
Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia



**Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT**

**Propostas de atividades práticas envolvendo
processos de discretização para o ensino de
matemática no ensino fundamental e médio**

Roni Ewerton Bueno

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

São José dos Campos

Janeiro, 2025



PROFMAT

Título: Propostas de atividades práticas envolvendo processos de discretização para o ensino de matemática no ensino fundamental e médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Janeiro, 2025

Bueno, Roni Ewerton

Propostas de atividades práticas envolvendo processos de discretização para o ensino de matemática no ensino fundamental e médio, Roni Ewerton Bueno – São José dos Campos, 2025.

ix, 109f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Proposals for practical activities involving discretization processes for teaching mathematics in elementary and high school.

1. Discretização. 2. Ensino de Matemática. 3. Atividades didáticas. 4. Cálculos aproximados. 5. Aprendizagem ativa.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Chefe de departamento:

Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:

Prof^ª. Dr^ª. Grasielle Cristiane Jorge

RONI EWERTON BUENO

PROPOSTAS DE ATIVIDADES PRÁTICAS ENVOLVENDO
PROCESSOS DE DISCRETIZAÇÃO PARA O ENSINO DE
MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Presidente da banca: Prof^ª. Dr^ª. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

Banca examinadora:

Prof. Dr. Heron Martins Félix

Prof^ª. Dr^ª. Luzia Pedroso de Oliveira

Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Data da Defesa: 31 de janeiro de 2025

"O que eu ouço, eu esqueço

O que eu vejo, eu lembro

O que eu faço, eu aprendo."

Confúcio

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, por me conceder saúde e forças para vencer todos os desafios dessa jornada. À Ele toda a Honra e toda a Glória.

Agradeço à minha esposa, Débora, que sempre esteve ao meu lado nessa caminhada, me incentivando, me amando e sendo minha fortaleza, na alegria e na tristeza, nos bons e nos maus momentos. Te amo!

Agradeço aos meus filhos, Miguel, Melinda e Mateus, que sempre torceram por mim, e que foram um poderoso combustível para concluir esse curso. Vocês me fazem querer ser melhor, para dar exemplo à vocês.

Agradeço aos meus pais, Maria Aparecida e Dirceu (in memoriam), por me oferecer condições para adquirir toda a minha bagagem intelectual e chegar até aqui. Por todo o carinho e amor, obrigado, mamãe!

Agradeço também a todos os professores do mestrado por todo o comprometimento em nos ensinar. Isto pode ser comprovado pelo fato de todos os mestrandos de minha turma e que realizaram o ENQ, terem sido aprovados.

Agradeço em particular, à Professora Dr^a Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz, minha orientadora, por toda a atenção, paciência e ensinamentos.

Aos meus companheiros de curso pela amizade, por compartilhar suas angústias, conquistas e por tornar as sextas-feiras mais leves e animadas.

Ao ICT Unifesp/São José dos Campos, por proporcionar um ambiente com toda a estrutura, para a realização de um sonho, uma conquista para a vida inteira e que guardarei cada espaço desta Instituição com muito carinho em meu coração.

RESUMO

Tendo em vista que boa parte dos alunos apresentam dificuldade de compreensão dos conceitos de matemática, é importante que o professor procure formas de tornar o aprendizado mais prazeroso, dinâmico e efetivo. É preciso se reinventar e buscar novas metodologias para que o aluno se sinta motivado a aprender. Neste trabalho são propostas cinco atividades de matemática contextualizadas, envolvendo técnicas de discretização, que podem ser realizadas com alunos do ensino fundamental e médio.

Palavras-chave: 1. Discretização. 2. Ensino de Matemática. 3. Atividades didáticas. 4. Cálculos aproximados. 5. Aprendizagem ativa.

ABSTRACT

Considering that a significant number of students struggle with understanding mathematical concepts, it is important for the teacher to seek ways to make learning more enjoyable, dynamic, and effective. It is necessary to reinvent oneself and explore new methodologies so that students feel motivated to learn. This paper proposes five contextualized mathematics activities involving discretization techniques that can be implemented with elementary and high school students.

Keywords: 1. Discretization. 2. Mathematics teaching. 3. Didactic activities. 4. Approximate calculations. 5. Active learning.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	6
1 Desenho em malha quadriculada	7
1.1 Origem da técnica de desenho na malha quadriculada	7
1.2 Inspiração para desenvolver esta atividade	9
1.3 Situação-problema	10
1.4 Preparativos	10
1.5 Realizando a atividade	11
1.6 Habilidades da BNCC relacionadas a atividade proposta	19
2 Cálculo da área sob a linha de 3 pontos de uma quadra de basquete	21
2.1 Situação-problema	21
2.2 Características de uma quadra de basquete	22
2.3 Realizando a atividade na quadra	23
2.4 Cálculo da quantidade de tinta	31
2.5 Cálculo da área de uma parábola	34
2.5.1 Atividade em grupo - Como obter a fórmula para o cálculo da área de uma parábola	34
2.6 Habilidades da BNCC relacionadas a atividade proposta	39
3 Velocidade média, velocidade instantânea, tempo e distância percorrida	41
3.1 Primeiro vídeo - Velocímetro de automóvel	42
3.1.1 Situação-problema 1: radar móvel	46
3.1.2 Situação-problema 2: radar fixo	46
3.2 Segundo vídeo - Vôo tripulado do foguete New-Shepard	48
3.3 Terceiro vídeo - Caminhada	64
3.4 Habilidades da BNCC relacionadas a atividade proposta	67
4 Cálculo de Volume de terra escavada	68
4.1 Topografia	68
4.2 Situação-problema	68
4.3 Iniciando os trabalhos	70
4.4 Fator de Empolamento	75
4.5 Habilidades da BNCC relacionadas a atividade proposta	78
5 Tomografia	79
5.1 Situação-problema	79
5.2 Representação artística do órgão	79
5.3 Cálculo do Volume pela Regra do Ponto Médio	82
6 Conclusões	84

Apêndice A	88
Apêndice B	91
B.1	Medições e cálculo das cotas dos pontos 92
B.2	Cálculo da Altura Média 98
B.2.1	Método dos Volumes 99
B.2.2	Método das médias ponderadas 100
B.3	Regiões fora da malha quadriculada 102
B.4	Cálculo do volume considerando o fator de empolamento 107
Apêndice C	108
C.1	Organizando os dados 108
C.2	Fórmulas para o cálculo do volume do cone e tronco 109
C.2.1	Cálculos dos raios 110
C.2.2	Cálculo dos volumes dos cones e troncos 111
Referências Bibliográficas	113

INTRODUÇÃO

Com a presença das novas tecnologias, ensinar Matemática aos alunos está cada vez mais desafiador para os professores. Precisamos nos reinventar, propor atividades diferenciadas, fazer com que os alunos vejam significado no que estão fazendo.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece conteúdos mínimos e competências a serem desenvolvidas em todas as escolas do Brasil. De acordo com a BNCC, a Matemática, por meio de seus diversos campos, como a Geometria, Álgebra, Estatística, Aritmética e Probabilidade

precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática, conceitos e propriedades, fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BNCC, 2017, p.221)

Diante do acima exposto, a BNCC em [3] (2017, p. 267) elenca as competências específicas do Ensino da Matemática no Ensino Fundamental, ou seja, todos os alunos devem possuir essas competências ao ingressar no Ensino Médio:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

No 13º Artigo do Regimento do Mestrado Profissional de Matemática em rede Nacional - PROFMAT, diz que:

Art 13º Para a obtenção do título de Mestre é necessário o desenvolvimento de uma dissertação de mestrado, na qual estejam descritos os fundamentos teóricos empregados e os processos que culminaram neste produto e na sua aplicação em situações de ensino. Isso deve ser feito com foco em tópicos específicos relacionados ao currículo de Matemática na Educação Básica e seu impacto na prática pedagógica em sala de aula. (PROFMAT, 2024, Online)

Segundo a matéria “Matemática é difícil? Desmistificando crenças comuns”, do *site* Kumon Brasil ([12]), é comum que muitas pessoas acreditem que a matemática é uma disciplina difícil e complexa, o que pode gerar um mito que afasta estudantes que se sentem intimidados por essa área do conhecimento.

Infelizmente, esse mito é frequentemente reforçado pelos professores de exatas e por pessoas que possuem muita facilidade com matemática.

O texto também discute a natureza acumulativa da matemática, onde o aprendizado de novos conceitos depende da compreensão de conceitos anteriores, e critica o uso de

metodologias de ensino ineficazes, onde as aulas são focadas apenas na resolução de exercícios mecânicos, sem explorar a compreensão dos conceitos matemáticos. Além disso, refuta outros mitos comuns, como a ideia de que a matemática se resume a decorar fórmulas ou que apenas algumas pessoas têm talento natural para a disciplina.

Ainda segundo a matéria, para superar a crença de que a matemática é difícil, o texto sugere algumas dicas, como valorizar o estudo teórico, manter uma rotina constante de estudos, focar no entendimento dos conceitos básicos antes de avançar para conteúdos mais complexos, e aplicar a matemática em situações do dia a dia. Assim, é possível tornar o aprendizado mais acessível e interessante.

Neste contexto, é importante que o professor busque formas de tornar o aprendizado mais prazeroso e dinâmico. É preciso se reinventar e buscar novas metodologias para que o aluno se sinta motivado a aprender.

Procurando contemplar o décimo terceiro artigo do Regimento do Mestrado Profissional de Matemática e atender as competências e habilidades previstas na BNCC, neste trabalho são propostas 5 (cinco) atividades de Matemática, para serem desenvolvidas com alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Em comum, essas atividades possuem a discretização como base. A discretização é uma técnica que transforma dados e variáveis contínuas em valores ou categorias discretas. Ela efetua essa transformação a partir da subdivisão dos dados em intervalos ou compartimentos específicos, alocando cada valor ou variável a um intervalo correspondente.

Com essas técnicas é possível obter resultados aproximados. Por exemplo, a discretização de dados entra em cena quando uma empresa se depara com dados contínuos ou em grande quantidade de difícil coleta ou análise. Ao aplicar a discretização nesses elementos, os profissionais da área de dados conseguem simplificar o problema, tornando a compreensão sobre eles mais fácil.

Na primeira atividade, a proposta é fazer qualquer desenho, de qualquer tamanho em uma escala diferente do desenho original, mesmo sem ter o dom de desenhar. A técnica consiste em quadricular a imagem e reproduzir quadro a quadro a imagem em escala maior.

A segunda atividade propõe calcular a área delimitada entre a linha de 3 pontos e a linha de fundo de uma quadra de basquete, como se fosse proposto pintá-la de uma cor diferente. O formato da linha é composto por um semi-círculo e retas paralelas às linhas laterais, mas, devido ao fato de as linhas da quadra da escola estarem apagadas, planejei e executei a atividade alterando a linha, de modo que ela ficasse no formato semelhante à de uma parábola, que era como eu acreditava ser, somado ao fato de que era uma forma que os alunos haviam acabado de aprender em equações do 2º grau. O desafio será realizar as medições e calcular a área através de retângulos, como no conceito de integrais.

Na terceira atividade, a proposta é introduzir os conceitos da cinemática de maneira que, com apenas duas grandezas, os alunos sejam capazes de calcular de forma aproximada a velocidade média e instantânea, o tempo gasto e a distância percorrida de um objeto em movimento.

Na quarta atividade, os alunos serão desafiados a calcular volumes de terra a serem escavados para se nivelar um terreno. O objetivo é dar sentido ao cálculo de volume, respondendo à famosa pergunta ouvido por professores de Matemática por seus alunos: "Onde vou usar isto?"

Na quinta e última atividade, a proposta é calcular o volume de um fígado que acabou de passar por uma tomografia computadorizada e foi dividido em 10 seções de igual comprimento. O objetivo é mostrar aos alunos que nem sempre será possível calcular volumes com exatidão e apresentar maneiras alternativas para se efetuar esse cálculo, fazendo com que os alunos não fiquem restritos ao uso de fórmulas.

DESENHO EM MALHA QUADRICULADA

Desenhar é um dom para poucas pessoas. Quando não possuímos esse dom e vemos um desenho feito a mão, ficamos com vontade de aprender a desenhar. Hoje em dia, existem escolas e cursos, que ensinam a desenhar.

Caso uma pessoa queira reproduzir um desenho, mas não possui o dom ou não saiba muitas técnicas de desenhar, será que é possível ela fazer esse desenho?

A resposta é: sim! É possível utilizar discretização para se reproduzir uma imagem, do tamanho que se deseja, de modo que seus elementos fiquem em uma escala diferente da imagem original.

A proposta para isso é quadricular a imagem original e quadricular nas proporções desejadas o espaço onde deseja-se reproduzir esta imagem.

1.1 ORIGEM DA TÉCNICA DE DESENHO NA MALHA QUADRICULADA

De acordo com Thais Slaski em [19], esta técnica já era usada no Renascimento pelo pintor alemão Albrecht Dürer, onde ele colocava um vidro quadriculado entre ele e a imagem a ser pintada, para que sua pintura fosse o mais fiel possível às proporções. Ele quadriculava o vidro, fixava uma mira com visor, de modo que ele pudesse observar o objeto sempre daquela mesma posição, utilizando uma vara com um furo e replicava no papel, também quadriculado, desenhando cada quadrado da malha, garantindo que as proporções do desenho permanecessem fieis à imagem real, diminuindo ou aumentando o tamanho da obra ou quando queria preservar a perspectiva com precisão. Segundo Slaski, esta técnica foi a responsável por resolver um problema ao qual os artistas davam grande importância, que eram as proporções do corpo humano. A Figura 1, tirada de seu livro, *Unterweisung der Messung* (Instruções sobre Medição), 1538, ilustra como Dürer utilizava esta técnica:



Albrecht Dürer, illustration from *Ungerwöhnung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit*, Nuremberg, 1538.

Figura 1: ilustração de Instruções de medição com bússola e vara, Nuremberg, 1538

Essa atividade pode ser proposta para o 6º ano, e está prevista na BNCC (Base Nacional Curricular Comum), na Unidade temática Geometria, Objeto de conhecimento, Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas; onde será trabalhada as seguintes habilidades: (EF06MA21): Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

Desenhar em malha quadriculada é uma atividade que pode trazer diversos benefícios para os alunos. No aplicativo ChatGPT obtivemos algumas delas:

- **Melhora da coordenação motora:** Ao desenhar em malha quadriculada, os alunos precisam controlar com mais precisão seus movimentos, o que ajuda a melhorar a coordenação motora.
- **Desenvolvimento do raciocínio espacial:** A malha quadriculada ajuda os alunos a visualizar e planejar melhor suas composições e desenhos, estimulando o raciocínio espacial.
- **Estímulo à criatividade:** A malha quadriculada proporciona um formato estruturado para as criações dos alunos, o que pode estimular a criatividade e a imaginação na elaboração de desenhos e padrões.
- **Melhora da concentração:** Desenhar em malha quadriculada requer atenção e concentração para garantir que os traços e formas fiquem alinhados corretamente, o que pode ajudar os alunos a desenvolver a capacidade de focar em uma atividade por um período prolongado.
- **Prática de habilidades matemáticas:** A malha quadriculada é composta por uma grade de quadrados iguais, o que pode ajudar os alunos a praticar conceitos matemáticos como contagem, proporção e simetria.

Portanto, desenhar em malha quadriculada pode ser uma atividade educativa e divertida que traz benefícios tanto para o desenvolvimento artístico quanto para o cognitivo dos alunos.

1.2 INSPIRAÇÃO PARA DESENVOLVER ESTA ATIVIDADE

Os moradores da rua de minha casa haviam feito desenhos em 1986 para a Copa do Mundo daquele ano, no México. Eu ainda era criança mas nos deixaram participar da pintura de alguns desenhos. Essa experiência foi muito marcante e prazerosa, pois dividi momentos com meus amigos, familiares e vizinhos.

Particularmente, aprendi esta técnica na disciplina de Educação Artística, na 6ª série, em 1990.

Quatro anos se passaram e a vontade de repetir aquela experiência de unir meus amigos e vizinhos em torno desse evento esportivo tão esperado foi aumentando.

Dois vizinhos, adultos, que desenhavam muito bem e que haviam tomado a frente com os desenhos em 1986, já não moravam mais na rua de minha casa. Mesmo assim, sem ter ninguém que soubesse desenhar bem, pintamos as guias, fizemos bandeirinhas, fizemos alguns desenhos e a participação e união dos vizinhos fez com que fosse mais uma experiência muito prazerosa.

Em 1994, já com 16 anos, mesmo sem saber desenhar, resolvi tomar a frente dessa nova “tradição” e contei minha ideia sobre reproduzir um desenho pequeno no asfalto da rua, utilizando as malhas quadriculadas a três amigos, que toparam.

No início, os adultos não entendiam o que estava acontecendo, pois cada um de nós pegou uma parte do desenho para fazer. À medida em que apagávamos a malha com nossos chinelos e panos molhados, o escudo da CBF apareceu, numa precisão assustadora. Após a finalização desse desenho, deixamos outras pessoas pintarem e passamos para outros desenhos.

Ver a rua ganhar vida com as cores da bandeira do meu país e os símbolos da Copa do Mundo foi algo realmente especial. Foi uma forma de expressar todo o meu amor pelo futebol e pela minha seleção, além de unir a comunidade em torno desse evento esportivo tão esperado.

A reação dos vizinhos que passavam pela rua também foi maravilhosa. Muitos paravam para admirar o trabalho e oferecer uma contribuição para comprar mais tinta, e isso me encheu de orgulho. Foi uma forma de levar alegria e empolgação para todos, e isso me fez sentir parte de algo maior.

Tivemos a oportunidade de repetir essa experiência nas Copas de 1998, 2002, 2006, 2010 e 2014. Em 2010 foi muito mais especial, pois arrecadamos uma quantia maior e pudemos comprar, além das tintas, bandeiras, papel e barbante para a confecção de bandeirinhas e houve uma competição promovida por uma rádio de Pindamonhangaba, que pagaria um churrasco para a rua mais bonita. Ficamos entre os 3 finalistas, dei entrevistas, visitei as

outras duas ruas e apesar de eu achar que a nossa estava muito mais bonita, na qualidade dos desenhos e nos enfeites, ficamos em segundo lugar. Independente disso, tiramos muitas fotos, incluindo algumas de minha esposa pintando os desenhos com 8 meses de gravidez.

Pintar a rua para a Copa do Mundo me permitiu conhecer novas pessoas e fazer novas amizades. Por vezes, fazíamos os desenhos até tarde da noite e as mulheres traziam café, leite quente, bolos para nos manter alimentados. Durante o dia, crianças brincando, pessoas varrendo, toda a participação e envolvimento fazia parecer uma grande família. Foi uma experiência que me trouxe muitas boas lembranças e que certamente guardarei para sempre no meu coração.

No caso dos desenhos grandes, como os feitos para a copa do Mundo, eu utilizava uma régua para marcar exatamente onde os pontos que intersectariam as linhas. Isso fazia com que as proporções fossem respeitadas e os desenhos ficassem muito fiéis aos originais.

1.3 SITUAÇÃO-PROBLEMA

A atividade proposta é realizar um desenho 10 (dez) vezes maior do que o original. Como não foi possível realizar na escola, fiz esse projeto em casa, com meus filhos, Miguel, 14, Melinda, 11 e Mateus, 8 anos.

Essa atividade pode ser realizada em escolas que possuem muros não pintados. Como sugestões, poderia ser desenhados o brasão da escola, o símbolo ou a bandeira da cidade, algum personagem escolhido pelos alunos, releituras de obras de arte, desde que sejam devidamente autorizados.

1.4 PREPARATIVOS

Em primeiro lugar obtive a imagem que queríamos reproduzir: o símbolo do Corinthians. Em seguida, o coloquei no tamanho 160 mm x 200 mm numa malha quadriculada de 1 cm de comprimento por 1 cm de largura. Eu utilizei o programa Corel Draw, mas é possível fazer no Microsoft Word ou em qualquer programa de edição de imagens. Dois aplicativos para se inserir uma malha quadriculada são: "Perspective Finder" e "Drawing Grid". A malha quadriculada pode ser feita também com régua e lápis.

Fiz a malha quadriculada na parede da varanda de minha casa, utilizando giz de bastão azul, com a malha de 10 cm de lado.

Em seguida, demarquei as coordenadas na imagem no papel e na parede, para que não precisemos ficar contando as linhas e colunas. Vamos chamar as linhas horizontais de "linhas", e as linhas verticais, de "colunas".

A malha possui 17 linhas verticais. Como o desenho contém formas geométricas e possui um eixo de simetria, onde as partes em vermelho (âncora e remos) podem ser espelhadas, considere a linha vertical do meio como a origem, onde à esquerda estão os números negativos e à direita, os números positivos. A segunda linha de baixo para cima, chamei de linha "A", a terceira linha de baixo para cima, chamei de linha "B" e assim por diante, até a linha "T". A primeira coluna da esquerda para a direita chamei de coluna "-8". A coluna à direita da "-8", chamei de coluna "-7", e assim por diante, até a coluna "8".

Começamos então a reproduzir o desenho na parede. Utilizamos a escala 1:10, ou seja, cada 1 cm da imagem no papel correspondia a 10 cm no desenho a ser feito, na parede. O desenho na parede, ficaria dez vezes maior.

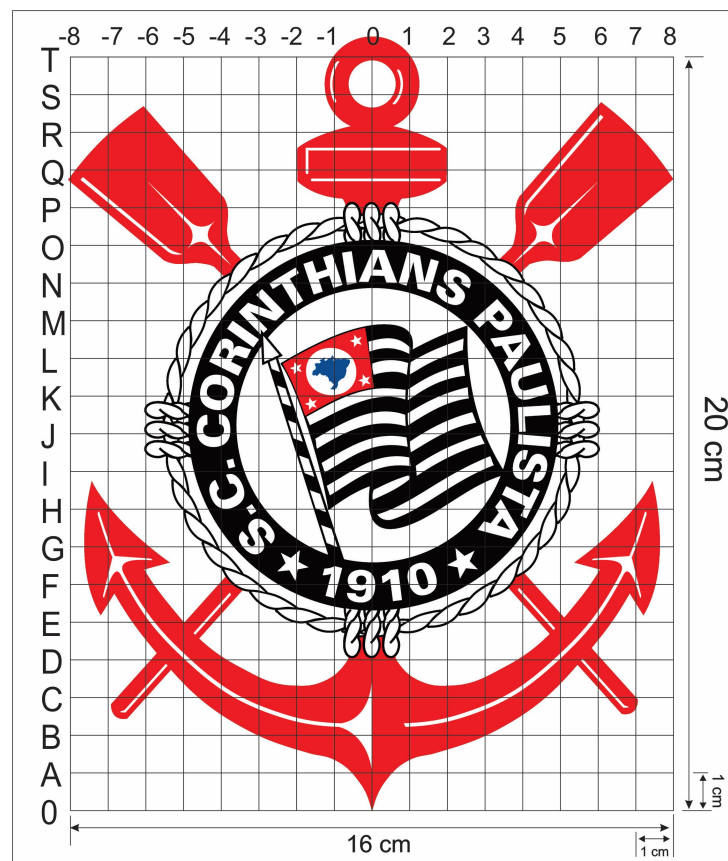


Figura 2: Malha quadriculada - Símbolo do Corinthians

A figura escolhida contém formas geométricas, como a circunferência, que foi desenhada com o auxílio de um barbante, e retas, como os remos e a haste da bandeira do estado de São Paulo.

1.5 REALIZANDO A ATIVIDADE

Começamos a desenhar a coroa circular, composta pelas duas circunferências que contém o nome e o ano de fundação do time. Para isso, precisamos achar o centro das circunferências.

Na imagem do papel, o ponto mais alto e mais baixo das circunferências estão no eixo das ordenadas e distam 7,28 cm na circunferência menor. Portanto, seu raio mede 3,64 cm e seu centro se encontra em $x = 0$. Com o auxílio de uma régua, é possível observar que a distância em que a distância horizontal é de 7,28 cm na horizontal fica acima da linha "J". Portanto o centro das circunferências é no ponto $(0, J+)$ mm.

Utilizando uma corda de pedreiro (feita de nylon), amarramos um lápis numa ponta e fixamos um prego na outra ponta no ponto $(0, J+)$ cm, na parede, que serviu como "ponta-seca". Não aconselho a desenhar circunferências com barbante, devido ao fato de ele ter mais elasticidade.

Desenhadas as circunferências, partimos para os remos e a âncora. Para exemplificar, vejamos as figuras com as medidas dos pontos em que as linhas do desenho intersectam as linhas da malha quadriculada.

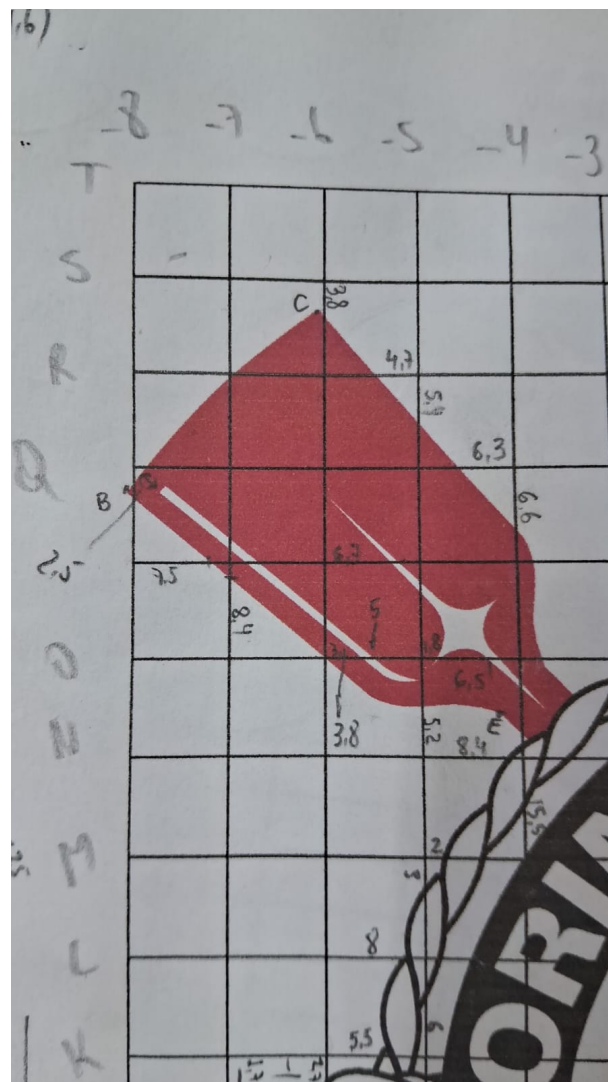


Figura 3: Remo esquerdo no papel

Na imagem acima, marquei um ponto B e um ponto C nas pontas da pá do remo. A linha do remo intersecta 3,8 mm abaixo da coordenada $(-6, S)$.

Na figura abaixo, o remo direito e as marcações feitas, na parede:

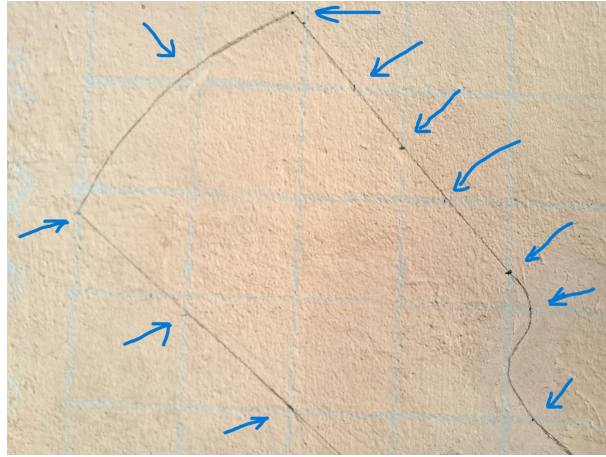


Figura 4: Remo esquerdo na parede com as marcações em destaque

Na figura acima, as setas apontam para os pontos do desenho que intersectam as linhas da malha quadriculada.

Também foram marcados os seguintes pontos:

- 4,7 mm à direita da coordenada (-6, R);
- 5,4 mm abaixo da coordenada (-5, R);
- 6,3 mm à esquerda da coordenada (-4, Q);
- 6,6 mm abaixo da coordenada (-4, Q);
- 7,5 mm à direita da coordenada (-8, P);
- 8,4 mm acima da coordenada (-7, O);
- exatamente na coordenada (-6, O); e
- 5,2 mm abaixo da coordenada (-5, N);

Além disso, os pontos B e C ficam à menos de 1 mm à esquerda das colunas -8 e -6, respectivamente, e são ligados por um arco que intersecta a coordenada (-7, R).

Como a figura é simétrica, todas as marcações feitas aqui, podem ser feitas nas coordenadas $(-x, y)$. Ou seja, os oito pontos marcados para o remo da esquerda pode ser feita para o remo do lado direito da seguinte forma:

- 4,7 mm à esquerda da coordenada (6, R);
- 5,4 mm abaixo da coordenada (5, R);
- 6,3 mm à direita da coordenada (4, Q);

- 6,6 mm abaixo da coordenada (4, Q);
- 7,5 mm à esquerda da coordenada (8, P);
- 8,4 mm acima da coordenada (7, O);
- exatamente na coordenada (6, O); e
- 5,2 mm abaixo da coordenada (5, N);

Note que aqui temos que trocar quando for "à esquerda" e "à direita" de uma coordenada para "à direita" e "à esquerda", respectivamente.

Após fazer as marcações, é só ir juntando os pontos, de acordo com o desenho do papel.

Não é necessário, mas foi utilizado um paquímetro para uma maior precisão. É uma ideia interessante, pois é um instrumento de medida com precisão de 0,1mm, que os alunos podem aprender a utilizar.

Na figura abaixo, podemos visualizar o paquímetro sendo utilizado para se calcular a distância de 7,6 mm à esquerda da coordenada (-2, S):

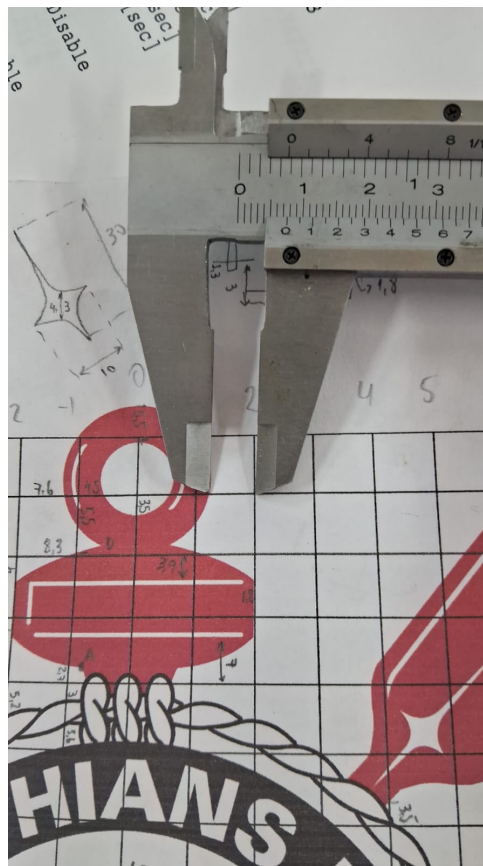


Figura 5: Paquímetro marcando 7,6 mm à esquerda da coordenada (-2,S)

Na imagem abaixo, é possível verificar a régua marcando 7,6 mm, como na figura 5



Figura 6: Régua marcando 7,6 mm

Um outro exemplo: desenhando o "gancho" esquerdo da âncora e a parte inferior do gancho.

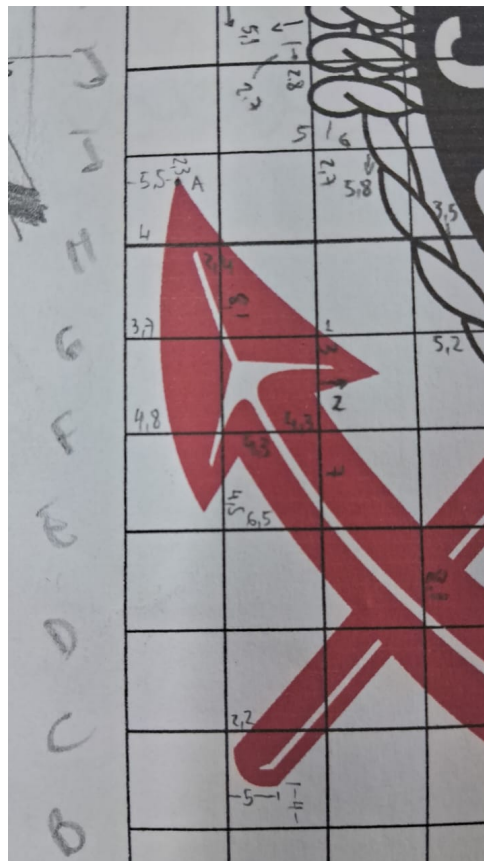


Figura 7: gancho esquerdo da âncora e parte inferior esquerda do remo

Na imagem acima, marquei um ponto A na ponta do gancho da âncora. Ele está à 5,5 mm à direita da coluna -8" e 2,3 mm abaixo da linha "J". Marquei esse ponto e marquei também os seguintes pontos:

- 4 mm à direita da coordenada (-8, H);
- 3,7 mm à direita da coordenada (-8, G);
- 4,8 mm à direita da coordenada (-8, F);
- 4,5 mm acima da coordenada (-7, E);
- 6,5 mm à direita da coordenada (-7, E);
- 2,2 mm à direita da coordenada (-7, C);
- exatamente na coordenada (-7, H);
- exatamente na coordenada (-5, E);
- exatamente na coordenada (-6, C);
- 1 mm à direita da coordenada (-6, G); e
- 5,2 mm abaixo da coordenada (-5, N);

Foram feitas, também, as marcações da parte branca, que representa o brilho da âncora. A parte mais inferior do remo, fica à 5 mm à direita da coluna -7" e 4 mm acima da linha "B". Como o remo é reto, é necessário anotar apenas mais um ponto de cada lado do remo. Do lado esquerdo, foi anotado a coordenada (-5, E) e no lado direito foi marcado a coordenada (-6, C).

