Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Dissertação de Mestrado

Luiza Guimarães Nonaka

Brincando com números inteiros

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2025

LUIZA GUIMARÃES NONAKA

BRINCANDO COM NÚMEROS INTEIROS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Danielle Franco Nicolau

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2025

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para minha jornada acadêmica e profissional.

Aos meus familiares, pelo apoio incondicional e incentivo constante.

Aos meus professores, por transmitirem o conhecimento com dedicação e inspiração.

E, especialmente, a todos os alunos que enxergam na matemática não apenas um desafio, mas uma ferramenta para transformar o mundo.

Agradecimentos

A realização deste trabalho foi possível graças ao apoio e incentivo de diversas pessoas e instituições. Agradeço primeiramente à minha família, pelo suporte incondicional, paciência e motivação em cada etapa da minha jornada acadêmica.

Aos meus professores e orientadores, expresso minha sincera gratidão pela dedicação, ensinamentos e incentivo ao pensamento crítico e à pesquisa matemática. Suas contribuições foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas de estudo e amigos, pelos debates enriquecedores, pela troca de experiências e pelo apoio mútuo ao longo desta caminhada.

A todos os alunos e educadores que, com suas dúvidas, desafios e insights, motivaram a construção deste material, reafirmando a importância do ensino da matemática de forma significativa e acessível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

NONAKA, Luiza Guimarães, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, maio de 2025. **Brincando com números inteiros**. Orientadora: Danielle Franco Nicolau.

A Matemática desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento lógico e crítico dos estudantes, mas seu ensino ainda enfrenta desafios relacionados à contextualização e à motivação discente. Este trabalho apresenta a elaboração de uma apostila didática voltada para o ensino de números inteiros, congruência modular e triplas pitagóricas, fundamentada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Por meio de metodologias ativas e da resolução de problemas, busca-se tornar a aprendizagem mais acessível e significativa. A presença de mascotes, como a Coruja Sábia e outros personagens didáticos, contribui para tornar a experiência mais lúdica e envolvente, estimulando a aplicação dos conceitos matemáticos no cotidiano e promovendo maior engajamento dos alunos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, resolução de problemas, números inteiros, congruência modular, triplas pitagóricas.

Abstract

NONAKA, Luiza Guimarães, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, May, 2025. **Playing with Integers**. Adviser: Danielle Franco Nicolau.

Mathematics plays a fundamental role in the development of students' logical and critical thinking skills, but its teaching still faces challenges related to contextualization and student motivation. This work presents the development of a didactic booklet focused on teaching integers, modular congruence, and Pythagorean triples, based on the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC) and the National Curriculum Parameters (PCN). Through active methodologies and problem solving, the aim is to make learning more accessible and meaningful. The presence of mascots, such as the *Coruja Sábia* (Wise Owl) and other educational characters, helps to create a more playful and engaging experience, encouraging the application of mathematical concepts in everyday life and promoting greater student engagement.

Keywords: Mathematics education, problem solving, integers, modular congruence, Pythagorean triples.

Sumário

1 Introdução

A Matemática desempenha um papel fundamental na formação dos estudantes, sendo essencial para o desenvolvimento do pensamento lógico, da capacidade de resolução de problemas e da compreensão de fenômenos naturais e tecnológicos. Para Ubiratan D'ambrosio, ensinar Matemática não é apenas transmitir conteúdos, mas promover uma nova forma de ver o mundo. É despertar a curiosidade e a capacidade de questionar o que está ao nosso redor (D'Ambrosio [2]). No entanto, o ensino dessa disciplina enfrenta desafios significativos, especialmente no que se refere à motivação dos alunos e à conexão entre os conteúdos abordados e suas aplicações no cotidiano.

> "O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais" (Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 265]).

A *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) estabelece que o ensino de Matemática deve favorecer o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, incentivando a investigação, a experimentação e a aplicação dos conceitos matemáticos em diferentes contextos (Ministério da Educação (BNCC) [12]). Nesse sentido, é essencial repensar as metodologias de ensino e os materiais didáticos, buscando estratégias que tornem o aprendizado mais acessível, envolvente e significativo.

Diante desse cenário, este trabalho apresenta o desenvolvimento de um material didático inovador, em formato de apostila, voltado para o ensino dos **números inteiros, da congruência modular e das triplas pitagóricas**. A proposta visa proporcionar aos alunos uma experiência de aprendizado mais interativa e contextualizada, alinhando-se às diretrizes educacionais vigentes e explorando estratégias didáticas que favoreçam a compreensão e aplicação dos conteúdos matemáticos. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que "o significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais (propostas dos PCN que visam incorporar valores éticos, sociais, culturais e ambientais à prática pedagógica, como ética, pluralidade cultural, meio ambiente, saúde e orientação sexual), entre ela e o cotidiano" (Ministério da

Educação (PCN) [13, p. 57]), reforçando a importância de um ensino progressivo e contextualizado, que evidencie a aplicabilidade da Matemática em diferentes áreas do conhecimento.

Para tornar o material mais atrativo e dinâmico, a apostila conta com a presença de mascotes pedagógicos que acompanham os estudantes ao longo da aprendizagem, oferecendo dicas, curiosidades e reflexões sobre os temas abordados, *sobre o qual falaremos mais detalhadamente no Capítulo 5.* O uso de elementos lúdicos no ensino contribui significativamente para engajar os alunos, tornando o processo de aprendizagem mais prazeroso e eficiente. Como destaca Marinho et al. [9, p.84], "a ludicidade deve ser um dos eixos norteadores do processo ensino-aprendizagem, pois possibilita a organização dos diferentes conhecimentos numa abordagem metodológica com a utilização de estratégias desafiadoras. Assim, a criança fica mais motivada para aprender, pois tem mais prazer em descobrir e o aprendizado é permeado por um desafio constante".

É por esse motivo que a construção da apostila foi fundamentada nas **metodologias ativas**, em especial na **resolução de problemas** e a ludicidade (gamificação) como estratégia central de ensino. Segundo Ministério da Educação (PCN) [13, p.40], "educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução". Dessa forma, a abordagem adotada visa proporcionar um aprendizado que vá além da memorização, incentivando os alunos a explorarem conceitos matemáticos em contextos reais e aplicáveis.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: inicialmente, são apresentados os fundamentos matemáticos essenciais para a compreensão dos temas abordados, incluindo a definição e as propriedades dos números inteiros, da congruência modular e das triplas pitagóricas. Em seguida, são discutidas as diretrizes curriculares estabelecidas pela *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)* e pelos *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)*, situando a pesquisa no contexto educacional brasileiro. Posteriormente, é detalhado o processo de construção das apostilas, abordando a metodologia empregada, os critérios para seleção do conteúdo e os princípios pedagógicos adotados. Por fim, são descritos os capítulos da apostila, evidenciando a progressão didática dos conceitos matemáticos e a estruturação do material para promover uma aprendizagem significativa.

Com isso, espera-se que este estudo contribua para o aprimoramento do ensino de Matemática, oferecendo uma proposta didática inovadora e alinhada às necessidades dos alunos, promovendo um ensino mais dinâmico, contextualizado e acessível.

1.1 Justificativa

O ensino da Matemática tem um papel essencial na formação dos estudantes, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de argumentação e da resolução de problemas. No entanto, desafios persistem no ensino dessa disciplina, especialmente na promoção de um aprendizado significativo e na contextualização dos conceitos matemáticos. Segundo os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN), "a Matemática pode e deve estar ao alcance de todos e a garantia de sua aprendizagem deve ser meta prioritária do trabalho docente"(Ministério da Educação (PCN) [13, p. 56]).

Lira e outros, em Lira, Silva e Silva Neto [8, p. 2024], trazem um estudo sobre as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes no aprendizado de matemática, e, nesse contexto, Masola e Allevato (apud Lira et al., 2024) definem dificuldade como algo que se opõe à facilidade, relacionado ao que ainda não foi dominado, "pois tudo aquilo que dominamos se torna mais fácil de realizar". Dentre as dificuldades, os autores citam problemas de leitura, interpretação de texto e falta de interesse. O artigo também discute a necessidade de mudanças no cenário educacional.

> "Nessa linha de pensamento, observamos que não basta apenas o aluno conhecer a importância da matemática para o desenvolvimento da sociedade e nem é suficiente que o aluno decore algumas fórmulas e procedimentos de resolução de cálculos. O aluno precisa enxergar algum significado em aprender matemática, compreendendo-a como fruto das suas construções cognitivas." (Lira, Silva e Silva Neto [8, p. 57])

Nesse sentido, torna-se necessário o desenvolvimento de materiais didáticos que favoreçam a aprendizagem ativa e estimulem o interesse dos alunos. Mas como realizar tal proeza? Buscando essa resposta, nos esbarramos no PCN, que coloca a metodologia de resolução de problemas em um patamar importante no processo ensino-aprendizagem. Conforme destacado no PCN, "o ensino-aprendizagem de Matemática tem como ponto de partida a resolução de problemas" (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 57]), promovendo uma abordagem que estimula a investigação e a experimentação.

Além disso, a *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) enfatiza que o ensino da Matemática deve contribuir para

> "o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos"(Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 266]).

Em [8], os autores, embora não discutam diretamente o uso de materiais didáticos, abordam o desejo de mudança nas metodologias de ensino, o que pode incluir a introdução de recursos didáticos mais inovadores e envolventes. Na pesquisa, alguns professores e alunos expressam interesse por métodos que vão além da aplicação tradicional de exercícios, sugerindo alternativas como jogos educativos ou tecnologias relacionadas ao cotidiano dos alunos. Dessa forma, é fundamental que os materiais didáticos incentivem a autonomia dos alunos e os preparem para utilizar a Matemática como ferramenta para a compreensão e transformação da realidade.

A criação desta apostila justifica-se, portanto, pela necessidade de oferecer um material que possibilite um ensino mais dinâmico, contextualizado e alinhado às diretrizes educacionais vigentes. A escolha dos conteúdos abordados — números inteiros, congruência modular e triplas pitagóricas — fundamenta-se em sua relevância tanto no campo teórico quanto em suas aplicações práticas.

Dessa forma, a elaboração deste material visa não apenas facilitar a aprendizagem dos conceitos matemáticos abordados, mas também proporcionar aos alunos uma experiência mais envolvente e alinhada às diretrizes educacionais contemporâneas. A seguir, serão apresentados os objetivos desta pesquisa, evidenciando as metas pretendidas com a construção deste material didático.

1.2 Objetivos

O principal objetivo desta dissertação é desenvolver e apresentar um material didático inovador e acessível para o ensino de conceitos matemáticos fundamentais, como números inteiros, congruência modular e triplas pitagóricas, alinhado às diretrizes educacionais nacionais. A proposta visa proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa, utilizando metodologias ativas e estratégias que incentivem a participação e o raciocínio crítico.

Conforme indicado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), "o ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações [...] e argumentação", além de favorecer "a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão [...] e resulta das conexões que o aluno estabelece entre ela e as demais áreas [...] e o cotidiano"(Ministério da Educação (PCN) [13, p.57]). Da mesma forma, a BNCC afirma:

> "Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional."(Ministério da Educação (BNCC) [12, p.266])

Nesse contexto, a apostila foi elaborada para atender a essas exigências, garantindo uma abordagem pedagógica dinâmica e contextualizada.

Dentre os objetivos específicos desta dissertação, destacam-se:

- Desenvolver uma apostila estruturada e alinhada às diretrizes da BNCC e dos PCN, assegurando que os conteúdos abordados estejam de acordo com as expectativas de aprendizagem para o Ensino Fundamental.

- Promover o ensino dos números inteiros, da congruência modular e das triplas pitagóricas de maneira progressiva e contextualizada, permitindo que os alunos compreendam a inter-relação entre esses conceitos matemáticos.

- Estimular o pensamento crítico e a resolução de problemas como estratégias de ensino, favorecendo a autonomia dos estudantes na construção do conhecimento matemático. O Ministério da Educação (PCN) [13, p.41] afirma que "a resolução de problemas, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, [...] proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas".

- Utilizar mascotes como ferramentas didáticas, com o objetivo de tornar a aprendizagem mais interativa e promovendo o engajamento dos alunos. A presença de personagens e elementos lúdicos no material pode contribuir para a contextualização dos conteúdos e a motivação dos estudantes. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, o ensino de Matemática deve "estimular o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas" (Ministério da Educação (PCN) [13, p.15]), promovendo um ambiente propício à construção do conhecimento.

- Criar atividades interativas e desafiadoras, baseadas em situações-problema e no uso de jogos matemáticos, para reforçar os conceitos abordados e estimular a participação dos alunos na resolução de questões práticas.

- Demonstrar como a matemática pode ser aplicada em diferentes contextos do cotidiano, tornando o aprendizado mais significativo e relevante para os estudantes.

Ao atender a esses objetivos, espera-se que a apostila contribua para a melhoria do ensino da matemática no Ensino Fundamental, oferecendo um recurso didático que favoreça a aprendizagem e o interesse dos alunos pela disciplina. A seguir, será apresentada a metodologia adotada para a elaboração e aplicação desse material pedagógico.

1.3 Metodologia

Este trabalho configura-se como uma pesquisa de natureza bibliográfica e exploratória. Caracteriza-se como bibliográfica por fundamentar-se em referências teóricas relevantes, tais como os *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)*, a *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*, além de autores que discutem a educação matemática e suas metodologias. Assume também um caráter exploratório, à medida que busca aprofundar o entendimento sobre temas centrais da Matemática, como as dificuldades de aprendizagem, e investiga o uso de metodologias ativas que favoreçam o processo de ensino-aprendizagem. Esta investigação tem como objetivo identificar novas formas de engajamento discente, com foco na construção de um ensino mais significativo, especialmente no que se refere aos números inteiros. A elaboração da apostila proposta neste estudo envolve o levantamento de fundamentos teóricos, a incorporação de ideias práticas e a aplicação de metodologias inovadoras, sempre em consonância com os objetivos educacionais contemporâneos.

A elaboração desta apostila foi fundamentada em princípios pedagógicos que buscam tornar o ensino da matemática mais acessível, dinâmico e significativo para os alunos do Ensino Fundamental. Para isso, foram adotadas estratégias didáticas baseadas na resolução de problemas, contextualização dos conteúdos e uso de elementos lúdicos para engajamento dos estudantes.

A metodologia utilizada na construção do material tem como base a abordagem investigativa, incentivando os alunos a explorarem conceitos matemáticos por meio de situações-problema e aplicações práticas. Nesse sentido, os *Parâmetros Curriculares Nacionais* destacam que o ensino da Matemática deve permitir ao aluno "identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas" (Ministério da Educação (PCN) [13, p.47]).

Os conteúdos foram organizados de maneira progressiva, partindo de conceitos mais simples e evoluindo para abordagens mais complexas. Esse formato permite que os alunos desenvolvam uma compreensão gradual dos temas, relacionando novas informações com conhecimentos prévios. Além disso, cada capítulo conta com exemplos contextualizados, que aproximam a matemática do cotidiano dos estudantes, tornando o aprendizado mais envolvente.

Por fim, a metodologia adotada também contempla o desenvolvimento de competências matemáticas alinhadas à *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC). As atividades propostas estimulam habilidades como o pensamento lógico, a argumentação matemática e a capacidade de resolver problemas de maneira criativa. Conforme descrito na BNCC, "os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental" (Ministério da Educação (BNCC) [12, p.266]). Dessa forma, a apostila não apenas ensina conteúdos específicos, mas também promove um aprendizado significativo e aplicável em diversas situações da vida cotidiana e acadêmica.

2

Desenvolvimento

Para a realização deste trabalho, faz-se necessária uma pesquisa detalhada sobre alguns temas para sua fundamentação teórica e metodológica. Neste capítulo, serão abordadas as metodologias ativas aplicadas ao ensino de matemática, com ênfase na resolução de problemas, bem como uma análise de dissertações publicadas pelo PROFMAT que possuam temas correlatos a esta dissertação.

2.1 Metodologias Ativas

As metodologias ativas são estratégias de ensino que colocam o aluno no centro do processo de aprendizagem, incentivando sua participação ativa na construção do conhecimento. Essas metodologias surgiram como alternativa aos métodos tradicionais de ensino, que muitas vezes priorizam a transmissão passiva de conteúdos. Historicamente, o conceito de metodologias ativas remonta a estudiosos como Dewey, Piaget e Vygotsky, que enfatizaram a importância da experimentação, da interação social e da aprendizagem significativa no desenvolvimento cognitivo dos alunos.

