

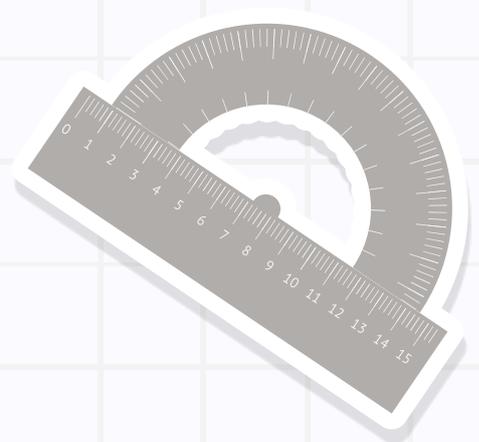
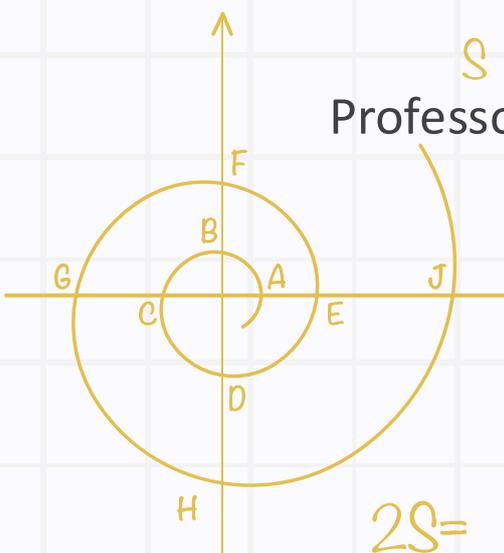
Matemática na prática: Explorando Vetores e Taxas de Variação no Ensino Médio

Vetores, Velocidade Média e Taxas de Variação – Uma
Abordagem Interdisciplinar no Ensino Médio

Recursos pedagógicos para professores

§ Danthy Marcio Barbosa Silva

Professor Doutor Marcelo Almeida de Souza



Bem-vindo

Este produto educacional, em formato de ebook, foi desenvolvido para oferecer aos professores uma abordagem interdisciplinar, utilizando vetores e taxas de variação para integrar Matemática e Física de forma prática e aplicada. Com o objetivo de facilitar o aprendizado e estimular o raciocínio lógico, este material conecta conceitos teóricos com situações do cotidiano.

Baseado em estudos pedagógicos e metodologias ativas, o conteúdo explora a representação de vetores no plano cartesiano, a aplicação de trigonometria para decomposição de forças, e a análise gráfica de velocidade média e taxa de variação. Esses tópicos são apresentados de forma interativa, utilizando ferramentas visuais e exercícios contextualizados.

Ao conectar o ensino de Matemática à Física, este produto promove um ambiente de aprendizado mais dinâmico e envolvente, desenvolvendo não apenas competências técnicas, mas também habilidades críticas e analíticas, essenciais para a formação dos estudantes.

Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

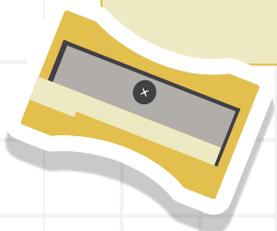


Apresentação



Este produto educacional foi desenvolvido para integrar conceitos fundamentais de Matemática e Física no Ensino Médio, com foco em vetores, velocidade média e taxas de variação. A proposta é facilitar o aprendizado por meio de uma abordagem interdisciplinar e prática, utilizando ferramentas visuais, como gráficos e representações no plano cartesiano. Alinhado às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o material busca conectar teoria e prática, incentivando o raciocínio lógico, o pensamento crítico e a resolução de problemas reais.

<u>Objetivo</u>	Proporcionar aos professores e alunos ferramentas didáticas para explorar conceitos de vetores, trigonometria, e taxas de variação aplicados a problemas reais.
<u>Público-alvo</u>	Professores de Matemática e Física do Ensino Médio, estudantes interessados em compreender conceitos interdisciplinares de forma prática e contextualizada.
<u>Recursos</u>	Material didático interativo com exercícios práticos para representar vetores e suas aplicações
<u>Metodologia</u>	Abordagem interdisciplinar utilizando exemplos reais, como deslocamento e forças, com ênfase na visualização gráfica e na resolução de problemas contextualizados.
<u>Instituição parceira</u>	Este produto educacional foi baseado em uma dissertação de mestrado desenvolvido na Universidade Federal de Goiás (UFG, pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).



Introdução

01

Contextualização

A importância da interdisciplinaridade no ensino da Matemática e da Física.

