



$6 - 16 + 9$

$= 2 + 4$

$7 = 4 -$

$5 = 2 \approx$

3

$\frac{1}{2} \approx \frac{3}{6}$

10

1



$+14 -$

3

2

$7 + 6 + 1$

14

3



# BRINCANDO COM A MATEMÁTICA: VERSÃO DO PROFESSOR

Luiza Nonaka e Danielle Franco Nicolau

2

4 6



# Brincando com a Matemática: versão do professor

Luiza Nonaka e Danielle Franco Nicolau

Universidade Federal de Viçosa

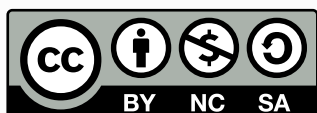
Campus UFV-Florestal – [UFV](#)

26 de abril de 2025

Apostila escrita em  $\text{\LaTeX}$  com a classe nice-booklet criada por Luis A. D’Afonseca.

Versão 10/10/2024

Arte da capa: Imagem criada por IA de [Canva](#) baixada de [Canva](#)



Esta obra tem a licença [Creative Commons](#) “Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional”.

# Prefácio

Escrever esta apostila foi, antes de tudo, um convite à imaginação e à descoberta. A matemática, muitas vezes temida por alunos, é aqui apresentada de forma leve, visual e divertida, com o desejo sincero de que cada estudante possa se surpreender com sua beleza e lógica.

Nosso objetivo é mostrar que aprender matemática pode ser tão empolgante quanto resolver um enigma ou vencer um jogo. Utilizamos situações do cotidiano, desafios investigativos e atividades criativas para transformar o aprendizado em uma experiência envolvente.

Este material é fruto da prática docente, da escuta atenta aos alunos e da busca constante por metodologias que tornem a matemática acessível e significativa. Foi pensado especialmente para você, estudante curioso, que está disposto a enxergar os números com novos olhos.

Esta apostila foi desenvolvida no contexto do PROFMAT — Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional — na Universidade Federal de Viçosa, textitcampus UFV-Florestal. É fruto de uma proposta que une teoria, prática e compromisso com a educação básica. Ela pode ser usada em sala de aula ou em casa, de forma individual ou em grupo.

As atividades propostas dialogam com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), [12], promovendo competências matemáticas essenciais por meio de uma abordagem lúdica e investigativa.

Agradecemos a todos os professores, colegas e alunos que, de diferentes formas, contribuíram para a construção deste material.

Esperamos que esta jornada não apenas desenvolva suas habilidades matemáticas, mas também desperte o gosto pelo raciocínio, pela exploração e pela beleza dos padrões que regem o mundo ao nosso redor.

*“Aprender matemática pode ser uma aventura, basta abrir os olhos para os padrões escondidos no mundo ao nosso redor.”*

Esta frase expressa o espírito desta apostila, que nasceu do desejo de apresentar a Matemática de forma diferenciada — mais próxima, mais visual, mais envolvente. Acreditamos que aprender pode (e deve!) ser uma experiência curiosa, prazerosa e cheia de descobertas.

*Boa leitura e boas descobertas!*

**Luiza Nonaka e Danielle Franco Nicolau**

# Sumário

<b>Apostila – Versão do Professor</b>	<b>1</b>
<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 O Mundo Mágico dos Números</b>	<b>4</b>
1.1 Os Números e seus Padrões Mágicos . . . . .	5
1.1.1 O Relógio Mágico . . . . .	7
1.1.2 A Máquina do tempo . . . . .	10
1.1.3 Padrões na Natureza . . . . .	13
1.2 Atividade: Descobrimo Padrões . . . . .	16
1.3 Explorando Mais . . . . .	17
1.4 Exercícios: Explorando Padrões e Ciclos . . . . .	18
<b>2 Jogos de Congruência</b>	<b>22</b>
2.1 O Que é Congruência? . . . . .	23
2.2 Jogando com Tabuleiros Circulares . . . . .	26
2.2.1 Para que serve isso? . . . . .	28
2.3 Vamos Brincar com a Congruência! . . . . .	29
2.3.1 Jogo do Tabuleiro Circular . . . . .	29
2.4 Explorando Mais . . . . .	31
2.5 Atividade Prática: A Volta ao Mundo dos Números . . . . .	33

<b>3</b>	<b>Congruência ao Nosso Redor</b>	<b>39</b>
3.1	Introdução . . . . .	40
3.2	Datas Especiais e Repetições . . . . .	40
3.3	Eventos Esportivos . . . . .	42
3.4	Atividade Prática: Explorando Datas Famosas . . . . .	45
3.5	Fechando a Missão 3! . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Mistérios dos Números</b>	<b>48</b>
4.1	Introdução . . . . .	49
4.2	Missões . . . . .	49
	Missão 1 – O Enigma do Cofre Secreto . . . . .	49
	Missão 2 - Mistérios com Fechaduras e Códigos . . . . .	51
	Missão 3 – Caça ao Tesouro Congruente . . . . .	54
	Missão 4 - A Senha Perdida . . . . .	56
	Missão 5 – O Caso do Ladrão . . . . .	59
4.3	Conclusão - Missão cumprida . . . . .	61
<b>5</b>	<b>A Aventura das Triplas Pitagóricas</b>	<b>62</b>
5.1	O que são Triplas Pitagóricas? . . . . .	63
5.2	Brincando com Triplas . . . . .	66
5.3	A Caça aos Números Mágicos . . . . .	72
5.4	Conclusão - Missão Cumprida . . . . .	77
	<b>Considerações Finais</b>	<b>79</b>
	<b>As amigas corujas e a nossa imaginação</b>	<b>81</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>82</b>
	Apêndice A — Principais Conceitos Trabalhados . . . . .	82
	Apêndice B — Sugestões de Avaliação . . . . .	82
	Apêndice C — Atividades Complementares e Jogos . . . . .	83

<b>Respostas</b>	<b>84</b>
<b>Referências</b>	<b>86</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>87</b>

# Apostila - Versão do Professor

Bem-vindo(a) à Versão do Professor

**Uma jornada de ensino que encanta, desafia e transforma.**

Prezado(a) Professor(a),

É com entusiasmo que apresentamos a versão do professor da apostila *Brincando com a Matemática*. Este material foi cuidadosamente desenvolvido para transformar a percepção da Matemática, aproximando-a do cotidiano e revelando os encantos por trás dos números. Nosso objetivo é criar um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo, onde a curiosidade do aluno é estimulada por meio de desafios, enigmas e atividades práticas.

## Objetivos do Material

---

- ◇ **Despertar o Interesse:** Mostrar aos alunos que a Matemática vai além dos algoritmos e fórmulas, explorando padrões e lógica presentes em situações do dia a dia.
- ◇ **Incentivar o Raciocínio Crítico:** Através de problemas investigativos e atividades lúdicas, promovemos o desenvolvimento do pensamento lógico e da criatividade.
- ◇ **Facilitar a Mediação Pedagógica:** Com notas de aula, sugestões de atividades e recursos visuais, esta versão oferece um suporte adequado para que você possa conduzir a aprendizagem de forma fluida e adaptada às necessidades da sua turma.

## Como Utilizar Esta Versão

---

Nesta apostila, você encontrará:

- ◇ **Notas de Aula e Sugestões Pedagógicas:** Comentários e orientações que podem ser incorporados às aulas, facilitando a condução das atividades e abrindo espaço para discussões enriquecedoras.
- ◇ **Recursos Visuais e Exemplos Práticos:** Elementos como o “Relógio Mágico” ilustram os conceitos de aritmética modular e padrões numéricos de maneira visual e intuitiva.
- ◇ **Resoluções e Estratégias de Ensino:** Explicações detalhadas e múltiplos caminhos de resolução dos exercícios e problemas propostos, ampliando as possibilidades de mediação.

### Sugestão de Aplicação em Sala:

- ◇ **Antes da aula:** Consulte as Notas de Aula para planejar abordagens, materiais e estratégias.
- ◇ **Durante a aula:** Utilize os recursos visuais e as atividades práticas como ponto de partida para investigações em grupo.
- ◇ **Depois da aula:** Proponha desafios e investigações extras como tarefas ampliadas, discussões ou até jogos.

## Flexibilidade e Adaptação

---

Sabemos que cada turma tem suas particularidades. Por isso, este material foi pensado como uma base aberta à personalização. Sinta-se à vontade para adaptar, expandir ou integrar novas atividades conforme o contexto da sua escola e de seus alunos.

Que este material inspire momentos de descoberta e transforme suas aulas em experiências verdadeiramente mágicas, onde o encantamento pelo mundo dos números e a beleza do raciocínio ganham vida na sala de aula.

*Com Carinho,*  
**Luiza Nonaka<sup>1</sup> e Danielle Franco Nicolau<sup>2</sup>**

---

<sup>1</sup>Luiza Nonaka é aluna do curso de mestrado PROFMAT da Universidade Federal de Viçosa, *campus* UFV-Florestal

<sup>2</sup>Danielle Franco Nicolau é docente da Universidade Federal de Viçosa, *campu* UFV-Florestal

# Introdução

A matemática está em todo lugar: nos horários que seguimos, nos ciclos da natureza, nas construções, nos jogos e até nos dias da semana. Mas você já se perguntou como os números “sabem” voltar ao começo? Ou por que certos padrões se repetem? Esta apostila foi pensada para ajudar a responder essas e outras perguntas com curiosidade, leveza e diversão.

Ao longo dos capítulos, você vai explorar o mundo dos números inteiros e suas propriedades cíclicas. Vamos descobrir o que é congruência, brincar com tabuleiros numéricos, investigar mistérios como verdadeiros detetives e descobrir os segredos das triplas pitagóricas.

A apostila está embasada em referências muito importantes como Hefez [7], Domingues [4], Martinez et al. [9] e Menezes et al. [10].

Cada seção traz explicações simples, exemplos visuais, atividades práticas e desafios instigantes - sempre com a ajuda das nossas amigas corujas, que vão aparecer ao longo da apostila com dicas, pistas e provocações para te ajudar a pensar fora da caixa.

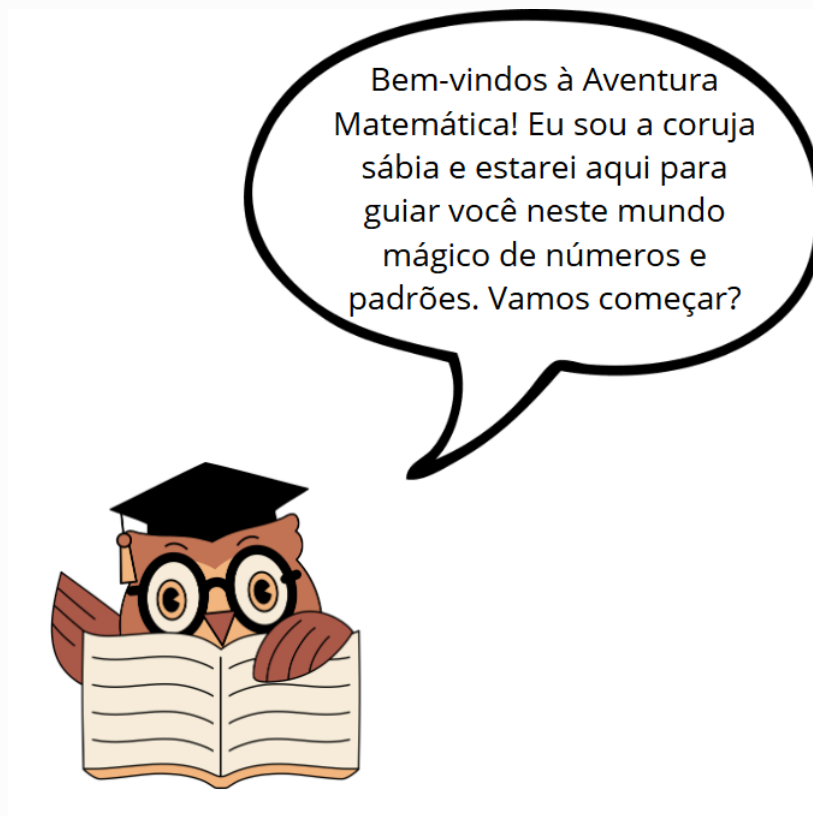
As ilustrações das amigas corujas foram criadas pelas autoras com o apoio de ferramentas de inteligência artificial, mantendo o estilo lúdico e acolhedor que acompanha toda esta aventura matemática.

Prepare-se para aprender matemática de um jeito diferente — mais próximo da sua realidade, mais interativo e muito mais divertido. Esta não é apenas uma apostila: é uma aventura matemática esperando para ser desvendada!

*Vamos começar?*

# 1

## O Mundo Mágico dos Números



Bem-vindo à nossa jornada matemática! Neste primeiro capítulo, vamos mergulhar em um mundo mágico onde os números não são apenas para contar, mas para explorar padrões e descobrir como eles podem “dar voltas” e “recomeçar”. Você já parou para pensar em como os números estão em tudo o que fazemos? Vamos juntos desvendar os segredos dos números e como eles se comportam de maneiras incríveis!

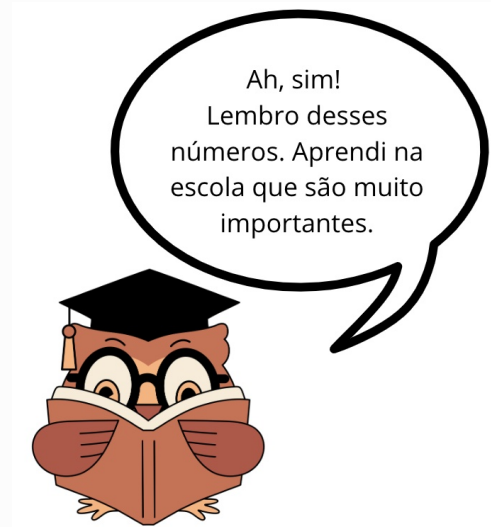
Já parou para pensar por que os dias da semana se repetem? Ou como o relógio sabe sempre “voltar ao começo”? Neste capítulo, vamos investigar como os números se

comportam quando entram em ciclos. E prepare-se: isso será muito importante mais adiante, quando aprendermos sobre **congruência**!

Abra bem os olhos, pegue papel, lápis, e prepare-se para explorar os padrões que aparecem em todo lugar!

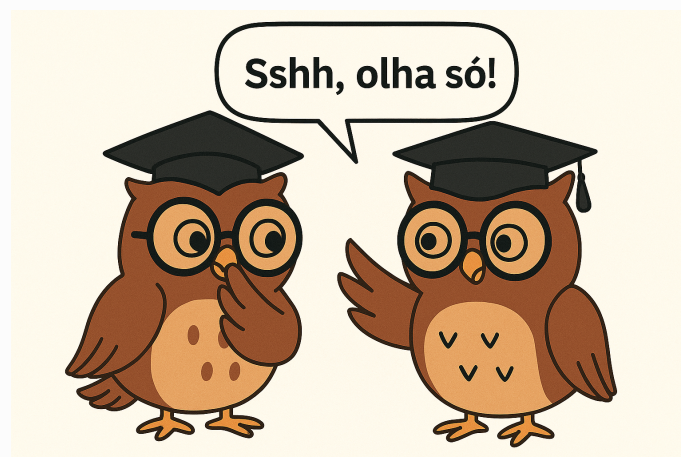
Vamos explorar o conjunto dos **números inteiros**, também chamados de  $\mathbb{Z}$ , que inclui os números negativos, o zero e os positivos:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



## 1.1 Os Números e seus Padrões Mágicos

Os números podem criar padrões muito interessantes, e podemos encontrá-los em todos os lugares: no calendário, no relógio, e até na natureza! Vamos começar observando como esses padrões aparecem no nosso dia a dia.



🗨️ As amigas corujas cochicham : “O que é um padrão?”

Um **padrão** é algo se repete com frequência. Na matemática podemos encontrar uma regra para essa repetição, pode ser um desenho, uma sequência de números, ou até coisas que vemos na natureza! Por exemplo: as listras de uma zebra.