De acordo com Curvo [1], as metodologias ativas desempenham um papel fundamental no ensino-aprendizagem de matemática, pois promovem a autonomia, a criatividade e o protagonismo dos estudantes no processo educativo. Segundo a autora, os principais benefícios apontados incluem, entre outros, a transformação do papel do estudante, que deixa de ser um mero receptor de informações e passa a ser o protagonista de sua aprendizagem, desenvolvendo habilidades investigativas, reflexivas, criativas e colaborativas; o ensino se torna mais atrativo e dinâmico, o que desperta o interesse e o desejo de aprender; o professor se torna o mediador, aquele que é o facilitador, auxiliando os alunos na busca de soluções e no desenvolvimento de competências necessárias para enfrentar desafios.

> "(...) constata-se que as metodologias ativas podem impactar positivamente o ensino-aprendizagem de matemática, pois tornam o aluno protagonista deste processo, incentivando a autonomia, promovendo o desejo prazeroso em buscar conhecimentos, instigando o pensamento e a criatividade para a resolução das atividades propostas do ensino de matemática."(Curvo [1, p. 241])

A adoção de metodologias ativas na educação matemática tem-se mostrado eficaz para aumentar o engajamento dos estudantes, promovendo um aprendizado mais dinâmico e contextualizado. Dentre as diversas abordagens existentes, abordaremos sobre a resolução de problemas e a gamificação.

2.1.1 Resolução de Problemas

A resolução de problemas é uma estratégia didática que visa ao desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia dos estudantes na construção do conhecimento matemático. De acordo com Pólya [14], a resolução de problemas segue um processo estruturado em quatro etapas: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução da solução e revisão do resultado. Essa abordagem permite que os alunos explorem conceitos matemáticos de maneira aplicada e significativa (Pólya [14]).

O entendimento da resolução de problemas como metodologia de ensino é discutido por vários autores, e, embora não seja recente, de acordo com Menezes et al. [11], somente no final do século XX, é que passou a ser estudada a utilização de problemas como ferramenta de ensino dentro de sala de aula. Ponte [15], em 1992, abordava o papel da resolução de problemas no ensino da matemática, destacando estratégias de ensino e competências cognitivas. Ponte também enfatiza a importância de conectar problemas matemáticos a situações da vida real, promovendo um aprendizado mais significativo.

O professor de matemática deve pesquisar, refletir sobre a utilização desta metodologia. O risco de usá-la de forma errada existe. Meros problemas de aplicação do conteúdo aprendido não é sua utilização correta.

> "Como metodologia, a resolução de problemas pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, aproximando esses conceitos da realidade dos estudantes, quando utilizada de forma adequada."(Menezes et al. [11, p. 217])

A resolução de problemas é um meio de construir novos conhecimentos e aplicar os já adquiridos, tornando o aprendizado mais relevante e envolvente. De acordo com Menezes et al. [11], essa abordagem permite que os estudantes desenvolvam habilidades como o pensamento crítico, criatividade e autonomia, além de conectar os conceitos matemáticos à realidade dos alunos. Os autores também sugerem que essa abordagem ajuda os alunos a superar desafios e a construir suas próprias estratégias de resolução. Ainda segundo [11], a escolha de problemas deve ser cuidadosa, considerando o nível de dificuldade e a conexão com o cotidiano dos estudantes, para garantir que a metodologia seja eficaz e significativa.

No contexto educacional brasileiro, a resolução de problemas é considerada pela *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) uma das abordagens fundamentais no ensino da Matemática. Essa estratégia é valorizada por promover o pensamento crítico, a autonomia intelectual e o desenvolvimento de competências como a argumentação e a modelagem, aspectos centrais para o letramento matemático (Ministério da Educação (BNCC) [12]).

2.2 Dissertações Publicadas pelo PROFMAT

Na expectativa de promover uma pesquisa inovadora, realizamos uma busca no diretório do *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional* (PROFMAT) por dissertações que abordassem temas correlatos ao desta dissertação. Utilizamos os seguintes termos de pesquisa: “apostila”, “números inteiros”, “congruência modular”, “triplas pitagóricas”, “ensino de matemática”e “material didático”.

Os resultados da pesquisa são apresentados na Tabela 2.1, que lista as dissertações encontradas e seus respectivos enfoques:

Ano	**Título da Dissertação**	**Enfoque**
2022	Apostila sobre a Matemática na Construção Civil com o uso do Sweet Home 3D	Aplicações da matemática na construção civil com tecnologia digital(Jesus [7])
2023	Elaboração de uma apostila para apresentar o infinito no ensino médio	Introdução ao conceito de infinito na educação básica (Fermat Vieira [5])
2024	Elaboração de uma apostila sobre programação e métodos numéricos para o ensino médio	Aplicação de programação e métodos numéricos para ensino de matemática Santos [18]

Tabela 2.1: Dissertações publicadas no PROFMAT sobre temas correlatos.

Dentre as dissertações analisadas, algumas apresentaram materiais didáticos em formato de apostila, como no caso de **Jesus** [7], **Fermat Vieira** [5] e **Santos** [18]. Entretanto, nenhuma dessas dissertações abordou especificamente a integração dos conteúdos de números inteiros, congruência modular e triplas pitagóricas em um material único voltado tanto para alunos quanto para professores. Essa constatação reforça a relevância deste estudo, que propõe um material estruturado com uma abordagem diferenciada, fundamentada nas metodologias ativas e na resolução de problemas como estratégia central de ensino.

3

Bases Curriculares e Diretrizes Educacionais

A educação matemática no Ensino Fundamental deve estar alinhada a diretrizes curriculares que orientem a seleção e organização dos conteúdos, promovendo um ensino significativo e contextualizado. No Brasil, a *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) e os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN) são documentos normativos que estabelecem competências e habilidades essenciais para cada etapa do processo de aprendizagem, assegurando uma formação progressiva e coerente ao longo da escolaridade.

> "A Matemática possibilita aos estudantes desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo." (Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 267])

Essa concepção amplia o papel da Matemática para além da execução de procedimentos, compreendendo-a como linguagem e ferramenta de interpretação da realidade. O ensino, nesse sentido, deve favorecer a construção de significados, a argumentação e a aplicação dos conceitos em diferentes contextos.

Os *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)* e a *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)* representam documentos orientadores importantes para o ensino no Brasil, embora apresentem naturezas e enfoques distintos. Os PCN, de caráter referencial e não obrigatório, propõem uma estrutura curricular ampla por disciplina, com ênfase no desenvolvimento de conteúdos específicos e na abordagem de temas transversais, como ética, meio ambiente e pluralidade cultural. A BNCC, por sua vez, tem caráter normativo e apresenta uma organização mais compacta, estruturada por competências e habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica. Diferentemente dos PCN, a BNCC desloca o foco do ensino de conteúdos isolados para o desenvolvimento de competências cognitivas, socioemocionais e práticas, buscando integrar os saberes escolares às demandas contemporâneas da sociedade.

Os *Parâmetros Curriculares Nacionais* reforçam essa perspectiva ao destacar a importância da contextualização e da articulação com a vivência dos alunos:

> "Sinaliza a importância do estabelecimento de conexões da Matemática com os conteúdos relacionados aos Temas Transversais – Ética, Pluralidade Cultural, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Trabalho e Consumo – uma das marcas destes parâmetros." (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 15])

Com base nessas orientações, o ensino deve valorizar o raciocínio lógico, a comunicação e a argumentação, tendo a resolução de problemas como eixo estruturante e respeitando a progressão dos conteúdos ao longo da trajetória escolar.

A BNCC organiza o ensino da Matemática por meio do desenvolvimento de competências que favorecem a aplicação do conhecimento em situações reais, articulando conceitos, procedimentos e atitudes. Entre seus objetivos está a formação de sujeitos críticos e autônomos, capazes de utilizar a matemática para interpretar e intervir no mundo. Dessa forma, temas como resolução de problemas, pensamento algébrico e argumentação promovem uma aprendizagem conectada à realidade dos estudantes.

Neste contexto, este capítulo tem como objetivo apresentar as diretrizes estabelecidas pela BNCC e pelos PCN, analisando como essas normativas orientam o ensino dos conceitos de números inteiros, congruência modular e triplas pitagóricas no Ensino Fundamental. Serão discutidos os objetivos de aprendizagem propostos para os anos escolares pertinentes, bem como a importância de uma abordagem que integre os conteúdos matemáticos à realidade dos estudantes, favorecendo a compreensão conceitual e a aplicabilidade do conhecimento.

3.1 BNCC para o 6º e 7º Ano

A BNCC estabelece diretrizes para o ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, com foco na progressão das aprendizagens e na ampliação do repertório conceitual dos estudantes. Para o 6º e 7º anos, destaca-se a consolidação do pensamento numérico e o desenvolvimento inicial de capacidades algébricas, por meio de atividades que envolvam resolução de problemas, identificação de padrões, uso de representações simbólicas e argumentação.

No 6º ano, os alunos são introduzidos ao conjunto dos números inteiros, ampliando a compreensão dos sistemas numéricos já trabalhados nos anos iniciais. Esse conteúdo é apresentado por meio de situações contextualizadas — como temperaturas, saldos e altitudes —, nas quais os números negativos adquirem significado. A habilidade EF06MA01 orienta "Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica." (Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 301]), permitindo a introdução gradual dos inteiros.

No 7º ano, os estudantes aprofundam as operações com números inteiros e exploram propriedades da divisibilidade. A habilidade EF07MA01 propõe a "Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos."(Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 307]). Esse conteúdo serve de base para a construção intuitiva da ideia de congruência, mesmo que não tratada de forma explícita pela BNCC.

Ainda nesse ano, a habilidade EF07MA03 orienta "Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração." Já a habilidade EF07MA15 propõe "Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas." (Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 307]), o que possibilita a introdução de triplas pitagóricas como exemplos de padrões que articulam aritmética, álgebra e geometria.

Complementando essas diretrizes, os PCN destacam a importância de articular a matemática ao cotidiano e às experiências sociais dos estudantes:

> "O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos, entre estes e as demais áreas do conhecimento e as situações do cotidiano." (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 37])

A BNCC também ressalta o compromisso com o letramento matemático:

> "O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas." (Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 266])

Além das habilidades específicas, tanto a BNCC quanto os PCN propõem o desenvolvimento de competências matemáticas gerais, como observação, comunicação, argumentação e validação de processos. Segundo os PCN:

> "O ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa." (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 56])

Essas competências sustentam o trabalho com os conteúdos desta dissertação, promovendo:

- **Raciocínio lógico e dedutivo**, ao compreender relações numéricas e representações diversas;
- **Resolução de problemas**, por meio da aplicação dos conceitos em contextos reais;

- **Modelagem matemática**, representando e resolvendo situações do cotidiano;
- **Integração algébrica e geométrica**, articulando diferentes linguagens e conceitos.

3.2 PCN de Matemática do MEC

Os PCN estabelecem princípios pedagógicos para o ensino de Matemática, com base na construção do conhecimento, no raciocínio lógico e na contextualização dos conteúdos. Esses princípios visam formar alunos capazes de utilizar a matemática para interpretar e transformar a realidade:

> "Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas." (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 15])

Um dos pilares desses parâmetros é o papel da Matemática na formação cidadã, pois, segundo os *Parâmetros Curriculares Nacionais*, "para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente etc." (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 27]).

Além disso, os PCN defendem a contextualização dos conteúdos, afirmando que "o significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais, entre ela e o cotidiano" (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 57]).

Outro aspecto importante é a diversificação das estratégias didáticas.

> "Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes — enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório — necessárias para a aprendizagem da Matemática." (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 47])

A organização dos conteúdos também deve ser flexível e conectada ao percurso dos alunos:

> "As possibilidades de sequenciar os conteúdos são múltiplas e decorrem mais das conexões que se estabelecem e dos conhecimentos já construídos pelos alunos do que da ideia de pré-requisito ou de uma sucessão de tópicos estabelecida a priori." (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 53])

Além disso, o documento enfatiza o papel da investigação e da generalização:

> “No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas.” (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 68])

Por fim, os PCN ressaltam a importância de garantir o acesso à aprendizagem matemática a todos os estudantes, afirmando que “a Matemática pode e deve estar ao alcance de todos e a garantia de sua aprendizagem deve ser meta prioritária do trabalho docente” (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 56]).

Dessa forma, a proposta didática apresentada nesta dissertação se alinha às diretrizes dos documentos curriculares nacionais, promovendo uma educação matemática crítica, significativa, inclusiva e conectada à realidade dos estudantes.

4

Fundamentação Teórica

O ensino da Matemática no Ensino Fundamental exige uma abordagem estruturada e gradual, de modo que os conceitos sejam introduzidos de maneira coerente e interligada. Nesse contexto, este capítulo tem o propósito de estabelecer os princípios matemáticos e educacionais que embasam a construção das apostilas utilizadas no ensino de números inteiros, congruência modular e triplas pitagóricas.

A Matemática é uma ciência estruturada logicamente, cuja aprendizagem se dá por meio da construção sequencial de conceitos. No ensino fundamental, a introdução dos conjuntos numéricos deve ocorrer de forma encadeada, garantindo que cada novo conjunto se apoie na compreensão dos anteriores. O domínio dos números naturais, por exemplo, é essencial para a compreensão dos inteiros, racionais e reais, pois esses conjuntos ampliam e aprofundam ideias previamente estabelecidas. Quando essa transição é bem conduzida, os alunos conseguem estabelecer relações significativas entre os diferentes conjuntos e aplicar os conhecimentos adquiridos de maneira mais eficiente e contextualizada.

Esse percurso não apenas facilita a compreensão das operações fundamentais, mas também prepara o estudante para lidar com conceitos mais abstratos e estruturados, como a congruência modular e as propriedades dos números primos. A organização lógica da sequência de ensino é essencial para que os alunos construam o conhecimento de forma progressiva e significativa, estabelecendo relações entre os diferentes tópicos e desenvolvendo uma base sólida para conteúdos mais complexos. A estruturação dos conceitos respeitando essa progressão favorece a assimilação duradoura e a ampliação do raciocínio matemático ao longo dos anos escolares.

Além da relevância matemática dos conceitos abordados, a escolha dos temas desta dissertação se justifica pela necessidade de explorar metodologias inovadoras que tornem a aprendizagem mais acessível e significativa. A adoção de novas estratégias no ensino da matemática pode tornar o processo mais dinâmico e contextualizado, favorecendo a aproximação entre os conteúdos teóricos e suas aplicações práticas, além de estimular a participação ativa dos alunos.

A congruência modular, por exemplo, não se limita ao campo teórico da aritmética, sendo amplamente utilizada em contextos práticos como a contagem cíclica de horários e dias da semana, comuns na organização de calendários e no funcionamento de relógios analógicos. Da mesma forma, as triplas pitagóricas extrapolam os limites da geometria teórica, sendo aplicadas em situações reais como construções civis, sistemas de navegação e algoritmos computacionais. Esses temas, ao serem explorados de forma contextualizada, contribuem para tornar a aprendizagem mais concreta, significativa e conectada ao cotidiano dos alunos.

Dessa forma, os tópicos abordados nesta seção foram selecionados para fornecer a base necessária à compreensão do material didático desenvolvido, garantindo que os conceitos matemáticos sejam apresentados de maneira fundamentada e alinhada às diretrizes educacionais. A seguir, serão discutidos os números inteiros, sua definição e importância dentro do ensino de matemática.

4.1 Números Inteiros

A matemática é uma ciência que se desenvolveu a partir da necessidade humana de quantificar, medir e organizar o mundo ao redor. O estudo dos números sempre esteve no centro dessa evolução, passando por diferentes etapas de generalização. Inicialmente, os números naturais foram suficientes para representar quantidades e realizar contagens. No entanto, com o avanço das civilizações e a complexificação das interações comerciais, financeiras e científicas, tornou-se necessário expandir o conceito de número para lidar com situações que envolvem perdas, temperaturas negativas e deslocamentos em direções opostas. Como descrevem os *Parâmetros Curriculares Nacionais*, “além das situações do cotidiano os números negativos também surgiram no interior da Matemática na resolução de equações algébricas. [...] Só no século XIX os negativos foram interpretados como uma ampliação dos naturais e incorporaram as leis da Aritmética. Passaram então a integrar a hierarquia dos sistemas numéricos como números inteiros” (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 97]).

Dessa necessidade emergiu o conjunto dos **números inteiros**, representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, proveniente da palavra alemã *Zahlen*, que significa ”números”. Esse conjunto inclui os números naturais, seus opostos negativos e o zero, permitindo uma ampliação das possibilidades operatórias e conceituais. O estudo dos números inteiros contribui significativamente para a consolidação de noções fundamentais da aritmética e prepara o terreno para o desenvolvimento do pensamento algébrico, que será aprofundado nos anos seguintes da educação básica.

O ensino dos números inteiros desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento lógico dos estudantes, preparando-os para operações matemáticas mais avançadas e para a transição posterior aos números racionais e reais. De acordo com os *Parâmetros Curriculares Nacionais*, “os contatos dos alunos com os significados dos números inteiros podem surgir da análise de situações-problema do campo aditivo. Situações em que esses números indicam falta, diferença, posição ou deslocamento na reta numérica” (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 99]).

