



**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT**

RECURSO EDUCACIONAL

**Sequência Didática: Desenvolvendo o Pensamento Geométrico
Espacial com o GeoGebra e uma Impressora 3D**

Adriano de Souza Dias

Douglas Monsôres de Melo Santos



Seropédica, RJ

2025

Produto Educacional apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Aprovado em banca de defesa de mestrado no dia 28/02/2025.

AUTORES

Adriano de Souza Dias: Licenciado em Matemática pela Universidade Iguazu (2008) e Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (ano de conclusão). Atualmente é professor de Matemática do Colégio Estadual Brasil.

Douglas Monsôres de Melo Santos: Possui Graduação em Matemática pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro (2005), Mestrado em Matemática pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2007) e Doutorado em Matemática Pura pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2012). Atualmente é professor da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Tem experiência na área de Matemática e Educação Matemática, com ênfase em Geometria Algébrica e na Formação de Professores de Matemática, atuando nos seguintes temas: Ensino e Aprendizagem de Matemática com Metodologias Ativas e TICs.

Sumário

CARTA AO LEITOR	4
1 APLICAÇÕES DOS TESTES DE VAN HIELE, ROTAÇÃO ESPACIAL E VISUALIZAÇÃO MENTAL	5
1.1 PRIMEIRA AULA TESTE DE VAN HIELE.....	5
TESTE DE VAN HIELE.....	6
1.2 PRIMEIRA AULA - TESTE DE ROTAÇÃO MENTAL.....	9
TESTE DE ROTAÇÃO MENTAL	10
1.3 PRIMEIRA AULA - TESTE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL	11
TESTE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL.....	12
2 SEGUNDA AULA CONCEITOS PRIMITIVOS	16
1 - Apresentação dos conceitos primitivos de <i>Geometria</i>	18
Atividade 1	19
2 SEGUNDA ATIVIDADE ÂNGULOS E POLÍGONOS	20
Atividade 1	21
Atividade 2 Triângulos.....	22
Atividade 2.....	24
Quadriláteros	25
Atividade 3.....	26
3 TERCEIRA AULA OFICINA COM GEOGEBRA	29
Atividade 1 - Funções básicas através de desenho.....	30
Atividade 1 - Funções Básicas.....	32
Atividade 2 - Retas paralelas	33
Atividade 3 - Ponto Médio e Polígonos	35

Atividade 4 - Polígonos e Polígonos Regulares	35
4 QUARTA AULA OFICINA DE DESENHO	36
Atividade 1 - Oficina Imagine Pronto.....	37
Atividade 2 - Oficina com Materiais Concretos.....	41
Atividade 2.....	42
Aula 3 - Oficina com Materiais Concretos	44
AULA 5 CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS PALITOS E JUBUBA .	45
.....	
Atividade 1	46
AULA 6 OFICINA NO GEOGEBRA 3D - EXPLORADO CUBO	46
Atividade 1 - Ambientação com Geogebra 3D.....	47
Atividade 1 - Geogebra 3D - Explorando Cubo	48
Atividade 2 - Ambientação no Geogebra AR.....	49
Atividade 2 - Ambientação no Geogebra AR.....	50
AULA 7 OFICINA NO GEOGEBRA - PLANIFICAÇÃO PINTADA	52
Oficina 7 - Planificação Pintadas.....	53
Aula 7 - Planificação Pintadas.....	53
AULA 8 - TORRE DA IGREJA	55
Oficina 8 - Torre da igreja.....	55
Oficina 8 - Torre da igreja.....	56
AULA 9 - CONSTRUÇÃO DO MODELO DO PRÉDIO DA ESCOLA.	57
CONVERSA FINAL COM O LEITOR.....	63
REFERÊNCIAS	64

ANEXO A - FOLHA DE APROVAÇÃO	65
---	-----------

CARTA AO LEITOR

Olá, professor(a)!

Quero compartilhar com você algo muito especial. A sequência didática que você está prestes a conhecer é fruto da pesquisa desenvolvida ao longo da construção de minha Dissertação de Mestrado. O título é "Desenvolvendo o Pensamento Geométrico através do GeoGebra e uma Impressora 3D", e foi criada no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na UFRRJ, com a orientação do Professor Dr. Douglas Monsôres de Melo Santos.

Esta sequência didática é um recurso que teve resultados positivos quando foi aplicada em minha escola e também pode contribuir para dinamizar as suas aulas de Geometria Espacial no Ensino Médio. A proposta é trazer uma maneira alternativa de ensinar geometria, a qual muitas vezes abordada através de uma coleção de fórmulas e cálculos chatos. O foco das atividades de nossa proposta é explorar propriedades de visualização das figuras espaciais. Quero mostrar que é possível aprender geometria de uma forma divertida e prática, usando até os smartphones que os alunos utilizam tanto em seu cotidiano!

A sequência é composta por 10 atividades de duas horas. Vamos revisar os conceitos básicos da Geometria Plana (ponto, reta, plano), explorar figuras planas e espaciais e nos aprofundar no uso do GeoGebra, com suas ferramentas de realidade aumentada. E para finalizar, usaremos uma impressora 3D, para que os alunos possam ver e interagir com a Geometria de forma concreta.

Com essa abordagem, esperamos ofertar a você um material completo e organizado, com muitas atividades interativas que poderão prender a atenção dos seus alunos. É uma ótima chance de mostrar que a Geometria Espacial é acessível e fascinante!

Minha esperança é que esse Recurso Educacional ajude a transformar suas aulas e inspire seus alunos a explorar o mundo da Geometria Espacial de um jeito novo e instigante.

1 APLICAÇÕES DOS TESTES DE VAN HIELE, ROTAÇÃO ESPACIAL E VISUALIZAÇÃO MENTAL

Para o desenvolvimento da sequência didática nossa primeira aula foi feita a aplicação de avaliações diagnósticas (testes) e com os resultados podemos elaborar o melhor caminho para aplicação da sequência didática.

1.1 PRIMEIRA AULA TESTE DE VAN HIELE

Apesar de neste momento não termos uma ordem pré-definida de aplicação, iniciamos com o teste de van Hiele. O teste de van Hiele consiste em 15 questões divididas nos 3 primeiros níveis¹. As questões de 1 até 5 é referente ao nível 1, questão 6 até 10 é referente ao nível 2 e da questão 11 até 15 é referente ao nível 3. Estes 3 níveis são suficientes para os alunos de ensino médio².

Sugerimos que os testes sejam aplicados de maneira individual e que o professor os oriente a fazê-los com seriedade.

Objetivos Geral:

- Reconhecer o nível de conhecimento que os alunos possuem de geometria.

Objetivos específicos:

- Reconhecer figuras planas e suas propriedades

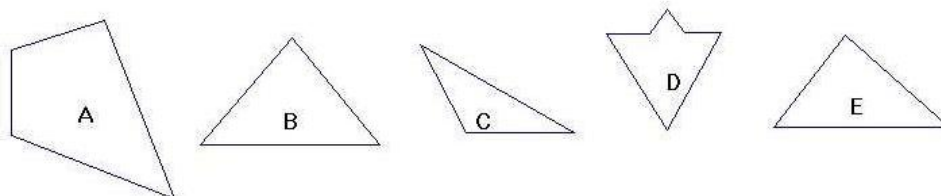
¹ Souza (2014)

² Kaleff (1994)

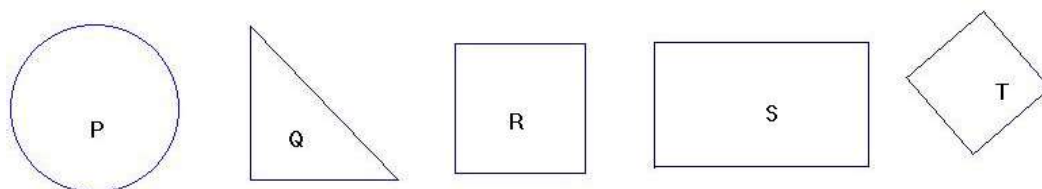
TESTE DE VAN HIELE³

Nome: _____

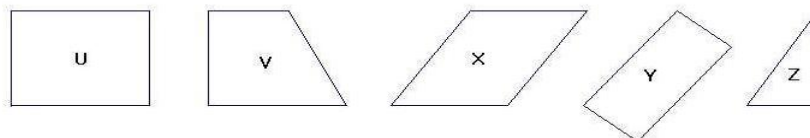
1 – Assinale o(s) triângulo(s):



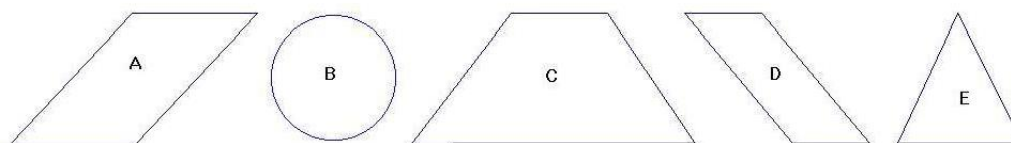
2 - Assinale o(s) quadrado(s):



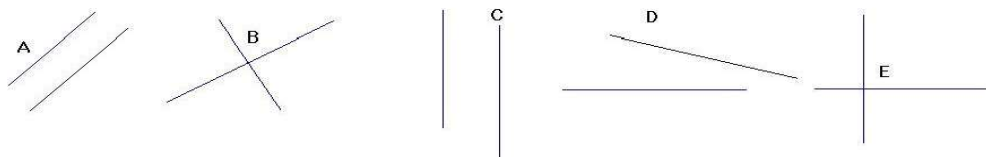
3 – Assinale o(s) retângulo(s):



4 – Assinale o(s) paralelogramo(s)



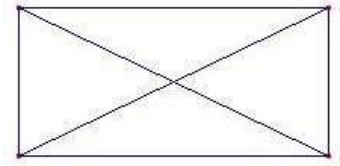
5 – Assinale o(s) par(es) de retas paralelas



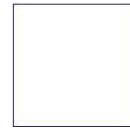
³ Gutierrez (1992)

6 – Com relação à figura podemos afirmar que:

- a) Têm 4 ângulos retos.
- b) Têm lados opostos paralelos.
- c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
- d) Têm os 4 lados iguais.
- e) Todas são verdadeiras.



7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:



1 –

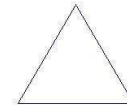
2 –

3 –

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais.

Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

- (a) Pelo menos um dos ângulos mede 60° .
- (b) Um dos ângulos mede 90° .
- (c) Dois ângulos têm a mesma medida.
- (d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
- (e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.



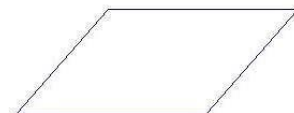
9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos.

1-

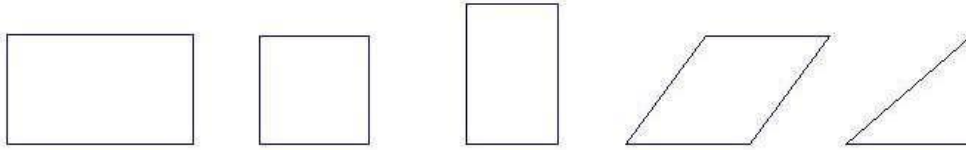
2-

3 -

10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe esse quadrilátero.



11- Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulo(s):



12 - Os quatro ângulos A , B , C e D de um quadrilátero $ABCD$ são todos iguais;

(a) Pode-se afirmar que $ABCD$ é um quadrado?

(b) Por quê?

(c) Que tipo de quadrilátero é $ABCD$?

13 - Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? Por que?

14 - Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo (II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

- (a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
- (b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
- (c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
- (d) I e II não podem ser ambas falsas.
- (e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15 - Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

- (a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
- (b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
- (c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
- (d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
- (e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

1.2 PRIMEIRA AULA - TESTE DE ROTAÇÃO MENTAL

O teste de rotação Mental⁴, consiste em 25 figuras em uma tabela, onde as figuras que estão na primeira coluna são chamadas de originais e dentre as outras 20 (A, B, C, D) estão duas figuras que são correspondentes a figura original, a figura original e as correspondentes estão respectivamente nas mesmas linhas, porém, sofreram uma rotação. Assim, os alunos terão que observar as características da figura original e procurar e analisar essas características nas figuras correspondentes, e assim marca as figuras corretas.

Objetivo Geral:

- Avaliar habilidades cognitivas relacionadas à percepção e manipulação mental de formas.