02

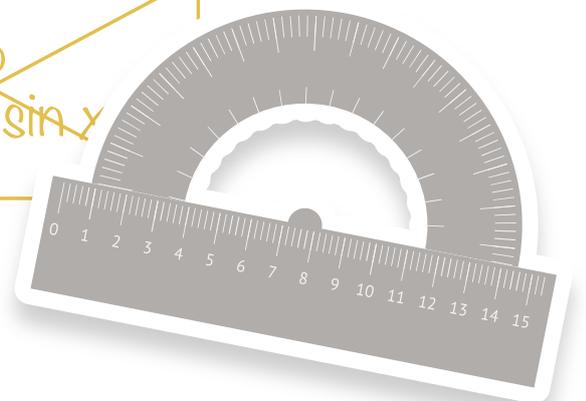
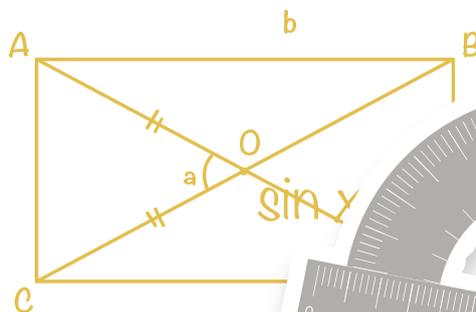
Justificativa

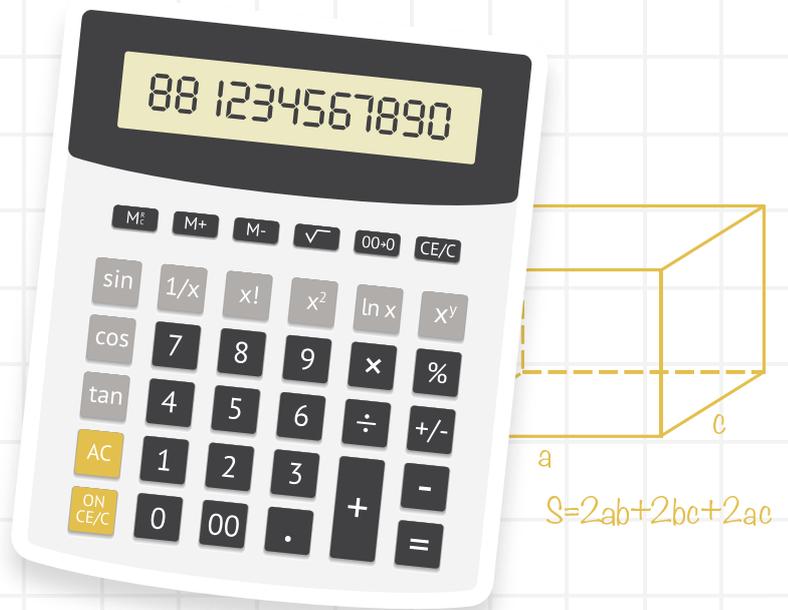
Dificuldades comuns dos estudantes em compreender vetores e como a integração entre as disciplinas pode facilitar o aprendizado.

03

Objetivo

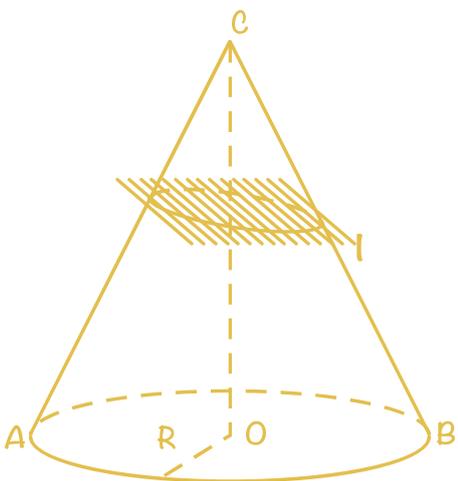
Desenvolver habilidades matemáticas e físicas por meio da aplicação prática dos conceitos de vetores, velocidade média e taxa de variação.