**✂** Exemplo

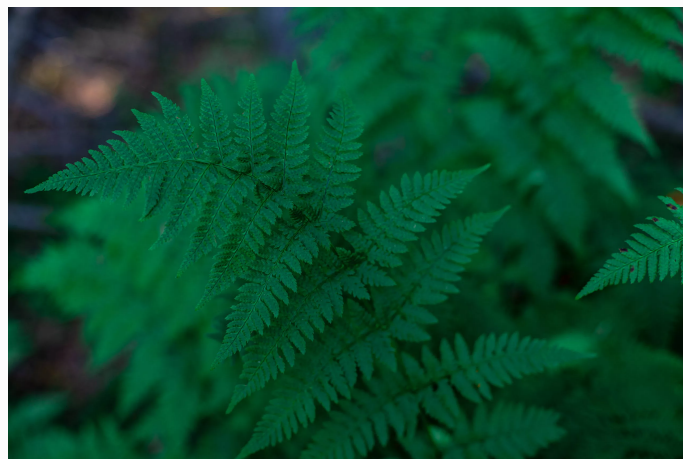
Observe a sequência de bolinhas ao lado: ●●●●●●

É possível descobrir a próxima cor da bolinha, sabendo que essa sequência segue o mesmo padrão? Se repararmos bem, o padrão dessa sequência é: **bolinha vermelha** - **bolinha azul**, e vai se repetindo, nessa ordem.

Como no desenho acima, a última bolinha que apareceu foi azul, então, a próxima bolinha será vermelha (●).

Você já reparou como a natureza adora repetir padrões? As pétalas das flores, as fases da lua, as estações do ano — todos seguem ritmos que voltam, se repetem, se renovam. A matemática está por trás desses ciclos, revelando uma organização encantadora. Como apontado por Mentalidades Matemáticas (2024), [11], padrões como simetrias, espirais e sequências são comuns na natureza e podem ser uma porta de entrada fascinante para o pensamento matemático. Este artigo apresenta o padrão das folhas das samambaias, veja Figura (1.1).

Cada folha de uma samambaia é composta por várias folhas menores. E se você observar essas folhinhas, vai notar que elas são miniaturas das versões maiores, sucessivamente. (Mentalidades Matemáticas [11, pag. 1]).



**Figura 1.1:** *Padrão de repetição na natureza: observe como cada parte da samambaia se parece com o todo.*

Fonte: Mentalidades Matemáticas [11].

### Dica de atividade pedagógica (versão do professor)

Este capítulo é um convite para explorar com os alunos os padrões que aparecem em contextos cotidianos e naturais. A ideia é despertar a curiosidade e promover uma observação atenta de regularidades que, muitas vezes, passam despercebidas.

Use a imagem da samambaia para provocar a seguinte pergunta: “*Você consegue encontrar uma parte da planta que se parece com o todo?*” A intenção não é formalizar conceitos ainda, mas abrir espaço para conexões visuais e intuições sobre repetição, ciclos e estrutura.

#### **Atividade prática:**

- ◇ No ambiente ao redor: Peça para os alunos observarem padrões, como os azulejos do chão ou os ladrilhos da parede.
- ◇ é papel e lápis para que eles criem seus próprios padrões desenhando ou escrevendo sequências numéricas.

#### **Reflexão final:**

- ◇ Uma sugestão seria: “Os padrões estão em todos os lugares! Seja nos números, nas formas, ou até nas batidas de uma música. Vocês conseguem encontrar algum padrão na vida de vocês? ”

## 1.1.1 O Relógio Mágico


Um dos padrões mais fáceis de perceber, é o do relógio! Nele, os números “dão voltas”.

Isso acontece porque o relógio funciona como um ciclo de 24 horas. Depois das 24, voltamos para 0 (ou 1). É como se os números “dessem a volta” e retornassem ao ponto de partida.

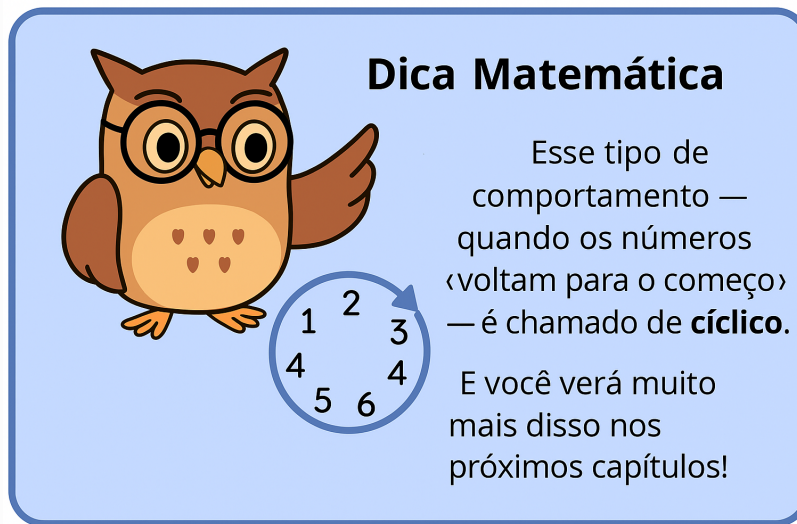


### **Agora é com você**

Se agora são 10 horas e você adicionar 15 horas, que horas serão?

 Lembre-se: depois das 24 horas, o relógio recomeça.

$$10 + 15 = 25 \Rightarrow \text{O relógio mostra 1h! (24+1)}$$

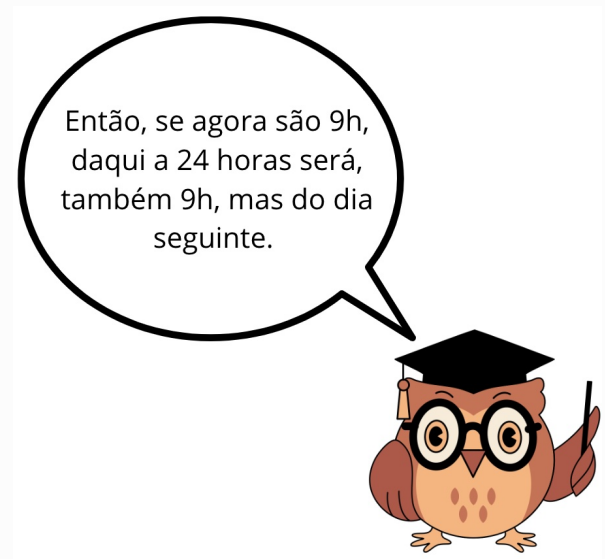


**Figura 1.2:** Comportamento cíclico

Um dia possui 24 horas. Isso significa que, a cada 24 horas, a partir da 0 horas, um dia novo se inicia. Assim, se queremos a mesma hora de agora, porém amanhã, basta somar 24 horas.



**Figura 1.3:** Ciclo de tempo do dia.



**Figura 1.4:** Mascote pensativa.

Dessa maneira, a cada ciclo de 24 horas, um novo dia começa.

### Dica de atividade pedagógica (versão do professor)

**Sugestão de reflexão:** Converse com seus alunos sobre a variação do relógio analógico e o relógio digital. Se usarmos um relógio analógico, o ciclo poderia ser de 12 horas.



**Dica da Coruja Professora:** Que tal aproveitar o relógio de parede da sala como recurso didático? Antes de entregar o tabuleiro da atividade, peça para os alunos indicarem com os dedos onde estaria o número 9 depois de somar 5 horas a ele! Atividades como essa ajudam a criar pontes entre o conteúdo e o cotidiano. Explora a curiosidade dos alunos para desenvolver o raciocínio lógico de forma divertida!

Vamos imaginar uma situação que poderia acontecer aí na sua sala... Sabe quando alguém está tão empolgado com o aniversário que até transforma isso em um desafio matemático? Olha só o que a Maria fez para impressionar a professora Alice!

### História da Maria e o Desafio das Horas

Maria quer convidar seus amigos para sua festa de aniversário, que será às 13h de sábado. Hoje é quinta-feira, às 10h. Ela, como está na aula de matemática, quer impressionar sua professora Alice. Assim, pediu licença à professora para conversar com a turma e falou:

*“Meu aniversário é sábado às 13h, estão todos convidados. Espero vocês **daqui a 49 horas** em minha casa!”*

E agora? A turma consegue descobrir se Maria fez o cálculo certo?



### Agora é com você

Se seu professor passar uma atividade às 13h, solicitando que a entrega seja realizada daqui a 45 horas. Qual horário você deverá entregar a atividade?

### Resolução passo a passo (versão do professor)

Se o professor deseja que a atividade seja entregue daqui às 45 horas, e o ciclo do relógio é 24, podemos pensar da seguinte forma:

- ◇ Somando  $24+24=48$ , passa 45.
- ◇ Há um ciclo de 24 dentro de 45, e sobra  $45-24=21$ .
- ◇ São 13h, mais 21h, teremos  $13+21=32$  h, que passa de 24.
- ◇ Como  $32-24=8$ , o horário de entrega será 8h.

### 📌 Explicação Teórica (versão do professor)

Professor(a), este é um ótimo momento para explorar com os alunos os conceitos de múltiplos e divisores. Além disso, você pode introduzir, de forma contextualizada, um importante resultado da Teoria dos Números: o **Lema da Divisão de Euclides**, apresentado a seguir.

**Teorema:** Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $b \neq 0$ , existem únicos  $q, r \in \mathbb{Z}$  tais que  $a = bq + r$ , com  $0 \leq r < |b|$ .

Em contextos escolares, especialmente com turmas mais jovens, não recomendamos abordar diretamente a linguagem formal dos teoremas. Porém, transmitir a ideia de quociente e resto é essencial para o entendimento dos números inteiros.

Você pode usar novamente a analogia da “máquina de calcular quocientes” apresentada anteriormente e propor exemplos variados em sala de aula, sempre partindo de situações concretas que envolvam partilhas ou medições. Isso ajuda a dar sentido ao conceito e aproxima a matemática do cotidiano dos alunos.

🗨️ *As amigas corujas pensam: “Parece que há outros padrões além do relógio, os dias da semana estão rodando em círculos!”*

## 1.1.2 A Máquina do tempo

As amigas corujas encontraram uma máquina muito curiosa, chamada **Máquina do Tempo**, em um laboratório misterioso. Ela parece transformar números em dias da semana!

- ◇ Quando digitamos o número 1, a máquina responde: “segunda-feira”.
- ◇ Ao digitar 2, ela diz “terça-feira”.
- ◇ O 3 vira “quarta-feira”...
- ◇ e assim por diante.

### ! Uma surpresa!

Algo surpreendente acontece: se digitarmos o número 8, a resposta volta a ser “segunda-feira”! E o 9? “Terça-feira”!



**Figura 1.5:** Máquina intrigante

● *As amigas corujas observam: “Segunda-feira apareceu de novo? Que curioso! Será que os números estão rodando em círculos?”*

Vamos tentar entender o funcionamento da máquina, para ajudar nossas amigas corujas.

- ◇ Será que há um padrão?
- ◇ Observe a tabela abaixo


Digitado na máquina	Dia da Semana	Digitado na máquina	Dia da Semana
1	segunda	8	Segunda
2	Terça	9	Terça
3	Quarta	10	Quarta
4	Quinta	11	Quinta
5	Sexta	12	Sexta
6	Sábado	13	Sábado
7	Domingo	⋮	⋮

 **Dica Rápida**

Parece que a máquina responde:

- ◇ segunda-feira sempre que digitamos um número múltiplo de  $7 + 1$ .
- ◇ terça-feira sempre que digitamos um número múltiplo de  $7 + 2$ .
- ◇ quarta-feira sempre que digitamos um número múltiplo de  $7 + 3$ .
- ◇ quinta-feira sempre que digitamos um número múltiplo de  $7 + 4$ .
- ◇ sexta-feira sempre que digitamos um número múltiplo de  $7 + 5$ .
- ◇ sábado sempre que digitamos um número múltiplo de  $7 + 6$ .
- ◇ domingo sempre que digitamos um número múltiplo de  $7$ .

A dica acima é muito útil. Você, caro aluno, consegue identificar o motivo?  
A partir dessa descoberta, tentaremos resolver a seguinte questão:

 Se hoje é segunda-feira e, se passarem 19 dias, em qual dia da semana estaremos?

Vamos usar a máquina! Segunda-feira é referente ao número 1 da máquina. Somando 19,

$$1 + 19 = 20.$$

Qual dia da semana a máquina diz, se digitarmos 20?

Pela dica, temos

$$20 = 2 \cdot 7 + 6.$$

Então, a máquina responderá **sábado**!

 **Explicação Teórica (versão do professor)**

Professor, neste momento você pode aproveitar para trabalhar com os alunos múltiplos e divisores. Além disso, apresentar um importante resultado na Teoria dos Números, **Lema da Divisão de Euclides**, dado pela proposição abaixo.

**Teorema:** Dados  $a, b \in \mathbb{Z}$ , com  $b \neq 0$ , existem únicos  $q, r \in \mathbb{Z}$ , tais que  $a = bq + r$ , com  $0 \leq r < |b|$ .

Em sala de aula, dependendo da idade dos alunos, não é aconselhável falar de teoremas, porém, passar a ideia de quociente e resto é fundamental para o entendimento dos números inteiros.

Use a ideia da máquina e faça mais exemplos em sala de aula.



### Agora é com você

**Q Desafio:** Se hoje é quarta-feira, que dia da semana será daqui a 20 dias?

### Resolução passo a passo (versão do professor)

Como apresentado acima, os dias da semana estão num ciclo de 7. Observe que, pelo Lema da Divisão de Euclides

$$20 = 4 \cdot 7 + 4.$$

Logo, teremos 4 ciclos completos, mais 4 dias. Portanto, daqui a 20 dias será quarta-feira+4, que dará domingo.

## 1.1.3 Padrões na Natureza

Os números também aparecem na natureza de maneiras incríveis. Você sabia que muitas flores têm pétalas em números que seguem um padrão? Algumas flores têm 3, outras 5, outras 8... Esses números fazem parte de uma sequência especial chamada **Sequência de Fibonacci**.

Mas calma — esse é um mistério para uma missão futura. Por enquanto, guarde essa pista mágica!



**Figura 1.6:** Que mistério é esse?

Depois de investigar alguns padrões e segredos, nossa Coruja Detetive encontrou algo muito especial no bosque das flores. Prepare-se, detetive, porque agora vamos desvendar um novo código escondido na natureza!

A Coruja Detetive conta com você, seu ajudante curioso, para desvendar os mistérios da matemática!

### Missão

Missão — O Código Secreto das Pétalas

Em um bosque encantado, as flores guardam um segredo numérico. A Coruja Detetive descobriu que muitas delas seguem uma sequência misteriosa...

Ela coletou algumas flores e contou suas pétalas:

Flor 1	Flor 2	Flor 3	Flor 4	Flor 5
3 pétalas	5 pétalas	8 pétalas	13 pétalas	?

**A Coruja Detetive te escolheu para essa missão. Está preparado?**

1. Que número você acha que a Flor 5 vai ter? Explique seu palpite!
2. Qual é o segredo dessa sequência?
3. Continue a sequência e descubra mais três flores.

4. Agora observe flores reais ou imagens: alguma delas segue o mesmo padrão?
5. Crie a sua própria flor mágica! Quantas pétalas ela terá?

**Parabéns, Detetive!** Você desvendou mais um mistério da natureza!

### Resolução passo a passo (versão do professor)

**Objetivo da missão:** Estimular a identificação de padrões numéricos com significado matemático e natural, usando como gancho a curiosa ocorrência da Sequência de Fibonacci nas flores.

**Conceito matemático envolvido:** A **Sequência de Fibonacci**, definida por:

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2), \quad \text{com } F(0) = 0 \text{ e } F(1) = 1$$

e que gera a sequência: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

**Como aparece na natureza:** Muitas flores apresentam números de pétalas que pertencem a essa sequência. Essa ocorrência é explicada por modelos biológicos de eficiência e simetria no crescimento. Trabalhar esse tema na sala de aula cria conexões entre matemática, natureza e até arte.

Há outros exemplos como folhas em galhos, sementes em girassóis e escamas em pinhas — padrões que maximizam o aproveitamento do espaço e da luz.

#### **Gabarito das questões:**

- ◇ 1. Flor 5 terá **21 pétalas**, seguindo a sequência: 3, 5, 8, 13, **21**.
- ◇ 2. A sequência é construída somando os dois termos anteriores.
- ◇ 3. Próximos termos: **34, 55, 89**.
- ◇ 4. Resposta aberta: alunos podem citar girassóis, margaridas, lírios, etc.
- ◇ 5. Resposta criativa: incentive que usem um número da sequência como quantidade de pétalas.

#### **Sugestões de mediação:**

- ◇ Leve imagens ou flores reais (ou use fotos online) com diferentes números de pétalas.

- ◇ Peça aos alunos que pesquisem flores e construam um “jardim de Fibonacci” com desenhos, colagens ou moldes em papel.
- ◇ Para alunos mais avançados, proponha que encontrem uma fórmula para o  $n$ -ésimo termo ou investiguem a razão entre termos consecutivos (caminho para a razão áurea).

**Interdisciplinaridade:** Essa missão pode ser articulada com Ciências (morfologia vegetal), Arte (padrões naturais e simetria), e até História da Matemática (Leonardo de Pisa, o Fibonacci).