Além de seu papel fundamental na construção da aritmética elementar, os números inteiros desempenham um papel essencial em diversas áreas do conhecimento, como a física, a economia, a ciência da computação e a criptografia. Sua estrutura permite representar relações de simetria, ciclos e variações, além de possibilitar a modelagem e resolução de problemas em contextos práticos. Aplicações que envolvem algoritmos computacionais, codificação de informações e sistemas de segurança digital utilizam os inteiros como base para a construção de soluções eficientes e seguras.

A importância do conjunto dos números inteiros transcende sua função básica na aritmética elementar, alcançando diversas aplicações na construção de modelos matemáticos voltados à resolução de problemas práticos. Sua introdução representou um avanço fundamental no tratamento das operações inversas, especialmente a subtração, que nos números naturais não é sempre possível. Como destaca Domingues [3, p. 89], os inteiros surgem como uma ampliação do conjunto dos naturais, permitindo interpretar diferenças mesmo quando o minuendo é menor que o subtraendo. Além disso, a possibilidade de representar valores negativos amplia significativamente o alcance dos modelos matemáticos, sobretudo em contextos que envolvem variações, simetrias, fluxos e ciclos presentes tanto na matemática pura quanto em aplicações científicas.

Nos tópicos seguintes, serão abordadas a **definição formal dos números inteiros**, sua **relação com os números naturais e racionais**, bem como uma **introdução aos números primos**, destacando sua relevância dentro do conjunto dos inteiros. Para fundamentar essa discussão, utilizamos como referência as obras de Domingues [3], Hefez [6], Martinez et al. [10] e Roque [17] que tratam do tema com profundidade e clareza, tanto do ponto de vista didático quanto teórico. Neste trabalho, optamos por não apresentar definições com o rigor formal exigido em contextos mais avançados da matemática. Partimos do pressuposto de que o leitor já possui familiaridade com o conceito de número inteiro, bem como com as operações básicas de adição, subtração e suas propriedades fundamentais. Caso seja necessário revisar conceitos que aqui serão utilizados sem uma explicação detalhada, recomendamos a leitura atenta das obras mencionadas, que oferecem uma base sólida e detalhada sobre o tema.

4.1.1 Definição e importância dos números inteiros

Os números inteiros formam um dos principais conjuntos numéricos estudados na matemática. Eles são representados pelo símbolo $\mathbb{Z}$ e definidos como o conjunto de todos os números naturais, seus opostos negativos e o zero:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Diferentemente dos números naturais, que são tradicionalmente utilizados para a contagem de elementos e a quantificação de objetos, os números inteiros ampliam esse conjunto ao incluir os números negativos. Essa extensão permite representar situações que envolvem perdas, débitos, temperaturas abaixo de zero, deslocamentos em sentido oposto e outras grandezas que exigem a consideração de valores inferiores a zero. O surgimento dos inteiros está diretamente relacionado à necessidade de superar limitações das operações definidas no conjunto dos naturais, especialmente na subtração de dois números naturais $a - b$, quando o minuendo a é menor que o subtraendo b, situação em que o resultado não pertence ao conjunto $\mathbb{N}$. Assim, os inteiros oferecem uma estrutura mais completa para tratar de problemas matemáticos presentes tanto em contextos escolares quanto em aplicações cotidianas e científicas.

A introdução dos números inteiros no ensino fundamental é essencial para que os estudantes compreendam a aritmética de forma mais ampla e contextualizada, especialmente em situações que envolvam perdas, diferenças, orientações ou posições relativas.

> "Os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diferentes situações em que esses números estejam presentes. [...] As primeiras abordagens dos inteiros podem apoiar-se nas ideias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outras situações."(Ministério da Educação (PCN) [13, p.66])

Na história da matemática, a necessidade de representar dívidas, ausências e variações impulsionou o desenvolvimento dos números negativos. Embora civilizações antigas, como os chineses e hindus, tenham introduzido representações para grandezas opostas, sua aceitação plena foi um processo longo e complexo, especialmente no Ocidente. Conforme apontam os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> "O uso pioneiro dos números negativos é atribuído aos chineses e aos hindus, que conceberam símbolos para as faltas e diferenças "impossíveis" (dívidas). A adoção do zero teve um papel-chave na construção dos inteiros, possibilitando operar com grandezas negativas, mudando o caráter de "zero-nada" para "zero-origem", favorecendo, assim, a ideia de grandezas opostas ou simétricas. [...] No entanto, sua aceitação seguiu uma longa e demorada trajetória. Só no século XIX os negativos foram interpretados como uma ampliação dos naturais e incorporam as leis da Aritmética." (Ministério da Educação (PCN) [13, p.97])

A transição da concepção de *zero-nada* para *zero-origem* representa um marco conceitual significativo na história da Matemática. Enquanto o *zero-nada* está associado à ausência de quantidade — uma representação do "vazio" ou da "falta" —, o *zero-origem* assume um papel estrutural no sistema numérico, especialmente na reta dos números inteiros. Nessa perspectiva, o zero deixa de ser apenas um símbolo para indicar a inexistência de algo e passa a desempenhar a função de ponto de referência, situando-se no centro de simetria entre os números positivos e negativos. Essa mudança de compreensão favorece a construção do conceito de grandezas opostas, tornando possível visualizar e operar com dívidas e créditos, perdas e ganhos, temperaturas abaixo de zero, entre outros contextos que envolvem simetria e direção.

Atualmente, os números inteiros possuem aplicações em diversas áreas do conhecimento. Na física, são usados para indicar cargas elétricas e temperaturas. Na economia, representam balanços financeiros e variações de mercado. Na computação, aparecem na lógica binária e nos algoritmos de criptografia.

Dessa forma, os números inteiros não são apenas um conceito teórico, mas uma ferramenta essencial para a modelagem de fenômenos matemáticos e reais. A sua compreensão permite que os estudantes desenvolvam um raciocínio lógico mais estruturado e aplicável a diferentes contextos do conhecimento científico e cotidiano.

4.1.2 Relação com os números naturais e racionais

Os números inteiros fazem parte de uma hierarquia numérica que se desenvolve a partir dos números naturais e se estende até os conjuntos mais abrangentes, como os racionais, reais e complexos. Essa estrutura é fundamental para a construção do pensamento matemático, permitindo a generalização de conceitos e operações. A apresentação progressiva desses conjuntos favorece a compreensão das relações entre os diferentes sistemas numéricos e contribui para o desenvolvimento de habilidades algébricas mais complexas.

O primeiro conjunto numérico estudado na matemática é o dos **números naturais** ($\mathbb{N}$), cujo nome se dá pela forma como surgiram, naturalmente. Os primeiros registros são de cerca de 3.000 a.C., feitos pelos sumérios, na Mesopotâmia Antiga. O zero ainda não era empregado, aparecendo muitos séculos mais tarde. Domingues [3] traz um estudo detalhado deste conjunto, incluindo sua construção axiomática realizada pelo matemático italiano Giuseppe Peano, em 1889. Representamos o conjunto dos números naturais por:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Como já mencionado, o número zero surgiu, do ponto de vista histórico, posteriormente aos números naturais. A inclusão do zero nesse conjunto é motivo de divergência entre matemáticos: enquanto alguns autores o consideram pertencente ao conjunto dos naturais, outros o excluem dessa classificação. Contudo, essa discussão extrapola os objetivos deste trabalho e, portanto, não será aprofundada neste contexto.

Entretanto, os números naturais não são suficientes para representar todas as situações do cotidiano, especialmente aquelas que envolvem perdas ou valores negativos. Para preencher essa lacuna, o conjunto dos **números inteiros** ($\mathbb{Z}$) foi introduzido, englobando os números naturais, seus opostos negativos e o zero:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Dessa forma, podemos afirmar que os números naturais são um subconjunto dos inteiros, pois se assemelham aos inteiros positivos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

A introdução dos números inteiros representa um avanço significativo na compreensão das operações matemáticas, possibilitando a ampliação da aritmética básica e o desenvolvimento do pensamento algébrico. A expansão do conjunto dos números naturais para o conjunto dos inteiros responde à necessidade de representar e operar com quantidades negativas, o que amplia a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em situações cotidianas e forma a base para estruturas algébricas mais complexas.

Contudo, os números inteiros ainda não permitem a representação de frações e números decimais. Para isso, surge o conjunto dos **números racionais** ($\mathbb{Q}$), que inclui todas as frações

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \quad \text{com } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \;\middle|\; \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; ad = bc \right\}.$$

Assim, qualquer número inteiro pode ser representado como um número racional, pois para todo $z \in \mathbb{Z}$, definimos:

$$z = \frac{z}{1}.$$

Por exemplo, os números inteiros -3, 0 e 5 podem ser escritos como:

$$-3 = \frac{-3}{1}, \quad 0 = \frac{0}{1}, \quad 5 = \frac{5}{1}.$$

Isso mostra que $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

A relação entre esses conjuntos evidencia a **progressão do pensamento matemático**, permitindo que os alunos avancem de conceitos mais simples para estruturas numéricas mais complexas. A construção dos sistemas numéricos é uma abstração fundamental da matemática, pois permite estabelecer conexões entre diferentes níveis de complexidade, desde a aritmética básica até áreas mais avançadas da álgebra e da análise.

Além disso, compreender essa relação entre os conjuntos numéricos é essencial para o desenvolvimento da **consciência numérica** dos alunos, permitindo que associem conceitos aprendidos previamente a novos desafios matemáticos. Ao reconhecerem as relações entre os diferentes sistemas numéricos, os estudantes desenvolvem habilidades de abstração, raciocínio lógico e aplicabilidade dos conhecimentos em contextos diversos.

Dessa forma, ao reconhecerem que os números inteiros fazem parte de um sistema maior, os estudantes conseguem estabelecer conexões entre diferentes áreas da matemática e aplicar esse conhecimento em situações do cotidiano e em contextos científicos.

4.1.3 Lema da Divisão de Euclides

O **Lema da Divisão de Euclides** é um dos resultados fundamentais da teoria dos números e contribui diretamente para a construção da aritmética dos números inteiros. Seu enunciado está no Teorema (4.1), descrito abaixo.

Teorema 4.1 (Lema da Divisão de Euclides): Dados dois inteiros a e b com $b \neq 0$, existem inteiros q e r únicos tais que:

$$a = bq + r, \quad \text{com } b \neq 0 \text{ e } 0 \leq r < |b|. \tag{4.1}$$

Para demonstrar este teorema, teremos como referência Hefez [6, p.46] que usa uma proposição elegante, denominada propriedade arquimediana. Antes de enunciá-la definiremos módulo de um número inteiro, importante para o entendimento de sua demonstração.

Definição 4.2: Seja $n \in \mathbb{Z}$, o **módulo** ou **valor absoluto** de n é o número $|n|$, definido por:

$$|n| = \begin{cases} n & \text{se } n \geq 0 \\ -n & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Proposição 4.3 (Propriedade Arquimediana): Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$nb > a.$$

Demonstração. Dados $a,b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, concluímos que $|b| \geq 1$. Como $|a| \geq 0$, temos que $|a| + 1 \geq |a| \geq a$, logo:

$$(|a| + 1)|b| \geq |a| + 1 \geq a$$

O resultado segue tomando na desigualdade acima:

$$n = \begin{cases} |a| + 1, & \text{se } b > 0 \\ -(|a| + 1), & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

□

Estamos prontos para demonstrar o Teorema 4.1.

Demonstração. Sejam $a,b \in \mathbb{Z}$. Note que há dois itens a serem demonstrados: a existência de $q,r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r < |b|$, tais que $a = bq + r$ e a unicidade de q e r.

Considere o conjunto:

$$S = \{x = a - by \mid y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}.$$

- Existência: Pela Propriedade Arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

  $$n(-b) > -a,$$

  somando a dos dois lados da desigualdade acima, teremos

  $$a - nb > 0,$$

  o que mostra que $a - nb \in S$, e S é não vazio.

  O conjunto S é limitado inferiormente por 0 e, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que S possui um menor elemento, digamos r. Como $r \in S$, será da forma $r = a - bq$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Temos que $r \geq 0$. Vamos mostrar que $r < |b|$. Suponhamos por absurdo que $r \geq |b|$. Portanto, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = a - (q \pm 1)b \in S$ com $s < r$. E, dessa forma, encontramos r e q como queríamos.

- Unicidade: Suponha que $a = bq + r = bq' + r'$, com $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. Então, temos:

$$-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|.$$

Logo, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado, $b(q - q') = r' - r$, o que implica:

$$|b||q - q'| = |r' - r| < |b|.$$

Essa desigualdade só é possível se $q = q'$ e, consequentemente, $r = r'$, concluindo a unicidade.

$\square$

Exemplo 4.1.1: De acordo com o Lema da Divisão de Euclides, podemos escrever 11 como $11 = 4 \cdot 2 + 3$. Aqui dizemos que o resto da divisão de 11 por 4 é 3.

Exemplo 4.1.2: Sejam $a = 713$ e $b = 13$. Aplicando o **Lema da Divisão de Euclides**, buscamos determinar quociente q e resto r tais que:

$$713 = 13 \cdot q + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < 13.$$

Dividindo 713 por 13, obtemos:

$$713 \div 13 = 54 \text{ com resto } 11.$$

Portanto, temos:

$$713 = 13 \cdot 54 + 11,$$

com $q = 54$ e $r = 11$, satisfazendo as condições do lema, já que $0 \leq 11 < 13$.

Esse resultado, além de fornecer um método sistemático para a divisão com resto, é a base para a definição do algoritmo de Euclides, utilizado para calcular o máximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros. O algoritmo, por sua vez, está na origem de conceitos fundamentais da aritmética, como a decomposição de inteiros, o Teorema de Bachet-Bézout e o desenvolvimento da estrutura dos números primos, este último veremos a seguir.

Observe que, pelo algoritmo da divisão de Euclides, na divisão por 2, há somente dois restos possíveis, a saber, 0 e 1. Dessa maneira, para todo inteiro a, há somente duas formas de escrevê-lo:

$$a = \begin{cases} 2 \cdot q + 0 \\ 2 \cdot q + 1 \end{cases}$$

Essas duas escritas, únicas, nos sugerem a seguinte definição:

Definição 4.4: Um número inteiro é dito **par** se é múltiplo de 2, ou seja, pode ser escrito na forma $2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Um número inteiro é dito **ímpar** se pode ser escrito na forma $2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 4.1.3: O número 2 é par, pois pode ser escrito como $2 = 2 \cdot 1 + 0$. Já o número 13 é ímpar, pois pode ser representado como $13 = 2 \cdot 6 + 1$.

A paridade de um número está relacionada ao seu dígito das unidades. Isso ocorre porque todo número inteiro pode ser escrito na forma $n = 10k + r$, onde k é um número inteiro e r é o resto da divisão por 10, ou seja, o algarismo da casa das unidades. Se $r \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, o número é par; caso contrário, se $r \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, o número é ímpar. Assim, ao observar apenas o último algarismo de um número, é possível identificar sua paridade sem necessidade de realizar a divisão completa por 2.

Com o algoritmo de Euclides, podemos definir uma relação de divisibilidade em $\mathbb{Z}$:

Exemplo 4.1.4: Vamos utilizar o **Algoritmo de Euclides** para determinar o máximo divisor comum entre os números 252 e 105.

Aplicamos sucessivamente o **Lema da Divisão de Euclides**:

$$\begin{aligned} 252 &= 105 \cdot 2 + 42 \\ 105 &= 42 \cdot 2 + 21 \\ 42 &= 21 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Como o último resto diferente de zero foi 21, concluímos que:

$$\text{MDC}(252, 105) = 21.$$

Definição 4.5: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que a divide b, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot c$. Usamos a notação $a \mid b$.

Exemplo: O número 4 divide o número 20, isto é, $4 \mid 20$, pois $20 = 4 \cdot 5$.

Para os números inteiros a e b, se $a \mid b$, teremos $b = a \cdot c$, para algum $c \in \mathbb{Z}$, e usaremos os termos:

- b é dito **múltiplo** de a, ou **divisível** por a;
- a é dito **divisor** de b.

Abaixo, apresentamos algumas propriedades que podem ser verificadas em Hefez [6, p. 40–44]:

- $1 \mid a$, $a \mid a$ e $a \mid 0$;
- $0 \mid a \Leftrightarrow a = 0$;
- $a \mid b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$;

- se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$;
- $a \mid b$ e $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$;
- se $a \mid (b \pm c)$ então $a \mid b \Leftrightarrow a \mid c$;
- se $a \mid b$ e $a \mid c$, então, para todo $x{,}y \in \mathbb{Z}$, temos que $a \mid (xb + yc)$;
- se $b \neq 0$, então $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$;

Exemplo 4.1.5: Pelo que vimos até aqui, podemos dizer que um número inteiro a é divisível por 3, se existe $c \in \mathbb{Z}$, tal que $a = 3c$. Isto é o mesmo que dizer que o resto da divisão de a por 3 é zero.