Conteúdo Programático

Unidade 1, Unidade 2 e Unidade 3

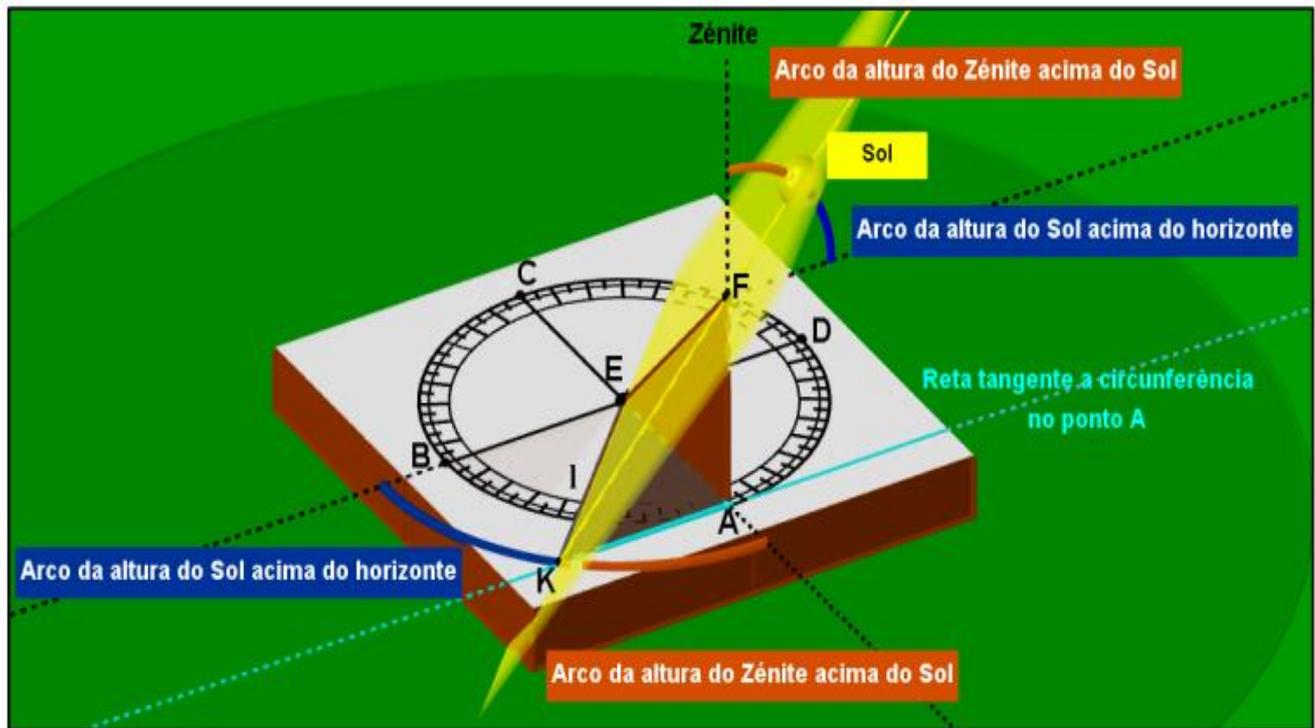


Unidade 1: Introdução aos Vetores e Sistema de Coordenadas

A interdisciplinaridade surge quando se explora a relação entre o vetor da gravidade, um conceito físico, e o uso de vetores em Matemática para representar grandezas que possuem direção e sentido. Essa interação permite que os alunos compreendam de forma mais aprofundada como a Matemática fornece as ferramentas para descrever e quantificar fenômenos físicos, como a gravidade, e como a Física utiliza esses conceitos matemáticos para modelar e entender o mundo ao seu redor. Dessa forma, o estudo conjunto de ambos os temas amplia o conhecimento de forma integrada, demonstrando a aplicação prática da Matemática na explicação de conceitos físicos.

Um exemplo prático da interdisciplinaridade entre as disciplinas de matemática e física é citado por Oliveira e Pereira (2022). Conforme os autores, a utilização, pelos estudantes, dos conceitos de vetor da gravidade e centro de massa, que fazem parte do currículo de Física na contemporaneidade, indica a possibilidade de criar uma interdisciplinaridade entre as disciplinas de Matemática e Física, por meio de um estudo sobre o uso de instrumentos jacente no plano. Por exemplo, como na Física a gravidade é representada por um vetor, seria interessante explorar uma interação entre o vetor na Física e a reta na Matemática. Outra abordagem seria discutir o conceito de centro de massa (da Física) em paralelo com o centro geométrico (da Matemática). Dessa forma, ambos os conceitos poderiam ser explorados além dos limites internos de cada área.

Representação de uso do instrumento jacente no plano



Fonte: Oliveira; Pereira, 2022.

Na parte superior da tábua quadrada do instrumento (representada na cor branca), encontra-se uma circunferência graduada, dividida em quatro quadrantes, junto com uma reta que tangencia a circunferência no ponto A. A altura do Sol em relação ao horizonte, como pode ser observada, é determinada por meio da sombra projetada pelo triângulo retângulo isósceles AEF, que está posicionado perpendicularmente à tábua. Inicialmente, é importante destacar que, para medir a altura do Sol, o instrumento deve ser posicionado de maneira que a sombra projetada pelo segmento de reta FA coincida com a reta tangente à circunferência no ponto A.

Por meio desse exemplo, constata-se que na Física, a gravidade é representada como um vetor que descreve a direção e a intensidade da força gravitacional exercida por um corpo sobre outro. Esse conceito pode ser abordado de maneira matemática, utilizando as propriedades dos vetores, para calcular a força gravitacional.