## 1.2 Atividade: Descobrendo Padrões

Agora que você conhece alguns padrões numéricos, vamos brincar com eles! Para isso, desenhe um círculo e marque números de 1 a 6 ao redor dele, como se fosse um relógio.

Agora, siga as instruções:

1. Comece no número 1.
2. Conte 8 passos no sentido horário.
3. Em qual número você parou?

Lembre-se de voltar ao 1 sempre que chegar ao 6, como em um ciclo. Você deve parar no número 3! Isso acontece porque, ao completar uma volta, o número se “reinicia”.

### Resolução passo a passo (versão do professor)

Nesta atividade, o ciclo é de 6 em 6. Assim, se contamos 8 passos no sentido horário, teremos

$$8 = 1 \cdot 6 + 2$$

Logo, como começou no número 1, parará no número  $1+2=3$ .

## 1.3 Explorando Mais

---

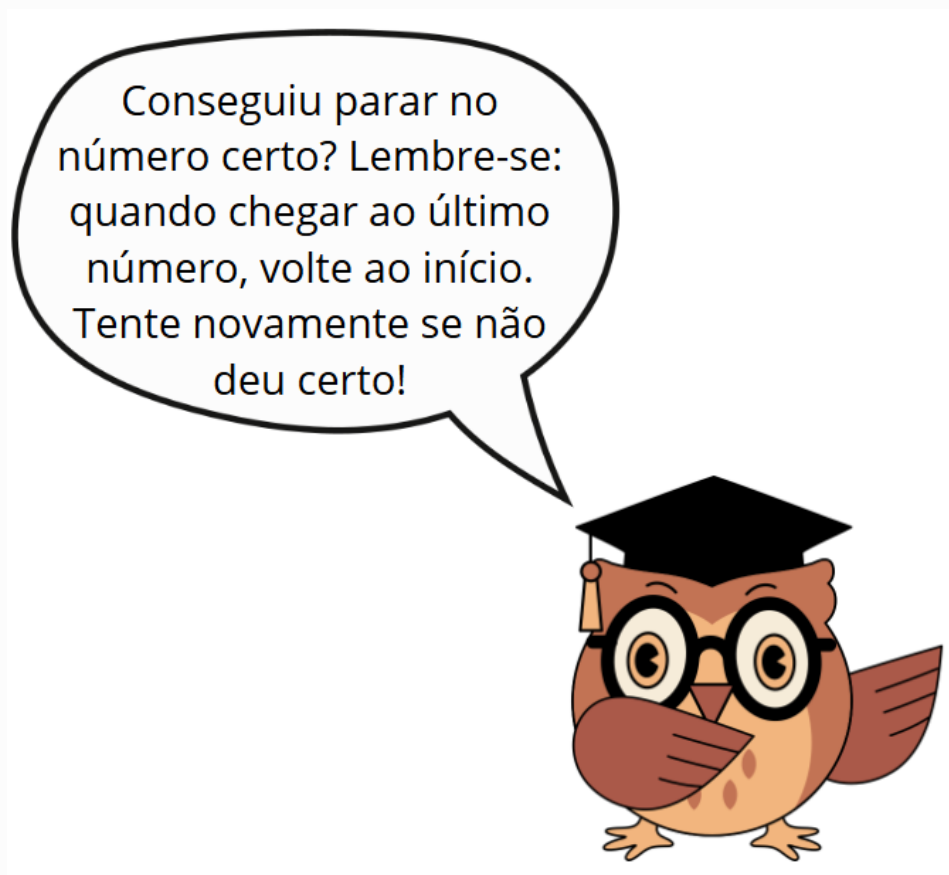
Os números que parecem “dar voltas” e se repetem são a chave para entender muitos segredos matemáticos que vamos descobrir juntos ao longo dessa apostila. No próximo capítulo, vamos conhecer um jogo especial chamado **congruência**, que nos ajuda a descobrir como esses números se relacionam entre si, mesmo quando parecem diferentes.



## 1.4 Exercícios: Explorando Padrões e Ciclos

Agora que você aprendeu sobre os padrões e ciclos dos números, é hora de colocar o que aprendeu em prática! Resolva os exercícios abaixo e descubra como os números podem ser mágicos.

1. **O Relógio das Voltas:** Se agora são 7 horas, que horas marcará o relógio analógico, daqui a 10 horas? Lembre-se de que o relógio volta ao número 1 depois de 12 horas.



### Resolução passo a passo (versão do professor)

Dica para o exercício 1: Use o Lema da divisão de Euclides.

$$7 + 10 = 17 \quad \text{e} \quad 17 = 1 \cdot 12 + 5$$

Como o resto é 5, o relógio marcará 5 horas.

2. **O Ciclo dos Dias:** Hoje é quarta-feira. Que dia da semana será daqui a 15 dias? (Dica: O ciclo dos dias da semana tem 7 dias.)

 **Resolução passo a passo (versão do professor)**

Começamos da quarta-feira e contamos 15 dias para frente.

- ◇ Sabemos que depois de 7 dias estaremos novamente na quarta-feira.
- ◇ Contamos mais 7 dias e chegamos na quarta-feira novamente.
- ◇ Agora faltam 1 dia para completar os 15 dias.

Depois de 15 dias, será quinta-feira.

Note que poderíamos ter usado o Lema da Divisão de Euclides também,

$$15 = 2 \cdot 7 + 1.$$

Assim, chegaríamos na resposta, o dia da semana será quarta-feira + 1, ou seja, quinta-feira.

3. **Dividindo Balas:** Você tem 20 balas e quer dividir igualmente entre 4 amigos. Quantas balas sobram? Em qual número o total de balas termina depois dessa divisão?

 **Resolução passo a passo (versão do professor)**

Se temos 20 balas e queremos dividir igualmente entre 4 amigos:

- ◇ Cada amigo recebe:

$$20 \div 4 = 5 \text{ balas.}$$

- ◇ Não sobram balas, porque 20 é dividido exatamente por 4.

Assim, depois da divisão, não sobra nenhuma bala, o resto da divisão de 20 por 4 é zero.

4. **Passeando no Tabuleiro:** Imagine que você está jogando um jogo de tabuleiro com 8 casas numeradas. Se você começa na casa número 5 e dá 11 passos para frente, em qual casa você vai parar?

 **Resolução passo a passo (versão do professor)**

Começamos na casa 5 e contamos 11 passos para frente. Depois de chegar na última casa (8), voltamos para a primeira casa (1) e continuamos contando.

◇ De 5, contamos: 6, 7, 8 (3 passos).

◇ Voltamos ao início e continuamos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (mais 8 passos). No final, paramos na casa número 8.

Usando o Lema da Divisão de Euclides,

$$11 = 1 \cdot 8 + 3.$$

Como começou na casa 5, teremos  $5+3=8$ . Ou seja, paramos na casa 8.

5. **Contagem Cíclica:** Escreva os números de 1 a 10 em um círculo, como se fosse um relógio. Comece no número 4 e conte até 14. Em qual número você vai parar?

 **Resolução passo a passo (versão do professor)**

◇ Começamos no 4 e contamos 14 números para frente. Quando chegamos no 10, voltamos para o início do círculo (1).

◇ Contamos os passos restantes:

\* De 4: 5, 6, 7, 8, 9, 10 (6 passos).

\* Voltamos ao início: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (8 passos restantes).

No final, paramos no número 8.

Usando o Lema da Divisão de Euclides,

$$14 = 1 \cdot 10 + 4.$$

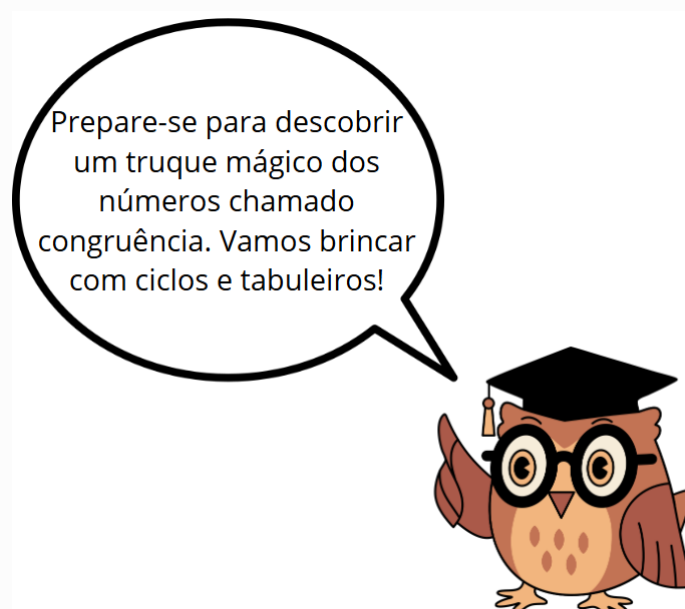
Como começamos no número 4, paramos na asa  $4+4=8$ .

## Aprendemos:

Neste capítulo aprendemos sobre padrões.

- ◇ Padrões são repetições, regularidades.
- ◇ Há diversos padrões no nosso dia-a-dia.
- ◇ Muitos padrões numéricos estão em ciclos de um número natural. Nesse caso, é muito importante sabermos dividir por esse número para encontrar o quociente e o resto.

# Jogos de Congruência



## Pronto para jogar com os números?

Neste capítulo, vamos conhecer um truque mágico dos números: eles podem “dar voltas” e acabar sempre no mesmo lugar! Esse truque tem um nome importante na matemática: **congruência**. Vamos aprender jogando!

## 2.1 O Que é Congruência?

**Congruência** é como um truque de mágica que os números fazem. Na Seção ??, vimos que as horas andam em ciclos de 24h (ou 12 h). Se agora são 10 horas e se passam 15 horas, você não chega às 25h, mas sim à 1h da manhã? É como se o 25 “valesse o mesmo que 1” nesse sistema.



● *As amigas corujas ficam desconfiadas “Essa história de ciclo novamente? O que será que está por vir?”*

Esta ideia já foi trabalhada no Capítulo 1. Esse tipo de padrão, em que voltamos para a mesma posição, é estudado na matemática com uma ideia chamada **congruência**.

$$25 \equiv 1 \pmod{24}$$

Quando escrevemos isso, queremos dizer: **“25 e 1 deixam o mesmo resto quando divididos por 24.”**

Matematicamente lemos: “25 é congruente a 1 módulo 24”. Mas não se preocupe com esse formalismo matemático.



Ah, então  $25 \equiv 1 \pmod{24}$  é um exemplo de congruência. Estou começando a entender!

### Dica de atividade pedagógica (versão do professor)

**Sugestão pedagógica:** Evite começar com a definição formal de congruência. Incentive os alunos a explorarem diferentes ciclos e a registrarem. Depois, promova uma discussão sobre o que se repete e por quê. A formalização virá naturalmente.



**Dica da Coruja Professora:** Use os aniversários dos alunos da turma para explorar a ideia de ciclos! Peça que cada aluno descubra em que dia da semana caiu seu último aniversário e em qual cairá o próximo. Depois, desafie-os a encontrar uma regularidade! Esse tipo de atividade mostra como a matemática aparece nas datas e ajuda a entender o que é congruência de forma natural.”

Dois números são congruentes quando, ao serem divididos por outro número, deixam o mesmo resto.

**Notação usada:**  $a \equiv b \pmod{n}$

Nós lemos:  $a$  é congruente a  $b$  módulo  $n$ .

Isso significa que  $a$  e  $b$  “ocupam o mesmo lugar” em um ciclo de tamanho  $n$ , como se estivessem parando na mesma casa de um tabuleiro circular!



Ah, então  $25 \equiv 1 \pmod{24}$  é um exemplo de congruência. Estou começando a entender!

### 📌 Explicação Teórica (versão do professor)

Dois números são **congruentes** módulo  $n$  se deixam o mesmo resto quando divididos por  $n$ , ou equivalentemente, se  $n$  divide a diferença de  $a$  por  $b$ . Formalmente:

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a - b)$$

Por exemplo: -  $8 \equiv 1 \pmod{7}$  porque:

$$8 - 1 = 7 \quad \text{e } 7 \text{ é divisível por } 7.$$

-  $10 \equiv 3 \pmod{7}$  porque:

$$10 - 3 = 7 \quad \text{e } 7 \text{ é divisível por } 7.$$

Portanto,  $a$  e  $b$  ocupam a mesma posição no tabuleiro circular de 7 casas.

Exemplo com divisão: \_\_\_\_\_

Você já viu que nem sempre conseguimos dividir um número “certinho” por outro. Às vezes, ao dividir dois números, a conta não dá “redondinha”. Mas tudo bem! Com o que aprendemos, sempre dá para saber:

- ◇ Quantas vezes um número cabe no outro (isso é o **quociente**),
- ◇ E o que sobra (isso é o **resto**).

Vamos dividir 10 e 18 por 4, e encontrar o quociente e o resto.

- ◇  $10 \div 4 = 2$  e resta 2, ou seja,  $10 = 2 \cdot 4 + 2$ .
- ◇  $18 \div 4 = 4$  e resta 2, ou seja,  $18 = 4 \cdot 4 + 2$ .

Então podemos escrever:

$$10 \equiv 18 \pmod{4}$$

Porque os dois deixam resto 2 ao serem divididos por 4!

*Antes de começarmos os jogos... que tal uma ideia da coruja professora?*

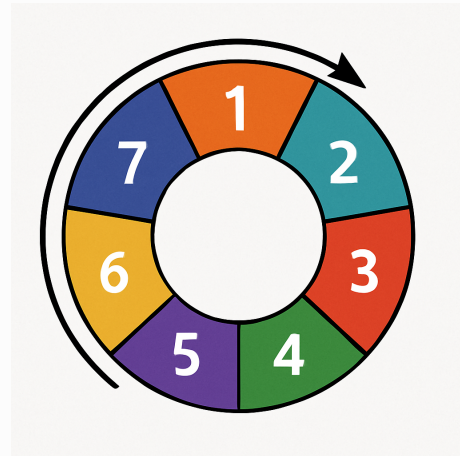


**Dica da Coruja Professora:** Leve para a sala de aula tampinhas de garrafa ou botões coloridos! Peça que os alunos organizem 12 tampinhas em círculo, como se fosse um relógio, e simulem pulos com uma tampinha diferente para investigar em quais casas ela cai.

Depois, desafie-os a descobrir um padrão para prever onde cairão após 3, 5 ou 7 pulos. Essa prática ajuda os alunos a visualizarem a congruência na prática e torna o conteúdo mais tangível e divertido!

## 2.2 Jogando com Tabuleiros Circulares

Imagine um tabuleiro circular com 7 casas, numeradas de 1 a 7. Você começa no número 1 e caminha para a próxima casa. Ao chegar à casa 7, em vez de continuar, você retorna para a casa 1 e continua a contar (veja a figura ao lado). Isso faz com que alguns passos parem em casas de números iguais, mesmo que a quantidade de passos seja diferente.



Por exemplo, se você começar na casa 1 e der 8 passos, vai parar onde?

Fazendo as continhas, temos:

$$1 + 8 = 9 \Rightarrow 9 \div 7 = 1 \text{ e sobra } 2$$

$\Rightarrow$  Você para na casa 2!

Podemos escrever:  $9 \equiv 2 \pmod{7}$

Outro exemplo:

- ◇ Se você der 7 passos, vai parar na casa 1 ( $1+7=8$ ).
- ◇ Se der 10 passos, vai parar na casa 4 ( $1+10=11$ ).

Dizemos que, no jogo com 7 casas, o número 8 é **congruente** ao número 1, e o número 11 é **congruente** ao número 4.

### Resolução passo a passo (versão do professor)

Para verificar se  $a \equiv b \pmod{n}$ , basta calcular o resto da divisão de  $a$  por  $n$  e de  $b$  por  $n$ . Se os restos forem iguais, a congruência é verdadeira.

No texto acima, temos  $9 \equiv 2 \pmod{7}$ , para verificar tal fato, basta efetuarmos as divisões:

- ◇  $9 = 1 \cdot 7 + 2$ , resto de 9 na divisão por 7 é 2.
- ◇  $2 = 0 \cdot 7 + 2$ , resto de 2 na divisão por 7 é 2.

Como 9 e 2 possuem o mesmo resto na divisão por 7, são congruentes módulo 7.

Uma outra maneira de verificar a congruência  $9 \equiv 2 \pmod{7}$  é analisando se 7 divide a diferença,  $9 - 2$ . Como esta diferença é 7 e 7 divide 7, temos a congruência confirmada.