Esta afirmação, e o lema da divisão de Euclides, nos ajudam a provar a seguinte proposição: Dados três números inteiros consecutivos, um e apenas um deles, é múltiplo de 3.

De fato, sejam a, $a+1$, $a+2$, três inteiros consecutivos. Temos três possibilidades para a:

Primeira possibilidade: $a = 3q$. Neste caso, $a + 1 = 3q + 1$ e $a + 2 = 3q + 2$, o que concluímos que somente a é múltiplo de 3.

Segunda Possibilidade: $a = 3q+1$. Neste caso, $a+1 = 3q+2$ e $a+2 = 3q+3 = 3(q+1)$. Assim, somente $a + 2$ é múltiplo de 3.

Terceira Possibilidade: $a = 3q + 2$. Neste caso, $a + 1 = 3q + 3 = 3(q + 1)$ e $a + 2 = 3q + 4 = 3(q + 1) + 1$. Logo, somente $a + 1$ é múltiplo de 3.

Dando continuidade ao trabalho, estudaremos uma classe de números muito importante na aritmética, chamada **números primos**.

4.1.4 Introdução aos números primos

Os números primos são inteiros maiores do que 1 que desempenham um papel central na teoria dos números e na estrutura dos sistemas numéricos. Desde a antiguidade, matemáticos buscam compreender suas propriedades e padrões. Eles são caracterizados pelo fato de possuírem exatamente dois divisores positivos distintos: o número 1 e ele próprio.

Definição 4.6: Um número inteiro $p > 1$ é dito **primo** se toda vez que escrevermos p como produto de dois inteiros positivos a e b, $p = a$ ou $p = b$.

$$p = a \cdot b \Rightarrow p = a \text{ ou } p = b.$$

Se um número inteiro maior que 1 não for primo, ele é dito **composto**, pois pode ser escrito como o produto de dois ou mais números inteiros menores do que o próprio número e maiores que 1.

Exemplo 4.1.6: O número 24 é composto, pois $24 = 3 \cdot 8$. Já 5 é primo, pois não é divisível por 2,3 e nem 4.

Os primeiros números primos são:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$$

Uma observação relevante é que **o número 2 é o único número primo par**, pois todos os demais números pares são divisíveis por 2 e, portanto, não podem ser primos. Os números primos, por sua vez, desempenham papel essencial na estrutura da aritmética e aparecem em diversas aplicações, como na teoria dos números e na criptografia moderna.

Saber se um número é primo, é uma tarefa difícil. Se perguntássemos ao leitor se 31 é primo, qual seria a resposta? Mesmo para esse número pequeno, um breve tempo para analisar se ele é divisível pelos números inteiros positivos menores que ele, é necessário. Na medida que o número vai aumentando, se torna cada vez mais difícil essa análise. Para isso, há algumas proposições que nos auxiliam neste trabalho. Aqui, as citaremos sem demonstração, mas o leitor conseguirá encontrá-las, facilmente, em Hefez [6, p. 124 - 132].

Proposição 4.7: Todo número inteiro n possui um divisor primo p, menor ou igual a n.

Essa proposição já nos ajuda bastante. Poderíamos usá-la para decidir se 31 é primo. Note que, 31 precisa ter um divisor primo, mas, ao dividi-lo por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29, os primos menores que 31, perceberemos que 31 não é divisível por nenhum deles, logo, 31 é primo. Mas ainda assim, são muitas divisões a fazer. Seria interessante uma maneira mais rápida de descobrir a primalidade de um número inteiro.

Proposição 4.8: Todo número inteiro n, possui um divisor primo p, tal que $p \leq \sqrt{n}$.

A proposição acima acelera nosso cálculo para descobrir a primalidade de um número inteiro. Veja que $5 < \sqrt{31} < 6$. Assim, basta verificar se 31 é divisível por 2,3 e 5. Como a resposta é negativa, 31 é primo.

A importância dos números primos está fortemente relacionada ao **Teorema Fundamental da Aritmética**, que será enunciado da seguinte forma.

Teorema 4.9 (Teorema Fundamental da Aritmética): Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética, é importante ressaltar que seu entendimento completo depende de alguns resultados auxiliares fundamentais da teoria dos números. Mais precisamente, faremos uso dos seguintes resultados clássicos:

Proposição 4.10: Se p é um número primo, então, sempre que p dividir um produto de inteiros, $p|ab$, teremos que $p|a$ ou $p|b$.

Corolário 4.11: Sejam $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ números primos. Se $p \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n)$, então $p = p_i$ para algum $i \in \{1,2, \ldots ,n\}$.

Esses resultados, embora essenciais para a prova detalhada, envolvem demonstrações que fogem ao objetivo central desta dissertação, que é apresentar uma abordagem lúdica e acessível à teoria dos números inteiros. Por essa razão, optamos por não reproduzir integralmente essas demonstrações aqui. Entretanto, o leitor interessado pode encontrá-las detalhadamente apresentadas em Hefez [6, p. 82-83 e p. 122-123].

Agora, com esses resultados preliminares em mente, passemos à demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética.

Demonstração. Utilizaremos a segunda forma do Princípio de Indução.

(Base da indução) Se $n = 2$, o resultado é obviamente verificado.

(Passo indutivo) Suponhamos o resultado verdadeiro para todos os números naturais menores que n, e demonstremos que ele vale para n.

Se o número n é primo, nada há para demonstrar.

Suponhamos então que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 \cdot n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$ e $q_1, q_2, \ldots, q_s$ tais que:

$$n_1 = p_1 p_2 \ldots p_r \quad \text{e} \quad n_2 = q_1 q_2 \ldots q_s$$

Portanto:

$$n = p_1 p_2 \ldots p_r q_1 q_2 \ldots q_s$$

e n é escrito como produto de primos.

Provaremos, agora, a unicidade desta escrita.

Suponha que tenhamos duas decomposições em primos para o mesmo n, ou seja:

$$n = p_1 p_2 \ldots p_r = q_1 q_2 \ldots q_s$$

onde os p_i e os q_j são números primos. Como $p_1 \mid q_1 q_2 \ldots q_s$, então pelo corolário citado anteriormente, devemos ter $p_1 = q_j$ para algum j, que, após reordenamento dos fatores $q_1, q_2, \ldots, q_s$, podemos supor, sem perda de generalidade, que seja q_1. Assim:

$$p_2 p_3 \ldots p_r = q_2 q_3 \ldots q_s$$

Como o número $p_2 p_3 \ldots p_r < n$, a hipótese de indução implica que $r = s$, e que os números primos p_i e q_j são iguais dois a dois.

Portanto, a fatoração é única, a menos da ordem dos fatores. □

Exemplo 4.1.7: Algumas fatorações únicas de números inteiros são dadas por:

- $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
- $75 = 3 \cdot 5^2$
- $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$

- $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Observe que cada número inteiro maior do que 1 possui uma decomposição única em fatores primos, considerando apenas a ordem crescente dos fatores.

Conhecemos alguns primos. A distribuição desses primos ao longo da reta dos inteiros, não parece ter um padrão. Temos 2, 3 primos consecutivos, depois, o próximo primo está a duas unidade, é o 5, e o padrão continua para o próximo primo da lista, 7. Porém, o próximo primo já está a quatro unidades, $7 + 4 = 11$, e, de 11 para 13 volta a ser duas unidades de distância. De 13 para 17, quatro unidades, de 17 para 19 duas. E esse padrão continua (duas unidades, depois quatro unidades), mas falha ao pensarmos nos primos 23 e 29. Seguindo a sequência crescente de primos, perceberemos que, aparentemente, não há um padrão. A distribuição dos números primos ao longo da reta numérica é um dos problemas mais intrigantes da matemática. Embora pareçam surgir de maneira irregular, há padrões assintóticos que descrevem sua frequência. A função $\pi(n)$, conhecida como **função contador de primos**, estima quantos números primos existem até um determinado número n. O matemático Carl Friedrich Gauss conjecturou que essa função pode ser aproximada por:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln(n)}$$

Sobre a distribuição dos primos, sabe-se que eles são estudados desde a Antiguidade e que sua disposição ao longo da reta numérica apresenta um padrão aparentemente irregular. A demonstração da infinitude dos primos remonta a Euclides, mas o estudo aprofundado de sua distribuição só avançou significativamente nos séculos XIX e XX, com o desenvolvimento da teoria dos números e da análise matemática. Como destacam Martinez et al. [10, p.309], “problemas concernentes a números primos têm fascinado os matemáticos” desde os tempos mais remotos, sendo o problema de distinguir primos de compostos um dos mais importantes na aritmética.

Além de seu interesse teórico, os números primos possuem aplicações fundamentais na matemática e em outras áreas do conhecimento. Na computação, são essenciais para a criptografia moderna, especialmente nos algoritmos de chave pública, como o **RSA**, que se baseia na dificuldade de fatoração de números grandes em seus primos componentes. Na teoria dos números, conjecturas como a de Goldbach e a Hipótese de Riemann permanecem como alguns dos maiores desafios matemáticos ainda sem solução.

A compreensão dos números primos é essencial para a progressão do estudo da aritmética e para o aprofundamento em estruturas numéricas mais complexas. Seus padrões e propriedades continuam a ser objeto de pesquisa, tanto na matemática pura quanto em diversas aplicações científicas e tecnológicas, como na teoria da informação.

Avançando no estudo de números inteiros, uma definição importante, já mencionada no capítulo, é a de Máximo Divisor Comum (mdc).

Definição 4.12: Sejam a e b dois inteiros. Diremos que um número inteiro $d \geq 0$ é um **máximo divisor comum** (MDC) de a e b se satisfaz as seguintes propriedades:

1. d é um divisor comum de a e b, isto é, $d \mid a$ e $d \mid b$;

2. Para todo inteiro d' tal que $d' \mid a$ e $d' \mid b$, tem-se que $d' \mid d$.

Proposição 4.13: O máximo divisor comum de dois inteiros a e b, conforme a Definição 4.12, é único.

Demonstração. Suponha que existam dois inteiros $d \geq 0$ e $d' \geq 0$ que satisfaçam as propriedades da Definição 4.12, ou seja, ambos são máximos divisores comuns de a e b.

Como d é MDC de a e b, então:

$$d \mid a \quad \text{e} \quad d \mid b.$$

Da mesma forma, como d' também é MDC de a e b, então:

$$d' \mid a \quad \text{e} \quad d' \mid b.$$

Pela segunda condição da definição, como $d' \mid a$ e $d' \mid b$, e d é MDC, então:

$$d' \mid d.$$

Analogamente, como $d \mid a$ e $d \mid b$, e d' é MDC, então:

$$d \mid d'.$$

Portanto, temos que $d \mid d'$ e $d' \mid d$, o que implica que $d = d'$, pois ambos são inteiros não negativos.

Logo, o máximo divisor comum é único. □

Exemplo 4.1.8: Sejam $a = 12$ e $b = 18$. Os divisores de 12 são:

$$\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\},$$

e os divisores de 18 são:

$$\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18\}.$$

Os divisores comuns de 12 e 18 são $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$. O maior deles é 6, logo:

$$\text{mdc}(12, 18) = 6.$$

Exemplo 4.1.9: Considere agora $a = 20$ e $b = 33$. Os divisores comuns de 20 e 33 são apenas $\{\pm1\}$. Portanto:

$$\text{mdc}(20, 33) = 1.$$

Neste caso, dizemos que 20 e 33 são **primos entre si**.

Definição 4.14: Dois números inteiros a e b são ditos **primos entre si**, ou **coprimos**, se $\text{mdc}(a, b) = 1$; ou seja, se o único divisor comum positivo de ambos é o número 1.

Note que, dados inteiros a, b, temos as seguintes propriedades fundamentais do máximo divisor comum:

- **Simetria:** $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, a)$;
- **Comportamento com zero:**

$$\text{mdc}(a, 0) = |a| \quad \text{se } a \neq 0, \quad \text{e} \quad \text{mdc}(0, b) = |b| \quad \text{se } b \neq 0;$$

  por convenção, define-se $\text{mdc}(0, 0) = 0$;
- **Propriedade multiplicativa do MDC:** Se $\text{mdc}(a, c) = 1$ e $\text{mdc}(b, c) = 1$, então $\text{mdc}(ab, c) = 1$.

Proposição 4.15: Se p é primo e $a \in \mathbb{Z}$, então $\text{mdc}(p,a) = 1$ ou $\text{mdc}(p,a) = p$.

Demonstração. Esta proposição segue do fato de que p é primo, por isso possui apenas dois divisores positivos, 1 e ele mesmo. Assim, se $p|a$, $\text{mdc}(p,a) = p$, caso contrário $\text{mdc}(p,a) = 1$. $\square$

Embora a definição seja simples, calcular o mdc de dois inteiros pode ser trabalhoso. Por exemplo, qual seria o mdc de 234 e 540? Devemos encontrar um divisor comum de ambos e, termos a certeza de que não há outro maior. Na medida em que os números vão aumentando, a dificuldade aumenta. Hefez [6, p.75] traz um lema que facilita muito este trabalho e nos garante a sua existência e um modo de calculá-lo.

Lema 4.16: Considere a, b, n inteiros. Se existe o $\text{mdc}(a,b-na)$ então existe $\text{mdc}(a,b)$ e,

$$\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(a,b - na).$$

Demonstração. Chamemos de $d = \text{mdc}(a,b - na)$. Pela definição de mdc, temos que

- $d|a$ e $d|(b - na)$

Portanto, d divide qualquer combinação linear de a e $b - na$, em particular, $d|(n \cdot a) + (b - na)$, ou seja, $b|d$.

Queremos provar que $d = \text{mdc}(a,b)$. Já sabemos que $d|a$ e $d|b$. Basta verificarmos o item (ii) da Definição (4.12). Para isso, seja c um inteiro tal que $c|a$ e $c|b$. Logo, c divide qualquer combinação de a e b. Dessa forma, teremos

$$c|(b - n \cdot a).$$

Mas $d = \text{mdc}(a,b - na)$, como $c|a$ e $c|(b - na)$, pela Definição (4.12), $d|c$. E, portanto, $d = \text{mdc}(a,b)$. $\square$

Exemplo 4.1.10: O valor do mdc(234,540) pode ser calculado da seguinte forma, usando o Lema (4.16)

$$\begin{aligned}\text{mdc}(234{,}540) &= \text{mdc}(234{,}540 - 2 \cdot 234) = \\ &= \text{mdc}(234{,}72) = \text{mdc}(72, 234 - 3 \cdot 72) = \\ &= \text{mdc}(72{,}18) = \text{mdc}(18{,}72 - 4 \cdot 18) = \\ &= \text{mdc}(18{,}0) = 18\end{aligned}$$

Assim mdc(234,540) = 18. O leitor pode estar se perguntando, por qual motivo o valor n do Lema (4.16), está de vermelho. A resposta é simples. O importante na utilização deste lema, é simplificarmos o máximo possível o nosso cálculo. Dessa maneira, ao calcular mdc(a,b) usando o lema, mdc(a,b) = mdc(a,$b - na$), o valor de n é escolhido como o maior inteiro, tal que $b - na \geq 0$. E, esse n, é nos dado pelo Lema da Divisão de Euclides, é o quociente da divisão de a por b, e $b - na$ é o resto dessa divisão.

Essa observação nos motiva a enunciar o seguinte corolário.

Corolário 4.17: Sejam a,b inteiros. Então mdc(a,b) = mdc(a,r), sendo que r é o resto da divisão de b por a.

Sua demonstração é bem simples, e está explicada na observação do Exemplo (4.1.10).

Exemplo 4.1.11: Vamos calcular o mdc(456,764). Pelo Algoritmo da Divisão de Euclides, $764 = 1 \cdot 456 + 308$. Assim,

$$\text{mdc}(764{,}456) = \text{mdc}(456{,}308)$$

Novamente, pelo Algoritmo da Divisão de Euclides, $456 = 1 \cdot 308 + 148$, assim

$$\text{mdc}(456{,}764) = \text{mdc}(456{,}308) = \text{mdc}(308{,}148)$$

Repetindo o processo, $308 = 2 \cdot 148 + 12$.

$$\text{mdc}(456{,}764) = \text{mdc}(456{,}308) = \text{mdc}(308{,}148) = \text{mdc}(148{,}12)$$

E, como $148 = 12 \cdot 12 + 4$, teremos

$$\text{mdc}(456{,}764) = \text{mdc}(456{,}308) = \text{mdc}(308{,}148) = \text{mdc}(148{,}12) = \text{mdc}(12{,}4)$$

E chegamos em um mdc fácil de calcular, já que $4|12$, mdc(12,4) = 4. Portanto

$$\text{mdc}(764{,}456) = 4$$

O mdc está presente em diversos contextos da aritmética. E uma das identidades mais usadas, se refere ao mdc, conhecida como **Identidade de Bézout**. Este resultado não será demonstrado nesta dissertação por razões de brevidade e foco temático, mas sua prova pode ser consultada em Hefez [6, p. 80].