Atividade prática

Representação e Análise de Vetores no Plano xOy

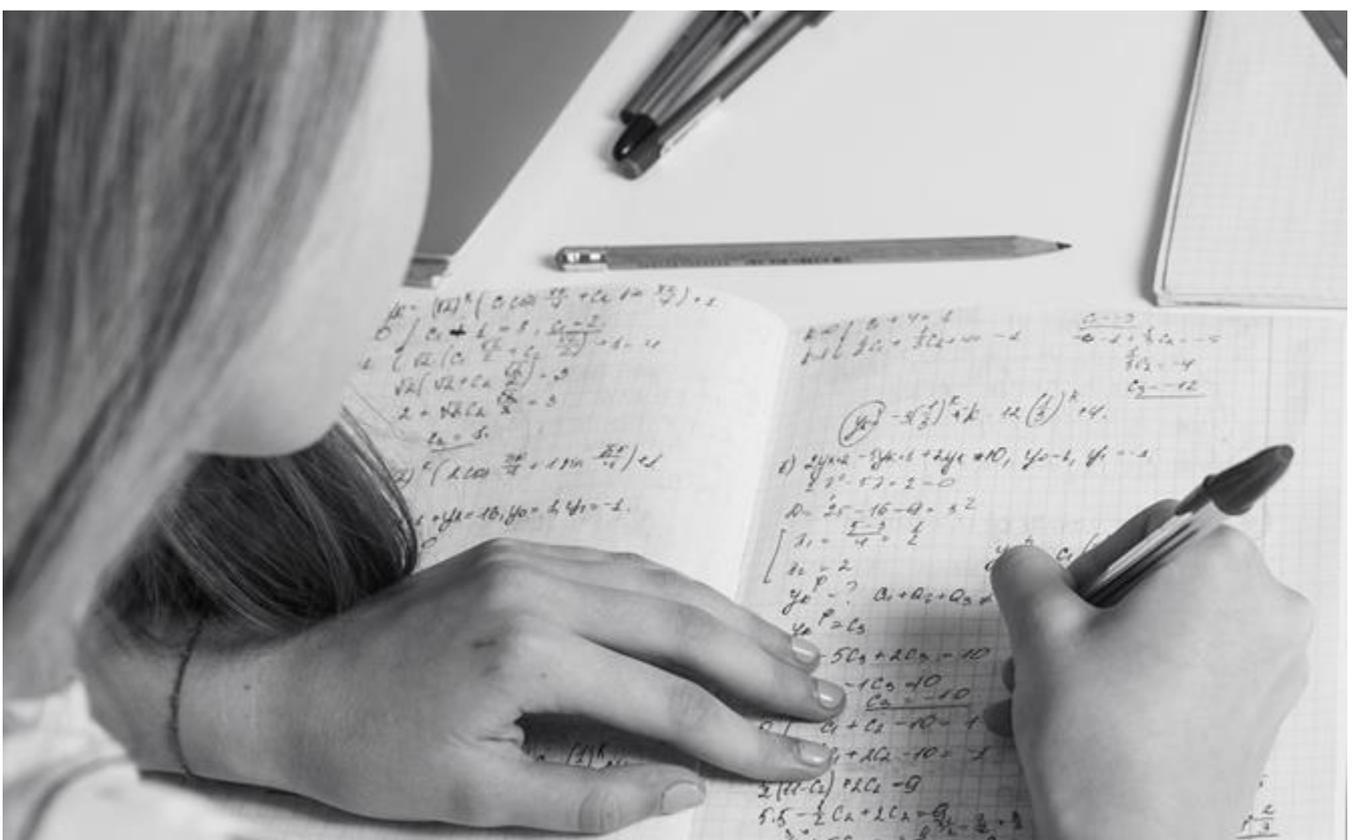
Representar o vetor \vec{V} com módulo 10 e ângulo 45° no plano cartesiano.	Desenho no papel milimetrado
Calcular a componente horizontal V_x usando $V_x = V \cdot \cos(\theta)$	$V_x = 10 \cdot \cos(45^\circ)$
Calcular a componente vertical V_y usando $V_y = V \cdot \sin(\theta)$.	$V_y = 10 \cdot \sin(45^\circ)$
Representar graficamente V_x e V_y compondo o vetor \vec{V}	Desenho no plano cartesiano
Utilizar um software gráfico, como Geogebra, para confirmar os resultados.	Representação digital



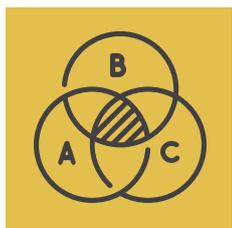
Instruções Adicionais: Certifique-se de que todos os cálculos utilizem as funções trigonométricas corretamente. Compare os resultados obtidos manualmente com os gerados pelo software para verificar a precisão. Ao final, discuta a importância da decomposição vetorial em problemas reais.