Objetivo Específico:

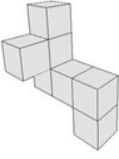
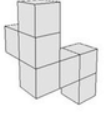
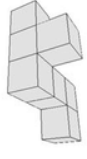

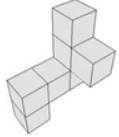
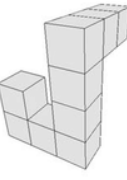
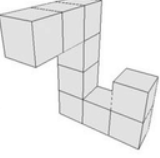
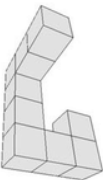
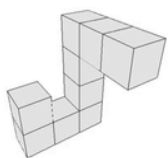
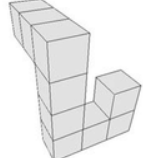
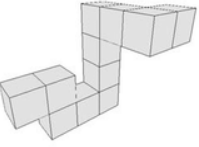
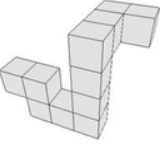
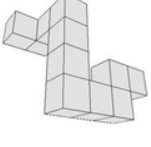
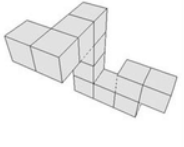
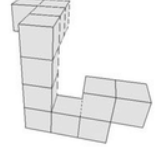
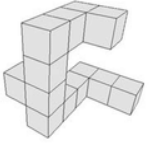
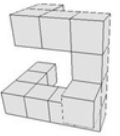
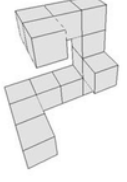
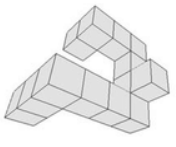
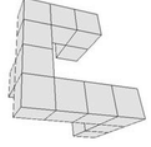
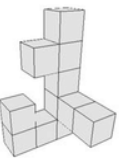
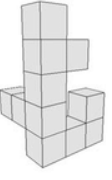
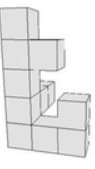
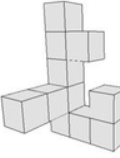
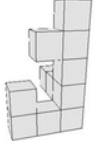
- Avaliar como os participantes percebem e interpretam a figura original em relação às representações nas colunas subsequentes, medindo a habilidade de discernir formas e detalhes visuais;
- Examinar a capacidade dos indivíduos de realizar rotações mentais das figuras, identificando variações em relação à figura original, o que demonstra a eficiência de manipulação espacial;
- Entender como os participantes processam informações visuais e utilizam estratégias cognitivas para resolver problemas relacionados à identificação de figuras em diferentes orientações.

⁴ Wahab (2017)

TESTE DE ROTAÇÃO MENTAL

Nome: _____

Em cada linha da tabela abaixo, observe a figura ORIGINAL, presente na primeira coluna. Em cada linha, marque DUAS figuras dentre as das colunas A, B, C e D que correspondem à figura ORIGINAL.

ORIGINAL	A	B	C	D
				
				
				
				
				

1.3 PRIMEIRA AULA - TESTE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL

O teste de visualização espacial é composto por várias questões que envolvem cubos e suas planificações, além de algumas trajetórias na superfície da Terra. Nele, os alunos têm que identificar a alternativa correta a partir das figuras apresentadas, que mostram, por exemplo, como as faces de um cubo podem se unir. Também são abordados temas como meridianos e a Linha do Equador, onde se pede que os alunos reconheçam diferentes trajetórias representadas.

As perguntas exigem que os estudantes usem a lógica e a visão espacial⁵ para conseguir identificar as respostas certas. O teste é dividido em partes, com imagens que ajudam a ilustrar as questões e as opções que precisam ser avaliadas.

Plano de Aula: Testes

Duração: 1h 40 min

Ano Escolar: 2º Ano do Ensino Médio

Temas: Geometria, Rotação Mental e Visualização Espacial

Objetivo Principal:

- Avaliar a capacidade dos alunos de reconhecer e identificar configurações tridimensionais a partir de planificações e projeções ortogonais de cubos

Objetivo Secundário:

- Incentivar o raciocínio lógico dos alunos à medida que eles devem analisar diferentes opções e cenários para chegar à resposta correta.

⁵ Wahab (2017)

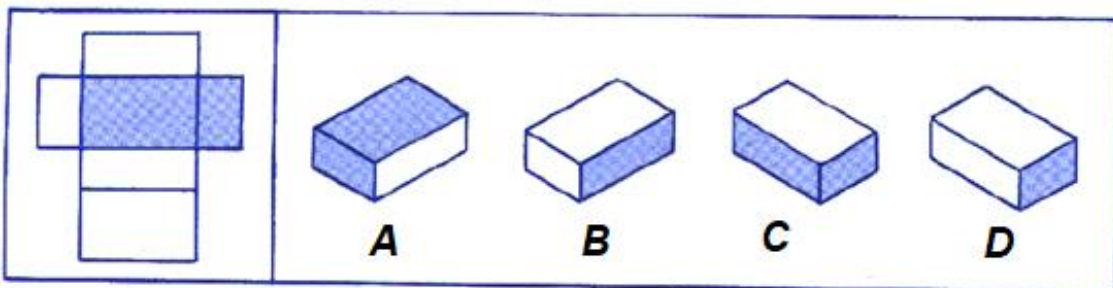
- Promover a habilidade de visualização e interpretação de figuras planificadas, ajudando os alunos a desenvolver uma percepção espacial mais apurada.
- Reforçar o conhecimento sobre geometria e suas aplicações práticas, instigando os alunos a conectar conceitos teóricos com tarefas visuais.

TESTE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL

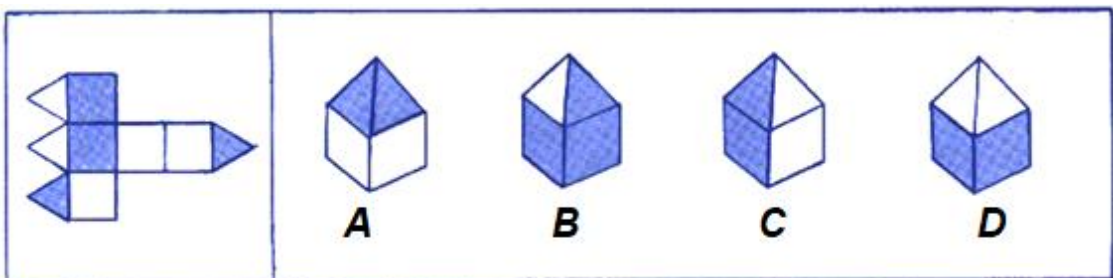
Nome: _____

1) Em cada item abaixo, temos um molde planificado, que ao ser dobrado, podem formar figuras espaciais. **Em cada item, você vai marcar DUAS figuras espaciais que podem ser feitas dobrando-se o molde fornecido.**

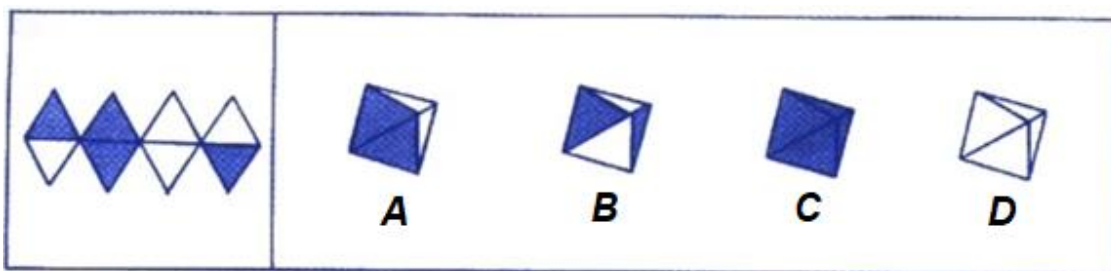
a)



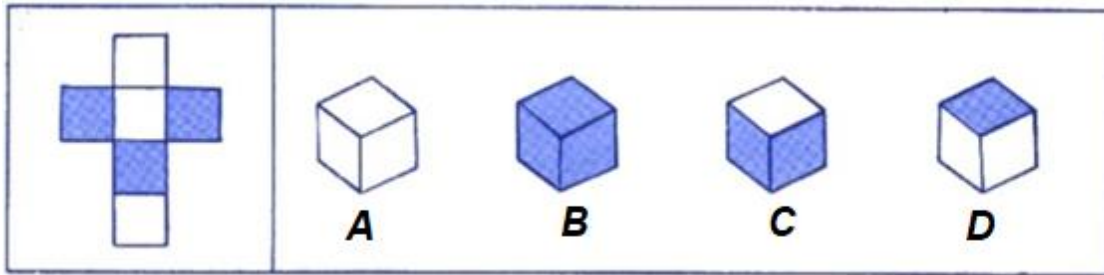
b)



c)



d)



2) Dentre as diversas planificações possíveis para o cubo, uma delas é a que se encontra apresentada na Figura 1.

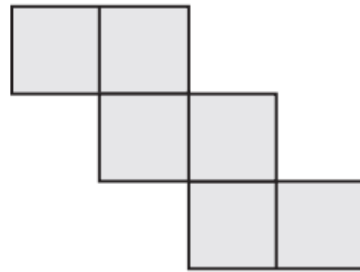


Figura 1

Em um cubo, foram pintados, em três de suas faces, quadrados de cor cinza escura, que ocupam um quarto dessas faces, tendo esses três quadrados um vértice em comum, conforme ilustrado na Figura 2.

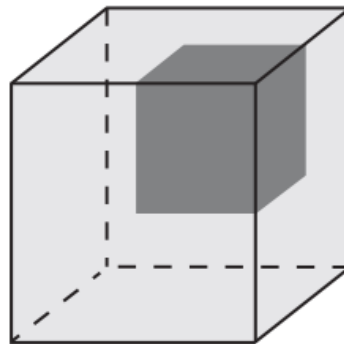
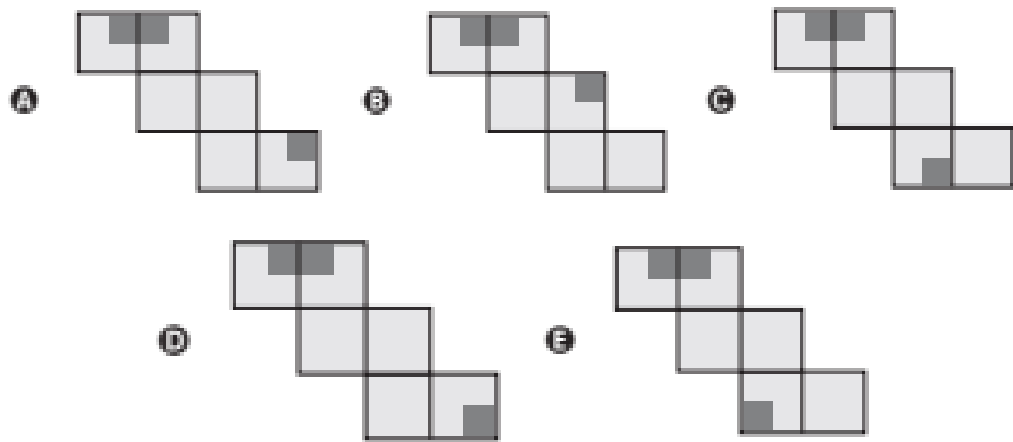


Figura 2

A planificação do cubo da Figura 2, conforme o tipo de planificação apresentada na Figura 1, é obtida APENAS na alternativa:



3) Na Figura 3 abaixo estão destacadas duas trajetórias sobre a superfície do globo terrestre, descritas ao se percorrer parte dos meridianos 1, 2 e da Linha do Equador, sendo que os meridianos 1 e 2 estão contidos em planos perpendiculares entre si. O plano α é paralelo ao que contém a Linha do Equador.

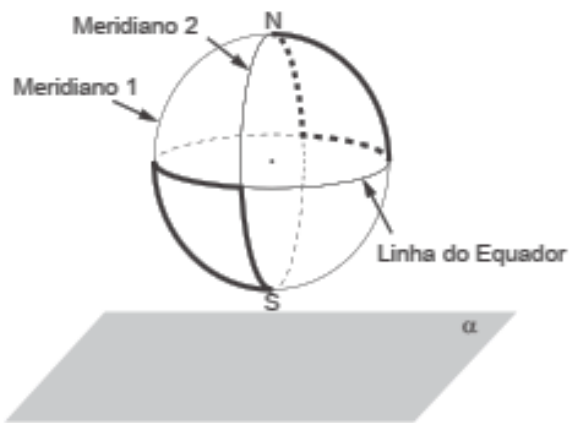
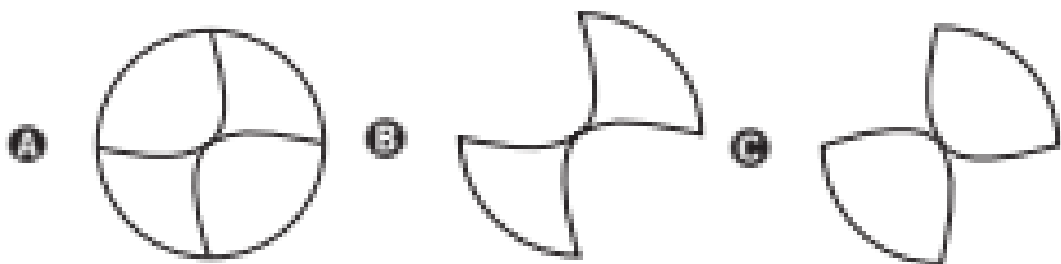
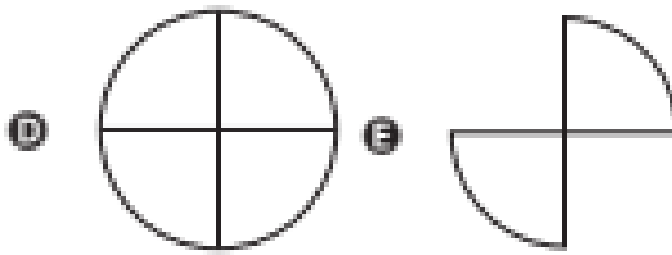


Figura 3

A vista superior da projeção ortogonal sobre o plano α dessas duas trajetórias é dada **APENAS** pela alternativa:





4) Na Figura 4 abaixo, apresentamos um cubo que possui desenhado nas suas 6 faces as letras C, E, K, L, P e T. Ao lado do cubo, temos o desenho de uma de suas planificações possíveis, com uma face marcada com a letra T e outra com um ponto de interrogação (?)

