Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Dissertação de Mestrado

Equações Diferenciais Ordinárias Aplicadas a Fenômenos Físicos: Uma Proposta para o Ensino Médio

Isabel Cristina Porcino dos Santos Marques

Cruz das Almas - Bahia
Junho de 2024

Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas a Fenômenos Físicos: Uma Proposta para o Ensino Médio

Isabel Cristina Porcino dos Santos Marques

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Mestrado Profissional em Matemática em Rede da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Andrêssa Lima de Souza.

Cruz das Almas - Bahia
Junho de 2024

FICHA CATALOGRÁFICA

M357e Marques, Isabel Cristina Porcino dos Santos.

Equações diferenciais ordinárias aplicadas a fenômenos físicos: uma proposta para o Ensino Médio / Isabel Cristina Porcino dos Santos Marques._ Cruz das Almas, BA, 2024.

67f.; il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT.

Orientadora: Prof. Dra. Andrêssa Lima de Souza.

1.Matemática – Equações diferenciais. 2.Matemática – Estudo e ensino. 2.Ensino médio – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 515.352

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB. Responsável pela Elaboração Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).

Equações Diferenciais Ordinárias aplicadas a Fenômenos Físicos: Uma Proposta para o Ensino Médio

Isabel Cristina Porcino dos Santos Marques

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, recomendada para aprovação em 18 de Junho de 2024.

Banca examinadora:

Profa. Dra. Andrêssa Lima de Souza (Orientadora)
UFRB

Profa. Dra. Rogelma Maria da Silva Ferreira
UFRB

Profa. Dra. Mariana Tavares de Aguiar
UFBA

Dedico à minha mãe, Maria José, ao meu esposo, Josemar, e aos meus filhos, João e Alice.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que é o autor e consumador da minha fé, dou graças por Ele ter me concedido forças, sabedoria e entendimento durante todos os momentos deste curso. Sua proteção foi fundamental durante todo este percurso.

Minha gratidão ao meu esposo, Josemar, que sempre esteve ao meu lado me apoiando em tudo e também aos meus filhos, João e Alice, que são para mim fonte de inspiração e amor incondicional.

Agradeço aos meus pais, Antônio Porcino (*in memoriam*), cuja partida durante essa fase de escrita da dissertação causou muita dor e uma saudade infinita, e à minha querida mãe, Maria José que sempre me incentivaram a estudar.

Gratidão também aos meus irmãos Luiza, Josélia, Marcos Antônio e Raquel pelo apoio e incentivo de sempre.

Agradeço também à minha orientadora, professora Dra. Andrêssa Lima de Souza, pelo apoio e pelas contribuições para a conclusão deste trabalho, assim como pelas suas palavras que me transmitiram ânimo para continuar.

Agradeço às professoras doutoras Rogelma Maria da Silva Ferreira e Mariana Tavares de Aguiar, que fizeram parte da banca examinadora, pela atenção, pelas sugestões valiosas e pelo tempo dedicado à análise do meu trabalho.

Além disso, agradeço a todos os professores que, ao longo da minha jornada acadêmica, contribuíram de alguma forma para o meu crescimento e aprendizado. Suas orientações e ensinamentos foram essenciais para minha formação como profissional.

Também quero expressar minha gratidão aos meus colegas de curso Arionaldo Peixoto e Glaidon Farias, por todo companherismo e empenho em busca da aprendizagem durante todo este período de curso e pelos momentos de descontração tão importantes para nosso bem estar emocional.

Também agradeço a minha amiga Zezi, pelo apoio, incentivo, viagens compartilhadas e carinho.

A todos os professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia que fazem parte do PROFMAT, em especial, aos professores: Danilo, Anderson, Rogelma, Andrade, Adson, Ariston e Luis pelo conhecimento transmitido, contribuindo assim na minha formação profissional.

Agradeço também a todos os meus gestores, coordenadores pedagógicos e colegas de trabalho pela compreensão e incentivo para superar as dificuldades e seguir sempre em frente. Aos meus alunos que são a base para essa busca de aperfeiçoamento profissional.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), responsável pela coordenação deste importante programa de mestrado e pela oportunidade de poder participar do mesmo.

Meu muito obrigada à CAPES pelo apoio financeiro durante todo o período do curso.

Por fim agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuiram para que este trabalho fosse realizado.

Prefiram a minha instrução à prata, e o conhecimento ao ouro puro, pois a sabedoria é mais preciosa do que rubis; nada do que vocês possam desejar compara-se a ela.

Provérbios 8 : 10 – 11

Resumo

Esta dissertação propõe uma oficina pedagógica que tem como principal objetivo mostrar aos estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio como conteúdos estudados nesse período escolar são fundamentais para aplicações importantes da Matemática em outras áreas do conhecimento. Para isso foi necessário um rápido estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeira ordem, Modelagem Matemática no ensino e a Lei de Resfriamento de Newton. Além disso, implementa-se o uso de recursos tecnológicos que nos dias atuais são essenciais no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Equações Diferenciais ordinárias; Modelagem matemática; Lei do Resfriamento de Newton; Ensino Médio; Ensino de Matemática.

Abstract

This dissertation proposes a pedagogical workshop with the main objective of showing high school Mathematics students and teachers how the content studied during this school period is fundamental for important applications of Mathematics in other areas of knowledge. To achieve this, a brief study of first-order Ordinary Differential Equations (ODEs), Mathematical Modeling in education, and Newton's Law of Cooling was necessary. Additionally, the use of technological resources, which are essential in the teaching and learning process today, is implemented.

Keywords: Ordinary Differential Equations; Mathematical modeling; Newton's Law of Cooling; High School; Teaching Mathematics.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Ao trabalhar a matemática de um forma contextualizada, em muitas situações, faz-se necessário a modelagem do problema trabalhado. E neste momento, podem aparecer modelos que dependem das equações diferenciais. A história da matemática mostra que o estudo das equações diferenciais teve início no final do século XVII, a partir dos estudos de Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, tendo relação com o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Sobre o estudo de tais equações Bassanezi e Ferreira Jr.(1988) relatam que a grande motivação para o estudo de equações, diferenciais é oriundo da Mecânica, e que diversos problemas, como o estudo da oscilação do pêndulo, catenária e o movimento dos planetas, já tinham sido estudados de modo empírico por J. Kepler (1571-1630), L. da Vinci (1452-1519), G. Galilei (1564-1642) e C. Huygens (1629-1695), sendo que lhes faltava a teoria matemática para que pudessem modelar o problema [1].

Neste trabalho, estudaremos as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), que envolvem as derivadas ordinárias de funções desconhecidas de uma única variável. Em particular, trataremos da equação diferencial utilizada na modelagem da Lei de Resfriamento de Newton.

Buscaremos responder ao questionamento: Como fazer uso de conceitos relacionados às equações diferenciais ordinárias como funções e conjuntos numéricos, por meio da modelagem matemática de fenômenos físicos para alunos do ensino médio?

Este trabalho tem como objetivo geral promover o pensamento crítico e a criatividade ao propor problemas e desafios relacionados à modelagem matemática de fenômenos físicos para alunos do ensino médio.

Como objetivos específicos, temos: conceituar equações diferenciais ordinárias (EDOs); conceituar modelo e modelagem matemática; identificar que a modelagem de uma equação diferencial se baseia na compreensão da derivada como a taxa de variação instantânea em relação à variável independente que caracteriza o problema estudado; e apresentar uma maneira de trabalhar problemas e desafios de modo atrativo e significativo para os alunos.

Ao pensar a escola como espaço pedagógico onde o aluno é o centro da aprendizagem, e onde o conhecimento, por meio de procedimentos metodológicos, o aproxime da sua realidade, a matemática deve ser trabalhada de forma contextualizada. De acordo com Biembengut e Hein (2023) a matemática tem sua utilização defendida, nos mais diversos graus de escolaridade, pelo fato de ser alicerce de quase todas as áreas de conhecimento e dotada de uma arquitetura que permite desenvolver os níveis cognitivos e criativos, como meio para fazer emegir a habilidade em criar, modelar e resolver problemas [2].

Por meio deste trabalho, pretende-se oferecer aos educandos e educadores do ensino médio mais um recurso metodológico, cujo objetivo é o ensino de matemática, e que este traga uma experiência de aprendizagem significativa e motivadora. Segundo Biembengut e Hein (2023) o interesse do aluno por tópicos matemáticos desconhecidos pode ser despertado ao aprender a arte da modelagem matemática. Afirma ainda que isso acontece, porque é dado ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, o que ajuda a desenvolver seu interesse e aguça seu senso crítico [2].

Os alunos ao serem instruídos em determinados assuntos de matemática, tem a sensação de que são situações distantes de sua realidade, neste trabalho temos a pretensão de apresentar a modelgem matemática como ferramenta de ensino e aprendizagem que orienta o aluno a construir seu conhecimento através de aplicações práticas.

Estudaremos a lei de Resfriamento de Newton, fenômeno físico cujo estudo pode ser feito sem necessidade de equipamentos laboratoriais avançados. Nossa escolha é justificada pelo fato de essa lei ser modelada por uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem, cuja solução é uma função exponencial, conteúdo estudado no Ensino Médio, utilizado para modelar situações que têm um crescimento ou um decrescimento muito rápido, como, por exemplo, investimento de um capital na forma de juros compostos, o crescimento da população de bactérias em uma cultura ou a decomposição de um material radioativo. Além disso, a lei é bastante aplicada em outras áreas, como Química, Biologia, Engenharia, Medicina, Geografia e Economia.

Este estudo foi fundamentado em uma pesquisa bibliográfica. Inicialmente, buscamos materiais relacionados ao tema em discussão. Em seguida, realizamos uma análise do material selecionado e tentamos extrair as informações mais significativas. De acordo com Gil (2002, p. 44), a pesquisa bibliográfica utiliza materiais previamente desenvolvidos, como livros e artigos científicos e que uma das principais vantagens desse tipo de pesquisa é que ela permite ao pesquisador abranger uma variedade de fenômenos muito maior do que seria possível investigar diretamente [3].

Com a intenção de proporcionar uma atividade motivadora deixaremos como proposta a aplicação de uma oficina pedagógica. A oficina tem como objetivo proporcionar aos participantes uma experiência prática e significativa. No nosso contexto faremos uso de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem aplicadas à física por meio da modelagem matemática. Desta forma, observa-se que a mesma poderá ser abordada em colaboração com os professores de física.

A oficina deverá contemplar atividades tanto práticas quanto teóricas, deverão ser apresentados exemplos concretos e situações do cotidiano que demandem a aplicação de equações diferenciais ordinárias para chegar a uma solução aproximada. É necessário buscar a interação entre todos os envolvidos na oficina para um resultado eficaz.

Quanto a isso Silva e Silva (2019) nos diz que como instrumentos de apoio didático e pedagógico, as oficinas visam superar as dificuldades dos alunos de forma descontraída, sem a pressão da sala de aula, deixando o aluno mais à vontade para participar, além de inovar e transmitir os conteúdos de uma forma mais simples e tranquila, trazendo o assunto escolar para o cotidiano dos alunos e mostrando que o aprender e o ensinar não são práticas mecânicas, mas sim práticas prazerosas e divertidas [4].

A presente dissertação está dividida em quatro capítulos. No primeiro capítulo, discorreremos sobre conceitos relacionados as Equações Diferenciais Ordinárias, em especial as de primeira ordem, que são relevantes para nosso trabalho. No segundo capítulo, abordaremos conceitos referentes à Modelagem Matemática, trazendo as perspectivas de alguns teóricos que realizaram estudos mais aprofundados sobre o tema. No terceiro capítulo apresentamos uma proposta de oficina pedagógica. E, finalmente, no quarto capítulo, discutimos nossas perspectivas futuras sobre o assunto.

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

O estudo das equações diferenciais ordinárias tem início com a criação do Cálculo por Newton e Leibniz, motivados por problemas físicos, e que inicialmente se preocupavam em resolver explicitamente este tipo de equações. No entanto, logo se percebeu que o número de equações que podiam ser resolvidas em termos de funções elementares era muito pequeno, o que motivou as duas formas que a Teoria das equações diferenciais se apresenta nos dias atuais: a Teoria Qualitativa e Quantitativa.

As equações diferenciais constituem uma das mais importantes aplicações do Cálculo, desempenhando um papel fundamental nas diversas áreas da matemática aplicada e ciências naturais, sendo essenciais para modelar fenômenos dinâmicos e evolutivos.