Unidade 2: Velocidade Média e Taxa de Variação

- No cotidiano, é comum afirmarmos que a velocidade representa a rapidez ou a lentidão com que os corpos se deslocam. Esse entendimento intuitivo sobre o movimento está correto e é coerente, pois a velocidade de um corpo é definida pela razão entre a variação de sua posição e o intervalo de tempo correspondente
- A velocidade média é determinada pela relação entre o deslocamento realizado e o tempo necessário para completar o movimento. Para calcular a velocidade média em uma viagem entre duas cidades, é necessário conhecer a distância em linha reta que as separa, ou seja, o deslocamento.
- Além disso, a equação da velocidade média é expressa como: $V_m = \Delta x / \Delta t$. O uso da álgebra é fundamental para manipular essa fórmula, como isolar uma variável (deslocamento, tempo ou velocidade) de acordo com o problema, além de realizar simplificações matemáticas.

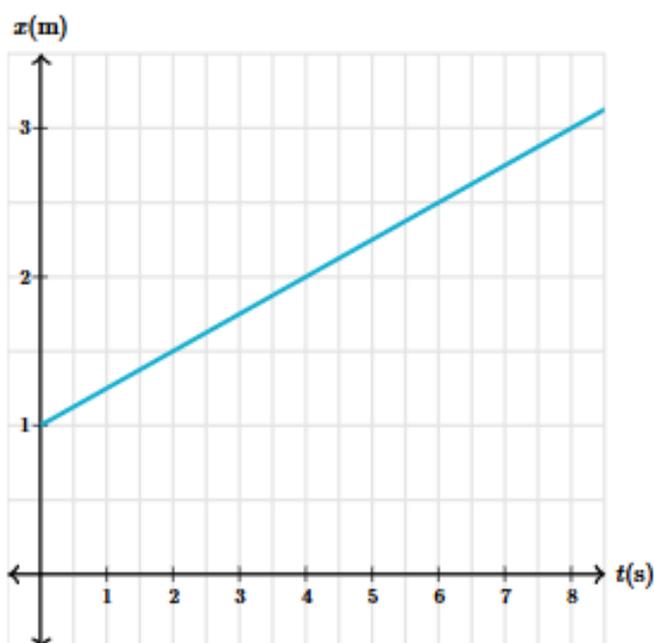


Representação gráfica



O cálculo da velocidade média pode ser interpretado como a inclinação (ou coeficiente angular) da reta que conecta dois pontos no gráfico, o que exige conhecimentos de geometria analítica. A exemplo disso: Exercício de velocidade média na Física

Um cachorro está correndo em linha reta para pegar uma bola. Seu movimento é mostrado no gráfico de posição horizontal x vs tempo t a seguir.



Qual a velocidade vetorial média do cachorro de $t = 2$ s a $t = 6$ s?

Escolha 1 resposta:

(A) $0,40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(B) $0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(C) $4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(D) $-0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Conhecimentos necessários

A questão apresenta uma situação física representada por um gráfico de posição em função do tempo. A resolução do problema exige a aplicação de conhecimentos matemáticos essenciais para determinar a velocidade vetorial média. Nesta questão, os seguintes conhecimentos matemáticos são aplicados:

01

Razão e Proporção

O cálculo da velocidade média envolve dividir a variação de posição (Δx) pelo tempo decorrido (Δt).

02

Leitura de Gráficos:

A interpretação correta do gráfico exige identificar valores no eixo vertical (posição x) e no eixo horizontal (tempo t).

03

Subtração:

Determinar deslocamento e intervalo de tempo envolve realizar operações básicas, como subtrair valores.

04

Divisão:

A razão entre deslocamento e tempo envolve uma divisão direta.

05

Unidades de Medida:

É importante expressar o resultado em unidades padronizadas no SI, como metros por segundo (m/s).

Resolução

Resolução do exercício de velocidade média na Física Exercício de velocidade média na Física Fonte: Khan Academy.

1 / 3 A velocidade vetorial média é um vetor e tem uma direção e um sentido (pode tomar valores positivos ou negativos).