De modo análogo à pá do remo, podemos marcar os seguintes pontos para o gancho direito da âncora e parte inferior direita do remo:

- 4 mm à esquerda da coordenada (8, H);
- 3,7 mm à esquerda da coordenada (8, G);
- 4,8 mm à esquerda da coordenada (8, F);
- 4,5 mm acima da coordenada (7, E);
- 6,5 mm à esquerda da coordenada (7, E);
- 2,2 mm à esquerda da coordenada (7, C);
- exatamente na coordenada (7, H);
- exatamente na coordenada (5, E);

- exatamente na coordenada (6, C);
- 1 mm à esquerda da coordenada (6, G); e
- 5,2 mm abaixo da coordenada (5, N);

Todas estas medidas repassei para a parede, mas em centímetros. Ou seja, cada milímetro do desenho equivale a 1 cm na parede.

Alguns elementos, como a corda que margeia a coroa circular pintada de preto, que contém o nome e ano de fundação do time, e as listras da bandeira, precisavam ser mais detalhadas. Neste caso, um recurso a ser utilizado é dividir as malhas quadriculadas em quadrados menores. Quanto menor a distância entre as linhas, maior a precisão no desenho. Podemos visualizar esse procedimento na figura abaixo:

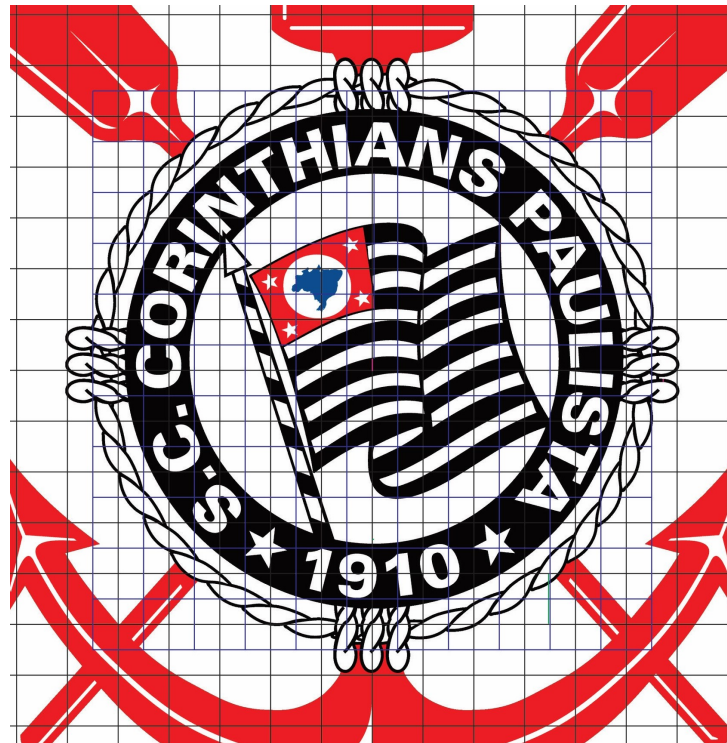


Figura 8: redução das quadrículas para imagens mais detalhadas

Na parede, as linhas adicionais foram necessárias para que alguns elementos da imagem não ficassem fora do lugar ou de tamanho discrepante. Nas duas figuras abaixo podemos ver uma parte da imagem com as linhas e, após o desenho estar pronto, as linhas foram apagadas, para que não fiquem marcadas após receber a tinta.

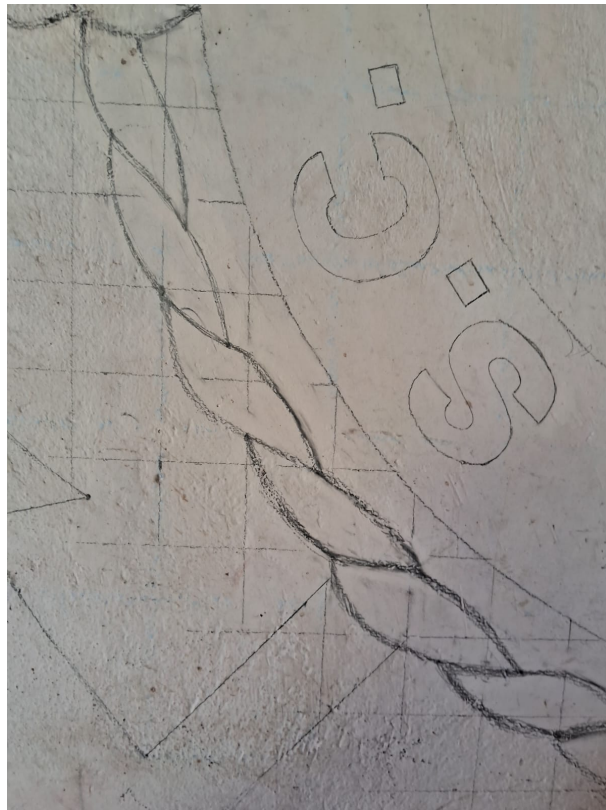


Figura 9: Parte da imagem com malha duplicada



Figura 10: Malha apagada para receber a tinta

O resultado final pode ser visto na figura abaixo:



Figura 11: Desenho finalizado

É possível observar que as proporções foram preservadas. Quanto mais lisa a superfície a ser desenhada, mais precisas ficarão as linhas. Os pincéis e a tinta utilizada fazem muita diferença também no resultado final. Se o desenho for feito no asfalto ou em uma parede não lisa, as imperfeições da superfície farão com que algumas linhas não tenham o contorno desejado. Mas de longe, o desenho ficará fiel ao original.

As letras e números podem ser impressos e contornados. O arquivo contendo o desenho na malha quadriculada, as letras e números em tamanho compatível, estão disponíveis no meu drive, em:

<https://drive.google.com/drive/folders/1mvzVSiWRppNd4G--1l-qJnhnGCaWG-Ri?usp=sharing>

Os métodos utilizados aqui relacionam-se à discretização, quando dividimos o desenho em quadrículas e desenhamos o conteúdo de cada quadrícula de forma aproximada. Nesta atividade, uma quadrícula independe da outra e quando desenhamos todas as linhas de todas as quadrículas, o desenho aparece.

1.6 HABILIDADES DA BNCC RELACIONADAS A ATIVIDADE PROPOSTA

Esta atividade está prevista na BNCC (2017), com as seguintes habilidades:

- EF06MA20 - Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
- EF06MA15 - Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
- (EF06MA21) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

CÁLCULO DA ÁREA SOB A LINHA DE 3 PONTOS DE UMA QUADRA DE BASQUETE

Em uma quadra de basquete encontramos muitas formas geométricas. Calcular a área da quadra, do círculo central ou do garrafão são atividades que podem ser desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental.

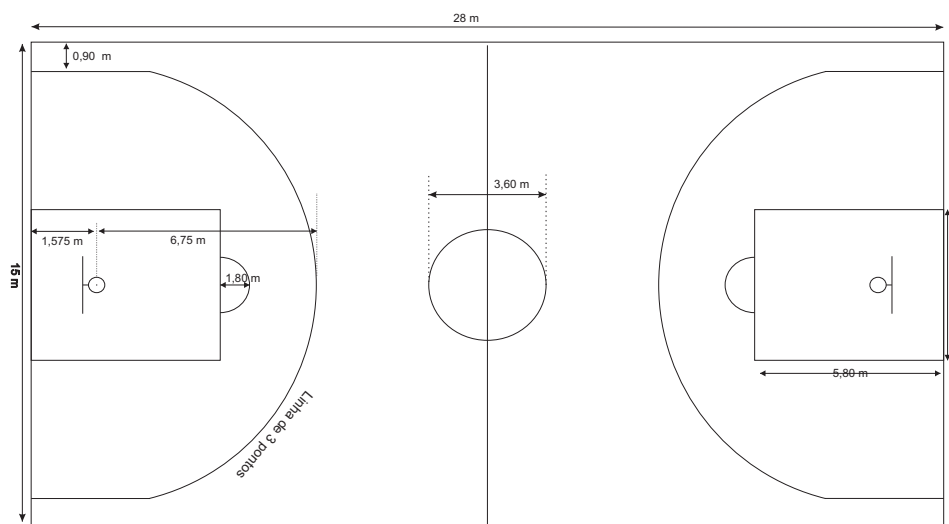


Figura 12: Medidas oficiais de uma quadra de basquete. Fonte: Federação Internacional de Basquete (FIBA)

No ano de 2023, realizei esta atividade com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Professora Judith Campista César, situada no município de Taubaté-SP.

2.1 SITUAÇÃO-PROBLEMA

A situação problema fictícia foi apresentada da seguinte maneira:

A rede municipal quer pintar as quadras poliesportivas de todas as 126 (cento e vinte e seis) escolas municipais e fomos incumbidos de calcular a área delimitada por uma linha com formato semelhante a uma parábola, como se ela fosse a linha de 3 pontos dos dois lados das quadras de uma cor diferente do restante

da quadra, para que fique mais fácil a visualização dos espectadores e dos árbitros. Precisamos calcular a área para que a Prefeitura compre a quantidade de tinta, sem que falte tinta ou que haja desperdícios, pois estamos falando de dinheiro dos contribuintes.

2.2 CARACTERÍSTICAS DE UMA QUADRA DE BASQUETE

Na Figura 12, podemos ver que as medidas oficiais de uma quadra de basquete são 28 m x 15 m. Porém, numa quadra poliesportiva, essas medidas não se aplicam, pois no futsal e handebol, por exemplo, as medidas oficiais da quadra são 40 m x 20 m. Já numa quadra de voleibol as medidas são 9 m x 18 m, com pelo menos 3 m de área de escape (área externa à quadra, que permite aos jogadores espaço para a corrida, salto e execução da projeção do saque).

Na Figura 13 podemos ver uma quadra poliesportiva, com as marcações para a prática de vários esportes numa única quadra.



Figura 13: Quadra Poliesportiva. Fonte: flexquadra.com.br

De acordo com as Regras Oficiais da Federação Internacional de Basquete (FIBA), de 2020, em [10], há uma área da cesta de campo de 3 pontos, que é compreendida por toda a área da quadra, exceto a área próxima a cesta da equipe oponente, limitada por uma linha, chamada de linha de 3 pontos. Ou seja, se um jogador arremessar a bola contra a cesta da equipe oponente de qualquer local da quadra, fora da região delimitada pela linha de 3 pontos, inclusive, e acertar a cesta, a sua equipe ganhará 3 pontos. Se o arremesso for feito dentro da linha de 3 pontos e a bola entrar na cesta, a equipe ganha 2 pontos.

A linha de 3 pontos é um semicírculo com 6,75 m de raio medido desde o ponto no piso, exatamente abaixo do centro da cesta dos oponentes até a borda externa do arco. A distância do ponto no piso para a margem interna dos pontos médios da linha final é 1,575 m. O arco se une às linhas paralelas, que distam de 90 centímetros das linhas externas.

Quando planejei a atividade, a ideia era que os alunos aprendessem a calcular a área de uma parábola. Lembro-me de assistir aos jogos de basquete nas Olimpíadas de 1992, quando Oscar, Hortência, Paula e Janete colocavam o basquete brasileiro na elite do basquete mundial e eu imaginava que a linha de 3 pontos tinha o formato de uma parábola.

Porém, ao pesquisar sobre as medidas de uma quadra de basquete, descobri que a linha de 3 pontos não tinha o formato de uma parábola.

Durante a minha pesquisa, descobri que a linha havia sofrido alterações, em 1° de outubro de 2010 [10]. A linha de 3 pontos tinha sido aumentada em 0,5 metro, para tornar mais difícil as cestas valendo 3 pontos. A linha, que antes ficava à 6,25 metros de distância da cesta, mudou para 6,75 metros. Porém, como haviam várias marcas no chão, idealizei o problema como se a linha fosse uma parábola, estendendo a linha como se fosse uma parábola.

Porém, calcular a área sob a linha de 3 pontos, com as medidas oficiais ou da própria quadra seria interessante, pois precisaríamos dividir a área em um retângulo e um arco de circunferência somado a dois triângulos.

O cálculo da área dessa região composta pelo arco de circunferência seria um exercício interessante para os alunos. É uma ideia alternativa para calcular a área, sem o uso de manipulações trigonométricas, como as que foram feitas em nossa atividade.

2.3 REALIZANDO A ATIVIDADE NA QUADRA

Para realizar a atividade, foram utilizados os seguintes materiais:

- 1 (uma) caixa de giz branco tipo bastão;
- 1 (uma) prancheta para apoiar as folhas de anotações;
- formulários para preenchimento dos dados;
- 2 (duas) trenas de 10 m;
- 2 (duas) réguas de pedreiro de 3 m;
- 2 (duas) calculadoras/ e
- barbante

Inicialmente, a turma foi dividida em 2(dois) grupos com 16 (dezesesseis) alunos. Cada grupo ficou responsável por metade da linha. Deleguei a alguns estudantes de cada grupo, uma função específica, por exemplo:

- 01 (um) estudante de cada grupo responsável pelas anotações das medidas na folha;

- 01 (um) estudante de cada grupo ficou com uma calculadora para realizar os cálculos das áreas dos retângulos;
- 02 (dois) estudantes de cada grupo ficaram responsáveis pela trena;
- 02 (dois) estudantes de cada grupo realizavam a leitura da medida (para se certificar de que a leitura foi correta);
- 02 (dois) estudantes de cada grupo ficaram responsáveis por fixar o sarrafo (régua de madeira improvisada) no chão;
- 01 (um) estudante de cada grupo ficou responsável por riscar com giz no chão;
- 01 (uma) estudante ficou responsável por registrar os trabalhos, tirando fotos com o celular.

Antes de iniciar a atividade, expliquei como seriam os procedimentos. Primeiramente dividiremos a linha de 3 pontos ao meio. Cada grupo ficará responsável por fazer as medições em cada uma destas metades. A seguir, dividiremos as áreas em retângulos para obter estimativas para o valor da área desejada.

Expliquei aos alunos que eles deveriam considerar a área interna à linha branca que serve para delimitar a área da quadra, cuja espessura é de 9 cm. Portanto, as medições seriam feitas sempre na parte interna da linha branca.

Para dividir a linha de 3 pontos ao meio, os alunos deveriam marcar o ponto médio da linha de fundo e traçar a mediatriz.

Para isso, com o auxílio do barbante, demarcar a interseção de dois arcos de mesmo raio cujas bases estão fixadas nos vértices formados pela linha de fundo e linhas laterais dos dois lados da quadra. Unindo o ponto médio da linha de fundo com a interseção, traçamos o segmento de reta perpendicular à linha de fundo que divide a linha de 3 pontos ao meio, no eixo de simetria da parábola.

A turma foi dividida em dois grupos de alunos. No dia da atividade, vieram 28 alunos. Cada grupo ficou incumbido de realizar as marcações e anotações de uma metade da linha de 3 pontos.

Após medir a base da região e dividi-la ao meio (essa linha é a altura), os dois grupos dividiram a base ao meio e riscaram uma linha paralela às linhas laterais da quadra e formaram dois retângulos em cada uma das partes, cujas bases serão metade do comprimento da linha de fundo de cada lado. Um dos grupos fará os retângulos cujas alturas sejam limitadas superiormente pela linha de 3 pontos (de modo que os retângulos fiquem dentro da área demarcada pela linha de 3 pontos). O outro grupo fará retângulos cujas alturas dos retângulos sejam limitadas inferiormente pela interseção com a linha de 3

pontos (de modo que os retângulos contêmam a área demarcada pela linha de 3 pontos). A área da linha de 3 pontos será a soma das 4 áreas.

Após isso, cada retângulo foi dividido ao meio, obtendo 4 retângulos de cada lado. A área da linha de 3 pontos será a soma das 8 áreas.

Esse procedimento foi repetido sempre dividindo ao meio, obtendo o maior número de retângulos possível.

Quanto mais retângulos conseguirmos obter, teremos a área da linha de 3 pontos com mais exatidão.

Note que a área em questão corresponde a área sob uma curva que pode ser descrita por uma função $f(x)$ contínua e positiva (um semicírculo ou uma parábola) com $a \leq x \leq b$. Calculamos somas das áreas de retângulos cuja base é $1/2^n$ de $(b - a)$ e altura definida pela curva $f(x)$. Esse tipo de soma é chamada de soma Riemann da função $f(x)$ em $[a, b]$. O valor limite destas somas é chamado de integral de Riemann de f em $[a, b]$. Portanto, estamos calculando um valor aproximado desta integral de Riemann, que corresponde à área exata sob a curva.

Os alunos mediram a largura da quadra. A medida obtida foi de 15,66 metros.

Como a espessura da linha é de aproximadamente 10 centímetros e a linha de 3 pontos estava à 92 centímetros da linha lateral da quadra, a base da região da área a ser calculada, ficou com 13,44 metros de largura, dando à cada equipe, 6,72 metros para trabalhar, conforme podemos visualizar na figura abaixo:

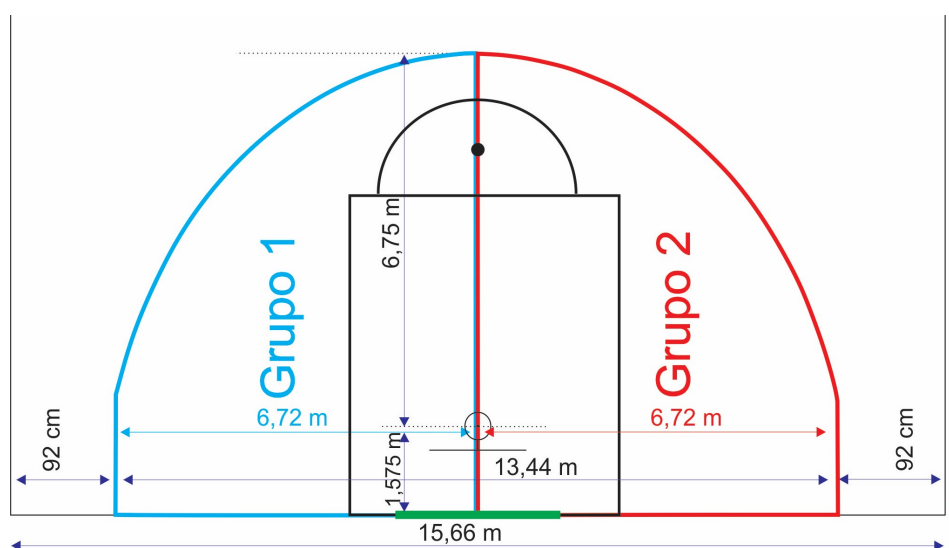


Figura 14: Fundo da quadra - divisão da região de cada equipe

Da linha de fundo até a altura máxima da área a ser calculada (ponto mais longe da linha de 3 pontos em relação ao fundo da quadra), os alunos anotaram 7,80 metros.

Portanto, as medidas da base e altura da área a ser calculada, eram 13,44 m e 7,80 m, respectivamente.

De posse desses dados já seria possível calcular a área dessa parábola, pois bastaria multiplicarmos 2 terços ao produto da base pela altura, obtendo uma área de aproximadamente, 69,888 metros quadrados. A demonstração para esta fórmula está no apêndice A.

Essa informação não foi passada aos alunos, mas já é possível para o professor saber que os valores calculados, deveriam se aproximar desse valor.

Os dois grupos receberam 6 folhas, para que anotassem as medidas obtidas. Estas folhas estão disponibilizadas no meu Google Drive, clicando em: https://drive.google.com/file/d/1y2oBN2T1CM_zpEQrRbROA_MAlX8dIV3d/view?usp=sharing

Abaixo as folhas com as anotações:

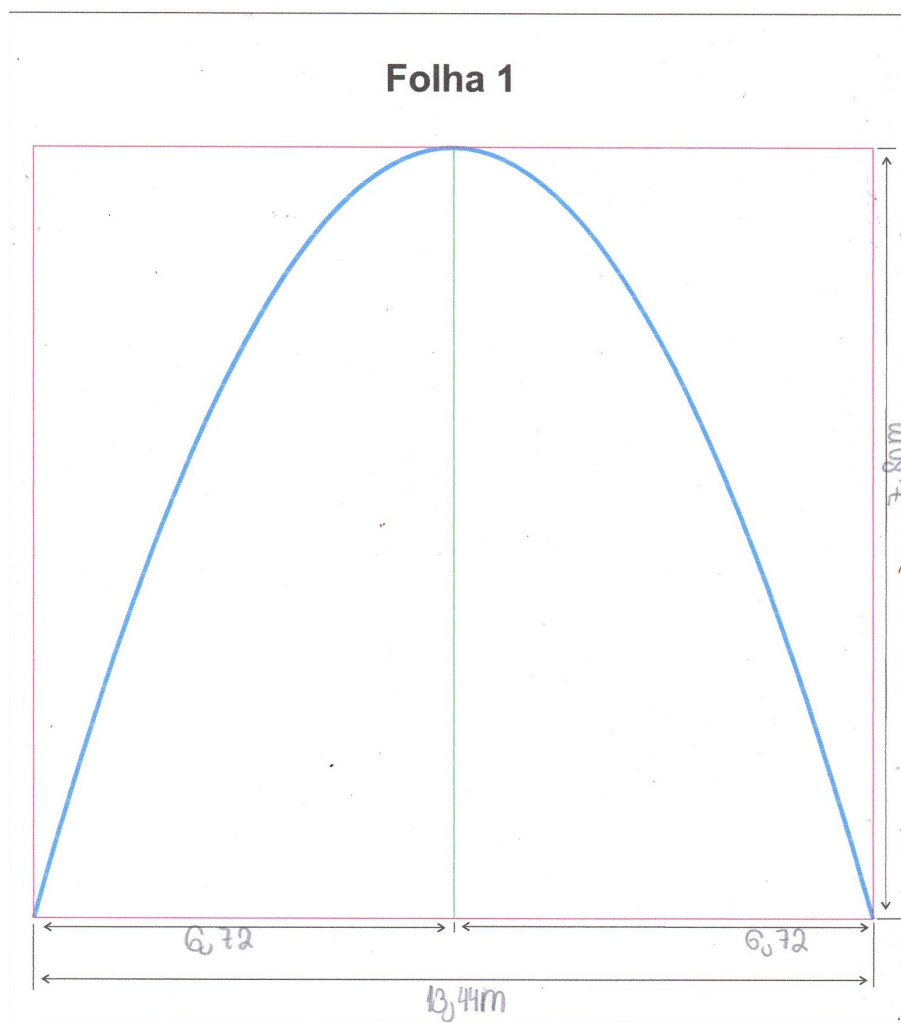


Figura 15: desenho da linha de 3 pontos

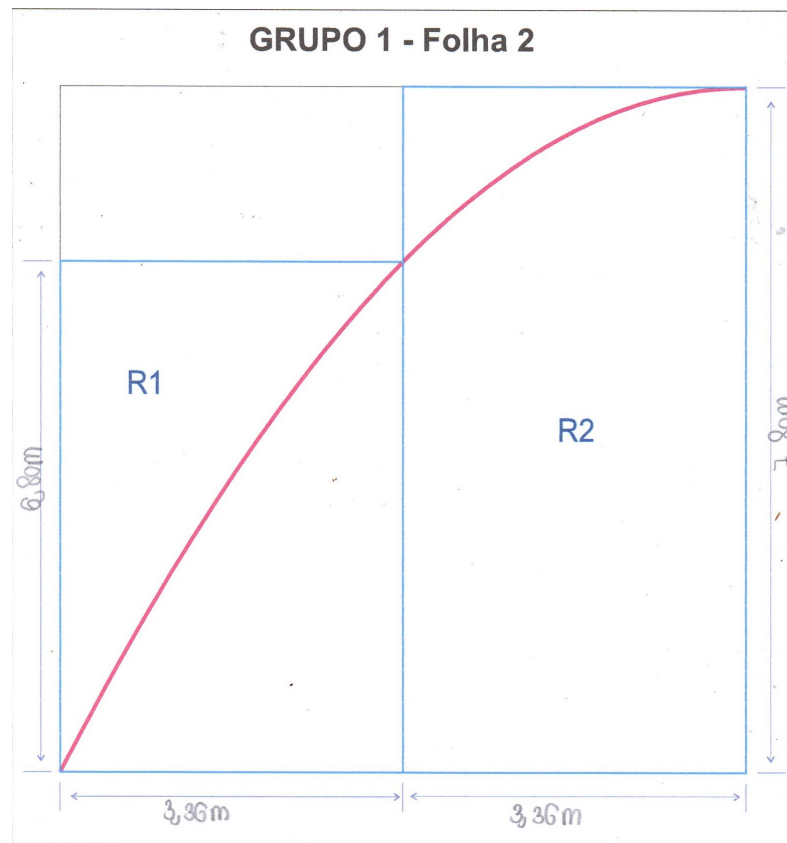


Figura 16: metade esquerda da linha de 3 pontos dividida em 2 retângulos limitados superiormente

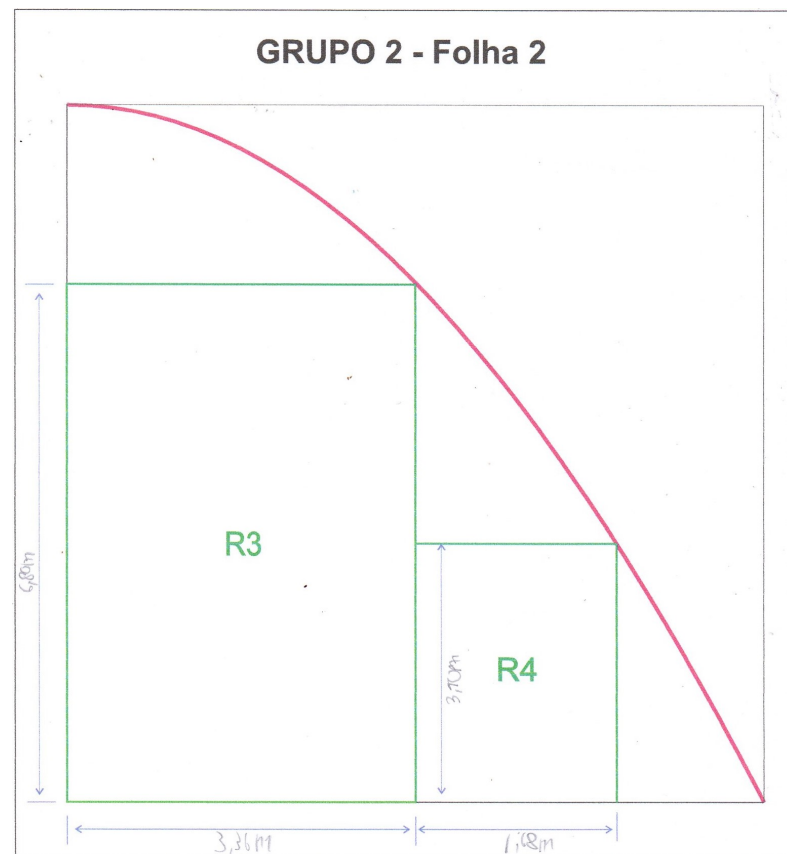


Figura 17: metade direita da linha de 3 pontos dividida ao meio com 2 retângulos limitados inferiormente

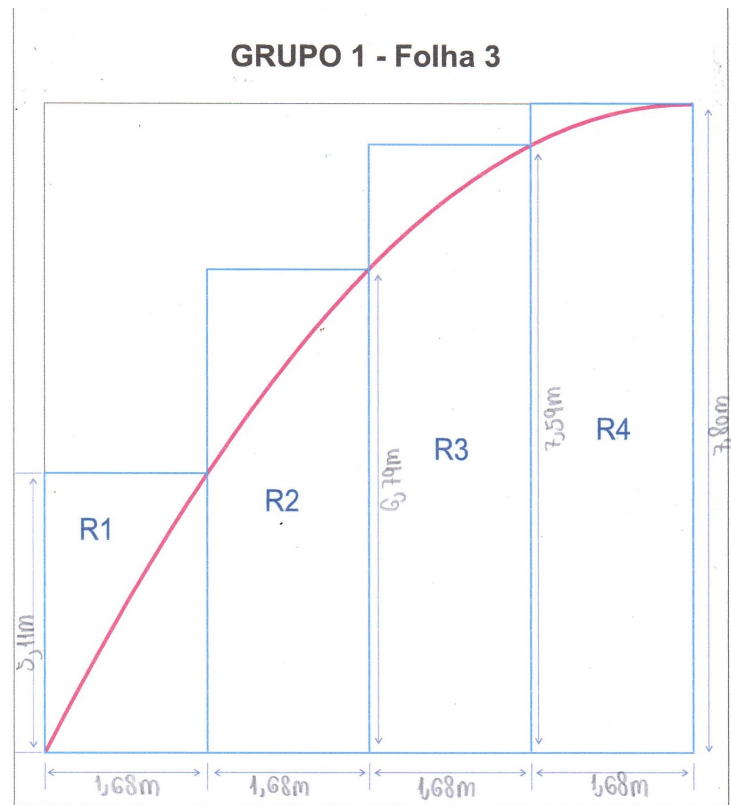


Figura 18: metade esquerda da linha de 3 pontos dividida em 4 retângulos limitados superiormente

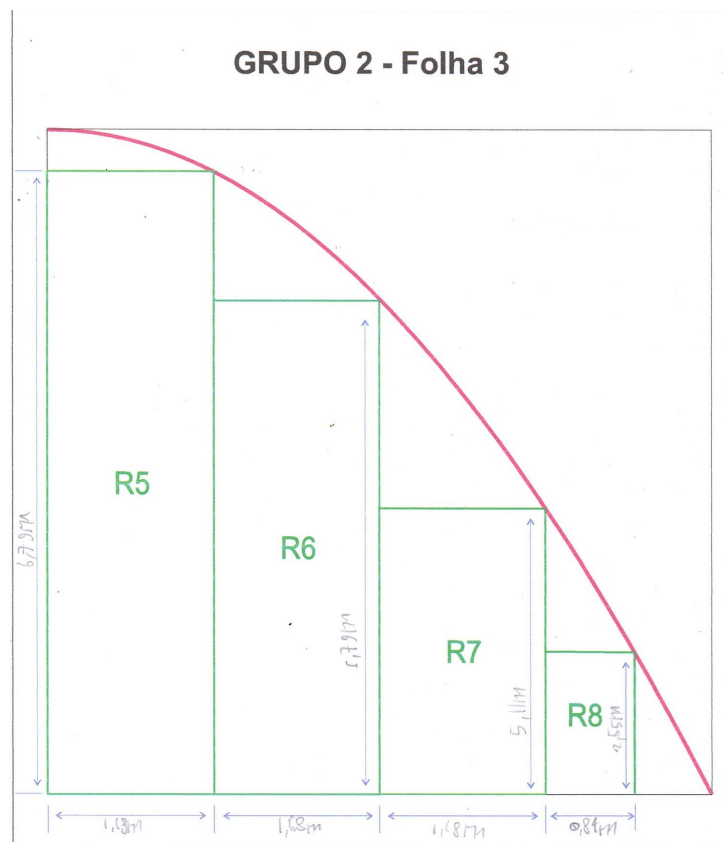


Figura 19: metade direita da linha de 3 pontos dividida em 4 retângulos limitados inferiormente

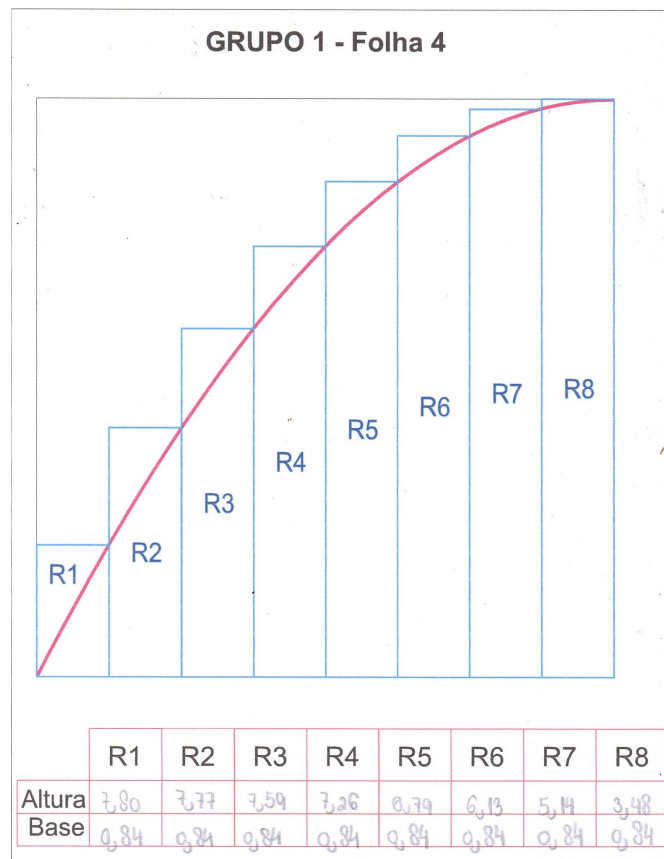


Figura 20: metade esquerda da linha de 3 pontos dividida em 8 retângulos limitados superiormente