#### Observação da Coruja:

As amigas corujas ficaram animadas: “**É a mesma ideia do Capítulo 1!**” Este jogo também esconde um padrão que volta ao início, como aquele relógio misterioso...

## Como Escrevemos Isso? \_\_\_\_\_

Como vimos acima, usamos uma notação especial:

$$8 \equiv 1 \pmod{7} \quad (8 \text{ é congruente a } 1 \text{ módulo } 7)$$

Isso quer dizer que, no jogo com 7 casas, 8 e 1 terminam no mesmo lugar. O número 7 é o nosso **módulo**, que nos diz quantas casas existem no tabuleiro.

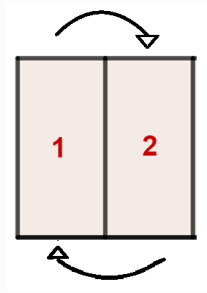
## 2.2.1 Para que serve isso?

A congruência é muito usada quando temos ciclos: dias da semana, horários, padrões numéricos. Ela ajuda a “voltar para o começo” e entender posições que se repetem. Com esse pensamento, podemos trabalhar com tabuleiros de quantas casas quisermos, desde que a quantidade seja um número inteiro maior que 1.



### Agora é com você

Imagine um tabuleiro com apenas duas casas: 1 e 2. Você está trabalhando com qual **módulo**? Agora, caminhe 5 passos. Em qual casa você pára?  
Dica: escreva  $5 = 2 \cdot q + r$  e descubra o valor do resto!



**Figura 2.1:** Exemplo de congruência módulo 2. *Fonte: Próprio autor.*

### Resolução passo a passo (versão do professor)

Se o tabuleiro tem duas casas, estaremos trabalhando com módulo 2. Ao andar 5 casas, pararemos na casa de número 1. Observe que:

- ◇ Andamos uma vez: Casa 1
- ◇ Andamos duas vezes: Casa 2
- ◇ Andamos 3 vezes: voltamos para Casa 1
- ◇ Andamos 4 vezes: Casa 2
- ◇ Andamos 5 vezes: voltamos para Casa 1

Matematicamente efetuamos a divisão de 5 por 2, e olhamos o seu resto.

$$5 = 2 \cdot 2 + 1.$$


Escrevemos,  $5 \equiv 1 \pmod{2}$  (5 é congruente a 1 módulo 2). O que nos fornece que, a casa após 5 andadas, é a de número 1.

## 2.3 Vamos Brincar com a Congruência!

---

Agora que você já entendeu a ideia, vamos jogar um pouco!



 *As amigas corujas estão felizes, adoram jogar e aprender ao mesmo tempo!*

### 2.3.1 Jogo do Tabuleiro Circular

---

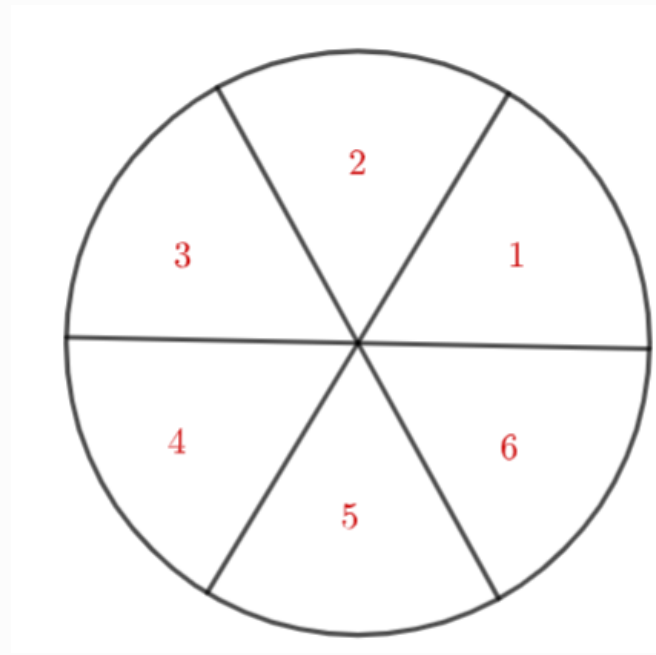
Imagine um tabuleiro circular com 6 casas numeradas (veja Figura 2.2). Comece na casa 1 e siga as instruções abaixo:



#### **Observação da Coruja:**

Lembra da missão com o relógio no **Capítulo 1**? Aquela roda de números que recomeçava sem parar? Este tabuleiro aqui tem o mesmo comportamento circular... mas com casas de jogo! Será que você descobre o que acontece ao dar voltas por ele?

1. Dê 9 passos. Em qual casa você vai parar?
2. Agora, dê 13 passos, a partir da casa que parou no item anterior. Onde você parou?



**Figura 2.2:** Círculo com casas numeradas de 1 à 6.

*Fonte: Próprio autor*

● *As amigas corujas desafiam: “Você consegue descobrir em qual casa vai parar sem contar uma por uma? Existe um segredo por trás disso...”*

Você deve ter percebido que, mesmo dando passos diferentes, às vezes você acaba parando no mesmo lugar! Isso acontece por causa do ciclo que os números formam no tabuleiro. Esse é o truque da congruência!

### Resolução passo a passo (versão do professor)

O tabuleiro tem 6 casas. Então estamos num ciclo de 6.

Podemos resolver de duas maneiras:

**Primeira:** Pelo Lema da Dvisão de Euclides

1. Dê 9 passos:  $9 = 1 \cdot 6 + 3$ . Como o resto foi **3**, e começou na casa **1**, temos que você vai parar na casa  $1+3=4$ .
2. Dê 13 passos:  $13 = 2 \cdot 6 + 1$ . Como o resto foi **1**, e você está na casa na casa **4**, temos que você vai parar na casa  $4+1=5$ .

**Segunda:** Usando congruência

1. Dê 9 passos. Temos que  $9 \equiv 3 \pmod{6}$ . Começamos na casa 1. Como  $1 + 3 \equiv 4 \pmod{6}$ , parou na casa 4.
2. Dê 13 passos. Temos que  $13 \equiv 1 \pmod{6}$ . Começamos na casa 4. Como  $4 + 1 \equiv 5 \pmod{6}$ , parou na casa 5.

 **Dica de atividade pedagógica (versão do professor)**

**Sugestão didática:** Professor, peça a seus alunos que criem seus próprios desafios de pulos.


**Pergunta para reflexão:** “O que altera se mudarmos o número de casas? Há alguma casa que sempre aparece?” Incentive a discussão antes de formalizar a ideia de congruência.

## 2.4 Explorando Mais

---

Agora que você dominou os truques da congruência, que tal aplicá-los ao mundo real?

Vamos retomar o assunto que iniciamos no Capítulo 1, sobre o dias da semana.

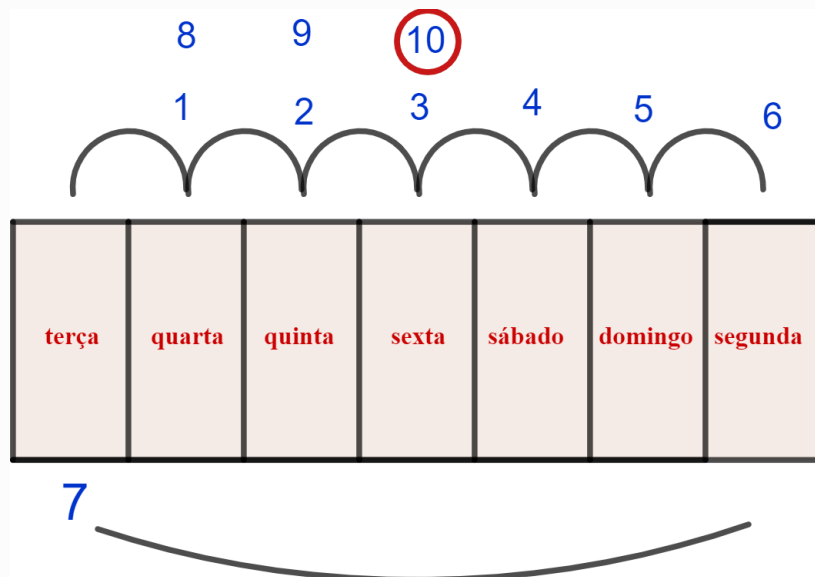
 *As amigas corujas cochicham: “Será que conseguimos adivinhar que dia da semana será daqui a muuuuuitos dias? Vamos testar nossos poderes matemáticos!”*

A congruência está em todo lugar, mesmo que a gente não perceba. Por exemplo, ela nos ajuda a saber que dia da semana será daqui a vários dias. Vamos testar?

- ◇ Se hoje é terça-feira, que dia da semana será daqui a 10 dias? E daqui a 20 dias?

De imediato, pode parecer difícil pensar nisso. Mas, se sabemos que a semana tem 7 dias, e que hoje é terça-feira, então daqui a 7 dias também será terça-feira — e isso vale para 14, 21, 28 dias... Cada múltiplo de 7 nos leva de volta ao mesmo dia da semana! Veja como isso funciona na Imagem (2.3), que mostra o ciclo dos dias da semana: ele “gira” como um tabuleiro circular com 7 casas.

Note que, daqui a 10 dias é  $10 = 7 + 3$  dias, portanto será três dias depois de terça-feira, o que resulta em sexta-feira.



**Figura 2.3:** Dias da semana: congruência módulo 7. Fonte: Próprio autor.



### Agora é com você

Se hoje é terça-feira, que dia da semana será:

- ◇ Daqui a 20 dias?
- ◇ Daqui a 100 dias?
- ◇ Daqui a 365 dias?

Use o que você aprendeu sobre congruência para resolver!

### Resolução passo a passo (versão do professor)

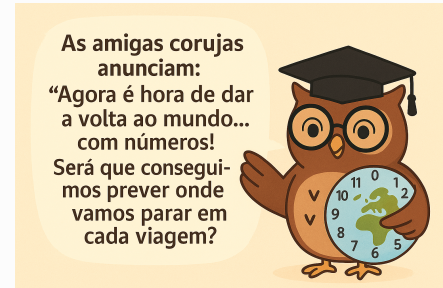
Para sabermos qual o dia da semana será daqui a 20 dias, precisamos do resto da divisão de 20 por 7. Fazemos  $20 = 2 \cdot 7 + 6$ .

Como  $20 \equiv 6 \pmod{7}$ , se hoje é terça-feira, daqui a 20 dias será terça-feira mais 6, o que resulta em segunda-feira.

## 2.5 Atividade Prática: A Volta ao Mundo dos Números

Agora é hora de praticar!

🗨️ *Elas propõem alguns desafios:*



### 🌐 A Volta ao Mundo com Números

Imagine que você está em um mapa circular com 12 pontos numerados (como as horas de um relógio). Você começa no ponto 9.

Se der uma volta completa (12 passos), voltará ao mesmo lugar. Mas... e se der 15 passos? Em qual ponto vai parar?

Use o que aprendeu sobre congruência para descobrir!

🕒 Imagine um relógio que marca de 12 em 12 horas. Se agora são 9 horas, que horas serão daqui a 15 horas?

#### 📎 Resolução passo a passo (versão do professor)

Chamaremos de

- ◇  $t_{\text{final}}$  o horário final, e
- ◇  $t_{\text{inicial}}$ , o horário inicial.

Assim,  $t_{\text{inicial}} = 9$  e:  $t_{\text{final}} = 9 + 15 = 24$ . Como não há a marcação de 24 horas no relógio, devemos verificar módulo 12.

$$t_{\text{final}} \equiv 9 + 15 \pmod{12} \equiv 24 \pmod{12}.$$


Dividindo 24 por 12, o resto é 0. Portanto, serão exatamente 12 horas (ou meia-noite).

 **Continuação**
**Outra maneira de pensar:**

- ◇ Começamos no número 9 e contamos 15 horas para frente.
- ◇ Primeiro, contamos até 12: 10, 11, 12 (3 horas).
- ◇ Depois de chegar ao 12, o relógio volta para 1. Continuamos a contagem: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (12 horas restantes).

Somando as horas:  $9 + 15$  horas "dão a volta" no relógio, e o resultado final é 12 horas.


Portanto, serão exatamente 12 horas ou meia-noite.

-  Se hoje é quinta-feira e faltam 22 dias para as férias, que dia da semana as férias começam?

 **Resolução passo a passo (versão do professor)**

- ◇ Começamos na quinta-feira e contamos 22 dias para frente.
- ◇ Sabemos que a semana tem 7 dias, então a cada 7 dias voltamos ao mesmo dia da semana.
- ◇ Dividimos 22 por 7 para ver quantas semanas completas temos:  $22 \div 7 = 3$  semanas completas, com 1 dia sobrando.
- ◇ Depois de 21 dias (3 semanas), será novamente quinta-feira.
- ◇ Contamos mais 1 dia: sexta-feira.

Portanto, as férias começarão em uma sexta-feira.

-  Em um jogo com 8 casas, se você der 14 passos a partir da casa 5, onde vai parar?


 Resolução passo a passo (versão do professor)

- ◇ Começamos na casa 5 e contamos 14 passos para frente.
- ◇ Quando chegamos na casa 8, voltamos para a casa 1 e continuamos a contagem.
- ◇ Contamos os passos:
  - \* De 5: 6, 7, 8 (14 passos).
  - \* Voltamos ao início e contamos os passos restantes:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3

(11 passos restantes).

No final, paramos na casa 3.

-  Descubra 3 números que deixam o mesmo resto que 7 na divisão por 10.

 Resolução passo a passo (versão do professor)

Queremos encontrar números que, ao serem divididos por 10, deixem o mesmo resto que 7. Ou seja, que sejam congruentes a 7 módulo 10:

$$x \equiv 7 \pmod{10}$$

A forma geral dessa congruência é:

$$x = 10k + 7$$

Para encontrar três exemplos, basta substituir  $k$  por alguns valores inteiros positivos:

- ◇ Para  $k = 0$ :  $x = 10 \cdot 0 + 7 = 7$
- ◇ Para  $k = 1$ :  $x = 10 \cdot 1 + 7 = 17$
- ◇ Para  $k = 2$ :  $x = 10 \cdot 2 + 7 = 27$

Portanto, três números congruentes a 7 módulo 10 são: 7, 17, 27.

-  Preencha com o número que falta para tornar a frase verdadeira:

$$19 \equiv \_ \pmod{8}$$

 Resolução passo a passo (versão do professor)

$$19 \equiv \_ \pmod{8}$$

A congruência está indicando que queremos o número que sobra (resto) ao dividir 19 por 8:

$$19 \div 8 = 2 \text{ (quociente) com resto } 3$$


Isso porque:

$$8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow 19 - 16 = 3$$

Logo:

$$19 \equiv 3 \pmod{8}$$

Portanto, a resposta correta é: 3.

 Verdadeiro ou falso? Justifique:

$$22 \equiv 3 \pmod{7}$$

 Resolução passo a passo (versão do professor)

Vamos verificar se 22 e 3 deixam o mesmo resto quando divididos por 7.

◇  $22 \div 7 = 3$  com **resto 1**, pois  $7 \cdot 3 = 21$  e  $22 - 21 = 1$

◇  $3 \div 7 = 0$  com **resto 3**, pois  $7 \cdot 0 = 0$  e  $3 - 0 = 3$

Os restos são diferentes (1 e 3), então a congruência não é verdadeira:  $22 \not\equiv 3 \pmod{7}$

**Resposta: Falso.**

 **Dica de atividade pedagógica (versão do professor)****Sugestão de atividade didática: O Jogo “Corrida das Casas”**

Para reforçar a ideia de congruência e padrões em ciclos, proponha aos alunos o seguinte jogo:

- ◇ Construa (ou projete) um tabuleiro circular com 9 casas, numeradas de 1 a 9.
- ◇ A casa-alvo será a casa número 5.
- ◇ O objetivo do jogo é descobrir todos os números de passos que, começando na casa 1, levam até a casa 5.
- ◇ Os alunos devem testar diferentes quantidades de passos e anotar os resultados.

**Dica matemática:** Use a congruência para expressar a ideia central:

$$x \equiv 4 \pmod{9}$$

Pois, partindo da casa 1, cair na casa 5 significa dar 4 passos a mais, considerando o ciclo de 9 casas.

**Exemplos:**

- ◇ 4 passos:  $1 + 4 = 5$
- ◇ 13 passos:  $1 + 13 = 14 \Rightarrow 14 \div 9 = 1$  e sobra 5
- ◇ 22 passos:  $1 + 22 = 23 \Rightarrow 23 \div 9 = 2$  e sobra 5

A atividade pode ser feita em grupos, e os alunos podem criar seus próprios desafios escolhendo diferentes casas-alvo e quantidades de casas no tabuleiro.