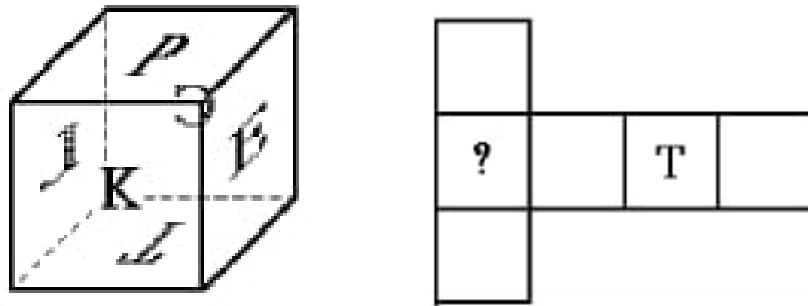


Figura 4

Dentre as 10 possibilidades existentes no quadro abaixo, identifique a **ÚNICA** opção que contém a letra e sua respectiva posição na face marcada com a interrogação no desenho da planificação do cubo.

C	E	K	L	P
U	E	K	L	P

5) Na Figura 5 abaixo, apresentamos um cubo que possui desenhado nas suas 6 faces as letras E, G, K, L, P e T. Ao lado do cubo, temos o desenho de uma de suas planificações possíveis, com uma face marcada com a letra T e outra com um ponto de interrogação (?)

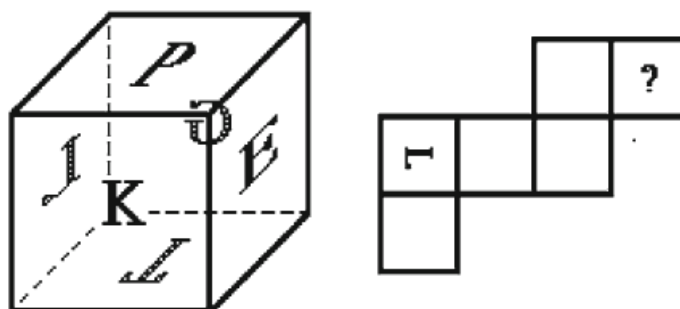


Figura 5

Dentre as 9 possibilidades existentes no quadro abaixo, identifique a **ÚNICA** opção que contém a letra e sua respectiva posição na face marcada com a interrogação no desenho da planificação do cubo.



2. SEGUNDA AULA: CONCEITOS PRIMITIVOS

Após a aplicação dos testes, nossa segunda atividade foi desenvolvida de maneira expositiva onde foram introduzidos alguns conceitos de Geometria Espacial. Como muitos dos alunos não obtiveram um bom desempenho nos testes iniciais, fez-se necessário elaborar uma atividade de conhecimento dos princípios fundamentais da geometria. E, também, na evolução dos níveis de conhecimentos geométricos de Van Hiele, os alunos devem ter domínio do nível básico⁶ para poderem avançar para os próximos. Então para essa aula utilizamos por base os

⁶ Kallef (1994)

vídeos⁷ do canal PICOBMEP no YouTube, os conceitos e atividades da apostila (PIC).

Plano de Aula: Principio

Duração: 1h 40min

Ano Escolar: 2º ano do Ensino Médio

Tema: Introdução a Geometria Espacial

Conteúdo: Ponto, Reta e Plano

Objetivos:

Compreender os conceitos de ponto, reta e plano a partir de um entendimento comum utilizado cotidianamente dentro e fora do ambiente escolar;

Reconhecer retas paralelas e perpendiculares;

EF06MA25: Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.

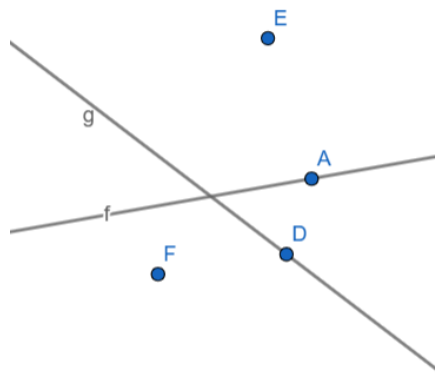
EF03MA15: Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.

Procedimentos:

⁷ <https://www.youtube.com/playlist?list=PLrVGp617x0hBHejK12bi6dgYjUa0gWduF>

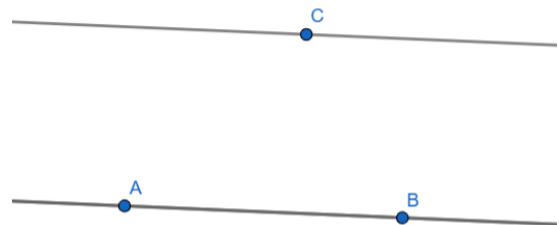
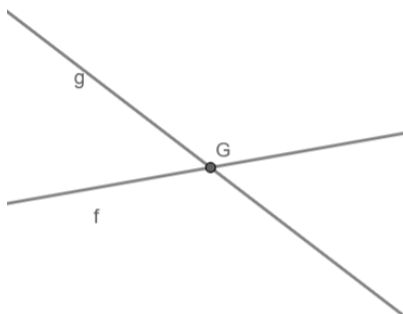
2.1 - Apresentação dos conceitos primitivos de Geometria.

Os conceitos de ponto, reta e plano não são definidos. Compreendemos estes conceitos a partir de um entendimento comum utilizado cotidianamente dentro e fora do ambiente escolar.



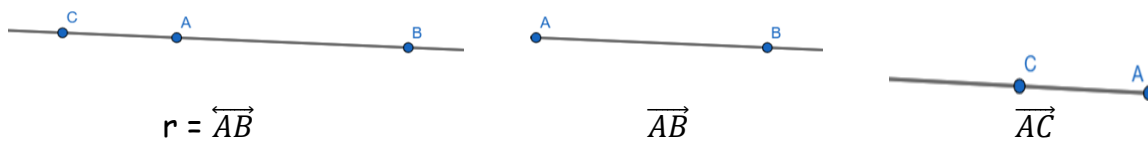
Na figura anterior vemos dois pontos A e B e duas retas r e s. Geralmente é utilizada esta notação: letras maiúsculas para pontos e letras minúsculas para retas. Os alunos devem perceber que

- Toda reta é um conjunto infinito de pontos.
- Se são dadas duas retas distintas no plano, ou elas possuem um único ponto em comum, ou elas não possuem ponto algum em comum. No primeiro caso elas são chamadas de concorrentes e no segundo caso elas são paralelas.



- Um ponto A situado sobre uma reta r divide a reta em dois pedaços chamados de semirretas de origem A.

- A semirreta de origem A e que contém o ponto B é representada por \overrightarrow{AB} e a semirreta de origem A e que contém o ponto C é representada por \overrightarrow{AC} .



- Dados dois pontos A e B sobre uma reta r, o segmento de extremidades A e B é a porção da reta formada pelos pontos compreendidos entre A e B.



- O ponto médio M do segmento AB é o ponto deste segmento que o divide em dois segmentos de mesmo comprimento, isto é, $\overline{AM} = \overline{MB}$.



Atividade 1

1) Sobre ponto, reta, semirreta e segmento de reta. Dê um exemplo de cada um com base na sua vida cotidiana.

2) Se as retas r e s não se encontram em nenhum ponto, o que você pode concluir sobre elas? Qual é o nome que se dá a esses tipos de pares de reta?

3) Desenhe um segmento de reta que liga os pontos A e B. Identifique os extremos A e B e explique o que significa "segmento de reta".

4) O que é uma semirreta? Se um ponto A é o ponto de origem de uma semirreta, como você a representaria graficamente? Dê um exemplo simples desenhando a semirreta a partir de A.

2.2. SEGUNDA ATIVIDADE ÂNGULOS E POLÍGONOS

Ainda no desenvolvimento dos níveis fez-se necessário aplicar uma atividade sobre ângulos e suas propriedades, pois muitos dos alunos não reconheciam as diferenças entre ângulo agudo, reto e obtuso. Além, tivemos que trazer a lembrança alguns tipos de polígonos, pois segundo a Teoria de Van Hiele, o professor tem elaborar atividades relacionadas ao objeto de estudo que requerem dos alunos respostas específicas e objetivas⁸ e dentro do modelo de Van Hiele consiste em descrever fases de aprendizagem, sugerindo estratégias didáticas aos professores de como organizar o ensino da Geometria, visando auxiliar os alunos a progredirem do nível de pensamento geométrico em que estão ao nível subsequente⁹. Porém, avançamos dentro do nível, saindo do nível 1 para o nível 2, de conhecimento de Van Hiele expondo algumas propriedades¹⁰ desses conceitos. Então para essa aula utilizamos as aulas 5, 14, 29, 30 e 33 de geometria como base os vídeos¹¹ do canal PICOBMEP no YouTube, os conceitos e atividades da apostila (PIC). Esses vídeos foram exibidos conforme as atividades.

⁸ Gutierrez (1992)

⁹ Gutierrez (1992)

¹⁰ Souza (2014)

¹¹ <https://www.youtube.com/playlist?list=PLrVGp617x0hBHejKI2bi6dqYjUaOqWduF>

Plano de Aula:

Duração: 1h 40min

Ano Escolar: 2º ano do Ensino Médio

Tema: Introdução a Geometria Espacial

Conteúdo: Ângulos e Polígonos

Objetivos:

Compreender os conceitos de ponto, reta e plano a partir de um entendimento comum utilizado cotidianamente dentro e fora do ambiente escolar;

Reconhecer retas paralelas e perpendiculares;

EF06MA25: Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.

EF03MA15: Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.

Procedimentos:

- Exibição do vídeo:

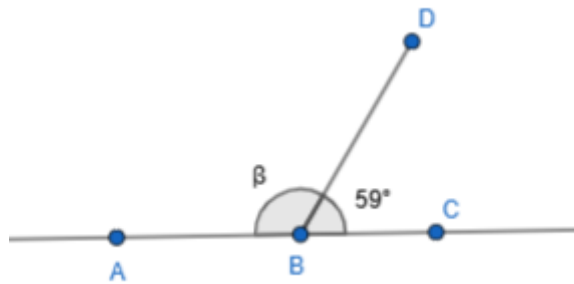
https://www.youtube.com/watch?v=Eem4zeWMnjU&list=PLrVGp617x0hD_apxAsm-SO9kI8h1zu8AM&index=5

Atividade 1

- 1) Com o auxílio de um transferidor, sobre a figura a seguir desenhe semirretas \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OD} e \overrightarrow{OE} tais que $\widehat{AOB} = 30^\circ$, $\widehat{AOC} = 60^\circ$, $\widehat{AOD} = 90^\circ$ e $\widehat{AOE} = 135^\circ$.



- 2) O que é um ângulo reto? O que são retas perpendiculares? O que significa dizer que dois ângulos são complementares?
- 3) O que é um ângulo raso? O que são ângulos suplementares? Na figura a seguir, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a medida do ângulo β ?



Atividade 2 Triângulos¹²

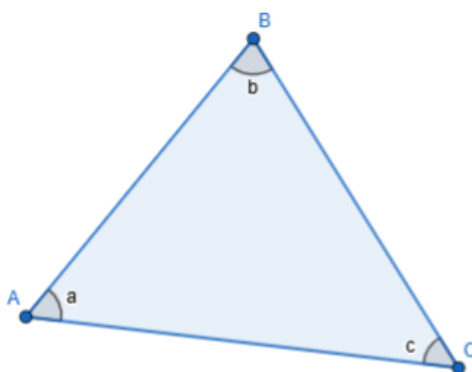
Nesta atividade foi exibido o vídeo 14 de geometria do canal PICOBMEP. Logo após a exibição foi entregue uma folha com as seguintes atividades.

- Exibição do vídeo:

<https://www.youtube.com/watch?v=Mg0DvpDQ4gQ&list=PLrVGp617x0hBHejKI2bi6dgYjUa0gWduF&index=14>

Os segmentos de reta que unem três pontos não colineares A, B e C formam um triângulo, que será indicado como o triângulo ABC.

¹² Encontros de Geometria Parte 1



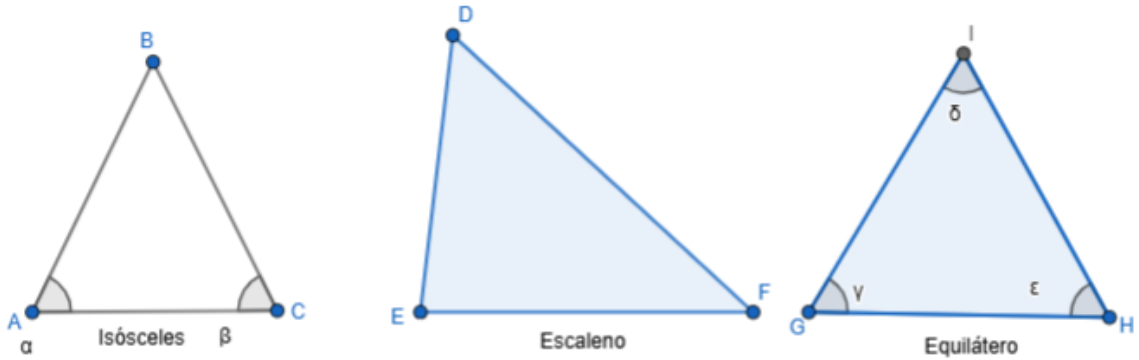
Neste caso, os pontos A , B e C são os vértices e os segmentos AB , BC e CA são os lados do triângulo. Os ângulos $a = \widehat{CAB}$, $b = \widehat{ABC}$ e $c = \widehat{BCA}$ são os ângulos internos do triângulo.

