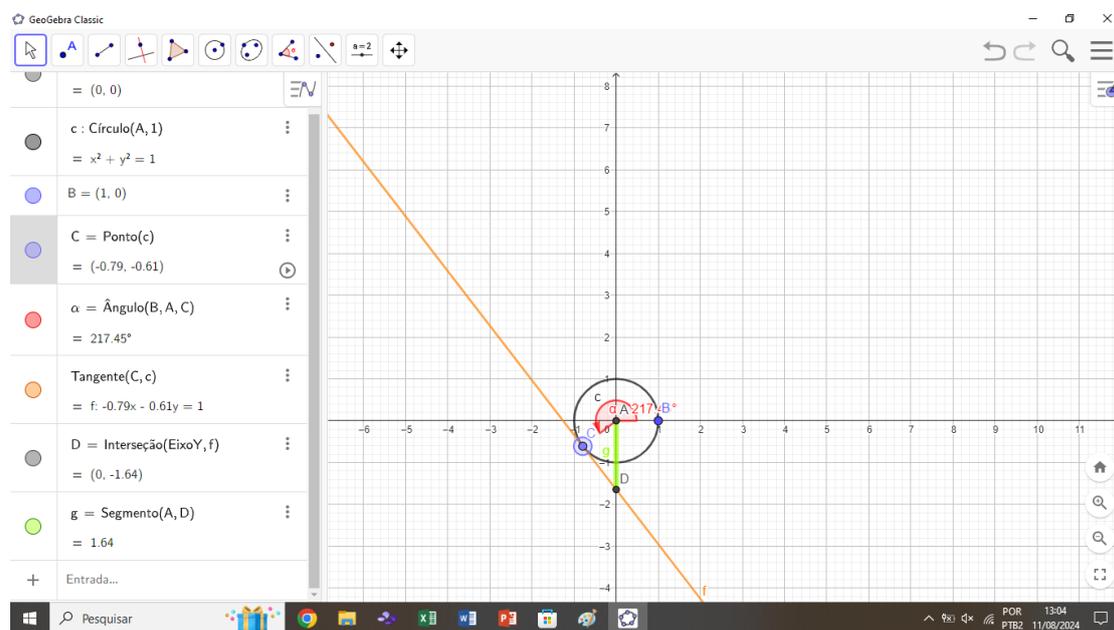


Figura 3.53: Representação Geométrica da Cossecante no 3º quadrante.

3.11 Procedimento de Construção 10 - Representação Genérica da Função Cosseno.

Neste capítulo, será apresentada uma abordagem Matemática para descrever a função cosseno de forma genérica no *GeoGebra*. A função cosseno, amplamente utilizada em diversas áreas da ciência e engenharia, é conhecida por sua periodicidade e aplicação em fenômenos ondulatórios e harmônicos. Para fornecer uma base sólida, será introduzida uma equação genérica que permite a descrição de suas características fundamentais, representada pela função:

$$f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d \quad (3.11)$$

Onde:

- a : controla a amplitude da função, determinando a altura máxima e mínima da onda.
- b : ajusta a frequência angular, afetando o número de ciclos completos em um intervalo dado.
- c : determina o deslocamento de fase, influenciando a posição horizontal da função.
- d : define o deslocamento vertical, movendo a função para cima ou para baixo no eixo y .

Será feita uma abordagem centrada na análise de como cada um desses parâmetros influencia a forma da função cosseno. O uso do *software GeoGebra*, será utilizado para facilitar a compreensão dessas variações.

De acordo com Hohenwarter e Preiner (2007), o *GeoGebra* se destaca como um recurso educacional eficaz, proporcionando uma visualização dinâmica de

funções Matemáticas. Ele permitirá que os usuários ajustem os parâmetros a , b , c e d em tempo real, promovendo uma melhor compreensão dos efeitos de cada componente na representação gráfica da função cosseno. Essa abordagem interativa reforça o aprendizado de conceitos abstratos e apoia o desenvolvimento da intuição Matemática.

Para mostrar esta dinamicidade e observar o que acontece com variações dos parâmetros a , b , c e d no *GeoGebra*, iremos inicialmente inserir como exemplo a função $f(x) = \cos(x)$ no *GeoGebra*, na janela de entrada. Automaticamente, será exibido o gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ na janela de visualização, conforme apresentado na Figura 3.54.