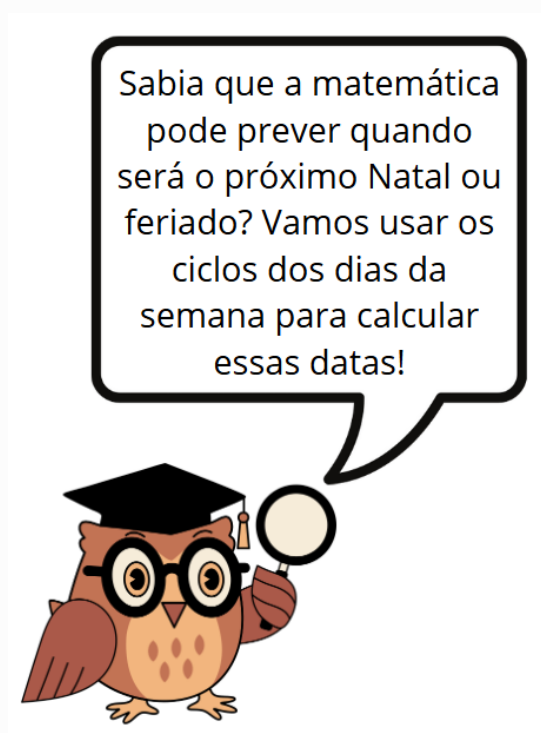


● *As amigas corujas dizem: “Você foi longe nessa viagem pelos ciclos e congruências! Está pronto para os próximos desafios?”*

### 🔍 Aprendemos:

- ◇ Que a matemática pode ser divertida quando usamos jogos e tabuleiros.
- ◇ Que **congruência** é quando dois números deixam o mesmo resto ao serem divididos.
- ◇ Que dá pra prever padrões em ciclos, como nos relógios e nos dias da semana.
- ◇ Que pular de 3 em 3 ou de 5 em 5 em um tabuleiro pode formar sequências diferentes.
- ◇ Que observar o que se repete é uma ótima pista para entender a lógica dos números.

## Congruência ao Nosso Redor



**Objetivo:** Mostrar como a congruência aparece em situações cotidianas e celebrações.

## 3.1 Introdução

---

Prepare-se para mais uma missão: agora vamos descobrir como os números ajudam a prever datas especiais!! Já parou para pensar como algumas coisas no nosso dia a dia seguem um padrão repetitivo? Aniversários, feriados e até eventos esportivos como a Copa do Mundo seguem um ciclo que parece se repetir. Esses padrões não são apenas coincidência — eles estão ligados à matemática. Lembra quando dissemos que certos números param na mesma casa, mesmo que pareçam diferentes? Isso é a congruência! Vamos explorar juntos, com a ajuda das nossas amigas corujas, como isso funciona!

## 3.2 Datas Especiais e Repetições

---

Você já reparou que, às vezes, seu aniversário cai em dias diferentes da semana a cada ano? Em um ano, ele pode ser numa quarta-feira, no outro numa quinta, e assim por diante. Esse padrão curioso não é por acaso: a matemática explica!



### Observação da Coruja:

As corujas ficaram pensativas: “Será que aniversários e festas importantes também seguem padrões de repetição, como vimos nos ciclos do relógio e dos tabuleiros? Será que dá para prever que dia da semana nosso aniversário cairá no ano que vem?” Vamos descobrir!

Na Seção 1.1.2, as corujas encontraram a Máquina do Tempo, que nos ajuda a perceber que estamos lidando com um **ciclo de 7 dias** que se repete sem parar: segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado e domingo.

Imagine que hoje é segunda-feira e é seu aniversário. Como saberemos em que dia ele cairá no próximo ano?

### Atalho para Lembrar

Quando somamos dias a uma data, fazemos uma conta parecida com a do relógio: usamos o **resto da divisão por 7**. Esse resto nos diz *quantos dias avançamos na semana!*

- ◇ 365 dias  $\div 7 = 52$  semanas completas e sobra 1.
- ◇ Isso quer dizer que, **daqui a 365 dias, o dia da semana avança 1 posição.**

Lembra da pergunta feita lá no começo? Agora temos as ferramentas certas para respondê-la com matemática! Veja só:

Vamos responder o questionamento do início de nossa conversa. Se seu aniversário é hoje, numa segunda-feira, e se passarem 365 dias (um ano comum), o próximo cairá numa terça-feira! Porque:

$$365 \equiv 1 \pmod{7}$$

Isso quer dizer que avançamos uma casa no “Relógio dos Dias”.

E se estivermos em um **ano bissexto**, com 366 dias? Aí o resto da divisão por 7 será 2:

$$366 \equiv 2 \pmod{7}$$

Então, seu aniversário avançaria duas casas — de segunda para quarta-feira.



#### Dica da Coruja:

Viu só como a matemática consegue prever essas mudanças? Os ciclos dos dias da semana seguem um padrão exato, e a congruência nos ajuda a entendê-lo!

### Dica de atividade pedagógica (versão do professor)

**Sugestão de mediação:** Professor (a), essa atividade permite explorar conceitos como divisão com resto, mod 7, e o padrão dos dias da semana.

- ◇ Traga o calendário físico ou digital para a sala e peça que os alunos marquem seus aniversários e observem os dias da semana em anos consecutivos.
- ◇ Mostre que, em anos normais, o dia da semana avança 1 e, em anos bissextos, avança 2 casas.
- ◇ Apresente os cálculos modulares:

Ano comum:  $365 \div 7 = 52 \text{ semanas} + 1 \text{ dia} \Rightarrow$  avança 1 dia na semana

Ano bissexto:  $366 \div 7 = 52 \text{ semanas} + 2 \text{ dias} \Rightarrow$  avança 2 dias na semana

- ◇ Discuta com os alunos a ideia de que mesmo grandes números podem ser entendidos por meio de ciclos simples — este é o poder da congruência!
- ◇ Dica extra: Utilize a música dos dias da semana ou a roda dos dias para turmas iniciais.

**Extensão interdisciplinar:** A temática pode ser conectada com geografia (calendários, estações) e história (anos bissextos, calendários gregoriano e juliano).

## 3.3 Eventos Esportivos

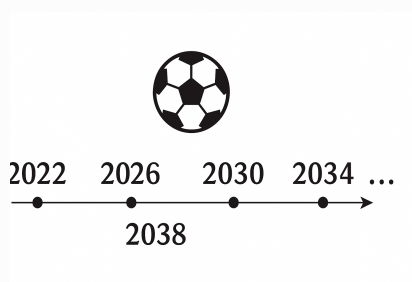
### Esporte e Matemática? Sim!

#### Observação da Coruja:

“Já vimos que datas especiais se repetem... E os **eventos esportivos**, será que também seguem ciclos?” perguntaram as corujas, curiosas. Prepare-se para investigar!



Você já reparou que grandes eventos como a Copa do Mundo ou os Jogos Olímpicos seguem um ritmo bem certinho? Os Jogos Olímpicos e a Copa do Mundo acontecem a cada 4 anos. Se a última Copa do Mundo foi em 2022, a próxima será em 2026.



**Figura 3.1:** Representação gráfica dos anos em de ocorrência da Copa do mundo. *Fonte: Imagem do próprio autor*

Depois em 2030. E assim por diante!

Veja a sequência de anos das Copas, na Figura (3.1)

Esses anos seguem um padrão: sempre somamos 4! É como se os anos “dessem um salto” a cada vez.

#### Atalho para Lembrar

Quando algo se repete de tempos em tempos, podemos dizer que está em um **ciclo**. A matemática ajuda a prever esses ciclos!

Olha a congruência aí de novo!! ★

#### Desafio

Imagine que o ano atual é 2040. Em que ano será a próxima Copa do Mundo?

- ◇ Dica: veja quantos anos se passaram desde 2022!
- ◇ Tente descobrir: o número  $x$  de anos após 2022 deve ser múltiplo de 4!

#### Curiosidade!

Esse padrão também aparece em outros eventos:

- ◇ Olimpíadas — a cada 4 anos.
- ◇ Eleições no Brasil — a cada 4 anos.
- ◇ Feriados móveis — com ciclos diferentes!



#### Agora é com você

Você consegue pensar em outro evento que acontece com uma certa frequência? Ele segue um padrão numérico?

### Resolução passo a passo (versão do professor)

Aqui, os alunos podem apresentar respostas diversas. Abaixo algumas sugestões:

- ◇ Ano Bissexto
- ◇ Aniversários
- ◇ Dias da Semana
- ◇ Meses do ano

### Dica de atividade pedagógica (versão do professor)

**Sugestão de mediação:** A ideia dos ciclos numéricos também pode ser explorada em calendários de eventos importantes, como a Copa do Mundo ou os Jogos Olímpicos.

- ◇ Faça uma linha do tempo na lousa ou em papel kraft com os anos das Copas do Mundo (ex: 2002, 2006, 2010, 2014, 2018, 2022, 2026...).
- ◇ Mostre aos alunos que cada novo ano de Copa avança 4 anos. Eles podem calcular:

$$x \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow \text{Ano de Copa}$$

- ◇ Lance um desafio: “Em que ano será a próxima Copa se a última foi em 2022?”
- ◇ Incentive os alunos a investigarem outros eventos cíclicos: eleições, olimpíadas, feriados móveis.
- ◇ Para alunos mais avançados, proponha uma tabela com o ano inicial e um valor  $n$ , e peça que eles descubram se é ou não um ano de Copa:

$$\text{Se } (n - 2022) \equiv 0 \pmod{4}, \text{ então é um ano de Copa.}$$


- ◇ Mostre como a congruência ajuda a reconhecer padrões que se repetem, economizando tempo e esforço computacional.

**Conexão interdisciplinar:** Aproveite a motivação dos alunos por esportes para criar pontes com geografia (países-sede), história (eventos marcantes) e até educação física (jogos em grupo baseados em ciclos numéricos).

**Dica lúdica:** Peça que os alunos inventem seu próprio “evento cíclico” com regras de repetição, e tentem prever as datas futuras usando congruência.

## 3.4 Atividade Prática: Explorando Datas Famosas

Agora é a sua vez de brincar com a matemática e descobrir padrões em eventos famosos!

 *As amigas corujas desafiam você a aplicar seus conhecimentos em situações do dia a dia. Vamos ver se você consegue prever datas famosas com a ajuda da matemática?*



**Agora é com você**

Não se esqueça que **1 semana = 7 dias**.

### 1. O Natal e os dias da semana

Se hoje é segunda-feira e o Natal é daqui a 100 dias, que dia da semana será o Natal?

#### Resolução passo a passo (versão do professor)

**Passo 1:** O ciclo dos dias da semana é de 7 dias.

**Passo 2:** Dividimos 100 por 7:

$$100 \div 7 = 14 \text{ semanas completas, com resto } 2.$$

**Passo 3:** Como o resto é 2, contamos dois dias a partir de segunda-feira:

Segunda → Terça → **Quarta-feira**.

**Resposta:** O Natal cairá em uma **quarta-feira**.

### 2. Copa do Mundo

Sabendo que a Copa do Mundo acontece a cada 4 anos, em que ano será a próxima Copa, se este ano é 2024?

 **Resolução passo a passo (versão do professor)**

◇ A última Copa foi em 2022, e sabemos que a próxima será daqui a 4 anos.


◇ Somamos 4 ao ano:

$$* 2022 + 4 = 2026.$$

Portanto, a próxima Copa do Mundo será no ano de 2026.

### 3. O Carnaval e a Páscoa

O carnaval é sempre 40 dias antes da Páscoa. Se a Páscoa este ano será no domingo, que dia da semana será o carnaval?

 **Dica:** Volte 40 dias no calendário. Use a divisão por 7 para descobrir quantos dias antes do domingo será o carnaval. Que dia da semana será?

 **Resolução passo a passo (versão do professor)**

Sabemos que o Carnaval ocorre 40 dias antes da Páscoa. Este ano, a Páscoa será em um domingo.

**Passo 1:** Queremos saber que dia será **40 dias antes** do domingo.

**Passo 2:** Dividimos 40 por 7:

$$40 \div 7 = 5 \text{ semanas completas, com resto } 5.$$

**Passo 3:** Contamos 5 dias **antes** de domingo:

Domingo ← Sábado ← Sexta ← Quinta ← Quarta ← **Terça-feira.**

**Resposta:** O Carnaval será em uma **terça-feira.**

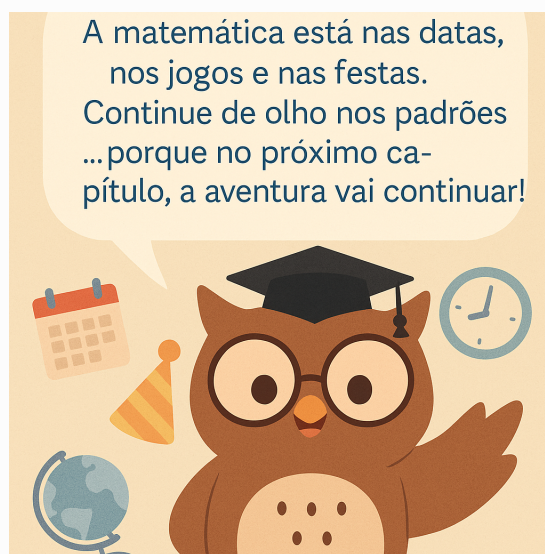
## 3.5 Fechando a Missão 3!

Nesta missão, vimos que os números também participam de eventos importantes — como Natal, Copa do Mundo e Carnaval!

Aprendemos que:

- ◇ A congruência ajuda a entender como os números se comportam em ciclos.
- ◇ Que a matemática está presente em datas especiais, aniversários e eventos que se repetem.
- ◇ Que os dias da semana formam um **ciclo de 7 dias** — como um tabuleiro circular!
- ◇ Que a **congruência** ajuda a prever em que dia da semana um evento vai acontecer.
- ◇ Que grandes eventos, como a Copa do Mundo ou as Olimpíadas, seguem padrões numéricos.
- ◇ Que observar o que se repete é uma forma de entender o mundo com olhos matemáticos!

🗨️ *As amigas corujas concluem: “Missão cumprida! A matemática dos ciclos agora é sua aliada!”*



**Figura 3.2:** Observação sobre Padrões

Agora que você dominou esse superpoder matemático, prepare-se para o próximo capítulo — tem mistério novo vindo por aí!

Nos vemos na próxima missão!

# Mistérios dos Números



**Objetivo:** Resolver enigmas numéricos e reconhecer padrões por meio da congruência, desenvolvendo o raciocínio lógico e a percepção de regularidades.

As amigas corujas observam: “Shhh... ouvi dizer que números andam desaparecendo misteriosamente! Será que você consegue seguir as pistas e resolver esse caso?”

## 4.1 Introdução

---

Bem-vindo ao mundo dos mistérios numéricos! Neste capítulo, você será um verdadeiro detetive matemático, desvendando segredos escondidos nos números.



### Detetive dos Números em Ação!

No Capítulo 2, você descobriu que os números podem “dar voltas” e ainda assim chegar ao mesmo lugar — é a mágica da congruência! Agora, chegou a hora de usar esse conhecimento para resolver enigmas, decifrar códigos e encontrar padrões secretos. Prepare sua lupa, sua lógica... e vamos investigar!

Imagine que você é um detetive em uma cidade cheia de mistérios, e cada pista envolve um número. Sua missão é encontrar os números corretos para resolver os enigmas e desbloquear segredos incríveis!

Pronto para começar a investigação? Então pegue papel, lápis... e sua lupa matemática!

## 4.2 Missões

---

### Missão 1 – O Enigma do Cofre Secreto

---



#### Você é o Detetive dos Números!

*Sua missão é descobrir a combinação de um cofre guardado a sete chaves. Use sua lógica e intuição para resolver o enigma!*



#### Missão

Em uma cidade misteriosa, existe um cofre que só pode ser aberto com o número correto. Esse número, quando dividido por 5, deixa o resto 2. Parece difícil? Calma, a gente resolve com lógica e um pouco de observação!



#### Dica rápida

Para encontrar esse número, pense em uma expressão matemática que represente o padrão. Você pode experimentar diferentes valores:

- ◇ Tente dividir o número 7 por 5. Qual o resto?
- ◇ E o número 12? E o 17?

Será que há um padrão? Anote sua descoberta!



**Descoberta da Coruja** *Ah, já sei! Então basta encontrar os números que são congruentes a 2 módulo 5!*

### Atalho para Lembrar

Quando um número deixa resto 2 ao ser dividido por 5, isso significa que ele pertence a um padrão numérico especial. Tente escrever uma regra que sirva para todos os números que atendem à condição do desafio.