Podemos classificar os triângulos de duas maneiras básicas: em relação aos comprimentos dos seus lados ou em relação as medidas dos seus ângulos internos. No que segue vamos apresentar simultaneamente estas duas classificações:

- Um triângulo é equilátero se os seus três lados tiverem o mesmo comprimento. De modo equivalente, um triângulo é equilátero se os seus três ângulos internos tiverem a mesma medida.
- Um triângulo é isósceles se ele possuir pelo menos dois lados de mesmo comprimento. De modo equivalente, um triângulo é isósceles quando dois dos seus ângulos internos tiverem a mesma medida.
- Um triângulo é escaleno quando os seus três lados tiverem comprimentos diferentes. De modo equivalente, um triângulo é escaleno quando todos os seus ângulos internos tiverem medidas diferentes.

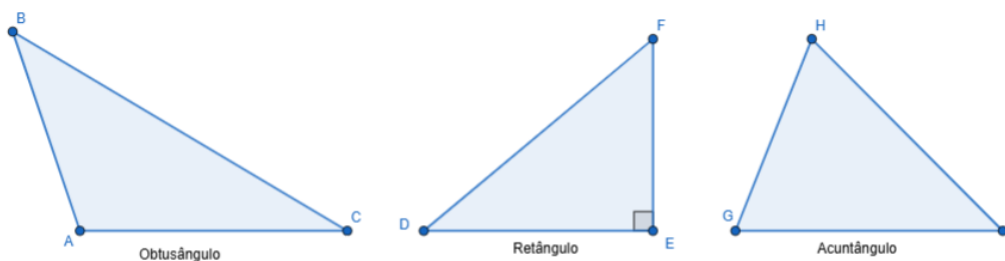
Na figura a seguir vemos, em ordem, um triângulo equilátero, um triângulo isósceles e um triângulo escaleno. Observe que no triângulo equilátero os três ângulos

internos possuem a mesma medida e que no triângulo isósceles existem dois ângulos internos com mesma medida.



- Um triângulo é acutângulo quando todos os seus ângulos internos forem agudos.
- Um triângulo é retângulo quando possuir um ângulo interno reto, isto é, um ângulo interno de medida igual a 90° .
- Um triângulo é obtusângulo quando possuir um ângulo interno obtuso.

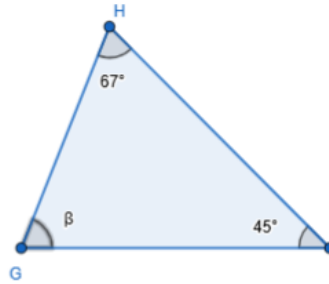
Na figura a seguir vemos, em ordem, um triângulo obtusângulo, um triângulo retângulo e um triângulo acutângulo.



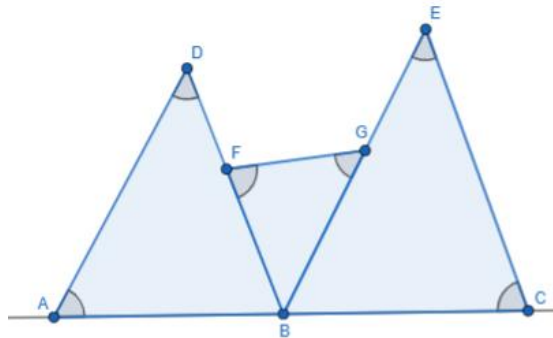
Teorema: A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Atividade 2

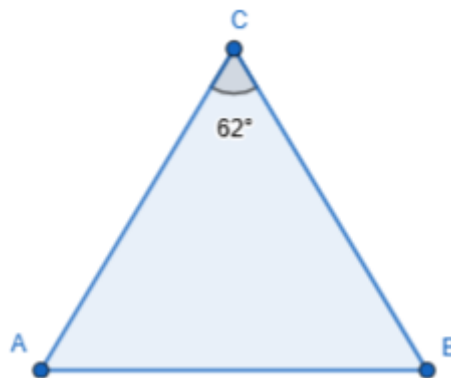
1) Determine a medida do ângulo β do triângulo ABC da figura a seguir.



2) (OBMEP 2014 - N2Q3 - 1ª fase). Na figura, os pontos A , B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



3) Na figura a seguir vemos um triângulo isósceles de base BC . Se $\widehat{CAB} = 80^\circ$, calcule a medida dos ângulos da base deste triângulo isósceles.



Quadriláteros¹³

¹³ Encontros de Geometria - Parte 1

Nesta atividade, iremos explorar os quadriláteros e seus componentes, como lados, ângulos internos e externos, e diagonais. Também definiremos e examinaremos algumas propriedades fundamentais de quadriláteros específicos, incluindo quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos. Notamos que o vídeo 29 da seção de Geometria do canal PICOBMEP no YouTube oferece uma explicação detalhada sobre as definições básicas dos quadriláteros em geral. O vídeo 30 foca nos paralelogramos, o vídeo 33 trata dos trapézios, e o vídeo 36 abrange retângulos, losangos e quadrados. Como estamos auxiliando os alunos a desenvolverem o conhecimento dentro do modelo de Van Hiele colocaremos esta aula no Nível 2 e Nível 3. Após a exibição dos vídeos foi entregue uma folha de atividade.

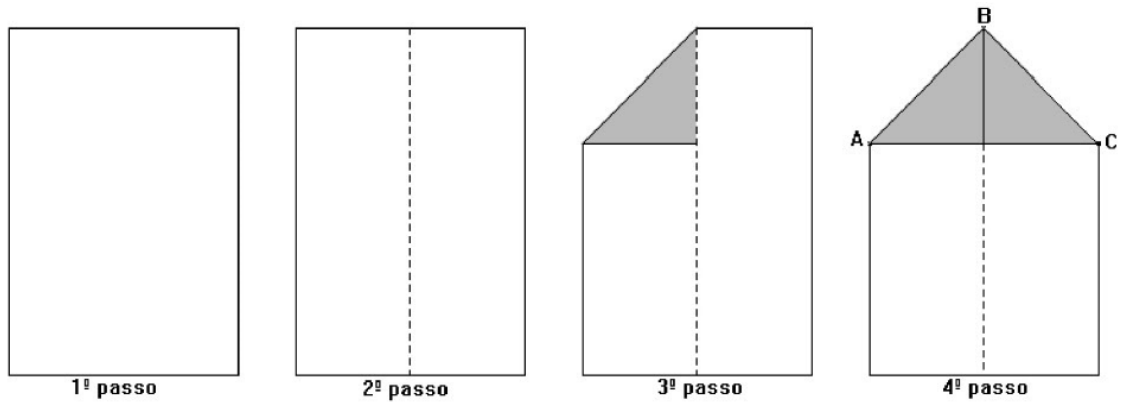
Atividade 3

1) Observe a triângulo ABC:



- A) Acutângulo e escaleno.
- B) Acutângulo e equilátero.
- C) Retângulo e escaleno.
- D) Retângulo e isósceles.

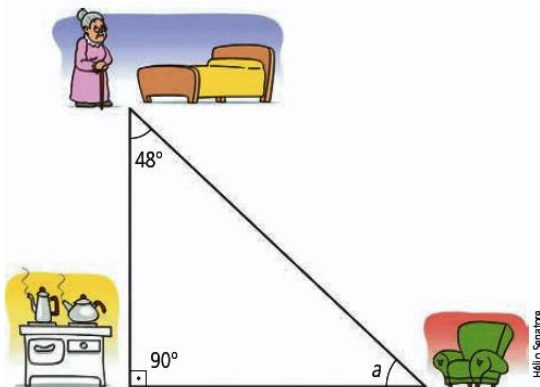
2) Para fazer um aviãozinho, Felipe tomou uma folha retangular de papel e observou os passos indicados nas figuras a seguir:



O triângulo ABC é:

- A) Retângulo e escaleno. B) Retângulo e isósceles. C) Acutângulo e escaleno.
 D) Acutângulo e isósceles

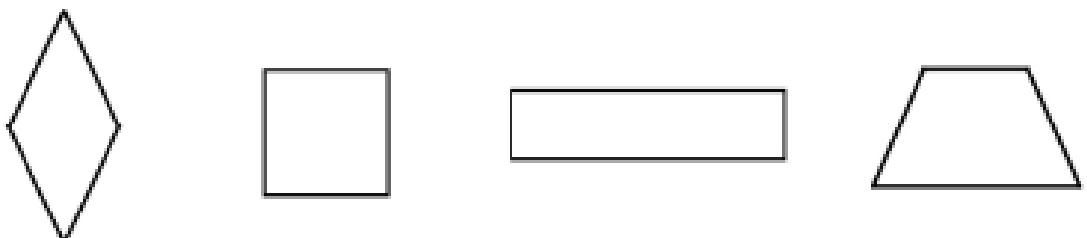
3) O trajeto da vovó pela casa tem a forma do triângulo cujos valores dos ângulos internos estão indicados na figura.



Com essas informações, determine o valor do ângulo a:

- A) 42° B) 48° C) 52° D) 90°

4) Alguns quadriláteros estão representados nas figuras abaixo:



Qual dos quadriláteros possui apenas um par de lados paralelos?

- A) Losango. B) Quadrado. C) Retângulo. D) Trapézio.

5) Na figura abaixo tem-se representado um canteiro de flores que foi construído com a forma de quadrilátero de lados iguais e dois a dois paralelos.



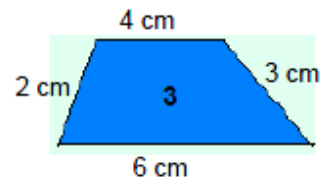
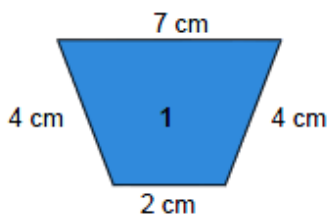
Sua forma é de um:

- A) trapézio. B) retângulo.
C) losango. D) Quadrado

6) Sou um quadrilátero com dois lados que são paralelos e com outros dois lados não paralelos que têm o mesmo comprimento. Quem sou eu? Sou um...

- A) Quadrado. B) trapézio isósceles. C) trapézio retângulo.
D) paralelogramo.

7) Observe os trapézios abaixo:



Marque a sentença correta de acordo com a classificação de cada trapézio:

- A) (1) Trapézio escaleno - (2) Trapézio isósceles - (3) Trapézio retângulo.
B) (2) Trapézio escaleno - (1) Trapézio isósceles - (3) Trapézio retângulo.
C) (3) Trapézio escaleno - (2) Trapézio isósceles - (1) Trapézio retângulo.
D) (3) Trapézio escaleno - (1) Trapézio isósceles - (2) Trapézio retângulo.

Avaliação

A avaliação da atividade pode ser feita através da participação dos alunos durante a aula.

3. TERCEIRA AULA: OFICINA COM GEOGEBRA

Esta atividade foi elaborada com intuito de proporcionar aos alunos o primeiro contato com o aplicativo *GeoGebra*, além de desenvolver os conceitos introdutórios da geometria. Durante a atividade, os alunos familiarizaram-se com as funcionalidades do aplicativo em dispositivos móveis. Foi entregue uma folha com as oficinas, na oficina um (1), chamada de "Oficina de Desenho", contendo as atividades nas quais os alunos seguiram as orientações para a construção de pontos, retas e círculos no aplicativo *GeoGebra*.

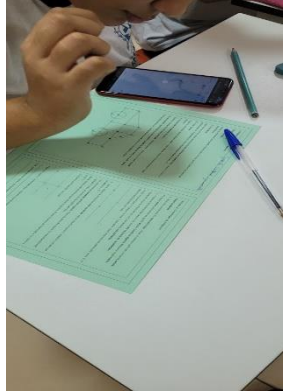
Após se familiarizar com essas ferramentas, na segunda atividade, os alunos foram convidados a construir um carro utilizando os recursos aprendidos no aplicativo.

Em seguida, realizaram as atividades da oficina 2, chamada de "Construindo Polígonos" com o objetivo de criar retas paralelas, a interseção de dois objetos e retas perpendiculares, explorando novas ferramentas disponíveis. Além das construções feitas no aplicativo, a atividade incluiu duas perguntas abertas. Após a realização da figura, os alunos deveriam observar as retas e refletir sobre o que acontecia ao arrastar uma delas.

Nas Atividades 4 e 5, os alunos aprenderam a construir pontos médios, polígonos e polígonos regulares. Na atividade 4, além de utilizar ferramentas como a mediatriz, os alunos foram levados a analisar o ângulo formado e a reta mediatriz após a observação.

Na atividade 5, após construir polígonos com a ferramenta de polígono e, em seguida, com a ferramenta de polígonos regulares, os alunos foram convidados a argumentar sobre as diferenças entre as figuras criadas com cada ferramenta. A terceira pergunta tinha como objetivo verificar se os alunos conseguiam

identificar o centro dos polígonos regulares e explicar seu raciocínio. Por último, os alunos deveriam argumentar sobre os ângulos e lados dos polígonos regulares.



Atividade 1 – Funções básicas através de desenho

Tempo estimado: 1 tempos de 50 minutos

Objetivos *Geral*: Introduzir os alunos ao uso das ferramentas disponíveis no *GeoGebra*

Objetivos *Específicos*

- Desenvolver a habilidade dos alunos em criar pontos de forma precisa no ambiente de visualização do *GeoGebra*.
- Ensinar os alunos a traçar retas definidas por dois pontos, compreendendo a relação entre os pontos e as retas formadas.
- Capacitar os alunos a desenhar círculos utilizando um ponto central e um segundo ponto para definir o raio.
- Incentivar a aplicação dos conhecimentos adquiridos na construção de um objeto (carro), estimulando a criatividade e o uso de ferramentas geométricas.