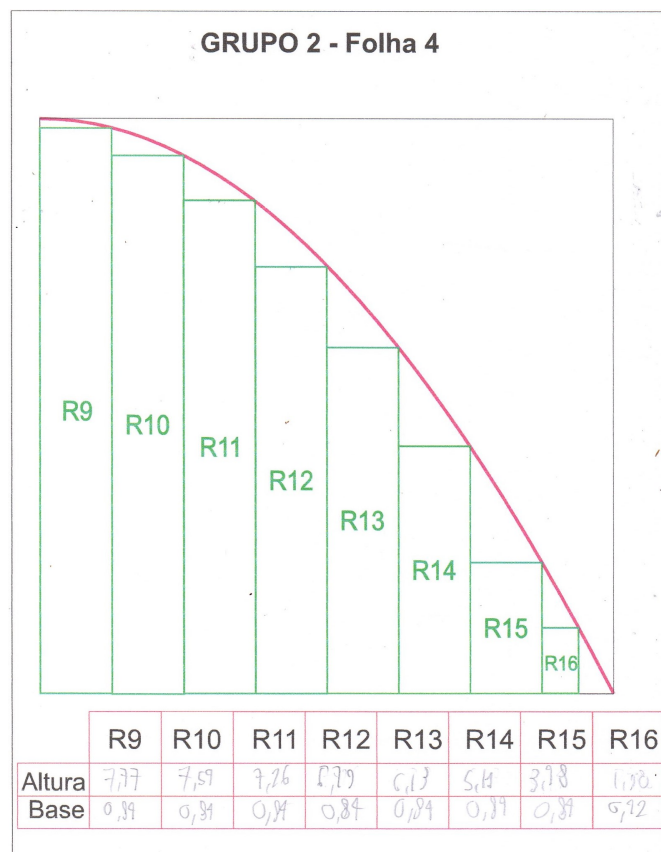


Figura 21: metade direita da linha de 3 pontos dividida em 8 retângulos limitados inferiormente

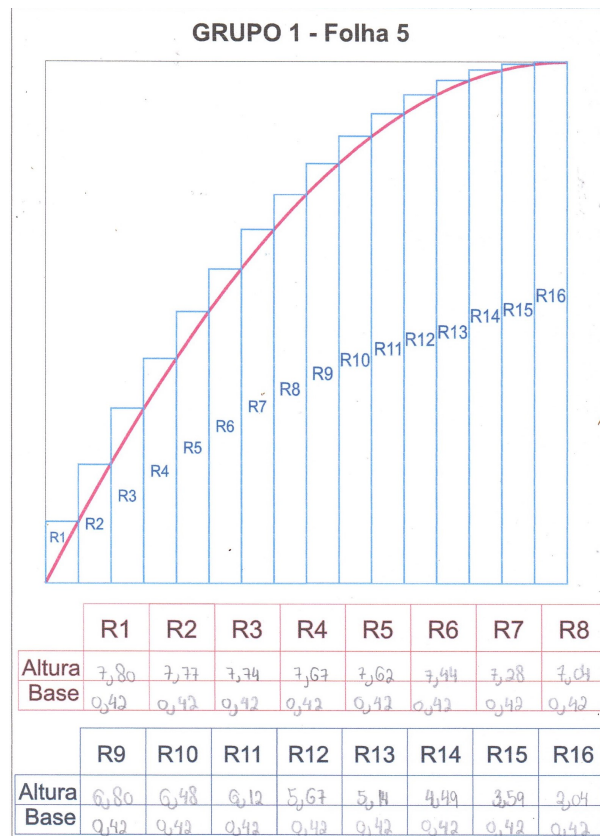


Figura 22: metade esquerda da linha de 3 pontos dividida em 16 retângulos limitados superiormente

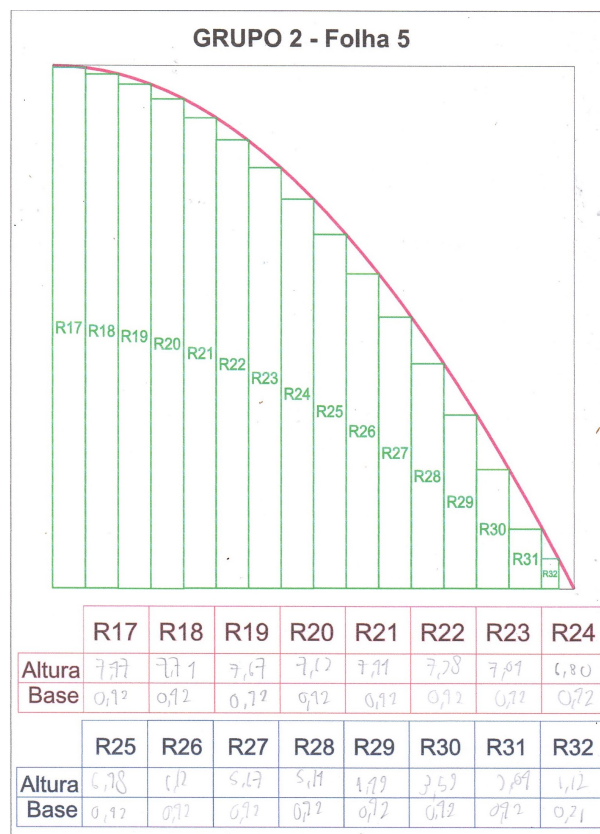


Figura 23: metade direita da linha de 3 pontos dividida em 16 retângulos limitados inferiormente

Os valores encontrados e calculados das parábolas, foram:

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	49,056	34,272	14,784	83,328
8	45,9648	35,5227	10,4421	81,4875
16	43,7556	37,8924	5,8632	81,648
32	42,3024	39,249	3,0534	81,5514

Tabela 1: Resultados obtidos para a linha de 3 pontos, onde N é o número de retângulos

2.4 CÁLCULO DA QUANTIDADE DE TINTA

Após mostrar a tabela acima, com os resultados obtidos pelos alunos, fomos para a terceira parte: calcular a quantidade de tinta a ser utilizada para pintar a parte interna da linha de 3 pontos das quadras de basquete de todas as escolas municipais de Taubaté, considerando que todas tivessem as mesmas dimensões.

De acordo com o site Perfortex, a melhor tinta para pintar uma quadra poliesportiva é a tinta epóxi, pois ela possui elevada resistência química e mecânica, resistindo melhor à abrasão do tráfego de pessoas e à desgastes químicos, como os causados pela incidência dos raios do Sol e suor dos atletas.

Conversando com um vendedor de tintas, descobri que, para se pintar com tinta epóxi, são necessários:

- tinta primer, que é um produto para fixar a tinta ao piso (utilizada em pisos que nunca foram pintados);
- tinta epóxi (chamada de componente A);
- catalisador (também chamado de componente B); e
- o diluente.

Considerando que faríamos um reforço na pintura, dispensamos o primer, pois as quadras já haviam recebido tinta.

Partimos do fato de que a área delimitada pelas duas linhas de 3 pontos de uma quadra ocupam uma área de $81,5514 \times 2 = 163,1028$ metros quadrados. Multiplicando esse valor por 126, que é a quantidade de quadras que desejamos pintar, obtemos:

$$163,1028 \times 126 = 20550,9528 = 20\,551 \text{ metros quadrados.}$$

Como a pintura necessita de duas demãos, precisaremos de uma quantidade de tinta, catalisador e diluente para pintar uma área de $20551 \times 2 = 41102$.

Portanto, a área que queremos pintar é de 41 102 metros quadrados.

Podemos proceder de duas maneiras:

1. A área delimitada pela linha de 3 pontos será pintada de uma mesma cor.
2. O garrafão e o semicírculo, que é a região onde os jogadores fazem o arremesso de lances livres serão pintados de uma cor diferente da área sob a linha de 3 pontos.

No primeiro caso, a área já foi calculada e é de 20551 metros quadrados.

No segundo caso, precisamos multiplicar as medidas do garrafão, que é um retângulo de 4,90 m x 5,80 m. A área de um garrafão oficial é de 28,42 metros quadrados. Como temos dois garrafões em cada quadra, a área dos garrafões é de 56,84 metros quadrados. Multiplicando por 126, que é o número de quadras, temos $56,84 \cdot 126 = 7161,84 \text{ m}^2$

Agora falta calcular a área dos dois semicírculos de raio 1,80 m. Como são dois semicírculos, podemos calcular, fazendo $\pi \cdot \text{raio}^2$. Teremos, para uma quadra:

$$\pi \cdot 1,80^2 = 20,3575 \text{ m}^2$$

Como são 126 quadras, temos as áreas dos semicírculos = $20,3575 \cdot 126 = 2565,05 \text{ m}^2$

Somando as áreas dos garrafões com as dos semicírculos das 126 quadras, obtemos: $7161,84 + 2565,05 = 9726,89 = 9727 \text{ m}^2$

Portanto, no caso de quisermos pintar o garrafão e a área de lances livres de uma cor diferente do restante da área delimitada pela linha de 3 pontos, a área total seria :

$$20551 - 9727 = 10824 \text{ m}^2$$

Como a pintura necessita de duas demãos, precisaremos de uma quantidade de tinta, catalisador e diluente para pintar uma área de $10824 \cdot 2 = 21648 \text{ m}^2$.

De modo a facilitar a visualização, vamos colocar os dados calculados em uma tabela, identificando por: A: Área delimitada pela linha de 3 pontos; B: Área do garrafão; C: Área do semicírculo onde são realizados os arremessos de lances livres.

Região	Área (m^2)	Área em 1 quadra (m^2)	Área em 126 quadras (m^2)	2 demãos (aprox.) (m^2)
A	81,5514	163,1028	20550,95	41102
B	28,42	56,84	7161,84	14324
C	10,1787602	20,3575204	2565,05	5130
B + C	38,598602	77,1975204	9726,89	19454
A - (B+C)	42,9526398	85,9052796	10824,01	21648

Tabela 2: Áreas da linha de 3 pontos, garrafão e da área de arremesso de lances livres

Resolvi junto com a turma a calcular a quantidade de tinta nos 2 casos: Na área delimitada sobre a linha de 3 pontos, que totaliza $41\,102\text{ m}^2$ e na área sob a linha de 3 pontos, excluindo o garrafão e o semicírculo, onde são realizados os lances livres, o que nos dá uma área de $21\,648\text{ m}^2$.

Em uma visita à casa de tintas próxima à minha escola, cotei duas marcas de tinta epóxi. A tinta epóxi Maza é vendida junto com o catalisador. A tinta vem em uma lata de 2,88 litros e o catalisador em uma lata de 720 mililitros. Essa quantidade será misturada, obtendo 3,6 litros e será adicionado 20% de diluente da mesma marca, que é vendida em uma lata de 900 ml. Esses três produtos totalizam $2880 + 720 + 720 = 4320\text{ ml}$. Vamos chamar a quantidade de mistura 4320 ml de 1 kit. Segundo o fabricante, o rendimento é de 35 m^2 por demão para 3,6 litros da mistura.

Fazendo uma regra de 3 simples, temos que 3600 ml cobrem uma área de 35 m^2 . Vamos calcular qual área cobre 4320 ml dessa mistura:

$$3600 \cdot x = 4320 \cdot 35 \quad 3600x = 151\,200$$

$$\Rightarrow x = \frac{151\,200}{3600} = 42\text{m}^2 \quad (1)$$

Portanto, seriam necessários para pintar toda a área sob a linha de 3 pontos $41102 : 42 = 978$ kits da mistura ($978 \cdot 2,88\text{ l}$ de tinta epóxi + $978 \cdot 720\text{ ml}$ catalisador + $978 \cdot 720\text{ ml}$ de diluente). Ou seja, cada kit cobre uma área de 42 m^2

Colocando os dados em uma tabela, teremos:

Produto	Valor unit.	Qte de produto para 978 kits	Valor de 978 kits (R\$)	Valor total em Reais
Tinta epóxi Maza 2,88 l	180,00	2816,64	506713,54	598183,92
Catalisador Maza 720 ml	79,90	704,16	56332,80	
Diluente 720 ml	49,90	704,16	35137,58	

Tabela 3: Quantidade e valor do kit de tinta epóxi, catalisador e diluente para pintar $41\,102\text{ m}^2$

Portanto, para se pintar toda a região delimitada sob a linha de 3 pontos, seriam necessários aproximadamente R\$ 598 184,00.

Após estes cálculos, podemos calcular a quantidade de tinta e o valor a ser gasto no caso de pintar a região delimitada pela linha de 3 pontos, mas sem pintar a área do garrafão e do semicírculo, que é a região que se destina aos arremessos de lances livres. É muito comum em quadras de basquete que essas regiões sejam destacadas, pintando-se de cores diferentes, como podemos observar na figura abaixo:

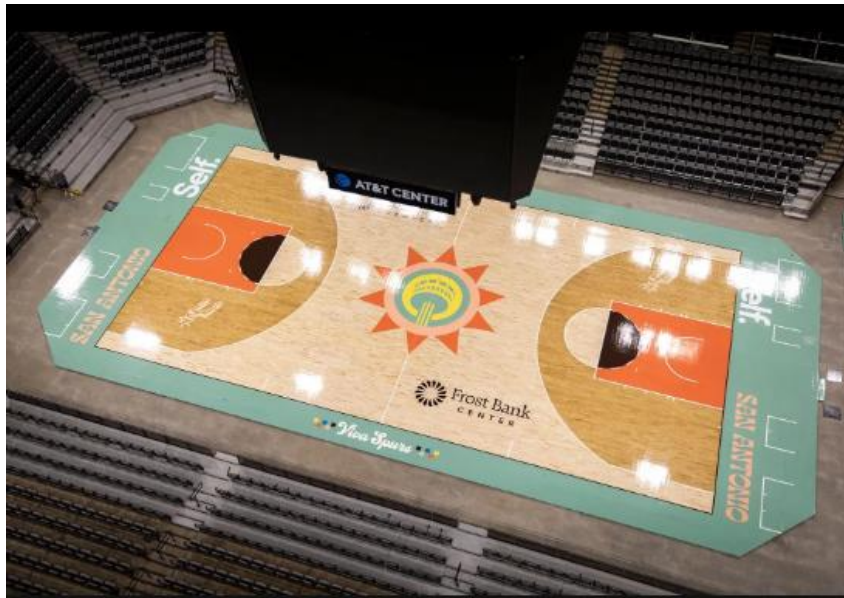


Figura 24: Quadra do time de basquete San Antonio Spurs em 19 set 23. Foto de Rance Ristau

2.5 CÁLCULO DA ÁREA DE UMA PARÁBOLA

Atuando como professor, sei que os alunos querem saber se o que fizeram está certo. Após chegarmos ao resultado da área da linha de 3 pontos, os alunos calcularem a quantidade de tinta e solvente necessários para a pintura, ficou uma dúvida: Como conferir se o valor calculado da área sob a linha de 3 pontos está correto? Como saber se fizemos certo? Será que existe uma fórmula para calcular a área de uma parábola?

Me antecipando a essas possíveis questões, elaborei outra atividade em sala de aula, com o objetivo de que eles mesmos consigam, praticando, descobrir uma fórmula para se calcular a área de uma parábola.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

Resolver um problema pressupõe que o aluno: elabore um ou vários procedimentos de resolução (como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos e valide seus procedimentos. (...) Conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. (Brasil, 1998, p. 41-42)

2.5.1 Atividade em grupo - Como obter a fórmula para o cálculo da área de uma parábola

Montamos 5 grupos e dei a cada um uma função.

As funções foram as seguintes:

a) $y = 1 - x^2$

b) $y = 4 - x^2$

c) $y = 9 - x^2$

d) $y = -x^2 - 2x + 8$

e) $y = -2x^2 - 4x + 6$

Dei 4 folhas quadriculadas para cada grupo e pedi que fizessem, em cada folha, o gráfico das funções. Ou seja, cada grupo teve que fazer quatro vezes o mesmo gráfico.

Solicitei também, que dessem um espaço de quatro malhas entre os números, de modo que cada quadradinho valesse 0,25.

Construído o gráfico, a atividade seria calcular a área de cada parábola, utilizando os retângulos superiormente e inferiormente limitados.

Orientei para desenharem o eixo das ordenadas, não necessariamente em $x = 0$, mas sim no eixo de simetria da parábola. Nas três primeiras funções, o eixo de simetria é onde $x = 0$, mas nas outras duas, isso não acontece. O motivo é que fica mais fácil fazer a divisão da distância entre a raiz e o eixo de simetria. Essa divisão será feita quatro vezes.

No caso da função $y = 4 - x^2$, os pontos em que a parábola toca o eixo das abscissas são -2 e 2 e o eixo de simetria é em $x = 0$.

Na primeira folha, deverão ser feitos quatro retângulos, três com base medindo 1 e o quarto com base medindo 0,5.

Na segunda folha, deverão ser feitos oito retângulos, sete com base medindo 0,5 e o oitavo com base medindo 0,25.

Na terceira folha, deverão ser feitos dezesseis retângulos, quinze com base medindo 0,25 e o décimo sexto com base medindo 0,125.

Na quarta folha, deverão ser feitos trinta e dois retângulos, trinta e um com base medindo 0,125 e o trigésimo segundo com base medindo 0,0625.

Para calcular as alturas, basta substituir os valores de x e calcular o valor de y .

Para uma maior exatidão dos cálculos, recomendo a utilização de calculadoras e a não arredondar os valores. O ideal seria utilizar o programa Excel, pois poderiam aprender a inserir fórmulas, organizar as informações e ver os cálculos prontos ao se inserir os dados.

Feito os gráficos, fizemos a tabulação dos dados calculados:

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	0,875	0,484375	0,390625	1,359375
8	0,78125	0,560547	0,2207031	1,3417969
16	0,726563	0,609131	0,1174316	1,3356934
32	0,697266	0,636688	0,0605774	1,3339541

Tabela 4: Resultados obtidos para a função $y = 1 - x^2$

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	7,0	3,875	3,125	10,875
8	6,25	4,484375	1,765625	10,734375
16	5,8125	4,873047	0,9394531	10,685547
32	5,5575	5,072881	0,4846191	10,630381

Tabela 5: Resultados obtidos para a função $y = 4 - x^2$

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	23,625	13,07813	10,546875	36,703125
8	21,09375	15,19349	5,9002594	36,287241
16	19,61716	16,44651	3,1706543	36,063665
32	18,82617	17,19058	1,6355896	36,016755

Tabela 6: Resultados obtidos para a função $y = 9 - x^2$

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	23,625	13,07813	10,546875	36,703125
8	21,09375	15,13477	5,9589844	36,228516
16	19,61719	16,47278	3,1444043	36,089971
32	18,82617	17,19058	1,6355896	36,016754

Tabela 7: Resultados obtidos para a função $y = -x^2 - 2x + 8$

N	Área limitada superiormente	Área limitada inferiormente	Diferença entre as áreas	Soma (Área total)
4	14,0	7,75	6,25	21,75
8	12,5	8,96875	3,53125	21,46875
16	11,625	9,746094	1,8789063	21,371094
32	11,15625	10,18701	0,9692383	21,343262

Tabela 8: Resultados obtidos para a função $y = -2x^2 - 4x + 6$

Observando os valores atentamente, podemos constatar que as diferenças entre as áreas superiormente e inferiormente limitadas vai diminuindo conforme aumentamos a quantidade de triângulos. Isso acontece, porque a parábola vai ficando cada vez mais preenchida.

Porém, a área total não varia tanto, mas converge para o valor real da área sob a parábola.

Diante dos resultados obtidos, podemos organizar os dados em outra tabela:

Função	Medida da Base	Medida da Altura	Área aproximada
$y = 1 - x^2$	2	1	1,3339541
$y = 4 - x^2$	4	4	10,630381
$y = 9 - x^2$	6	9	36,016755
$y = -x^2 - 2x + 8$	6	9	36,016754
$y = -2x^2 - 4x + 6$	4	8	21,343262

Tabela 9: Medidas das bases e alturas de cada função

Podemos solicitar aos alunos que pensem em algum cálculo usando base e altura e que se chegue próximo ao resultado. Por exemplo, se somarmos, vemos facilmente que não é tão simples.

De acordo com a BNCC:

(...) os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. (...) Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa. (BNCC, 2017, p. 226-227)

Podemos solicitar que multipliquem a base pela altura e vejam se há uma constante que possamos multiplicar por esse produto e chegar ao valor da área.

Vejamos linha por linha, chamando essa constante de x :

$$2.1.x = 1,3339541$$

$$\Rightarrow 2x = 1,3339541$$

$$\Rightarrow x = \frac{1,3339541}{2}$$

$$\Rightarrow x = 0,66697705\dots$$

$$4.4.x = 10,630381$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 16x &= 10,630381 \\ \Rightarrow x &= \frac{10,630381}{16} \\ \Rightarrow x &= 0,66268988\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.9.x &= 36,016755 \\ \Rightarrow 54x &= 36,016755 \\ \Rightarrow x &= \frac{36,016755}{54} \\ \Rightarrow x &= 0,6669769\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.9.x &= 36,016754 \\ \Rightarrow 54x &= 36,016754 \\ \Rightarrow x &= \frac{36,016754}{54} \\ \Rightarrow x &= 0,6669769259\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.8.x &= 21,343262 \\ \Rightarrow 32x &= 21,343262 \\ \Rightarrow x &= \frac{21,343262}{32} \\ \Rightarrow x &= 0,6669769375\dots \end{aligned}$$

Podemos observar que os valores de x são muito próximos e podemos constatar que, se fizemos outro gráfico com 64 retângulos, chegaríamos mais próximo do resultado da área da parábola e, conseqüentemente, aos valores de x convergiriam para a dízima periódica 0,66666...

Foi possível provar, então, que esse valor é uma constante. Logo, para se calcular a área de uma parábola, basta multiplicar $\frac{2}{3}$ pelo produto da medida da base pela altura da parábola.

Após deduzirmos a fórmula, os alunos podem perguntar: - Por que usando as medidas da nossa parábola, o resultado deu diferente?:

De fato, se multiplicarmos

$$13,44 \cdot 7,80 \cdot \frac{2}{3} = 69,888$$

que é muito diferente do valor calculado, de 81,5514. Isso se deve, pelo fato da nossa linha de 3 pontos não ser uma parábola.

Delgado, Frensel, Crissaff(2017, p. 146) definem uma Parábola P de foco F e diretriz γ como o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância à F é igual à sua distância à γ . Para uma melhor compreensão, os autores chamam o ponto F de foco e a reta γ é a diretriz da parábola P. No livro é apresentada a figura abaixo:

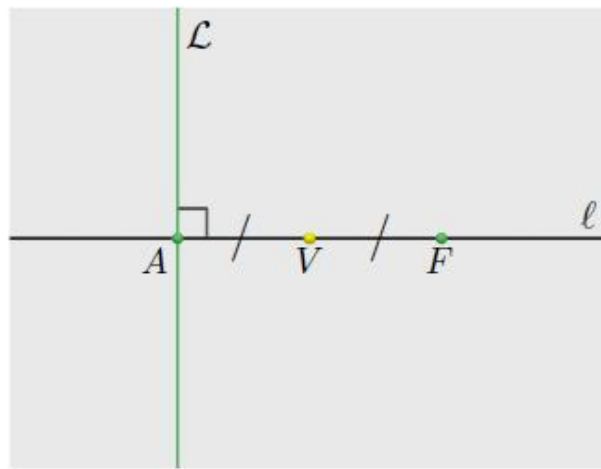


Figura 25: Posição do vértice em relação a F e à γ

Da figura acima, temos que:

- A reta focal l da parábola P é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz.
- O ponto V da parábola P que pertence à reta focal é o vértice de P.

Os métodos utilizados nesta atividade, relacionam-se à discretização, quando dividimos a área da região em retângulos cada vez menores e calculamos as áreas de cada um desses retângulos para se aproximar do valor da área total da linha de 3 pontos.

2.6 HABILIDADES DA BNCC RELACIONADAS A ATIVIDADE PROPOSTA

Esta atividade está prevista na BNCC (2017), com as seguintes habilidades:

- (EF07MA26) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
- (EF08MA16) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (M13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

VELOCIDADE MÉDIA, VELOCIDADE INSTANTÂNEA, TEMPO E DISTÂNCIA PERCORRIDA

No 9º ano, o Componente Curricular Ciências é dividido em Química, no 1º semestre, e Física, no 2º semestre.

Esta atividade foi pensada com a finalidade de trabalhar a interdisciplinaridade entre a Matemática e Ciências, buscando despertar o interesse pela Física e fazer com que os estudantes compreendam os conceitos iniciais da Cinemática.

Assim como a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) visa buscar novos talentos em Matemática e dar oportunidades a estudantes em todo o território nacional, das escolas públicas, a Sociedade Brasileira de Física (SBF), promove, anualmente, a OBFEP (Olimpíada Brasileira de Física das Escolas Públicas), com a finalidade de contribuir para a melhoria da qualidade do ensino em ciências na educação básica; promover maior inclusão social por meio da difusão da ciência; ampliar o uso das tecnologias da informação e da comunicação com fins educacionais; ampliar canais de colaboração entre universidades, institutos de pesquisa, sociedades científicas e escola públicas; e fomentar a integração entre escola e comunidade. Entretanto, a OBFEP é oferecida apenas aos estudantes do 9º ano e do Ensino Médio e não possui a estrutura da OBMEP, pois é ofertada uma quantidade limitada de avaliações impressas às escolas inscritas.

Esta atividade foi pensada com o objetivo de estimular o gosto dos alunos pela Física e prepará-los para a OBFEP (Olimpíada Brasileira de Física das Escolas Públicas), que é voltada para alunos do 9º ano.

Inicialmente, faz-se necessário ensinar os conceitos iniciais da cinemática, como as grandezas do sistema internacional de medidas, noções de direção e sentido.

O objetivo é introduzir os conceitos da cinemática, de velocidade, tempo e distância percorrida de um objeto em movimento, de maneira que apenas com duas grandezas, os alunos sejam capazes de calcular a terceira grandeza.

Aprender sobre as grandezas velocidade, tempo e distância percorrida é importante porque esses conceitos estão diretamente relacionados ao nosso cotidiano, não só na Física, mas em outras áreas do conhecimento, como a Matemática, Engenharia, nos esportes, na área de logística e até mesmo no planejamento de viagens e atividades diárias. A compreensão

desses conceitos desenvolve o raciocínio lógico e oferece uma série de benefícios e aplicações práticas para a vida de qualquer cidadão.

Como o objetivo é trabalhar com o conceito de velocidade, distância e tempo, a sugestão é mostrar 3 vídeos, que estão disponíveis em: https://drive.google.com/drive/folders/1xTliitpE4fMArc34MitQPnttkbVMq7j-?usp=drive_link

3.1 PRIMEIRO VÍDEO - VELOCÍMETRO DE AUTOMÓVEL

Para auxiliar na explicação do conceito de velocidade gravei um vídeo, em que pode-se ver o velocímetro analógico de um carro está em velocidade constante de 60 km/h.

No exato momento em que o hodômetro marca 1,9 quilômetros de distância percorrida, é acionado um cronômetro digital na tela.

O vídeo é acelerado enquanto o carro permanece à velocidade constante de 60 km/h e o hodômetro e cronômetro são mostrados no vídeo.

Após 1 minuto, o vídeo "pausa" no momento em que o hodômetro marca 2,9 km.

O tempo que leva para o carro percorrer a distância de 1 quilômetro foi de 1 minuto, 1 segundo e 92 centésimos de segundo.

Podemos explorar várias questões com essa situação, como por exemplo: - O que significa a velocidade de 60 km/h? - Qual foi a distância percorrida pelo carro nesses 60 segundos? - Em quanto tempo o carro deveria ter percorrido 1 km? - Por que o carro levou 1 min 1 seg 92 centésimos para percorrer a distância de 1 km? - Por que, ao “rodar” exatamente 1 km, o cronômetro não marcou exatamente 1 minuto? - Qual seria a distância percorrida se o carro estivesse à velocidade constante de 30 km/h? - Quanto tempo levaria para um carro percorrer 1 km com velocidade constante de 20 km/h ?

Com apenas um vídeo, podemos explorar várias questões e fazer os alunos chegarem às conclusões, como por exemplo: - Um objeto em movimento à velocidade constante de 60 km/h, percorre a distância de 60 km no tempo de 60 minutos. Logo, o objeto em movimento percorrerá a distância de 1 km por minuto, nesta velocidade. Ou seja, na velocidade constante de 60 km/h, um móvel percorrerá 10 km em 10 minutos, 20 km em 20 min, e assim por diante.

A seguir vamos explorar a relação entre velocidade e tempo, quando a velocidade não se mantém constante. A finalidade é que possamos calcular a distância percorrida com a maior precisão possível.

À depender da turma, podemos iniciar uma discussão sobre conceitos de limite e derivada.

Suponha marcada a velocidade inicial e final em tempos de 10 em 10 segundos, depois de 5 em 5 segundos, e finalmente de 1 em 1 segundo.

Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (km/h)	27	34	39	47	51	51	45

Tabela 10: Variação da velocidade instantânea em km/h, em intervalos de 5 segundos

É necessário fazer a conversão de km/h para m/s, pois o tempo foi dado em segundos e a velocidade, em km/h. Temos que,

$$\begin{aligned}
 27 \text{ km/h} &= 7,5 \text{ m/s} \\
 34 \text{ km/h} &= 9,4 \text{ m/s} \\
 39 \text{ km/h} &= 10,83 \text{ m/s} \\
 47 \text{ km/h} &= 13,06 \text{ m/s} \\
 51 \text{ km/h} &= 14,17 \text{ m/s} \\
 45 \text{ km/h} &= 12,5 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Logo, podemos montar outra tabela, com as velocidades em m/s:

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,83	13,06	14,17	14,17	12,5

Tabela 11: Variação da velocidade instantânea, em m/s, em intervalos de 5 segundos

No momento em que o tempo começa a ser marcado, o carro está à velocidade de 7,5 m/s. Podemos estimar a distância percorrida como se o carro ficasse à velocidade constante de 7,5 m/s nos primeiros 5 segundos:

$$7,5 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 37,5 \text{ m.}$$

Analogamente, vamos considerar que no segundo intervalo de tempo, a velocidade permaneça constante, à 9,4 m/s.

Assim, nossa estimativa para a distância percorrida de $t = 5 \text{ s}$ até $t = 10 \text{ s}$ é:

$$9,4 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 47 \text{ m.}$$

Adicionando estimativas similares para os outros intervalos de tempo, obtemos uma estimativa para a distância total percorrida:

$$\begin{aligned}
 (7,5 \times 5) + (9,4 \times 5) + (10,83 \times 5) + (13,06 \times 5) + (14,17 \times 5) + (14,17 \times 5) = \\
 9,4 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 345,65 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

Podemos, ainda, usar a velocidade no fim de cada intervalo de tempo em vez de no começo como a suposta velocidade constante. Então, nossa estimativa fica da seguinte forma:

$$(9,4 \times 5) + (10,83 \times 5) + (13,06 \times 5) + (14,17 \times 5) + (14,17 \times 5) + (12,5 \times 5) = 370,65 \text{ m.}$$

A distância total percorrida será a média entre as duas distâncias calculadas:

$$\frac{(345,65) + (370,65)}{2} = 358,15 \text{ m}$$

Como atividade, podemos solicitar aos alunos que se faça o gráfico $v \times t$ desta situação. Solicitamos que liguem os 7 pontos em linha reta. Podemos solicitar que as meninas façam o gráfico pintando os 6 trapézios e que os meninos pintem os retângulos.

A distância percorrida estimada será a área sob a linha do gráfico.

Unir os pontos em linha reta, significa que o carro teve aceleração constante entre os intervalos. E é essa a situação que vamos considerar.