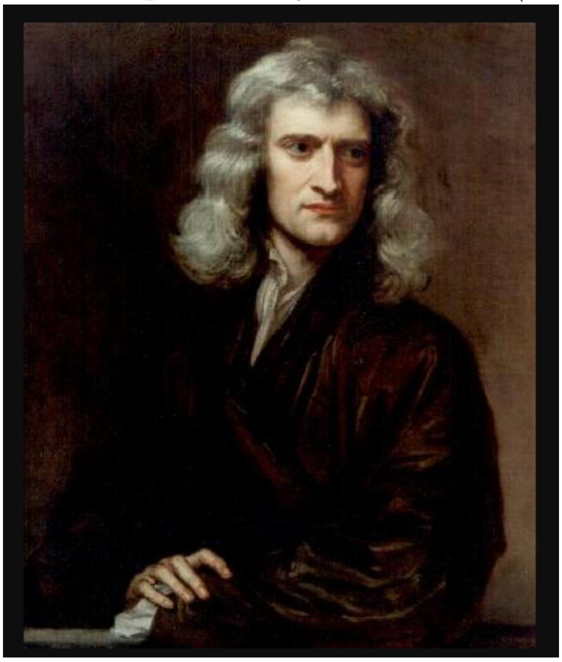
Neste capítulo apresentaremos os principais tópicos da teoria das equações diferenciais que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Para tal utilizamos como referências [1], [5], [6], [7], [8] e [9]. Os dados históricos da seção 1.1 foram extraídos do livro "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno", de Boyce e DiPrima [7].

1.1 Breve histórico das Equações Diferenciais

O estudo do cálculo deu início ao estudo das equações diferenciais por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) durante o século XVII. Newton, cresceu na Inglaterra, recebeu educação no Trinty College, em Cambridge, se tornou professor de matemática, na Cadeira Lucasian, no ano de 1669. As descobertas de Newton sobre Cálculo e as Leis da Mecânica são de 1665 e circulavam de forma reservada apenas entre seus amigos, pois o mesmo era muito sensível às críticas. Por esse motivo seus resultados só começaram a ser publicados a partir de 1687, quando surgiu seu livro mais famoso, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Mesmo tendo atuado pouco na área de equações diferenciais de fato, o desenvolvimento do Cálculo e a comprovação dos princípios básicos da Mecânica deram à base para a aplicação das Equações Diferenciais no século XVIII, especialmente por Euler.

As equações diferenciais de primeira ordem foram classificadas por Newton de acordo com as formas $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$ e $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Ele desenvolveu um método de resolução para última equação no caso em que $f(x, y)$ é um polinômio em x e y usando séries infinitas. O mesmo parou de fazer pesquisas matemáticas no início de 1690, com exceção pela solução de problemas desafiadores eventualmente e publicação de resultados obtidos anteriormente. Recebeu nomeação *Warden of the British Mint* (responsável pela Casa da Moeda Britânica) no ano de 1696 e se demitiu da posição de professor alguns anos depois. Recebeu o título de cavaleiro em 1705 e foi enterrado na Capela de Westminster, após sua morte.

Figura 1.1: Newton retratado por Godfrey Kneller, 1689 (com 46 anos de idade)



Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton`

Leibniz nasceu em Leipzig e terminou o doutorado em filosofia na Universidade de Altdorf com 20 anos de idade. Durante sua vida, demonstrou interesse por atividades acadêmicas em diferentes campos. Era basicamente autodidata em matemática, chegou aos resultados sobre cálculo de forma indepndente, um pouco depois de Newton, mas foi o primeiro a publicá-los em 1684. Ele compreendia a importância de uma boa notação matemática, e é devido a ele a notação de derivada, $\frac{dy}{dx}$, bem como o sinal de integral. Descobriu o método de separação de variáveis e a redução de equações homogêneas a equações separáveis em 1691, e também o procedimento de resolução de equações lineares de primeira ordem em 1694.

Leibniz viveu como embaixador de diversas famílias reais alemãs, o que permitia que viajasse muito e mantivesse uma extensa correspondência com outros matemáticos, principalmente os irmãos Bernoulli. Por meio dessa correspondência, muitos problemas de equações diferenciais foram resolvidos no final do século XVII.

Os irmão Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli, de Basel, desenvolveram diversos métodos para resolver equações diferenciais e contribuiram na ampliação do campo de suas aplicações. Jakob tornou-se professor de matemática em 1687 e Johann foi designado para mesma função quando seu irmão faleceu em 1705. Ambos fizeram importantes contribuições em diversas áreas da matemática. E com ajuda do cálculo resolveram vários problemas de mecânica estruturando-os como equações diferenciais. Já Daniel Bernoulli (1700 - 1782), filho de Johann, interessava-se principalmente, por equações diferenciais e suas aplicações.

Leonhard Euler (1707-1783), maior matemático do século XVIII, foi aluno de Johann Bernoulli. O mesmo foi o matemático mais prolífico de todos os tempos, demonstrava interesses em todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação. Euler, identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas, desenvolveu a teoria de fatores integrantes e encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, estendendo-o para equações não-homogêneas. Também propôs outros procedimentos para resolução das equações diferenciais, como séries de potências e a resolução numérica, fez importantes contribuições em equações parciais, e para o cálculo de variações, deu o primeiro tratamento sistemático.

Sobre Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) os autores destacam que ele foi professor de matemática desde os 19 anos de idade. E em relação as equações diferenciais elementares, Lagrange mostrou que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes, desenvolveu completamente o método de variação dos parâmetros.

Muitos métodos elementares para resolver equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos, no final do século XVIII, assim, as inúmeras equações diferenciais que resistiram aos métodos analíticos levaram à investigação de métodos de aproximação numérica. E com o desenvolvimento de computadores cada vez mais poderosos e versáteis, nos últimos 60 anos, aumentou muito a gama de problemas que podem ser investigados, de maneira efetiva, por métodos numéricos. Embora seja um assunto antigo, as equações diferenciais continuam sendo uma fonte fértil de problemas fascinantes e importantes ainda não resolvidos.

1.2 Teoria de Equações diferenciais ordinárias

Iniciaremos destacando que as equações diferenciais ordinárias (EDOs), são essenciais para modelar e compreender fenômenos que envolvem taxas de variação. Em termos simples, uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que relaciona uma função desconhecida com suas derivadas. Para entender como as equações diferenciais são aplicadas no cotidiano, consideremos o exemplo da queda livre.

Exemplo: Corpos em queda livre

Queda livre é o movimento que ocorre sob a influência exclusiva da gravidade. Isso significa que todos os objetos, independente de sua massa, caem com a mesma aceleração g em direção ao centro da terra.

A aceleração da gravidade g vale $9,8\,\mathrm{m/s}^2$. A equação que representa um corpo em queda livre é:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg \tag{1.1}$$

onde, m é a massa do corpo; g a aceleração da gravidade e $\frac{dv}{dt}$ é a aceleração do corpo. Uma solução geral é representada por:

$$v = \varphi(t) = -gt + c \tag{1.2}$$

onde c é uma constante qualquer. Note que, substituindo $\varphi(t)$ na EDO 1.1, verifica-se uma identidade:

$$m\frac{d\varphi(t)}{dt} = m\frac{d(-gt+c)}{dt} = m(-g) = -mg$$

Considerando $\varphi(t)$ no instante $t = 0$ teremos $t_0 = \varphi(0) = c$, isto é, a velocidade inicial do corpo. Desta forma,

$$v(t) = \varphi(t) = -gt + v_0$$

é a solução particular de 1.1.

Definição 1.2.1. *Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de ordem n é uma equação da forma*

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

em que y é a função a ser determinada.

Observação 1.2.2. *x é a variável independente e y é a variável dependente.*

Traremos agora o conceito formal de EDO. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto. A equação diferencial ordinária de primeira ordem definida por f é dada por

$$x' = f(t, x).$$

Nesta formulação, t é a variável independente, e x é a função desconhecida dependente de t. A expressão x' denota a derivada de x em relação a t.

A ordem de uma equação diferencial é indicada pela maior ordem de derivação que aparece na equação. Uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n tem como expressão geral:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{1.3}$$

onde F é uma função de $n + 1$ variáveis.

A equação 1.3 descreve a relação entre a variável independente x, os valores da função desconhecida y e suas n primeiras derivadas.

Exemplo 1: Equação Diferencial de Primeira Ordem

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem porque a maior derivada é a primeira derivada de y em relação a x.

Exemplo 2: Equação Diferencial de Segunda Ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

Aqui, a maior derivada é a segunda derivada de y em relação a x, portanto, é uma equação diferencial de segunda ordem.

Definição de Solução para uma EDO de Primeira Ordem

Uma solução de uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem é uma função que satisfaz a equação diferencial em um intervalo específico. Em termos mais simples, imagine que temos uma equação que relaciona uma função e suas taxas de variação. A solução é a função que, quando você a diferencia, preenche a relação dada pela equação.

Mais formalmente, se temos uma equação diferencial de primeira ordem dada por:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

uma função $\phi(t)$ é considerada uma solução se:

1. $\phi(t)$ é diferenciável em um intervalo I, o que significa que $\phi(t)$ tem uma derivada em todo o intervalo.

2. Para cada ponto t_0 no intervalo I, a função $\phi(t)$ e sua derivada $\frac{d\phi}{dt}$ devem satisfazer a equação diferencial, ou seja:

$$\frac{d\phi}{dt} = f(t, \phi(t)).$$

Exemplo de Solução

Vamos considerar um exemplo simples para ilustrar essa definição.

Exemplo:

Considere a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = 2t.$$

Queremos encontrar uma função $y(t)$ que satisfaça essa equação. Para resolver isso, procuramos uma função cuja derivada em relação a t seja $2t$. Vamos resolver isso passo a passo:

1. **Encontrar a solução geral:**

   Integramos ambos os lados da equação em relação a t:

$$\int \frac{dy}{dt}\, dt = \int 2t\, dt.$$

Isso nos dá:

$$y(t) = t^2 + C,$$

onde C é uma constante de integração.

2. **Verificar a solução:**

   Para qualquer valor de t, a derivada de $y(t) = t^2 + C$ em relação a t é:

$$\frac{dy}{dt} = 2t.$$

   Isso corresponde exatamente ao lado direito da nossa equação diferencial original. Portanto, $y(t) = t^2 + C$ é uma solução para a EDO.

Conclusão:

Assim, a função $y(t) = t^2 + C$ é uma solução para a equação diferencial $\frac{dy}{dt} = 2t$. Neste exemplo, a constante C pode ser qualquer valor, e a função continua a satisfazer a equação diferencial.

Ao resolver uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, obtemos uma família de soluções que inclui uma constante arbitrária. Quando podemos gerar todas as soluções possíveis da equação escolhendo diferentes valores para essa constante, chamamos essa família de soluções de solução geral da equação.

Vamos definir abaixo o que é o Problema de Valor Inicial(PVI), que é uma forma específica de apresentar uma EDO que inclui uma condição inicial. Dada uma EDO $x' = f(t,x)$ e dado um ponto $(t_0, x_0) \in U$, o Problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial (PVI) associado é escrito como:

$$\begin{cases} x' = & f(t,x) \\ x(t_0) = & x_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Aqui, x' representa a derivada de x em relação a t. Em notação de Leibniz, isto pode ser escrito como $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$. As duas notações são permutáveis, e ambas indicam a taxa de variação de x com respeito a t.

Uma solução de (1.4) é uma solução da equação, $\varphi : I \to \mathbb{R}$, tal que $t_0 \in I$ e $\varphi(t_0) = x_0$.

Portanto, o problema de valor inicial consiste em encontrar a solução particular φ que satisfaz tanto a equação diferencial quanto a condição inicial dada. A solução encontrada para esse problema é geralmente única sob certas condições de existência e unicidade estabelecidas pelas teorias de equações diferenciais. Vamos a seguir encontrar a solução geral de uma equação diferencial e, posteriormente, apresentar um PVI associado e verificar a sua solução.

Exemplo 1.2.3. *A equação*

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t}$$

pode ser resolvida através da integração devido ao Teorema Fundamental do Cálculo

$$y(t) = \int e^{3t} dt = \frac{e^{3t}}{3} + C,$$

que é a solução geral da equação dada. Vamos supor que a condição inicial seja $y(0) = 1$*. Então, o PVI associado à equação diferencial é:*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = e^{3t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Como já sabemos que $y(t) = \frac{e^{3t}}{3} + C$ *é uma solução geral, para encontrarmos o valor de* C *utilizamos a condição inicial:*

$$y(0) = \frac{e^{3.0}}{3} + C = \frac{1}{3} + C = 1.$$

Portanto, $C = \frac{2}{3}$*. Assim, a solução do PVI é* $y(t) = \frac{e^{3t}}{3} + \frac{2}{3}$*.*

Como nem sempre é possível resolver uma EDO de forma simples, como no exemplo acima, o teorema enunciado a seguir nos garante em que condições existe uma solução única para equação diferencial. Ao trabalhar com equações diferenciais ordinárias (EDOs), três perguntas fundamentais devem ser consideradas:

- será que sempre existe solução única de uma EDO com condições iniciais? Em muitos casos, sim, uma EDO com condições iniciais bem definidas possui uma solução única. No entanto, há situações em que uma solução única não pode ser garantida. Por exemplo, considere a EDO:

  $$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y},$$

  com a condição inicial $y(0) = 0$. Essa EDO tem duas soluções: $y(t) = 0$ e $y(t) = t^2$. Isso demonstra que, para algumas condições iniciais, podem existir múltiplas soluções.

- será que sempre conseguimos solucionar uma EDO?

  Nem sempre. Muitas EDOs não podem ser resolvidas de forma explícita utilizando métodos analíticos simples. Para essas equações, recorremos a métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas. Por exemplo, para a EDO:

  $$\frac{dy}{dt} = e^{y},$$

  encontrar a solução exata pode ser complexo. Métodos numéricos podem ser utilizados para obter soluções aproximadas.