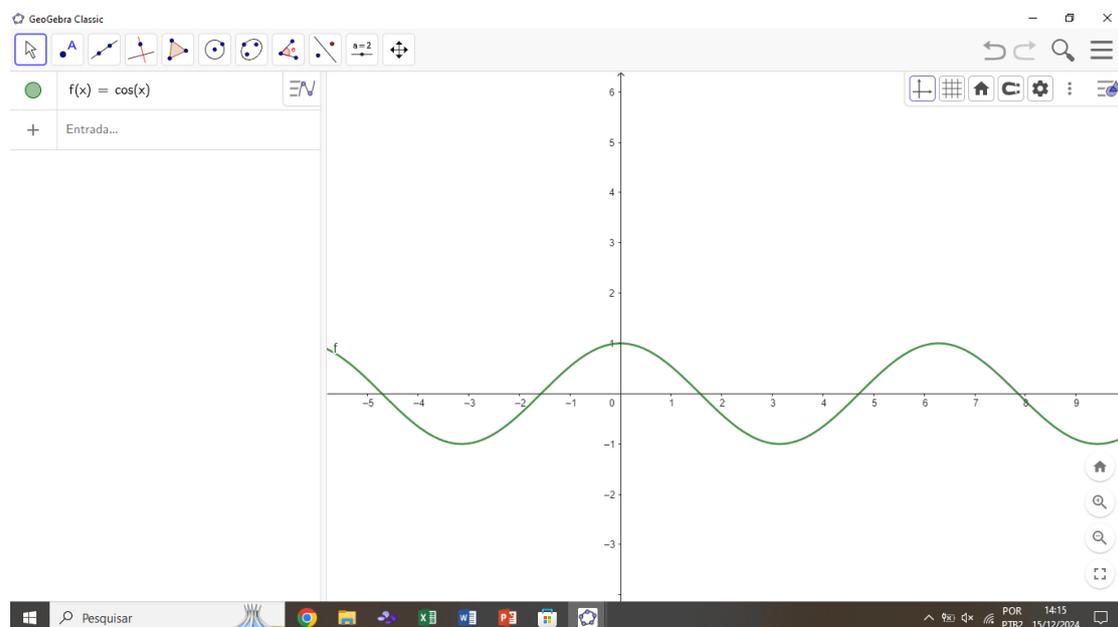


Figura 3.54: $f(x) = \cos(x)$ representada no *GeoGebra*.

Em seguida iremos inserir a função $g(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$, na janela de entrada, gerando assim o gráfico desta função na janela de visualização. Como a função contém os parâmetros a , b , c e d , estes aparecerão na janela de entrada automaticamente juntamente com uma barrinha abaixo, que é o controle deslizante.

É através deste controle deslizante que iremos alterar os parâmetros.

Como padrão, todos estes parâmetros aparecerão com uma unidade, e será possível observar o gráfico de $f(x)$ e $g(x)$, conforme apresentado na Figura 3.55.

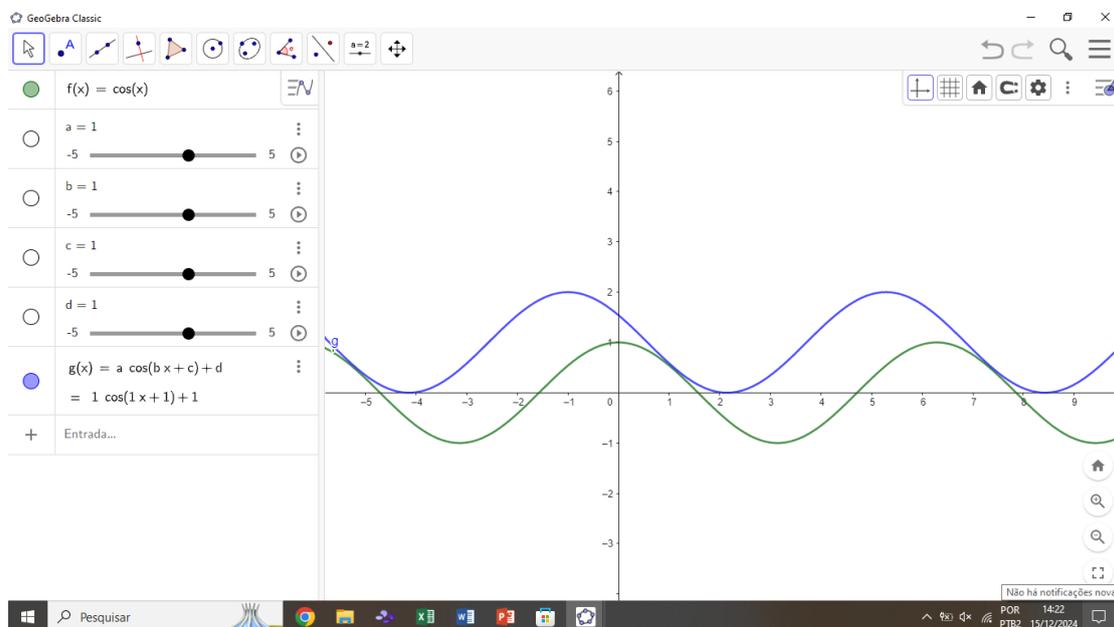


Figura 3.55: $g(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$ representada no *GeoGebra*.