Os gráficos ficariam como na figura abaixo:

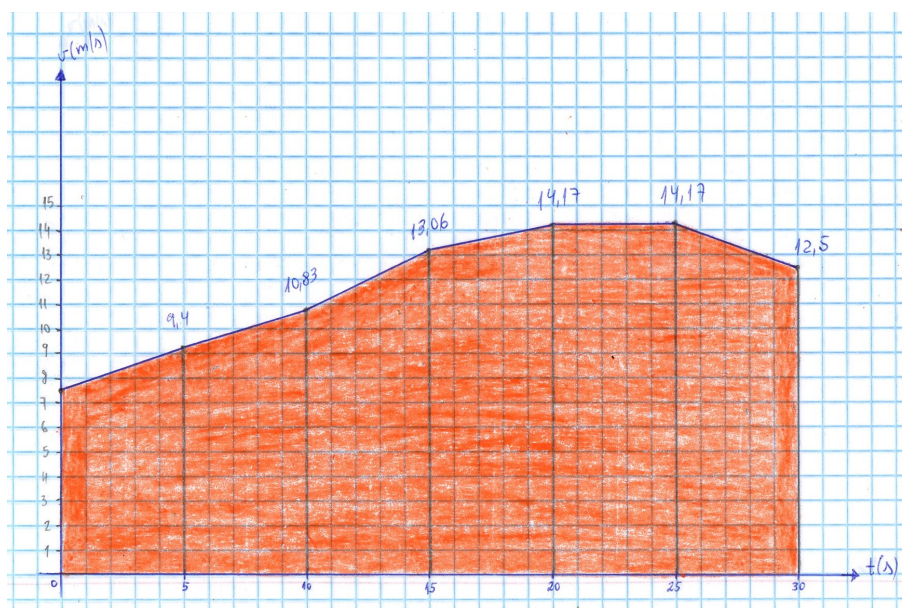


Figura 26: gráfico $v \times t$ - área dos trapézios

Pelo gráfico podemos observar 6 trapézios entre os intervalos de 5 segundos. As alturas seriam iguais a 5, que são os intervalos de tempo, e as bases maior e menor, seriam as velocidades maior e menor do intervalo. Para calcular a distância percorrida, basta calcular a área de cada trapézio e somá-las.

Teríamos, entre os intervalos, os seguintes dados:

trapézio	base menor	base maior	altura	Área (m)
1	7,5	9,4	5	42,25
2	9,4	10,83	5	50,575
3	10,83	13,06	5	59,725
4	13,06	14,17	5	68,075
5	14,17	14,17	5	70,85
6	14,17	12,5	5	66,675
Área total				358,15

Tabela 12: Gráfico da velocidade pelo tempo com intervalos de 5 s. A área dos trapézios estão em metros, pois referem-se à distância percorrida.

Se optarmos por calcular a distância percorrida por retângulos, devemos considerar os dois gráficos abaixo:

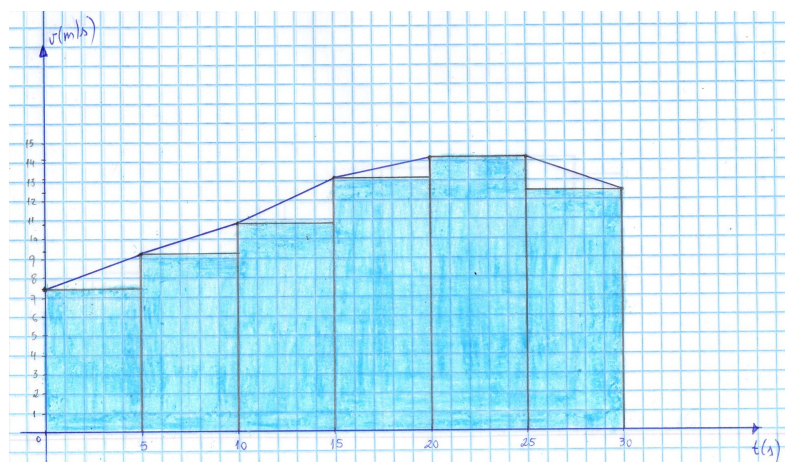


Figura 27: gráfico $v \times t$ - área dos retângulos inferiores

No gráfico acima, pintamos os retângulos inferiores, ou seja, considerando as menores velocidades nos intervalos de tempo. Calculando as áreas dos retângulos, obtemos 345,65 metros.

No gráfico abaixo, pintamos os retângulos superiores, ou seja, considerando as maiores velocidades nos intervalos de tempo. Calculando as áreas dos retângulos, obtemos 370,65 metros.

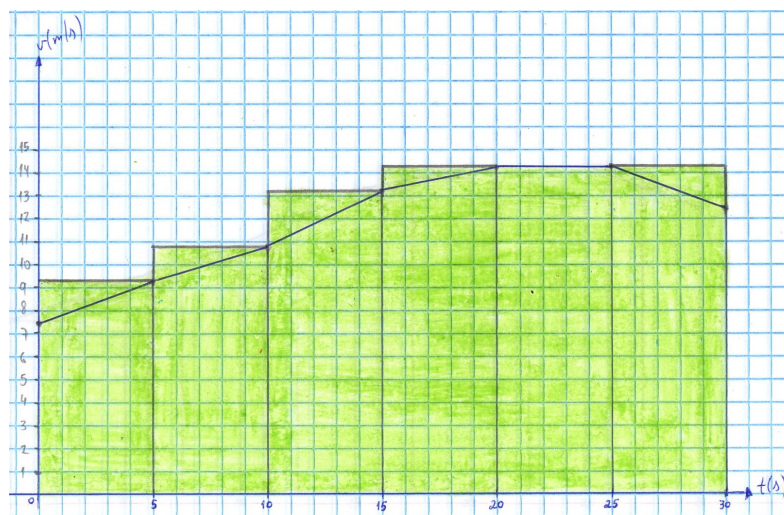


Figura 28: gráfico $v \times t$ - área dos retângulos superiores

A média desses valores é:

$$\frac{370,65 + 345,65}{2} = 358,15$$

Exatamente a soma das áreas dos trapézios.

Portanto, podemos afirmar que a distância percorrida, neste problema, foi de aproximadamente 358,15 m.

Após ficar claro que a velocidade é a razão entre a distância percorrida e o intervalo de tempo em que se deu esse deslocamento, podemos mostrar aos alunos como determinar, por aproximação, a velocidade instantânea de um corpo em movimento através de duas situações-problema, ambas comuns em nosso cotidiano.

3.1.1 Situação-problema 1: radar móvel

Primeira situação: Suponha uma rodovia em que o limite de velocidade em determinado trecho seja de 80 km/h. Agentes de trânsito colocam um sensor de movimento, em um ponto que iniciará a contagem do tempo, assim que um automóvel passar. Chamaremos esse ponto de ponto A. A 500 metros dali, chamado de ponto B, estará o agente com outro sensor, que finalizará a contagem do tempo do automóvel. Qual é o limite de tempo que o automóvel deve percorrer esse trecho sem exceder o limite de velocidade?

3.1.2 Situação-problema 2: radar fixo

Segunda situação: É cada vez mais comum, as cidades instalem radares sob o asfalto. Eles são chamados de radares fixo ou do tipo laço.

Segundo o site Ciência Hoje (2009, Online),

trata-se de uma bobina enterrada debaixo do asfalto, exatamente nas faixas em que passam os carros. A bobina é dupla e detecta a presença de material ferromagnético, ou seja, um veículo. A distância entre as bobinas dividida pelo tempo de passagem do automóvel entre elas aponta a velocidade do veículo. Se esta for superior à velocidade registrada na memória do computador, o flash dispara e uma foto do corpo móvel é tirada.

Supondo que a distância entre as faixas seja de 3 metros e que o limite de velocidade seja de 50 km/h. Qual é o tempo que um automóvel deve passar por essas faixas para estar no limite de velocidade?

Vamos à discussão das soluções: na primeira situação, alguns questionamentos interessantes que podemos fazer são:

- a) Se o limite de velocidade é de 80 km/h, o automóvel pode passar pelo ponto A a uma velocidade de 100 km/h sem que leve a multa?
- b) Se um motorista estiver a uma velocidade constante de 120 km/h ao passar pelo ponto A e nos 250 metros seguintes, se ele reduzir a velocidade para 40 km/h, o equipamento registrará uma velocidade acima da permitida?
- c) Se os pontos A e B estivessem separados por uma distância de 100 metros, qual é o tempo mínimo que o motorista pode percorrer esse trecho sem ultrapassar o limite de velocidade?
- d) Na segunda situação, ao passar por um radar sob o asfalto, a velocidade aferida é a velocidade instantânea?
- e) Devido à pequena distância entre as faixas, a velocidade pode ser considerada como velocidade instantânea?
- f) Se um automóvel levar 150 milésimos de segundo para passar pelas bobinas, ele será multado?

Com esses questionamentos, podemos notar que a velocidade instantânea será obtida com mais precisão quanto menor for a distância percorrida.

Como estaremos lidando com unidades de medidas diferentes, serão trabalhadas as conversões de unidades de medida.

3.2 SEGUNDO VÍDEO - VÔO TRIPULADO DO FOGUETE NEW-SHEPARD

Utilização de vídeo do 1º vôo tripulado do foguete sub-orbital New Shepard, desenvolvido e construído pela Blue Origin, ocorrida no dia 20 de julho de 2021, no Centro de Lançamentos Suborbitais de West Texas, em Corn Ranch, Texas, Estados Unidos.

Este vídeo foi tirado da página https://www.youtube.com/watch?v=tMHhXzpwupU&list=PLAXaf_0Jgf8EiTjSkqnbrOKCu0yDIP_5U&index=2, do canal Blue Origin, do Youtube. Ele tem a duração de 2h12m53s e a ignição se dá apenas em 1h41m39s.

Este vôo teve quatro tripulantes: Jeff Bezos, fundador da Blue Origin, seu irmão Mark Bezos, a aviadora norte americana, de 82 anos, Wally Funk e o jovem holandês, de 18 anos, Olivier Daemen.

A viagem foi até o limite da atmosfera terrestre, atingindo uma velocidade superior à 3588 km/h e alcançando uma altitude acima de 107 km. O foguete levou 4 minutos e 6 segundos para atingir a altura máxima e começar o seu retorno, que durou 3 minutos e 21 segundos até a aterrissagem.

O vídeo em si é muito interessante, pois mostra a evolução da tecnologia e da volta à exploração espacial, proporcionando a pessoas sem treinamento, poderem fazer um vôo até o limite do espaço sideral.

No vídeo, os marcadores de velocidade e altitude estão em milhas por hora e pés, respectivamente.

Enquanto assistia ao vídeo, notei que o tempo mostrado no vídeo inicia-se a partir da ignição, mas o foguete só ganha velocidade a partir do 7º segundo. Então, fiz o download do vídeo e o editei, inserindo um cronômetro a partir de quando o foguete inicia a subida, ou seja, quando realmente inicia seu deslocamento.

No programa de edição que usei, o Camtasia, consegui, a cada "virada"de segundo, pausar o vídeo e anotar, aproximadamente, a velocidade e a altura que o foguete estava em cada um dos 236 segundos que estive em deslocamento para cima.

O vídeo utilizado para esta atividade tem a duração de 7 minutos e 45 segundos. Contém, desde a contagem regressiva de 10 segundos para a ignição, o vôo de ida e de volta, até a sua aterrissagem, retornando à base de lançamento. Nele, inseri um cronômetro com a contagem iniciando no momento em que o foguete inicia seu deslocamento. O vídeo está disponível em https://drive.google.com/file/d/17Xd0vohwc3fXtwG2x0MBKa9hSFlj4YgQ/view?usp=drive_link

De posse dos dados, tabulei no Excel e dividi em 6 arquivos (de 40 em 40 segundos), para que coubesse no papel quadriculado. Abaixo, as tabelas com o tempo de vôo, em segundos, a velocidade, em milhas por hora, e a altura no instante, em metros.

Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)
1	10	1,83	21	259	1176	41	492	4701	61	642	9714
2	21	9,45	22	273	1297	42	499	4919	62	652	10009
3	32	19,81	23	287	1418	43	505	5139	63	663	10304
4	45	37,80	24	301	1551	44	511	5367	64	676	10615
5	57	62,48	25	316	1699	45	518	5602	65	688	10909
6	67	86,26	26	330	1837	46	525	5827	66	702	11208
7	80	125,27	27	344	1982	47	532	6059	67	717	11537
8	93	163,37	28	358	2139	48	539	6298	68	731	12167
9	105	206,65	29	373	2304	49	546	6541	69	747	12197
10	117	258,47	30	388	2477	50	553	6787	70	761	12536
11	129	311,20	31	403	2656	51	560	7036	71	777	12880
12	142	374,29	32	417	2841	52	567	7284	72	792	13222
13	154	435,56	33	430	3022	53	575	7550	73	808	13583
14	167	508,41	34	441	3214	54	583	7809	74	823	13940
15	180	584,30	35	452	3420	55	590	8077	75	839	14327
16	193	670,86	36	460	3652	56	597	8332	76	856	14698
17	206	761,70	37	468	3832	57	604	8601	77	873	15085
18	219	851,00	38	475	4040	58	612	8879	78	892	15496
19	232	954,02	39	480	4257	59	621	9160	79	910	15899
20	245	1060,1	40	486	4478	60	631	9441	80	928	16294

Figura 29: Tempo, velocidade e altura da 1ª viagem tripulada do foguete NewShepard. O tempo varia de 1 a 80 segundos

Na Figura 30 abaixo, em destaque, a velocidade máxima obtida, em milhas por hora.

Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)
81	947	16722	101	1467	27314	121	2219	43684	141	2016	64245
82	966	17124	102	1498	27991	122	2231	44665	142	1995	65157
83	987	17579	103	1532	28682	123	2229	45679	143	1974	66028
84	1008	18017	104	1566	29320	124	2226	46676	144	1951	66941
85	1029	18463	105	1601	30070	125	2222	47671	145	1929	67814
86	1052	18948	106	1636	30809	126	2219	48684	146	1909	68652
87	1074	19395	107	1673	31550	127	2215	49638	147	1887	69502
88	1098	19910	108	1707	32276	128	2213	50615	148	1868	70376
89	1122	20387	109	1746	33032	129	2210	51624	149	1847	71158
90	1149	20926	110	1784	33853	130	2206	52633	150	1826	71997
91	1173	21435	111	1824	34676	131	2204	53600	151	1805	72780
92	1201	21977	112	1863	35513	132	2202	54586	152	1784	73580
93	1226	22509	113	1900	36309	133	2189	55589	153	1761	74374
94	1253	23053	114	1942	37182	134	2168	57671	154	1740	75174
95	1282	23631	115	1982	38047	135	2145	58655	155	1719	75951
96	1312	24235	116	2026	38961	136	2123	59645	156	1698	76701
97	1342	24805	117	2069	39877	137	2102	60557	157	1676	77456
98	1371	25412	118	2110	40770	138	2082	61494	158	1654	78228
99	1401	26044	119	2153	41690	139	2059	62416	159	1632	78968
100	1434	26679	120	2194	42716	140	2038	63334	160	1611	79679

Figura 30: Tempo, velocidade e altura da 1ª viagem tripulada do foguete NewShepard. O tempo varia de 81 a 160 segundos

Na Figura 31 abaixo, em destaque, a altura máxima alcançada, em metros.

Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)	Tempo (s)	V (MPH)	Altura (m)
161	1591	80393	181	1163	92748	201	740	101262	221	317	105988
162	1570	81089	182	1143	93246	202	718	101595	222	295	106122
163	1548	81770	183	1122	93761	203	698	101893	223	274	106255
164	1526	82500	184	1101	94229	204	676	102215	224	253	106371
165	1504	83178	185	1079	94746	205	654	102513	225	232	106481
166	1484	83861	186	1059	95208	206	634	102796	226	210	106580
167	1463	84484	187	1037	95668	207	612	103080	227	189	106668
168	1440	85186	188	1015	96147	208	591	103350	228	168	103702
169	1419	85787	189	995	96579	209	570	103603	229	147	106818
170	1398	86418	190	972	97044	210	549	103859	230	125	106880
171	1378	87039	191	951	97475	211	527	104100	231	105	106931
172	1356	87651	192	931	97890	212	507	104336	232	83	106975
173	1333	88289	193	910	98308	213	485	104560	233	63	107007
174	1312	88870	194	888	98710	214	464	104772	234	41	107031
175	1291	89450	195	867	99098	215	443	104967	235	18	107045
176	1271	90026	196	846	99487	216	422	105168	236	0	107049
177	1248	90587	197	825	99861	217	401	105345	237	-22	107043
178	1228	91131	198	804	100225	218	379	105523			
179	1207	91676	199	782	100581	219	359	105682			
180	1185	92222	200	762	100914	220	337	105839			

Figura 31: Tempo, velocidade e altura da 1ª viagem tripulada do foguete NewShepard. O tempo varia de 161 a 236 segundos

Sugeri que os alunos se dividissem em 6 grupos e cada grupo ficou incumbido de fazer o gráfico $v \times t$, onde v é a velocidade, em milhas por hora e t é o tempo, em segundos.

Os gráficos ficaram assim:

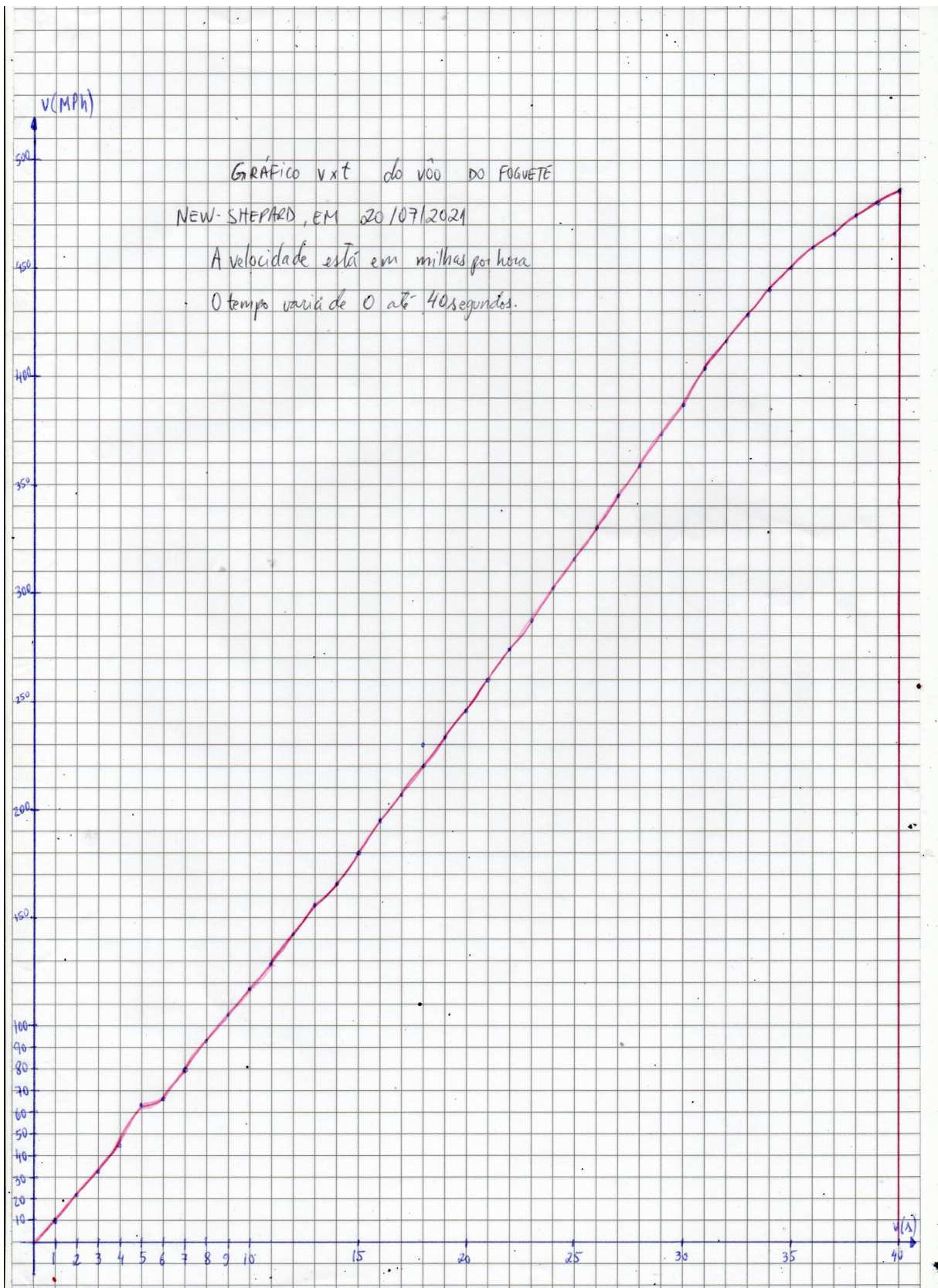


Figura 32: Gráfico $v \times t$, do 1º vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 1 a 40 segundos.

Para calcular a distância percorrida (ou altura, neste caso), basta multiplicar a velocidade pelo tempo. Contudo, precisamos ajustar as unidades de medida, pois a velocidade está em milhas por hora e o tempo está em segundos.

Como 1 hora possui 60 minutos x 60 segundos, então cada hora tem 3600 segundos. Portanto, para converter as milhas por hora em milhas por segundo, basta dividir as velocidades por 3600.

No caso do gráfico 32 acima, vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete nos primeiros 40 segundos. Para isso, dividimos em 1 triângulo ($t=0$ a $t=1$) e 39 trapézios. Vamos calcular a área de cada polígono. O resultado será a soma de todos os 40 polígonos. Para o triângulo, temos um triângulo com base=1 e altura igual a 20. Portanto a área do triângulo será:

$$\frac{1 \cdot 20}{2} = 10 \text{ milhas}$$

A área de um trapézio é dada pela fórmula:

$$\frac{(B + b) \cdot h}{2}, \text{ onde :} \quad (2)$$

- B é a base maior;
- b é a base menor; e
- h é a altura (que é igual a 1 em todos os trapézios).

Vamos numerar os trapézios da esquerda para a direita como T_1, T_2, T_3 .

A soma das áreas dos trapézios é dada pela fórmula:

$$\frac{(B_1 + b_1) \cdot h}{2} + \frac{(B_2 + b_2) \cdot h}{2} + \frac{(B_3 + b_3) \cdot h}{2} + \dots + \frac{(B_{39} + b_{39}) \cdot h}{2}, \quad (3)$$

onde B_1 é a base maior do trapézio 1, b_1 é a base menor do trapézio 1, B_2 é a base maior do trapézio 2, e assim por diante.

Como a altura h é igual a 1 em todos os trapézios, podemos suprimi-la. A área procurada será a metade da soma das bases maiores e menores. Assim:

$$\frac{B_1 + b_1 + B_2 + b_2 + B_3 + b_3 + \dots + B_{39} + b_{39}}{2} \quad (4)$$

Como a base maior de T_1 é a base menor de T_2 , a base maior de T_2 é a base menor de T_3 , e assim por diante, temos:

$$B_1 = b_2, B_2 = b_3, B_3 = b_4, \dots, B_{38} = b_{39}.$$

Portanto, nossa soma pode ser:

$$\frac{(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 2b_4 + \dots + 2b_{38} + B_{39})}{2} \quad (5)$$

Esses valores podem ser tirados da Figura 29, onde b_1 é a velocidade no instante $t = 1$ s, b_2 é a velocidade no instante $t = 2$ s, ..., b_{38} é a velocidade no instante $t=39$ e B_{39} é a velocidade no instante $t=40$.

Substituindo esses valores, temos:

$$\frac{(10 + 2.21 + 2.32 + 2.45 + 2.57 + 2.67 + 2.80 + 2.93 + 2.105 + 2.117 + 2.129 + 2.142)}{2} +$$

$$\frac{(2.154 + 2.167 + 2.180 + 2.193 + 2.206 + 2.219 + 2.232 + 2.245 + 2.259 + 2.273)}{2} +$$

$$\frac{(2.287 + 2.301 + 2.316 + 2.330 + 2.344 + 2.358 + 2.373 + 2.388 + 2.2.403)}{2} +$$

$$\frac{(2.417 + 2.430 + 2.441 + 2.452 + 2.460 + 2.468 + 2.475 + 2.480 + 486)}{2} =$$

$$\frac{19974}{2} = 9987 M.s/h$$

Somando às 5 milhas do triângulo, temos uma distância percorrida de: 10 002 milhas por hora vezes segundos.

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 10 002 por 3600 = 2,7783333...

Como 1 milha equivale a 1609,344 metros, então 2,7783333... equivale a 4 471,29 metros.

Segundo os dados da tabela 29, no instante $t = 40$ s, a altura alcançada pelo foguete foi de 4 478 metros.

Tivemos aí uma diferença de 10,29, uma margem de erro de 0,15%, que é uma margem muito pequena. Portanto é um valor aceitável.

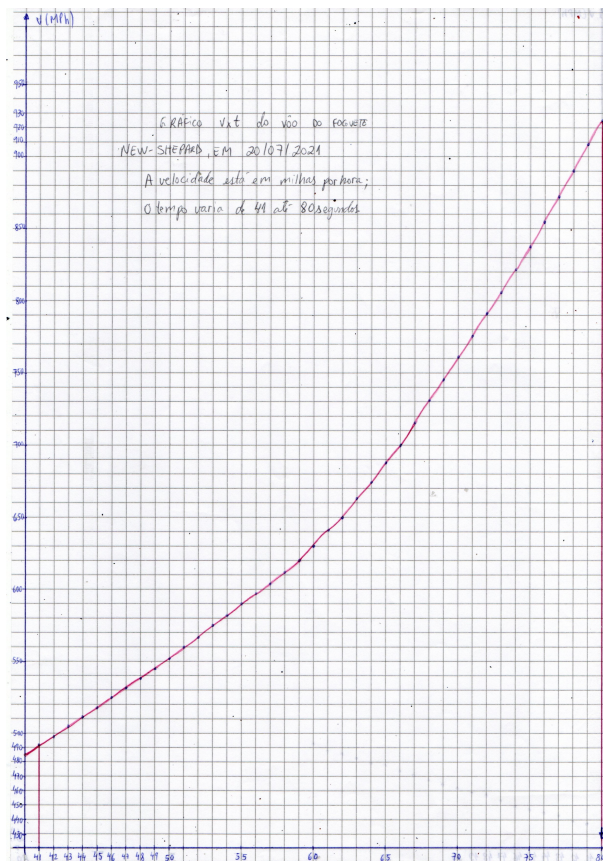


Figura 33: Gráfico $v \times t$, do 1º vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 41 a 80 segundos.

Agora, baseado no gráfico 33 acima, vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete no intervalo de tempo que vai de 41 a 80 segundos após o lançamento do foguete. Pelo gráfico, podemos observar que, dividindo a área sob a curva, temos 40 trapézios. A distância percorrida neste intervalo de tempo (41-80 s) será a soma de todos os 40 trapézios.

Identificaremos os trapézios do gráfico 33 como $T_{41}, T_{42}, T_{43}, \dots, T_{80}$.

De maneira análoga ao cálculo da altura alcançada nos primeiros 40 segundos após o lançamento do foguete, nossa soma pode ser:

$$\frac{(b_{41} + 2b_{42} + 2b_{43} + 2b_{44} + \dots + 2b_{79} + B_{80})}{2} \quad (6)$$

Esses valores podem ser tirados da Figura 29, onde b_{41} é a velocidade no instante $t = 41$ s, b_{42} é a velocidade no instante $t = 42$ s, ..., b_{80} é a velocidade no instante $t=79$ e B_{80} é a velocidade no instante $t=80$.

Substituindo esses valores, temos:

$$\frac{(486 + 2.492 + 2.499 + 2.505 + 2.511 + 2.518 + 2.525 + 2.532 + 2.539 + 2.546 + 2.553)}{2} +$$

$$\frac{(2.560 + 2.567 + 2.575 + 2.583 + 2.590 + 2.597 + 2.604 + 2.612 + 2.621 + 2.631)}{2} +$$

$$\frac{(2.642 + 2.652 + 2.663 + 2.676 + 2.688 + 2.702 + 2.717 + 2.731 + 2.747 + 2.761)}{2} +$$

$$\frac{(2.777 + 2.792 + 2.808 + 2.823 + 2.839 + 2.856 + 2.873 + 2.892 + 2.910 + 928)}{2} =$$

$$\frac{52832}{2} = 26416 M.s/h$$

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 26 416 por 3600 = 7,337777...

Convertendo as milhas em metros, faremos 7,337777... x 1609,344 = 11 809,01 metros.

Segundo os dados da tabela 29, no instante $t = 80$ s, a altura alcançada pelo foguete foi de 16 294 metros.

Mas aqui, temos que nos atentar que o foguete já percorreu uma distância nos primeiros 40 segundos. Portanto, somando o valor encontrado agora com o valor encontrado nos primeiros 40 segundos, que foi de 4471,29 metros, temos: $4471,29 + 11809,01 = 16 280,3$

Dos 16 280,3 m, calculados, para os 16 294 m, do vídeo, tivemos uma diferença de 13,70 m, o que nos dá uma margem de erro de 0,084%, que, é uma margem muito pequena. Portanto é um valor aceitável.

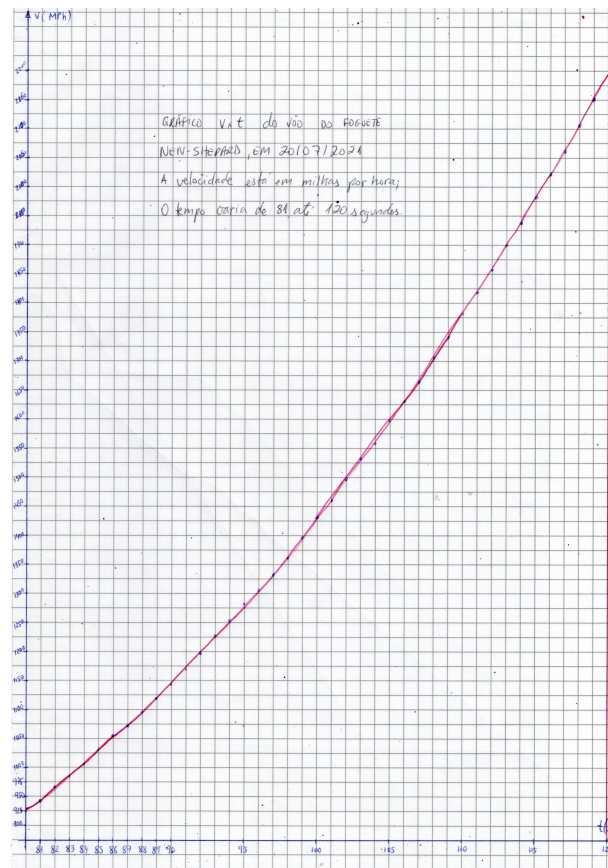


Figura 34: Gráfico $v \times t$, do 1º vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 81 a 120 segundos.

Utilizando o terceiro gráfico, 34 acima, vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete no intervalo de tempo que vai de 81 a 120 segundos após o lançamento do foguete. Pelo gráfico, podemos observar que, dividindo a área sob a curva, temos 40 trapézios. A distância percorrida neste intervalo de tempo (81-120 s) será a soma de todos os 40 trapézios.

Identificaremos os trapézios do gráfico 34 como $T_{81}, T_{82}, T_{83}, \dots, T_{120}$.

De maneira análoga ao cálculo da altura alcançada nos cálculos anteriores, nossa soma pode ser:

$$\frac{(b_{81} + 2b_{82} + 2b_{83} + 2b_{84} + \dots + 2b_{119} + B_{120})}{2} \quad (7)$$

Esses valores podem ser tirados da Figura 30, onde b_{81} é a velocidade no instante $t = 81$ s, b_{82} é a velocidade no instante $t = 82$ s,, b_{120} é a velocidade no instante $t=119$ e B_{120} é a velocidade no instante $t=120$.

Substituindo esses valores, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{(928 + 2.947 + 2.966 + 2.987 + 2.1008 + 2.1029 + 2.1052 + 2.1074 + 2.1098)}{2} + \\
& \frac{(2.1122 + 2.1149 + 2.1173 + 2.1201 + 2.1226 + 2.1253 + 2.1282 + 2.1312)}{2} + \\
& \frac{(2.1342 + 2.1371 + 2.1401 + 2.1434 + 2.1467 + 2.1498 + 2.1532 + 2.1566)}{2} + \\
& \frac{(2.1601 + 2.1636 + 2.1673 + 2.1707 + 2.1746 + 2.1784 + 2.1824 + 2.1863)}{2} = \\
& \frac{(2.1900 + 2.1942 + 2.1982 + 2.2026 + 2.2069 + 2.2110 + 2.2153 + 2194)}{2} = \\
& = \frac{118\,134}{2} = 59\,067 M.s/h
\end{aligned}$$

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 59 067 por 3600 = 16,4075.

Convertendo as milhas em metros, faremos 16,4075 x 1609,344 = 26 405,31 metros.

Segundo os dados da tabela 29, no instante $t = 120$ s, a altura alcançada pelo foguete foi de 42 716 metros.

Como já sabemos, precisamos somar à este valor de 26 405,31 m, o valor calculado nos primeiros 80 segundos, que foi de 16 280,3 m. Portanto, somando o valor encontrado agora com o valor encontrado nos primeiros 80 segundos, temos: $26\,405,31 + 16\,280,3 = 42\,685,61$

Dos 42 685,61 m, calculados, para os 42 716 m, do vídeo, tivemos uma diferença de 30,39 m, o que nos dá uma margem de erro de 0,071%, que ainda é uma margem ínfima. Portanto, é um valor aceitável.