- Será que existe um método gráfico para resolver EDO? Sim, métodos gráficos podem ser úteis para entender o comportamento das soluções das EDOs. O campo de direções é uma representação gráfica que mostra como as soluções se comportam em diferentes pontos do plano (t, y). Por exemplo, para a EDO:

$$\frac{dy}{dt} = -y,$$

o campo de direções revela que as soluções são exponencialmente decrescentes, ajudando a visualizar o comportamento da solução.

Para responder essas perguntas, utilizamos o Teorema da Existência e Unicidade das Soluções. Este teorema fornece garantias sobre a existência e unicidade das soluções, desde que a equação diferencial atenda a certas condições. Em resumo, essas condições asseguram que uma EDO de primeira ordem com uma condição inicial bem definida possui uma solução única.

Teorema 1.2.4 (Teorema da Existência e Unicidade)**.** *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua e $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínua em Ω. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função $\phi : I \to \mathbb{R}$ diferenciável com $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é solução do PVI*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

A demonstração do teorema da existência e unicidade não foi incluída nesta dissertação, pois requer definições e conceitos que não foram abordados no corpo do texto. No entanto, para aqueles que desejem acessar a demonstração deste teorema, uma solução da mesma pode ser encontrada no livro “Equações Diferenciais Aplicadas"de Figueiredo e Neves (2018), nas páginas 51 a 55 [8].

1.3 Exemplos de EDOs

Nesta seção, apresentaremos alguns tipos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Essas equações são fundamentais na modelagem de uma variedade de fenômenos naturais. Abordaremos diferentes categorias de EDOs, explorando suas características distintas e, em seguida, exemplificaremos aplicando em fenômenos físicos.

1.3.1 Equação Diferencial Linear

Um tipo importante de equação diferencial é a linear. Uma EDO linear de primeira ordem é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} = p(t)y + q(t),$$

onde $p : I :\to \mathbb{R}$ e $q : I \to \mathbb{R}$ são funções reais contínuas definidas no intervalo aberto I. As duas principais características das equações diferenciais ordinárias lineares são:

1. A função incógnita e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo a função incógnita é um.

2. Os coeficientes da equação depende exclusivamente da variável independente.

Ao resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem, o processo não é tão simples quanto integrar diretamente ambos os lados. Para encontrar a solução geral, geralmente utilizamos o método do fator integrante.

O procedimento para encontrar a solução é o seguinte:

1. **Encontrar o fator integrante**: O fator integrante é uma função $\mu(t)$ que transforma a equação diferencial em uma forma que pode ser facilmente integrada. O fator integrante é dado por:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\, dt}.$$

2. **Multiplicar a equação diferencial pelo fator integrante**: Multiplicando ambos os lados da equação pelo fator integrante, obtemos:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t).$$

Isso transforma a equação diferencial em uma forma que pode ser escrita como a derivada de um produto. Após multiplicar, a equação se torna:

$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)y\right) = \mu(t)q(t).$$

3. **Integrar ambos os lados**: Integrando ambos os lados da equação em relação a t, obtemos a solução geral. Por exemplo, considere a equação diferencial linear:

$$\frac{dy}{dt} + y = e^t.$$

1. Encontramos o fator integrante:

$$\mu(t) = e^{\int 1\, dt} = e^t.$$

2. Multiplicamos ambos os lados da equação pelo fator integrante:

$$e^t\frac{dy}{dt} + e^t y = e^t e^t.$$

Isso simplifica para:

$$\frac{d}{dt}\left(e^t y\right) = e^{2t}.$$

3. Integrando ambos os lados, obtemos:

$$e^t y = \int e^{2t}\, dt = \frac{e^{2t}}{2} + C,$$

onde C é a constante de integração. Portanto, a solução geral é:

$$y = \frac{e^t}{2} + Ce^{-t}.$$

Para resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem, o método do fator integrante é fundamental. Esse método transforma a equação diferencial original em uma forma que pode ser facilmente integrada.

$$y(t) = \int q(t)dt + C.$$

Exemplo 1.3.1. *Considere a equação diferencial:*

$$\frac{dy}{dt} = q(t).$$

Neste caso, a solução pode ser encontrada integrando diretamente o lado direito da equação. Por exemplo, para a equação:

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$

pode ser resolvida integrando ambos os lados, daí temos:

$$y(t) = \int 2tdt = t^2 + C$$

que é a solução geral. Aqui, C é a constante de integração. A função $y(t) = t^2 + C$ é a solução geral para essa equação diferencial.

No entanto, essa abordagem de integração direta não é sempre aplicável para todas as equações diferenciais lineares. Quando a equação inclui um termo $p(t)y$, como na forma:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t),$$

1.3.2 Equação Diferencial não- linear

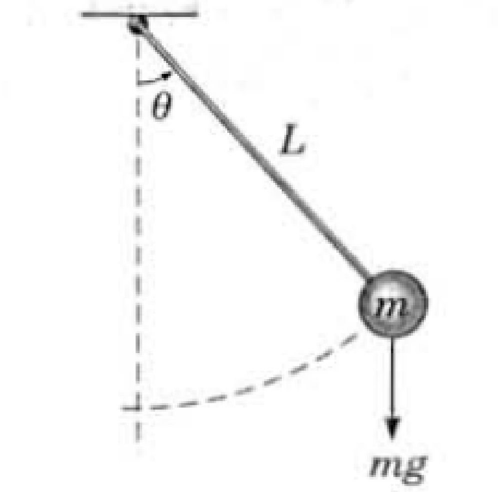
Uma equação que não é linear é chamada de não-linear. Um exemplo de equação não- linear é relacionado a um problema físico: o pêndulo simples.

O ângulo θ que o pêndulo de comprimento L ocilando faz com a direção vertical satisfaz a equação. ver figura 1.2.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\theta = 0$$

onde θ é o ângulo de deslocamento, g é a aceleração devido à gravidade, com um valor aproximado de $9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$ e L é o comprimento da haste do pêndulo. A presença do termo $\sin(\theta)$ torna a equação não-linear. Isso ocorre porque a função seno é uma função não-linear em θ, e a equação não pode ser reescrita de forma a ter uma forma linear em θ e suas derivadas.

Figura 1.2: Pêndulo ocilando



Fonte:[7]

1.3.3 Equação Diferencial Ordinária Separável

Equações diferenciais da forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0, \tag{1.6}$$

com $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ denotando a derivada da função y em relação à variável independente x, recebem o nome de separáveis. Suponha que f e g sejam funções contínuas em intervalos abertos $f : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad g : (c, d) \to \mathbb{R}$. Podemos escrever a equação 1.6 na forma

$$g(y)y' = f(x). \tag{1.7}$$

O nome "separável" origina-se da forma de escrever 1.7 usando formas diferenciais: $g(y)dy = f(x)dx$

Para resolver essa equação, integramos ambos os lados. No lado esquerdo, integramos em relação a y, e no lado direito, em relação a x:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

.

Como f e g são funções contínuas em intervalos abertos, podemos proceder com a integração. A solução da integral à esquerda nos dá uma expressão para y em termos de x, ou seja, y como uma função de x. A integral à direita dá uma função primitiva de f, que geralmente envolve x e uma constante de integração.

Exemplo 1.3.2. *Encontre a solução geral da equação*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$$

Resolução:

$$
\begin{aligned}
3y^2dy &= 2xdx \\
\int 3y^2dy &= \int 2xdx \\
y^3 &= x^2 + C \\
y &= \sqrt[3]{x^2 + C}
\end{aligned}
$$

Neste exemplo, a equação diferencial é separável e foi resolvida integrando ambos os lados da equação. A constante C é a constante de integração.

Exemplo 1.3.3. *Considere a equação diferencial* $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$*, encontre a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial* $y(0) = 2$*.*

Solução:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{y^2} \\
y^2dy &= x^2dx \\
\int y^2dy &= \int x^2dx \\
\frac{y^3}{3} &= \frac{x^3}{3} + C
\end{aligned}
$$

Resolvendo para y, obtemos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Fazendo $K = 3C$, temos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

Fazendo $x = 0$, verifica-se

$$y(0) = \sqrt[3]{K}$$

Como a condição inicial é $y(0) = 2$, vem que

$$\sqrt[3]{K} = 2$$

E assim $K = 8$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é $y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$.

Dessa forma, a equação diferencial dada é resolvida com a condição inicial $y(0) = 2$. A solução particular encontrada é

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

que representa a função que satisfaz tanto a equação diferencial quanto a condição inicial.

Ao entender como resolver equações diferenciais ordinárias e aplicar condições iniciais, estamos agora prontos para dar mais um passo. O próximo capítulo nos introduzirá ao conceito de modelagem matemática.

Capítulo 2

Modelagem Matemática

Neste capítulo apresentaremos a importância da utilização da modelagem matemática quando se trata de compreender e resolver problemas em diversas áreas do conhecimento, destacando seu valor na contextualização de assuntos escolares.

2.1 Reflexões sobre Modelagem Matemática

Os modelos matemáticos são criados para interpretar fenômenos naturais e sociais. Na Matemática, eles são fundamentais para formular e resolver problemas complexos, sendo essenciais para validar teoremas e conjecturas. Quanto a isto os autores Biembengut e Hein (2023) nos diz que o ser humano sempre recorreu aos modelos, tanto para se comunicar com seus semelhantes como para preparar uma ação e que sendo assim, a modelagem, arte de modelar, participa da nossa vida como forma de constituição e de expressão do conhecimento sendo um processo que emerge da própria razão [2].

Em conformidade com Silva Júnior (2022) o significado básico de modelo matemático refere-se à apresentação de uma visão simplificada da realidade do ponto de vista do pesquisador, uma vez que a palavra modelo tem sua origem no latim modellum, forma diminutiva de modus, que, por sua vez, significa "medida que não pode ser ultrapassada". Por outro lado, Matemática deriva da palavra grega matemathike, sendo que Máthema significa "compreensão, explicação, ciência, conhecimento, aprendizagem" e thike "arte", portanto a matemática é a "arte de explicar e conhecer os números e as formas geométricas" [10].

Para Sondré (2007) um modelo matemático, ou simplesmente modelo, pode ser apresentado conceitualmente como uma representação de um sistema real, significando que um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem as modificações no mesmo. Acrescenta ainda que normalmente, um modelo é uma simplificação do mundo real ou uma forma conveniente de trabalhar com ele, mas as características essenciais do mundo real devem aparecer no modelo, de modo que o seu comportamento seja igual ou semelhante ao do sistema modelado [11].

De acordo com Biembengut e Hein (2023) a expressão "modelo matemático" refere-se a um conjunto de símbolos e relações matemáticas que busca representar de alguma maneira um fenômeno específico ou um problema de situação real [2].

Desta forma é perceptível a importância de extrair as ideias principais da situação problema e, transformá-las em linguagem matemática de maneira estruturada, afim de obter um modelo matemático.

Na esfera educacional, a Modelagem matemática surge como uma abordagem alternativa ao ensino convencional de diversas disciplinas que se beneficiam com o uso desse método. Ela se apresenta como um dispositivo dinâmico de instrução, atuando como ferramenta valiosa na fomentação de alcançar o objetivo de ensino aprendizagem. Sua principal intenção está em fazer uma conexão entre o contexto cotidiano e o ambiente de aprendizagem, através da elaboração de modelos matemáticos.

Segundo Bassanezi (2002) a modelagem matemática, é um processo que alia teoria e prática, em seus vários aspectos, motivando seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la. Diz ainda que, a modelagem matématica é tida como a arte de transformar problemas reais em problemas matemáticos e também resovê-los iterpretando suas soluções na linguagem do mundo real [12].

A utilização da modelagem no processo de ensino-aprendizagem oferece a chance de explorar a criatividade não apenas ao aplicar habilidades matemáticas, mas especialmente ao formular problemas inéditos, uma etapa tão desafiadora quanto a resolução (Bassanezi, 2015) [5].

Logo, observa-se que a modelagem matemática é benéfica para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e cognitivas dos alunos, capacitando-os para formular e desenvolver problemas onde a aplicação da matemática é eficiente, e torna o processo de aprendizado mais significativo, preparando os alunos para um futuro gratificante.

Em seu livro Modelagem Matemática: Teoria e Prática, Bassanezi (2015) destaca algumas etapas para a modelagem, das quais elencamos [5]:

1. Escolha de temas

   A escolha do tema é o início de uma modelagem matemática. Para que possam propiciar questionamentos em várias direções é preciso que seja feito um levantamento de possíveis situações de estudo as quais devem ser, preferencialmente, abrangentes. Pode-se pensar, por exemplo, se o tema escolhido for vinho, em problemas relacionados a vinicultura, fabricação, efeitos do álcool no organismo humano,distribuição, construção de tonéis, entre outros. Se o tema escolhido for abelha, podem surgir problemas de dinâmica populacional, comercialização do mel, etc. Sendo que se o tema escolhido for desconhecido, o professor precisa antes de tudo, procurar temas correlacionados e buscar uma analogia entre os fenômenos, ou ao menos, entre as tendências de seus valores.