Teorema 4.18 (Identidade de Bézout): Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos. Então, existem inteiros x e y tais que:

$$\mathrm{mdc}(a, b) = ax + by.$$

Com isso, estamos prontos para demonstrar o seguinte resultado, que caracteriza a coprimalidade entre dois inteiros por meio de uma identidade linear.

Corolário 4.19: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Então a e b são primos entre si, isto é, $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$, se, e somente se, existem inteiros $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$ax + by = 1.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$. Pela *Identidade de Bézout*, Teorema (4.18), sabemos que existem inteiros x e y tais que:

$$ax + by = \mathrm{mdc}(a,b) = 1.$$

Portanto, a igualdade desejada está satisfeita.

($\Leftarrow$) Suponha agora que existam $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax + by = 1$. Seja $d = \mathrm{mdc}(a,b)$. Como d divide tanto a quanto b, ele também divide qualquer combinação linear $ax + by$. Assim, temos:

$$d \mid (ax + by) = 1 \quad \Rightarrow \quad d \mid 1.$$

Como d é um número natural que divide 1, então $d = 1$. Logo, $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$, o que prova que a e b são primos entre si. □

Exemplo 4.1.12: Vamos encontrar x e y tais que

$$122x + 384y = mdc(122{,}384). \tag{4.2}$$

Para tal utilizaremos o algoritmo de Euclides sucessivas vezes, para encontrar o mdc de 122 e 384. Como no Exemplo (4.1.11).

Cálculo do mdc(122,384**):** Pelo algoritmo de Euclides, temos que

$$384 = 3 \cdot 122 + 18.$$

Tomando o dividendo 122 e, dividindo pelo resto 18, teremos, novamente pelo algoritmo de Euclides

$$122 = 6 \cdot 18 + 14.$$

Novamente, tomando o dividendo 18 e dividindo pelo resto 14, teremos

$$18 = 1 \cdot 14 + 2.$$

Repetindo o processo, teremos

$$14 = 7 \cdot 2 + 0.$$

Note que chegamos no resto 0.

Dessa forma,

$$\mathrm{mdc}(122{,}384) = 2.$$

Vamos reescrever abaixo as etapas do Algoritmo Estendido de Euclides, até o último resto não nulo, para esse exemplo

$$\begin{aligned} 384 &= 3 \cdot 122 + 18 \\ 18 &= 1 \cdot 14 + \mathbf{2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Trabalhando as Equações (4.3) de baixo para cima, teremos:

$\mathbf{2} = 18 - 1 \cdot 14$, como $14 = 122 - 6 \cdot 18$ teremos:
$\mathbf{2} = 18 - 1 \cdot (122 - 6 \cdot 18) = 18 - 122 + 6 \cdot 18 = -122 + 7 \cdot 18$, mas $18 = 384 - 3 \cdot 122$, logo
$\mathbf{2} = -122 + 7 \cdot (384 - 3 \cdot 122) = -122 + 7 \cdot 384 - 3 \cdot 122$, segue então que
$\mathbf{2} = -4 \cdot 122 + 7 \cdot 384$

Portanto, os números x e y procurados na Equação (4.2) são, $x = -3$ e $y = 7$.

Podemos generalizar a definição de mdc para mais que dois números. Hefez [6] traz a noção de mdc de três ou mais números inteiros na página 83, e reproduziremos abaixo.

Definição 4.20: Um número natural d é o mdc dos dados números inteiros $a_1, \ldots, a_n$, não todos nulos, se possuir as seguintes propriedades:

(i) d é divisor comum de $a_1, \ \ldots, \ a_n$.

(ii) Se c é um divisor comum de $a_1, \ \ldots, \ a_n$, então $c|d$.

Como no outro caso, é possível verificar que o mdc é único.

A proposição abaixo nos ajuda a efetuar o cálculo do mdc de três ou mais números inteiros, sua demonstração pode ser verificada no livro *Arimética* de Hefez [6, p. 84].

Proposição 4.21: Dados números inteiros $a_1, \ldots, a_n$, não todos nulos, existe seu mdc e $\mathrm{mdc}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{mdc}(a_1, \ldots, (a_{n-1}, a_n))$.

São muitas as aplicações de mdc. Sugerimos a leitura de Hefez [6], autor que aborda diversas aplicações e aprofundamentos desse conceito.

O próximo tópico a ser estudado é congruências, tema cujo conceito de mdc é, também, muito importante.

4.2 Congruência

A teoria dos números é um dos campos mais antigos e fundamentais da matemática, sendo responsável pelo estudo das propriedades dos números inteiros e suas relações. Dentro desse contexto, o conceito de **congruência** surge como uma ferramenta essencial para a compreensão das divisibilidades e das estruturas algébricas subjacentes aos números inteiros.

O conceito de congruência foi introduzido formalmente por Carl Friedrich Gauss em sua obra *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada em 1801. Essa publicação, de acordo com a *Encyclopaedia Britannica*, "tornou-se, em certo sentido, a escritura sagrada da teoria dos números" (Encyclopaedia Britannica [4]). A partir dessa formulação, a congruência passou a constituir um dos pilares da teoria dos números, sendo amplamente empregada em diversas áreas da matemática e da ciência da computação, sobretudo por permitir estabelecer relações entre inteiros que preservam operações como adição e multiplicação no contexto da aritmética modular. Em estruturas computacionais, a aritmética modular é amplamente empregada na construção de funções de dispersão (*hash functions*), no controle de ciclos e no gerenciamento eficiente de memória. Na teoria dos códigos, por sua vez, propriedades da congruência são utilizadas na formulação de sistemas de detecção e correção de erros, assegurando maior confiabilidade na transmissão de dados em meios sujeitos a ruídos e interferências.

A congruência entre números inteiros está intimamente relacionada à noção de **divisibilidade**. De maneira intuitiva, dizemos que dois números inteiros são congruentes, em relação a um determinado número (chamado de **módulo**), quando sua diferença é divisível por esse módulo. Essa relação se mostra extremamente útil para simplificar cálculos e estruturar diversas propriedades numéricas.

Dessa forma, o estudo da congruência modular não se restringe ao campo puramente teórico, mas desempenha um papel essencial em diversas aplicações matemáticas e tecnológicas. A seguir, será apresentada a **definição formal da congruência**, bem como algumas de suas principais propriedades e aplicações.

Definição 4.22: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, e $m \in \mathbb{N},\ m > 1$. Dizemos que a é **congruente a** b **módulo** m, e escrevemos:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

se, e somente se, $a - b$ for divisível por m, ou seja, se existir um inteiro k tal que:

$$a - b = k \cdot m.$$

Observação: podemos notacionar como, $a \equiv b \pmod{m}$ ou $a \equiv b \mod m$ (sem usar os parênteses).

A congruência estabelece uma relação de equivalência entre os números inteiros, uma vez que satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, veja Proposição (4.23).

Para ilustrar esse conceito, consideremos alguns exemplos:

Exemplo 4.2.1: Vamos verificar se $27 \equiv 3 \pmod{12}$.

Solução: Calculamos $27 - 3 = 24$. Como 24 é divisível por 12, concluímos que $27 \equiv 3 \pmod{12}$.

Exemplo 4.2.2: Vamos verificar se $35 \equiv 14 \pmod 7$.

Solução: Calculamos $35 - 14 = 21$. Como 21 é múltiplo de 7, temos que $35 \equiv 14 \pmod 7$.

Proposição 4.23: A relação de congruência em $\mathbb{Z}$ é uma relação de equivalência.

1. **Reflexividade:** Para qualquer número inteiro a e qualquer módulo m, vale que:

$$a \equiv a \pmod m.$$

Essa propriedade garante que todo número é sempre congruente a si mesmo módulo m. Sua verificação é simples, bastando aplicar a definição de congruência. De fato, note que:

$$a - a = 0 = m \cdot 0, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, por definição, temos que m divide $a - a$, isto é, $a \equiv a \pmod m$.

2. **Simetria:** Se $a \equiv b \pmod m$, então também se tem que:

$$b \equiv a \pmod m.$$

Isso indica que a relação de congruência é simétrica, ou seja, a ordem dos termos não altera a validade da relação. De fato, note que, se $a \equiv b \pmod m$, então, pela definição, $m \mid (a - b)$, o que implica diretamente que $m \mid (b - a)$, que é exatamente a definição de $b \equiv a \pmod m$.

3. **Transitividade:** Se $a \equiv b \pmod m$ e $b \equiv c \pmod m$, então:

$$a \equiv c \pmod m.$$

Essa propriedade permite substituir congruências sucessivas por uma única relação equivalente. Para demonstrá-la, basta usar a definição. Note que:

$$a \equiv b \pmod m \Rightarrow m \mid (a - b) \quad \text{e} \quad b \equiv c \pmod m \Rightarrow m \mid (b - c).$$

Ora, sabemos que se $m \mid x$ e $m \mid y$, então $m \mid (x + y)$. Chamando $x = a - b$ e $y = b - c$, teremos que, como $m \mid x$ e $m \mid y$, então $m \mid (x + y)$, ou seja, $m \mid (a - c)$, o que, pela definição, implica que:

$$a \equiv c \pmod m.$$

Outras propriedades são atribuídas à esta relação. Abaixo relacionamos algumas delas:

1. **Compatibilidade com operações aritméticas:** Se $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, então as seguintes propriedades são válidas:

   - **Adição:** $a + c \equiv b + d \pmod m$.
   - **Subtração:** $a - c \equiv b - d \pmod m$.
   - **Multiplicação:** $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$.

   Essas regras garantem que as operações básicas da aritmética podem ser realizadas dentro do sistema modular sem comprometer a validade das congruências.

   Vamos demonstrá-las:

   - **Compatibilidade com a adição:** Sejam a, b, c, d, m inteiros, com $m > 1$, tais que $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$. Então:

   $$a \equiv b \pmod m \Rightarrow m \mid (a - b) \quad \text{e} \quad c \equiv d \pmod m \Rightarrow m \mid (c - d).$$

     Assim, pela propriedade da divisibilidade, temos que:

   $$m \mid [(a - b) + (c - d)] \Longrightarrow m \mid [(a + c) - (b + d)],$$

     o que, pela definição de congruência, é equivalente a:

   $$a + c \equiv b + d \pmod m.$$

   - **Compatibilidade com a subtração e multiplicação:** As demonstrações dessas propriedades são análogas à compatibilidade com a adição, bastando aplicar a definição de congruência e propriedades básicas da divisibilidade.

2. **Elevação a potências:** Se $a \equiv b \pmod m$, então, para qualquer número natural n, temos

   $$a^n \equiv b^n \pmod m.$$

   Essa propriedade é essencial para aplicações que envolvem exponenciação modular, como criptografia e teoria dos números computacional. Para verificação dessa propriedade, basta aplicar a compatibilidade com a multiplicação n vezes e aplicar indução.

3. **Lei do cancelamento** Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$. Então vale a seguinte propriedade de cancelamento nas congruências:

   $$a \cdot c \equiv b \cdot c \mod m \Longleftrightarrow a \equiv b \mod \frac{m}{mdc(c,m)}.$$

Demonstração. Observe inicialmente que $\dfrac{m}{mdc(c,m)}$ e $\dfrac{c}{mdc(c,m)}$ são coprimos. Assim, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} a \cdot c \equiv b \cdot c \mod m &\Longleftrightarrow m \mid [(b-a)c] \\ &\Longleftrightarrow \frac{m}{mdc(c,m)} \mid \left[(b-a)\frac{c}{mdc(c,m)}\right] \\ &\Longleftrightarrow \frac{m}{mdc(c,m)} \mid (b-a), \end{aligned}$$

o que, pela definição de congruência, implica diretamente:

$$a \equiv b \mod \frac{m}{mdc(c,m)}.$$

□

Note que, se $\text{mdc}(c,m) = 1$, a propriedade acima se simplifica. Sejam $a,b,c,m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e $\text{mdc}(a,b) = 1$. Se

$$ac \equiv bc \pmod m,$$

então

$$a \equiv b \pmod m.$$

Essas propriedades garantem que as operações de adição e multiplicação com congruências sejam bem definidas e preservem a estrutura aritmética, o que favorece sua aplicação em diversos contextos matemáticos.

O conceito de congruência permite agrupar os números inteiros em classes de equivalência, conhecidas como **classes residuais**. Essas classes constituem a base da aritmética modular, sendo essenciais para a teoria dos números.

O nome **classes residuais**, dado a essas classes de equivalência, decorre diretamente da seguinte proposição:

Proposição 4.24: Dados $a,b,m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$, temos que:

$$a \equiv b \pmod m \Longleftrightarrow \text{os restos da divisão de } a \text{ e } b \text{ por } m \text{ são iguais.}$$

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, existem inteiros únicos q_1, q_2, r_1, r_2 tais que:

$$a = mq_1 + r_1, \quad b = mq_2 + r_2, \quad \text{com} \quad 0 \leq r_1, r_2 < m.$$

Suponha primeiro que $a \equiv b \pmod m$. Então, por definição de congruência:

$$m \mid (a-b).$$

Como:

$$a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2),$$

segue que $m \mid (r_1 - r_2)$. Mas como $0 \leq r_1, r_2 < m$, temos que:

$$-m < r_1 - r_2 < m.$$

A única possibilidade para que m divida $r_1 - r_2$ neste intervalo é termos $r_1 - r_2 = 0$, ou seja, $r_1 = r_2$.

Reciprocamente, suponhamos agora que os restos da divisão de a e b por m sejam iguais. Então, temos $r_1 = r_2$, logo:

$$a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) = m(q_1 - q_2).$$

Isto significa, pela definição de congruência, que $m \mid (a - b)$, ou seja, $a \equiv b \pmod{m}$. □

Após a apresentação das propriedades fundamentais das congruências, avançamos agora para um resultado clássico da Teoria dos Números: o Teorema de Fermat para a soma de dois quadrados. Este teorema estabelece condições sob as quais um número primo pode ser expresso como a soma de dois quadrados perfeitos, e sua demonstração envolve técnicas elementares de congruência e raciocínio aritmético.

4.2.1 Números inteiros que são soma de dois quadrados

A relação entre números inteiros e a soma de dois quadrados é um tema clássico da teoria dos números. A questão fundamental consiste em determinar quais inteiros positivos podem ser expressos na forma:

$$n = a^2 + b^2, \quad \text{com } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 4.2.3: O número 2 pode ser escrito como soma de dois quadrados inteiros:

$$2 = 1^2 + 1^2.$$

Por outro lado, o número 4 não pode ser expresso como soma de dois quadrados inteiros. Já o número 5 admite tal representação:

$$5 = 1^2 + 2^2.$$

Como determinar quais inteiros são somas de quadrados?

Esse problema foi estudado por diversos matemáticos ao longo da história, tendo sido solucionado de maneira definitiva por Pierre de Fermat no século XVII. A caracterização dos números que podem ser escritos como soma de dois quadrados está intimamente ligada à decomposição de primos em determinados módulos, sendo um dos primeiros resultados expressivos da aritmética modular.

A principal caracterização dos números que podem ser expressos como soma de dois quadrados é dada pelo **Teorema de Fermat**: um número primo p pode ser expresso como a soma de dois quadrados se, e somente se, $p \equiv 1 \mod 4$ ou $p = 2$. Esse resultado pode ser estendido para inteiros compostos, levando ao seguinte teorema:

Teorema 4.25: Um número natural a é um quadrado ou uma soma de dois quadrados de números naturais se, e somente se, pode ser escrito na forma $a = 2^l \cdot b^2 \cdot p_1 p_2 \cdots p_r$, onde $l \in \{0,1\}$, $b \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$ e $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são primos distintos da forma $4k + 1$.

Para realizar esta demonstração, utilizaremos alguns resultados prévios fundamentais.

Proposição 4.26: Seja p um número primo tal que $p > 2$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Existem $n, m \in \mathbb{N}$ com $\text{mdc}(n, m) = 1$ e paridades distintas, tais que $p = n^2 + m^2$;
2. A congruência $X^2 \equiv -1 \pmod{p}$ admite solução em $\mathbb{Z}$;
3. p é da forma $4k + 1$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Lema 4.27: Para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, valem as seguintes identidades:

1. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$;
2. $(2a+1)^2 + (2b+1)^2 = 2\left[(a + b + 1)^2 + (b - a)^2\right]$, e ainda $\text{mdc}(2a+1,\, 2b+1) = \text{mdc}(a + b + 1,\, b - a)$.

Para mais detalhes e demonstrações desses resultados, o leitor poderá consultar Martinez et al. [10, p. 253].