Em seguida, alteraremos o controle deslizante de ‘c’ para 0, e de ‘d’ para 0. Tendo assim a Função: $g(x) = a \cdot \cos(bx + 0) + 0 = \cos(x) = f(x)$. Logo, os dois gráficos irão se sobrepor, pois as funções $f(x)$ e $g(x)$ para estes valores de parâmetros ficam iguais. Nesta etapa ficará bem visual observar o que acontece com cada parâmetro. Iniciaremos alterando o parâmetro ‘a’, o que nos resultara em uma variação da amplitude da função $g(x)$, conforme apresentada na Figura 3.56.

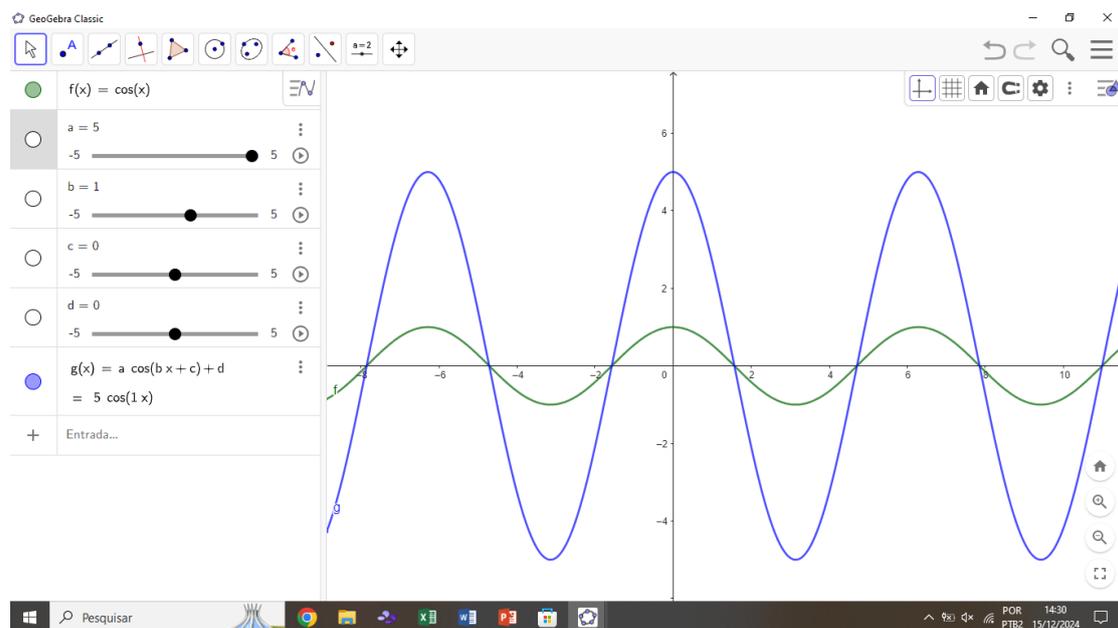


Figura 3.56: Variação do parâmetro ‘a’ representado no *GeoGebra*.

Em seguida retornaremos o parâmetro ‘a’ para 1, e aumentaremos o parâmetro ‘b’ no controle deslizante, o que diminuirá o período da nossa função (Figura 3.57).

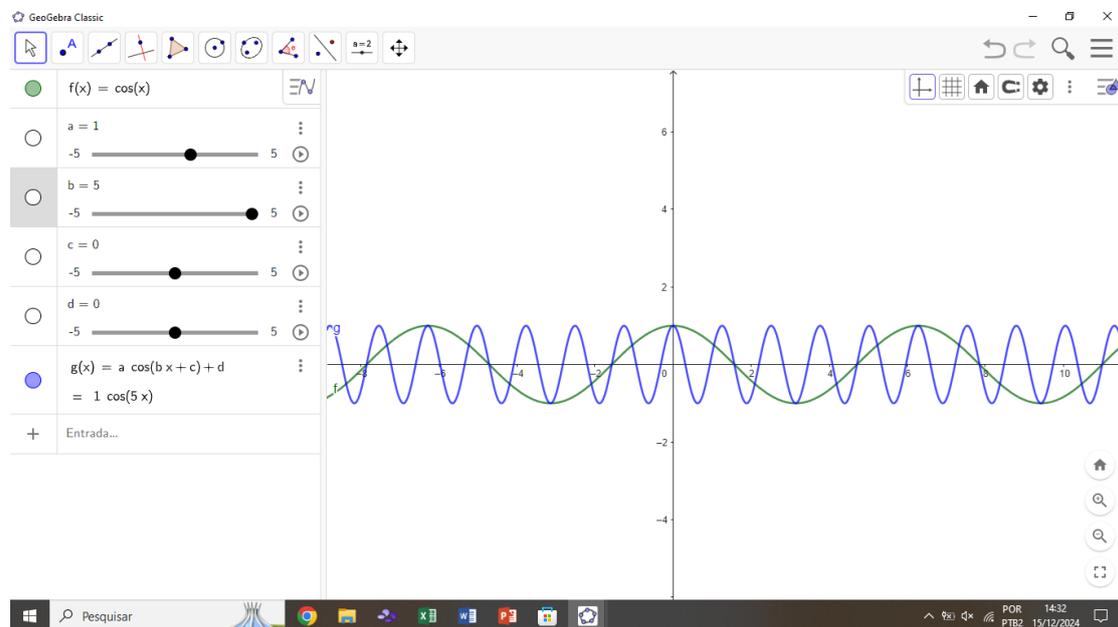


Figura 3.57: Variação do parâmetro ‘b’ representado no *GeoGebra*.