   O autor destaca a importância de os alunos fazerem a escolha do tema, pois assim eles se sentirão corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, participando de forma mais efetiva. Deixa claro ainda que a escolha final fica na dependência da orientação do professor, que falará sobre exequibilidade de cada tema, facilidade para obter dados, visitas etc.

2. Coleta de dados

Após escolher o tema, o próximo passo é coletar informações relacionadas com o assunto. Isso pode ser feito de várias maneiras:

- como entrevistas e pesquisas executadas com os métodos de amostragem aleatória;
- Por meio de pesquisa bibliográfica utilizando dados que já foram adquiridos e catalogados em revistas especializadas e livros;
- Experiências programadas pelos próprios alunos.

A coleta de dados, tendo o tema escolhido como pano de fundo, os resultados obtidos muitas das vezes é bastante inesperado e interessante por coletar ou selecionar informações de outras situações correlatas ao tema inicial.

Os dados devem ser organizados em tabelas afim de favorecer uma análise mais eficiente, podendo ser utilizados para a construção dos gráficos das curvas de tendências.

3. Análise de dados e formulação de modelos

   Convencionou chamar de modelagem matemática a busca por um modelo que expresse a relação entre as variáveis. Esses modelos são dados, frequentemente, pela solução de sistemas variacionais. Sendo conveniênte compreender como é a variação das variáveis envolvidas no fenômeno analisado.

4. Validação

   O processo de aceitação ou rejeição é a validação de um modelo, análise esta que está condicionada a diversos fatores, sendo necessário confrontar os dados reais com os valores do modelo. Um bom modelo serve para explicar resultados e tem capacidade de prever novos resultados ou relações insuspeitas.

A ideia de modelagem está bem descrita abaixo:

> "A ideia de modelagem suscita a imagem de um escultor trabalhando com argila, produzindo um objeto. Esse objeto é um modelo. O escultor munido de material-argila, técnica, intuição e criatividade-faz seu modelo, que na certa representa alguma coisa, seja real ou imaginária. Segundo o dicionário da língua portuguesa o termo modelo designa 'uma representação de alguma coisa (uma maquete por exemplo), um padrão ou ideal a ser alcançado (uma pessoa), ou um tipo particular dentro de uma série (um modelo de carro)'." [2, p.11]

Ao fazermos uso da modelagem matemática devemos ter o cuidado de não acreditarmos de forma ingênua que a mesma possa resolver todos os problemas. Quanto a isso Sondré (2007) [11] diz que, muitos pesquisadores estão começando a usar a modelagem como algo novo, achando que é uma ferramenta matemática inovadora. Segue afirmando ainda que, a modelagem é, na verdade, um teste quantitativo de hipóteses que tem sido utilizado com sucesso há muitos séculos na

Matemática e nas ciências. O que é realmente novo é o uso cada vez mais frequente deste método em sistemas reais, ao contrário da abordagem tradicional.

Através da modelagem matemática, é possível identificar padrões, antecipar comportamentos e encontrar soluções inovadoras para desafios em variados campos, como física, biologia, economia e engenharia. Dessa forma, a modelagem matemática desempenha um papel crucial na ciência e na tecnologia, contribuindo para o avanço do conhecimento e o progresso da sociedade.

2.2 Modelagem Matemática no Ensino

Segundo Biembengut e Hein (2023) nas últimas três décadas, as discussões sobre ensino e aprendizagem através da modelagem matemática têm ganhado espaço em diversos países, com posicionamentos tanto a favor quanto contra sua utilização. Observa-se ainda que aqui no Brasil, um dos primeiros trabalhos sobre modelagem no ensino foi feito pelo professor Aristides Camargo Barreto, da Pontifícia Universidade Católica (PUC) do Rio de Janeiro, na década de 1970. Já a consolidação e a divulgação se efetuaram por meio de vários professores, particularmente, pelo professor Rodney Bassanezi, da Unicamp de Campinas-São Paulo e seus orientandos. E pelo fato de estarem surgindo diversos pesquisadores nesta área de estudo, os autores evitam citar outros nomes afim de não correr o risco de esquecer alguém [2].

Biembengut (2009) menciona , que Barreto e Bassanezi ao darem inicio e promoverem a adoção da Modelagem Matemática no ensino aqui no Brasil, obtiveram resultados em suas experiências que foram favoráveis e os motivaram a explorar novas perspectivas. E que por outro lado, Rodney Carlos Bassanezi teve suas primeiras incursões na Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem através da Matemática Aplicada durante a década de 1980. Bassanezi foi responsável pela criação do primeiro curso de especialização em Modelagem Matemática e pela promoção de vários outros cursos nessa área, em diferentes instituições de Ensino Superior no Brasil [13].

Nos últimos anos, tem sido crescente o interesse de educadores brasileiros pela modelagem matemática que tem sua base na matemática aplicada. Essa proposta pedagógica tem sido adotada devido aos seus benefícios no preparo dos alunos para enfrentar desafios do mundo contemporâneo.

A adoção da Modelagem Matemática como recurso didático tem sido cada vez mais valorizada por professores, que buscam inovação em suas práticas pedagógicas. Essa abordagem visa não apenas motivar os alunos, mas também proporcionar um aprendizado matemático que esteja conectado com a realidade, capacitando-os a aplicar seus conhecimentos em problemas interdisciplinares.

Sobre o uso de modelagem matemática processo de ensino-aprendizagem Bassanezi (2015) discorre, que a mesma oferece a chance de exercitar a criatividade não apenas na aplicação das habilidades matemáticas, mas também na formulação de problemas originais, uma etapa tão estimulante quanto a própria resolução [5].

Biembengut e Hein (2023) cita que modelagem matemática, em sua essência, é uma abordagem de ensino que começa com uma situação ou tema específico e formula questões que são respondidas utilizando ferramentas matemáticas e pesquisa sobre o assunto [2].

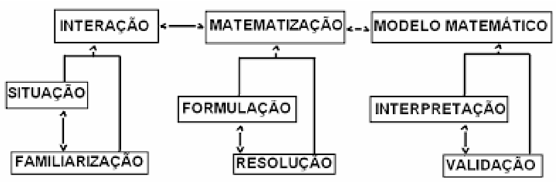
Quanto o aprendizado de modelagem, Bassanezi cita:

> Entretanto, o aprendizado de modelagem não se restringe à comprreensão e ao uso de técnicas padronizadas ou procedimentos sequenciais que seguem um protocolo. Na verdade, da mesma forma que só se pode aprender a jogar futebol jogando, só se aprende modelagem modelando! O técnico do time pode aprimorar as ações de um jogador; e ensaiar com ele jogadas mais efetivas, mas o resultado dependerá muito da habilidade deste jogador; e, ainda asssim, em cada partida, sua atuação e seu rendimento poderão ser distintos de acordo com o comportamento da equipe adversária. Da mesma forma o professor de matemática pode apenas fornecer a seus alunos ferramentas matemáticas e estimulá-los a empregá-las em situações concretas usando a imprescindível criatividade e uma grande capacidade de adaptação a situações e problemas novos. Saber trabalhar com modelagem matemática é quase como conseguir pintar bons quadros, no sentido de que não basta conhecer as técnicas (de misturar as tintas ou obter efeitos com pincel) ou reproduzir alguma obra de outro pintor, é preciso aliar às habilidades técnicas uma boa dose de talento. [5, p.12-13]

Desta forma observamos que, no texto citado, Bassanezi ressalta a importância da prática e da criatividade na aprendizagem da modelagem matemática, enfatizando que o processo de modelagem é dinâmico e requer habilidades que vão além do simples conhecimento técnico.

Segundo Biembengut e Hein (2023) um professor que deseja trabalhar com modelagem matemática devem seguir três etapas, subdivididas em seis subetapas, conforme apresentado na figura 2.1 a seguir [2].

Figura 2.1: Dinâmica da modelagem matemática.



Fonte:[2]

Na primeira etapa, chamada de interação, deve ser feito um estudo indireto sobre o assunto, uma vez delineada a situação que se pretende estudar, por meio de livros, revistas especializadas entre outros ou direto por meio de experiência em campo, de dados experimentais obtidos com especialistas da área.

Os autores ainda afirmam que mesmo esta etapa estando subdividida em reconhecimento da situação-problema e familiarização não se finda ao passar para etapa seguinte e nem obedece uma ordem rígida. Acrescentam que à medida que se vai interagindo com os dados, a situação problema torna-se cada vez mais clara.

A segunda etapa é a Matematização, que envolve a transformação da linguagem natural (o problema investigado e apresentado na fase anterior) em uma linguagem matemática. Os autores deixam claro que o objetivo principal deste momento do processo de modelar é chegar a um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou programas computacionais, ou gráfico, ou equações algébricas, que permitam a dedução de uma solução ou levem à solução.

Quanto a esta etapa os autores ainda afirmam que com a situação problema formulada, a resolução ou análise é realizada com o “ferramental” matemático de que se dispõe. E que há necessidade de um aguçado saber sobre as entidades matemáticas empregadas na formulação. Também acrescentam que em situação-problema em que a resolução não seja possível por processos contínuos, resultados aproximados são obtidos por processos discretos com o uso do computador.

A terceira etapa refere-se ao Modelo Matemático, que envolve uma análise e interpretação dos resultados obtidos a partir do problema abordado em sala de aula. Isso permite que os participantes verifiquem a validade do modelo construído.

Biembengut e Hein (2023) [2] deixa algumas orientações para aqueles que querem trabalhar com modelagem, mas não sentem-se seguros para tal, dentre as orientações, está:

- Explorar modelos clássicos através da leitura de obras sobre a história da ciência moderna e adaptá-los para serem utilizados em sala de aula;
- Apresentar os tópicos do currículo através da aplicação de modelos matemáticos provenientes de disciplinas como Física, Química, Economia e outras áreas do conhecimento;
- Utilizar brevemente trabalhos ou projetos desenvolvidos por colegas, em uma única turma e de preferência em um assunto que se tenha maior conhecimento;
- Sugerir aos alunos que busquem exemplos ou desenvolvam seus próprios modelos, sempre baseando-se em situações da vida real.

Desta forma á instrução dos autores é de que haja uma busca por modelos clássicos na literatura e que estes modelos devem ser adaptados para sala de aula. Os autores ainda trazem como sugestão a utilização de projetos desenvolvidos por colegas, o que pode promover a troca de experiências e o aprendizado colaborativo. Por fim, a sugestão de incentivar os alunos a buscar exemplos da sua realidade e tentar criar seus modelos.

No que diz respeito a modelagem matemática no ensino, Bassanezi (2015) salienta que a estratégia de modelagem, desde que se use um conteúdo compatível com o estágio de desenvolvimento dos alunos, pode ser adotada em qualquer situação ou ambiente educacional. Acrescenta ainda que no nível superior, os problemas e modelos, embora tenham um grau maior de dificuldade e sofisticação, os passos seguidos para o uso da modelagem são os mesmos que nos outros níveis de ensino: medir e/ou contar, analisar dados, formular hipóteses, propor modelos e validá-los [5].

Ainda de acordo com Almeida e Dias (2004) uma Modelagem eficiente permite explicar o problema, tomar decisões e fazer previsões destacando que, isso mostra ser possível influenciar nas mudanças sociais e mais estudos dessa natureza tornam a matemática escolar mais interessante em qualquer nível de ensino, levando os alunos a incorporar e compreender conceitos matemáticos de forma mais significativa [14].

Segundo Burak (2016) a Modelagem Matemática continua a atrair adeptos devido às suas possibilidades metodológicas e à visão abrangente que proporciona sobre um tema. E que ela integra a forma natural e indissociável do ensino e da pesquisa, permitindo alcançar um dos principais objetivos da educação: o desenvolvimento da autonomia do aluno. Diz ainda que além disso, atende às necessidades de um ensino de Matemática mais dinâmico, conferindo significado às ações desenvolvidas e tornando o estudante mais atento, crítico e independente [15].

Sobre o uso dessa metodologia de ensino, Marcão, Oliveira e Santos (2021) nos dizem que, desde o final da década de 1970, a modelagem matemática tem sido aplicada por alguns professores no Brasil. E ao longo dos anos, essa abordagem de ensino tem sido aprimorada e fortalecida por meio de pesquisas e experimentações, ganhando destaque por sua capacidade de relacionar os conteúdos matemáticos com situações do dia a dia dos estudantes [16].

Renz (2015) ao falar sobre a aplicação desse método de ensino, destaca a importância da flexibilidade do professor em fazer ajustes e incorporar abordagens que enriqueçam a aprendizagem dos alunos, mesmo que isso signifique dedicar mais tempo além do currículo estabelecido no início do ano letivo. Ele ressalta que o uso da Modelagem Matemática é valioso para consolidar os conceitos trabalhados em sala de aula. Enfatiza também sobre a necessidade de uma postura interdisciplinar por parte do professor, buscando ligações entre diferentes áreas do conhecimento para contextualizar o conteúdo ministrado. E que mesmo sendo dificultoso no início para os estudantes lidar com algo novo, o autor defende a persistência na aplicação desta técnica, destacando que as barreiras serão superadas com a prática e experiência [17].