A velocidade vetorial média \bar{v} é a variação na posição, Δx , dividida pelo intervalo de tempo, Δt :

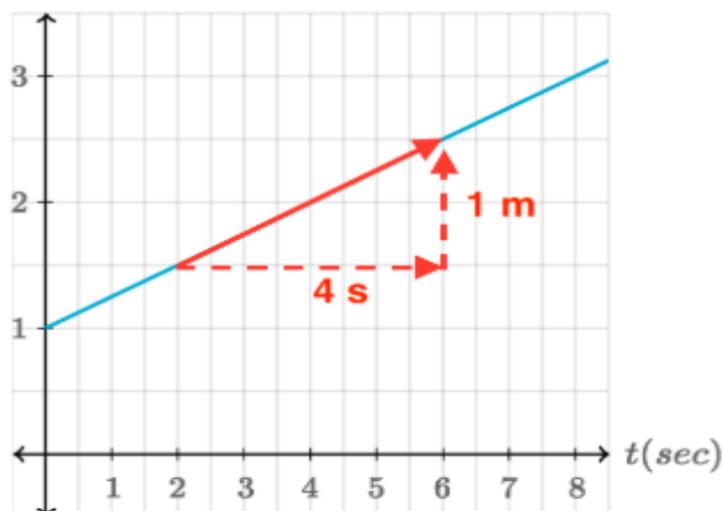
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Um cão começa em $x_0 = 1,5 \text{ m}$ em $t = 2 \text{ s}$, e termina em $x_f = 2,5 \text{ m}$ para $t = 6 \text{ s}$. Por isso, a velocidade vetorial média do cão é:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{2,5 \text{ m} - 1,5 \text{ m}}{6 \text{ s} - 2 \text{ s}} \\ &= 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

2 / 3 Resolver usando o gráfico: A velocidade vetorial média num gráfico da posição vs. tempo é a inclinação da reta entre os dois pontos de tempo que estão sendo considerados.

$x(\text{m})$



A inclinação é calculada a partir do aumento, ou variação em y , dividida pela variação em t .

$$\begin{aligned}\text{inclinação} = \bar{v} &= \frac{\text{variação em } y}{\text{variação em } t} \\ &= \frac{1 \text{ m}}{4 \text{ s}} \\ &= 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

3 / 3

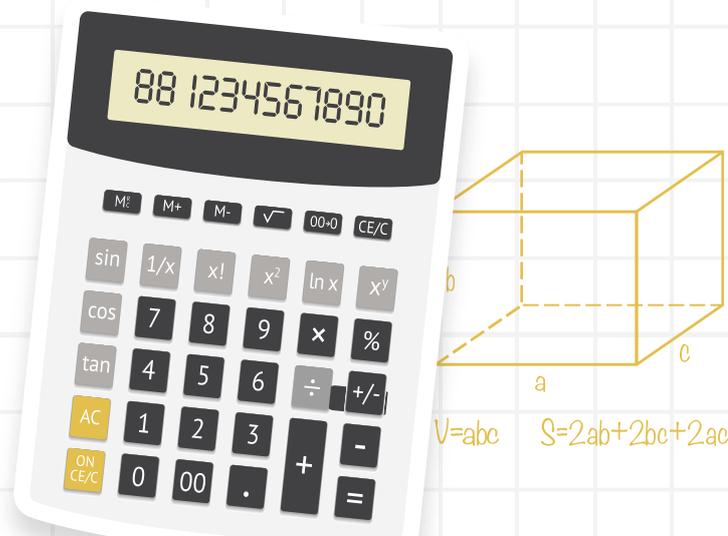
A velocidade vetorial média do cão é $0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

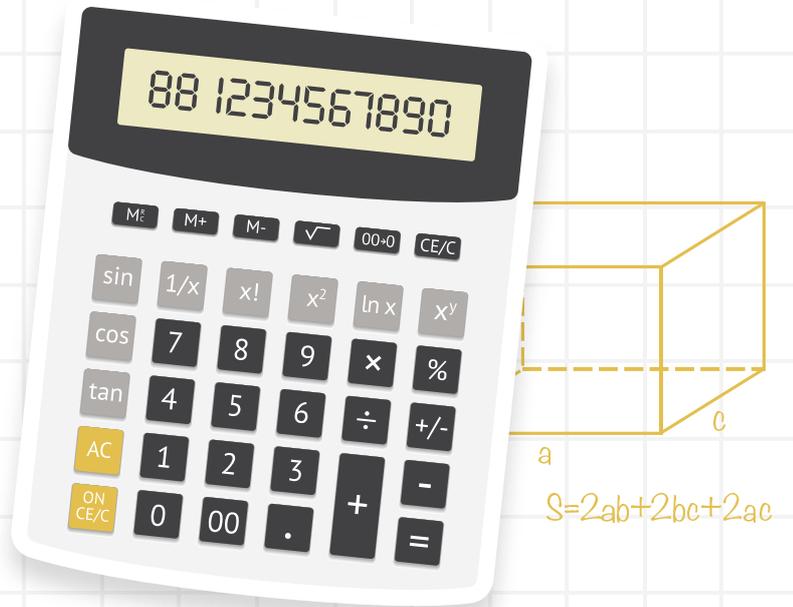
Unidade 3: Problemas Reais e Interdisciplinares

A resolução de problemas reais que integram Matemática e Física é essencial para consolidar a aprendizagem dos conceitos teóricos, tornando o conhecimento mais significativo e aplicável ao cotidiano. Nesta unidade, exploraremos situações práticas que envolvem vetores, trigonometria e gráficos, conectando essas ferramentas ao estudo de movimentos retilíneos e trajetórias.