### Agora é com você

**Desafio extra:** Será que você consegue criar um novo enigma com outro número e outro divisor? Por exemplo: “Um número que deixa resto 4 ao ser dividido por 6.” Qual seria a regra nesse caso?

### Dica de atividade pedagógica (versão do professor)

Aqui você pode explorar com os alunos:

- ◇ A ideia de padrões na aritmética modular;
- ◇ A escrita geral de uma congruência como  $x = 5k + 2$ ;
- ◇ A associação com o “tabuleiro circular” de 5 casas — use um círculo para ilustrar!;
- ◇ Estimule que os alunos testem outros valores e formulem sua própria regra!

## Missão 2 - Mistérios com Fechaduras e Códigos

### **Atenção, Detetive!**

*Dessa vez, o enigma envolve uma fechadura mágica... Você consegue descobrir a senha?*

### **Missão**


Você está diante de uma fechadura digital muito especial. Ela só se abre com certos números... e rejeita todos os outros! Sua missão é descobrir o padrão secreto dos códigos corretos.

### **Situação-problema:**

Você precisa descobrir a combinação de uma fechadura misteriosa. Ela segue um padrão cíclico, como o dos dias da semana ou das horas no relógio. Para abri-la, o número que você escolher, ao ser dividido por 7, deve deixar o resto 3.



### **Agora é com você**

 **Dica da coruja:** Pense em um tabuleiro com 7 casas. Os números que “param” na mesma casa que o número 3 são as combinações corretas!

### **Dica rápida**

Tente descobrir números que deixam resto 3 quando divididos por 7. Vamos construir os possíveis valores?

- ◇  $3 \div 7$  sobra 3 → Serve!
- ◇  $10 \div 7 = 1$  e sobra 3 → Serve!
- ◇  $17 \div 7 = 2$  e sobra 3 → Serve!
- ◇  $24 \div 7 = 3$  e sobra 3 → Serve!

Esses números estão em uma mesma sequência:

$$x = 7k + 3 \quad (\text{com } k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Qual é o padrão? Que outros números poderiam funcionar?

 **Atalho para Lembrar**

Se um número deixa resto 3 quando dividido por 7, podemos escrever isso assim:

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

**Agora é com você**

**Desafio extra:** Crie sua própria fechadura mágica! Escolha um módulo (quantas casas o ciclo tem) e um número que será a “casa secreta”. Escreva a congruência da sua fechadura e desafie um colega!

**Desafio da Coruja Detetive:**

Diante da turma, a coruja detetive revelou um cadeado misterioso com a combinação **6031**.

— “Só quem entende o segredo da *congruência* será capaz de abrir essa fechadura mágica!”, disse ela.



Será que esse número esconde alguma pista?

Descubra quais outros números deixam o mesmo resto ao serem divididos... e desvende o código!

 **Resolução passo a passo (versão do professor)**

Este é um desafio mais complexo, ideal para turmas mais avançadas, como aquelas do Ensino Médio que, mesmo não tendo tido contato com noções de congruência, já trabalharam com restos da divisão Euclidiana, deixando o conceito mais fácil. Ele pode ser usado para aprofundar a investigação matemática, estimular a busca por padrões e desenvolver o pensamento algébrico.

O enunciado propõe que os alunos descubram “quais outros números deixam o mesmo resto ao serem divididos” que o número 6031. Isso convida a pensar em *congruência*, embora o módulo não esteja explicitamente indicado.

 **Continuação**

Uma boa estratégia é analisar os restos da divisão de 6031 por diferentes números. A congruência mais comum em enigmas desse tipo é a módulo 9, que se conecta com a soma dos algarismos do número. Vamos investigar:

$$\begin{aligned} \text{soma dos algarismos de } 6031 &= 6 + 0 + 3 + 1 = 10 \\ &\Rightarrow 6031 \equiv 1 \pmod{9} \end{aligned}$$

Ou seja, 6031 deixa resto 1 quando dividido por 9. Todos os números que deixam o mesmo resto 1 na divisão por 9 são considerados **congruentes a 6031 módulo 9**.

**Exemplos de números congruentes a 6031 módulo 9:**

$$1, 10, 19, 28, 37, \dots, 6031, 6040, 6049, \dots$$

Todos esses números satisfazem:

$$x \equiv 1 \pmod{9} \quad \text{ou} \quad x = 9k + 1, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

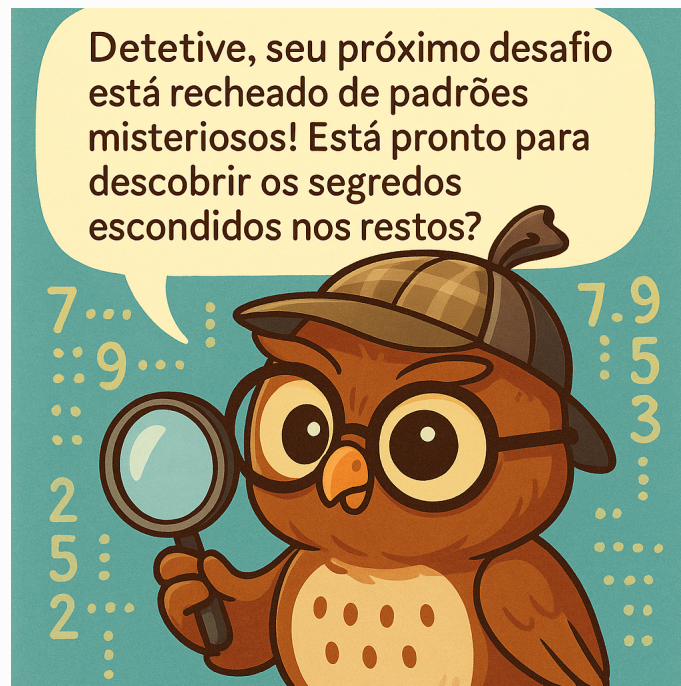
**Sugestão de condução:** O professor pode incentivar os alunos a explorarem diferentes divisores, observando os restos e identificando padrões. Se a turma já estudou congruência usando modelos visuais (como relógios ou tabuleiros circulares), é possível propor que pensem no “tabuleiro do 9” e em quais casas certos números caem.

Esse tipo de atividade promove investigação, diálogo matemático e compreensão mais profunda do conceito de congruência, indo além da memorização de regras.

## Missão 3 – Caça ao Tesouro Congruente

 Missão
**Atenção, aventureira ou aventureiro!**

Um mapa do tesouro foi encontrado, mas ele está codificado com um enigma numérico! Para encontrar o caminho correto, você terá que usar tudo que aprendeu sobre congruência.



**Figura 4.1:** Agora é com você, detetive

Você começa no ponto de partida: a casa número 1 de um tabuleiro circular com 6 casas.

- ◇ Primeiro passo: dê 11 passos.
- ◇ Segundo passo: dê mais 7 passos.
- ◇ Terceiro passo: dê mais 8 passos.



### Agora é com você

**💡 Dica da coruja:** Faça um passo de cada vez, sempre contando no círculo de 6 casas. Use a congruência para encontrar a casa final!

Em qual casa do tabuleiro você vai parar?

### Dica de atividade pedagógica (versão do professor)

**Objetivo pedagógico:** Consolidar a noção de congruência como ferramenta para analisar movimentos cíclicos, aplicando estratégias de contagem com módulo.

**Descrição da atividade:** Os alunos devem realizar uma sequência de passos em um tabuleiro circular de 6 casas, aplicando os conceitos de congruência sucessivamente.

#### Resolução passo a passo:

- ◇ Tabuleiro com 6 casas  $\Rightarrow$  módulo 6.
- ◇ Começamos na casa 1.
- ◇ Primeiro passo: andamos 11 casas.

$$1 + 11 = 12 \Rightarrow 12 \div 6 = 2 \text{ e sobra } 0 \Rightarrow \text{Casa final: } 6$$

- ◇ Segundo passo: a partir da casa 6, andamos mais 7 passos.

$$6 + 7 = 13 \Rightarrow 13 \div 6 = 2 \text{ e sobra } 1 \Rightarrow \text{Casa final: } 1$$

- ◇ Terceiro passo: a partir da casa 1, andamos mais 8 passos.

$$1 + 8 = 9 \Rightarrow 9 \div 6 = 1 \text{ e sobra } 3 \Rightarrow \text{Casa final: } 3$$

**Resposta final:** Casa 3.

#### Sugestão de mediação:

- ◇ Incentive os alunos a desenharem o tabuleiro circular em seus cadernos e marcarem os passos com lápis de cor.
- ◇ Estimule o uso da notação de congruência:

$$12 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow \text{Casa } 6$$

$$13 \equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow \text{Casa } 1$$

$$9 \equiv 3 \pmod{6} \Rightarrow \text{Casa } 3$$

## Missão 4 - A Senha Perdida

 **Detetive, mais um enigma desafia sua mente!**

 **Missão**

Um antigo cofre foi encontrado, mas sua senha desapareceu... Só a lógica pode te ajudar a recuperá-la.

A senha correta é um número que, ao ser dividido por 6, deixa resto 4. E mais: esse mesmo número, ao ser dividido por 5, deixa resto 3. Qual pode ser essa senha?

 **Dica rápida**

Use as expressões da forma:

$$x = 6k + 4 \quad \text{e} \quad x = 5m + 3$$

Tente encontrar um número que apareça nas duas sequências!

Escrevendo os primeiros números da forma:

◇  $6k + 4 = 4, 10, 16, 22, 28, 34, \dots$

◇  $5m + 3 = 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, \dots$

Qual é o primeiro número que aparece nas duas sequências?

 **Atalho para Lembrar**

Você está procurando um número que serve para duas regras ao mesmo tempo! Isso é como juntar duas pistas e encontrar um só culpado. Em linguagem matemática, usamos:

$$x \equiv 4 \pmod{6} \quad \text{e} \quad x \equiv 3 \pmod{5}$$

Lembre-se: dois números são congruentes quando têm o mesmo resto na divisão por um número fixo!

**Dica da Coruja:**

Você pode usar o resto da divisão para encontrar o número certo.

**Resolução passo a passo (versão do professor)**

A situação-problema diz:

A senha correta é um número que, ao ser dividido por 6, deixa resto 4. E também, quando dividido por 5, deixa resto 3.

Por tentativa, o aluno consegue encontrar a resposta, 28. Mas, o cálculo matemático por trás é o seguinte:

**Passo 1:** Traduzindo para linguagem matemática

Podemos representar essas condições usando congruências:

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

**Passo 2:** Procurando um número que satisfaça ambas as condições

Vamos começar com a segunda congruência:

$$x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3$$

 **Continuação**

Vamos testar valores de  $x$  com essa forma até encontrar um que também satisfaça  $x \equiv 4 \pmod{6}$ :

- ◇  $x = 3$ :  $3 \div 6 = 0$ , sobra 3  $\rightarrow$  não serve
- ◇  $x = 8$ :  $8 \div 6 = 1$ , sobra 2  $\rightarrow$  não serve
- ◇  $x = 13$ :  $13 \div 6 = 2$ , sobra 1  $\rightarrow$  não serve
- ◇  $x = 18$ :  $18 \div 6 = 3$ , sobra 0  $\rightarrow$  não serve
- ◇  $x = 23$ :  $23 \div 6 = 3$ , sobra 5  $\rightarrow$  não serve
- ◇  $x = 28$ :  $28 \div 6 = 4$ , sobra 4 ✓

**Passo 3:** Verificação

Vamos verificar se  $x = 28$  satisfaz as duas condições:

- ◇  $28 \div 6 = 4$  e sobra 4  $\rightarrow$  ✓
- ◇  $28 \div 5 = 5$  e sobra 3  $\rightarrow$  ✓

Portanto, **a senha correta é:**

Essa é uma boa oportunidade para discutir o uso de congruências no cotidiano e fortalecer a interpretação de situações-problema com linguagem matemática!

 **Dica de atividade pedagógica (versão do professor)**

Este é um excelente momento para introduzir o conceito de sistema de congruências. Você pode:

- ◇ Fazer os alunos escreverem as duas sequências separadamente (ex:  $6k + 4$  e  $5m + 3$ );
- ◇ Procurar o primeiro número comum às duas sequências — uma introdução informal ao Teorema Chinês dos Restos;
- ◇ Incentivar que proponham seus próprios desafios com dois restos diferentes;
- ◇ Para os mais avançados, discutir por que o número comum resolve ambas as congruências.

*A coruja professora voltou com mais uma ideia!*



**Dica da Coruja Professora:** Ao trabalhar com padrões numéricos, proponha que os alunos criem suas próprias sequências secretas e desafiem os colegas a descobrir a regra. Você pode usar esse momento para discutir regularidades, criar um “Clube dos Detetives da Matemática” e valorizar a criatividade investigativa na sala.

## Missão 5 – O Caso do Ladrão

---

Agora que você já conhece alguns truques, é hora de usar suas habilidades de detetive para resolver um mistério. O ladrão de números deixou uma pista importante: Durante sua fuga, deixou cair um papel que diz que o número que revela sua identidade (de cadastro no sistema da polícia) é divisível por 6, mas ao ser dividido por 4, deixa o resto 3. Qual será esse número?



### Missão

A nossa amiga, coruja detetive, precisa de ajuda! Um ladrão deixou pistas numéricas ao fugir de um roubo misterioso. Com sua lupa matemática, você vai precisar descobrir que número revela sua identidade!



### Pista

A senha correta é um número que:

- ◇ É divisível por 6;
- ◇ Ao ser dividido por 4, deixa resto 3.

**Dica do detetive:** Pense nos números que são múltiplos de 6 (6, 12, 18, 24, etc.). Agora, veja quais desses números, ao serem divididos por 4, deixam o resto 3. Ao combinar essas pistas, você encontrará o número certo!

 **Dica de atividade pedagógica (versão do professor)**

Caro professor (a), o objetivo desta missão é consolidar o uso da congruência em problemas que envolvem múltiplos e restos simultâneos. Ela estimula o raciocínio lógico, a análise de padrões e a articulação entre linguagem matemática e linguagem narrativa.

**Comentário Pedagógico** Este desafio representa uma introdução lúdica e intuitiva ao conceito de **sistemas de congruências**, em especial problemas que podem ser resolvidos por tentativa e observação de padrões.

- ◇ Recomenda-se revisar rapidamente com os alunos os conceitos de múltiplos e restos, bem como os exemplos do capítulo 2 (tabuleiros circulares).
- ◇ Pode-se usar um círculo com 6 divisões para visualizar os múltiplos de 6, e outro com 4 divisões para os restos módulo 4.

 **Resolução passo a passo (versão do professor)****Resolução Sugerida**

1. Sabemos que o número deve ser:
  - ◇ Divisível por 6: isso significa que ele está na lista de múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, ...
  - ◇ Quando dividido por 4, deixa resto 3.
2. Testamos os múltiplos de 6:
  - ◇ Para 6:  $6 \div 4 = 1$  (sobra 2, então não serve).
  - ◇ Para 12:  $12 \div 4 = 3$  (sobra 0, então não serve).
  - ◇ Para 18:  $18 \div 4 = 4$  (sobra 2, então não serve).
  - ◇ Para 24:  $24 \div 4 = 6$  (sobra 0, então não serve).
  - ◇ Para 30:  $30 \div 4 = 7$  (sobra 3, então este serve!).

Portanto, o número da fuga do ladrão é 30.

## 4.3 Conclusão - Missão cumprida

---

Parabéns, detetive dos números!

Você acabou de usar a matemática de um jeito incrível: com lógica, dedução e um toque de mistério. Descobriu como a congruência pode ajudar a encontrar senhas escondidas, planejar dias da semana e até capturar ladrões imaginários.

Ao longo dessa missão, você aprendeu:

- ◇ A trabalhar com múltiplos e restos;
- ◇ A resolver sistemas simples de congruências;
- ◇ A usar o pensamento lógico como ferramenta para desvendar padrões.

Você usou a congruência para resolver mistérios e desvendar segredos escondidos nos números. Esses enigmas mostraram como os números podem se comportar de maneira previsível e divertida, mesmo quando parecem confusos à primeira vista.

Agora você está pronto(a) para um novo desafio... Vamos descobrir a magia dos triângulos e dos números que se combinam perfeitamente?