Agora estamos prontos para apresentar a demonstração do teorema.

Demonstração. Seja $a = 2^l b^2 p_1 \cdots p_r$, com $l = 0{,}1$, $b \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$ e os primos p_i da forma $4k + 1$ para $i = 1, \ldots, r$.

Se $r = 0$, então $a = 2^l b^2$, que é trivialmente um quadrado ou soma de dois quadrados, já que $2 = 1^2 + 1^2$.

Se $r > 0$, pela proposição acima, cada p_i pode ser escrito como soma de dois quadrados. Como 2 também é soma de dois quadrados, e como o produto de dois números que são soma de dois quadrados também o é (pelo Lema, item 1), conclui-se que $2^l p_1 \cdots p_r$ é soma de dois quadrados. Ao multiplicarmos por b^2, ainda teremos uma soma de dois quadrados, pois um quadrado multiplicado por uma soma de dois quadrados continua sendo uma soma de dois quadrados.

Para a recíproca, suponha que $a = x^2 + y^2$, com $x, y \in \mathbb{N}$.

Se $x = 0$, $y = 0$ ou $x = y$, então a é da forma b^2 ou $2b^2$, casos cobertos pela expressão $2^l b^2$.

Se $x, y \neq 0$ e $x \neq y$, seja $b = \text{mdc}(x, y)$. Pelo Lema (item 2), podemos escrever:

$$x^2 + y^2 = 2^l b^2 (x_1^2 + y_1^2),$$

com $l = 0{,}1$ e $x_1^2 + y_1^2$ contendo apenas primos da forma $4k+1$ em sua fatoração. Agregando as potências pares desses primos ao termo b^2, concluímos que a admite a forma:

$$a = 2^l b^2 p_1 \cdots p_r,$$

com os p_i da forma $4k+1$, como desejado. □

Por exemplo, os números 5, 10 e 13 podem ser escritos como soma de dois quadrados:

$$5 = 2^2 + 1^2, \quad 10 = 3^2 + 1^2, \quad 13 = 3^2 + 2^2.$$

Entretanto, o número 15 não pode ser expresso dessa forma, pois sua decomposição em fatores primos contém o número 3, que é da forma $p \equiv 3 \mod 4$, com expoente ímpar.

O estudo da soma de dois quadrados tem aplicações importantes na teoria dos números e na criptografia. Em particular, esse resultado está relacionado à estrutura dos **números gaussianos**, que são números complexos da forma $a + bi$ com $a, b \in \mathbb{Z}$. Nesse contexto, a existência de fatoração única permite uma abordagem algébrica para entender quais inteiros podem ser expressos como soma de dois quadrados. Mas este tópico está muito além das nossas fronteiras. Sugerimos a leitura de Martinez et al. [10], para maiores detalhes.

Além das aplicações algébricas, a soma de dois quadrados aparece em problemas geométricos e combinatórios. Esse estudo está ligado à análise de pontos inteiros sobre circunferências, evidenciando a conexão entre a teoria dos números e a geometria analítica.

Dessa forma, a caracterização dos números que são soma de dois quadrados é um problema fundamental da teoria dos números, com impacto em diversas áreas da matemática. Seu estudo não apenas fornece *insights* sobre a estrutura dos inteiros, mas também estabelece conexões entre várias áreas.

4.3 Triplas Pitagóricas

O estudo das triplas pitagóricas remonta à antiguidade, tendo sido conhecido por diversas civilizações antes mesmo do surgimento formal da teoria dos números. Essas triplas consistem em conjuntos de três inteiros positivos que satisfazem o Teorema de Pitágoras, surgindo naturalmente em problemas relacionados a triângulos retângulos com medidas inteiras. Além de sua importância geométrica, elas desempenham papel relevante na aritmética elementar e na formação de padrões numéricos recorrentes.

Evidências arqueológicas indicam que os babilônios já conheciam relações numéricas hoje associadas às triplas pitagóricas por volta de 1800 a.C., como demonstrado pela tábua Plimpton 322. Esse artefato, datado do período anterior à conquista de Larsa por Hamurabi, apresenta uma lista sistemática de ternos numéricos inteiros que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$, o que revela um conhecimento matemático avançado para a época, conforme afirma Robson [16]. Posteriormente, essas ideias foram formalizadas na tradição matemática grega, especialmente nos estudos atribuídos a Pitágoras e sua escola. O **Teorema de Pitágoras**, que estabelece a relação entre os lados de um triângulo retângulo, constitui a base para a definição e a investigação das triplas pitagóricas no âmbito da teoria dos números.

Definição 4.28: Uma **tripla pitagórica** consiste num terno ordenado de três números inteiros positivos (a, b, c) que satisfazem a equação:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Exemplo 4.3.1: Um exemplo clássico é a tripla $(3, 4, 5)$, pois:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Existem outras triplas pitagóricas? O estudo dessas ternas foi amplamente explorado pela escola pitagórica por volta de 300 a.C., dada sua relação com triângulos retângulos e a geometria clássica.

Note que a tripla $(6, 8, 10)$ também satisfaz a equação pitagórica:

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2.$$

Na verdade, qualquer múltiplo inteiro positivo da tripla $(3, 4, 5)$ resulta em outra tripla pitagórica. Dessa forma, existem infinitas triplas que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$, o que torna seu estudo particularmente rico e interessante.

Uma característica fundamental das triplas pitagóricas é a distinção entre **triplas primitivas** e **triplas não primitivas**.

Definição 4.29: Dizemos que uma tripla (a, b, c) é **primitiva** se os três números forem coprimos, ou seja, se $\text{mdc}(a, b, c) = 1$.

O interessante dessa definição é que uma tripla **não primitiva** pode ser obtida multiplicando-se todos os elementos de uma tripla primitiva por um mesmo número inteiro.

Exemplo 4.3.2: Considere os inteiros $a = 15$, $b = 112$ e $c = 113$. Note que:

$$a^2 + b^2 = 15^2 + 112^2 = 225 + 12544 = 12769 = 113^2 = c^2.$$

Assim, os números a, b e c formam uma **tripla pitagórica**. Mas será que essa tripla é *primitiva*?

Para responder a essa pergunta, devemos calcular o $\text{mdc}(15, 112, 113)$. O Teorema (4.21) nos auxilia nessa tarefa:

$$\text{mdc}(15{,}112{,}113) = \text{mdc}(15, \text{mdc}(112{,}113)).$$

Para o cálculo de mdc(112,113), utilizamos o Algoritmo de Euclides:

$$113 = 1 \cdot 112 + 1. \tag{4.4}$$

Logo, mdc(113,112) = mdc(112,1) = 1.

Portanto,

$$\text{mdc}(15{,}112{,}113) = \text{mdc}(15{,}1) = 1.$$

Concluímos, então, que a tripla pitagórica $(15, 112, 113)$ é **primitiva**.

A partir de uma tripla pitagórica, podemos formar infinitas triplas pitagóricas.

Teorema 4.30: Se (a, b, c) é uma tripla pitagórica, então para todo número inteiro positivo k, o trio (ka, kb, kc) também é uma tripla pitagórica.

Demonstração. Seja (a, b, c) uma tripla pitagórica, ou seja,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por um número inteiro positivo k^2, obtemos:

$$k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2,$$

o que equivale a:

$$(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2.$$

Portanto, (ka, kb, kc) também satisfaz a relação pitagórica, sendo assim uma tripla pitagórica. □

Exemplo 4.3.3: Por exemplo, tomando $k = 2$ na tripla pitagórica primitiva $(3, 4, 5)$, obtemos a tripla $(6, 8, 10)$, que também satisfaz a equação pitagórica:

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2.$$

No entanto, essa nova tripla não é primitiva, pois $\text{mdc}(6, 8, 10) = 2$.

Além disso, é possível gerar infinitas triplas pitagóricas por meio da **fórmula de Euclides**, fornecendo um método sistemático para a construção de triplas pitagóricas primitivas, permitindo explorar de forma generalizada a relação pitagórica dentro do campo da teoria dos números.

Teorema 4.31 (Fórmula de Euclides): Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ com $m > n > 0$. Definindo:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2,$$

então o trio (a, b, c) forma uma tripla pitagórica, ou seja:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Além disso, a tripla (a, b, c) é primitiva se, e somente se, $\text{mdc}(m, n) = 1$ e $m - n$ é ímpar.

Demonstração. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ com $m > n > 0$, e definamos:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2.$$

Vamos verificar que $a^2 + b^2 = c^2$:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2 = c^2. \end{aligned}$$

Portanto, (a, b, c) satisfaz a equação pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, logo é uma tripla pitagórica.

Para mostrar que a tripla (a, b, c) é **primitiva**, basta verificar que $\text{mdc}(a, b, c) = 1$. Suponha que $\text{mdc}(m, n) = 1$ e que $m - n$ seja ímpar.

- Como m e n são de paridades distintas, $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$ serão todos inteiros e a e b serão de paridades diferentes.
- Sendo $\text{mdc}(m, n) = 1$, sabemos que m^2 e n^2 também são primos entre si, e que $m^2 - n^2$, $2mn$ e $m^2 + n^2$ não possuem fator comum maior que 1.

Portanto, a tripla (a, b, c) é primitiva se, e somente se, $\text{mdc}(m, n) = 1$ e $m - n$ é ímpar. □

As triplas pitagóricas possuem aplicações significativas em várias áreas da matemática e da ciência. Além de sua presença clássica na geometria e na teoria dos números, elas também são utilizadas em contextos computacionais e físicos. Em particular, suas propriedades numéricas favorecem aplicações em algoritmos, modelagem de sinais periódicos e resolução de problemas envolvendo redes e estruturas triangulares, um exemplo é o uso no cálculo da distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Dessa forma, o estudo das triplas pitagóricas não se restringe apenas à geometria elementar, mas se estende a diversas áreas matemáticas avançadas, estabelecendo conexões entre diferentes ramos da matemática e suas aplicações práticas.

- **Demonstrações Fundamentais**

  A demonstração da existência infinita de triplas pitagóricas primitivas pode ser realizada de diversas formas, sendo uma das mais conhecidas baseada na fórmula de Euclides, que gera uma tripla primitiva a partir de dois inteiros positivos m e n, com $m > n$, mdc(m,n) = 1 e paridades opostas. As fórmulas

  $$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2,$$

  produzem triplas que satisfazem $a^2 + b^2 = c^2$, assegurando que (a, b, c) seja uma tripla pitagórica primitiva. Essa construção revela padrões estruturais importantes no conjunto dos inteiros e permite explorar conexões entre a aritmética e propriedades geométricas.

Outra demonstração interessante pode ser feita por meio da parametrização geométrica, considerando um círculo de raio c centrado na origem e um ponto (a, b) sobre sua circunferência. A partir da equação $x^2 + y^2 = c^2$, é possível utilizar uma parametrização racional da circunferência para obter soluções inteiras da equação pitagórica, revelando uma conexão entre a geometria analítica e a teoria dos números.

- **Aplicações das Triplas Pitagóricas**

  As aplicações das triplas pitagóricas vão além da teoria dos números, abrangendo desde áreas práticas da engenharia até aplicações mais avançadas na matemática aplicada.

  Na engenharia estrutural, as triplas pitagóricas são utilizadas para garantir estabilidade e precisão em projetos que envolvem ângulos retos. Um exemplo clássico é sua aplicação na construção civil, em que são empregadas para verificação do esquadro de paredes e fundações, assegurando a perpendicularidade entre elementos estruturais.

  Na computação e na criptografia, as triplas pitagóricas podem ser exploradas na construção de algoritmos que envolvem propriedades da teoria dos números. Em particular, elas aparecem em métodos de codificação e compactação de dados, bem como na resolução de equações diofantinas, que têm papel importante em diversos sistemas criptográficos. **Equações diofantinas** são equações da forma:

  $$ax + by = c,$$

  onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e as soluções buscadas são pares de inteiros (x,y). Esse tipo de equação é amplamente estudado na teoria dos números e tem aplicações relevantes em áreas como segurança da informação e análise algorítmica.

  Além disso, as triplas pitagóricas possuem aplicações na física teórica, especialmente em problemas envolvendo simetrias e conservação de energia em sistemas dinâmicos. Sua relação com os números complexos, em particular os números gaussianos, permite sua utilização na análise de ondas eletromagnéticas e na modelagem de trajetórias em contextos de sistemas quânticos e computação matemática.

  Dessa forma, as triplas pitagóricas não apenas constituem um objeto de estudo teórico, mas também possuem aplicações práticas em diversas áreas da matemática e da ciência. Seu estudo contínuo permite a descoberta de novas propriedades e conexões, evidenciando sua importância tanto histórica quanto contemporânea.

5

Construção das Apostilas

A construção de materiais didáticos eficazes é essencial para o ensino da Matemática, sobretudo quando se busca uma abordagem que torne o aprendizado mais acessível e significativo. A elaboração das apostilas desenvolvidas neste trabalho foi orientada por princípios metodológicos alinhados às diretrizes curriculares nacionais e fundamentada em práticas pedagógicas que favorecem a compreensão progressiva dos conceitos matemáticos.

Segundo os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 56]), "a Matemática pode e deve estar ao alcance de todos e a garantia de sua aprendizagem deve ser meta prioritária do trabalho docente". Alinhadas a esse princípio, as apostilas foram estruturadas para promover uma aprendizagem ativa, incentivando os estudantes a explorar conceitos por meio da resolução de problemas e de atividades contextualizadas.

A organização dos conteúdos segue uma estrutura espiralada, permitindo que conceitos fundamentais sejam apresentados gradualmente e revisitados ao longo do tempo. Essa progressão respeita o desenvolvimento cognitivo dos alunos e evita lacunas conceituais, conforme alerta o próprio documento:

> "Quanto à organização dos conteúdos, de modo geral observa-se uma forma excessivamente hierarquizada de fazê-la. É uma organização dominada pela ideia de pré-requisito, cujo único critério é a estrutura lógica da Matemática. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem na forma de uma corrente, cada conteúdo sendo um pré-requisito para o que vai sucedê-lo." (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 22])

Além da progressão, as apostilas foram concebidas para aproximar a Matemática da realidade dos estudantes. Os exercícios e exemplos propostos envolvem situações do cotidiano, integrando o conteúdo escolar com outras áreas do conhecimento e com os Temas Transversais. A proposta busca fortalecer o significado da Matemática para os alunos, promovendo conexões entre os conceitos matemáticos, outras disciplinas e experiências vivenciadas no dia a dia.

A utilização de recursos didáticos variados também foi uma preocupação central no desenvolvimento do material. Representações visuais, diagramas e gráficos foram integrados aos conteúdos para favorecer a compreensão de conceitos abstratos. Conforme destaca o documento:

> "Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade." (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 46])

Além disso, a diversificação de estratégias pedagógicas buscou contemplar diferentes estilos de aprendizagem. As atividades propostas incluem desafios, jogos e problemas abertos, de modo a estimular a criatividade, a autonomia e o pensamento crítico dos alunos. A BNCC reforça essa diretriz ao afirmar a necessidade de "selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos [...]" (Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 17]).

Por fim, o material foi construído com base nos princípios da aprendizagem baseada em problemas. Essa abordagem favorece o desenvolvimento de habilidades analíticas e argumentativas, desafiando os estudantes a elaborar estratégias, formular hipóteses e validar procedimentos, pois, segundo os PCN, "Resolver um problema pressupõe que o aluno: elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos; valide seus procedimentos." (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 41]).

Dessa forma, as apostilas não apenas apresentam conteúdos teóricos, mas também propõem situações que estimulam o raciocínio lógico e a construção ativa do conhecimento, tornando-se instrumentos eficazes para uma aprendizagem significativa e crítica, em consonância com as diretrizes dos documentos curriculares nacionais.

5.1 Motivação para a Criação das Apostilas

O ensino da matemática no Brasil apresenta desafios históricos, especialmente no que se refere à compreensão e aplicação dos conceitos pelos alunos do ensino fundamental. Os baixos índices de desempenho em avaliações nacionais e internacionais indicam a necessidade de materiais didáticos mais eficazes, que favoreçam uma aprendizagem significativa e contextualizada.

Segundo a *Base Nacional Comum Curricular*, "os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e [permitem] perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição)." (Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 266]).

Além de contemplar essas competências, o material responde à carência de recursos que conciliem rigor conceitual com acessibilidade pedagógica. Busca-se, assim, oferecer um referencial que oriente a prática escolar e garanta o acesso efetivo ao conhecimento matemático.

A seleção dos temas — números inteiros, congruência modular e triplas pitagóricas — foi guiada por sua relevância no currículo e sua contribuição para o desenvolvimento do pensamento lógico, da abstração e da interdisciplinaridade. A proposta também valoriza a contextualização do conteúdo, conforme a BNCC recomenda ao articular os conhecimentos às "dimensões do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura" (Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 466]).