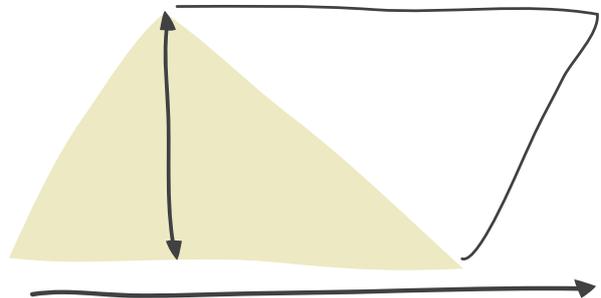
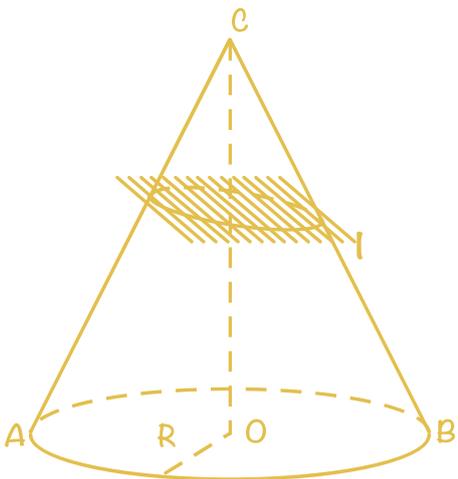
A análise da trajetória de um objeto utilizando vetores e trigonometria é fundamental para compreender como as forças atuam em diferentes direções. Para isso, é necessário representar graficamente os vetores em um sistema de coordenadas, calcular as componentes horizontal e vertical, e aplicar as relações trigonométricas para determinar a direção e a magnitude resultante. Por exemplo, o lançamento de um projétil pode ser modelado considerando sua velocidade inicial e o ângulo de lançamento.

O movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) pode ser representado graficamente pela relação entre deslocamento, velocidade e tempo. O estudo dessa situação permite calcular a aceleração, a posição final e o deslocamento total de um objeto ao longo do tempo. Esses conceitos são amplamente utilizados na análise de fenômenos cotidianos, como o movimento de veículos em aceleração constante.





Templates de atividades



Verdadeiro ou Falso

Leia as afirmações abaixo sobre vetores, trigonometria e movimento retilíneo uniformemente variado. Marque verdadeiro ou falso conforme o caso.

	V	F
O módulo de um vetor é sempre um valor positivo.		
A soma vetorial pode ser realizada utilizando o método do paralelogramo.		
A decomposição de um vetor depende do uso de funções trigonométricas como seno e cosseno.		
O gráfico de posição versus tempo de um movimento retilíneo uniforme é uma linha reta com inclinação constante.		
A velocidade escalar média é determinada pela soma dos módulos de deslocamento dividida pelo tempo total.		
No movimento retilíneo uniformemente variado, a aceleração é variável.		
O vetor resultante em um sistema bidimensional é obtido pela soma aritmética de seus módulos.		



Verdadeiro ou Falso - Respostas

	V	F
O módulo de um vetor é sempre um valor positivo? Verdadeiro. O módulo de um vetor representa a sua magnitude, que é sempre um valor não negativo.	✓	
A soma vetorial pode ser realizada utilizando o método do paralelogramo? Verdadeiro. O método do paralelogramo é um dos métodos para somar vetores graficamente.	✓	
A decomposição de um vetor depende do uso de funções trigonométricas como seno e cosseno? Verdadeiro. A decomposição vetorial em componentes x e y utiliza as funções seno e cosseno para calcular as projeções nos eixos.	✓	
O gráfico de posição versus tempo de um movimento retilíneo uniforme é uma linha reta com inclinação constante? Verdadeiro. No movimento retilíneo uniforme, a velocidade é constante, resultando em uma linha reta no gráfico de posição x tempo.	✓	
A velocidade escalar média é determinada pela soma dos módulos de deslocamento dividida pelo tempo total? Falso. A velocidade escalar média é o deslocamento total dividido pelo tempo total, não a soma dos módulos dos deslocamentos.		✓
No movimento retilíneo uniformemente variado, a aceleração é variável? Falso. No MRUV, a aceleração é constante por definição.		✓
O vetor resultante em um sistema bidimensional é obtido pela soma aritmética de seus módulos? Falso. O vetor resultante é calculado considerando tanto a magnitude quanto a direção dos vetores, utilizando métodos como o paralelogramo ou o cálculo trigonométrico.		✓