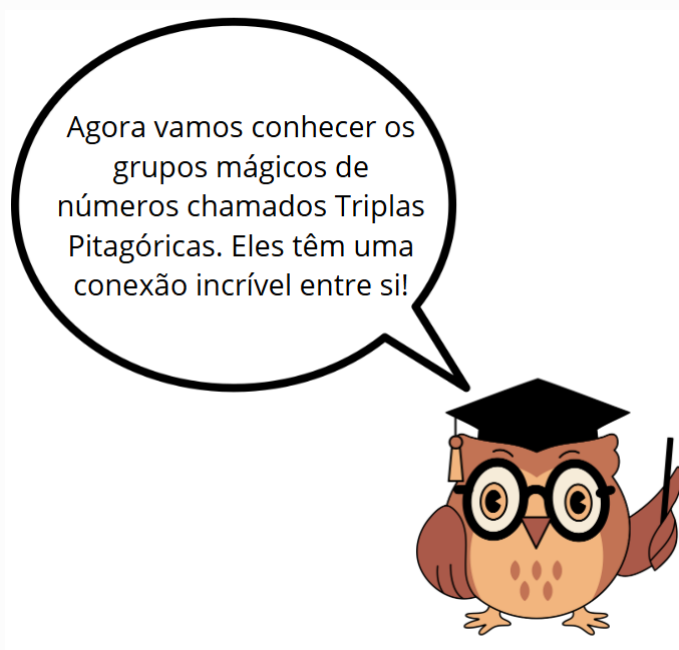
Nos vemos na próxima missão!



**Figura 4.2:** A Coruja Detetive comemora: mistérios resolvidos com lógica e astúcia!

# 5

## A Aventura das Triplas Pitagóricas



Bem-vindo à última parte de nossa jornada mágica pelos números! Aqui, vamos explorar um trio especial de números chamados de **triplas pitagóricas**. Mas calma, você não precisa saber nada sobre o Teorema de Pitágoras para descobrir a beleza desses trios. Vamos entender os padrões e as surpresas que esses números nos revelam.

Prepare-se para uma nova missão!

Você acaba de ser recrutado(a) por uma sociedade secreta de exploradores numéricos: a **Viajantes Pitagóricos**.

Essa sociedade estuda trios de números inteiros que escondem um poder especial — quando combinados, eles têm características muito especiais! Mas atenção: apenas alguns trios são realmente mágicos... e a sua missão é descobrir quais são.

Para isso, você precisará:

- ◇ Investigar padrões numéricos com lupa e lógica;
- ◇ Testar combinações e somas de quadrados;
- ◇ Criar seus próprios trios mágicos!

Suas amigas corujas estarão ao seu lado nesta jornada, com dicas e desafios secretos!

Vamos desvendar os mistérios desses trios de números mágicos?

🔍 Que a caçada às triplas pitagóricas comece!



**Figura 5.1:** À procura de triplas pitagóricas

## 5.1 O que são Triplas Pitagóricas?

---

Você já ouviu falar de um trio mágico de números? Você pode pensar neles como um grupo de amigos que, juntos, seguem uma regra especial. Esses números são mágicos porque, quando você faz algumas contas simples com eles, algo fascinante acontece. Esses trios têm um nome especial: **Triplas Pitagóricas**. Veja um exemplo curioso:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

Isso quer dizer que 3, 4 e 5 formam uma tripla pitagórica.

Essas triplas aparecem quando a gente soma os quadrados de dois números e o resultado também é um quadrado perfeito.

*Antes de começarmos com as atividades, a Coruja Detetive tem algo curioso para compartilhar!*

*A Coruja Detetive encontrou uma pista histórica surpreendente!*



### Curiosidade da Coruja Detetive:

Você sabia que os antigos egípcios já usavam triplas como (3, 4, 5) para medir ângulos retos nas construções?

Eles esticavam cordas com 12 nós igualmente espaçados para formar um triângulo retângulo perfeito! Essa técnica simples e engenhosa permitia criar ângulos retos com precisão — um verdadeiro mistério revelado com matemática!

*Explicando as Triplas Pitagóricas...*

**O que é uma tripla pitagórica?** Três números inteiros que formam os lados de um triângulo retângulo! Eles satisfazem a relação:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Como no caso:  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .

Logo, (3, 4, 5) é uma tripla pitagórica.

Outros exemplos:

◇  $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 \Rightarrow (5, 12, 13)$  é uma tripla pitagórica.

◇  $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2 \Rightarrow (7, 24, 25)$  é uma tripla pitagórica.

**Agora é com você**

**Q Investigação:** Será que dá pra criar outras triplas assim? Vamos investigar juntos!

**📌 Explicação Teórica (versão do professor)**

**Definição:** Uma **tripla pitagórica** é um conjunto de três números inteiros positivos  $(a, b, c)$  que satisfaz a equação:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

**Exemplo:** Verificar se  $(3, 4, 5)$  é uma tripla pitagórica. Cálculo:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Portanto,  $(3, 4, 5)$  é uma tripla pitagórica.

**📖 Dica de atividade pedagógica (versão do professor)**

**Objetivo pedagógico:** Introduzir o conceito de tripla pitagórica de forma intuitiva, com ênfase na relação entre três números inteiros ligados por uma igualdade envolvendo quadrados.

**Observação didática:** Nesta etapa, ainda não abordamos triângulos ou geometria — o foco é puramente numérico. Trabalhar com triplas como “trios de números amigos que seguem uma regra especial” ajuda a manter o tom lúdico e investigativo da apostila.

**Sugestão de mediação:**

- ◇ Estimule os alunos a testarem trios por tentativa, com calculadora ou tabelas.
- ◇ Proponha que eles inventem um “desafio” para o colega com dois números e descubram o terceiro.
- ◇ Conecte com o conceito de “quadrado perfeito” visto anteriormente.

**Dica:** Perguntas como “Será que  $(6, 8, 10)$  também formam uma tripla?” podem servir como ganchos para estimular a formulação de conjecturas e generalizações.

## 5.2 Brincando com Triplas

---

Você sabia que as triplas pitagóricas podem ser encontradas em várias situações do dia a dia, como em construções, jogos e até em quebra-cabeças? Vamos explorar algumas dessas situações com jogos divertidos.

- ◇ É possível criar novas triplas pitagóricas a partir de uma que já conhecemos?
- ◇ É isso mesmo! Se você multiplicar todos os números de uma tripla por um mesmo número inteiro, ainda terá uma tripla válida!

### Veja só:

Sabemos que  $(3, 4, 5)$  é uma tripla pitagórica.

Se multiplicarmos todos os termos por 2, temos:

$$3 \cdot 2 = 6, \quad 4 \cdot 2 = 8, \quad 5 \cdot 2 = 10$$

Agora testamos: será que  $6^2 + 8^2 = 10^2$ ?

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$



### Agora é com você

**Q Investigação:** Que tal tentar multiplicar o trio  $3, 4, 5$  por outros números? Quais novos trios você consegue formar?

### 🎯 Desafio Inverso

Será que dá pra fazer o contrário?

Se temos a tripla  $6, 8, 10$ , conseguimos voltar para  $3, 4, 5$ ? Experimente dividir todos os números por um mesmo valor!

### Explicação Teórica (versão do professor)

**Teorema:** Se  $(a, b, c)$  é uma tripla pitagórica, então para todo número inteiro positivo  $k$ , o trio  $(ka, kb, kc)$  também é uma tripla pitagórica.

#### Demonstração

Seja  $(a, b, c)$  uma tripla pitagórica, ou seja,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por um número inteiro positivo  $k^2$ , obtemos:

$$k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2,$$

o que equivale a:

$$(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2.$$

Portanto,  $(ka, kb, kc)$  também satisfaz a relação pitagórica, sendo assim uma tripla pitagórica.

### Dica de atividade pedagógica (versão do professor)

**Objetivo pedagógico:** Apresentar aos alunos a ideia de que triplas pitagóricas podem gerar outras triplas ao serem multiplicadas por um número inteiro. Essa atividade ajuda a consolidar a estrutura algébrica e a noção de padrões.

#### Mediação sugerida:

- ◇ Estimule os alunos a criarem trios a partir de diferentes multiplicadores (1, 2, 3, 4, 5...).
- ◇ Proponha a discussão sobre o que muda e o que permanece igual.
- ◇ Mostre que esse processo é uma introdução intuitiva ao conceito de múltiplos de uma tripla primitiva.

**Dica:** Reforce a importância de verificar as triplas sempre pela soma dos quadrados.

## Explorando as Triplas



**Figura 5.2:** Como encontramos as triplas pitagóricas?

Agora que você já conhece a ideia de triplas pitagóricas, chegou a hora de explorar novos trios!

Vamos começar com o trio mágico  $(3, 4, 5)$ .

Se multiplicarmos todos os números por 3, o que acontece?

$$3 \cdot 3 = 9, \quad 4 \cdot 3 = 12, \quad 5 \cdot 3 = 15$$

Será que  $9^2 + 12^2 = 15^2$ ? Faça a conta e descubra!



### Agora é com você

**Experimentação:** Escolha um número inteiro e multiplique o trio  $3, 4, 5$  por ele. O que acontece? Agora invente o seu próprio trio mágico! Teste somando os quadrados e veja se funciona!

### Desafio

Será que existem trios mágicos que *não* vêm do  $3, 4, 5$ ? Vamos descobrir juntos na próxima seção!

Agora, vamos descobrir outros trios mágicos. Para isso, você só precisa brincar com os números e descobrir quais grupos seguem a regra mágica.

### Dica de atividade pedagógica (versão do professor)

Esta seção propõe a exploração livre de combinações de trios. Sugira aos alunos testarem diversos múltiplos da tripla 3, 4, 5 e registrarem os resultados em tabelas. Incentive que comparem os trios obtidos para perceber padrões e relações.

## Criando Triplas com um Truque Secreto

- ◇ E se eu te dissesse que existe uma **fórmula mágica** para criar trios que sempre funcionam?

Sim, é isso mesmo! Existe uma maneira de gerar **triplas pitagóricas** usando apenas dois números inteiros. Veja como:

### Receita das Triplas Mágicas

Pegue dois números inteiros,  $m$  e  $n$ , com  $m > n$ . Agora, use esta receita:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

O trio  $(a, b, c)$  será uma tripla pitagórica!

**Exemplo:** Escolha  $m = 3$  e  $n = 2$

$$a = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5, \quad b = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12, \quad c = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$

✓ Temos a tripla mágica  $(5, 12, 13)$ , porque:

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$



### Agora é com você

**Desafio:** Tente com outros valores de  $m$  e  $n$ ! Será que você consegue encontrar a tripla  $(7, 24, 25)$ ?

### Dica de atividade pedagógica (versão do professor)

**Objetivo pedagógico:** Apresentar uma estrutura geradora de triplas pitagóricas, mostrando aos alunos que há padrões por trás dos “trios mágicos”. A fórmula de Euclides oferece uma oportunidade rica de explorar regularidades numéricas com alunos que já dominam os conceitos de quadrado, soma e multiplicação.

#### Sugestão de mediação:

- ◇ Peça aos alunos que escolham pares  $m > n$  e montem suas triplas usando a fórmula:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

- ◇ Organize os resultados em uma tabela e incentive comparações entre os trios obtidos.
- ◇ Estimule conjecturas do tipo: “O que acontece se  $m$  e  $n$  forem pares?” ou “E se forem primos entre si?”

**Aprofundamento (opcional):** Aproveite para introduzir o conceito de **tripla primitiva** como curiosidade: a tripla  $(a, b, c)$  gerada é primitiva se  $\text{mdc}(m, n) = 1$  e  $m - n$  for ímpar. Isso pode gerar discussões muito interessantes!

**Dica didática:** Trate a fórmula como um “laboratório matemático”. Usar a metáfora da receita ou do experimento (como feito na versão do aluno) torna o conteúdo mais envolvente e próximo.

## Usando Triplas em Problemas

As triplas pitagóricas podem nos ajudar a resolver muitos problemas numéricos interessantes. Vamos ver alguns exemplos práticos.

Imagine que você está montando um quebra-cabeça numérico e precisa encontrar números que se encaixam perfeitamente. As triplas pitagóricas são a chave para

isso! Experimente criar suas próprias triplas mágicas e veja como elas se comportam quando você faz contas simples.

**Isto é:** você está resolvendo um enigma numérico. Para decifrar o código, precisa encontrar três números inteiros que sigam a regra:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



**Figura 5.3:** Vamos usar nossas triplas como chaves matemáticas para resolver desafios!

**Exemplo:** Você tem os números  $a = 9$ ,  $b = 12$ . Será que existe um número  $c$  que completa esse trio?

$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2 \Rightarrow \text{Tripla mágica: } (9, 12, 15)$$



### Agora é com você

**Desafio:** Tente criar ou completar triplas com diferentes valores de  $a$  e  $b$ . Se você conhece dois números, consegue descobrir o terceiro?

**📖 Dica de atividade pedagógica (versão do professor)**

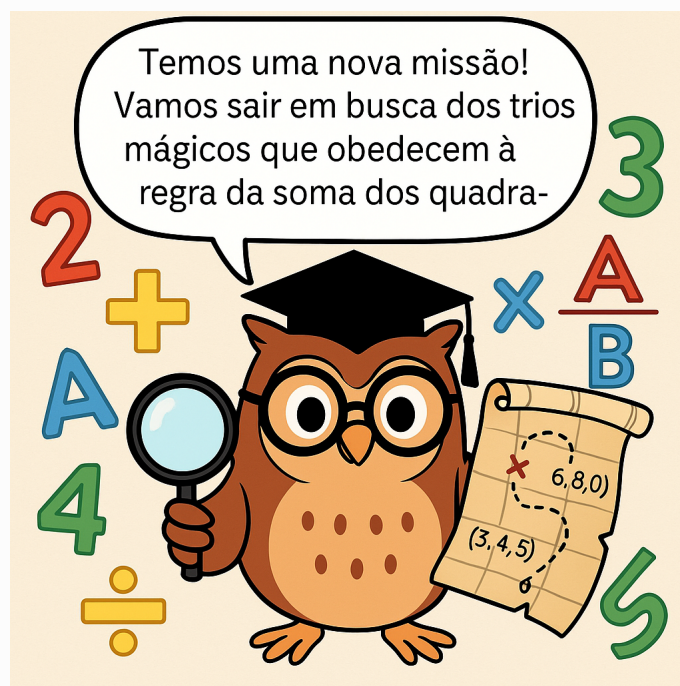
**Objetivo pedagógico:** Aplicar o conceito de triplas pitagóricas em pequenos problemas numéricos, reforçando o reconhecimento de padrões e a verificação por cálculo.

**Sugestão de mediação:**

- ◇ Proponha que os alunos montem “enigmas” uns para os outros: fornecem dois números e desafiam colegas a descobrir o terceiro.
- ◇ Use tabelas ou cartões para combinar diferentes valores de  $a$  e  $b$ , estimulando a experimentação com somas de quadrados.
- ◇ Incentive a comunicação matemática: “Como você sabe que esse trio funciona?”.

## 5.3 A Caça aos Números Mágicos

Agora que você já conheceu as triplas pitagóricas, é hora de colocar seu conhecimento em prática! Resolva os desafios abaixo e descubra novos trios mágicos.



**Figura 5.4:** Uma nova missão

- ◇ Use tudo o que aprendeu até aqui para resolver os desafios abaixo. Alguns são fáceis... outros escondem surpresas!

1. **Trio Incompleto:** Sabemos que o trio 6, 8, ? forma uma tripla pitagórica. Descubra qual número falta.

 *Dica: Siga a regra especial dos números mágicos!*

 **Resolução passo a passo (versão do professor)**


- ◇ Sabemos que, em uma tripla pitagórica, o quadrado dos dois menores números somados dá o quadrado do maior número.
- ◇ Os dois menores números são 6 e 8. Calculamos o quadrado deles:
  - \*  $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$ ,  $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$ .
- ◇ Somamos os quadrados:  $36 + 64 = 100$ .
- ◇ Descobrimos o quadrado do maior número (100). Agora, calculamos a raiz quadrada:  $\sqrt{100} = 10$ .

Portanto, o terceiro número é 10, e a tripla é 6, 8, 10.

2. **Soma dos Quadrados**

Complete a seguinte frase:

“Os números 5, 12 e \_\_\_ formam uma tripla pitagórica.”

 *Dica: Multiplique 5 por ele mesmo, 12 por ele mesmo e descubra qual número completa o trio!*

 **Resolução passo a passo (versão do professor)**

- ◇ Sabemos que o quadrado dos dois menores números somados dá o quadrado do maior número.
- ◇ Os dois menores números são 5 e 12. Calculamos o quadrado deles:
  - \*  $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ ,  $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$ .
- ◇ Somamos os quadrados:  $25 + 144 = 169$ .
- ◇ Descobrimos o quadrado do maior número (169). Agora, calculamos a raiz quadrada:  $\sqrt{169} = 13$ .

Portanto, o terceiro número é 13, e a tripla é 5, 12, 13.

### 3. Crie sua Própria Tripla!

Escolha dois números inteiros e verifique se eles podem formar uma tripla mágica.