Material Utilizado:

- Folha com as orientações das atividades propostas.
- Celulares e Computadores.
- Projetor

Método:

O professor fará a apresentação do aplicativo *GeoGebra* através da projeção. Após a apresentação do aplicativo entregue a folha de atividade para os alunos, e com a projeção explique cada uma das ferramentas que serão utilizadas. Os alunos trabalharão individualmente para desenhar e construir as funções básicas.

Desenvolvimento:

Os alunos desenharão as formas no *Geogebra*.

Avaliação

Através da folha de exercícios os alunos serão avaliados sobre a criação das formas e conceitos que estão visualizando.

- Ensinar os alunos a traçar retas paralelas a partir de um ponto externo, explorando a noção de paralelismo.
- Desenvolver a habilidade de encontrar e marcar pontos de interseção entre retas, promovendo a compreensão de suas dinâmicas.
- Capacitar os alunos a medir ângulos formados por segmentos e retas, promovendo o entendimento de relações angulares.

- Ensinar a construção de diferentes polígonos (triângulo, quadrilátero, pentágono e hexágono) e a identificação das características de cada um.
- Diferenciar entre polígonos regulares e irregulares, analisando suas propriedades, como a igualdade de lados e ângulos.

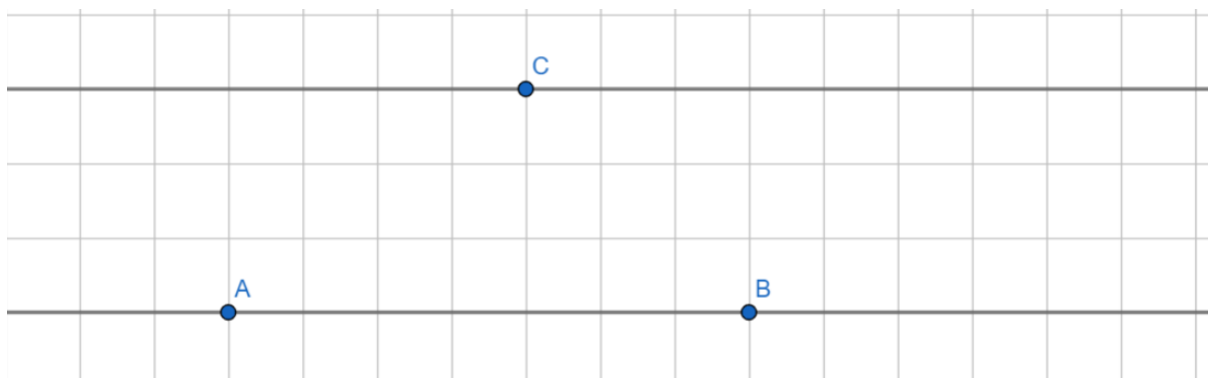
Atividade 1 - Funções Básicas

1 - Criar pontos: Clique na ferramenta **novo ponto** e depois clique em dois lugares distintos da Janela de Visualização.

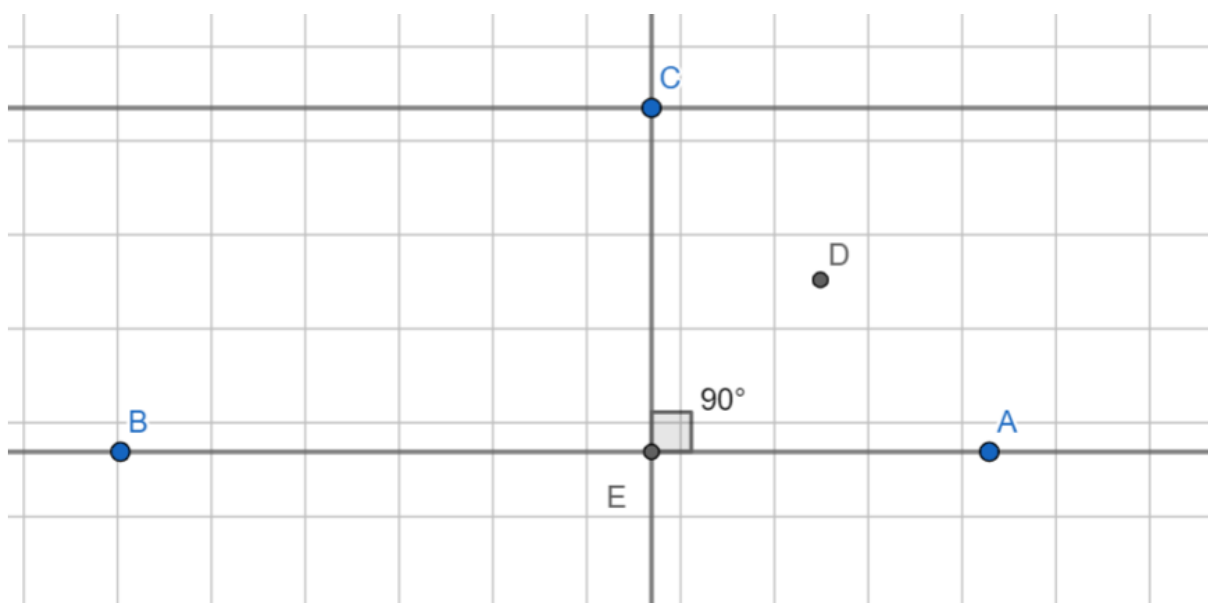
2 - Criar Retas: Após criar os pontos, clique na ferramenta **reta definida por dois pontos**. Clique no ponto A e sobre o ponto B. O aplicativo cria, uma reta que passa pelos pontos A e B.

3 - Criar círculo: Clique na ferramenta **Círculo dados centro e um ponto**, logo após clique no ponto e depois em lugar distintos.

4 - Construção de desenho do carro: Abra uma nova janela. No **menu principal**, clique em janela e após isto, em **nova Janela**. No **menu exibir**, desmarque as opções **eixos** e **janela de álgebra**. Marque a opção **malha**. Com as ferramentas que você aprendeu faça a construção do desenho abaixo.



3 - Agora, clique na ferramenta **retas paralelas**, depois clique no ponto C e depois, na reta que passa por A e B. Com a ferramenta **interseção de Dois objetos**, clique na reta AB e depois na reta perpendicular, o aplicativo criará um ponto de interseção das retas. Agora, clique na ferramenta **ângulo** clique no ponto A de pois no ponto de interseção e por último o ponto C. O desenho será parecido com este:



O que você observa? Arraste as retas e observe o que acontece.

O que podemos escrever sobre a reta que passa por AB e pela perpendicular?

Atividade 3 - Ponto Médio e Polígonos

Abra uma nova janela.

1 - Clique na ferramenta **segmento**, e depois na Janela de visualização em dois pontos, agora clique na ferramenta **Ponto Médio ou Centro**, o aplicativo criou um ponto entre os dois. O que podemos escrever sobre o ponto médio?

2 - Clique na ferramenta **Mediatriz**, clique no ponto A e depois no B, o que aconteceu?

3 - Crie um ponto nesta reta Mediatriz, depois selecione a **ferramenta ângulo**, o que podemos escrever do ângulo formado pelo segmento e a reta?

Atividade 4 - Polígonos e Polígonos Regulares

1 - Com a **ferramenta polígono** faça a construção dos polígonos: triângulo, quadrilátero, pentágono e hexágono.

2 - Agora, com **ferramenta polígonos regulares** faça a construção dos polígonos anteriores. Qual a diferença entre os polígonos do exercício 1 e 2?

3 - Você consegue encontrar o **centro dos polígonos regulares**? Explique.

4 - O que podemos escrever sobre os **ângulos dos polígonos regulares**? E os lados?

4. QUARTA AULA: OFICINA DE DESENHO

Nesta quarta aula faremos 4 atividades relacionadas à Geometria Espacial, a primeira atividade chamada de "Imagine Pronto", tem como objetivo estimular os alunos a visualizar e representar os sólidos prontos a partir da planificação, fazendo que eles adquiram uma habilidade de Capacidade de Transformação Mental¹⁴.

Nossa segunda atividade é "Introdução a alguns dos objetos da Geometria Espacial, através de Oficina com Materiais Concretos". Deve-se apresentar os Principais Sólidos que serão foco do estudo e ilustrar que os mesmos são compostos por polígonos da geometria plana. O(a) professor(a) pode levar alguns sólidos prontos e realizar algumas construções concretas de sólidos que ilustrem essa relação do 2D com o 3D, como cubos, pirâmides e prismas triangulares. Pode também perguntar aos alunos se eles sabem o nome dos sólidos construídos e quais características distinguem um dos outros.

Na terceira atividade, utilizando os sólidos que foram apresentados/construídos na atividade anterior, realizar uma oficina de desenho, para representar esses sólidos numa folha de papel (similar à proposta do Ateliê Geométrico do Livro Aberto¹⁵). Dividir a turma em grupos de modo que cada um ficará no entorno de um sólido e irá fazer o seu desenho em perspectiva. Iniciar uma discussão sobre como representar as arestas que ficam ocultas diante de uma determinada perspectiva.

¹⁴ Wahab (2017)

¹⁵ Bortolossi e Crissaff (2018)

Nesta aula, a duração foi de cinco tempos de 50 minutos, durante os quais foram trabalhados os conceitos de formas geométricas espaciais. O objetivo foi conceituar e reconhecer os diferentes tipos de sólidos, incluindo poliedros e suas características. Também é apresentada a relação de Euler para poliedros convexos.

Durante as atividades, a turma foi dividida em grupos, e cada grupo recebeu folhas contendo planificações de sólidos, com o objetivo de conhecer e desenhar as formas tridimensionais correspondentes no papel.

Atividade 1 - Oficina Imagine Pronto

A dinâmica da oficina 2 ocorreu da seguinte maneira, foram distribuídas outras folhas com a planificação de sólidos e uma folha com uma atividade para completar com a quantidade de face, vértices e arestas. Os alunos teriam que construir o sólido que representava cada planificação. Esta atividade tinha como objetivo estimular o pensamento sobre as formas a partir das suas planificações.

Tempo estimado: 1 tempos de 50 minutos

Objetivos Geral: Visualizar e representar os sólidos prontos a partir da planificação.

Objetivos Específicos

- Desenhar os Sólidos Geométricos a partir das suas planificações.
- Nomear as figuras que são apresentadas nas planificações e reconhecer os Sólidos Geométricos.
- Reconhecer que os Sólidos são formados por figuras planas.

Material Utilizado:

- Folha com as planificações dos sólidos.

- Folha com de exercícios.

Método:

Os alunos trabalharão individualmente para desenhar e construir os sólidos e responder as atividades propostas.

Desenvolvimento:

Os alunos desenharão os sólidos na folha de exercícios e nomearão as formas planas que os sólidos apresentam.

Avaliação

Através da folha de exercícios os alunos serão avaliados sobre os nomes das formas que estão visualizando.

Cada imagem abaixo foi construída a partir de figuras espaciais, essa atividade você deverá desenhar o sólido de cada figura e se conhecer o sólido nomeá-lo corretamente.

Figura 1

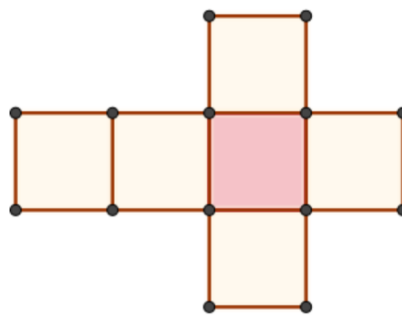


Figura 2

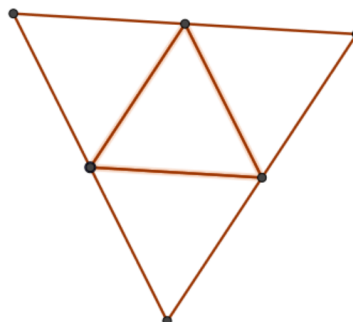


Figura 3

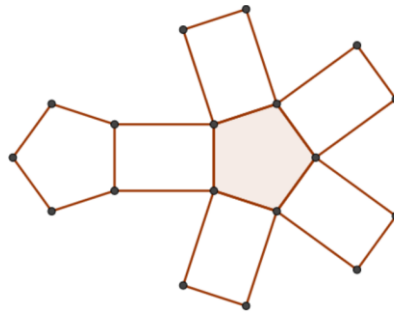
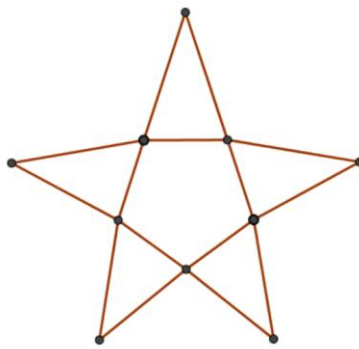
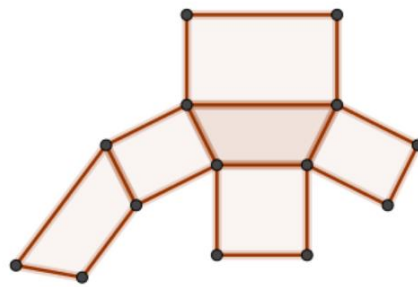
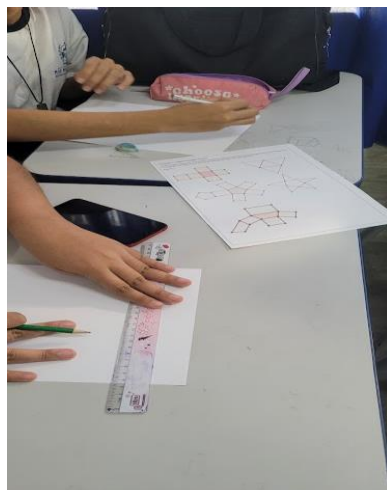


Figura 4



I) Figura 5





Atividade 2 - Oficina com Materiais Concretos

Foram entregues para os grupos algumas planificações de sólidos platônicos e outros sólidos, como prismas, pirâmides e planificação de cilindro e cone, para que eles as recortassem e colassem, com o objetivo de visualizar as faces, planificações e as formas de cada sólido.