Por fim, recursos visuais e a organização progressiva dos conteúdos foram adotados para facilitar a construção de significados. Diagramas, esquemas e exemplos ilustrativos funcionam como ferramentas de visualização que favorecem a compreensão de relações e propriedades matemáticas. A estrutura espiralada adotada nas apostilas também visa evitar uma organização excessivamente hierarquizada dos conteúdos, promovendo uma aprendizagem contínua e integrada.

5.1.1 Justificativa para a Elaboração do Material

A justificativa para a produção das apostilas reside na necessidade de tornar o ensino de matemática mais acessível, relevante e alinhado às diretrizes curriculares nacionais. A ausência de materiais que integrem clareza conceitual, aplicabilidade e engajamento dos estudantes tem sido um entrave recorrente no cotidiano escolar.

Como afirmam os *Parâmetros Curriculares Nacionais*, "a resolução de problemas [...] possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança" (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 40]).

Segundo a *Base Nacional Comum Curricular*, "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" é uma das competências específicas para o ensino fundamental (Ministério da Educação (BNCC) [12, p. 267]).

Além do foco no aluno, o material busca apoiar o trabalho docente ao fornecer uma linguagem acessível, recursos visuais e propostas metodológicas que favoreçam a análise e a reflexão. Como destacam os *Parâmetros Curriculares Nacionais*, "recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadoras, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão" (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 57]).

Outro ponto relevante é a promoção da autonomia dos estudantes. As apostilas foram planejadas para serem utilizadas tanto em sala de aula quanto em estudos individuais, reunindo teoria, exemplos resolvidos, exercícios graduados e desafios matemáticos. Assim, pretende-se criar um ambiente de aprendizagem flexível, que respeite os diferentes ritmos de estudo e estimule a construção ativa do conhecimento.

5.1.2 Importância do Ensino Contextualizado

O ensino da matemática, quando desvinculado da realidade dos alunos, tende a ser percebido como abstrato e desmotivador. Relacionar os conteúdos a situações reais e ao contexto social dos estudantes favorece a construção significativa do conhecimento.

A abordagem dos conteúdos em contextos variados, por meio da resolução de problemas significativos para os alunos, favorece a construção de sentidos e aproxima a matemática de diferentes áreas do saber.

A contextualização permite que os estudantes reconheçam a utilidade da matemática e fortalece sua motivação. A ausência de conexão com a realidade pode comprometer o interesse e a aprendizagem. Ao contrário, quando os conteúdos são aplicados a situações familiares, favorecem o engajamento e a retenção do conhecimento.

Além disso, a abordagem contextualizada contribui para o desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico. Problemas reais exigem que os alunos elaborem estratégias próprias e tomem decisões fundamentadas. Essa prática também amplia as possibilidades de interdisciplinaridade ao integrar a matemática a campos como física, economia, biologia e artes.

Dessa forma, o ensino contextualizado representa uma estratégia pedagógica eficaz para aproximar os conteúdos matemáticos da vivência dos estudantes. As apostilas desenvolvidas neste trabalho incorporam essa abordagem por meio de atividades que promovem a articulação entre teoria e prática, contribuindo para uma aprendizagem crítica, interdisciplinar e duradoura.

5.2 Estrutura das Apostilas

As apostilas desenvolvidas neste trabalho não têm a intenção de substituir o livro didático adotado pela escola, mas sim de complementar e enriquecer a prática pedagógica. Enquanto o livro didático cumpre um papel estruturante no planejamento curricular e na organização dos conteúdos ao longo do ano letivo, a apostila apresenta-se como um recurso adicional, mais flexível e contextualizado, que dialoga diretamente com os interesses e vivências dos estudantes. Trata-se, portanto, de um material de apoio que visa potencializar a aprendizagem, promovendo a articulação entre o rigor conceitual da Matemática e abordagens metodológicas mais dinâmicas, lúdicas e interdisciplinares.

A elaboração das apostilas utilizadas neste trabalho foi orientada por princípios pedagógicos alinhados à *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) e aos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN), com o objetivo de promover uma aprendizagem significativa, progressiva e contextualizada. A organização dos conteúdos respeita a lógica do desenvolvimento conceitual, possibilitando que os alunos avancem a partir de seus conhecimentos prévios.

As apostilas foram estruturadas em capítulos sequenciais, abrangendo desde noções introdutórias até aplicações mais elaboradas, como números inteiros, congruência modular e triplas pitagóricas. Cada capítulo apresenta a teoria, exemplos resolvidos, exercícios com diferentes graus de complexidade e atividades contextualizadas.

Para promover a autonomia e o raciocínio lógico, as apostilas incluem também seções interativas com desafios e investigações matemáticas. O material contempla diferentes ritmos de aprendizagem por meio de estratégias diversificadas e faz uso de recursos visuais.

5.2.1 Diferenciação entre apostila do aluno e do professor

A produção das apostilas levou em conta as necessidades específicas de alunos e professores, resultando em versões distintas e complementares. Essa diferenciação visa otimizar o processo de ensino-aprendizagem, fornecendo ao estudante um instrumento que favoreça sua autonomia, e ao professor um material de apoio para a mediação pedagógica.

A **apostila do aluno** apresenta:

- Conteúdo teórico com linguagem acessível e contextualizada;
- Exemplos resolvidos e exercícios progressivos;
- Atividades investigativas e interativas.

Já a **apostila do professor** inclui:

- Sugestões metodológicas alinhadas à BNCC e aos PCN;
- Atividades complementares e estratégias didáticas;
- Resolução detalhada dos exercícios;
- Orientações para resolução de exercícios e mediação de debates em sala de aula.

Esse tipo de suporte favorece a adaptação das estratégias de ensino às necessidades das turmas, ampliando a eficácia do trabalho docente. Também é importante que os materiais didáticos incentivem tanto a autonomia dos estudantes quanto a atuação propositiva do professor.

Essa diferenciação, portanto, contribui para uma abordagem pedagógica mais eficaz, promovendo a integração entre teoria e prática e fortalecendo o papel de cada agente no processo de construção do conhecimento matemático.

5.3 Os Mascotes da Apostila

A inserção de personagens lúdicos no material didático é uma estratégia que pode tornar o ensino da Matemática mais atrativo e acessível. A utilização de mascotes pedagógicos, entre eles a **Coruja Sábia**, foi pensada com o intuito de humanizar a experiência de aprendizagem, criando vínculos entre os alunos e os conteúdos por meio da mediação simbólica.

A coruja, tradicionalmente associada à sabedoria, foi escolhida como símbolo desse papel mediador no processo educativo. Presente ao longo da apostila, a **Coruja Sábia** participa ativamente da narrativa didática, aparecendo em momentos estratégicos para orientar, motivar e dialogar com o estudante.

Figura 5.1: Mascote da apostila: Coruja Sábia

5.3.1 Papel dos mascotes no engajamento dos alunos

A presença de personagens lúdicos recorrentes contribui para criar um ambiente mais interativo e afetivo no estudo da Matemática. Esses mascotes facilitam a assimilação dos conteúdos ao estabelecer vínculos entre o material didático e a vivência do aluno.

A mascote atua como interlocutora pedagógica, oferecendo dicas, instigando a resolução de problemas e promovendo uma relação mais leve com o conhecimento. Com isso, colabora para reduzir barreiras cognitivas e emocionais que muitas vezes afastam os estudantes da matemática.

5.3.2 Como os mascotes foram criados e desenvolvidos

A concepção da **Coruja Sábia** buscou aliar estética e funcionalidade pedagógica. A imagem foi selecionada na plataforma Canva, com base em critérios de clareza visual, simpatia e adequação ao público-alvo do Ensino Fundamental. Após a escolha, a ilustração foi adaptada ao layout gráfico da apostila, harmonizando-se com os demais elementos visuais do material.

A mascote aparece ao longo das unidades com intervenções planejadas: apresenta conceitos, destaca pontos-chave, propõe desafios e compartilha curiosidades. Seu design amigável e suas mensagens diretas reforçam a proposta de um material que seja ao mesmo tempo didático e acolhedor, auxiliando na contextualização do conhecimento e ampliando o envolvimento dos alunos.

5.3.3 Exemplos de uso dos mascotes nas atividades da apostila

A atuação dos mascotes pedagógicos não se restringe a elementos decorativos. Eles cumprem funções específicas no apoio ao aprendizado, assumindo papéis que vão além da estética. Por exemplo, na introdução da apostila, uma coruja chamada *Coruja Sábia* dá as boas-vindas aos alunos e apresenta a proposta como uma "Aventura

Matemática", criando uma atmosfera de curiosidade e desafio logo no início do percurso formativo.

Em uma das atividades do capítulo sobre congruência, os mascotes apresentam um enigma envolvendo restos da divisão, simulando uma situação de cofre com código secreto. Essa dinâmica estimula o raciocínio e conecta o conteúdo a um problema realista e instigante. Em outro momento, ao tratar de triplas pitagóricas, os mascotes sugerem a observação de padrões numéricos que reforçam a estrutura algébrica por trás da relação entre os lados de triângulos retângulos.

Essas intervenções são acompanhadas de balões de fala, ícones ou caixas de texto que destacam a presença dos mascotes de forma clara e organizada. As imagens dos personagens, em especial da **Coruja Sábia**, funcionam como âncoras visuais e cognitivas para os estudantes, conduzindo-os com segurança e interesse ao longo do percurso didático.

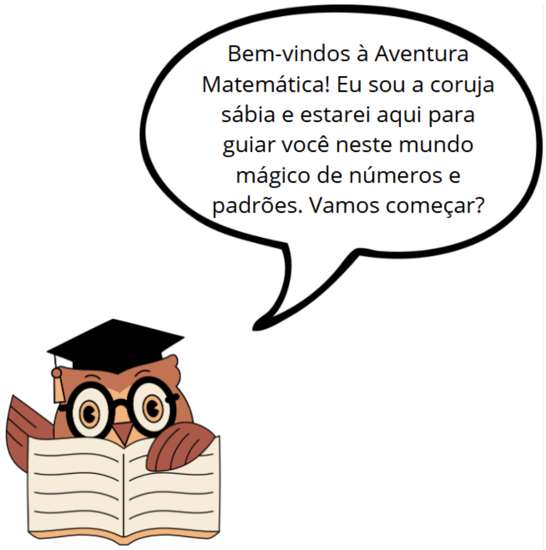

Figura 5.2: A Coruja Sábia dando as boas-vindas aos alunos.

Dessa forma, os mascotes integram-se ao material como recursos pedagógicos significativos, agregando valor estético, simbólico e funcional às apostilas, e contribuindo para uma aprendizagem mais envolvente e efetiva.

5.4 Metodologia da Apostila

A metodologia adotada na elaboração da apostila fundamenta-se em princípios pedagógicos que valorizam a aprendizagem significativa e o desenvolvimento do raciocínio matemático. O material foi estruturado para promover a participação ativa dos estudantes, integrando estratégias como resolução de problemas, atividades investigativas e conexões com situações reais, em consonância com a BNCC e os PCN.

A resolução de problemas constitui o eixo central da proposta metodológica. Por meio de desafios contextualizados, busca-se estimular a autonomia intelectual dos alunos, favorecendo a formulação de hipóteses, a análise de estratégias e a tomada de decisões fundamentadas. O ensino da matemática, nessa perspectiva, ultrapassa a mera memorização de fórmulas e algoritmos, incentivando o raciocínio crítico, a criatividade e a construção ativa do conhecimento.

Outro elemento relevante da metodologia é o uso de recursos lúdicos e interativos. A presença de mascotes, como a **Coruja Sábia**, inseridos ao longo do material, tem a função de mediar o conteúdo de forma leve e estimulante, apresentando dicas, curiosidades e incentivando os estudantes na superação dos desafios propostos. A utilização de recursos visuais e narrativos contribui para a criação de um ambiente de aprendizagem mais engajador, facilitando a assimilação dos conceitos.

A organização do conteúdo segue uma sequência pedagógica estruturada, iniciando com a introdução de conceitos fundamentais e evoluindo para aplicações mais complexas. Cada unidade é composta por uma exposição teórica acessível, exemplos resolvidos, atividades práticas e propostas de reflexão, permitindo que o estudante avance gradualmente na compreensão dos temas abordados.

Além disso, o material foi concebido para promover competências essenciais ao desenvolvimento matemático dos estudantes, como a argumentação, a modelagem, a resolução de problemas e a comunicação de ideias. Essas habilidades são fundamentais para que os alunos possam compreender e aplicar os conceitos em diferentes contextos, favorecendo a formação de cidadãos críticos e autônomos. A proposta metodológica da apostila busca, assim, alinhar-se às diretrizes educacionais contemporâneas, priorizando a aprendizagem ativa e a construção de significados a partir de situações concretas.

Dessa forma, a metodologia adotada busca aliar rigor conceitual e acessibilidade didática, contribuindo para um processo de ensino-aprendizagem mais eficaz, engajador e coerente com as diretrizes da educação matemática contemporânea.

5.4.1 Uso da resolução de problemas como abordagem didática

A resolução de problemas ocupa lugar central na proposta metodológica da apostila, por favorecer o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e da argumentação matemática. Essa abordagem, amplamente valorizada no campo educacional, promove a construção ativa do conhecimento ao incentivar os estudantes a elaborarem estratégias, testarem hipóteses e refletirem sobre seus próprios processos de aprendizagem.

Na apostila, os problemas são organizados de forma progressiva, começando por situações introdutórias que ativam conhecimentos prévios, passando por exercícios intermediários com foco na sistematização dos conceitos, até desafios mais complexos que demandam generalizações e novos contextos. Essa estrutura visa consolidar o conteúdo e, ao mesmo tempo, estimular a reflexão sobre os caminhos utilizados para alcançar a solução.

A abordagem está alinhada às orientações das diretrizes curriculares nacionais, que enfatizam o desenvolvimento de competências como raciocinar, argumentar e resolver problemas em contextos variados. Nesse sentido, o ensino da matemática deve centrar-se na investigação e na resolução de problemas, permitindo que os alunos relacionem os conteúdos aprendidos com situações do cotidiano, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada.

Para tornar esse processo mais envolvente, o material também recorre a recursos lúdicos, como os mascotes pedagógicos que introduzem desafios, sugerem estratégias e reforçam conceitos. Essa mediação narrativa contribui para criar um ambiente favorável à aprendizagem, promovendo maior engajamento dos estudantes e facilitando a compreensão de conceitos abstratos por meio de elementos visuais e interativos.

Outro aspecto relevante é o reconhecimento do erro como parte integrante do processo formativo. Os problemas propostos incentivam a experimentação e a análise crítica das estratégias adotadas, favorecendo a aprendizagem por meio da reflexão sobre os próprios processos de pensamento e a superação de dificuldades identificadas durante a resolução de desafios matemáticos.

Assim, a ênfase na resolução de problemas contribui para uma aprendizagem investigativa e significativa, preparando os estudantes para enfrentar desafios matemáticos com mais autonomia e confiança.

5.4.2 Explicação do motivo da escolha dessa metodologia

A escolha pela metodologia baseada na resolução de problemas fundamenta-se em princípios pedagógicos que valorizam a aprendizagem ativa, crítica e significativa. Historicamente, o ensino da Matemática tem oscilado entre abordagens expositivas e práticas investigativas, sendo fundamental adotar estratégias que estimulem o pensamento crítico e a autonomia dos estudantes, permitindo que construam o conhecimento por meio da investigação e da experimentação. Um aspecto adicional relevante é o desenvolvimento da capacidade de compreensão e interpretação de textos, uma vez que os problemas propostos exigem que o estudante leia, compreenda e traduza situações descritas em linguagem verbal para a linguagem matemática, favorecendo também sua formação leitora.

Essa abordagem está alinhada às diretrizes estabelecidas pela BNCC e pelos PCN, que propõem um ensino que vá além da memorização de algoritmos, favorecendo a compreensão conceitual e a aplicabilidade dos conhecimentos. O ensino da matemática, nesses documentos, é orientado para que os estudantes desenvolvam a capacidade de compreender os significados das operações e saibam aplicá-las em diferentes situações do cotidiano.

A contextualização dos conteúdos, elemento central da metodologia adotada, aproxima a matemática da realidade dos estudantes, tornando a aprendizagem mais relevante. Quando os conceitos são apresentados em situações significativas, os alunos conseguem estabelecer conexões mais claras entre o conteúdo e seu cotidiano, favorecendo a construção do conhecimento de forma mais intuitiva e significativa.

Além disso, essa metodologia estimula o desenvolvimento de competências como raciocínio lógico, criatividade e argumentação. Ao serem desafiados a buscar soluções próprias para os problemas propostos, os estudantes desenvolvem autonomia intelectual e ampliam sua capacidade de análise, contribuindo para uma aprendizagem mais investigativa e significativa.