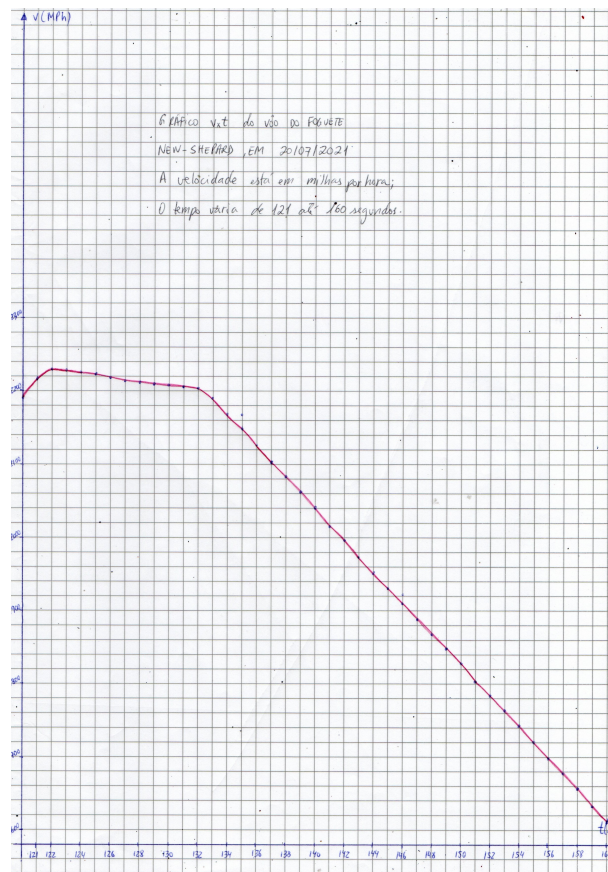


Figura 35: Gráfico $v \times t$, do 1º vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 121 a 160 segundos.

Vamos trabalhar agora com o quarto gráfico, 35 acima. Vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete no intervalo de tempo que vai de 121 a 160 segundos após o lançamento do foguete. Pelo gráfico, podemos observar que, dividindo a área sob a curva, temos 40 trapézios. A distância percorrida neste intervalo de tempo (121-160 s) será a soma de todos os 40 trapézios.

Aqui, podemos notar um ponto de inflexão em nosso gráfico, pois é onde ele alcança a velocidade máxima, em $t = 122$ s e, a partir daí, inicia-se uma desaceleração e a velocidade diminui.

Identificaremos os trapézios do gráfico 35 como $T_{121}, T_{122}, T_{123}, \dots, T_{160}$.

Aqui, temos, nos trapézios 121 e 122, as bases menores em $t=121$ e $t=122$, respectivamente. A partir de T_{123} , temos b_{123} em $t=123$, b_{124} em $t=124$, e assim por diante, até b_{160} em $t=160$.

A diferença, em relação aos cálculos anteriores é que, em T_{122} , temos que $B_{122} = B_{123}$, e, a partir de T_{123} , $b_{123} = B_{124}$, $b_{124} = B_{125}$, ... $b_{159} = B_{160}$.

Sendo assim, nossa soma pode ser obtida por:

$$\frac{(b_{121} + 2b_{122} + 2B_{122} + 2b_{123} + 2b_{124} + \dots + 2b_{159} + b_{160})}{2} \quad (8)$$

Esses valores podem ser tirados da Figura 30, onde b_{121} é a velocidade no instante $t = 121$ s, b_{122} é a velocidade no instante $t = 122$ s, ..., b_{160} é a velocidade no instante $t=159$ e B_{160} é a velocidade no instante $t=160$.

Substituindo esses valores, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{(2194 + 2.2219 + 2.2230 + 2.2229 + 2.2226 + 2.2222 + 2.2219 + 2.2215 + 2.2213)}{2} + \\ & \frac{(2.2210 + 2.2206 + 2.2204 + 2.2202 + 2.2189 + 2.2168 + 2.2145 + 2.2123)}{2} + \\ & \frac{(2.2102 + 2.2082 + 2.2059 + 2.2038 + 2.2016 + 2.1995 + 2.1974 + 2.1951)}{2} + \\ & \frac{(2.1929 + 2.1909 + 2.1887 + 2.1868 + 2.1847 + 2.1826 + 2.1805 + 2.1784)}{2} + \\ & \frac{(2.1761 + 2.1740 + 2.1719 + 2.1698 + 2.1676 + 2.1654 + 2.1632 + 1611)}{2} = \\ & = \frac{160149}{2} = 80075 M.s/h \end{aligned}$$

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 80 075 por 3600 = 22,243055555...

Convertendo as milhas em metros, faremos 22,243055555... x 1609,344 = 35 796,73 metros.

Segundo os dados da tabela 30, no instante $t=160$ s, a altura alcançada pelo foguete foi de 79 679 metros.

Como já sabemos, precisamos somar à este valor de 35 796,73 m, o valor calculado nos primeiros 120 segundos, que foi de 42 685,61 m. Portanto, somando o valor encontrado agora com o valor encontrado nos primeiros 80 segundos, temos: 35 796,73 + 42 685,61 = 78 482,34.

Dos 78 482,34 m, calculados, para os 79 679 m, do vídeo, tivemos uma diferença de 1 196,66 m, o que nos dá uma margem de erro de 1,50%, que, embora tenha aumentado em relação

aos primeiros 80 segundos, ainda é uma margem muito pequena. Portanto é um valor aceitável.

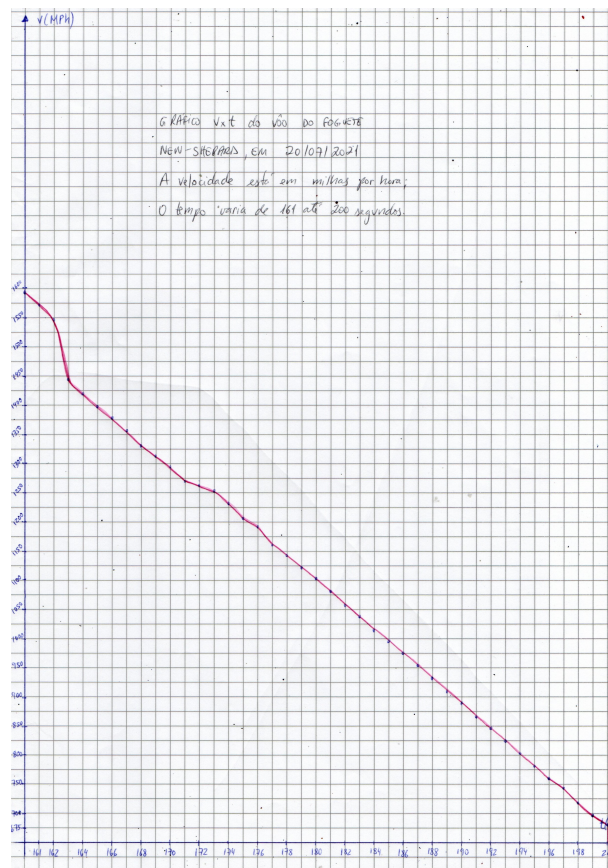


Figura 36: Gráfico $v \times t$, do 1º vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 161 a 200 segundos.

Partindo para o quinto gráfico, [36](#) acima, vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete no intervalo de tempo que vai de 161 a 200 segundos após o lançamento do foguete. Pelo gráfico, podemos observar que, dividindo a área sob a curva, temos 40 trapézios. A distância percorrida neste intervalo de tempo (161-200 s) será a soma de todos os 40 trapézios.

Identificaremos os trapézios do gráfico [36](#) como $T_{161}, T_{162}, T_{163}, \dots, T_{200}$.

De maneira análoga ao cálculo da altura alcançada nos cálculos anteriores, nossa soma pode ser:

$$\frac{(B_{161} + 2B_{162} + 2B_{163} + 2B_{164} + \dots + 2B_{199} + b_{200})}{2} \quad (9)$$

Esses valores podem ser tirados da Figura [31](#), onde b_{161} é a velocidade no instante $t=161$ s, b_{162} é a velocidade no instante $t = 162$ s,, B_{200} é a velocidade no instante $t=199$ e b_{200} é a velocidade no instante $t=200$.

Substituindo esses valores, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{(1611 + 2.1591 + 2.1570 + 2.1548 + 2.1526 + 2.1504 + 2.1484 + 2.1463)}{2} + \\
& \frac{(2.1440 + 2.1419 + 2.1398 + 2.1378 + 2.1356 + 2.1333 + 2.1312 + 2.1291)}{2} + \\
& \frac{(2.1271 + 2.1248 + 2.1228 + 2.1207 + 2.1185 + 2.1163 + 2.1143 + 2.1122)}{2} + \\
& \frac{(2.1101 + 2.1079 + 2.1059 + 2.1037 + 2.1015 + 2.995 + 2.972 + 2.951)}{2} + \\
& \frac{(2.931 + 2.910 + 2.888 + 2.867 + 2.846 + 2.825 + 2.824 + 2.782 + 762)}{2} = \\
& = \frac{94857}{2} = 47429 M.s/h
\end{aligned}$$

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 47 429 por 3600 = 13,174722222...

Convertendo as milhas em metros, faremos 13,17472222... x 1609,344 = 21 202,66 metros.

Segundo os dados da tabela 31, no instante t=200 s, a altura alcançada pelo foguete foi de 100 914 metros.

Como já sabemos, precisamos somar à este valor de 21 202,66 m, o valor calculado nos primeiros 160 segundos, que foi de 78 482,34 m. Portanto, somando o valor encontrado agora com o valor encontrado nos primeiros 80 segundos, temos: 21 202,66 + 78 482,34 = 99 685.

Dos 99 685 m calculados, para os 100 914 m do vídeo, tivemos uma diferença de 1 229 m, o que nos dá uma margem de erro de 1,22%, que é uma margem pequena, mas considerável, já que estamos lidando com cálculo de áreas de trapézios. Esta margem de erro se deve à falta de instrumentos mais precisos no momento das leituras de velocidade, pois elas foram obtidas pausando-se o vídeo do Youtube. Portanto, apesar da diferença, ainda é um valor aceitável.

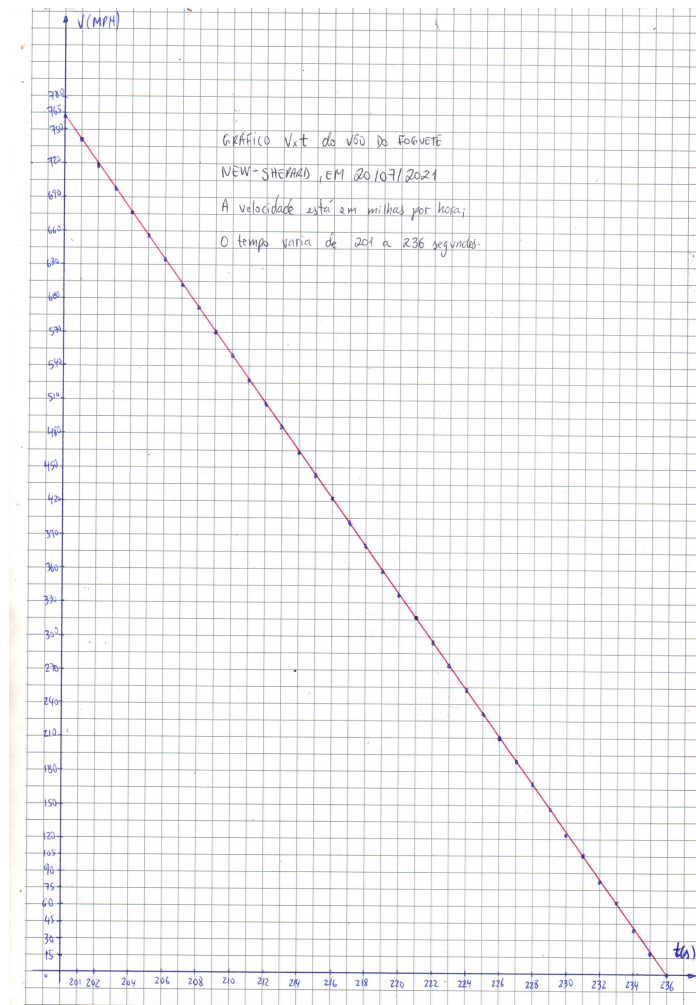


Figura 37: Gráfico $v \times t$, do 1º vôo tripulado do foguete New Shepard. Tempo variando de 201 a 236 segundos.

Finalmente, chegamos ao sexto e último gráfico, 37 acima.

Vamos calcular a distância, aproximada, percorrida pelo foguete no intervalo de tempo que vai de 201 a 236 segundos após o lançamento do foguete. Pelo gráfico, podemos observar que, dividindo a área sob a curva, temos 1 triângulo e 35 trapézios. A distância percorrida neste intervalo de tempo (201-236 s) será a soma de todos os 36 polígonos.

Identificaremos os trapézios do gráfico 37 como $T_{201}, T_{202}, T_{203}, \dots, T_{235}$.

De maneira análoga ao cálculo da altura alcançada nos cálculos anteriores, nossa soma pode ser:

$$\frac{(b_{201} + 2b_{202} + 2b_{203} + \dots + 2b_{234} + b_{235})}{2} \quad (10)$$

Esses valores podem ser tirados da Figura 31, onde b_{201} é a velocidade no instante $t=201$ s, b_{202} é a velocidade no instante $t = 202$ s,, b_{231} é a velocidade no instante $t = 235$ s e no instante $t = 236$ s, o foguete atinge altura máxima e sua velocidade é igual a zero. A partir daqui, ele começa a descer.

Substituindo esses valores, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{(762 + 2.740 + 2.718 + 2.698 + 2.676 + 2.654 + 2.634 + 2.612 + 2.591)}{2} + \\ & \frac{(2.570 + 2.549 + 2.527 + 2.507 + 2.485 + 2.464 + 2.443 + 2.422 + 2.401)}{2} + \\ & \frac{(2.379 + 2.359 + 2.337 + 2.317 + 2.295 + 2.274 + 2.253 + 2.210 + 2.189)}{2} + \\ & \frac{(2.168 + 2.147 + 2.125 + 2.105 + 2.83 + 2.63 + 2.41 + 18)}{2} = \\ & = \frac{27107}{2} = 13\,553,5 M.s/h \end{aligned}$$

Para deixar na mesma unidade de medida, vamos dividir 13 553,5 por 3600 = 3,764861111...

Convertendo as milhas em metros, faremos 3,764861111... x 1609,344 = 6 058,96 metros.

Para o triângulo, temos um triângulo com base = 1 e altura igual a 18. Portanto a área do triângulo será:

$$\frac{1 \cdot 18}{2} = 9 \text{ milhas} = 4,02m.$$

Segundo os dados da tabela 31, no instante $t = 236$ s, a altura alcançada pelo foguete foi de 107 049 metros.

Como já sabemos, precisamos somar ao valor de 6 058,96 m, o valor calculado do triângulo e o valor calculado dos primeiros 200 segundos, que foi de 98 685 m. Portanto, somando o valor encontrado agora com o valor encontrado nos primeiros 200 segundos, temos:

$$4,02 + 6\,058,96 + 98\,685 = 104\,747,98m.$$

Dos 104 747,98 m, calculados, para os 107 049 m, do vídeo, tivemos uma diferença de 2 301,02 m, o que nos dá uma margem de erro de 2,15%. A margem de erro aumentou consideravelmente em relação às anteriores. Ainda assim, é uma margem pequena e para efeitos de cálculo aproximado, ainda é um valor aceitável.

Era esperada uma diferença entre os valores calculados e o valor de fato apresentado no vídeo. A velocidade e a altura atingida pelo foguete, variam muito a cada segundo e o

editor de vídeo utilizado não consegue ler exatamente essas duas grandezas em intervalos iguais a 1000 milésimos de segundo.

Também temos que considerar que, no gráfico, unimos os pontos linearmente, o que não acontece nos momentos em que a velocidade varia muito, como no caso em que um estágio é desacoplado ou no momento em que o foguete atinge a velocidade máxima.

Este último gráfico é interessante, pois a velocidade varia praticamente de maneira linear, o que significa que a aceleração mantém-se constante nesses últimos 36 segundos. Podemos inserir a noção de aceleração com os alunos, mostrando as diferenças dos gráficos e o que acontece para que ela se mantenha constante neste último gráfico.

Uma sugestão é fazer um exercício perguntando qual é a velocidade, em milhas por hora, que o foguete deve estar para que esteja apenas sobre o efeito da aceleração da gravidade

Mas podemos verificar que o gráfico auxilia muito e tem muita confiabilidade com o que ocorre na realidade.

3.3 TERCEIRO VÍDEO - CAMINHADA

No terceiro vídeo, é filmada a tela de um smartphone com o aplicativo Waze em funcionamento. O objetivo é mostrar a constância da velocidade de uma caminhada por um trecho de uma avenida na cidade de Pindamonhangaba.

Através do vídeo, podemos calcular a quantidade de passos necessários para percorrer uma distância, a velocidade média em que andamos ou quanto tempo levaríamos para percorrer uma determinada distância.

Por exemplo, no mês de outubro, muitos romeiros caminharam em direção à cidade de Aparecida-SP. Caso uma pessoa queira fazer uma caminhada de vários quilômetros, ela precisa saber qual é a "sua velocidade média" enquanto caminha naturalmente.

Conversando com romeiros, pude constatar que alguns vem de cidades distantes de mais de 100 quilômetros de distância. Eles fazem seu planejamento calculando a distância que percorrerão.

É necessário saber a velocidade média para definir quantos quilômetros a pessoa vai caminhar por dia. Assim, eles podem fazer as reservas dos hotéis ou pousadas em que ficarão hospedados.

Após as reservas feitas, o romeiro sabe até onde tem de caminhar. Quando chega a seu destino, solicita um carro por aplicativo e vai até o local reservado, para tomar banho, descansar e se alimentar.

No dia seguinte, acorda cedo, solicita outro carro de aplicativo, se desloca para o local de onde havia parado e segue viagem daquele ponto.

A sugestão é que façamos uma caminhada com os alunos, para determinar a velocidade média de cada um e contar quantos passos eles dão ao percorrer 100 ou 200 metros. Quanto maior a distância percorrida, maior a precisão.

Para isso, o ideal é, com o auxílio de uma trena, marcar 100, 200 metros ou outra distância maior em uma superfície plana e asfaltada ou concretada. Após definidas as marcas de início e fim da caminhada, dividir a turma em 2 grupos. Cada aluno marca o tempo e a quantidade de passo em que leva para percorrer a distância definida.

Como exemplo, vamos supor 3 pessoas: A, B e C. Num percurso plano e asfaltado as 3 pessoas iniciam uma caminhada, cada uma em seu ritmo. Cada uma delas marca o seu tempo e a quantidade de passos que darão até chegar na marca de 200 m. Abaixo, uma tabela com os números das supostas pessoas:

Pessoa	passos dados	tempo (segundos)
A	200	48
B	240	60
C	300	72

Tabela 13: Quantidade de passos dados e tempo gasto para percorrer 200 metros

Saber quantos passos leva para percorrer uma distância é importante para calcular a distância percorrida em passos. Por exemplo, se uma pessoa faz caminhada na rua, ela pode estimar a distância percorrida através da quantidade de passos dados.

Um estudo realizado por 6 autores de diferentes Universidades e publicado em um artigo na Revista Britânica de Medicina Esportiva[1], em 5 de março de 2024, aponta que manter a contagem de passos em cerca de 10 mil por dia pode representar um risco 39% menor de morte e diminuir o risco de surgimento de doenças cardiovasculares em 21%.

A pesquisa foi feita com dados de mais de 72 mil pessoas, com idade média de 61 anos. No entanto, a partir de 4 mil passos diários, já é possível obter 50% dos benefícios de saúde concedidos pelo número ideal de 10 mil.

De acordo com Úrsula Neves, em matéria publicada no site Ge.Globo.com [13],

a caminhada pode ajudar a reduzir o risco de infarto e de Acidente Vascular Cerebral (AVC), além de estar relacionada com a redução de alguns tipos de câncer. Os benefícios aumentam com a frequência, intensidade e duração da caminhada.(NEVES, 2024, Online)

Analisando a tabela 13, com relação a quantidade de passos dados nos 200 metros, podemos concluir que:

- a pessoa A deu 200 passos em 200 metros, ou seja, podemos concluir que essa pessoa se desloca 1 metro a cada passo;
- a pessoa B deu 240 passos em 200 metros, ou seja, podemos concluir que essa pessoa dá 1200 passos para se deslocar 1 quilômetro; e
- a pessoa C deu 300 passos em 200 metros, ou seja, podemos concluir que essa pessoa tem uma passada mais curta e precisa dar 150 passos para se deslocar 100 metros.

Coma a distância percorrida foi de 200 metros, podemos obter a velocidade, em metros por segundo, dividindo 200 pelo tempo em que elas levaram para percorrer essa distância:

- a pessoa A levou 48 segundos para percorrer os 200 metros, ou seja, podemos concluir que essa pessoa caminha a uma velocidade média de 4,16666... m/s;
- a pessoa B levou 60 segundos para percorrer os 200 metros, ou seja, podemos concluir que essa pessoa caminha a uma velocidade média de 3,33333... m/s; e
- a pessoa C levou 72 segundos para percorrer os 200 metros, ou seja, podemos concluir que essa pessoa caminha a uma velocidade média de 2,7777... m/s.

Para converter a velocidade de m/s para km/h, devemos multiplicar por 3,6. Então, as velocidades médias das pessoas A, B e C, são, respectivamente, iguais a 15 km/h, 12 km/h e 10 km/h.

Como dito anteriormente, podemos explorar muitas situações com os alunos, como calcular, aproximadamente, uma distância percorrida, sabendo sua velocidade média, por exemplo.

Outra situação possível, seria uma pessoa querer saber quantos metros correspondem a 10000 passos. Se essa pessoa estiver na esteira de uma academia, na velocidade em que caminha normalmente, ela pode contar 100 passos, ver a distância percorrida e multiplicá-la por 100. Aí ela saberá a distância que ela deve percorrer, aproximadamente, para dar os 10 000 passos, sem ter que ficar contando até 10 000.

Os métodos utilizados nas 3 atividades propostas relacionam-se à discretização da seguinte maneira:

- Na primeira atividade o objetivo foi estimar a distância percorrida a partir dos valores de velocidade. A estratégia foi discretizar o tempo em intervalos de 5 segundos e com os valores de velocidade a cada 5 segundos supor velocidade constante igual a velocidade inicial ou final em cada intervalo de 5 segundos.
- Na segunda atividade, o foguete varia a sua velocidade à medida que varia a sua altitude. Para estimar a distância percorrida entre dois instantes quaisquer, usando apenas os valores de velocidade, dividimos o tempo de subida em intervalos de

1 segundo. Desta maneira, colocando os dados em um gráfico $v \times t$, é possível recuperar a distância percorrida entre dois intervalos de tempo aleatórios.

- Na terceira atividade, se desejamos saber quantos metros correspondem a uma caminhada de 10000 passos, podemos calcular a distância média percorrida em cada passo da seguinte forma: Marcamos a quantidade de passos dados para percorrer 100 m, por exemplo, e achamos um valor para a razão passos/distância. Daí temos uma estimativa de quantos metros se caminha a cada passo. Então uma caminhada de 10 000 passos pode ser discretizada separando os 10 000 passos e usando a estimativa de metros a cada passo. De forma semelhante podemos fazer se desejamos saber quanto tempo correspondem a uma caminhada de 10 000 passos.

3.4 HABILIDADES DA BNCC RELACIONADAS A ATIVIDADE PROPOSTA

Esta atividade contempla as seguintes habilidades, previstas na BNCC (2017):

- (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
- (EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

CÁLCULO DE VOLUME DE TERRA ESCAVADA

Neste capítulo, os alunos conhecerão uma profissão em que se utiliza muita Matemática, em especial a Geometria e a Trigonometria: A Topografia.

4.1 TOPOGRAFIA

A palavra topografia vem do grego "topos", que significa lugar, e "graphen", que significa descrição. Portanto, topografia significa "descrição do lugar".

"A Topografia tem por finalidade determinar o contorno, dimensão e posição relativa de uma porção limitada da superfície terrestre, sem levar em conta a curvatura resultante da esfericidade terrestre". (ESPARTEL, 1987, p.3).

A Topografia atua em conjunto com a Engenharia e é muito importante, principalmente em grandes obras, como na construção de rodovias, loteamento de bairros, pontes e viadutos. Inclusive, até em pequenas construções a Topografia é uma ferramenta necessária para o nivelamento de uma obra.

4.2 SITUAÇÃO-PROBLEMA

Nossa situação problema será a seguinte: Você comprou uma região em que tem árvores de eucalipto. Você quer retirar essas árvores, planificar a região e construir um grande Shopping Center, com estacionamento amplo e um posto de combustível. Uma empresa aluga máquinas e caminhões com capacidade de $15m^3$, para retirar a terra. Se cada viagem de ida e volta do caminhão custa R\$ 300,00, qual será o seu gasto para retirar toda a terra? Suponha que o fator de empolamento seja de 20%, ou seja, a cada $1m^3$ de terra retirada, ocupará o volume de $1,20m^3$ da caçamba do caminhão.

Utilizaremos uma carta topográfica, contendo as curvas de nível, do local escolhido.

Segundo a Wikipédia, uma

carta topográfica é a representação, em escala, sobre um plano dos acidentes naturais e artificiais da superfície terrestre de forma mensurável, mostrando suas posições planimétricas e altimétricas. A posição altimétrica ou relevo é normalmente determinada por curvas de nível, com as cotas referidas ao nível do mar.[5]

O planeta Terra foi dividido por 360 linhas verticais e 360 linhas horizontais. As linhas verticais são chamadas de meridianos e servem para contar as longitudes. As linhas horizontais são chamadas de paralelos e servem para contar as latitudes. Sabendo a latitude e a longitude de um ponto, é possível saber exatamente onde ele está no planeta Terra.

A carta a ser utilizada é do município de Pindamonhangaba, tem escala de 1:50 000 e as equidistâncias das curvas de nível são de 20 metros. A carta foi obtida por meio do site do IBGE, disponível em https://geoftp.ibge.gov.br/cartas_e_mapas/folhas_topograficas/editoradas/escala_50mil/pindamonhangaba27413.pdf, referente ao ano de 1988.

A Figura 38 apresenta um recorte dessa carta, estando identificadas as latitudes 74⁶⁰ e 74⁶² e longitudes 4⁶⁰, 4⁶² e 4⁶⁴. A região em verde mostra uma área com eucaliptos.

Para enriquecer a atividade, podemos construir um caixão de areia com a região escolhida, compreendida entre 4⁶⁰ e 4⁶⁴ na Longitude e 74⁶⁰ e 74⁶⁴ na Latitude.

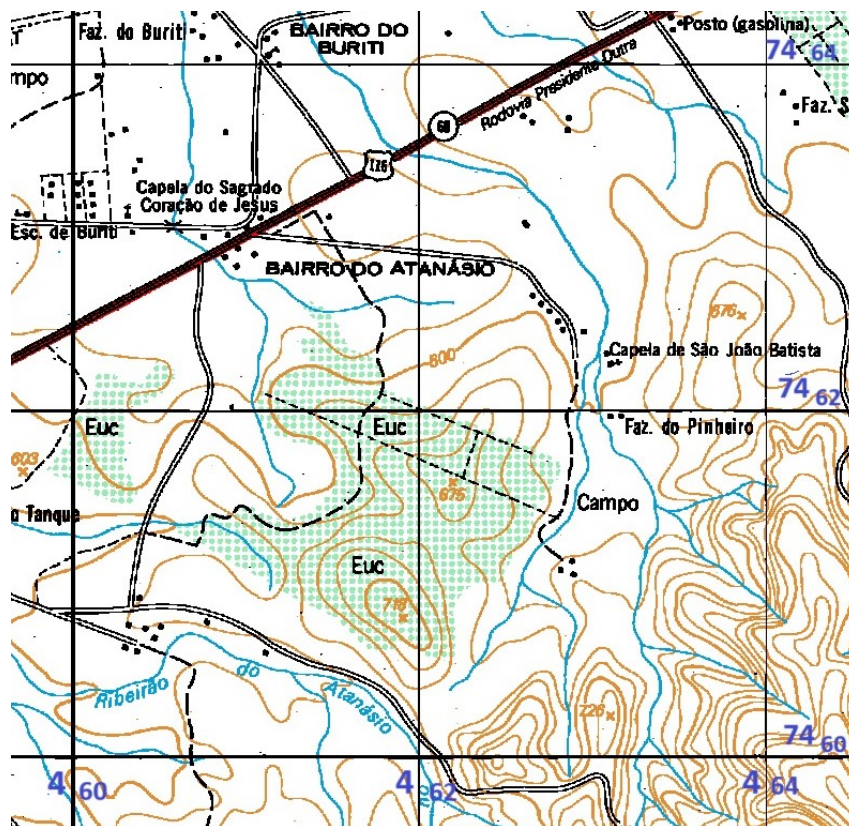


Figura 38: Região do terreno escolhida para o cálculo do volume

Cada quadrado da carta tem medidas reais de $2\text{km} \times 2\text{km}$ e podemos chamá-los de quadrículas. Após baixar a carta, é possível ampliar a carta, utilizando um editor de imagens, como o Photoshop, Gimp, CorelDraw, até que as linhas e colunas distem 10 cm entre si. Eu utilizei o Corel Draw. Após isso, copiei, colocando uma folha de sulfite sobre o monitor e risquei os contornos das curvas de nível, me certificando que elas distem 10 cm, tanto na vertical como na horizontal.

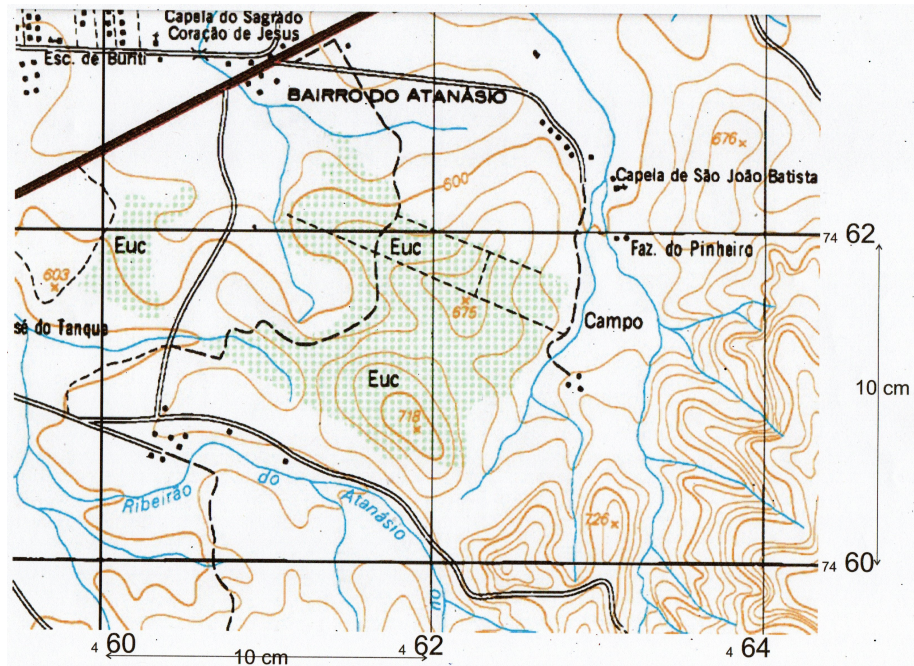


Figura 39: Carta quadriculada com $10\text{cm} \times 10\text{cm}$

4.3 INICIANDO OS TRABALHOS

Marcamos e traçamos linhas horizontais e verticais distantes 1 cm uma da outra, para facilitar os cálculos da área. Também foram designadas letras para as colunas e números para as linhas como num tabuleiro de xadrez, conforme pode ser visto na Figura 40.