Movimento e Vetores

Leia o problema abaixo e responda as questões:

Um ciclista está percorrendo uma trilha retilínea. Ele começou o percurso com uma velocidade inicial de 2 m/s e, após 10 segundos, alcançou a velocidade de 12 m/s devido a uma aceleração constante. Após atingir essa velocidade, o ciclista manteve o ritmo por mais 20 segundos. Durante todo o percurso, ele deslocou-se em uma linha reta.

1. Qual foi a aceleração média do ciclista nos primeiros 10 segundos?

2. Qual o deslocamento total do ciclista nos primeiros 10 segundos (enquanto estava acelerando)?

3. Qual foi o deslocamento do ciclista nos 20 segundos em que ele manteve velocidade constante?

4. Qual é o deslocamento total do ciclista ao final do percurso?



Fórmulas úteis:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

$$s = v_i \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$s = v \cdot t$$

Movimento e Vetores - Respostas

A fórmula para a aceleração média é:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

1.

Substituindo os valores:

$$a = \frac{12 - 2}{10} = \frac{10}{10} = 1 \text{ m/s}^2$$

Resposta: A aceleração média foi de **1 m/s²**.

A fórmula para deslocamento com aceleração constante é:

$$s = v_i \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

2.

Substituindo os valores:

$$s = (2 \cdot 10) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (10)^2$$

$$s = 20 + \frac{1}{2} \cdot 100$$

$$s = 20 + 50 = 70 \text{ m}$$

Resposta: O deslocamento nos primeiros 10 segundos foi de **70 m**.

Para movimento com velocidade constante, a fórmula é:

3.

$$s = v \cdot t$$

Substituindo os valores:

$$s = 12 \cdot 20 = 240 \text{ m}$$

Resposta: O deslocamento durante os 20 segundos foi de **240 m**.

O deslocamento total é a soma dos deslocamentos durante a aceleração e a velocidade constante:

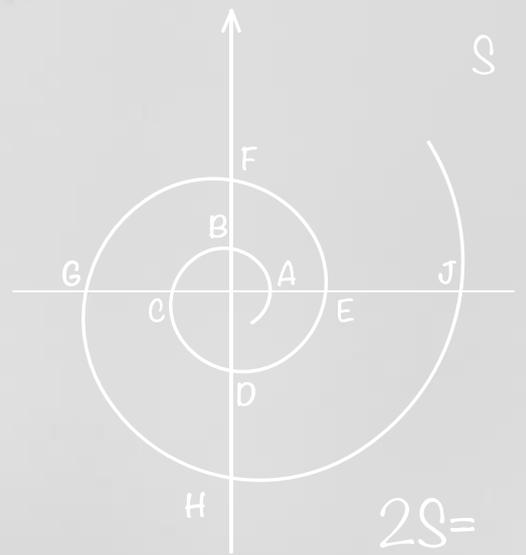
4.

$$s_{\text{total}} = s_{\text{aceleração}} + s_{\text{constante}}$$

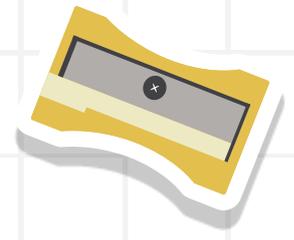
Substituindo os valores:

$$s_{\text{total}} = 70 + 240 = 310 \text{ m}$$

Resposta: O deslocamento total do ciclista foi de **310 m**.



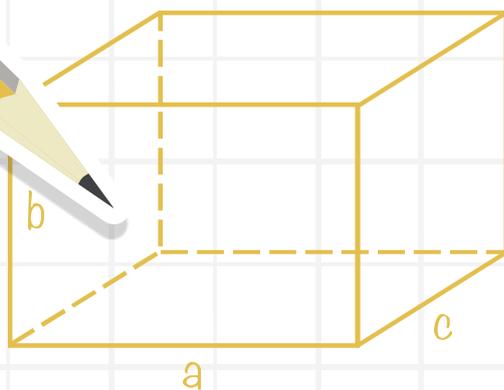
"O conhecimento aplicado é a chave para transformar teoria em prática."



Créditos

Danthy Marcio Barbosa Silva

**Professor Doutor Marcelo
Almeida de Souza**



$$V=abc \quad S=2ab+2bc+2ac$$