Por fim, observa-se que a abordagem baseada em problemas pode contribuir significativamente para a melhoria do desempenho dos estudantes, além de favorecer a retenção dos conteúdos. A exposição frequente a desafios contextualizados permite que os alunos construam significados próprios para os conceitos matemáticos, ampliando o engajamento e a compreensão.

Dessa forma, a adoção dessa metodologia visa garantir que o ensino da matemática seja ao mesmo tempo conceitualmente consistente, didaticamente envolvente e socialmente relevante.

5.4.3 Relação com metodologias ativas de ensino

A metodologia adotada na apostila está alinhada aos princípios das metodologias ativas de ensino, que colocam o aluno como protagonista do processo de aprendizagem. Diferente do modelo tradicional, centrado na transmissão de conteúdo pelo professor, essas abordagens valorizam a participação ativa dos estudantes, promovendo investigação, exploração e construção autônoma do conhecimento. O ensino deve ser estruturado de modo a estimular a participação efetiva dos alunos, incentivando-os a explorar, questionar e formular hipóteses sobre os conceitos matemáticos.

Entre as metodologias ativas, destaca-se a **aprendizagem baseada em problemas** (ABP), em que os desafios matemáticos funcionam como ponto de partida para a construção do saber. A estrutura da apostila explora esse princípio ao propor problemas contextualizados, favorecendo a mobilização de conhecimentos em diferentes situações e promovendo o desenvolvimento de habilidades como argumentação e pensamento crítico.

Também se faz presente a abordagem da **aprendizagem por descoberta**, na qual os estudantes constroem conceitos por meio da análise de padrões e relações. Essa estratégia estimula a autonomia do aluno e a capacidade de formular generalizações matemáticas. Tal abordagem é explorada especialmente nos capítulos sobre congruência modular e triplas pitagóricas, que favorecem a dedução de propriedades numéricas e o desenvolvimento do pensamento abstrato.

Outro aspecto característico das metodologias ativas é a ênfase na **interdisciplinaridade e na contextualização** dos conteúdos. A *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) recomenda a articulação entre áreas do conhecimento, de modo a tornar o ensino mais integrado e significativo. Nesse sentido, a apostila propõe atividades que relacionam a matemática a situações do cotidiano, como uso de calendários, gamificação, finanças e medidas.

Complementarmente, **recursos visuais e elementos lúdicos** — como os mascotes pedagógicos — foram incorporados para tornar o material mais acessível e atrativo. A introdução de elementos gráficos e narrativas no ensino da Matemática pode facilitar a compreensão dos conteúdos, tornando o aprendizado mais estimulante para os estudantes.

Dessa forma, a estrutura e os recursos da apostila foram planejados com base nas metodologias ativas, promovendo um ambiente de aprendizagem que estimula o raciocínio, a autonomia e o engajamento dos alunos.

5.5 Organização dos Capítulos da Apostila

A estrutura da apostila foi cuidadosamente elaborada para favorecer a construção progressiva do conhecimento matemático, alinhando-se às orientações presentes nos documentos oficiais, como os PCN e a BNCC. Tal organização busca respeitar a complexidade crescente dos conteúdos e proporcionar ao aluno um percurso formativo que integre compreensão conceitual, aplicação prática e desenvolvimento do raciocínio lógico.

A organização sequencial dos conteúdos é essencial para que os alunos possam construir o conhecimento de maneira estruturada, estabelecendo conexões entre os diferentes conceitos matemáticos. Dessa forma, os capítulos da apostila articulam os conteúdos de modo que os alunos avancem gradualmente, partindo de noções elementares para temas mais sofisticados.

Além disso, os conteúdos são contextualizados em situações do cotidiano escolar e social dos estudantes, buscando apresentar a matemática de forma acessível e conectada à realidade dos alunos, de modo a tornar a aprendizagem mais significativa e engajadora.

Outro aspecto central na concepção da apostila é a adoção da resolução de problemas como estratégia didática predominante. Esse método permite que os alunos desenvolvam habilidades de investigação e argumentação matemática, promovendo um aprendizado ativo e reflexivo. Nesse sentido, cada capítulo propõe desafios e atividades que fomentam a construção do saber de forma autônoma e colaborativa.

Elementos lúdicos e narrativos também foram incorporados, como a personagem *Coruja Sábia*, que funciona como mediadora do conhecimento. A introdução de elementos gráficos e narrativos no ensino da matemática contribui para tornar a experiência mais envolvente e favorecer a compreensão dos conceitos.

A seguir, descrevem-se os princípios organizativos dos capítulos da apostila e os objetivos que orientam cada unidade de ensino.

5.5.1 Descrição dos Capítulos e sua Estrutura

A organização interna dos capítulos segue uma lógica didática que visa tornar a aprendizagem acessível, significativa e progressiva. Cada unidade foi concebida para introduzir e desenvolver os conceitos de forma articulada, por meio de estratégias que incentivam a participação ativa do estudante.

A estrutura padrão de cada capítulo contempla os seguintes elementos, organizados com base em objetivos de aprendizagem previamente definidos, os quais orientam o desenvolvimento das atividades e a progressão conceitual:

- **Introdução**: Apresenta o tema central e sua relevância no contexto matemático e cotidiano, despertando o interesse do estudante.

- **Exploração Conceitual**: Desenvolve os conteúdos com base em explicações claras, exemplos visuais e linguagem acessível, de forma a favorecer a compreensão progressiva dos conceitos.

- **Atividades Práticas**: Proporciona exercícios e desafios alinhados aos objetivos estabelecidos, estimulando a aplicação dos conhecimentos adquiridos e a construção ativa do saber matemático.

- **Síntese**: Retoma os principais conceitos abordados no capítulo, promovendo a consolidação dos aprendizados e a reflexão sobre o que foi desenvolvido.

Essa estrutura é aplicada a todos os capítulos, com variações metodológicas e temáticas adequadas ao conteúdo em questão. O percurso didático inicia-se com a observação de padrões numéricos no cotidiano, evolui para a compreensão da aritmética modular e culmina na exploração das triplas pitagóricas, abordando relações numéricas mais complexas.

A presença da *Coruja Sábia*, personagem recorrente ao longo da apostila, funciona como um recurso didático-narrativo que orienta, provoca reflexões e torna o conteúdo mais atrativo para os estudantes dos anos finais do ensino fundamental.

5.5.2 Objetivos de Cada Capítulo

Cada capítulo foi desenvolvido com objetivos pedagógicos específicos, orientados à construção gradual do conhecimento matemático, ao estímulo da autonomia intelectual e à valorização do raciocínio lógico. A tabela a seguir apresenta uma síntese dos objetivos de cada unidade:

- **Capítulo 1 – O Mundo Mágico dos Números**: Identificar padrões numéricos em contextos cotidianos e compreender a ideia de ciclos e repetições com base em situações como o relógio e os dias da semana.

- **Capítulo 2 – Jogos de Congruência**: Introduzir o conceito de congruência modular de forma lúdica, utilizando jogos e atividades interativas que estimulem a familiarização com a aritmética modular.

- **Capítulo 3 – Congruência ao Nosso Redor**: Aplicar o conceito de congruência em contextos reais, como calendários, datas comemorativas e eventos periódicos, promovendo a associação entre matemática e realidade.

- **Capítulo 4 – Mistérios dos Números**: Desenvolver o pensamento investigativo por meio da resolução de problemas e enigmas que envolvem congruência, reforçando a importância dos restos nas divisões.

- **Capítulo 5 – A Aventura das Triplas Pitagóricas**: Compreender a estrutura das triplas pitagóricas e suas aplicações, explorando propriedades numéricas e relações que envolvem o Teorema de Pitágoras.

Os objetivos de cada capítulo foram definidos de modo a garantir a articulação entre os conteúdos e a progressão das competências matemáticas, promovendo um processo formativo que valoriza o aprender fazendo, investigando e refletindo.

5.6 Explicação do Conteúdo de Cada Capítulo

A organização dos capítulos da apostila segue uma progressão didática que visa desenvolver o pensamento matemático de forma contextualizada, investigativa e significativa. Cada unidade aborda conceitos fundamentais da Aritmética de maneira gradual, utilizando situações reais, desafios e estratégias ativas que incentivam a participação dos estudantes na construção do conhecimento.

Segundo os *Parâmetros Curriculares Nacionais*, ao planejar suas atividades, "o professor procurará articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando a possibilitar a compreensão mais ampla que o aluno possa atingir a respeito dos princípios e métodos básicos do corpo de conhecimentos matemáticos" (Ministério da Educação (PCN) [13, p. 53]). Alinhada à *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC), a apostila enfatiza a resolução de problemas, o raciocínio lógico, a argumentação e a modelagem como eixos estruturantes.

5.6.1 Capítulo 1: O Mundo Mágico dos Números

O primeiro capítulo tem como foco despertar a curiosidade dos estudantes em relação ao universo dos números inteiros, a partir de observações do cotidiano e padrões numéricos simples. Situações como calendários, ciclos semanais e horas do dia são utilizadas para introduzir conceitos de sequência, ordem e regularidade.

A abordagem estimula o pensamento indutivo, incentivando os alunos a formular generalizações com base em observações concretas. O capítulo também introduz a reta numérica, as relações de ordem e as operações com números inteiros, promovendo a construção de uma base sólida para o desenvolvimento de conceitos aritméticos mais avançados.

5.6.2 Capítulo 2: Jogos de Congruência

Neste capítulo, os alunos entram em contato com o conceito de congruência modular por meio de atividades lúdicas e investigativas. Utilizando jogos, tabuleiros e situações-problema, o capítulo propõe experiências que permitem visualizar e manipular os restos das divisões, construindo o conceito de congruência de maneira intuitiva.

A congruência modular é apresentada como uma ferramenta poderosa para compreender a divisibilidade e a estrutura dos números inteiros. A interação com desafios gamificados estimula a autonomia dos alunos, que passam a formular estratégias para resolver problemas envolvendo ciclos, restos e relações numéricas recorrentes.

5.6.3 Capítulo 3: Congruência ao Nosso Redor

Dando continuidade à temática da congruência, este capítulo amplia a discussão para aplicações reais, como o funcionamento dos calendários, dos relógios e de sistemas cíclicos. A congruência é apresentada como instrumento para modelar repetições e padrões, favorecendo uma compreensão mais concreta e aplicada do conceito.

Tais contextos aproximam os estudantes de uma matemática funcional e relevante. Além disso, o capítulo aborda aplicações em tecnologias como a criptografia e a segurança digital, demonstrando que a aritmética modular está presente em sistemas de comunicação, codificação e validação de dados.

5.6.4 Capítulo 4: Mistérios dos Números

Este capítulo leva os estudantes a explorar a estrutura interna dos números inteiros, investigando propriedades como divisibilidade, decomposição em fatores primos e representação como soma de quadrados. O objetivo é incentivar a observação de padrões e a formulação de conjecturas com base na experiência empírica.

O Teorema Fundamental da Aritmética é apresentado como fundamento para a compreensão da estrutura multiplicativa dos números. A abordagem investigativa adotada propicia o desenvolvimento do pensamento crítico ao propor atividades que exigem justificação e validação de ideias matemáticas.

5.6.5 Capítulo 5: A Aventura das Triplas Pitagóricas

O último capítulo apresenta uma ponte entre a aritmética e a geometria por meio do estudo das triplas pitagóricas. Os alunos exploram a relação entre os lados do triângulo retângulo e a estrutura dos números inteiros, utilizando o Teorema de Pitágoras como base para gerar conjuntos que satisfazem a equação $a^2 + b^2 = c^2$.

A fórmula de Euclides é introduzida como método para gerar triplas primitivas, permitindo aos alunos criar seus próprios exemplos e reconhecer padrões. As aplicações práticas abordadas incluem engenharia, arquitetura e modelagem computacional, demonstrando como a matemática se estende para além da sala de aula.

Esse capítulo conclui a proposta pedagógica da apostila ao integrar diferentes áreas do conhecimento matemático, reforçando a importância da interconexão entre conteúdos e da aprendizagem por investigação.

6 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo apresentar a construção de apostilas voltadas ao ensino de conceitos fundamentais da Matemática — como os números inteiros, a congruência modular e as triplas pitagóricas — por meio de uma abordagem didática centrada na contextualização, na ludicidade e na autonomia discente. Fundamentadas nas diretrizes da *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) e dos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN), as apostilas foram concebidas para promover uma aprendizagem significativa, crítica e alinhada às demandas da educação contemporânea.

A proposta metodológica adotada enfatizou o uso da resolução de problemas como estratégia principal de ensino, permitindo que os estudantes desenvolvessem habilidades como o raciocínio lógico, a argumentação e a capacidade de formular hipóteses. O ensino da Matemática deve oportunizar situações investigativas, nas quais o aluno atue ativamente na construção do conhecimento.

Outro diferencial do material foi a incorporação de mascotes pedagógicos, personagens lúdicos que atuam como mediadores ao longo das atividades. A presença desses recursos visuais contribuiu para o engajamento dos estudantes e facilitou a assimilação de conceitos abstratos, demonstrando como elementos simbólicos e narrativos podem ampliar a compreensão e a motivação dos alunos.

A articulação entre o conteúdo matemático e contextos reais foi um dos eixos centrais do projeto. A escolha de temas e exemplos cotidianos buscou aproximar a Matemática da vivência dos estudantes, valorizando sua aplicabilidade e promovendo a interdisciplinaridade. Essa perspectiva orientou a organização das atividades propostas, com o objetivo de formar alunos capazes de mobilizar conhecimentos matemáticos em diferentes esferas da vida social, fortalecendo seu papel como cidadãos críticos e participativos.

Os resultados da elaboração do material indicam o potencial da proposta para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem. No entanto, reconhece-se a importância de estudos posteriores que envolvam a aplicação das apostilas em sala de aula, de modo a avaliar empiricamente sua eficácia didática e os impactos sobre a aprendizagem dos alunos.

Como perspectivas para continuidade deste trabalho, destaca-se a possibilidade de desenvolvimento de versões digitais interativas, com recursos multimídia que complementem o conteúdo impresso, bem como a adaptação do material para diferentes níveis de ensino, ampliando sua aplicabilidade em diversos contextos educacionais.

Conclui-se que a construção de materiais didáticos inovadores, alinhados às metodologias ativas e às diretrizes curriculares, representa uma estratégia eficaz para tornar a Matemática mais acessível, envolvente e conectada à realidade dos estudantes. Espera-se que esta proposta possa contribuir para a valorização do ensino da disciplina e para o fortalecimento de práticas pedagógicas transformadoras.

Bibliografia

[1] Curvo, E. F. “O ensino aprendizagem da matemática através das metodologias ativas”. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento* 8 (2022), pp. 227–240.

[2] D’Ambrosio, U. *Educação Matemática: Da Teoria à Prática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

[3] Domingues, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. Atual, 1991.

[4] Encyclopaedia Britannica. *Number theory: Pierre de Fermat*. Acesso em: 24 mar. 2025. 2025. URL: https://www.britannica.com/science/number-theory/Pierre-de-Fermat (acesso em 24 de mar. de 2025).

[5] Fermat Vieira, P. S. de. *Elaboração de uma apostila para apresentar o infinito no ensino médio*. 2023. URL: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/.

[6] Hefez, A. *Aritmética*. Vol. 2. SBM, Coleção Profmat, 2016.

[7] Jesus, V. P. de. *Apostila sobre a Matemática na Construção Civil com o uso do Sweet Home 3D*. 2022. URL: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/.

[8] Lira, J. V. D., Silva, M. V. R. da e Silva Neto, J. F. da. “Dificuldades de aprendizagem matemática: o que dizem as pesquisas recentes”. *Educação Matemática em Revista* 1.25 (2024), pp. 54–61.

[9] Marinho, H. R. B. et al. *Pedagogia do movimento: universo lúdico e psicomotricidade*. 2ª ed. Curitiba: Ipbex, 2007.

[10] Martinez, F. B. et al. *Teoria dos números: um passeio pelos primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[11] Menezes, J. et al. “Metodologia de resolução de problemas: concepções e estratégias de ensino”. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia* (2024).

[12] Ministério da Educação (BNCC). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ (acesso em 12 de fev. de 2024).

[13] Ministério da Educação (PCN). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação, 1998. URL: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf (acesso em 12 de fev. de 2024).

[14] Pólya, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[15] Ponte, J. P. d. “Problemas de Matemática e situações da vida real”. *Revista de Educação* 2.2 (1992). Departamento de Educação F.C. da U.L.

[16] Robson, E. “Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322”. *Historia Mathematica* 28.3 (2001), pp. 167–206. DOI: 10.1006/hmat.2001.2317.

[17] Roque, T. E. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[18] Santos, E. B. L. *Elaboração de uma apostila sobre programação e métodos numéricos para o ensino médio*. 2024. URL: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/.