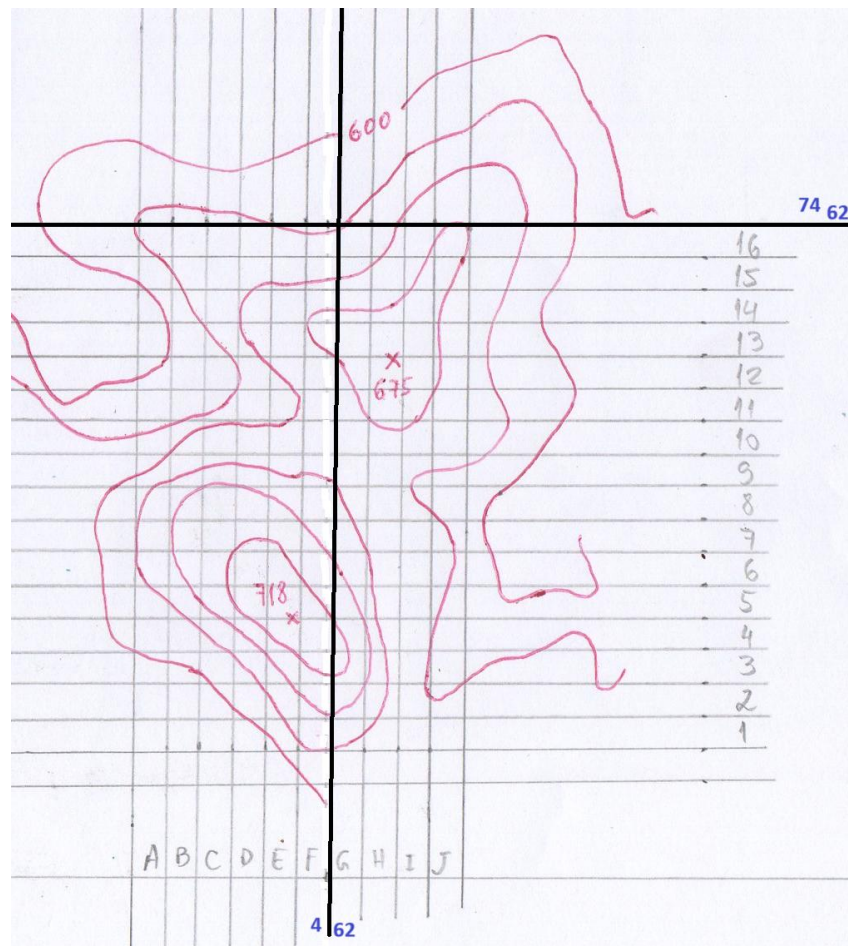


Figura 40: Carta quadriculada com $1\text{cm} \times 1\text{cm}$

Temos duas cotas próximas à linha vertical 4₆₂: uma cota de 718 m e outra de 675 m. Nosso objetivo será nivelar a região de eucaliptos na altitude de 660 metros. Este processo chama-se terraplenagem.

Segundo Andrade e Pereira (2024, p. 103) [2], O serviço de terraplenagem visa alterar o relevo natural terrestre, dando uma nova conformação topográfica ao local alterado. Essa alteração é feita através de movimentos básicos de terra, como o corte (retirada), aterro (deposição) ou misto (corte/aterro), caracterizando as movimentações de terra.

A ideia aqui é dividir as curvas de nível em quadrículas, para calcular a área. Vamos dividir em 2 regiões diferentes: A região que contém a cota 675, e a região que contém a cota 718.

Na Figura 40, cada quadrado $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ corresponde a uma área de $200\text{m} \times 200\text{m} = 40\,000\text{m}^2$.

Isolando as regiões das cotas, vamos dar um "zoom", redesenhando essa região numa área maior do papel e subdividindo cada quadrícula em quadrículas de $1\text{cm} \times 1\text{cm}$, onde cada 1 centímetro equivale a 100 metros, na realidade.

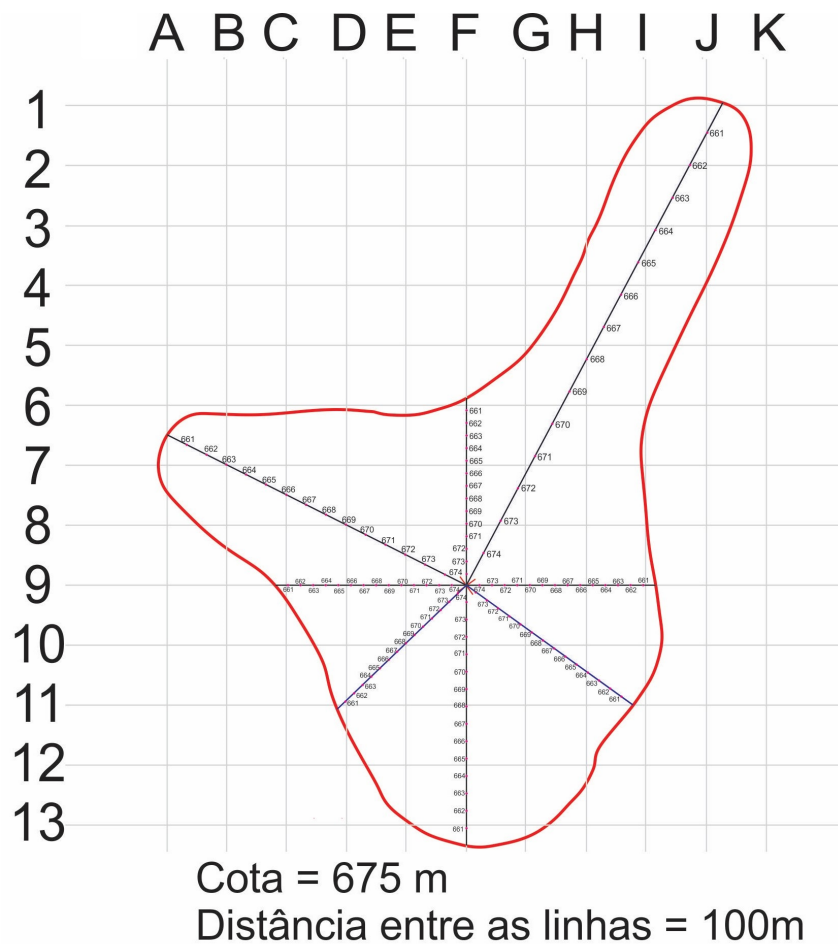


Figura 41: Região da cota 675, contida na curva de nível 660 m, em vermelho

Para facilitar a identificação, alinhamos a cota 675 na coordenada F9, nomeamos as linhas horizontais com números e as verticais, com letras.

À partir da cota 675, foram traçadas 8 linhas. Duas linhas na direção vertical e duas no sentido vertical. As outras 4 linhas foram traçadas levando em conta, os pontos mais distantes da cota até a curva de nível, como se fossem os pontos cardeais (Norte, Sul, Leste e Oeste) e colaterais (direções intermediárias entre os pontos cardeais).

Como nossa atividade visa que os alunos aprendam a calcular de maneira aproximada o volume de terra a ser escavada, vamos fazer de duas maneiras distintas:

1. Na primeira, vamos calcular a área delimitada pela curva de nível representada pela cor vermelha na Figura 41. Para isso, vamos calcular a média entre o volume de terra nas altitudes de 660 m e 675 m;
2. A segunda maneira, por se tratar de uma abordagem mais detalhada, por envolver um processo mais complexo, semelhante ao modo como os topógrafos e engenheiros calculam volumes, está resolvida no Apêndice B. Nesta segunda maneira, vamos utilizar os Métodos dos Volumes e pelo Método das médias ponderadas.

Vamos iniciar os cálculos pintando as quadrículas inteiras.

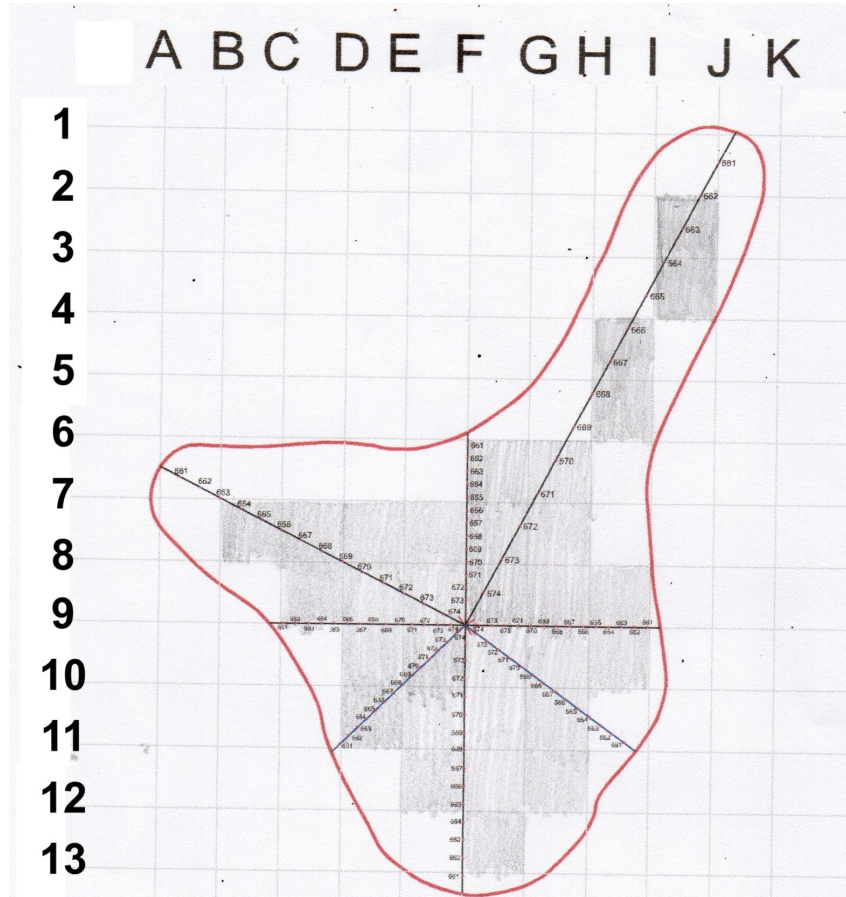


Figura 42: Região da cota 675 em que é possível determinar a área

Na figura acima, podemos observar que foram pintadas 31 quadrículas $100m \times 100m$. Juntas, as quadrículas pintadas, totalizam uma área de $100\text{ m} \cdot 100\text{ m} \cdot 31 = 310\,000\text{m}^2$.

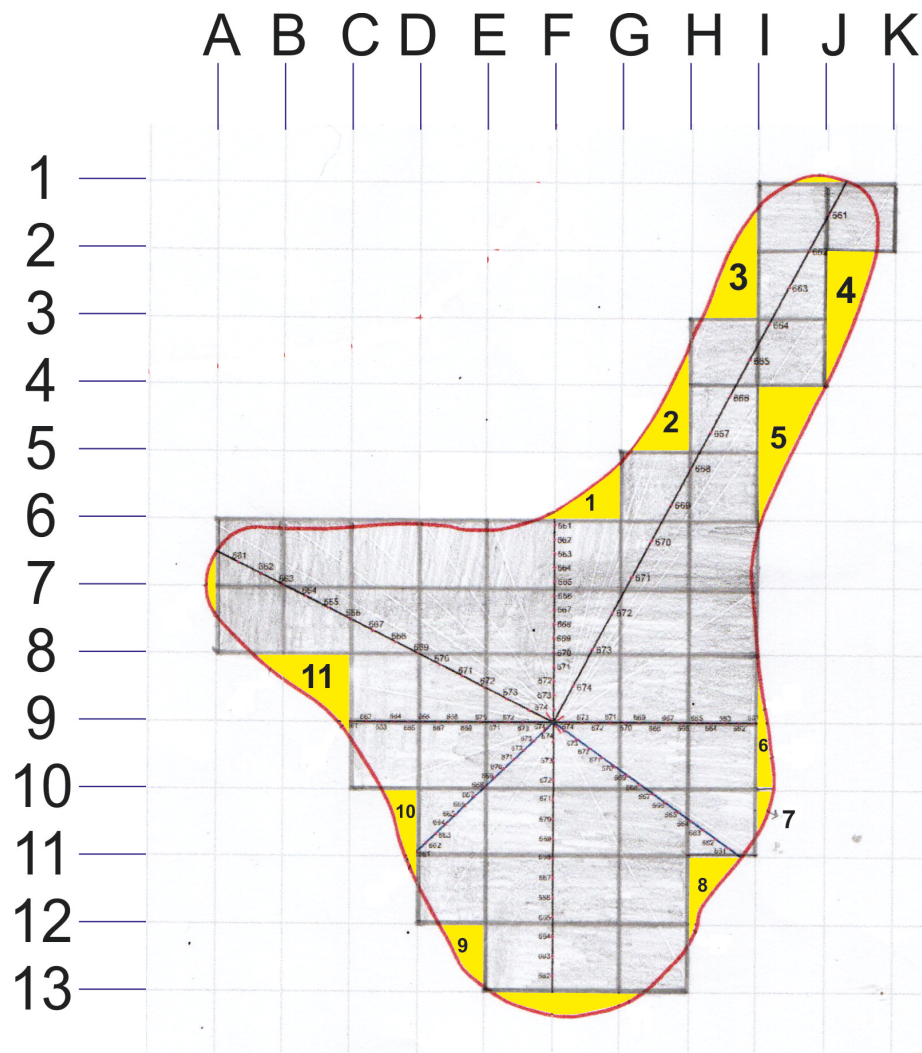


Figura 43: Áreas não calculadas

Na Figura 43 acrescentamos algumas quadrículas que estão quase completamente dentro da região delimitada. As áreas das regiões amarelas enumeradas de 1 a 11 serão calculadas posteriormente. As regiões em amarelo que não foram numeradas vamos desconsiderar, de forma a compensar as quadrículas que foram acrescentadas (em grafite) e não estavam completamente dentro da região delimitada. Lembrando que estamos fazendo um cálculo estimado.

Assim, precisamos calcular as 11 áreas restantes. Podemos observar que as regiões tem formatos semelhantes à triângulos retângulos. Com o auxílio de um paquímetro, vamos medir os comprimentos dos catetos.

As medidas dos catetos de cada região, bem como a área de cada um deles está na figura abaixo:

Região	comprimento da base na carta (cm)	comprimento da altura na carta (cm)	comprimento da base real (m)	Comprimento da altura real (m)	Área (m ²)
1	1,23	0,845	123	84,5	5196,75
2	0,9	1,56	90	156	7020
3	0,88	1,64	88	164	7216
4	0,76	2	76	200	7600
5	1	2,09	100	209	10450
6	0,33	1,955	33	195,5	3225,75
7	0,33	1,27	33	127	2095,5
8	0,82	0,71	82	71	2911
9	0,7	0,95	70	95	3325
10	0,56	1,4	56	140	3920
11	1,46	1,25	146	125	9125
				Área total =	62085,00

Figura 44: Áreas das regiões triangulares

A área total da região delimitada pela curva de nível 660 m, que é a região que queremos calcular, será:

$$480\,000 + 62\,085 = 542\,085m^2$$

Como a região encontra-se entre 660 e 675 metros de altitude e não temos mais dados, o cálculo do volume aproximado será a média do volume da área para as altitudes de 660 m e 675 m:

- Volume para altitude de 660 m: $V_{660} = 542\,085m^2 \cdot 660m = 357\,776\,100m^3$
- Volume para altitude de 675 m: $V_{675} = 542\,085m^2 \cdot 675m = 365\,907\,375m^3$
- Volume total de terra escavada estimado:

$$\frac{(357\,776\,100 + 365\,907\,375)}{2} = 361\,841\,737,5m^3.$$

Para o cálculo da quantidade de caminhões, precisamos falar com os alunos sobre o Fator de Empolamento.

4.4 FATOR DE EMPOLAMENTO

Quando fazemos um buraco na terra, para plantar uma muda de uma árvore, por exemplo, a quantidade de terra retirada ocupa um volume maior em relação ao buraco feito. Isso se deve ao fato de que a terra estava compactada e quando a retiramos, a terra está desagregada, com ar entre suas partículas. E é assim que, em uma obra de retirada de



Figura 45: Cavadeira articulada e cavadeira reta. Fonte: nichele.com.br

terra, ela será colocada nos caminhões. Ela não será compactada novamente, pois seria um trabalho desvantajoso em termos de tempo, combustível e podendo ocorrer acidentes e danificar as máquinas.

Uma sugestão é que mostremos esse fenômeno acontecer. Podemos fazer um buraco cilíndrico com uma cavadeira articulada ou um buraco em forma de paralelepípedo, utilizando uma cavadeira reta. O volume do buraco pode ser facilmente calculado, utilizando as fórmulas de cálculo de volume de um cilindro ou de um paralelepípedo.

A terra escavada pode ser colocada usando uma caixa de papelão, que possua um formato de paralelepípedo. Assim que toda a terra for colocada na caixa, medimos e multiplicamos o comprimento, a largura da caixa e a altura da terra acondicionada dentro da caixa. Assim, calculamos o volume de terra.

Quando não conhecemos o fator de empolamento (o percentual de aumento da terra após ser descompactada) podemos obtê-lo da seguinte forma: primeiro calculamos de quanto foi o aumento de volume (volume descompactado - volume compactado) e depois verificamos qual foi o percentual de aumento com relação ao volume compactado.

Por exemplo, se o volume da terra compactada é $10 m^3$ e o volume da terra descompactada é $12 m^3$, então houve um aumento de $2 m^3$ ($12-10$). Esse aumento corresponde a 20% do total inicial ($\frac{2 \cdot 100}{10}$).

Vamos utilizar como fator de empolamento 20%, ou seja, para cada $5m^3$ retirados, ocupará um volume de $6m^3$ de terra no caminhão.

Teremos que considerar quantos caminhões serão necessários para transportar

$$361\,841\,737,5 \cdot 1,2 = 434\,210\,085m^3.$$

Considerando que cada caminhão tenha capacidade para transportar $15m^3$, serão necessários

$$\frac{434\,210\,085}{15} = 28\,947\,339 \text{ caminhões.}$$

O valor gasto para cada viagem do caminhão é de R\$ 300,00. Portanto, o valor para os caminhões será de $300 \cdot 28\,947\,339 = \text{R\$ } 8\,684\,201\,700$, ou seja: oito bilhões, seiscentos e oitenta e quatro milhões, duzentos e um mil e setecentos reais.

Pela quantidade de caminhões, a operação se mostra inviável. O valor é absurdo. Podemos perguntar aos alunos: quais seriam possíveis soluções para se realizar essa operação de terraplenagem? Vale à pena fazer um nivelamento para plantação? E se fosse para construir um shopping? E se for um bairro? Há a necessidade de nivelar toda essa terra? E em relação à questão ambiental? Onde será colocada a terra?

Podemos concluir também que, embora pareça uma região pequena na carta, a curva de nível, na realidade é muito grande, pois cada quadrado tem 100 metros de lado. O que representa $10\,000\ m^2$, ou 1 hectare.

É importante ressaltar que apenas de posse da carta com as curvas de nível não é possível realizar os cálculos com exatidão, pois as altitudes não podem ser calculadas, em razão dos acidentes geográficos possuírem formatos irregulares.

É importante que os alunos percebam as limitações do método utilizado e que complementem a atividade pesquisando como isso é feito em uma situação real. Neste caso, um topógrafo iria até o local e mediria, com o auxílio de instrumentos, as cotas de cada vértice da malha.

Ainda assim, são tantas as possibilidades de explorar esse tema, que é possível fazer uma atividade interdisciplinar com Geografia, Ciências, e a troca de opiniões é enriquecedora para todos.

Os métodos utilizados aqui relacionam-se à discretização, pois dividimos a área total em quadrículas e calculamos área e volume de cada uma. Ao final, o resultado será a soma de todas as partições.

Inúmeros são os exemplos que podem ser utilizados, como a construção de uma casa, de um shopping e seu estacionamento, de um campo de futebol, ou ainda realizar um corte de um segmento de reta com 20 metros de largura para a construção de uma rodovia; ou seja, esse tipo de situações-problema envolvendo Topografia/Engenharia pode despertar inclusive o interesse de alguns alunos por essas carreiras.

Este tipo de atividade, traz benefícios como o desenvolvimento do pensamento crítico, proporciona uma aprendizagem mais contextualizada e um conhecimento mais amplo sobre profissões como engenharia, topografia e arquitetura.

4.5 HABILIDADES DA BNCC RELACIONADAS A ATIVIDADE PROPOSTA

Nesta atividade, são abordados as seguintes habilidades, da BNCC (2017):

- (EF09MA16) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
- (EF09MA18) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
- (EF09GE14) Interpretar cartogramas, mapas esquemáticos (croquis) e anamorfozes geográficas com informações geográficas acerca da África e América. (Geografia)
- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT407) Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas.

TOMOGRAFIA

Nesta seção trabalharemos um exercício retirado do livro Cálculo Volume I, de James Stewart.

5.1 SITUAÇÃO-PROBLEMA

O enunciado do problema diz o seguinte [20]:

Uma tomografia computadorizada produz vistas de seções transversais igualmente espaçadas de um órgão humano, as quais fornecem informações sobre esse órgão que, de outra maneira, só seriam obtidas por cirurgia. Suponha que uma tomografia computadorizada de um fígado humano mostre seções transversais espaçadas por 1,5 cm. O fígado tem 15 cm de comprimento e as áreas das seções transversais, em centímetros quadrados, são 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 e 0. Qual é, aproximadamente, o volume do fígado?

Inicialmente, notamos que o fígado foi dividido em 10 partes, a cada 1,5 cm.

5.2 REPRESENTAÇÃO ARTÍSTICA DO ÓRGÃO

É possível fazer um desenho desse fígado, considerando que as seções transversais sejam circulares.

De posse desses dados, foram traçadas 11 linhas paralelas, distantes 1,5 cm de uma para outra.

Nomeamos cada paralela pelas primeiras letras do nosso alfabeto, da esquerda para a direita, como na Figura 46.

Em seguida, traçamos a medida do raio acima e abaixo da linha perpendicular, dando uma perspectiva lateral planificada do fígado.

Finalmente, unimos as pontas dos diâmetros, fechando a figura, como se fosse um polígono. Poderíamos arredondar mais as pontas para que o fígado fique mais "realista".

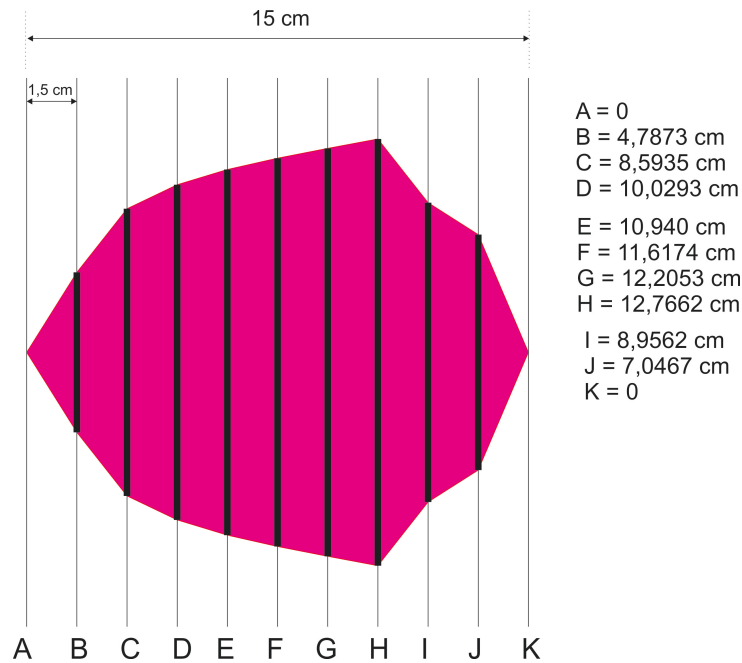


Figura 46: Ilustração da seção transversal do fígado visto em 2D

Assim como fizemos no capítulo 4, mostraremos como resolver este exercício de duas formas:

1. Vamos supor que cada fatia seja cilíndrica, ou seja, que suas faces opostas sejam de mesma área; e
2. Vamos fatiar o fígado em 2 cones e 8 troncos de cones. Este exercício pode ser usado no Ensino Médio e vamos deixar a sua resolução no Apêndice C.

Como o fígado foi seccionado em 10 partes, podemos ilustrar numa perspectiva em 3 dimensões, obtendo 9 cilindros, onde as áreas de suas bases são os valores das áreas das seções transversais considerando o valor da esquerda.

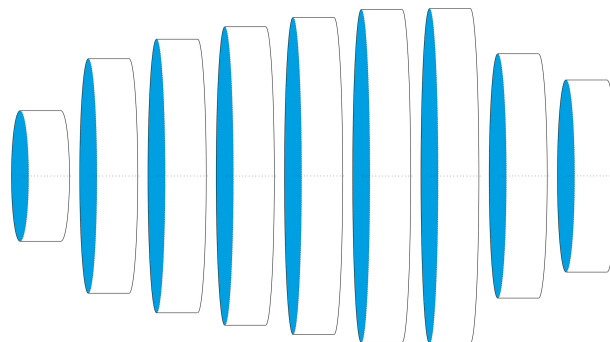


Figura 47: Fatias de cilindros representando o fígado em perspectiva

Podemos agora, calcular os volumes de cada um desses 9 sólidos. O volume, aproximado, do fígado será a soma dos volumes dos 9 cilindros.

Teremos então, os seguintes cilindros:

cilindro	Área da base (cm^2)	altura (cm)	Volume (cm^3)
C_1	18	1,5	27
C_2	58	1,5	87
C_3	79	1,5	118,5
C_4	94	1,5	141
C_5	106	1,5	159
C_6	117	1,5	175,5
C_7	128	1,5	192
C_8	63	1,5	94,5
C_9	39	1,5	58,5

Tabela 14: Medidas dos cilindros e seus respectivos volumes

O volume de um cilindro é calculado multiplicando-se a área de sua base pela altura, ou seja:

$$V = \text{Área da base} \cdot \text{altura}$$

Logo, os volumes dos cilindros serão:

$$V_{C_1} = 18 \cdot 1,5 = 27cm^3$$

$$V_{C_2} = 58 \cdot 1,5 = 87cm^3$$

$$V_{C_3} = 79 \cdot 1,5 = 118,5cm^3$$

$$V_{C_4} = 94 \cdot 1,5 = 141cm^3$$

$$V_{C_5} = 106 \cdot 1,5 = 159cm^3$$

$$V_{C_6} = 117 \cdot 1,5 = 175,5cm^3$$

$$V_{C_7} = 128 \cdot 1,5 = 192cm^3$$

$$V_{C_8} = 63 \cdot 1,5 = 94,5cm^3$$

$$V_{C_9} = 39 \cdot 1,5 = 58,5cm^3$$

O volume total seria então, a soma dos volumes dessas 10 fatias, ou seja:

$$\begin{aligned} V_{fígado} &= V_{C_1} + V_{C_2} + V_{C_3} + V_{C_4} + V_{C_5} + V_{C_6} + V_{C_7} + V_{C_8} + V_{C_9} \\ &= 27 + 87 + 118,5 + 141 + 159 + 175,5 + 192 + 94,5 + 58,5. \end{aligned}$$

Finalmente, o volume do fígado, será:

$$V_{fígado} = 1053cm^3$$

5.3 CÁLCULO DO VOLUME PELA REGRA DO PONTO MÉDIO

No livro do James Stewart, o enunciado pede para que resolva utilizando a Regra do Ponto Médio, para calcular o volume do fígado. Vejamos, a modo de comparação, a resolução solicitada no enunciado, com a resposta obtida.

Voltando ao enunciado no início do capítulo, queremos calcular o volume de um fígado que passou por uma tomografia computadorizada, que mostrou seções transversais espaçadas por 1,5 cm. O fígado tem 15 cm de comprimento e as áreas das seções transversais, em centímetros quadrados, são 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 e 0. No livro, o autor pede que utilizemos a Regra dos pontos médios.

O fígado possui 15 cm de comprimento e foi dividido em 10 partes de igual comprimento, ou seja, a cada 1,5 cm.

Pela Regra do Ponto Médio, temos:

$$M_n \approx \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \quad (11)$$

sendo:

- M_n é a aproximação da integral, que no caso, é o volume do fígado;
- Δx é o comprimento de cada parte (subintervalos obtidos a partir das n divisões);
- \bar{x}_i é o ponto médio de cada subintervalo.

Substituindo os valores do problema nas equações, temos: $b - a = 15 - 0 = 15$;

n é o número de divisões. Como utilizaremos somente os pontos médios, usaremos a metade das partições (utilizando um valor e "pulando o próximo") $= \frac{10}{2} = 5$

$x_0 = 0$ e $x_n = 15$

O valor de Δx fica:

$$\Delta x = \frac{15}{5} = 3$$

O volume será calculado pela expressão:

$$V \approx \int_a^b \Delta x \cdot dx = \quad (12)$$

$$\int_0^{15} 3 dx = 3 \Big|_0^{15} = 3 \cdot [f(1,5) + f(4,5) + f(7,5) + f(10,5) + f(13,5)] =$$

$$= 3.(18 + 79 + 106 + 128 + 39) = 3.370 \approx 1110\text{cm}^3.$$

Portanto, pela Regra do Ponto Médio, o volume do fígado será aproximadamente igual a 1110 cm^3 , enquanto em nossos cálculos de volume de cones e troncos, obtivemos um volume de $1031,605\text{cm}^3$.

Como não é possível saber o volume exato de um fígado apenas com os dados fornecidos, métodos diferentes darão valores diferentes, devido à natureza de sua execução, porém, próximos. Vimos nos capítulos anteriores que quanto mais divisões forem feitas, esses valores diferentes hão de convergir para um valor mais próximo do valor real.

Para esta atividade, eu gostaria de imprimir em uma impressora 3D, um fígado com as medidas fornecidas, de modo que ele tivesse um orifício para colocar água. Assim, poderia enchê-lo de água e despejá-la em um recipiente cilíndrico ou em formato de paralelepípedo, para que os alunos pudessem calcular o volume de água e comparar com os valores obtidos nos cálculos.

Os métodos utilizados nesta atividade, relacionam-se à discretização, quando dividimos o fígado em seções de igual comprimento e calculamos o volume de cada parte separadamente. Ao final, o volume do órgão será a soma de todas os volumes.

CONCLUSÕES

O ensino da Matemática no Ensino básico não deveria se resumir apenas a "Calcule" e "Resolva".

Fazer o aluno entender que a Matemática é uma ferramenta poderosa em diversas áreas do conhecimento de nossa sociedade, e que sem ela, a tecnologia atual provavelmente não seria possível, pode servir como motivação para que eles se interessem pela Matemática.

As metodologias ativas são estratégias pedagógicas que colocam o aluno no centro do processo de aprendizagem, incentivando o pensamento crítico, o raciocínio lógico e a resolução de problemas. O professor atua como orientador e mediador nas discussões, estimulando o autodesenvolvimento do aluno.

A realização desses tipos de atividades dentro e fora da sala de aula, é uma prática que enriquece o aprendizado, promovendo o desenvolvimento dos alunos e os preparando para uma participação ativa e crítica na sociedade.

Além disso, podemos elencar outros benefícios:

- **Aprendizado Prático:** Experimentos permitem que os alunos apliquem teorias e conceitos aprendidos em sala de aula de forma prática, o que facilita a compreensão e a efetivação do conhecimento.
- **Desenvolvimento do Pensamento Crítico:** Ao realizar experimentos, os alunos são incentivados a formular hipóteses, realizar observações, analisar dados e tirar conclusões compartilháveis com outros alunos, o que promove o desenvolvimento do pensamento crítico.
- **Estimulo à Curiosidade:** A prática experimental desperta a curiosidade nos alunos, motivando-os a explorar e questionar o mundo ao seu redor, o que é fundamental para o aprendizado contínuo.
- **Trabalho em grupo:** O trabalho pode ser realizado em grupos, o que promove a colaboração, a comunicação e o desenvolvimento de habilidades sociais, essenciais para a vida em sociedade e profissional.
- **Conexão com o Mundo Real:** Experimentos ajudam a conectar o conteúdo teórico com situações do cotidiano, tornando o aprendizado mais relevante e significativo para os alunos.

- **Desenvolvimento de Habilidades Técnicas:** A realização de experimentos proporciona a oportunidade de os alunos desenvolverem habilidades práticas, como manuseio de equipamentos, que podem ser valiosas em suas futuras profissões.
- **Estímulo à Criatividade:** A experimentação muitas vezes envolve a resolução de problemas de forma criativa, facilitando a capacidade dos alunos pensarem de maneira não convencional e de desenvolver soluções criativas, eficientes e inovadoras.
- **Feedback Imediato:** Os alunos podem observar os resultados de suas ações de forma imediata, o que ajuda na compreensão do impacto de suas decisões e dos métodos utilizados.
- **Diversificação das estratégias de Ensino:** A inclusão de experimentos nas aulas diversifica as estratégias de ensino, tornando as aulas mais dinâmicas e engajantes, o que pode aumentar o interesse e a motivação dos alunos.
- **Preparação para o Futuro:** Finalmente, a habilidade de realizar experimentos e trabalhar com dados é fundamental em várias áreas, desde ciências exatas, biológicas e até ciências sociais, preparando os alunos para os desafios do futuro acadêmico e profissional.

O artigo "The impact of a lack of mathematical education on brain development and future attainment", do Institute of Cognitive Neuroscience, Londres, Reino Unido, realizado em 6 de novembro de 2020, realizou um estudo com 129 alunos (87 com idade entre 16 e 18 anos, e 42 com idade entre 13 e 15 anos) sobre o impacto da falta de educação matemática no desenvolvimento do cérebro e no desempenho futuro.

Em países como o Reino Unido e a Índia, adolescentes de 16 anos, como parte de suas disciplinas avançadas, podem optar por não continuar estudando matemática.

O artigo discute o impacto da falta de educação matemática no desenvolvimento do cérebro e no desempenho futuro (a partir de 19 meses), no desempenho dos adolescentes, ressaltando a relação entre educação, neuroquímica e cognição. A pesquisa revela que adolescentes que não têm educação matemática apresentam níveis reduzidos do neurotransmissor ácido γ -aminobutírico (GABA) em uma região do cérebro chamada giro frontal médio (MFG), o que está associado a uma menor capacidade de raciocínio matemático e a uma conectividade cerebral alterada.