Analogamente aos passos anteriores, também faremos variações no parâmetro ‘c’ (Figura 3.58).

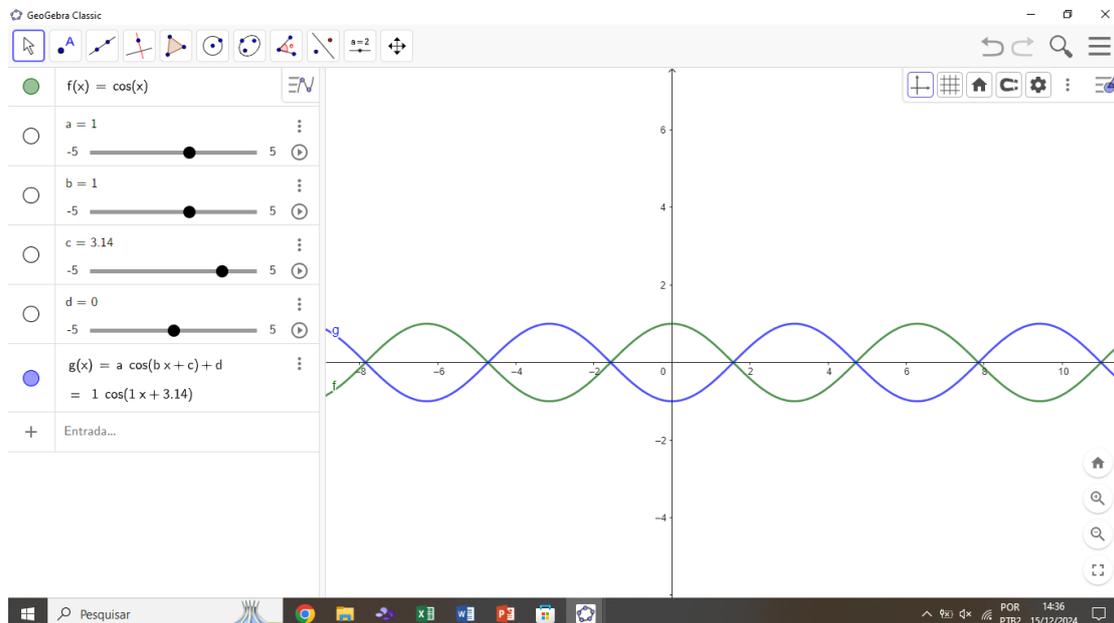


Figura 3.58: Variação do parâmetro ‘c’ representado no *GeoGebra*.

Ao colocar o parâmetro ‘c’ como π (3,14...) observamos que deslocamos o gráfico para a esquerda, obtendo o menor valor possível para a função cosseno. Nota-se claramente um deslocamento horizontal da função.

Em seguida, voltaremos o parâmetro ‘c’ para valor inicial, e alteraremos somente o parâmetro d para observar como a função se altera à medida que mudamos os valores de ‘d’ no controle deslizante. Feito isso, iremos obter a seguinte configuração apresentada na Figura 3.59.