 *Dica: use a Fórmula de Euclides!*

#### Resolução passo a passo (versão do professor)

- ◇ Para encontrar uma nova tripla, podemos usar números maiores e testar.
- ◇ Escolhemos os números 8 e 15. Calculamos o quadrado deles:
  - \*  $8 \cdot 8 = 64$ ,
  - \*  $15 \cdot 15 = 225$ .
- ◇ Somamos os quadrados:
  - \*  $64 + 225 = 289$ .
- ◇ Descobrimos o quadrado do maior número (289). Agora, calculamos a raiz quadrada:
  - \*  $\sqrt{289} = 17$ .

Portanto, uma nova tripla é 8, 15, 17.

### 4. Quadrados Misteriosos: Liste os quadrados perfeitos de 1 a 10. Agora tente somar dois deles. Qual soma dá outro quadrado perfeito?

#### Resolução passo a passo (versão do professor)

- ◇ Os quadrados dos números de 1 a 10 são:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

- ◇ Testamos combinações:

- \*  $9 + 16 = 25$  (3, 4, 5),

- \*  $36 + 64 = 100$  (6, 8, 10)

Portanto, as triplas pitagóricas formadas são:

- \* 3, 4, 5,

- \* 6, 8, 10

**5. Qual Número Não Pertence?**

Qual dos seguintes números não faz parte de uma tripla pitagórica?

a) 9, 12, 15

b) 7, 24, 25

c) 8, 15, 17

💡 *Dica: Verifique se eles seguem a regra das triplas mágicas.*

**📎 Resolução passo a passo (versão do professor)**

Para cada opção, verificamos a soma dos quadrados dos dois menores números e comparamos com o quadrado do maior número.

◇ 9, 12, 15:

\* Calculamos  $9^2 + 12^2$ :

$$9 \cdot 9 = 81, \quad 12 \cdot 12 = 144, \quad 81 + 144 = 225.$$

\* Calculamos  $15^2$ :

$$15 \cdot 15 = 225.$$

\* Como  $81 + 144 = 225$ , essa é uma tripla pitagórica.

◇ 7, 24, 25:

\* Calculamos  $7^2 + 24^2$ :

$$7 \cdot 7 = 49, \quad 24 \cdot 24 = 576, \quad 49 + 576 = 625.$$

\* Calculamos  $25^2$ :

$$25 \cdot 25 = 625.$$

\* Como  $49 + 576 = 625$ , essa é uma tripla pitagórica.

 **Continuação**

◇ 8, 15, 17:

\* Calculamos  $8^2 + 15^2$ :

$$8 \cdot 8 = 64, \quad 15 \cdot 15 = 225, \quad 64 + 225 = 289.$$

\* Calculamos  $17^2$ :

$$17 \cdot 17 = 289.$$

\* Como  $64 + 225 = 289$ , essa é uma tripla pitagórica.

**Conclusão:** Todas as opções a), b) e c) são triplas pitagóricas.

Portanto, não há número que "não pertença" às triplas mágicas dadas. Caso a pergunta esperasse a identificação de algum erro em outros contextos, seria necessário revisar o enunciado.

 **Dica de atividade pedagógica (versão do professor)**

**Objetivo pedagógico:** Consolidar a ideia de tripla pitagórica por meio de exercícios investigativos e de criação. Estimula a aplicação prática da fórmula, uso de quadrados e raciocínio lógico.

**Sugestões de mediação:**

- ◇ Atividade 1 e 2 podem ser resolvidas em duplas com apoio de calculadora.
- ◇ Na Atividade 3, incentive a escolha de valores variados para  $m$  e  $n$ .
- ◇ Para a Atividade 4, peça que os alunos descubram outros pares com somas curiosas.
- ◇ A Atividade 5 é ótima para promover discussão coletiva e justificar raciocínios.

## 5.4 Conclusão - Missão Cumprida

---

Parabéns, explorador(a) dos números!

Você descobriu que a matemática está cheia de padrões, ciclos e trios mágicos escondidos por todos os lados — nos relógios, nos dias da semana, nos desafios e até nos enigmas das triplas pitagóricas.

### Aprendemos:

Ao explorar as triplas pitagóricas, você descobriu que:

- ◇ Alguns trios de números formam padrões incríveis!
- ◇ Podemos criar triplas mágicas multiplicando trios conhecidos;
- ◇ Existe uma fórmula secreta para gerar novos trios com dois números;
- ◇ A lógica e a observação são ferramentas poderosas na matemática;
- ◇ A matemática pode ser uma grande aventura cheia de descobertas!

Continue observando os números à sua volta — quem sabe qual será o próximo mistério que você vai desvendar?



### Agora é com você

★ **Curiosidade final:** Será que você consegue criar sua própria “missão matemática”? Um desafio com números, regras e mistério? Crie e desafie seus colegas!

A matemática não termina aqui — ela continua em cada pergunta que você se faz, em cada padrão que você observa e em cada ideia que você ousa explorar.

**Até a próxima missão!**



**Figura 5.5:** Missão cumprida!

● *As amigas corujas sussurram: “Uau! Você chegou até aqui, resolvendo mistérios e desvendando padrões escondidos nos números. Que jornada incrível! Mas... será que já é hora de se despedir?”*

Sim! Está quase na hora de fechar nossa apostila, mas não sem antes fazer uma pausa para olhar para trás e refletir sobre tudo o que aprendemos. No próximo capítulo, vamos amarrar os fios dessa aventura, revisitar nossos achados e pensar juntos nos próximos passos.

**Prepare-se para o nosso grande encerramento — o capítulo de conclusão!**

# Considerações Finais

Esta apostila foi escrita com muito cuidado e carinho, buscando transformar ideias matemáticas em descobertas acessíveis, visuais e divertidas.

Ela é fruto de uma dissertação do PROFMAT, da Universidade Federal de Viçosa, *campus* UFV-Florestal, um curso que oferece suporte ao professor da Educação Básica, e o impulsiona à pesquisa e à criação de materiais didáticos significativos. A Classe do LaTeX utilizada para a criação desta apostila é propriedade do professor Luiz D’Afonseca, que gentilmente cedeu, e pode ser obtido em [3].

Ao longo dos capítulos, exploramos ciclos, congruência, trios mágicos e enigmas numéricos — sempre com a curiosidade como guia.

Mas a matemática dos números inteiros não termina aqui...

Ainda poderíamos estudar muitas outras coisas — e desejamos continuar este trabalho para, quem sabe, um segundo volume desta apostila. Dentre os temas que podemos abordar, destacamos:

- ◇ Números que podem ser escritos como soma de dois quadrados;
- ◇ Propriedades dos números primos e compostos;
- ◇ Sequências curiosas e padrões escondidos;
- ◇ Criptografia;
- ◇ Números inteiros na computação;
- ◇ Inteligência Artificial e Matemática.

Sabemos que cada estudante avança em seu próprio ritmo. Por isso, desejamos que esta apostila seja apenas o começo de uma jornada de descobertas, perguntas, investigações — e, claro, muitas missões matemáticas!

● *As amigas corujas sussurram: “Nossa aventura pelos números chegou ao fim... por enquanto! Mas sabemos que a sua jornada matemática está apenas começando.”*

Ao fechar este capítulo, deixamos um convite: continue observando padrões, fazendo perguntas e se encantando com os mistérios da matemática. Que esta apostila tenha plantado sementes de curiosidade e coragem investigativa em você.

# As amigas corujas e a nossa imaginação

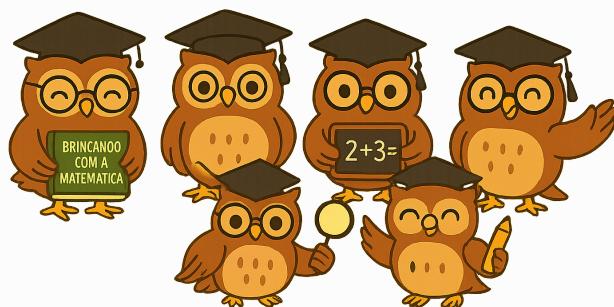
Ao longo desta apostila, você conheceu nossas amigas corujas — companheiras curiosas, atentas e sempre prontas para uma boa investigação matemática!

Essas ilustrações foram criadas pelas autoras com o apoio de ferramentas de inteligência artificial, cuidadosamente escolhidas e ajustadas para refletir o espírito lúdico, acolhedor e investigativo do material.

Cada coruja tem sua personalidade, seus instrumentos e sua missão: algumas fazem perguntas, outras oferecem pistas, e todas nos convidam a enxergar a matemática de um jeito mais criativo.

Esperamos que essas personagens tenham inspirado você tanto quanto nos inspiraram durante a criação desta aventura!

## As amigas corujas e a nossa imaginação



**Figura 5.6:** As amigas corujas que acompanharam você ao longo desta aventura matemática. Criadas com carinho pelas autoras, com apoio da inteligência artificial.

# Apêndices

## Apêndice A — Principais Conceitos Trabalhados

---

- ◇ **Congruência:** Conceito de números que deixam o mesmo resto em divisões; aplicado em jogos, tabuleiros e calendários.
- ◇ **Ciclos:** Padrões que se repetem após certo número de etapas, como relógios e dias da semana.
- ◇ **Aritmética Modular:** Sistema de contagem cíclica, usado intuitivamente nas atividades práticas.
- ◇ **Triplas Pitagóricas:** Trios de números inteiros que satisfazem a relação  $a^2 + b^2 = c^2$ .
- ◇ **Criação de padrões numéricos:** Observação e geração de sequências usando raciocínio lógico e operações com restos.

## Apêndice B — Sugestões de Avaliação

---

- ◇ **Atividades Investigativas:** Avaliar a capacidade do aluno de levantar hipóteses, testar ideias e justificar raciocínios.
- ◇ **Produção de Problemas:** Incentivar que os alunos criem seus próprios desafios usando congruência e triplas pitagóricas.
- ◇ **Portfólios de Missões:** Propor que os estudantes mantenham registros de cada missão resolvida, ilustrando estratégias e conclusões.
- ◇ **Apresentações em Grupo:** Organizar apresentações breves em que os alunos expliquem como resolveram determinada missão ou enigma.
- ◇ **Autoavaliação Reflexiva:** Propor perguntas como: “O que eu mais aprendi?”, “Qual foi o maior desafio?”, “O que ainda quero investigar?”.

## Apêndice C — Atividades Complementares e Jogos<sup>1</sup>

---

### 1. Jogo da corrente <sup>2</sup>

**Material:** Uma corrente com 23 elos circulares desenhado no quadro ou em folha.

**Regra:** Joga-se de dupla, ou de dois grupos. Cada jogador, ou cada grupo, deve marcar com (X) uma ou duas “casas circulares”

**Objetivo:** Marcar a última casa circular da corrente.

**Variante:** Pode-se alterar a quantidade de círculos da corrente e de marcação mínima ou máxima.

### 2. Jogo da Congruência no Relógio

**Material:** Relógio desenhado no quadro ou em folha.

**Objetivo:** Alunos avançam e retrocedem horas usando a ideia de resto da divisão por 12.

**Variante:** Resolver desafios como “Avance 23 horas. Onde vai parar?”.

### 3. Caça ao Tesouro Numérico

**Material:** Tabuleiro circular numerado.

**Objetivo:** Resolver pistas usando operações com congruência para encontrar a casa do tesouro.

### 4. Criação de Enigmas em Equipe

**Material:** Papel, caneta e criatividade.

**Objetivo:** Grupos inventam enigmas matemáticos inspirados nos modelos da apostila e trocam entre si para resolver.

*Que a aventura matemática continue para além destas páginas!*

---

<sup>1</sup>As atividades e jogos (2,3,4) apresentados foram elaborados originalmente para esta apostila, com inspiração em práticas pedagógicas investigativas da Educação Matemática.

<sup>2</sup>O Jogo 1, jogo da corrente, pode ser encontrado em em <https://parque-da-matematica.webnode.page/jogo-da-corrente>

# Respostas

Aqui você encontra as respostas dos exercícios propostos. Lembre-se: o mais importante é o raciocínio! Reveja seus passos e tente novamente sempre que for preciso.

## Capítulo 1 — O Mundo Mágico dos Números

---

1. **O Relógio das voltas:** 5 horas.
2. **O Ciclo dos Dias:** Quinta-feira
3. **Dividindo Balas:** Não sobram balas.
4. **Passeando no Tabuleiro:** Casa 4.

## Capítulo 2 — Jogos de Congruência

---

- ◇ **Tabuleiro Circular:**
  - \* Casa 4
  - \* Casa 5
- ◇ **Atividade prática — Volta ao Mundo:**
  1. 12h.
  2. Sexta-feira.
  3. Casa 3.

## Capítulo 3 — Congruência ao Nosso Redor

---

1. Quarta-feira.
2. 2028.
3. Resposta: Terça-feira.

## Capítulo 4 — Mistérios dos Números

---

- ◇ **Mistérios com Fechaduras e Códigos:** Exemplo: 3, 10, 17 ....
- ◇ **Caso do Ladrão:** 30.

## Capítulo 5 — A Aventura das Triplas Pitagóricas

---

1. **Trio Faltante:** 10.
2. **Soma dos Quadrados:** 13.
3. **Novo Trio:** Exemplo: (7, 24, 25).
4. **Jogo dos Quadrados:** Tripla: (3, 4, 5) e (6, 8, 10)
5. **Qual não pertence:** Todas pertencem a triplas pitagóricas.

# Referências

- 1 AGUIRRE, J. R. *Equações Diofantinas: Um passeio pelo mundo inteiro*. 2019. Disponível em: <<https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/8-Josimar.pdf>>.
- 2 CURVO, E. F. O ensino aprendizagem da matemática através das metodologias ativas. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, v. 8, p. 227–240, 2022.
- 3 D'AFONSECA, L. A. *Nice Booklet – Classe para LaTeX*. Acesso em: 23 abr. 2025. 2024. Disponível em: <<https://sites.google.com/view/prof-luis-dafonseca/profmat/NiceBooklet>>.
- 4 DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. Atual, 1991.
- 5 ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA. *Number theory: Pierre de Fermat*. Acesso em: 24 mar. 2025. 2025. Disponível em: <<https://www.britannica.com/science/number-theory/Pierre-de-Fermat>>. Acesso em: 24 mar. 2025.
- 6 FERMAT VIEIRA, P. S. DE. *Elaboração de uma apostila para apresentar o infinito no ensino médio*. 2023. Disponível em: <<https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>>.
- 7 HEFEZ, A. *Aritmética*. SBM, Coleção Profmat, 2016. v. 2.
- 8 LIRA, J. V. D.; SILVA, M. V. R. DA; SILVA NETO, J. F. DA. Dificuldades de aprendizagem matemática: o que dizem as pesquisas recentes. *Educação Matemática em Revista*, Rio Grande do Sul, v. 1, n. 25, p. 54–61, 2024.
- 9 MARTINEZ, F. B. et al. *Teoria dos números: um passeio pelos primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- 10 MENEZES, J. et al. Metodologia de resolução de problemas: concepções e estratégias de ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 2024.
- 11 MENTALIDADES MATEMÁTICAS. *6 padrões matemáticos na natureza*. Acesso em: 23 abr. 2025. 2024. Disponível em: <<https://mentalidadesmatematicas.org.br/6-padroes-matematicos-na-natureza/>>. Acesso em: 23 abr. 2025.
- 12 MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (BNCC). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 12 fev. 2024.
- 13 MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (PCN). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 12 fev. 2024.
- 14 PONTE, J. P. D. Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação*, v. 2, n. 2, 1992. Departamento de Educação F.C. da U.L.
- 15 STALLINGS, W. *Cryptography and Network Security: Principles and Practice*. 8<sup>a</sup> edição: Pearson, 2019.

# Índice Remissivo

Brincando, [66](#)

Congruência, [23](#), [39](#)

Corujas, [81](#)

Mistérios, [61](#)

Múltiplo, [59](#)

Números, [5](#), [62](#)

Números Mágicos, [72](#)

Respostas, [84](#)

Soma dos Quadrados, [73](#)

Triplas Pitagóricas, [62](#)

# Brincando com a Matemática: versão do professor

Luiza Nonaka e Danielle Franco Nicolau

Universidade Federal de Viçosa

Campus UFV-Florestal – [UFV](#)

26 de abril de 2025

Apostila escrita em  $\text{\LaTeX}$  com a classe nice-booklet criada por Luis A. D’Afonseca.

Versão 10/10/2024

Arte da capa: Imagem criada por IA de [Canva](#) baixada de [Canva](#)



Esta obra tem a licença [Creative Commons](#) “Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional”.