Tempo estimado: 2 tempos de 50 minutos

Objetivos Geral: Construir e reconhecer os Sólidos Geométricos e as figuras planas a partir das planificações.

Objetivos Específicos

- *Construir Sólidos Geométricos.*
- *Conhecer as planificações dos Sólidos Geométricos*
- *Reconhecer que os Sólidos são formados por figuras planas.*

Material Utilizado:

- *Cartolina.*
- *Cola e lápis*
- *Régua e Tesoura.*
- *Folha com de exercícios.*

Método:

Os alunos trabalharão em grupo de 4 a 5 alunos para desenhar e construir os sólidos.

Desenvolvimento:

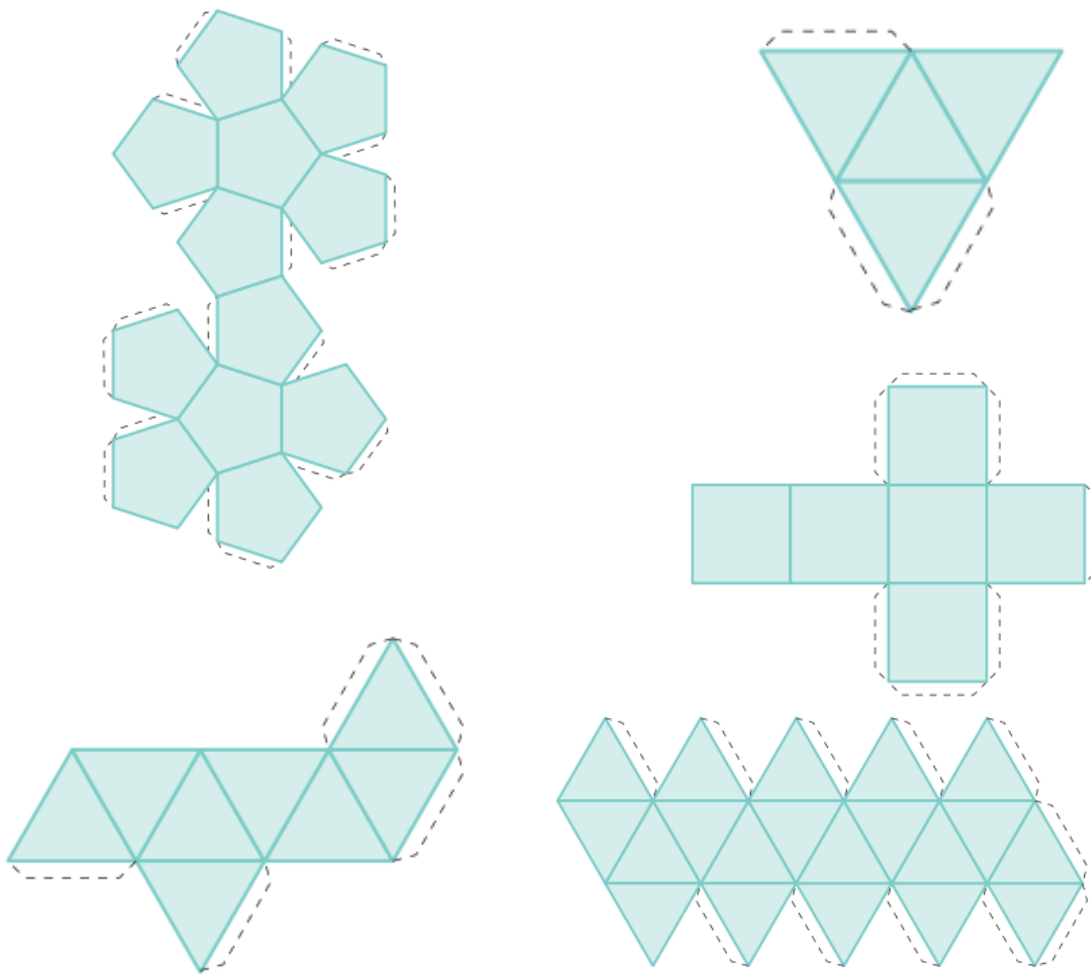
Os alunos desenharam as planificações dos sólidos na cartolina, depois recortaram as planificações e montaram os sólidos.

Avaliação

Os alunos apresentarão os sólidos montados e folha de exercícios resolvida.

Atividade 2

Desenhe em cartolina cada uma das figuras seguintes de modo que cada polígono tenha 8 cm de aresta.



Recorte-as e construa cada um dos poliedros regulares, colando as faces adjacentes sobre a região tracejada.



Atividade 3 - Oficina com Materiais Concretos

Tempo estimado: 2 tempos de 50 minutos

Objetivos Geral: Visualizar e desenhar os Sólidos Geométricos de diferentes perspectivas.

Objetivos Específicos

- Desenhar os Sólidos Geométricos a partir de várias perspectivas.

Material Utilizado:

- Folha de Papel Ofício, lápis e borracha.

Método:

Os alunos trabalharão em grupo de 4 a 5 alunos para desenhar os sólidos depois farão comparações com o seu desenho.

Desenvolvimento:

Após a atividade de construção dos sólidos geométricos os alunos se colocarão no entorno do sólido e farão desenhos de diferentes perspectivas do sólido nas folhas de ofícios e depois farão comparações e descreverão se veem algo de diferente do seu desenho com o desenho do colega.

Avaliação

Os alunos apresentarão o desenho do sólido na folha e descreverão o que eles veem de diferente no desenho do colega em relação ao que ele desenhou.

5. QUINTA AULA: CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS PALITOS E JUJUBA.

Esta atividade consiste em construir os sólidos com jujubas e palitos, para que pudessem calcular a quantidade de faces, vértices e arestas de cada forma geométrica, relacionando as informações em uma tabela. A turma foi dividida em grupo de 4 a 5 pessoas. Eles também preencheram folhas de atividade para registrar a quantidade de faces, arestas e vértices, desenvolvendo assim o teorema de Euler.

Objetivos:

- Construir Sólidos Geométricos.
- Conhecer os Vértices, arestas e faces de Sólidos Geométricos.
- Diferenciar Prismas e Sólidos regulares.

Material Utilizado:

- Palito e jujuba.
- Folha com de exercícios.

Método:

Os alunos trabalharão em grupo de 4 a 5 construir os Prismas.

Desenvolvimento:

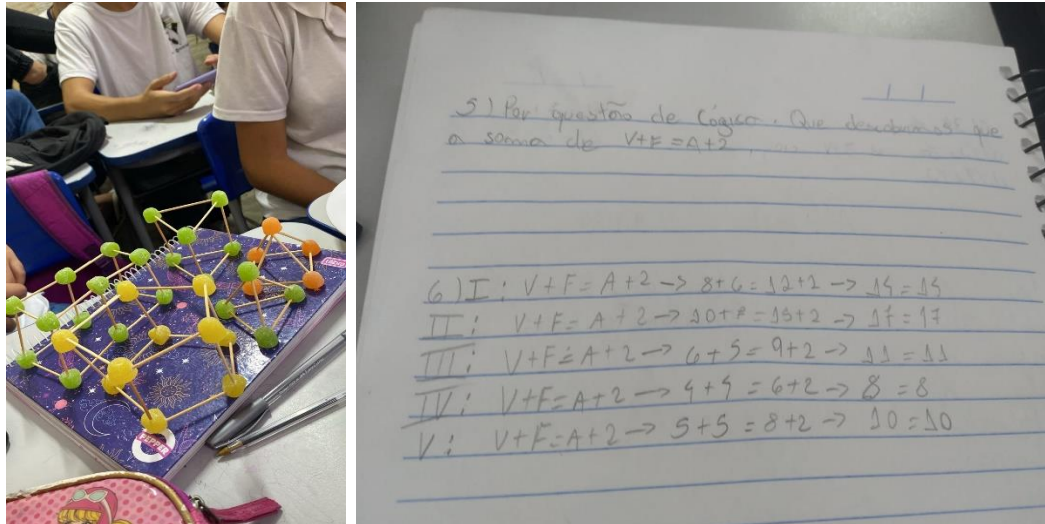
Os alunos construirão os prismas, depois responderão a folha de exercícios.

Avaliação:

Os alunos apresentarão os sólidos montados e folha de exercícios resolvida.

Atividade 1

Com os sólidos da atividade anterior construir com palito e jujuba.



6. SEXTA AULA: OFICINA NO GEOGEBRA 3D - EXPLORADO CUBO

Nesta atividade, iniciamos nossa aula de geometria espacial explorando a fascinante relação entre as formas tridimensionais e suas representações 2D usando o GeoGebra. Para tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo, utilizamos esta poderosa ferramenta digital que nos permite visualizar e manipular sólidos geométricos em tempo real.

A aula tem como objetivo principal proporcionar uma experiência prática na construção e exploração de um cubo utilizando o GeoGebra 3D. Nas aulas anteriores, os alunos aprenderam a nomear os vértices do cubo e a identificar suas propriedades geométricas, como arestas e faces. A atividade inclui a pintura de arestas e faces, o que ajuda a visualizar as relações entre os elementos do cubo.

Além disso, os alunos foram introduzidos à construção de retas perpendiculares e paralelas, aprofundando sua compreensão sobre conceitos geométricos como retas reversas e ortogonais. A marcação de interseções entre diferentes elementos também será abordada, promovendo habilidades de análise espacial. Por fim, a aula visa desenvolver a familiaridade dos alunos com as ferramentas do *GeoGebra*, capacitando-os a manipular e visualizar objetos tridimensionais de forma eficaz.

Atividade 1 - Ambientação com GeoGebra 3D

Tempo estimado: 2 tempos de aula de 50 minutos

Objetivos Geral: Conhecer e manipular o aplicativo *GeoGebra 3D*

Objetivos Específicos

- Construir figuras na janela de visualização 3D.

Material Utilizado:

- Aplicativo, celular ou Chromebook e folha de exercícios.

Método:

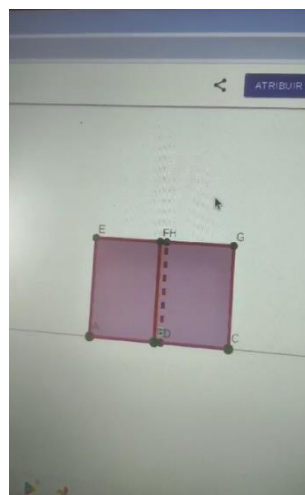
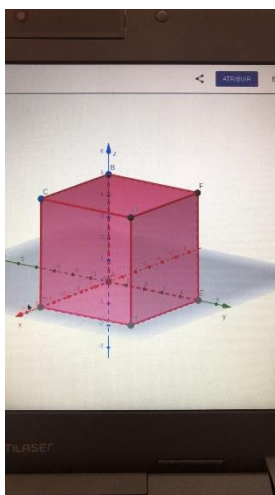
No primeiro momento os alunos farão atividades livres para familiarizar com a interface do *GeoGebra 3D*. Depois, trabalharão no aplicativo construindo figuras Espaciais.

Desenvolvimento:

No Laboratório, utilizarão os Chrome Book para acessar o site do software *GeoGebra* no primeiro momento receberam explicação da interface do *GeoGebra 3D* e logo após foram exercícios de construção de figuras planas.

Avaliação

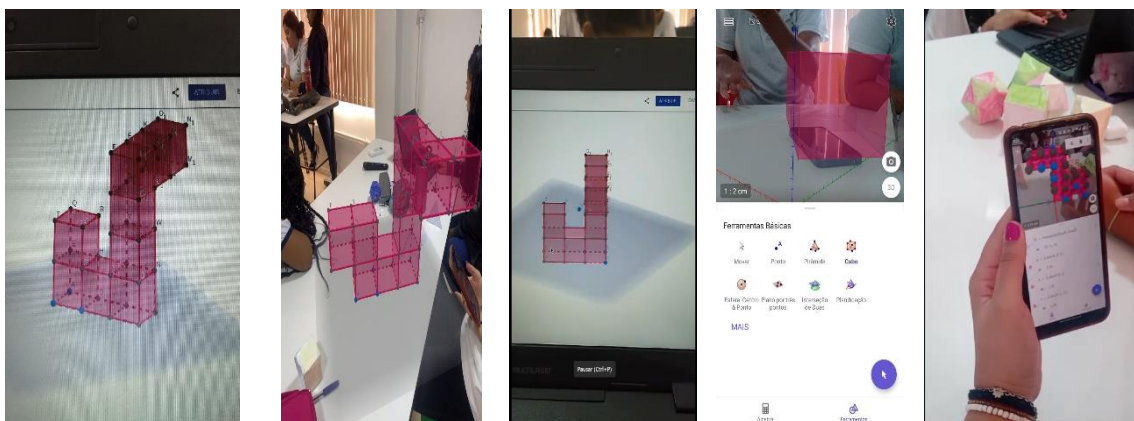
Será avaliado os trabalhos feitos a partir da folha de atividades.