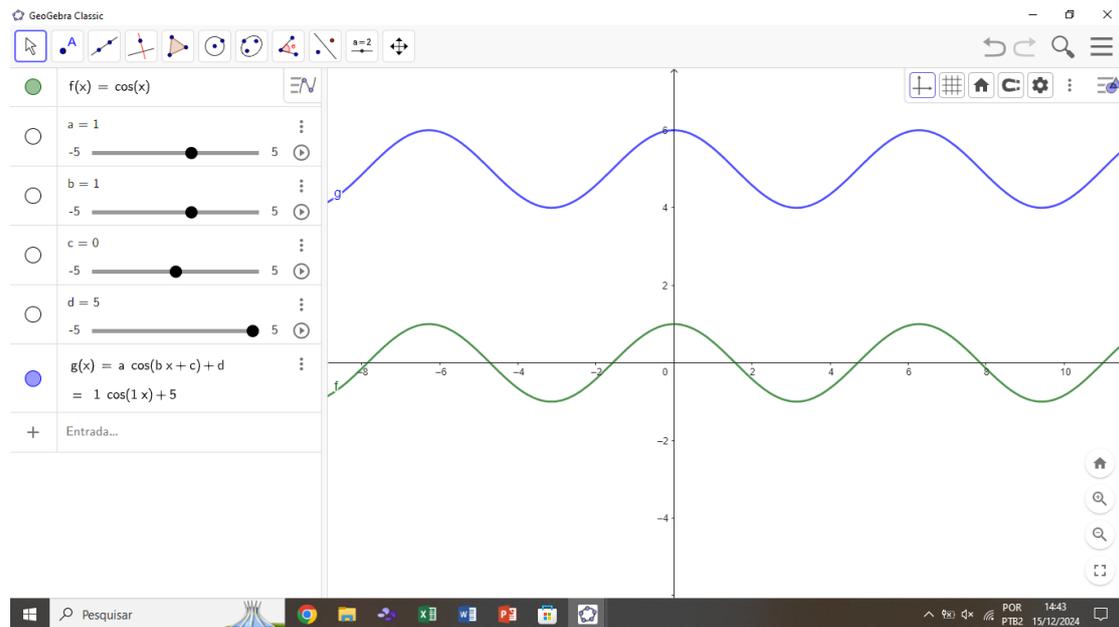


Figura 3.59: Variação do parâmetro ‘d’ representado no *GeoGebra*.

Nota-se claramente um deslocamento vertical para cima, para valores positivos de d . Após o detalhamento de cada um destes parâmetros é interessante mostrar a variação de todos ao mesmo tempo. O que reforçará ainda mais os conceitos aprendidos em sala de aula.

Procedimentos metodológicos - Aplicação em sala de Aula

Esta pesquisa é classificada como aplicada devido à sua natureza. Em relação aos objetivos, enquadra-se como uma pesquisa exploratória. Quanto à metodologia empregada, adotou-se o estudo de caso como estratégia principal.

Conforme Prodanov e Freitas (2013), o estudo de caso permite realizar uma análise detalhada de um grupo específico, com o objetivo de compreender suas características e relacioná-las ao tema investigado. Nesse contexto, considerando que os dados foram coletados diretamente em uma sala de aula específica, o estudo de caso foi escolhido como o modelo mais adequado para este trabalho. Por fim, no que diz respeito à abordagem do problema, a pesquisa segue uma orientação qualitativa.

Este estudo de caso foi realizado na Central de Ensino e Desenvolvimento Agrário de Florestal – CEDAF, uma escola técnica agrícola federal, fundada em 1939 e vinculada à Universidade Federal de Viçosa (UFV – Campus Florestal). O Campus Florestal fica localizado na região Metropolitana de Belo Horizonte. O campus oferece cursos técnicos concomitantes ao ensino médio, cursos técnicos após o término do ensino médio, cursos tecnológicos, graduação e pós-graduação nas áreas de conhecimento das Ciências Agrárias, Ciências Biológicas e da Saúde,

Ciências Exatas e Tecnológicas e Ciências Humanas, Letras e Artes.

A pesquisa ocorreu na data 11 de dezembro de 2024. A escolha da CEDAF como local de aplicação do estudo fundamenta-se em sua vinculação à UFV, sendo amplamente reconhecida pela excelência acadêmica de seus cursos em âmbito nacional. Além disso, a proximidade proporcionada pela realização de um curso no mesmo campus possibilitou a oportunidade de viabilizar esta pesquisa, configurando-se como uma forma de contribuir com a instituição e retribuir os conhecimentos adquiridos ao longo da formação acadêmica.

Para esta pesquisa, foram selecionadas 2 turmas do 2^o ano (uma turma com 29 alunos e a outra com 28 alunos) as quais abordaram o tema Trigonometria (Círculo trigonométrico, Funções Seno, Cosseno e Tangente) nas aulas anteriores.

Propôs-se em sala de aula a utilização do *software GeoGebra* como uma ferramenta pedagógica inovadora, visando enriquecer o ensino de conceitos trigonométricos. A proposta envolveu a apresentação dinâmica e interativa de variações no círculo trigonométrico, permitindo aos alunos visualizarem, em tempo real, as relações entre os ângulos e as razões trigonométricas. Além disso, foi explorado o comportamento das funções seno e cosseno de forma genérica, com a possibilidade de alterar parâmetros como amplitude, período e deslocamento. Essa abordagem buscou facilitar a compreensão dos conceitos abstratos, promovendo uma maior interação e engajamento dos estudantes no processo de aprendizagem.

O estudo foi conduzido durante uma única aula, com o objetivo principal de reforçar e aprofundar os conceitos apresentados na aula anterior, utilizando recursos visuais e interativos. Para verificar o impacto da utilização do *software GeoGebra*, foi aplicado um questionário idêntico para ambas as turmas: uma que utilizou o *GeoGebra* como ferramenta de ensino e outra que seguiu uma abordagem tradicional, sem o uso do *software*.