O autor ainda afirma que a escolha do tema e a falta de conhecimento sobre a aplicação dessa metodologia de ensino podem ser superadas com dedicação e compromisso para uma educação de qualidade, uma vez que os benefícios oferecidos para o aprendizado dos alunos superam quaisquer obstáculos apresentados.

De acordo com Silva Júnior (2022) a utilização da modelagem requer disposição do professor para adentrar em um cenário sem respostas definitivas, onde podem surgir diversas questões, sendo que algumas delas podem não ter solução imediata. E que nessa abordagem, é necessário alterar o foco do ensino, entendendo que é o aluno quem efetivamente aprende em lugar de que o professor é o detentor do conhecimento. E dessa forma, por meio de atividades planejadas, é possível promover o desenvolvimento de habilidades e competências no estudante, capacitando-o a aprender e a compreender sua realidade de maneira crítica [10].

2.3 Modelagem matemática no ensino de física

A busca por melhorias nos metódos de ensino encontra-se em constante evolução, uma vez que busca-se resultados positivos relacionados a aprendizagem dos alunos. No ensino de física não é diferente, os professores tem empregado técnicas tais como a modelagem matemática na busca desses resultados.

A modelagem matemática desempenha um papel fundamental no ensino de física, permitindo aos alunos aplicar conceitos teóricos a situações do cotidiano. Segundo Bassanezi (2015) [5], é fundamental alterar abordagens e explorar diferentes métodos para a transmissão e aquisição de conhecimento. Por exemplo, ao estudar o movimento de um objeto em queda livre, os alunos podem utilizar equações diferenciais ordinárias para descrever matematicamente a trajetória do objeto. Dessa forma, a modelagem matemática não apenas torna o ensino de física mais interessante e significativo para os alunos, mas também os prepara para enfrentar desafios do mundo real que requerem habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico.

A integração da modelagem matemática no ensino de física não só enriquece a compreensão dos fenômenos físicos, mas também promove o desenvolvimento de competências essenciais. Ao aplicar conceitos teóricos a situações da vida real, os alunos não apenas se envolvem mais profundamente com o conteúdo, mas também desenvolvem pensamento crítico e habilidades de resolução de problemas. Estas competências são a base para a preparação dos alunos para enfrentar os desafios do mundo real, onde a capacidade de modelar e resolver problemas complexos é cada vez mais valorizada. Assim, a modelação matemática não só torna o ensino da física mais interessante e significativo, mas também prepara os alunos para se tornarem cidadãos ativos e críticos numa sociedade cada vez mais complexa.

2.4 O uso de tecnologias para modelagem matemática

Tornar as aulas de matemática mais atrativas é um dos objetivos básicos do professor interessado na aprendizagem de seus alunos, e nos dias atuais é notório a presença de muitos aparatos tecnológicos que podem influenciar positivamente neste aspecto. Com o uso de tais recursos é possível desenvolver diversas tarefas escolares com intuito de desenvolver no aluno o racicínio lógico e o despertar para o conhecimento. Com base nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio [18], é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica, para a escolha de conteúdos. Espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico ao final do ensino médio.

Quanto ao uso de tecnologias nas aulas de matemática, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [18]nos diz que para o estudo das funções, equações e desigualdades da geometria analítica, como retas, círculos, cônicas e superfícies, dispomos de uma variedade de pogramas. Em muitos desses recursos, é possível trabalhar tanto com coordenadas cartesianas quanto com coordenadas polares. Os recursos disponíveis facilitam a exploração algébrica e gráfica de forma simultânea, o que auxilia o aluno na compreensão do conceito de função e no significado geométrico do conjunto solução de uma equação ou inequação.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [19] deve-se reconhecer as potencialidades das tecnologias digitais para a execução de muitas atividades referentes a diversas áreas do conhecimento, em diferentes práticas sociais e ao mundo do trabalho.

A BNCC enfatiza que faz-se necessário:

> usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade. [19, p.474]

Em nosso estudo daremos ênfase ao software Geogebra, por ser um software livre, e oferecer suporte de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, o que fortalece o desenvolvimento do conhecimento matemático, ajudando tanto professores quanto alunos na construção de tal conhecimento.

2.4.1 Software GeoGebra

O GeoGebra é um software matemático gratuito que combina geometria, álgebra e cálculo em um ambiente interativo. Foi criado pelo matemático Markus Hohenwarter em 2001, e tem destacado-se como uma ferramenta inovadora no ensino de matemática. Disponível para diversas plataformas, como computadores, tablets e smartphones. Seu ambiente dinâmico e visual aprimora o raciocínio matemático e a capacidade de resolução de problemas, sendo amplamente empregado em diversos níveis educacionais [20].

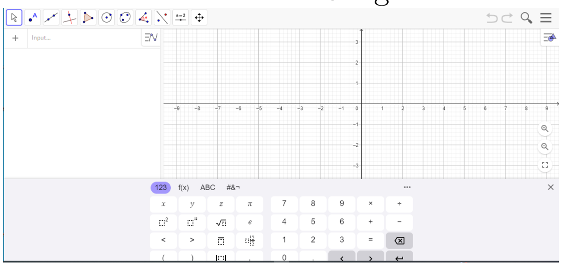
O software possui licença de código aberto, o que facilita sua aquisição, instalação e distribuição, sendo acessível em diversos sistemas operacionais, o que facilita seu uso pelos alunos em diferentes ambientes. Normalmente, o usuário não tem dificuldade em se adaptar ao GeoGebra, pois ao utilizá-lo, as funções dos botões são exibidas quando o cursor do mouse é posicionado sobre eles, o que promove a autonomia de quem o utiliza.

O softwere também permite a criação de perfis de usuário, facilitando o compartilhamento de projetos e materiais. Para utilizar o GeoGebra, é simples: basta acessar o site oficial https://www.geogebra.org e você encontrará diversas ferramentas gratuitas, incluindo calculadoras, recursos para álgebra, estátistica e cálculo.

Interface Inicial do GeoGebra

Ao acessar o site `https://www.geogebra.org/classic` [21] e iniciar o GeoGebra no desktop, o software exibe uma barra de menus, uma barra de ferramentas, uma barra de entrada, uma janela de álgebra e uma janela de visualização 2D, conforme ilustrado na Figura 2.2 abaixo.

Figura 2.2: Tela inicial do Geogebra no desktop

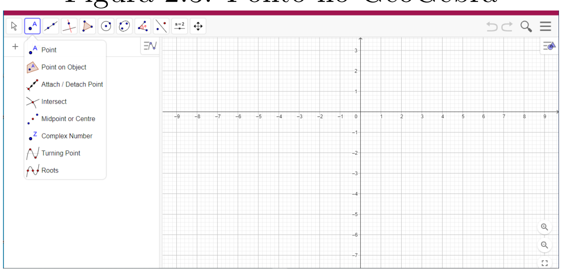


Fonte:www.geogebra.org/classic

Alguns dos pricipais recursos do geogebra relacionado a álgebra está em poder representar equações e inequações, manipular e simplificar expressões, e criar gráficos de funções e relações. Na área do cálculo o usuário pode representar funções e suas derivadas, também pode integrar funções e ter uma visualização de conceitos de cálculo, como limites e áreas sob curvas. Já na Modelagem Matemática o software permite a criação de modelos matemáticos para simulações.

Uma das funcionalidades do GeoGebra é a criação de pontos como exemplificado na Figura 2.3

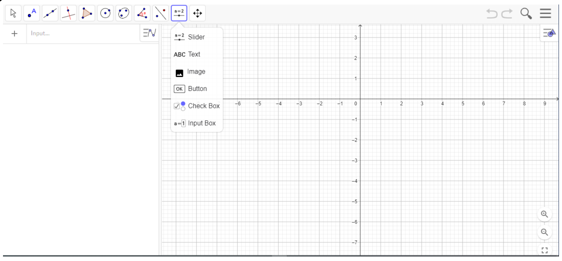
Figura 2.3: Ponto no GeoGebra



Fonte:www.geogebra.org/classic

Outra ferramenta de grande utilidade para o nosso trabalho são os controles deslizantes. Eles permitem criar elementos interativos para ajuste de valores, inserção de textos, inclusão de imagens, entre outras funcionalidades, conforme ilustrado na Figura 2.4

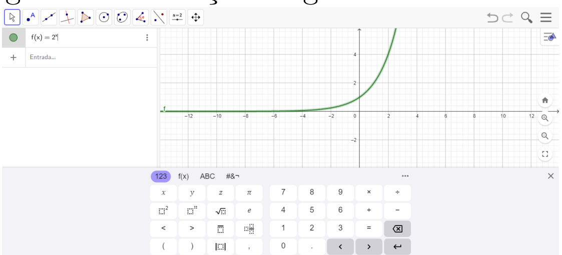
Figura 2.4: Controles Deslizantes no GeoGebra



Fonte:www.geogebra.org/classic

Além disso, é possível traçar gráfico de função no GeoGebra, bastando inserir a equação na barra de entrada, como pode ser visto na figura 2.5

Figura 2.5: Inserção de gráfico no GeoGebra



Fonte:www.geogebra.org/classic

As funcionalidades listadas acima são apenas algumas das muitas que esta ferramenta possui. O ensino e aprendizagem da Matemática são intensificados diante do caráter dinâmico e interativo do GeoGebra, que permite a exploração de conceitos de forma mais intuitiva e visual, tornando o aprendizado mais significativo.

Capítulo 3

Proposta de Oficina: "Resfriando a Cuca"

Apresentaremos neste capítulo a proposta de uma oficina que poderá ser aplicada a estudantes do segundo e terceiro ano do Ensino Médio, com o intuito de mostrar como a matemática é essencial para sua formação, pois a mesma constitui uma valiosa ferramenta aplicada em diversas áreas do conhecimento e da vida prática.

O nome escolhido para a oficina sugere uma abordagem motivadora para que os alunos absorvam os conceitos matemáticos trabalhados na oficina de forma eficaz. A metáfora do resfriamento é inspirada na Lei de Resfriamento de Newton, que que afirma "a taxa de variação da temperatura de um corpo (sem fonte interna) é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente" (BASSANEZI; FERREIRA JR., 1988, p. 43) [1]. Trazendo essa ideia para o contexto educacional, podemos considerar a mente dos alunos como o objeto que está sendo resfriado, ou seja, acalmado e preparado para a absorção de novos conhecimentos.

Essa oficina também pode ser utilizada para docentes de diversos níveis escolares, com o objetivo de aperfeiçoar a formação dos mesmos e estimulá-los a usar esse tipo de metodologia em sua prática pedagógica.

3.1 Importância das oficinas pedagógicas

Com objetivo de obter resultados positivos relacionados a aprendizagem dos alunos, muitos professores recorrem ao uso de oficinas pedagógicas em sua sala de aula. Uma vez que a oficina consegue relacionar bem teória e prática mantendo o aluno como sujeito ativo no processo de construção do conhecimento.

De acordo com Fontana e Paviani (2009) oficina é uma metodologia que permite os participantes experienciar situações concretas e significativas com objetivos pedagógicos, baseada no tripé: sentir-pensar-agir. Deste modo, através da oficina a aprendizagem deixa de ser tradicional e passa a incorporar a ação e a reflexão do estudante. As autoras ainda afirmam que na "oficina ocorrem apropriação, construção e produção de conhecimentos teóricos e práticos, de forma ativa e reflexiva."[22, p.78]

Assim, as oficinas estimulam o pensamento crítico, desenvolve habilidades como a criatividade, estimula a resolução de problemas, bem como a comunicação e colaboração. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (2000) as necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática [23]. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2018) também afirma que o foco no Ensino Médio é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. Segue dizendo que nesse contexto, onde a realidade é tomada como referência, é preciso levar em consideração as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos avanços tecnológicos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros [19].

Desta forma percebe-se que é preciso visar na importância da Matemática não apenas como uma disciplina isolada, mas como um instrumento para a resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento crítico em diferentes contextos. O uso da oficina permite que isso aconteça pois possibilita aos educandos a compreensão dos conteúdos através de atividades práticas, onde eles participam de maneira ativa e reflexiva, dando mais significado a aprendizagem. Pois o estudante precisa "compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas." [23, p. 95]

3.2 Oficina: "Resfriando a cuca"

A oficina aqui construída tem como objetivo principal mostrar aos discentes como conteúdos de matemática, apresentados a eles no Ensino Médio podem ser aplicados no estudo de fenômenos físicos. Além disso, ressaltamos que os mesmos servem de alicerce para estudos mais avançados, o que fundamenta a questão do ensino e aprendizagem de tais assuntos.

Destacamos que esta oficina é uma sugestão onde o professor pode ajustar de acordo à realidade da sua turma e da sua escola. No decorrer das atividades o mesmo deve desempenhar o papel de mediador, estimulando os educandos a realizarem as atividades com pensamento criativo e crítico, além de compartilhar suas ideias com os colegas, caso seja necessário. Em seguida apresentamos uma sequência didática como sugestão de aplicação da oficina. Vale enfatizar também que a mesma tem caráter interdiciplinar podendo ser feita em parceria com professores de Física.

Descreveremos os passos necessários para aplicação da Oficina.

3.2.1 Objetivos da Oficina

- Compreender a aplicação da matemática na modelagem de fenômenos físicos.
- Desenvolver habilidades de resolução de problemas.