Atividade 2 - Ambientação no Geogebra AR

Com o desenvolvimento de algumas ferramentas e o conhecimento adquirido sobre o GeoGebra, apresentamos à turma a ferramenta de Realidade Aumentada (AR). Esta tecnologia é utilizada exclusivamente em dispositivos móveis e permite que sólidos e formas geométricas sejam visualizados como se estivessem fora da tela do celular, criando uma experiência interativa e imersiva. Durante esta atividade, utilizamos as figuras presentes no Teste de Rotação Mental para explorar conceitos essenciais que ajudam no aprimoramento da Rotação Mental.

A Realidade Aumentada (RA) enriquece o aprendizado ao oferecer uma visualização tridimensional dos objetos, facilitando a compreensão espacial e promovendo a rotação mental. Ao interagir com representações geométricas em 3D, sem o auxílio do aplicativo os alunos são desafiados a visualizar mentalmente essas formas sob diferentes ângulos e orientações. Com a Realidade Aumentada (RA), os alunos podem movimentar as figuras criadas e ajustá-las à posição desejada para a atividade. Essa prática fortalece suas habilidades de rotação mental, essenciais para manipular objetos e resolver problemas.



Atividade 2 - Ambientação no GeoGebra AR

Tempo estimado: 2 tempos de aula de 50 minutos

Objetivos Geral: Conhecer e manipular o aplicativo GeoGebra AR

Objetivos Específicos

- Construir figuras na janela de visualização AR.

Material Utilizado:

- Aplicativo, celular e folha de exercícios.

Método:

No primeiro momento os alunos farão atividades livres para familiarizar com a interface do GeoGebra AR. Depois, trabalharão no aplicativo construindo figuras Espaciais.

Desenvolvimento:

Na sala utilizarão os celulares ou tablets para acessar o site do software GeoGebra. Num primeiro momento, receberão explicação da interface do GeoGebra AR e logo após farão exercícios de projeção no software.

Avaliação

Será avaliado pelo professor os trabalhos feitos no aplicativo.

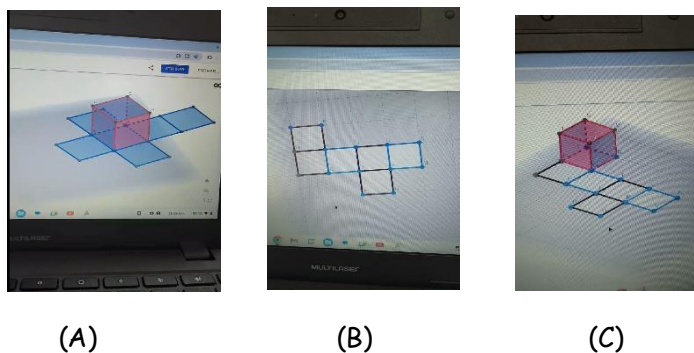
Atividade 2: Ambientação no *GeoGebra RA* criando alguns sólidos e observando-o em diferentes perspectivas. Fazer conexão com a 2ª Atividade. Em seguida, realizar exercícios da forma abaixo, com o auxílio do aplicativo:

ORIGINAL	A	B	C	D

7. SÉTIMA AULA: OFICINA NO GEOGEBRA - PLANIFICAÇÃO PINTADA

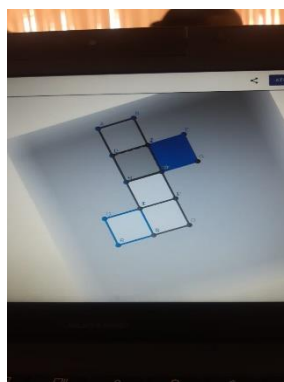
Nesta atividade, divide a turma em grupos. Cada grupo receberá uma planificação de um paralelepípedo reto-retângulo com um certo número de faces pintadas em azul. Com o auxílio do *GeoGebra*, o grupo deverá construir o respectivo sólido que tem aquela planificação.

Figura 13 - Planificação do Cubo no *GeoGebra*



Fonte: Autor, 2024

Numa segunda rodada, o professor entregará aos grupos outra planificação do cubo com faces pintadas de azul e os alunos terão que fazer no *GeoGebra* o sólido correspondente, porém, devem ser proibidos de usar o botão de planificação.



Oficina 7 - Planificação Pintadas

Tempo estimado: 2 tempos de aula de 50 minutos

Objetivos Geral: Analisar e manipular no aplicativo geogebra 3D as planificações dos sólidos.

Objetivos Específicos

- Construir a partir da planificação o sólido com as devidas características.

Material Utilizado:

- Aplicativo, celular e folha de exercícios.

Método:

Será entregue uma folha com a planificação de um sólido com algumas faces pintadas, o aluno terá que construir o sólido a partir da planificação com as devidas características.

Desenvolvimento:

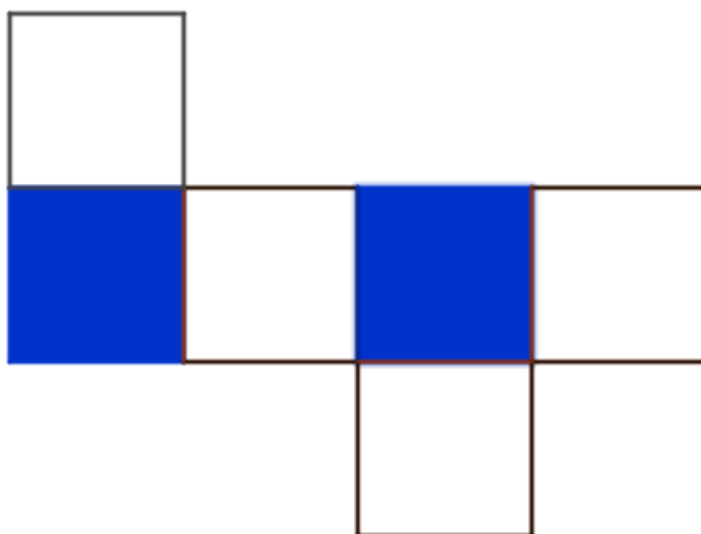
Na sala utilizarão os aplicativos para acessar o site do software GeoGebra pelo celular ou Chrome book, no primeiro momento receberão explicação de como farão as atividades no aplicativo GeoGebra 3D.

Avaliação

Será avaliado os trabalhos feitos no aplicativo.

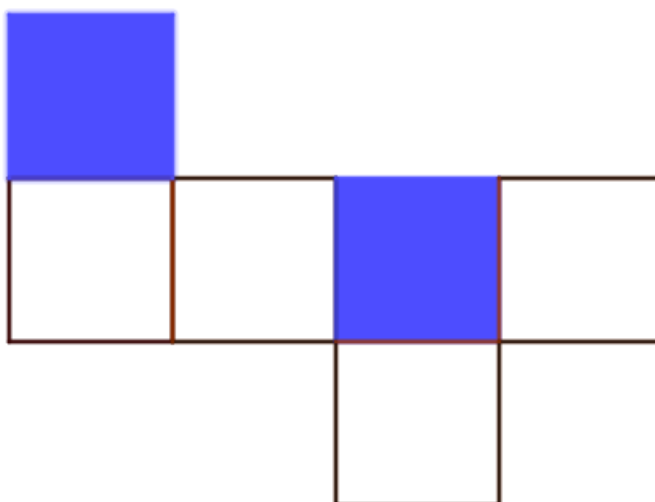
Aula 7 - Planificação Pintadas

A partir da planificação dada faça a construção do sólido com as devidas características no GeoGebra.



Descreva como vocês construíram está atividade, o que achou?

A partir da planificação dada faça a construção do sólido com as devidas características no *GeoGebra*.



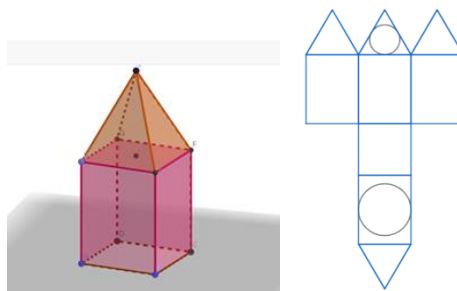
Descreva como vocês construíram está atividade, o que acharam?

8. OITVA AULA: TORRE DA IGREJA

Nesta atividade, o professor irá propor um desafio aos alunos: fornecerá uma planificação de uma "torre da igreja" impressa em papel, contendo alguns detalhes, como três faces quadrangulares com círculos e uma face triangular com um círculo.

Os alunos utilizarão o *GeoGebra* para modelar essa torre de acordo com as características apresentadas, sem recortar o papel. Em seguida, imprimirão o modelo na impressora 3D. Depois de gerar o objeto impresso, os alunos construirão a torre no papel e farão uma comparação entre a estrutura que criaram e o objeto produzido.

Dada a natureza abstrata dessa atividade, dividimos a turma em grupos e distribuimos folhas de planificações com detalhes diferentes. Isso permitiu que os grupos tivessem autonomia e compartilhassem ideias, mesmo com as variações nas planificações.



Oficina 8 - Torre da igreja

Tempo estimado: 6 tempos de aula de 50 minutos

Objetivos Geral: Construir e comparar no papel, aplicativo no *GeoGebra* 3D e impressora 3D as figuras.

Objetivos Específicos

- Construir a partir da planificação a figura com as devidas características.

Material Utilizado:

- Aplicativo, Chrome book, folha de exercícios e impressora 3D.

Método:

Será entregue uma folha com a planificação da figura "torre da igreja" com alguns detalhes em suas faces, o aluno terá que construir o sólido a partir da planificação com as devidas características.

Desenvolvimento:

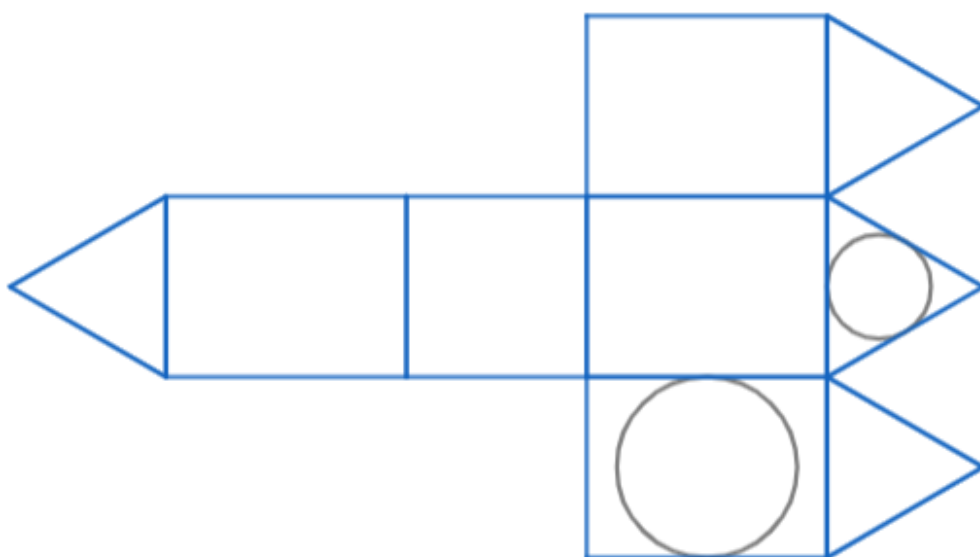
O professor dará aos grupos de alunos uma planificação em um papel de uma "torre de igreja" com alguns detalhes em suas faces (por exemplo, 3 faces quadrangulares com círculos e uma face triangular com um círculo). Sem recortar o papel, os alunos deverão fazer no geogebra a torre com essas características e imprimi-las na impressora 3D. Após o processo, os alunos farão a construção da torre no papel e compararão com o objeto impresso. (Essa atividade demanda maior abstração visto que não é possível fazer, com as ferramentas do GeoGebra, a planificação da "torre de igreja")

Avaliação

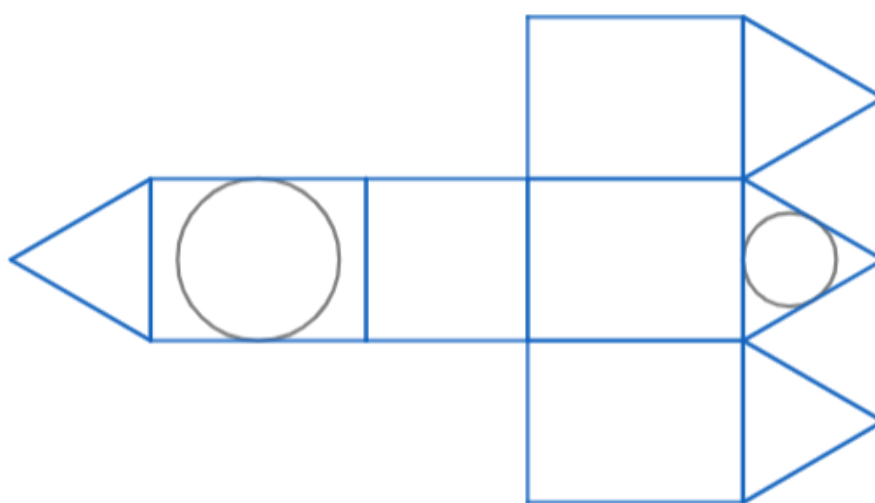
Será avaliado os trabalhos feitos no aplicativo.

Oficina 8 - Torre da igreja

Modelo 1 - Sem recortar o papel, o grupo deverá fazer no GeoGebra a torre com essas características e imprimi-las na impressora 3D. Após o processo, o grupo fará a construção da torre no papel e comparará com o objeto impresso.