Essa metodologia permitiu realizar uma análise comparativa detalhada dos

resultados, buscando identificar possíveis benefícios no desempenho dos alunos decorrentes do uso do recurso tecnológico. O questionário avaliativo utilizado está disponível no Apêndice A, enquanto a sequência pedagógica aplicada em sala de aula será descrita na sequência. Essa abordagem não apenas contribui para avaliar a eficácia do *GeoGebra* no processo de ensino-aprendizagem, mas também evidencia a importância de incorporar tecnologias educacionais inovadoras no contexto escolar.

Na primeira parte da Aula, foi apresentado o Círculo Trigonométrico no *software GeoGebra*, conforme Figura 4.1.

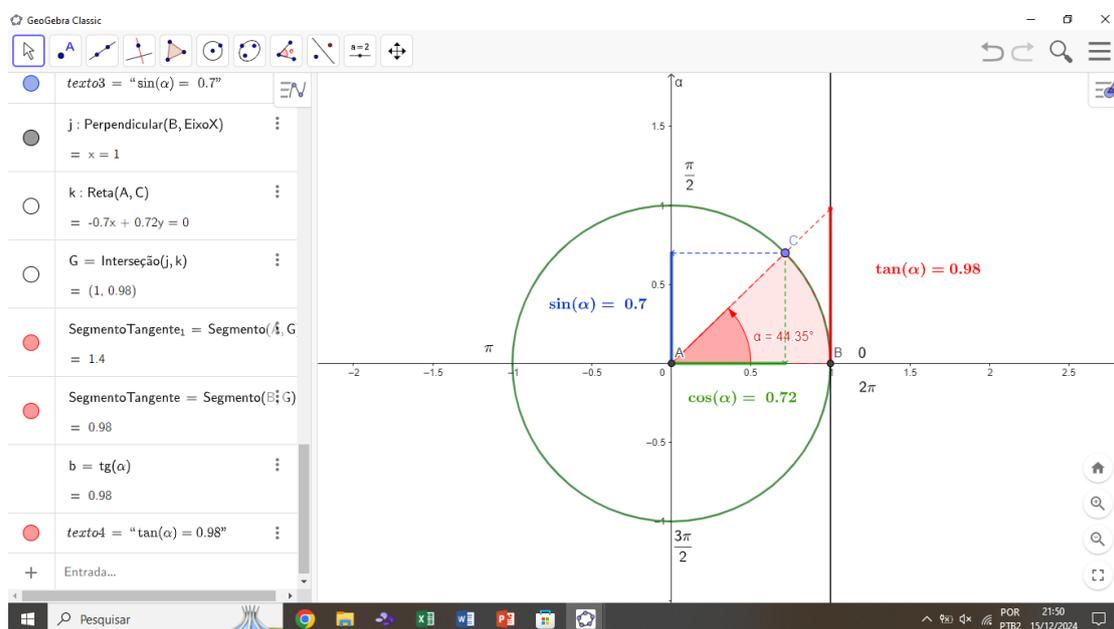


Figura 4.1: Círculo Trigonométrico apresentado.

Em seguida, movimentamos o ponto C ao longo da circunferência, permitindo que os alunos observassem de forma dinâmica as alterações nos valores do seno, cosseno e tangente do ângulo α apresentado. Enquanto os valores de seno e cosseno já eram mais familiares para os estudantes, houve maior curiosidade e interesse ao perceberem que a tangente aumentava significativamente, aproximando-se de um valor muito elevado quando o ângulo se aproximava de 90° . Essa interação

dinâmica contribuiu para uma compreensão mais intuitiva e visual desses conceitos.

Na segunda etapa, foi realizada a construção do gráfico da função cosseno, conforme ilustrado na Figura 4.2.

Essa atividade possibilitou aos alunos uma compreensão visual do comportamento da função, permitindo identificar suas características fundamentais, como amplitude, período e simetria. Além disso, a construção auxiliou no entendimento do conceito de periodicidade, demonstrando de forma prática como os valores da função se repetem em intervalos regulares. Essa abordagem dinâmica e interativa contribuiu para consolidar o entendimento dos alunos sobre as propriedades das funções trigonométricas no contexto prático e teórico.