- Enfatizar a importância das funções.

3.2.2 Público Alvo

Estudantes do 2º e 3º ano do Ensino Médio. A escolha dessas duas séries foi feita considerando que estes estudantes já tiveram contato com os seguintes conteúdos: números reais, funções, gráficos, etc.

3.2.3 Duração

A presente oficina pode ser aplicada em três encontros de 100 minutos cada, sendo que cada hora aula é equivalente a 50 minutos, então teremos um total de seis horas aula.

3.2.4 Recursos Utilizados

- Datashow ou projetor;
- Computador ou tablet;
- Material de apoio impresso;
- Papel e caneta;
- Vasilhas de variados tamanhos com líquidos quentes;
- Termômetro;
- Cronômetro;
- calculadora científica;
- luvas térmicas.

3.2.5 Pré-requisitos

- Entender o conceito de função, em especial as funções exponenciais.
- Física básica: Estar familiarizados com os conceitos de temperatura, calor, troca de calor.
- Familiaridade com logaritmos.
- Capacidade de interpretar gráficos de função.
- Compreender a relação entre a taxa de variação da temperatura e a diferença de temperatura entre o objeto e o ambiente.

3.2.6 Modelo Físico a ser estudado: Lei do resfriamento de Newton

Com base na lei empírica de esfriamento de Newton, a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do ambiente.

Quando um corpo com temperatura T é exposto a um ambiente com temperatura T_A, onde $T \neq T_A$, ele alcança eventualmente o equilíbrio térmico com o ambiente após algum tempo. Ao comparar os resultados de várias situações de resfriamento de corpos, fica evidente que a taxa de resfriamento depende de diversos fatores.

Quanto a isto Figueiredo e Neves [8], nos diz para considerarmos um modelo simplificado para o fenômeno da variação de temperatura num corpo por perda de calor para o meio ambiente, considerando as seguintes hipóteses:

i) A temperatura T é a mesma em todo o corpo e só depende do tempo t;

ii) A temperatura do meio ambiente T_A é a mesma em todo o ambiente e é constante com o tempo;

iii) O fluxo de calor através das paredes do corpo em $\frac{dT}{dt}$ é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A) \tag{3.1}$$

onde:

- ΔT - variação de temperatura sofrida pelo corpo;
- k- É uma constante positiva que depende das propriedades físicas do corpo;
- T - temperatura inicial do corpo;
- T_A - temperatura ambiente;
- Δt - intervalo de tempo.

O sinal negativo na equação é interpretado da seguinte forma: O calor sempre flui da fonte quente para a fria. Portanto, quando a temperatura do corpo T é maior que a temperatura ambiente T_A, isto é, $T > T_A$, o corpo perde calor para o ambiente. Nesse caso, a derivada $\frac{dT}{dt}$ será negativa, o que significa que a temperatura do corpo está diminuindo ao longo do tempo. Esse é o processo de resfriamento.

De forma análoga, quando a temperatura do corpo T é menor que a temperatura ambiente T_A, isto é, $T < T_A$, o corpo absorve calor do ambiente. Nesse caso, a derivada $\frac{dT}{dt}$ será positiva, indicando que a temperatura do corpo está aumentando ao longo do tempo. Esse é o processo de aquecimento.

Para a modelagem matemática, empregaremos o método de separação de variáveis na equação:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A)$$

Façamos a divisão de ambos os membros da equação por $(T - T_A) \neq 0$:

$$\frac{dT}{(T - T_A)} = -kdt$$

Integrando ambos os membros

$$\int \frac{dT}{(T - T_A)} = \int -kdt$$

$$\ln(T - T_A) = -kt + c$$

Utilizando a definição de logaritmos, temos:

$$T - T_A = e^{-kt+c}$$

Isolando T

$$T = e^{-kt+c} + T_A$$

Aplicando as propriedades das potências, podemos reescrever a expressão de forma equivalente:

$$T = e^{-kt} \cdot e^{c} + T_A$$

Fazendo: $e^c = c_1$, temos:

$$T(t) = c_1 \cdot e^{-kt} + T_A$$

A expressão anterior representa a solução geral, incluindo uma constante arbitrária c_1.

Observação 3.2.1. *Observamos que, de acordo com este modelo matemático, a temperatura do corpo "atinge" a temperatura ambiente apenas no limite em que $t \to +\infty$. No entanto, na prática, a temperatura ambiente é atingida em um tempo finito. Isso pode dar a impressão de que o modelo não é adequado para simular situações reais de estabilidade. Entretanto, na modelagem matemática, $t \to +\infty$ deve ser interpretado como "tempo suficientemente grande em comparação com a evolução das variáveis". Podemos definir t_∞ como o tempo necessário para que o corpo atinja 99% da temperatura ambiente. Em termos numéricos, isso significa que, se o erro relativo for de 1% ou menos, podemos considerar $T(t)$ como praticamente igual a T_A. Daí,*

$$\pm\frac{99}{100}T_A = T_A + C_1 e^{-kt_\infty}$$

$$e^{-kt_\infty} = \left|0,01\frac{T_A}{C_1}\right|$$

$$-kt_\infty = \ln\left|0,01\frac{T_A}{C_1}\right|$$
$$\Rightarrow t_\infty = \frac{1}{k}\ln\left|\frac{100C_1}{T_A}\right|$$

Exemplo 3.2.2. *Um bolo é retirado do forno, com temperatura de $180°C$. Depois de três minutos verifica-se que sua temperatura passa a ser de $100°C$. Quanto tempo leva para sua temperatura chegar a $30°C$ se a temperatura do meio ambiente for constante igual a $20°C$?*

Solução

Para resolver a equação diferencial, começamos com a solução geral:

$$T(t) = c_1 \cdot e^{-kt} + T_A$$

Onde T_A é a temperatura ambiente.
Para determinar a constante c_1, usamos a condição inicial $T(0) = 180$°C:

$$\begin{aligned} T(0) &= c_1 \cdot e^{-k\cdot 0} + T_A \\ 180 &= c_1 \cdot e^0 + 20 \\ 180 &= c_1 + 20 \\ c_1 &= 180 - 20 \\ c_1 &= 160 \end{aligned}$$

Então a função temperatura é:

$$T(t) = 160 \cdot e^{-kt} + 20$$

Dado que após 3 minutos a temperatura é $T(3) = 100$°C, substituímos $t = 3$ na equação:

$$\begin{aligned} 100 &= 160 \cdot e^{-k\cdot 3} + 20 \\ 80 &= 160 \cdot e^{-k\cdot 3} \\ e^{-k\cdot 3} &= \frac{80}{160} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo natural:

$$\begin{aligned} -k \cdot 3 &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ -k \cdot 3 &= -\ln 2 \\ k &= \frac{\ln 2}{3} \end{aligned}$$

Substituímos k na equação geral:

$$T(t) = 160 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{3} \cdot t} + 20$$

Para encontrar o tempo necessário para a temperatura atingir 30°C, resolvemos $T(t) = 30$:

$$\begin{aligned}
30 &= 160 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{3} \cdot t} + 20 \\
10 &= 160 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{3} \cdot t} \\
e^{-\frac{\ln 2}{3} \cdot t} &= \frac{10}{160} = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo natural:

$$\begin{aligned}
-\frac{\ln 2}{3} \cdot t &= \ln\left(\frac{1}{16}\right) \\
-\frac{\ln 2}{3} \cdot t &= \ln 1 - \ln 16 \\
-\frac{\ln 2}{3} \cdot t &= -\ln 16 \\
\frac{\ln 2}{3} \cdot t &= \ln 16 \\
t &= \frac{3 \cdot \ln 16}{\ln 2}
\end{aligned}$$

Note que $\ln 16 = \ln 2^4 = 4 \ln 2$:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{3 \cdot 4 \ln 2}{\ln 2} \\
t &= 12
\end{aligned}$$

Portanto, o tempo necessário para a temperatura chegar a 30°C é de 12 minutos.

Exemplo 3.2.3. *Um copo com água a uma temperatura inicial de 80^0C é deixado em uma sala a 20^0C. Sabendo que a temperatura da água diminui 2^0C a cada minuto de acordo com a lei do resfriamento de Newton, quanto tempo leva para que a água atinja uma temperatura de 40^0C?*

Solução

Dada a equação diferencial para o resfriamento do objeto:

$$T(t) = c_1 \cdot e^{-kt} + T_A$$

Utilizamos a condição inicial $T(0) = 80°\text{C}$ para encontrar c_1. Com $T_A = 20°\text{C}$:

$$\begin{aligned} T(0) &= c_1 \cdot e^{-k\cdot 0} + 20 \\ 80 &= c_1 \cdot 1 + 20 \\ 80 &= c_1 + 20 \\ c_1 &= 80 - 20 \\ c_1 &= 60 \end{aligned}$$

Portanto, o modelo para o problema de resfriamento do objeto é:

$$T(t) = 60 \cdot e^{-kt} + 20$$

Sabemos que a temperatura diminui 2°C a cada minuto. Então:

$$\begin{aligned} T(1) &= 60 \cdot e^{-k\cdot 1} + 20 \\ 78 &= 60 \cdot e^{-k} + 20 \end{aligned}$$

Resolvendo para k:

$$\begin{aligned} 60 \cdot e^{-k} + 20 &= 78 \\ 60 \cdot e^{-k} &= 78 - 20 \\ 60 \cdot e^{-k} &= 58 \\ e^{-k} &= \frac{58}{60} \\ e^{-k} &= \frac{29}{30} \end{aligned}$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os lados:

$$\begin{aligned} -k &= \ln\left(\frac{29}{30}\right) \\ k &= -\ln\left(\frac{29}{30}\right) \\ k &\approx 0,03222 \end{aligned}$$

Portanto, a equação para a temperatura é:

$$T(t) = 60 \cdot e^{-0,03222\cdot t} + 20$$

Para determinar o tempo necessário para a temperatura atingir 40°C:

$$
\begin{aligned}
T(t) &= 40 \\
60 \cdot e^{-0{,}03222 \cdot t} + 20 &= 40 \\
60 \cdot e^{-0{,}03222 \cdot t} &= 40 - 20 \\
60 \cdot e^{-0{,}03222 \cdot t} &= 20 \\
e^{-0{,}03222 \cdot t} &= \frac{20}{60} \\
e^{-0{,}03222 \cdot t} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os lados:

$$
\begin{aligned}
-0,03222 \cdot t &= \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\
t &= \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0,03222} \\
t &\approx \frac{-1,09861}{-0,03222} \\
t &\approx 34,06
\end{aligned}
$$

Portanto, o tempo necessário para que a temperatura do objeto atinja 40°C é aproximadamente:

$$t \approx 34,06 \text{ minutos}$$

Exemplo 3.2.4. *Um objeto metálico a uma temperatura inicial de 200^0C é removido de um forno e colocado em um ambiente a 30^0C. Se a temperatura do objeto diminuir 5^0C a cada minuto, quanto tempo leva para que o objeto atinja uma temperatura de 50^0C?*

Solução

Dada a equação diferencial para o resfriamento do objeto:

$$T(t) = c_1 \cdot e^{-kt} + T_A$$

Utilizamos a condição inicial $T(0) = 200°\text{C}$ para encontrar c_1. Com $T_A = 30°\text{C}$:

$$
\begin{aligned}
T(0) &= c_1 \cdot e^{-k \cdot 0} + 30 \\
200 &= c_1 \cdot 1 + 30 \\
c_1 &= 200 - 30 \\
c_1 &= 170
\end{aligned}
$$

Portanto, o modelo para o problema de resfriamento do objeto é:

$$T(t) = 170 \cdot e^{-kt} + 30$$

Sabemos que a temperatura diminui 5°C a cada minuto, então:

$$\begin{aligned} T(1) &= 170 \cdot e^{-k \cdot 1} + 30 \\ 195 &= 170 \cdot e^{-k} + 30 \end{aligned}$$

Resolvendo para k:

$$\begin{aligned} 170 \cdot e^{-k} &= 195 - 30 \\ 170 \cdot e^{-k} &= 165 \\ e^{-k} &= \frac{165}{170} \\ e^{-k} &= \frac{33}{34} \end{aligned}$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os lados:

$$\begin{aligned} -k &= \ln\left(\frac{33}{34}\right) \\ k &= -\ln\left(\frac{33}{34}\right) \\ k &\approx 0,01487 \end{aligned}$$

Assim, a equação para a temperatura é:

$$T(t) = 170 \cdot e^{-0,01487 \cdot t} + 30$$

Para determinar o tempo necessário para que a temperatura atinja 50°C:

$$\begin{aligned} T(t) &= 50 \\ 170 \cdot e^{-0,01487 \cdot t} + 30 &= 50 \\ 170 \cdot e^{-0,01487 \cdot t} &= 50 - 30 \\ 170 \cdot e^{-0,01487 \cdot t} &= 20 \\ e^{-0,01487 \cdot t} &= \frac{20}{170} \\ e^{-0,01487 \cdot t} &= \frac{2}{17} \end{aligned}$$

Tomando o logaritmo natural de ambos os lados:

$$-0,01487 \cdot t = \ln\left(\frac{2}{17}\right)$$
$$t = \frac{\ln\left(\frac{2}{17}\right)}{-0,01487}$$

Calculando o valor numérico:

$$t \approx \frac{-1,771956841}{-0,01487}$$
$$t \approx 119,21$$

Portanto, o tempo necessário para que a temperatura do objeto atinja 50°C é aproximadamente:

$$t \approx 119,21 \text{ minutos} \approx 1,99 \text{ horas}$$

3.2.7 Sugestão para o primeiro encontro

No primeiro momento, o professor deverá receber os alunos prestando-lhes as boas-vindas e apresentando o tema da oficina, bem como os seus objetivos.