Modelo 2 - Sem recortar o papel, o grupo deverá fazer no *GeoGebra* a torre com essas características e imprimi-las na impressora 3D. Após o processo, o grupo fará a construção da torre no papel e comparará com o objeto impresso.



9. NONA AULA: CONSTRUÇÃO DO MODELO DO PRÉDIO DA ESCOLA.

Nesta atividade o objetivo era construir no *Geogebra* 3D o modelo geométrico de representação para o(s) prédio(s) da escola em que os alunos

estudam com e sem apoio de tecnologias digitais. Os alunos devem ser capazes de desenhar a planificação de um poliedro diferente de hexaedro e pirâmides e identificar uma escala que seja compatível com as dimensões dos prédios que compõem o Colégio e finalizar com a impressão 3D dos mesmos. Esta aula consiste na culminância do projeto, pois requer um maior conhecimento, habilidade e desenvolvimentos dos alunos. Os alunos devem utilizar o conhecimento que possuem para criar as maquetes em 3D.

Objeto(s) do Conhecimento Matemático Abordado(s):

- Poliedros; Planificação de Sólidos; Perpendicularidade e Paralelismo;

Habilidade(s) da BNCC e da Matriz de Referência do ENEM relacionadas:

- EF09MA17 - Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar este conhecimento para desenhar objetos em perspectiva;
- EM13MAT201 - Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa;
- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
- H7 (ENEM) - Identificar características de figuras planas e espaciais.

Nome da Tarefa: Imprimindo molde(s) do(s) prédio(s) da escola com uma impressora 3D.

Público Alvo: 2º Ano do Ensino Médio

Objetivos Específicos de Aprendizagem: Ao final das aulas (12), os alunos deverão ser capazes de construir um modelo geométrico de representação para os prédios da escola em que estudam com e sem apoio de tecnologias digitais. Irão identificar poliedros específicos aprendidos na teoria que auxiliam na construção desse modelo geométrico. Também serão capazes de identificar uma escala que seja compatível com as dimensões do(s) prédio(s) que compõem a escola.

Recursos Didáticos Utilizados: Vídeo, Celulares, Google Earth, Lápis, Papel, Régua, Lousa, Trena, Notebooks e Impressora 3D.

Estratégias/Desenvolvimento das Atividades de Culminância

1) Proposição e Apresentação da Tarefa (280 minutos)

O professor irá iniciar a atividade apresentando o vídeo "A 1ª casa de dois andares construída por uma impressora 3D" disponível no link: <https://www.youtube.com/watch?v=Tmtv8zVP51s>. Após ouvir comentários dos alunos sobre o vídeo (o que por sinal, daria um debate bem interessante sobre as vantagens e desvantagens desse tipo de ferramenta na construção civil), o professor irá propor a tarefa de construção de modelos do(s) prédio(s) da escola com a impressora 3D. Os alunos então deverão:

- a) Desenhar poliedros em uma folha de papel que representem o(s) prédio(s) da escola;
- b) Medir o comprimento e a largura dos prédios e pensar em uma forma de estimar a medida da altura dos mesmos;
- c) Desenhar uma planificação do sólido de cada prédio;
- d) Construir os modelos dos prédios no *GeoGebra*, em uma escala que seja compatível com as dimensões do(s) pavilhão(ões);

e) Imprimir os modelos, avaliar os resultados e pintar as "maquetes".

2) Desenvolvimento da Tarefa (220 minutos)

Para o item (a), o professor pode levar os alunos para fora da escola e pedir que eles façam um primeiro desenho do(s) prédio(s) que a compõem. Eles deverão desenhar um poliedro que melhor represente o formato de cada prédio. É recomendado que a turma seja dividida em grupos (a quantidade pode ser feita de acordo com a quantidade de prédios na escola. Se só houver um prédio, os grupos podem fazer as mesmas tarefas e ao final de sua execução o professor pode organizar uma análise conjunta com os alunos, comparando as figuras). Após os primeiros desenhos, o professor deve avaliar a qualidade dos mesmos. Itens como janelas e portas podem ser desprezadas das figuras, assim como "sobras do telhado" (já que o foco aqui é compreender qual poliedro melhor representa a imagem do prédio). Uma dificuldade que pode ocorrer é compreender o formato das faces associadas ao telhado, o que pode ser facilitado com imagens do Google Earth.



Quando os desenhos estiverem satisfatórios, pode-se passar para a próxima etapa. (Aqui o professor pode questionar os alunos sobre a natureza dos triângulos e trapézios das faces - são triângulos isósceles, trapézios isósceles, trapézios retângulos ?)

No item (b), uma trena pode ser usada para medir o comprimento e a largura do prédio. A distância entre a base do prédio e a laje (altura da alvenaria) pode ser estimada analisando a altura de algum dos ambientes internos de um dos andares, multiplicado pelo número de andares. A estimativa da altura do telhado (relativa à face da laje) pode ser feita da mesma forma como no vídeo abaixo¹⁶, em que se considera de maneira padrão, que esta altura equivale a 30% do comprimento da metade do segmento que vai do beiral até a linha da cumeeira.



O item (b) pode ser iniciado deixando os alunos livres para refletir que estratégias utilizarão para obter estas medidas. O professor deve avalia-las e propor sugestões que conduzam ao resultado esperado. (Obs.: nesta etapa, é possível calcular os lados dos triângulos e dos trapézios, usando por exemplo, o Teorema de Pitágoras (como?). Avaliar se é interessante e se o tempo permite)

De posse das medições, os grupos ficarão incumbidos agora de inserir no desenho feito no item (a) as medidas obtidas. Podem iniciar a tarefa do item (c), de planificação dos dois sólidos, inserindo as medidas no desenho. Nesta etapa, os grupos devem trocar as informações e chegar em um acordo sobre a escala *COMUM* que utilizarão, de modo que os modelos impressos respeitem as

¹⁶ https://www.youtube.com/watch?v=paHHB8DK_LE

proporções dos prédios da escola (uma escala comum evitará que um prédio fique muito maior que o outro na impressão) e permitam que a impressão não demore muitas horas.

Durante a execução do item (d), o professor deve supervisionar com cuidado o trabalho dos alunos, principalmente quando o formato do prédio da escola não foi o de um paralelepípedo reto-retângulo. Na realidade na qual esta atividade foi aplicada, os prédios da escola eram compostos por um tal paralelepípedo encimado por um poliedro composto por uma face retangular (comum ao paralelepípedo), duas faces triangular e duas faces trapezoidais (típica construção com telhado colonial). Numa situação como essa, espera-se que os alunos comecem construindo um paralelepípedo reto-retângulo, porém eles têm que conseguir construir o sólido que fica acima dele, contendo as faces do telhado. Neste caso, deve construir um segmento horizontal de encontro dos trapézios do telhado, o qual é paralelo ao plano da base do paralelepípedo, localizando-o de forma centralizada com relação a essa base. Certamente as noções de perpendicularidade e paralelismo serão usadas nessa etapa.

No item (e), antes de imprimir, o professor fará uma análise das medidas nos arquivos, preferencialmente junto com os alunos, para ver se elas estão adequadas para realizar a impressão. Após imprimir o(s) prédio(s), os alunos podem pintá-los (com tinta guache por exemplo) de forma livre.

3) Sistematização

O professor pode, ao final da atividade de culminância, questionar os alunos sobre quais conceitos da Geometria e das Grandezas e Medidas foram utilizados para realizar as tarefas e fazer uma síntese das definições e propriedades que foram aplicadas.

CONVERSA FINAL COM O LEITOR

Acreditamos que esta sequência didática será de grande auxílio para os amigos professores de matemática que desejam implementar nas suas aulas atividades práticas de Geometria Espacial e que essas oficinas possam servir de base para novas ideias.

Esperamos que com esta sequência didática os seus alunos desenvolvam o conhecimento Geométrico Espacial necessário, tenham um novo olhar para Geometria e se interessem em explorá-la com ferramentas digitais como as que foram apresentadas neste texto.

REFERÊNCIAS

BORTOLOSSI, Humberto; CRISSAFF, Lhaylla. **Vistas ortogonais e representações em perspectivas**. In: Simas, F. Teixeira, A. Livro aberto de matemática. Rio de Janeiro: Editora IMPA, 2018.

CADAR, Luciana. DUTENHEFNER, Francisco. **Encontro de Geometria - Parte 1**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015 p. 156.

GUTIÉRREZ, Angel. **Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional geometry**. Structural Topology, n. 18, p. 31 - 48, 1992.

HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith. **Introduzione a GeoGebra**. 2008

SOUZA, Carla Fernandes e. **Estudo de quadriláteros, reflexões e rotações no plano, segundo a teoria de van Hiele: uma experiência com alunos do 9º ano do ensino fundamental**. 2014. p.125. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, RJ, 2014.

WAHAB, Rohani Abd, ABDULLAH, Halim Abdul, Evaluation by Experts and Designated Users on the Learning Strategy using SketchUp Make for Elevating Visual Spatial Skills and Geometry Thinking, **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 819 -840, 2017.

ANEXO A - FOLHA DE APROVAÇÃO



**Mestrado Profissional
em Matemática em
Rede Nacional**



AVALIAÇÃO DO RECURSO/PROCESSO EDUCACIONAL PARA BANCA DE DEFESA FINAL

Título do recurso: Desenvolvendo o Pensamento Geométrico Espacial com o GeoGebra e uma Impressora 3D

Discente: Adriano de Souza Dias

Título da Dissertação: Desenvolvendo o Pensamento Geométrico Espacial com o Auxílio do GeoGebra e de uma Impressora 3D

Orientador: Douglas Monsóres de Melo Santos

Data da defesa: 28/02/2025

ASPECTOS AVALIADOS DO RECURSO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)

Complexidade - Compreende-se como uma propriedade do recurso/processo educacional relacionada as etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do recurso educacional. Mais de um item pode ser marcado	<input checked="" type="checkbox"/> O PE é concebido a partir da observação e/ou da prática do profissional e está atrelado à questão de pesquisa da dissertação. <input checked="" type="checkbox"/> A metodologia apresenta clara e objetivamente a forma de aplicação e análise do PE. <input checked="" type="checkbox"/> Há uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teórico e teórico-metodológico empregados na respectiva dissertação. <input checked="" type="checkbox"/> Há apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Impacto - Forma como o recurso educacional foi utilizado e/ou aplicado nos sistemas educacionais, culturais, de saúde ou CT&I. É importante destacar se a demanda foi espontânea ou contratada.	<input type="checkbox"/> Protótipo/Piloto não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente <input checked="" type="checkbox"/> Protótipo/Piloto com aplicação no sistema Educacional no sistema relacionado à prática profissional do discente
Aplicabilidade - Está relacionado ao potencial de facilidade de acesso e compartilhamento que o recurso educacional possui, para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.	<input type="checkbox"/> PE tem características de aplicabilidade a partir de protótipo/piloto, mas não foi aplicado durante a pesquisa; <input checked="" type="checkbox"/> PE tem características de aplicabilidade a partir de protótipo/piloto e foi aplicado durante a pesquisa; <input type="checkbox"/> PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial
Acesso - relaciona-se à forma de acesso do PE.	<input type="checkbox"/> PE não se aplica <input type="checkbox"/> PE com acesso via rede fechada <input checked="" type="checkbox"/> PE com acesso público e gratuito <input checked="" type="checkbox"/> PE com acesso público e gratuito pela página do programa <input checked="" type="checkbox"/> PE com acesso por Repositório institucional - nacional ou internacional - com acesso público e gratuito
Aderência - Compreende-se como a origem do recurso educacional apresentar origens nas atividades oriundas das linhas e projetos de pesquisas do programa em avaliação.	<input type="checkbox"/> Sem clara aderência às linhas de pesquisa ou projetos de pesquisa do programa de pós-graduação stricto sensu ao qual está filiado. <input checked="" type="checkbox"/> Com clara aderência às linhas de pesquisa ou projetos de pesquisa do programa de pós-graduação stricto sensu ao qual está filiado.
Inovação - PE é criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original.	<input type="checkbox"/> PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito) <input checked="" type="checkbox"/> PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos pré-estabelecidos) <input type="checkbox"/> PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimento existente).

Breve relato sobre abrangência e/ou replicabilidade do recurso ou processo: O PE consiste numa sequência didática cujos principais recursos didáticos utilizados são o software GeoGebra e uma Impressora 3D. As atividades têm um cunho prático e interativo, buscando dar concretude a noções teóricas da Geometria Espacial. A aplicação do PE é indicada para turmas de Ensino Médio.

Assinatura dos membros da banca:

Presidente da banca: _____
 Membros internos: _____
 Membros externos: _____



PROPOSTA DE PRODUTO N° ficha do recurso educacional/2025 - ICE (12.28.01.23)
(N° do Documento: 6)

(N° do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 03/08/2025 19:25)

ALINE MAURICIO BARBOSA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.63)
Matricula: ###938#2

(Assinado digitalmente em 04/08/2025 10:10)

DOUGLAS MONSORES DE MELO SANTOS
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.63)
Matricula: ###291#7

(Assinado digitalmente em 05/08/2025 15:21)

RAFAEL FILIPE NOVÓIA VAZ
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.627-##

Visualize o documento original em <https://sipac.ufrj.br/documentos/> informando seu número: 6, ano: 2025, tipo:
PROPOSTA DE PRODUTO, data de emissão: 01/08/2025 e o código de verificação: 6f4aa74ab6