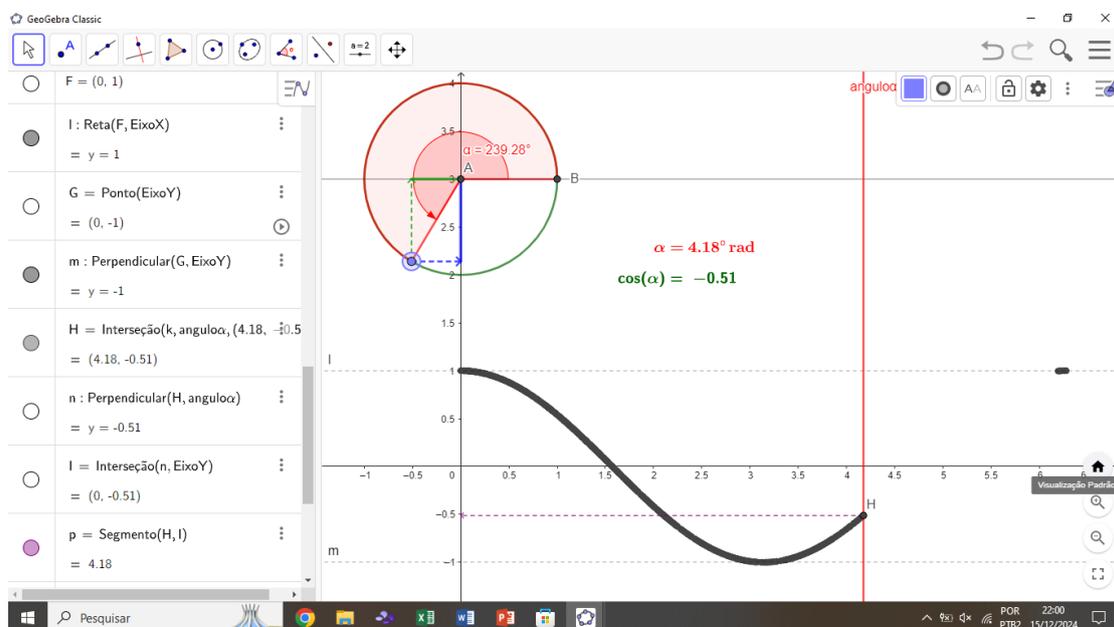


Figura 4.2: Construção gráfico do cosseno de α .

Na terceira etapa da aula, foi apresentada aos alunos a função $f(x) = \cos(x)$ diretamente no *GeoGebra*, juntamente com a função $g(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$. Inicialmente, os parâmetros foram definidos como $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ e $d = 0$, de modo que as duas funções se tornassem equivalentes. Posteriormente, os

parâmetros foram alterados um a um, permitindo que os alunos observassem, de maneira dinâmica, como cada ajuste impactava o comportamento gráfico da função. Essa abordagem facilitou a compreensão das transformações, como mudanças na amplitude, no período, no deslocamento horizontal e no deslocamento vertical. A Figura 4.3 ilustra as variações realizadas e exploradas durante a aula.

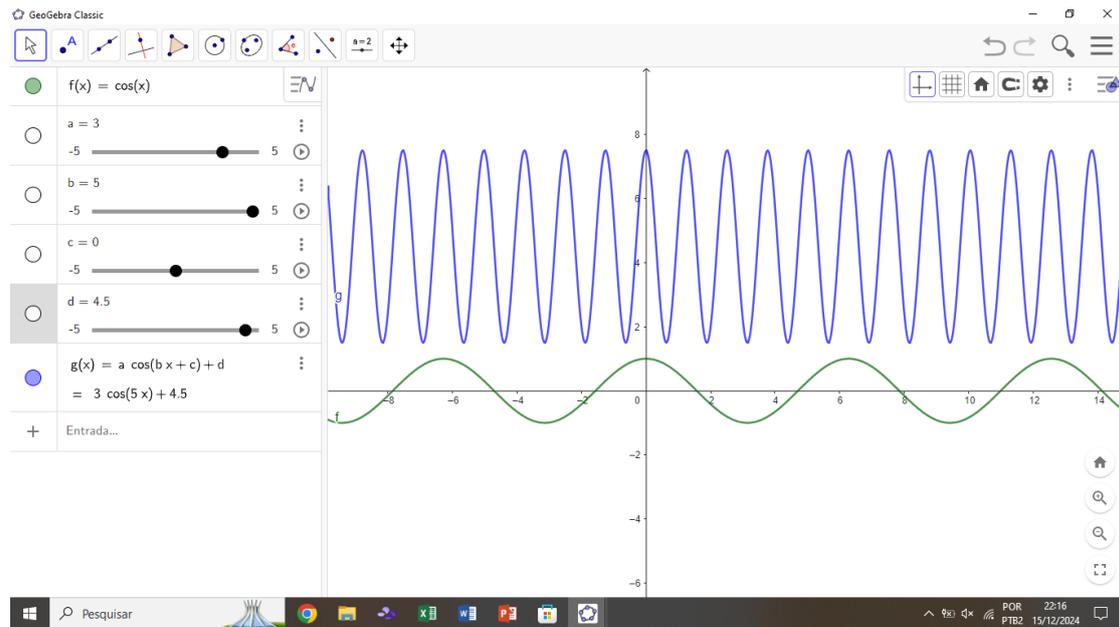


Figura 4.3: Funções: $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$, apresentadas em sala de aula.

interativas.

O desempenho ideal (100% de acertos) em algumas questões, como as questões 1, 2 e 5, pode ser atribuído à capacidade do *software* de transformar conceitos abstratos em algo tangível.