Deixamos como sugestão à aplicação de uma atividade diagnóstica para avaliação dos conhecimentos da turma acerca dos temas que são tratados na oficina. Esta atividade possui oito questões objetivas (vide apêndice A), que deverá ser respondida de forma individual, sem consulta e em sala de aula.

Sugestão para tópicos que podem ser apresentados nos slides:

1. Funções matemáticas
    - Definição básica de função.
    - Exemplos simples de funções no cotidiano.
    - Discussão em grupo sobre onde eles observam funções no dia a dia.
2. Representação de função
    - Mostrar as diferentes formas de representar uma função.(Diagrama de setas, tabela, gráfico cartesiano, expressão algébrica).
    - Atividade prática: fornecer uma função e pedir aos alunos que a representem de diferentes formas.
    - Resolver problemas simples de funções em grupo.
3. Introdução ao GeoGebra
    - Demonstrar como usar o GeoGebra para plotar funções.

- Atividade prática: os alunos inserem funções simples no GeoGebra e observam os gráficos.

4. Discussão e encerramento do primeiro encontro
   - Revisão dos conceitos abordados.
   - Discussão sobre as dificuldades encontradas e esclarecimento de dúvidas.
   - Introdução ao que será abordado no próximo encontro.

3.2.8 Sugestão para o segundo encontro

1. Revisão
   - Revisão dos conceitos e atividades do primeiro encontro.
   - Responder a perguntas e esclarecer dúvidas.
2. Aplicações das funções na física
   - Apresentar exemplos concretos de como as funções são usadas em física. (vide Apêndice B)
   - Discussão em grupo sobre outras possíveis aplicações.
3. Atividade com suporte do GeoGebra
   - Criação de controles deslizantes para variar parâmetros de funções e observar mudanças nos gráficos.
4. Introdução às Funções Exponenciais:
   - Explicar o conceito de funções exponenciais.
   - Exemplos práticos de funções exponenciais em situações reais.
5. Atividade no GeoGebra sobre as funções exponenciais:
   - Os alunos inserem funções exponenciais no GeoGebra e analisam os gráficos.
   - Utilização de controles deslizantes para alterar parâmetros e observar os efeitos.
6. Discussão e encerramento do segundo encontro
   - Revisão dos conceitos e atividades do segundo encontro.
   - Introdução ao que será abordado no próximo encontro.

3.2.9 Sugestão para o terceiro encontro

No terceiro encontro, o professor deverá apresentar a equação que modela a Lei do Resfriamento de Newton através de exemplos práticos.

Lei do Resfriamento de Newton:

- Explicação sobre a Lei do Resfriamento de Newton.
- Relação da lei com a função exponencial.
- Exemplo de aplicação prática da lei com modelagem de EDOs.
- Apresentar a equação que modela a Lei de Resfriamento de Newton.
- Ver uma aplicação do uso desta equação para resolver problemas práticos.

É interessante que os alunos recebam os problemas matemáticos que serão solucionados como exemplo, em material impresso. O professor pode iniciar esse momento com um problema que desperta o interesse e a curiosidade dos alunos como o do seguinte exemplo.

Exemplo 3.2.5. *Em casos de assassinatos ou acidentes sem a presença de testemunhas ou imagens de câmeras de segurança. Na ausência destas informações, para elucidação desta tragédia e para que haja entendimento se ouve crime ou não, uma informação importante é conhecer o momento de sua ocorrência. A Lei do Resfriamento de Newton é um dos mecanismos que permitem a estimativa da hora da morte. Supondo que um cadáver foi encontrado num quarto, 22 horas. O períto chegou as 22 horas e 30 minutos e aferiu a temperatura do corpo que era de* $32,5^{\circ}C$*. Após 1 hora tomou a temperatura do cadáver novamente e desta vez era de* $31,5^{\circ}C$*. A temperatura do quarto é mantida constante a* $16,5^{\circ}C$*. Sabendo que a temperatura do cadáver segue a Lei de resfriamento de Newton, determine a hora provável da morte. Adimita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja de* $36,5^{\circ}C$*.*

- O professor deverá mostrar que em situação como a apresentada no problema, a matemática se destaca como ferramenta eficiênte, para determinar a hora da morte em casos de assassinato ou acidente sem testemunhas.
- Falar um pouco sobre a Lei do Resfriamento de Newton, que descreve como um objeto perde calor para o ambiente.
- Destacar os dados fornecidos no problema: temperatura inicial do cadáver ($32,5$°C), temperatura após 1 horas ($31,5$°C) e temperatura ambiente constante ($16,5$°C).
- Apresentar a equação utilizada para modelar a situação:

$$T(t) = T_A + c_1 e^{-kt},$$

  onde $T(t)$ é a temperatura do cadáver no tempo t, T_A é a temperatura ambiente, $T(0)$ é a temperatura inicial do cadáver e k é uma constante relacionada ao resfriamento do corpo.

- Achar o valor de k:

  Para encontrar a constante k e a função $T(t)$, considere a Lei do Resfriamento de Newton:

$$
\begin{aligned}
T(t) &= T_A + (T_0 - T_A)e^{-kt} \\
31{,}5 &= 16{,}5 + (32{,}5 - 16{,}5)e^{-k} \\
31{,}5 &= 16{,}5 + 16e^{-k} \\
\text{Simplificando:} & \\
15 &= 16e^{-k} \\
\text{Isolando o expoente:} & \\
e^{-k} &= \frac{15}{16} \\
\text{Aplicando o logaritmo natural:} & \\
-k &= \ln\left(\frac{15}{16}\right) \\
k &= -\ln\left(\frac{15}{16}\right) \\
k &\approx -\ln\left(\frac{15}{16}\right) \approx 0{,}06454
\end{aligned}
$$

Logo, a função $T(t)$ é dada por:

$$T(t) = 16{,}5 + 16e^{-0{,}06454t} \tag{3.2}$$

Para calcular o tempo aproximado até o óbito, onde a temperatura atinge 36,5°C:

$$
\begin{aligned}
36{,}5 &= 16{,}5 + 16e^{-0{,}06454t} \\
20 &= 16e^{-0{,}06454t} \\
e^{-0{,}06454t} &= \frac{20}{16} \\
e^{-0{,}06454t} &= \frac{5}{4} \\
-0{,}06454t &= \ln\left(\frac{5}{4}\right) \\
t &= \frac{-\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{0{,}06454} \\
t &\approx \frac{-\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{0{,}06454} \approx 3{,}4575 \text{ horas} \\
&\text{ou 3 horas e 27 minutos}
\end{aligned}
$$

Sugestões de questões para serem respondidas pelos alunos no terceiro encontro

Com intenção de trazer problemas desafiadores porém acessíveis aos público alvo, apresentamos como sugestão modelos formulados por meio de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que possam ser solucionados pelos alunos, tais como os listados abaixo.

1. Considere uma xícara de café quente , esfriando ao longo do tempo até a temperatura ambiente. Sendo este processo regido pela Lei de resfriamento de Newton. Assuma que a experiência com uma xícara de café coberta mostram que a temperatura (em graus Celsius) do café pode ser modelada pela seguinte equação:

$$T(t) = 61 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t} + 24$$

Nesta equação, o tempo é dado em minutos.

a) Qual é a temperatura ambiente?
R= De acordo com a equação a temperatura ambiente é 24°C

b) Qual é o valor da constante de decaimento?
R= $-0,08$

c) Qual é a temperatura inicial do café?

$$T(0) = 61 \cdot e^{-0{,}08 \cdot 0} + 24$$
$$T(0) = 61 + 24$$
$$T(0) = 85$$

Logo, a temperatura inicial era de 85°C.

d) A temperatura do café será de 60°C após quantos minutos?

$$T(t) = 61 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t} + 24$$
$$60 = 61 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t} + 24$$
$$e^{-0{,}08 \cdot t} = \frac{36}{61}$$

Pela propriedade dos logaritmos

$$-0,08 \cdot t = \ln\left(\frac{36}{61}\right)$$
$$t = \frac{-\ln\left(\frac{36}{61}\right)}{0.08}$$
$$t = 6.59193657147$$

1. Atividade prática

- Divida os alunos em pequenos grupos para coletar dados experimentais.

- Construção de uma tabela relacionando o tempo em minutos e a temperatura em graus Celcius de um líquido previamente aquecido.
- Espaço para os alunos tirarem dúvidas e apresentarem suas percepções.

2. Análise dos Dados no GeoGebra

   - Utilização do GeoGebra para visualizar o comportamento dos dados.
   - Inserir os dados coletados no GeoGebra e ajustar uma curva exponencial.
   - Analisar como os diferentes parâmetros T_A, T e k afetam o gráfico.

Sugestão para Atividade Prática (Experimental):

É sugerido que os alunos coletem dados experimentais da temperatura de uma xícara de café ou outro líquido aquecido previamente, durante 30 minutos em intervalos de tempo regulares,tais como de 2, 5 e 10 minutos e montar tabelas com os mesmos. Isso permitirá que os alunos vejam o comportamento de cada ponto enontrado através da relação temperatura e tempo. Deve ser verificado também neste período a temperatura ambiente, a qual consideraremos constante, por exemplo 22°C, durante todo o período do experimento.

Analisando o experimento os alunos deverão responder aos seguintes questionamentos.

- É possível estabelecer alguma relação entre a temperatura do café ou outro líquido e o tempo decorrido desde o início da observação? Explique.
- Avalie a afirmação: "A temperatura do café ou outro líquido varia em função do tempo transcorrido".
- Construa um diagrama de flechas associando o tempo às temperaturas nestes 30 minutos de acordo a tabela construída.

A lei de resfriamento de Newton permite estabelecer uma função que relaciona a temperatura do café ou outro líquido ao tempo decorrido. Esta função pode ser descrita por $T(t) = c_1 \cdot e^{-kt} + T_A$, onde T_A, c_1 e k representam números reais e e representa o número irracional $2,7182...$ chamado número de Euler.

A utilização do software GeoGebra nesta situação, proporcionará uma visualização gráfica do que acontece ao relacionar a temperatura do café ou outro líquido em função do tempo. Após inserir os dados coletados no GeoGebra os estudantes terão uma visão mais clara do comportamento desses pontos.

Utilizando o GeoGebra, os alunos podem esboçar o gráfico da temperatura do café ou outro líquido em função do tempo.

3.2.10 Discussão sobre a oficina

Neste momento o aluno poderá levantar questionamentos, fazer comentários e observações consideráveis relacionadas ao assunto estudado durante a oficina.

É importante que o professor fique atento aos depoimentos prestados, pois os mesmos norteiam se os objetivos da oficina foram alcançados é necessário também reservar 15 minutos do tempo da oficina para aplicação do questionário avaliativo da oficina.

3.2.11 Avaliação da Oficina

Para avaliar a eficácia da oficina, solicitamos que você responda às seguintes perguntas:

1. Em uma escala de 1 a 5, qual o seu nível de satisfação com a oficina?

   ( ) 1 - Muito insatisfeito

   ( ) 2 - Insatisfeito

   ( ) 3 - Neutro

   ( ) 4 - Satisfeito

   ( ) 5 - Muito satisfeito

2. A oficina atendeu às suas expectativas?

   ( ) Sim

   ( ) Não

3. O conteúdo apresentado na oficina foi relevante para o seu aprendizado?

   ( ) Sim

   ( ) Não

4. Como você avalia a clareza e a objetividade da apresentação do conteúdo?

   ( ) Muito ruim

   ( ) Ruim

   ( ) Regular

   ( ) Bom

   ( ) Muito bom

5. Você teve oportunidades suficientes para interagir e participar ativamente durante a oficina?

   ( ) Sim

   ( ) Não

6. Os objetivos da oficina foram claramente definidos e alcançados?

   ( ) Sim

   ( ) Não

7. Você se sentiu motivado(a) a participar e aprender durante a oficina?

   ( ) Sim

   ( ) Não

8. Você pretende aplicar o que aprendeu nesta oficina em seus estudos ou em situações do seu dia a dia?

   ( ) Sim

   ( ) Não

9. Em uma escala de 1 a 5, qual a sua avaliação geral da oficina?

   ( ) 1 - Muito ruim

   ( ) 2 - Ruim

   ( ) 3 - Regular

   ( ) 4 - Bom

   ( ) 5 - Muito bom

10. Você gostaria de participar de outras atividades semelhantes no futuro?

    ( ) Sim

    ( ) Não

11. Aqui você pode deixar sua crítica, elogio ou sugestão. ____________________

    ____

    ____

Capítulo 4

Conclusão e Perspectivas Futuras

Neste trabalho exploramos os conceitos iniciais de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, sugerindo uma proposta de oficina pedagógica para alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio. Para execução da oficina apresentamos de forma detalhada, orientações e sugestões para o professor mediador das atividades propostas, de modo que o docente interessado seja capaz de realizar a mesma em uma sala de aula e avaliar o nível de compreensão desenvolvido pelos alunos.