Os autores destacam que a decisão de não estudar matemática pode levar a consequências significativas no desempenho financeiro e nas habilidades cognitivas, uma vez que a educação matemática é vinculada a várias métricas de qualidade de vida. A pesquisa foi realizada em duas coortes: uma de estudantes de nível A que decidiram não estudar matemática e outra de estudantes pré-nível A que estavam prestes a tomar essa decisão. Os resultados mostraram que a concentração de GABA no MFG poderia prever se os

alunos estavam ou não estudando matemática, além de prever seu desempenho futuro em raciocínio matemático.

Os achados sugerem que a falta de educação matemática não apenas afeta o desempenho acadêmico imediato, mas também tem implicações duradouras no desenvolvimento neural e nas funções cognitivas. Os autores enfatizam a importância de políticas educacionais que promovam a continuidade do ensino de matemática, considerando suas consequências no desenvolvimento cerebral e nas oportunidades futuras dos indivíduos. O estudo lança luz sobre a intersecção entre biologia e educação, sugerindo que a educação matemática deve ser uma prioridade nas diretrizes curriculares.

É sabido que muitos profissionais qualificados, que se formam no Brasil são atraídos para trabalhar em outros países, em busca de oportunidades melhores em outros locais. Esta "migração", é chamada de "fuga de cérebros".

Segundo a revista Brasil Escola, alguns dos fatores para este fenômeno são:

- Desvalorização profissional e falta de oportunidades de trabalho;
- Redução de investimentos em ciência e tecnologia;
- Questões burocráticas;
- Problemas estruturais, como os elevados índices de violência;
- Ausência de políticas públicas de apoio à formação profissional;
- Recorrentes reformas trabalhistas;
- Perseguição política a pesquisadores brasileiros.

Segundo uma matéria da Agência Brasil, de 30 de abril de 2023, o Brasil pode ter perdido cerca de 6,7 mil cientistas nos últimos anos, que foram continuar suas pesquisas no exterior, segundo estimativas do Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, vinculado ao Ministério de Ciência, Tecnologia e Inovação.

Segundo o presidente do CNPq, Ricardo Galvão, o país forma muito mais cientistas do que consegue empregar hoje. “Nós estamos hoje em dia formando 24 mil doutores por ano, mas as ofertas de emprego, concursos públicos, etc, não chegam a mil.”

Para a presidente da Capes na época, Mercedes Bustamante, “É preciso colocar mais recursos para a recomposição do nosso parque tecnológico e laboratórios, é preciso fazer investimentos na manutenção das atividades de pesquisa, na compra e recuperação de equipamentos. Então é ter profissionais bem remunerados e condições adequadas de trabalho”.

A fuga de cérebros pode ter consequências negativas para o país, como a perda de talentos e a dificuldade de atrair profissionais de volta. No entanto, o Brasil pode reverter esse cenário se conseguir atrair esses profissionais de volta ou fazer com que eles estabeleçam parcerias com universidades brasileiras.

Infelizmente não há uma "receita de bolo" que funcione para todos os professores ou para todas as turmas, mas faz parte das atribuições do professor realizar diagnósticos de como as suas turmas estão em relação aos conhecimentos matemáticos e encontrar as melhores estratégias para mantê-los motivados, proporcionando aulas mais dinâmicas e contextualizadas, oferecendo diferentes instrumentos de avaliação, incentivando os estudantes que possuem defasagem no aprendizado, recuperando sua auto-estima, e oferecer exercícios mais complexos para que os estudantes com mais facilidade possam se aprofundar mais e quem sabe, descobrir novos talentos, que poderão contribuir diretamente com seus conhecimentos, seguindo profissões nas áreas de exatas, diminuindo a "fuga de cérebros" no Brasil.

Já participei de muitas capacitações nos meus 18 anos atuando como professor do ensino básico. Algumas dessas capacitações eram para todos os professores e em outras, apenas para professores de Matemática. Nas capacitações voltadas a todos os professores da escola ou da rede, são mostradas aulas de professores de outras disciplinas que demonstram práticas que deram certo para eles. Mas nunca vemos um vídeo de uma aula de Matemática. Em minha opinião, as capacitações mais proveitosas são as exclusivas para professores de Matemática. Algumas que me marcaram foram a de um professor que trouxe jogos confeccionados por ele e que ele aplicava em sala de aula com seus alunos; e outra em que uma professora apresentava atividades contextualizadas que ela desenvolvia em sala de aula. Ver os professores apresentando essas atividades despertam o nosso lado criativo e nos dá ideias para planejarmos atividades condizentes com a nossa realidade. Desde então, venho buscando diferenciar minhas atividades em sala de aula, utilizando os espaços da escola, buscando alternativas ao ensino tradicional.

Eu espero que este trabalho contribua para inspirar outros professores a criar novas atividades, desenvolver novas estratégias. No início, quando me atrevi a tentar uma atividade diferenciada, fiquei receoso em não dar certo, em ser uma atividade "boba", mas me surpreendi muito com as atividades que deram certo. É lógico que às vezes, o resultado de uma mesma atividade aplicada em outra turma, não tem o mesmo efeito, mas temos que aceitar que nem sempre nossas expectativas serão atendidas. O que importa é não desistir. A cada atividade desenvolvida, ficamos mais experientes e confiantes, tanto no planejamento como na condução da atividade.

APÊNDICE A

Vamos demonstrar a fórmula para se calcular a área de uma parábola.

Vamos supor que a parábola tem concavidade para baixo e que a parábola tenha duas raízes no eixo x . Além disso, vamos pensar que podemos reposicionar a parábola no eixo x sem alterar a área sob a parábola e de forma que a parábola tenha simetria em relação ao eixo y . Neste caso a parábola terá raízes $-d$ e d de forma que sua base mede $2d$. Desta forma esta parábola pode ser expressa por $y = -a(x + d)(x - d) = ad^2 - ax^2$ com $a > 0$. Portanto, seu vértice tem coordenadas $(x, y) = (0, ad^2)$. Note que $-a < 0$ corresponde a concavidade da parábola ser para baixo.

A área que desejamos calcular é a área delimitada pelo segmento de reta sobre o eixo x e entre as duas raízes e pela parábola descrita pela função $f(x) = ad^2 - ax^2$.

Note que pela simetria da parábola com relação ao eixo y a área que desejamos calcular corresponde ao dobro da área sob a curva considerando apenas o intervalo entre 0 e d . Denotaremos a área sob a parábola no intervalo entre 0 e d por A . Portanto, a área desejada é $2A$.

Dividimos o intervalo entre 0 e d em n subintervalos de mesmo comprimento, d/n . Para cada n considere as seguintes somas de Riemann.

A soma S_n é a soma das áreas dos n retângulos cuja base de cada um mede d/n e a altura de cada um $f(0), f(d/n), f(2d/n), \dots, f((n-1)d/n)$. Note que, como a parábola $f(x)$ é decrescente neste trecho de $0 \leq x \leq d$, esses retângulos cobrem a área da parábola neste trecho .

A outra soma, I_n , é a soma das áreas de n retângulos cuja base de cada um mede d/n e a altura de cada um $f(d/n), f(2d/n), \dots, f(nd/n)$. Note que agora, o fato da parábola ser decrescente neste trecho implica que esses retângulos ficam abaixo da parábola.

Assim temos,

$$I_n < A < S_n.$$

Vamos calcular o valor de I_n e de S_n .

$$\begin{aligned} I_n &= f(d/n) d/n + f(2d/n) d/n + \cdots + f(nd/n) d/n \\ &= [f(d/n) + f(2d/n) + \cdots + f(d)] d/n. \end{aligned}$$

Como $f(x) = ad^2 - ax^2$ então

$$\begin{aligned} I_n &= [(ad^2 - a(d/n)^2) + (ad^2 - a(2d/n)^2) + \cdots + (ad^2 - a(nd/n)^2)] d/n \\ &= a \left[nd^2 - \frac{d^2 + (2d)^2 + \cdots + (nd)^2}{n^2} \right] \frac{d}{n} \\ &= a \left[nd^2 - \frac{(1 + 2^2 + \cdots + n^2)d^2}{n^2} \right] \frac{d}{n}. \end{aligned}$$

Usando a fórmula para calcular a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos [20] (STEWART, p. 328)

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

temos que

$$\begin{aligned} I_n &= a \left[nd^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)d^2}{6n^2} \right] \frac{d}{n} \\ &= a \left[1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \right] d^3. \end{aligned}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = a \left[1 - \frac{1}{3} \right] d^3 = \frac{2ad^3}{3}.$$

Da mesma forma, podemos calcular que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2ad^3}{3}.$$

Como $I_n < A < S_n$ e os valores limites de I_n e de S_n são iguais então o valor de A fica determinado. No nosso caso $A = 2ad^3/3$. Como queremos $2A$ temos que a área sob a parábola é $4ad^3/3$. Note que, a base da parábola mede $2d$ e a altura da parábola é ad^2 . Assim, a área da parábola pode ser expressa como $2/3$ da base vezes a altura da parábola.

O valor limite das somas de Riemann de funções definidas em $[0, d]$ quando existe é denotado por

$$\int_0^d f(x) dx.$$

Neste caso com $f(x) = ax^2 - ad^2$ temos que

$$\int_0^d (ad^2 - ax^2)dx = \frac{2ad^3}{3}.$$

Este valor também poderia ser calculado fazendo o uso do Teorema Fundamental do Cálculo.

APÊNDICE B

Aqui, vamos calcular, de forma aproximada, o volume de terra escavada, pelos Métodos dos Volumes e pelo Método das médias ponderadas. Para isso, vamos supor que o monte vai ganhando altura de maneira proporcional, ou seja, cada linha da Figura 41, foi dividida em 15 partes de tamanhos iguais e a altura foi aumentando em intervalos iguais, no papel. Os dados foram tabelados abaixo:

linha	sentido	comprimento (mm)	intervalo (mm)
1	Norte	31,249	2,08
2	Nordeste	91,15413	6,07
3	Leste	31,575	2,1
4	Sudeste	34,22098	2,28
5	Sul	43,408	2,9
6	Sudoeste	29,84131	1,99
7	Oeste	31,869	2,12
8	Noroeste	55,84548	3,7

Tabela 15: Comprimento das linhas e intervalo entre as alturas, em metros, da cota 675

Para compreender os números da tabela acima, medimos o comprimento da linha da cota 675 até a curva de nível 660.

Por exemplo, na linha Norte, ou seja, a linha que liga a cota 675 a coordenada F6, possui 31,249 mm de comprimento. Da curva de nível até a cota sabemos que possui 15 metros de elevação. Então dividimos 31,249 por 15 e obtemos, aproximadamente, 2,08 mm. Vamos tomar essa distância como o intervalo em que aumenta cada metro de altitude, à partir da curva de nível até chegar a cota 675.

Com isso, já é possível, através de uma regra de 3, saber as altitudes das coordenadas C9, D9, E9, G9, H9, I9, F6, F7, F8, F10, F11, F12, F13.

De modo a calcular os valores, aproximados das altitudes nas interseções das linhas e colunas, vamos traçar linhas "saindo" da cota 675, passando pelas coordenadas. Então, medimos os comprimentos das linhas, e, de maneira análoga ao calculado acima, vamos calcular as altitudes das outras coordenadas.

Conforme podemos observar nas duas figuras abaixo, traçamos 23 e 4 linhas (em vermelho), respectivamente, saindo da cota 675, passando pelos pontos de interseção entre linhas e colunas.

B.1 MEDIÇÕES E CÁLCULO DAS COTAS DOS PONTOS

Com o auxílio de um paquímetro, vamos medir o comprimento de cada segmento e dividi-lo em 15 partes, para que possamos determinar de quantos em quantos milímetros, no papel, correspondem a 1 metro, na realidade.

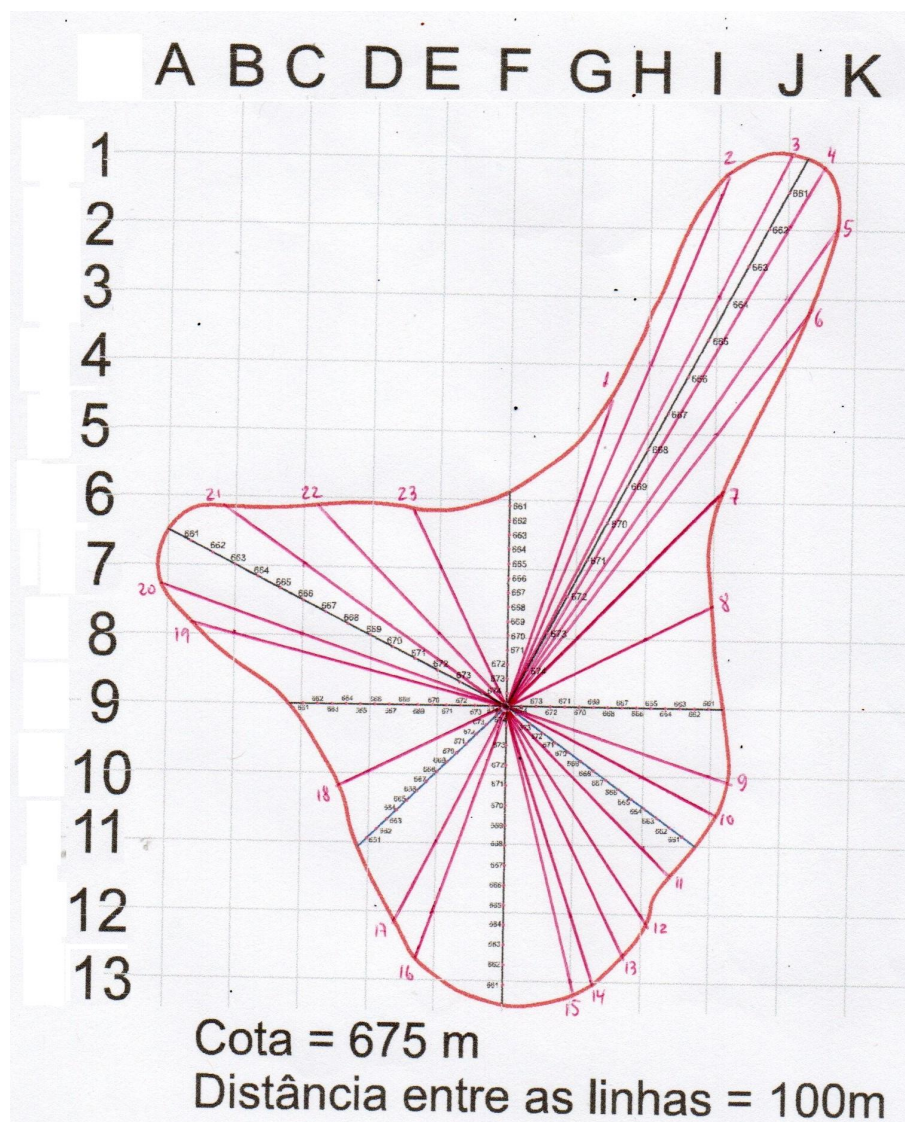


Figura 48: Cota 675 com 23 linhas saindo da cota e passando pelos pontos de interseção entre linhas e colunas

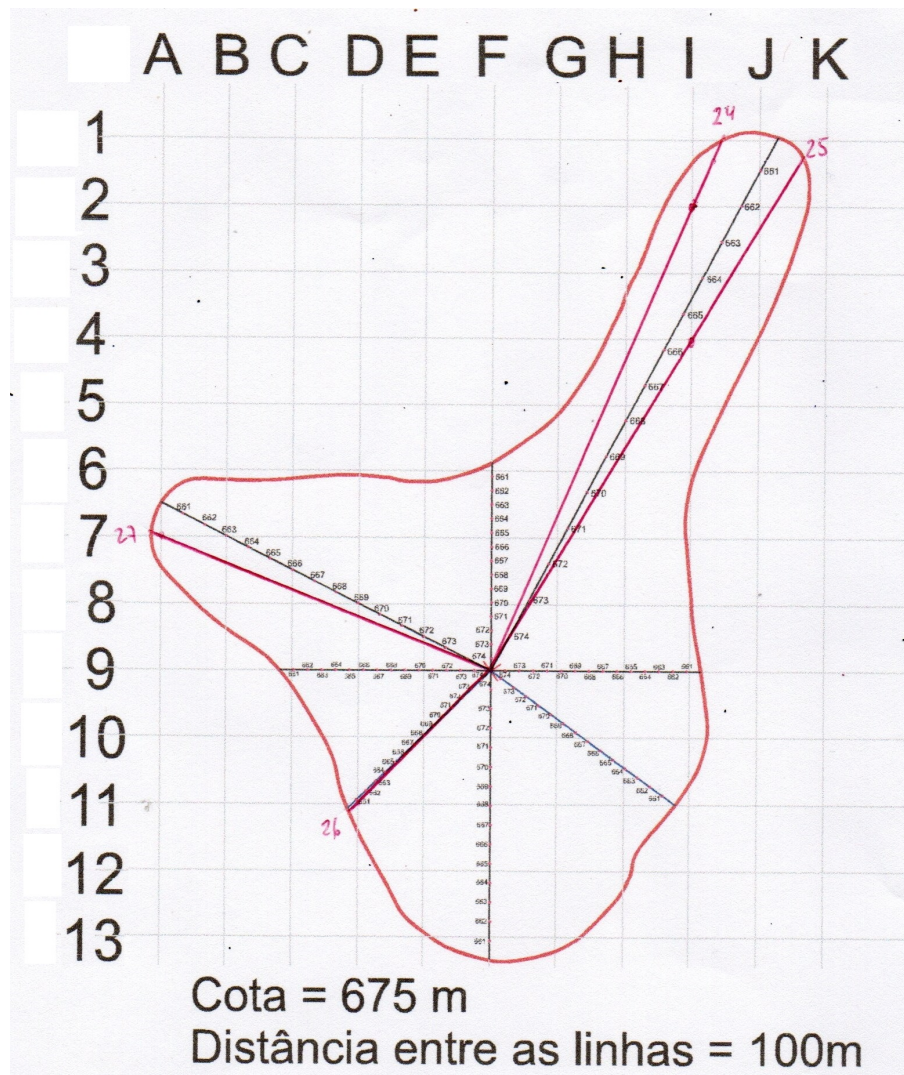


Figura 49: Cota 675 com 4 linhas saindo da cota e passando pelos pontos de interseção entre linhas e colunas

O motivo de descobrir as altitudes nos pontos de interseção entre linhas verticais e colaterais (que chamaremos de pontos), é que vamos utilizar um método chamado Cálculo do volume de corte pelas médias ponderadas, utilizado na Topografia, para calcular, aproximadamente a área e conseqüentemente o volume de terra que será retirada (chamaremos de corte).

Para utilizar o cálculo do volume utilizando as médias ponderadas, é necessário saber a altitude de todos os pontos.

Os dados podem ser lançados no Excel, que calculará mais rapidamente. Após feitos os cálculos, obtemos os seguintes resultados:

linha	comp(m)	1m equivale a	Ponto	dist. da curva (cm)	altitude (m)	Ponto	dist. da curva (cm)	altitude (m)	Ponto	dist. da curva (cm)	altitude (m)	Ponto	dist. da curva (cm)	altitude (m)
1	4,58	0,31	H6	1,54	665,04									
2	8,15	0,54	I4	2,92	665,37									
3	8,77	0,58	H7	6,58	671,25	I5	4,43	667,58	J3	2,29	663,92	K1	0,12	660,21
4	8,85	0,59	K2	1	661,69									
5	8,18	0,55	I6	4,775	668,76	K3	1,19	662,18						
6	6,95	0,46	J5	2,075	664,48									
7	4,26	0,28	H8	2,91	670,25	I7	1,505	665,30	J6	0,145	660,51			
8	3,22	0,21	H8	1,025	664,77									
9	3,31	0,22	J10	0,3	661,36									
10	3,3	0,22	I10	1,15	665,23									
11	3,3	0,22	H10	1,95	668,86	I11	0,55	662,50						
12	3,62	0,24	I12	0,155	660,64									
13	3,85	0,26	H11	1,715	666,68									
14	4,1	0,27	H12	1,04	663,80									
15	4,15	0,28	H13	0,2	660,72									
16	3,75	0,25	F12	0,7	662,80									
17	3,39	0,23	F11	1,23	665,44									
18	2,6	0,17	E10	0,445	662,57									
19	4,57	0,30	C8	0,645	662,12									
20	5,18	0,35	D8	2,13	666,17									
21	4,88	0,33	D7	1,37	664,21									
22	3,91	0,26	E7	1,165	664,47	F8	2,5	669,59						
23	3,06	0,20	F7	0,88	664,31									
24	8,45	0,56	J2	1,06	661,88									
25	8,73	0,58	J4	3,08	665,29									
26	2,89	0,19	E11	0,17	660,88									
27	5,335	0,36	B7	0,155	660,44									

Figura 50: Valores calculados das altitudes dos pontos intersectados pelas linhas 1 a 27

Voltando à Figura 42, podemos observar que ainda faltam descobrir as altitudes dos pontos A8, A6, B8, C8, C4, D8, D2, E8, G9, H11, H1, I13, I7, I1, K2 e K1.

Esses pontos estão fora da região da curva de nível, mas são importantes, pois, apesar de estar fora da região da cota 675, estão muito próximos da linha da cota 660.

Reforçando que as altitudes serão calculadas tomando por hipótese de que o morro aumenta sua altitude de forma gradativa e constante, à medida que se afasta da linha da curva de nível 640 e se aproxima da linha da curva 660.

Para isso, medimos a distância entre as curvas de 640 e 660, ligando a cota 675 aos pontos supramencionados. Tomando como exemplo a altitude no ponto A8, traçamos um segmento de reta alinhando a cota 675 e o ponto A8 até a curva de nível 640, como podemos visualizar na figura abaixo:

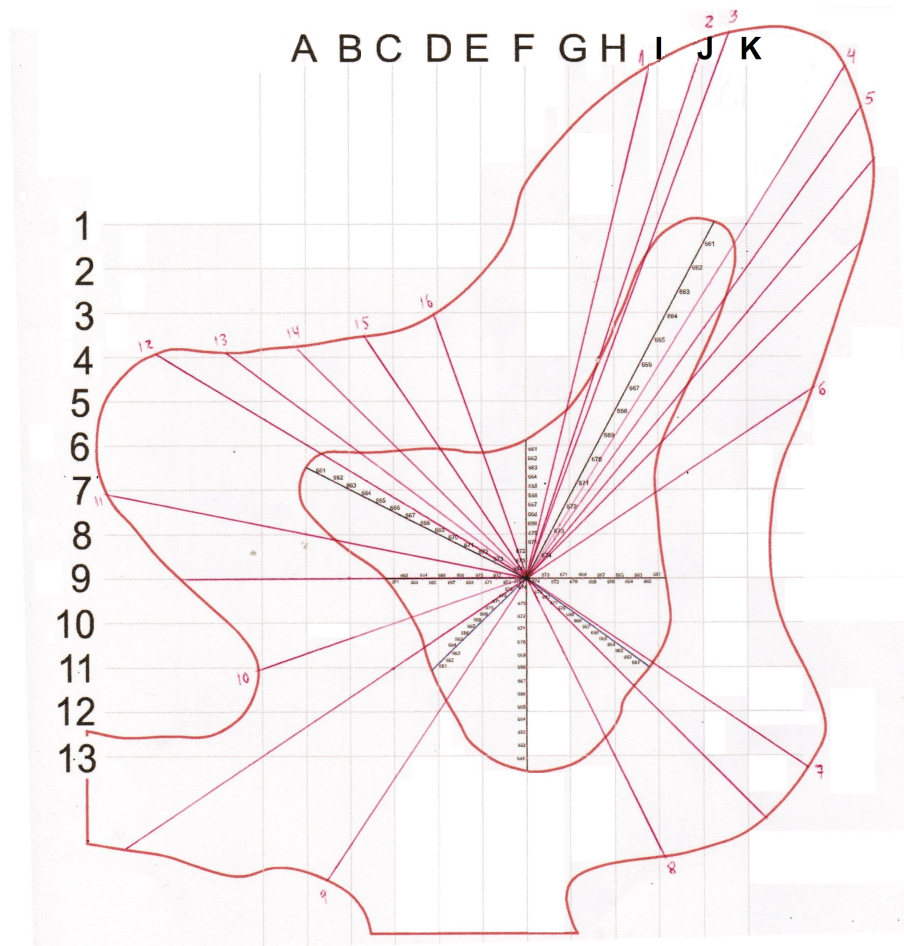


Figura 51: Linhas 1 a 16 traçadas partindo da cota 675 alinhando com pontos entre as regiões das curvas de nível 640 e 660

A distância entre as curvas de nível, medida com o auxílio de um paquímetro, foi de 5,08 cm. A distância de A8 à curva de nível 660, mantendo alinhados o ponto A8 e a cota 675 é de 0,61.

Fazendo uma regra de 3, temos

$$5,08 \text{ cm} - 20 \text{ m}$$

$$0,61 \text{ cm} - x$$

$$5,08 x = 20 \cdot 0,61$$

$$x = \frac{12,2}{5,08} = 2,40$$

Isso quer dizer que o ponto A8 está à 2,40 m de chegar a 660 m. Ou seja, o ponto A8 está a uma altitude de 657,60. Os demais pontos estão na figura abaixo:

linha	comp 640-660 (cm)	dist. da curva 660 (cm)	Ponto	altitude abaixo de 660 (m)	altitude do ponto (m)
1	7,76	0,19	G5	0,49	659,51
2	7,44	1,03	H3	2,77	657,23
3	5,18	0,645	I1	2,49	657,51
4	4,55	0,53	K1	2,33	657,67
5	5,07	0,77	K2	3,04	656,96
6	4,13	0,1	I7	0,48	659,52
7	4,1	0,18	I11	0,88	659,12
8	2,9	0,46	H3	3,17	656,83
9	4,7	0,29	D12	1,23	658,77
10	3,54	0,42	C10	2,37	657,63
11	5,08	0,61	A8	2,40	657,60
12	4,23	0,4	A6	1,89	658,11
13	3,64	0,28	B6	1,54	658,46
14	3,22	0,18	C6	1,12	658,88
15	2,95	0,07	D6	0,47	659,53
16	3,19	0,175	E6	1,10	658,90

Figura 52: Valores calculados das altitudes dos pontos intersectados pelas linhas 1 a 16

Para que tenhamos uma maior região plana, vamos pegar alguns pontos com cota abaixo da altitude de 660 m que estejam próximos da curva de nível, a fim de maximizar a área de plantação. Abaixo, as quadrículas pintadas representam a área a ser planificada e os valores das cotas que utilizaremos em nossos cálculos:

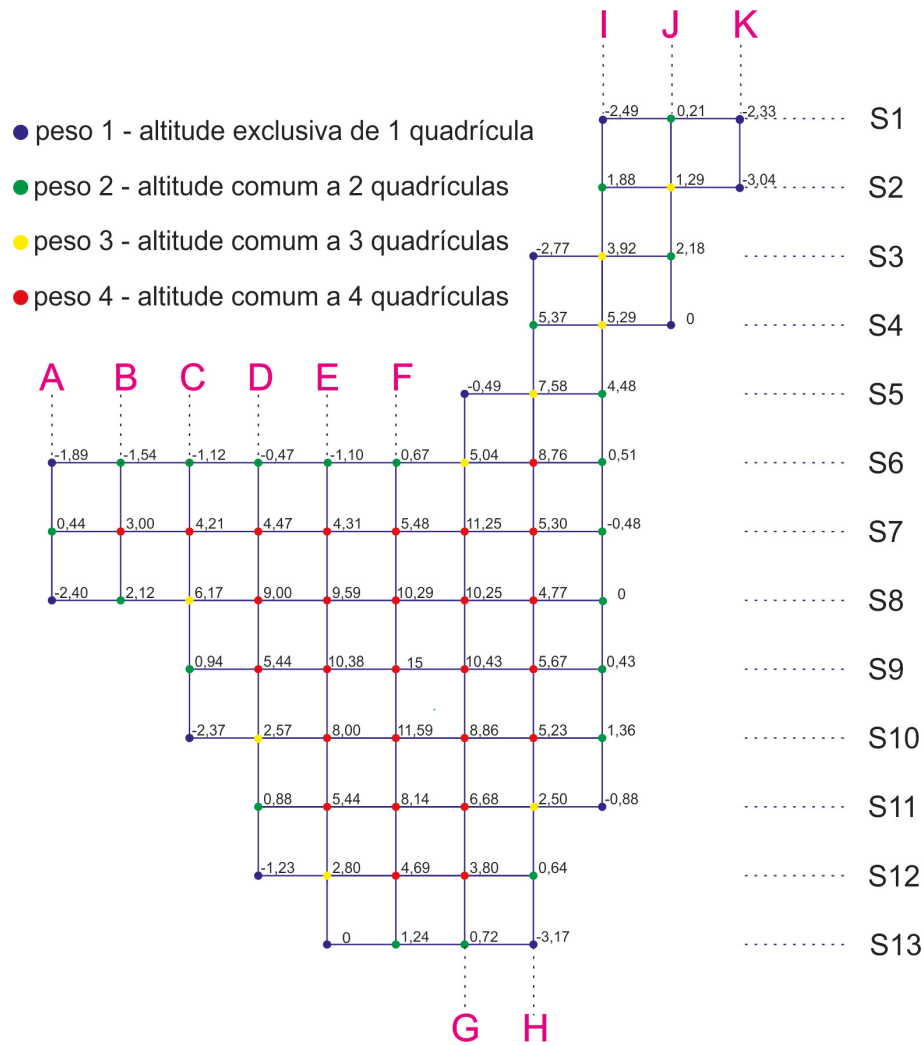


Figura 54: quadrículas com as cotas ajustadas

B.2 CÁLCULO DA ALTURA MÉDIA

A região pintada foi dividida em quadrículas de 100 m x 100 m. Isolando cada quadrícula, elas seriam cubos, caso tivessem a mesma altura. Temos que imaginar cada quadrícula como se fosse uma caixa de papelão de base quadrada e que possui 4 alturas de valores diferentes. Então, vamos calcular uma altura média, que chamaremos de " h_m ". Para calcular o volume de todas estas "caixas", vamos utilizar a fórmula:

$$V = b \cdot h_m, \tag{13}$$

onde V é o volume, b é a área da base e h_m , a altura média. A área da base é $100m \cdot 100m = 10\,000\ m^2$

Para calcular a altura média, temos dois métodos:

- Método dos Volumes; e
- Método das médias ponderadas

B.2.1 Método dos Volumes

Pelo Método dos volumes, podemos deduzir a uma fórmula. Como exemplo, vamos pegar as cotas das colunas F, G, H e I, nas seções 6, 7 e 8. Podemos representar essas cotas numa forma tridimensional, como na figura abaixo:

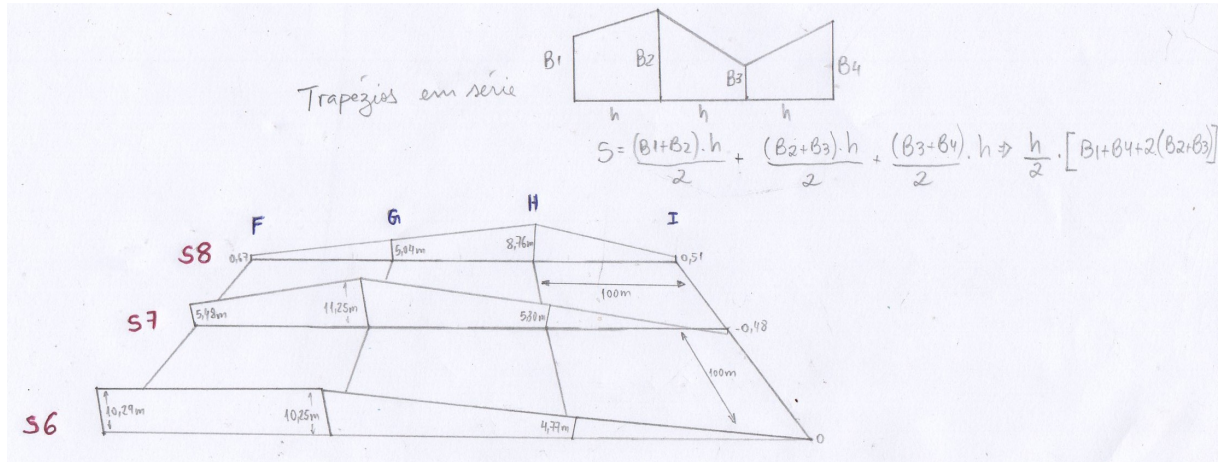


Figura 55: Visualização das seções 6, 7 e 8, nas colunas F, G, H e I

No exemplo da Figura 55, temos as seguintes cotas:

seção	F	G	H	I
S8	0,67	5,04	8,76	0,51
S7	5,48	11,25	5,30	-0,48
S6	10,29	10,25	4,77	0

Tabela 16: Cotas das seções 6, 7 e 8 em relação à curva de nível 660 m

A medida negativa significa que a altitude da cota é inferior à 660 m. Uma alternativa para não termos números negativos seria nivelar pelo menor valor inteiro entre todas as cotas. Mas como vamos fazer um somatório, esse valor não será problema.