No que diz respeito ao ensino das funções trigonométricas, De Mesquita e Machado (2020) destacam que o uso de *softwares* facilita a compreensão e diminui as dificuldades associadas ao ensino tradicional. Esse ponto também foi observado no presente estudo, especialmente na questão 6, que apresentou maiores dificuldades em ambas as turmas.

Contudo, mesmo nesse cenário, a Turma 2, ao utilizar o *GeoGebra*, conseguiu obter um desempenho consideravelmente melhor do que a Turma 1 (21 acertos contra apenas 2). Esse resultado sugere que, embora o *software* não elimine todas as dificuldades, ele atua como um facilitador importante no entendimento de conceitos mais complexos.

Ademais, Menegheli (2018) e Chaves (2019) reforçam que a eficácia do *GeoGebra* depende de um bom planejamento e articulação do conteúdo pelo docente. Isso ressalta que o *software*, por si só, não é uma solução mágica, mas sim um recurso pedagógico que precisa ser bem integrado ao plano de aula. O presente estudo reforça essa perspectiva ao mostrar que o sucesso da Turma 2 não se deve apenas ao uso do *GeoGebra*, mas também a um planejamento estruturado que buscou explorar as potencialidades da ferramenta.

Além dos autores mencionados, outros estudos reforçam a importância das ferramentas tecnológicas, como o *GeoGebra*, no ensino da Matemática. Penteado (2015) destaca que o uso de *softwares* matemáticos no estudo de funções promove a autonomia dos alunos, incentivando um ambiente colaborativo no qual os estudantes experimentam, testam e validam suas hipóteses matemáticas.

De forma semelhante, Borba e Villarreal (2005) ressaltam que as tecnologias

digitais permitem múltiplas representações matemáticas — gráficas, algébricas e numéricas —, facilitando a compreensão de conceitos mais complexos e promovendo uma aprendizagem mais aprofundada.

O presente estudo reafirma esses benefícios ao demonstrar que o uso do *GeoGebra* contribui para um aprendizado mais eficaz e dinâmico, alinhando-se às conclusões de Menegheli (2018), Chaves (2019) e De Mesquita e Machado (2020).

Referências Bibliográficas

1. BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mônica. Matemática e tecnologias: uma abordagem transdisciplinar. São Paulo: Cortez, 2005. Disponível em: <https://www.cortezeditora.com.br>. Acesso em: 21 jun. 2024.
2. BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.
3. CHAVES, João. O uso do *GeoGebra* no ensino de Matemática: uma análise dos resultados na aprendizagem de Geometria e Trigonometria. Revista Educação Matemática, v. 14, n. 2, p. 45-60, 2019. Disponível em: <https://educacaomatematica.ufpr.br/artigos/2019>. Acesso em: 28 jun. 2024.
4. CORREIA, I. C. S. Breve histórico da Trigonometria. Departamento de Geodésia-UFRGS, maio 2009. Disponível em: https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf. Acesso em: 15 out. 2023.
5. DE MESQUITA, Carla; MACHADO, Pedro. *softwares* como facilitadores no ensino das funções trigonométricas. Revista de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática, v. 8, n. 1, p. 112-130, 2020. Disponível em: <https://revistamatematica.ifes.edu.br>. Acesso em: 21 jul. 2024.

6. GEOEGEBRA. Sobre o *GeoGebra*. Disponível em: <https://www.GeoGebra.org/about>. Acesso em: 15 nov. 2024.
7. HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentals of Physics*. John Wiley & Sons, 2013.
8. HIBBELER, R. C. *Engineering Mechanics: Statics & Dynamics*. Pearson Education, 2016.
9. HOHENWARTER, M.; PREINER, J. Dynamic mathematics with *GeoGebra*. *Journal of Online Mathematics and its Applications*, v. 7, 2007. Disponível em: <https://www.GeoGebra.org/publications>.
10. MENEGHELI, Renata. A importância do uso do *GeoGebra* na aprendizagem matemática: uma abordagem dinâmica e interativa. *Revista de Educação Matemática*, v. 10, n. 3, p. 70-85, 2018. Disponível em: <https://www.GeoGebra.org/m/tnv9qjpv>. Acesso em: 20 ago. 2024.
11. PENTEADO, Rosana. Ensino de funções com o uso de *softwares* matemáticos: experiências no ensino médio. *Revista Tecnologias Educacionais*, v. 12, n. 2, p. 33-47, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br>. Acesso em: 03 out. 2024.
12. PORFÍRIO, Francisco. *Tales de Mileto*. Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/biografia/tales-de-mileto.htm>. Acesso em: 18 nov. 2024.
13. PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico*. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

14. SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que é trigonometria? Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-trigonometria.htm>. Acesso em: 18 nov. 2024.
15. STEWART, James. Calculus: Early Transcendentals. Cengage Learning, 2007.