Nosso estudo foi orientado por meio da modelagem matemática de fenômenos físicos, ferramenta esta, apresentada como um essêncial recurso metodológico, uma vez que o estudo de tais fenômenos é realizado através de um modelo matemático. Neste aspecto destacamos a importância do conhecimento matemático, para obtenção de êxito em diferentes áreas, em particular, a física.

Espera-se que este trabalho contribua para a reflexão sobre modelagem matemática, especialmente através do modelo da Lei de Resfriamento de Newton. Sendo que a mesma contribui para alinhamento entre teoria e prática, objetivando uma efetiva aprendizagem.

A oficina aqui sugerida, não houve tempo hábil para que pudéssemos planejar e agilizar todos os trâmites legais para sua execução, sendo que temos pretensão de aplicá-la assim que possível, afim de constatar se nossos objetivos são realmente possíveis de serem alcançados e com isso fazer os ajustes necessários para que de fato possa se constituir o ato de ensinar e aprender.

Sabemos que muitas escolas não dispõem de sala de informática, mas vislumbramos que mesmo assim seja possível a utilização do software GeoGebra através do smartfhone dos alunos caso estes o tenham. Pode ser sugerido também que a atividade seja realizada em grupo o que diminuirá a necessidade de vários aparelhos sendo que cada grupo trabalhará com apenas um.

Para estudos futuros, trazemos como sugestão fazer estudo de caso, para que seja possível analisar de fato, como os alunos respondem a proposta aqui estabelecida. Propomos também estudar outros fenômenos físicos que possam ser modelados a partir de equações diferenciais ordinárias.

Com este trabalho esperamos contribuir de maneira significativa com os professores atuantes no Ensino Médio, bem como com seus alunos, uma vez que abordamos um tema de grande significado no ramo da matemática e que para ser entendido depende dos conteúdos vistos nesta etapa de ensino, tais como as funções, conjuntos numéricos e outros. Nessa perspectiva, buscamos apoiar os educadores que visam reforçar a base matemática dos alunos e prepará-los para desafios futuros.

Referências Bibliográficas

[1] BASSANEZI, R. C.; JR., W. C. F. *Equações diferenciais com aplicações.* [S.l.]: HARBRA, 1988.

[2] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino.* [S.l.]: Contexto, 2023.

[3] GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa, Vol. 4.* [S.l.]: Atlas, 2002.

[4] SILVA, J. M. da; SILVA, G. M. da. A importância das oficinas no processo ensino e aprendizagem. *Anais do 14° Encontro Nacional de Prática de Ensino de Geografia: políticas, linguagens e trajetórias*, p. 3187–3193, 2019.

[5] BASSANEZI, R. C. *Modelagem Matemática: Teoria e Prática.* São Paulo, SP: Editora Contexto, 2015. ISBN 9788572448932.

[6] SANTOS, R. J. *Introdução as Equações Diferenciais Ordinárias.* [S.l.]: UFMG, 2010.

[7] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* [S.l.]: LTC Rio de Janeiro, 2010.

[8] FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas.* 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 307 p. ISBN 978-85-244-0282-1.

[9] BASSANEZI, R. C. *Equações Diferenciais Ordinárias: Um curso introdutório.* Primeira. Universidade de Campinas: UFABC, 2011.

[10] JúNIOR, A. F. d. S. *Modelagem matemática aplicada aos fenômenos físicos.* Dissertação (Mestrado) — UFPB/CCEN, João Pessoa, 2022. 115 f. : il.

[11] SODRÉ, U. Modelos matemáticos. *Londrina: UEL*, 2007.

[12] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* [S.l.]: Editora Contexto, 2002.

[13] BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 2, n. 2, p. 7–32, 2009.

[14] ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 17, n. 22, p. 19–35, 2004.

[15] BURAK, D. *Uma perspectiva de Modelagem Matemática para o ensino e a aprendizagem da Matemática.* [S.l.]: Editora UEPG, 2016.

[16] MARCãO, D. G.; OLIVEIRA, G. S. d.; SANTOS, A. O. Modelagem como uma estratégia metodológica para ensinar matemática. *Revista Valore*, v. 6, n. Edição Especial, p. 4–22, 2021.

[17] RENZ, H. J. Dissertação de Mestrado, *A Importância da Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem.* Catalão: [s.n.], 2015. LXXI, 62 p. Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional).

[18] Brasil, Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2006.

[19] BNCC. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Ministério da Educação.* [S.l.]: MEC, 2018.

[20] GeoGebra. *Sobre o GeoGebra.* 2024. Acessado em 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT>.

[21] GeoGebra Team. *GeoGebra Classic (Versão 6.0) [Software].* 2024. Acessado em 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>.

[22] FONTANA, N. M.; PAVIANE, N. M. S. *Oficinas pedagógicas: relato de uma experiência.* [S.l.]: Conjectura, 2009.

[23] PCN. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. Secretaria de Educação.* [S.l.]: MEC, 2000.

[24] BONJORNO, J. R.; JúNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. de. *Prisma Matemática: Funções e Progressões.* 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020. Ensino Médio: Área do Conhecimento: Matemática e suas Tecnologias.

[25] MáXIMO, A.; AVARENGA, B. *Física: Ensino Médio.* 1. ed. São Paulo: Scipione, 2006. Volume único.

Apêndice A

Atividade Diagnóstica

Tomamos como base o livro Bonjorno (2021) [24] para abordarmos os seguintes conceitos.

1. O que é uma função matemática?

   (A) Um conjunto de números inteiros.

   (B) Um tipo de gráfico.

   (C) Uma operação matemática básica.

   (D) Uma relação entre dois conjuntos em que cada elemento do primeiro conjunto está associado a um único elemento do segundo conjunto.

2. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ dada por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial de base a. Dê dois exemplos de função exponencial.

3. Identifique como crescente ou decrescente as funções exponenciais definidas abaixo?

   (A) $f(x) = 4^x$

   (B) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

   (C) $f(x) = 2^{-x}$

   (D) $f(x) = 3^x$

4. Qual das seguintes funções é uma função exponencial?

   (A) $f(x) = 3x + 2$

   (B) $f(x) = 2^x$

   (C) $f(x) = x^2$

   (D) $f(x) = \log(x)$

5. Para quais valores reais de k a função dada por $f(x) = (k-3)^x$ é decrescente?

   (A) Para $k < 3$

(B) Para $k > 3$

(C) Para $k = 3$

(D) Para $3 < k < 4$

6. Esboce o gráfico da função $f(x) = 3^x$.

7. Por que é importante estudar matemática?

   (A) Porque é útil apenas para resolver problemas de matemática.

   (B) Porque é útil apenas para cientistas.

   (C) Porque é útil na vida cotidiana e em diversas áreas do conhecimento.

   (D) Porque é útil apenas para quem quer ser professor de matemática.

8. Qual é o valor de $f(0)$ para a função exponencial $f(x) = 3^x$?

   (A) 0

   (B) 1

   (C) 3

   (D) 3^2

9. Sob certas condições, o número de bactérias B de uma cultura, em função do tempo t medido em horas, é dado por $B(t) = 2^{\frac{t}{12}}$. Qual será o número de bactérias 6 dias após a hora zero?

Apêndice B

Atividade sobre Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

Para a elaboração desta atividade, utilizamos como referência o livro *Física: Ensino Médio* de Antonio Máximo e Beatriz Avarenga (2006) [25]. O conteúdo deste livro fornece uma base sólida para entender os conceitos fundamentais da física, que foram adaptados e aplicados para desenvolver a atividade proposta neste apêndice.

O movimento uniforme ocorre quando um corpo se desloca ao longo de uma trajetória reta com uma velocidade constante. Nesse tipo de movimento, não há aceleração; o corpo percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais.

Função:

$$s(t) = s_0 + v \cdot t$$

Descrição: Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) é o movimento que ocorre com velocidade constante em uma trajetória reta. Desta forma, em intervalos de tempos iguais o móvel percorre a mesma distância.

A função $s(t) = s_0 + v \cdot t$ é usada para determinar a posição $s(t)$ do objeto em função do tempo t, onde:

- $s(t)$ é a posição do objeto no tempo t,
- s_0 é a posição inicial do objeto,
- v é a velocidade constante do objeto.

Atividade: Simulação de um Carro em Movimento

Objetivo: Calcular a posição de um carro movendo-se em uma estrada reta a uma velocidade constante em diferentes momentos.

Material Necessário:

- Papel e caneta
- Calculadora
- Computador com acesso ao GeoGebra (opcional)

Instruções:

1. **Definição dos Parâmetros:**
   - Velocidade constante do carro (v): 60 km/h
   - Posição inicial (s_0): 10 km
2. **Cálculo das Posições:**
   - Usando a função $s(t) = s_0 + v \cdot t$, calcule a posição do carro em diferentes momentos (t):
     - $t = 0$ horas
     - $t = 1$ hora
     - $t = 2$ horas
     - $t = 3$ horas
3. **Preenchimento da Tabela:**

Tempo (t)	**Posição ($s(t)$)**
0 horas	
1 hora	
2 horas	
3 horas	

4. **Visualização Gráfica (Opcional):**
   - Use o GeoGebra para plotar o gráfico da função $s(t) = 10 + 60 \cdot t$.
   - Insira os valores calculados na tabela no GeoGebra para visualizar o movimento do carro ao longo do tempo.
5. **Discussão:**
   - Pergunte aos alunos como a posição do carro muda com o tempo.
   - Discuta como a velocidade constante influencia a linearidade do gráfico.
   - Explore o que aconteceria se a velocidade ou a posição inicial fossem diferentes.

Exemplo de Resolução:

1. **Para $t = 0$ horas:**
$$s(0) = 10 + 60 \cdot 0 = 10 \text{ km}$$
2. **Para $t = 1$ hora:**
$$s(1) = 10 + 60 \cdot 1 = 70 \text{ km}$$
3. **Para $t = 2$ horas:**
$$s(2) = 10 + 60 \cdot 2 = 130 \text{ km}$$

4. **Para $t = 3$ horas:**
$$s(3) = 10 + 60 \cdot 3 = 190 \text{ km}$$

1. **Preenchimento da Tabela:**

Tempo (t)	**Posição ($s(t)$)**
0 horas	10 km
1 hora	70 km
2 horas	130 km
3 horas	190 km

2. **Visualização Gráfica (Opcional):**
   - Use o GeoGebra para visualizar o gráfico da função $s(t) = 10 + 60 \cdot t$.
   - Insira os valores calculados na tabela no GeoGebra para visualizar o movimento do carro ao longo do tempo.

Conclusão: Essa atividade ajuda os alunos a entenderem como a posição de um objeto em movimento retilíneo uniforme pode ser calculada e visualizada. Eles aprenderão a aplicar a fórmula do MRU e a interpretar os resultados em diferentes contextos.

Apêndice C

Passos para Utilizar o GeoGebra na Lei do Resfriamento de Newton

A seguir, apresentamos um guia com passos para criar uma simulação da Lei do Resfriamento de Newton utilizando o GeoGebra Classic com controles deslizantes.

Passo 1: Acesse o GeoGebra Classic

1. Abra seu navegador e acesse o site: `https://www.geogebra.org/classic`.

Passo 2: Criação dos Controles Deslizantes

1. Na barra de ferramentas, selecione a ferramenta **Controle Deslizante**.
2. Clique na janela de visualização para criar o primeiro controle deslizante. Nomeie-o como T_A (Temperatura ambiente). Defina o intervalo de 0 a 50 e o valor inicial como 25.
3. Repita o processo para criar o segundo controle deslizante. Nomeie-o como c_1. Defina o intervalo de 0 a 100 e o valor inicial como 80.
4. Crie o terceiro controle deslizante. Nomeie-o como k (Constante de resfriamento). Defina o intervalo de 0 a 1 e o valor inicial como 0,1.
5. Crie o quarto controle deslizante. Nomeie-o como t (Tempo). Defina o intervalo de 0 a 60 e o valor inicial como 0.

Passo 3: Inserção da Fórmula da Lei do Resfriamento de Newton

1. Na barra de entrada, insira a fórmula da Lei do Resfriamento de Newton:

$$T(t) = T_A + c_1 \cdot e^{-k \cdot t}$$

2. Pressione **Enter**. Isso criará a função $T(t)$ que depende dos valores dos controles deslizantes.

Passo 4: Visualização do Gráfico

1. A função $T(t)$ será automaticamente plotada na janela de visualização.

2. Ajuste os valores dos controles deslizantes para observar como a curva da temperatura muda com o tempo, a temperatura ambiente, a temperatura inicial e a constante de resfriamento.

Passo 5: Ajustes Finais

1. Opcionalmente, você pode ajustar o estilo do gráfico, adicionar rótulos e mudar as cores.

2. Para adicionar rótulos, clique com o botão direito no gráfico, selecione **Propriedades** e, em seguida, **Mostrar Rótulo**.