O cálculo da área da seção 8 ficará:

$$S_8 = \frac{100}{2} \cdot [0,67 + 0,51 + 2 \cdot (5,04 + 8,76)] = 1439m^2$$

O cálculo da área da seção 7 ficará:

$$S_7 = \frac{100}{2} \cdot [5,48 - 0,48 + 2 \cdot (11,25 + 5,30)] = 1905m^2$$

O cálculo da área da seção 6 ficará:

$$S_6 = \frac{100}{2} \cdot [10, 29 + 0 + 2 \cdot (10, 25 + 4, 77)] = 2016,5m^2$$

Conhecidas as áreas das seções, calcula-se o volume do solo envolvido. Entre as seções 6 e 7, há uma distância de 100 metros. Devemos então multiplicar as áreas das seções por 100. Mas qual área usaremos na multiplicação? Usaremos a média entre as áreas.

Por exemplo: Entre as seções 6 e 7, o volume será:

$$V_{6-7} = \frac{100 \cdot (2016,5 + 1905)}{2} = 196\,075m^3$$

Entre as seções 7 e 78 o volume será:

$$V_{6-7} = \frac{100 \cdot (1905 + 1439)}{2} = 167\,200m^3$$

O volume dessa região será:

$$V_t = 19\,6075 + 167\,200 = 363\,275m^3$$

Nosso objetivo inicial era calcular a altura média (h_m). A altura média nessa porção do terreno será o volume total dividido pela área total, que é de $60\,000m^2$, conforme podemos visualizar na Figura 55:

$$h_m = \frac{363\,275}{60\,000} = 6,05m$$

Somando-se à altitude de 660 m, temos que a altura média nessa porção do terreno é de $666,05m^2$.

B.2.2 Método das médias ponderadas

Pelo Método das médias ponderadas, a altura média (h_m) será a razão entre o somatório das cotas ponderadas pela quantidade de cotas, lembrando que algumas cotas aparecem mais de uma vez.

Por este método, devemos observar que algumas cotas são exclusivas de uma quadrícula e outras são comuns a 2, 3 ou 4 quadrículas. Para não utilizar os mesmos valores, atribuímos um peso às cotas, de acordo com a quantidade de quadrículas em que elas aparecem.

Na Figura 54, as cotas exclusivas de uma quadrícula e que terão peso 1, estão pintadas na cor azul; as cotas que são comuns à 2 quadrículas e que terão peso 2, estão pintadas na

cor verde; as cotas que são comuns à 3 quadrículas e que terão peso 3, estão pintadas na cor amarela; e as cotas que são comuns à 4 quadrículas e que terão peso 4, estão pintadas na cor vermelha.

Calculando o somatório das cotas: Cotas que aparecem 2 vezes: $660,67 + 660,51 + 659,52 + 660 = 1\,980,70 \cdot 2 = 5\,281,40$

Cotas que aparecem 3 vezes: $665,04 \cdot 3 = 1\,995,12$

Cotas que aparecem 4 vezes: $668,76 + 665,48 + 671,25 + 665,30 + 670,29 + 670,25 + 664,77 = 4\,676,02 \cdot 4 = 18\,704,40$

Somando os 3 valores encontrados, temos: $5\,281,40 + 1\,995,12 + 18\,704,40 = 25\,980,92$

Há 4 cotas de peso 2. Portanto, elas aparecem 8 vezes. Há apenas 1 cota de peso 3. Portanto ela aparece 3 vezes; e Há 7 cotas de peso 4. Portanto, elas aparecem 28 vezes. No total, as cotas aparecem $8 + 3 + 28 = 39$ vezes.

Portanto, a altura média será calculada por

$$h_m = \frac{25\,980,920}{39} = 666,18m$$

Para o nosso exercício, vamos calcular os volumes das seções 1 a 13, utilizando o Método das médias ponderadas.

Observando a Figura 54, vamos separar as cotas de acordo com o seu peso.

Calculando o somatório das cotas:

Cotas que aparecem 1 vez: $657,51 + 657,67 + 656,96 + 657,23 + 660 + 659,51 + 658,11 + 657,60 + 657,63 + 659,12 + 658,77 + 660 + 656,83 = 8\,556,94$

Cotas que aparecem 2 vezes: $660,21 + 661,88 + 662,18 + 665,37 + 664,48 + 658,46 + 658,88 + 659,53 + 658,9 + 660,67 + 660,51 + 660,44 + 659,52 + 662,12 + 660 + 660,94 + 660,43 + 661,36 + 660,88 + 660,64 + 661,24 + 660,72 = 14\,539,36 \cdot 2 = 29\,078,72$

Cotas que aparecem 3 vezes: $661,29 + 663,92 + 660,43 + 661,36 + 660,88 + 660,64 + 661,24 + 660,72 = 5\,977,16 \cdot 3 = 17\,931,48$

Cotas que aparecem 4 vezes: $663 + 664,21 + 664,47 + 664,31 + 665,48 + 671,25 + 668,76 + 665,3 + 669 + 669,59 + 670,29 + 670,25 + 664,77 + 665,44 + 670,38 + 675 + 670,43 + 665,67 + 668 + 671,59 + 668,86 + 665,23 + 665,44 + 668,14 + 666,68 + 664,69 + 663,8 = 18\,020,03 \cdot 4 = 72\,080,12$

Somando os 4 valores, teremos: $8\,556,94 + 29\,078,72 + 17\,931,48 + 72\,080,12 = 127\,647,26$

Há 13 cotas de peso 1. Portanto, elas aparecem 13 vezes; Há 22 cotas de peso 2. Portanto, elas aparecem 44 vezes; Há 9 cotas de peso 3. Portanto elas aparecem 27 vezes; e Há 27 cotas de peso 4. Portanto, elas aparecem 108 vezes. No total, as cotas aparecem $13 + 44 + 27 + 108 = 192$ vezes.

Portanto, a altura média será calculada por

$$h_m = \frac{127\,647,26}{192} = 664,83m$$

Como nossa região é composta por 48 quadrículas de $10\,000m^2$ cada, a área da base será igual a $480\,000m^2$

Logo, o volume será calculado pela fórmula:

$$V = h_m \cdot b = 664,83 \cdot 480\,000 = 319\,118\,400m^3$$

B.3 REGIÕES FORA DA MALHA QUADRICULADA

Não podemos deixar de notar que faltou calcular os volumes das áreas que não foram "cortadas". Para uma melhor visualização, elas foram pintadas de amarelo, como pode ser visto na figura abaixo:

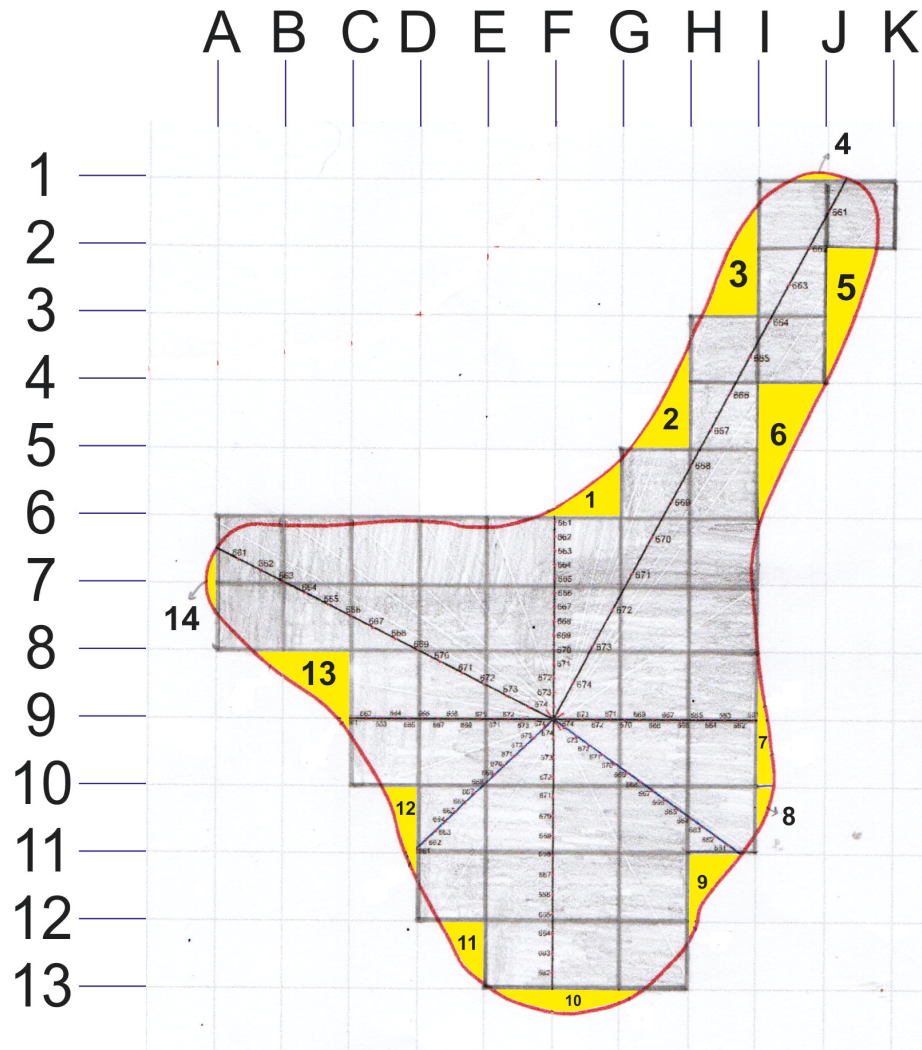


Figura 56: Áreas não calculadas por estarem fora das quadrículas

Como podemos observar na Figura 56, são 14 regiões em amarelo, numeradas de 1 a 14. Dentre essas regiões, temos:

- 11 regiões triangulares (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 e 13; e
- 3 regiões em forma de parábola (4, 10 e 14)

Em uma situação prática, essa terra poderia ser cortada e utilizada para aterro, para que não fiquem "degraus" nos locais onde as cotas estavam abaixo de 660 m e que foram niveladas junto às regiões pintadas com grafite.

Mas, se quisermos calcular, precisamos fazer o mesmo processo utilizado para as cotas que intersectam a curva de nível com a malha quadriculada.

Nas regiões triangulares, os triângulos são retos e precisamos calcular a cota do vértice que forma o ângulo reto, bem como os comprimentos dos catetos.

Nas regiões com formato semelhantes à uma parábola, precisamos saber a cota da altura e a distância da malha até a altura.

No caso do comprimento dos catetos das regiões triangulares e das bases das parábolas, mediremos com o auxílio de uma régua e lançaremos os dados em uma planilha do Excel.

Abaixo, temos as medidas obtidas e lançadas no Excel:

Região	linha	dist até a curva (cm)	comp b carta (cm)	comp h carta (cm)	dist. até o vértice (cm)	comp b real (m)	comp h real (m)	Área (m ²)	cota do vértice (m)	cota h (m)
1	1	4,63	1,23	0,845	3,035	123	84,5	5196,75	665,17	
2	3	8,775	0,9	1,56	4,33	90	156	7020,00	667,60	
3	3	8,775	0,88	1,64	6,47	88	164	7216,00	663,94	
4	2	8,72	0,93	0,155	8,59	93	15,5	961,00		660,22
5	4	8,79	0,76	2,00	7,81	76	200	7600,00	661,67	
6	5	8,73	1	2,09	5,74	100	209	10450,00	665,14	
7	6	3,34	0,33	1,955	3,06	33	195,5	3225,75	661,26	
8	6	3,34	0,33	1,270	3,06	33	127	2095,50	661,26	
9	7	3,35	0,82	0,71	2,75	82	71	2911,00	662,69	
10	8	4,23	2,34	0,38	3,88	234	38	5928,00		661,24
11	9	3,81	0,7	0,95	3,04	70	95	3325,00	663,03	
12	10	2,63	0,56	1,40	2,13	56	140	3920,00	662,85	
13	11	5,21	1,46	1,25	2,9	146	125	9125,00	666,65	
14	12	5,35	1,015	0,215	5,18	101,5	21,5	1454,83		660,48

Figura 58: Dados compilados das 14 regiões em amarelo

Observando a Figura 58, notamos que há 14 regiões que não haviam sido calculados os volumes.

Foram traçados 12 segmentos de reta, que foram numerados, conforme a Figura 57, ligando a cota 675 aos vértices das regiões triangulares e às alturas relativas, das regiões em forma de parábola.

Nas 4 colunas em verde, estão as medidas obtidas na carta, com o auxílio de um paquímetro.

Nas 5 colunas em laranja, calculamos, no próprio Excel, os comprimentos de base e altura das 14 regiões, a área de cada região e, em seguida, as cotas dos vértices (nas regiões triangulares) e das alturas (nas regiões em forma de parábola).

Para esses cálculos das cotas realizamos uma regra de 3. Por exemplo, na região 1, a distância da cota 675 até a curva de nível, passando pelo vértice, obtemos 4,63 cm. A distância da cota 675 até o vértice, nesse mesmo segmento de reta, foi de 3,035 cm. Considerando que o acidente geográfico tem formatos regulares e possui inclinação linear, foi feita o cálculo da cota, utilizando a regra de 3:

$$\frac{4,63}{3,035} = \frac{15}{x}$$

$$x = \frac{15 \cdot 3,035}{4,63} = 9,85$$

Utilizamos o número 15 nos cálculos, por conta da diferença entre a curva de nível (660 m) e a cota mais alta (675 m). O resultado foi acrescido à 660, resultando na cota do vértice da região 1 a altitude de 665,17 m.

De posse de todos esses dados, só falta calcular o volume. Para efeito de ilustração, na figura abaixo, podemos visualizar como ficará a representação tridimensional da região 2, compreendida entre as colunas G e H e linhas 9 e 11:

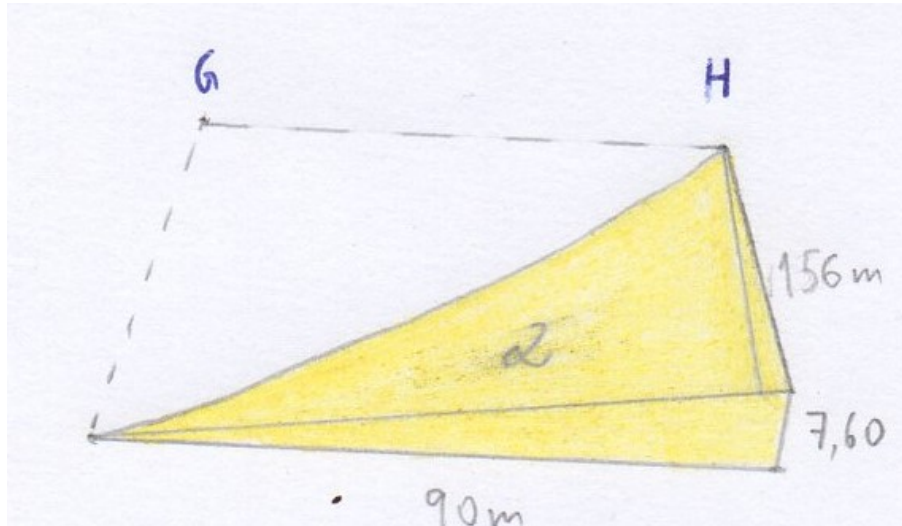


Figura 59: Visão tridimensional da região 2

Para o cálculo do volume de cada uma das 14 regiões, consideramos que as regiões são regulares. Na figura abaixo, estão os resultados obtidos dos volumes das regiões que não foram calculadas no primeiro momento, por não serem retangulares.

Região	linha	comp b real (m)	comp h real (m)	Área (m ²)	cota do vértice (m)	cota h (m)	Vol mín (m ³)	Vol máx (m ³)	Volume aproximado (m ³)
1	1	123	84,5	5196,75	665,17		5196,75	26853,62	16025,18
2	3	90	156	7020,00	667,60		7020,00	53340	30180,00
3	3	88	164	7216,00	663,94		7216,00	28432,27	17824,14
4	2	93	15,5	961,00		660,22	961,00	1172,42	1066,71
5	4	76	200	7600,00	661,67		7600,00	12709,9	10154,95
6	5	100	209	10450,00	665,14		10450,00	53686,43	32068,21
7	6	33	195,5	3225,75	661,26		3225,75	4056,332	3641,04
8	6	33	127	2095,50	661,26		2095,50	2635,06	2365,28
9	7	82	71	2911,00	662,69		2911,00	7820,597	5365,80
10	8	234	38	5928,00		661,24	5928,00	7357,447	6642,72
11	9	70	95	3325,00	663,03		3325,00	10079,72	6702,36
12	10	56	140	3920,00	662,85		3920,00	11178,71	7549,35
13	11	146	125	9125,00	666,65		9125,00	60687,38	34906,19
14	12	101,5	21,5	1454,83		660,48	1454,83	2153,153	1803,99

Volume total = 176296

Figura 60: Planilha com o cálculo dos volumes das regiões em amarelo

O método utilizado aqui foi o seguinte: Calculamos o volume mínimo, que é como se a região estivesse totalmente plana. Neste caso, o volume é igual ao valor da própria área. Depois calculamos o volume máximo, considerando que a região inteira tivesse a altura da cota máxima, como se fossem prismas. O volume aproximado foi a média desses dois volumes.

Portanto, o volume total dessas 14 regiões foi de $176\,296\,m^3$ de terra.

Somados ao volume de $319\,118\,150\,m^3$, já calculado, obtemos um volume total de $319\,294\,446\,m^3$

B.4 CÁLCULO DO VOLUME CONSIDERANDO O FATOR DE EMPOLAMENTO

Vamos utilizar como fator de empolamento 20%, ou seja, para cada $5m^3$ retirados, ocupará um volume de $6m^3$ de terra no caminhão.

Teremos que considerar quantos caminhões serão necessários para transportar

$$319\,294\,446.1,2 = 383\,153\,335m^3$$

Considerando que cada caminhão tenha capacidade para transportar $15m^3$, serão necessários

$$\frac{383\,153\,335}{15} = 25\,543\,555 \text{ caminhões}$$

O valor gasto para cada viagem do caminhão é de R\$ 300,00. Portanto, o valor para os caminhões será de $300 \cdot 25\,543\,555 = \text{R\$ } 7\,663\,066\,500$, ou seja, 7 bilhões, seiscentos e sessenta e três milhões, sessenta e seis mil e quinhentos reais.

Pela quantidade de caminhões, a operação se mostra inviável. O valor é menor do que foi calculado pelas médias dos volumes, mas ainda assim, é absurdo.

APÊNCIDE C

Aqui vamos resolver o exercício do volume do fígado, dividindo-o em cones e troncos de cones.

Como o fígado foi seccionado em 10 partes, podemos ilustrar numa perspectiva em 3 dimensões, obtendo 2 cones nas pontas e 8 troncos de cones, onde suas bases serão os diâmetros das seções próximas.

Podemos agora, calcular os volumes de cada um desses 10 sólidos. O volume, aproximado, do fígado será a soma dos volumes dos 10 sólidos.

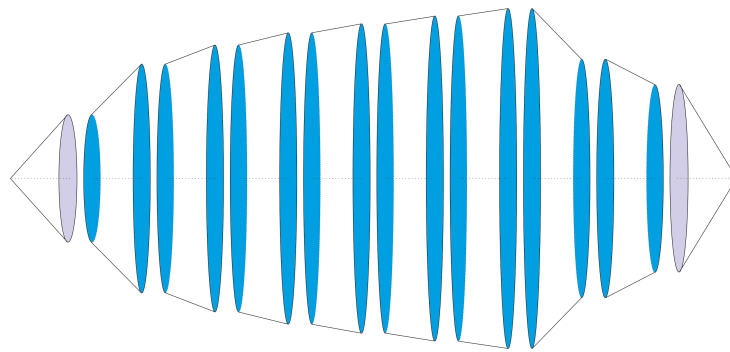


Figura 61: Ilustração do fígado fatiado a cada 1,5 cm em visão 3D

Fatiando o fígado em 10 pedaços, verificamos que obtemos 10 (dez) sólidos, dos quais 2 (dois) são cones e 8 (oito) são troncos de cones. As alturas dos 10 (dez) sólidos serão iguais a 1,5 cm, que é o espaçamento em que as áreas foram obtidas na tomografia.

Chamaremos as áreas das bases dos cones de A_1 e A_9 e as áreas das bases dos troncos de $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$.

C.1 ORGANIZANDO OS DADOS

Teremos então, os seguintes sólidos:

- um cone S_1 , com a área da base = 18 cm^2 e altura = 1,5cm;
- um tronco de cone S_2 , com as áreas das bases = 18 cm^2 e 58 cm^2 ;
- um tronco de cone S_3 , com as áreas das bases = 58 cm^2 e 79 cm^2 ;

- um tronco de cone S_4 , com as áreas das bases = 79 cm^2 e 94 cm^2 ;
- um tronco de cone S_5 , com as áreas das bases = 94 cm^2 e 106 cm^2 ;
- um tronco de cone S_6 , com as áreas das bases = 106 cm^2 e 117 cm^2 ;
- um tronco de cone S_7 , com as áreas das bases = 117 cm^2 e 128 cm^2 ;
- um tronco de cone S_8 , com as áreas das bases = 128 cm^2 e 63 cm^2 ;
- um tronco de cone S_9 , com as áreas das bases = 63 cm^2 e 39 cm^2 ; e
- um cone S_{10} , com a área da base = 39 cm^2 e altura = $1,5 \text{ cm}$.

C.2 FÓRMULAS PARA O CÁLCULO DO VOLUME DO CONE E TRONCO

As fórmulas matemáticas para se calcular os volumes de um cone e um tronco são:

$$V_{\text{cone}} = \frac{(\pi \cdot r^2 \cdot h)}{3}, \quad (14)$$

onde $\pi \cdot r^2$ é a área da base e h , é a medida da altura. Assim, podemos reescrever a fórmula do volume do cone, assim:

$$V_{\text{cone}} = \frac{\text{Área da base} \cdot h}{3} \quad (15)$$

e

$$V_{\text{tronco de cone}} = \frac{(\pi \cdot h)}{3} \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r), \quad (16)$$

onde r é o raio da base menor e R o raio da base maior. Para efeito de cálculos, não nos prenderemos a identificar exatamente quais são os raios maior ou menor, pois a ordem dos fatores e /ou das parcelas não irão interferir nos resultados finais.

Se fôssemos aplicar as fórmulas dos volumes de cones e troncos de cone, os volumes de S_1 e S_{10} seriam:

$$V_{S_1} = \frac{18 \cdot 1,5}{3} = 9 \text{ cm}^3$$

$$V_{S_{10}} = \frac{39 \cdot 1,5}{3} = 19,5 \text{ cm}^3$$

Para calcular os volumes dos troncos de cone $S_2, S_3, \dots, S_8 e S_9$, precisamos saber o valor aproximado dos raios: Como as bases são circulares e sabemos os valores das áreas, podemos calcular os valores dos raios dividindo o valor da área por π e depois calculando a raiz quadrada. Assim:

$$\text{Área}_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2 \quad (17)$$

Isolando r^2 :

$$r^2 = \frac{\text{Área}_{\text{círculo}}}{\pi} \quad (18)$$

Portanto, o valor do raio r será:

$$r = \sqrt{\frac{\text{Área}_{\text{círculo}}}{\pi}} \quad (19)$$

É importante salientar que, como o sólido (fígado) foi fatiado, teremos áreas de dois sólidos em comum e, portanto, raios em comum. Por exemplo, a área da base de S_1 é a mesma área da base menor de S_2 ; a área da base maior de S_2 é a mesma área da base menor de S_3 e assim por diante.

c.2.1 Cálculos dos raios

Logo, os valores dos nove raios podem ser calculados fazendo:

$$r_1 = \sqrt{\frac{\text{Área}_{\text{círculo}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{18}{\pi}} \Rightarrow r_1 = r_2 = 2,3936cm;$$

$$R_2 = r_3 = \sqrt{\frac{\text{Área}_{\text{círculo}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{58}{\pi}} \Rightarrow R_2 = r_3 = 4,2967cm;$$

$$R_3 = r_4 = \sqrt{\frac{\text{Área}_{\text{círculo}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{79}{\pi}} \Rightarrow R_3 = r_4 = 5,0146cm;$$

$$R_4 = r_5 = \sqrt{\frac{\text{Área}_{\text{círculo}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{94}{\pi}} \Rightarrow R_4 = r_5 = 5,4700cm;$$

$$R_5 = r_6 = \sqrt{\frac{\text{Área}_{\text{círculo}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{106}{\pi}} \Rightarrow R_5 = r_6 = 5,8087cm;$$

$$R_6 = r_7 = \sqrt{\frac{\hat{Área}_{círculo}}{\pi}} = \sqrt{\frac{117}{\pi}} \Rightarrow R_6 = r_7 = 6,1026cm;$$

$$R_7 = r_8 = \sqrt{\frac{\hat{Área}_{círculo}}{\pi}} = \sqrt{\frac{128}{\pi}} \Rightarrow R_7 = r_8 = 6,3831cm;$$

$$R_8 = r_9 = \sqrt{\frac{\hat{Área}_{círculo}}{\pi}} = \sqrt{\frac{63}{\pi}} \Rightarrow R_8 = r_9 = 4,4781cm; e$$

$$R_9 = r_{10} = \sqrt{\frac{\hat{Área}_{círculo}}{\pi}} = \sqrt{\frac{39}{\pi}} \Rightarrow R_9 = r_{10} = 3,5230cm.$$

C.2.2 Cálculo dos volumes dos cones e troncos

Finalmente, os volumes dos troncos de cones seriam:

$$V_{S_2} = \frac{\pi \cdot 1,5 \cdot (4,2967^2 + 2,3936^2 + 4,2967 \cdot 2,3936)}{3} \Rightarrow V_{S_2} = 54,165cm^3$$

$$V_{S_3} = \frac{\pi \cdot 1,5 \cdot (4,2967^2 + 5,0196^2 + 4,2967 \cdot 5,0196)}{3} \Rightarrow V_{S_3} = 102,359cm^3$$

$$V_{S_4} = \frac{\pi \cdot 1,5 \cdot (5,0196^2 + 5,47^2 + 5,0196 \cdot 5,47)}{3} \Rightarrow V_{S_4} = 129,596cm^3$$

$$V_{S_5} = \frac{\pi \cdot 1,5 \cdot (5,47^2 + 5,8087^2 + 5,47 \cdot 5,8087)}{3} \Rightarrow V_{S_5} = 149,918cm^3$$

$$V_{S_6} = \frac{\pi \cdot 1,5 \cdot (5,8087^2 + 6,1026^2 + 5,8087 \cdot 6,1026)}{3} \Rightarrow V_{S_6} = 167,201cm^3$$

$$V_{S_7} = \frac{\pi \cdot 1,5 \cdot (6,1026^2 + 6,3831^2 + 6,1026 \cdot 6,3831)}{3} \Rightarrow V_{S_7} = 183,696cm^3$$

$$V_{S_8} = \frac{\pi \cdot 1,5 \cdot (6,3831^2 + 4,4781^2 + 6,3831 \cdot 4,4781)}{3} \Rightarrow V_{S_8} = 140,395cm^3$$

$$V_{S_9} = \frac{\pi \cdot 1,5 \cdot (4,4781^2 + 3,523^2 + 4,4781 \cdot 3,523)}{3} \Rightarrow V_{S_9} = 75,775cm^3$$

O volume total seria então, a soma dos volumes dessas 10 fatias, ou seja:

$$V_{fígado} = V_{S_1} + V_{S_2} + V_{S_3} + V_{S_4} + V_{S_5} + V_{S_6} + V_{S_7} + V_{S_8} + V_{S_9} + V_{S_{10}}$$

$$V_{fígado} = 9 + 54,165 + 102,359 + 129,596 + 149,918 + 167,201 + 183,696 + 140,395 + 75,775 + 19,5$$

Finalmente, o volume do fígado, será:

$$V_{fígado} = 1031,605 cm^3$$

Este valor ficou bem próximo ao volume do fígado proposto pelo autor do livro, que foi de $1100 cm^3$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Ahmadi, M.N.; Rezende, L.F.M.; Ferrari, G.; et al. **Do the associations of daily steps with mortality and incident cardiovascular disease differ by sedentary time levels? A device-based cohort study.** *British Journal of Sports Medicine*, 2023. Disponível em: <https://bjsm.bmj.com/content/58/5/261>. Acesso em: 10 nov. 2024.
- [2] Andrade, Manuela de A.; Pereira, Adriana N. **Fundamentos de topografia.** Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2017. 216 p.
- [3] Brasil - Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2017.
- [4] Brasil - Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998. 148 p. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos>.
- [5] Wikipédia. Carta Topográfica. In: Flórida: Wikimedia Foundation, 2024. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Carta_topogr%C3%A1fica&oldid=68249651. Acesso em: 10 jan. 2025.
- [6] Delgado, J.; Frensel, K.; Crissaff, L. **Geometria Analítica.** Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- [7] Dourado, Carina. **Fuga de cérebros, a diáspora de cientistas brasileiros.** Agência Brasil. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2023-04/fuga-de-cerebros-diaspora-de-cientistas-brasileiros#:~:text=0%20Brasil%20pode%20ter%20perdido,astr%C3%B4nomos%20e%20est%C3%A3o%20no%20Brasil.%E2%80%9D>. Acesso em: 05 jan. 2025.
- [8] Engineering Brasil. **O que é discretização e quais seus principais benefícios?** ENG, 2024. Disponível em: <https://blog.engdb.com.br/discretizacao-o-que-e/>. Acesso em: 21 jun. 2024.
- [9] Espartel, Lélis. **Curso de Topografia.** 9. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1987.
- [10] FIBA. **Regras Oficiais FIBA 2020.** FIBA, 2024. Disponível em: <https://www.cbb.com.br/wp-content/uploads/Regras-Oficiais-de-Basketball-FIBA-2020-Traduzida-para-Portugues.pdf>. Acesso em: 27 fev. 2024.

- [11] IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Carta topográfica do município de Pindamonhangaba**. 2. impressão. 1. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 1988. Escala 1:50.000.
- [12] Kumon Brasil. **Matemática é difícil? Confira esse e outros mitos!** Kumon Brasil, 2023. Disponível em: <https://www.kumon.com.br/blog/matematica/matematica-e-dificil/#:~:text=Outro%20fator%20que%20contribui%20para,bem%20algum%20dos%20conceitos%20anteriores..> Acesso em: 07 jan. 2025.
- [13] Neves, U. **Caminhada: quantos passos por dia já têm impacto na saúde?** *Globo*, 2024. Disponível em: <https://ge.globo.com/eu-atleta/treinios/guia/2024/01/06/c-caminhada-quantos-passos-por-dia-ja-tem-impacto-na-saude.ghtml>. Acesso em: 10 nov. 2024.
- [14] Perfortex. **Tinta para quadra Poliesportiva**. Perfortex, 2024. Disponível em: <https://perfortex.com.br/produtos/tinta-para-quadra-poliesportiva#:~:text=A%20melhor%20Tinta%20para%20quadra,misturada%20a%20um%20agente%20catalisador..> Acesso em: 26 set. 2024.
- [15] Polyesportiva. **Saiba quais são as medidas oficiais de 9 tipos de quadras poliesportivas**. Polyesportiva, 2024. Disponível em: <https://polyesportiva.com.br/blog/51/saiba-quais-sao-as-medidas-oficiais-de-9-tipos-de-quadras-esportivas.html>. Acesso em: 27 fev. 2024.
- [16] Profmat. **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat**. Disponível em: <https://profmatsbm.org.br/regimento/>. Acesso em: 08 jan. 2025.
- [17] Ristau, R. Foto da quadra do San Antonio Spurs, tirada em 09 set. 23 por Rance Ristau. *News4SA*, 2024. Disponível em: <https://news4sanantonio.com/sports/spurs-zone/gallery/spurs-new-uniforms?photo=5>. Acesso em: 29 set. 2024.
- [18] NICHELE, Lojas. Disponível em: <https://www.nichele.com.br/cavadeira-articulada-tucano-12x1-50m-bon-pand/p>. Acesso em 10 jan. 2025.
- [19] Slaski, T. **Amplie e facilite os seus desenhos com a técnica do quadriculado**. Thais Slaski, 2024. Disponível em: <https://thaislaski.com.br/amplie-e-facilite-os-seus-desenhos-com-a-tecnica-do-quadriculado>. Acesso em: 20 jun. 2024.
- [20] Stewart, James. **Cálculo: Volume 1**. 6ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

- [21] **TalkAI Chat GPT**. Disponível em: <https://talkai.info/pt/chat/>. Acesso em: 20 jun. 2024.
- [22] Werneck, Marcelo Martins. **Como funcionam os radares de trânsito?** *Ciência Hoje*. Disponível em: <https://cienciahoje.org.br/artigo/como-funcionam-os-radares-de-transito/#:~:text=Trata%2Dse%20de%20uma%20bobina,aponta%20a%20velocidade%20do%20ve%C3%9Cculo..> Acesso em: 28 jun. 2024.
- [23] Zacharopoulos, G.; Sella, F.; Kadosh, R.C. **The impact of a lack of mathematical education on brain development and future attainment**. *PNAS*, 2021. Disponível em: <https://www.pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.2013155118>. Acesso em: 11 nov. 2024.