
Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia



**Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT**

Simetrias e Padrões no Ensino Básico:
*Uma proposta didática inspirada no livro “The
Symmetries of Things”*

Marina Mendes Silva

Orientador(a): Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

São José dos Campos

2025



PROFMAT

Título: *Simetrias e Padrões no Ensino Básico*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos

2025

Silva, Marina Mendes

Simetrias e Padrões no Ensino Básico, Marina Mendes Silva –
São José dos Campos, 2025.
XXIX, 38f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Symmetries and Patterns in High School: A Didactic Proposal
Inspired by the Book “The Symmetries of Things”

1. Simetria. 2. Padrões geométricos. 3. Orbifold. 4. Característica de Euler. 5. Educação básica.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:

Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação:

Prof.^{fa}. Dr.^a. Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita

Marina Mendes Silva

Simetrias e Padrões no Ensino Básico

Presidente da banca: Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

Banca examinadora:

Prof. Dr. Cleber Fernando Colle

Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

Prof^a. Dr^a. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

Data da Defesa: 26 de setembro de 2025

“Quando a mulher negra se movimenta, toda a estrutura da sociedade se movimenta com ela.”

Angela Davis

AGRADECIMENTOS

Ao olhar para essa caminhada, vejo que ela nunca foi feita sozinha. Cada conversa, cada aula assistida e cada olhar de incentivo dos colegas e professores deixaram marcas profundas. A todos que estiveram por perto, aos meus colegas de turma e professores, meu carinho e minha gratidão. Vocês ajudaram a construir esse percurso.

Mas há três mulheres que moram nesse trabalho de um jeito especial. A elas, dedico com todo meu coração.

A primeira é minha mãe, professora de português por formação, que se aventurou na direção de uma escola. Cresci vendo o quanto ela se dedicava, sem nem imaginar, na época, as responsabilidades silenciosas de quem cuida de uma escola por inteiro.

Foi só quando passei a viver a escola por dentro, como coordenadora, que comecei a entender de verdade o tamanho do que ela fazia — e fazia parecer fácil. É dela que nasceu, em mim, o desejo de ensinar. Mesmo que eu tenha escolhido a matéria totalmente oposta... coisa de filha que gosta de contrariar, talvez. Enquanto ela vive entre palavras, fui atrás dos números.

A segunda é Rosane, coordenadora, professora e gigante — não de altura (porque é bem pequenininha), mas de saber, de generosidade e de presença. Foi com ela que aprendi a ser educadora de verdade, a olhar de novo para a sala de aula e me reinventar. Rosane é daquelas pessoas que ensinam mesmo quando não estão falando, só pelo jeito de ser, de agir, de conduzir.

Com sua paixão pela matemática, sua firmeza e seu cuidado com cada detalhe, ela se tornou minha referência. Tenho uma admiração profunda pelo trabalho dela e pela forma como ela se entrega à educação com tanta competência e verdade

E por fim, Paula, diretora, guerreira e farol. Com sua força e potência, me apresentou uma nova forma de enxergar a escola — aquela que vai além da sala de aula, que exige coragem, escuta e ação. Foi ela quem acreditou em mim e me deu a chance de viver a coordenação. E é nela que vejo, todos os dias, o que é lutar por uma educação pública, viva e de qualidade, com inteligência e coragem.

A vocês três, meu muito obrigada.

Agradeço também ao Lázaro, à Sofia e ao Sr. José, que caminham comigo na gestão da Escola Estadual Prof^o Ângelo Barros de Araújo. Obrigada por compreenderem o quanto este trabalho significa para mim e por apoiarem cada passo desse percurso. O carinho, a parceria e o entendimento de vocês foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma proposta didática para o ensino de simetrias e padrões geométricos na educação básica, inspirada na obra *The Symmetries of Things* de Conway, Burgiel e Goodman-Strauss. O trabalho parte da caracterização matemática das simetrias — com destaque para órbitas, orbifolds, a característica de Euler e o custo das simetrias — e mostra como esses conceitos levam à demonstração do chamado Teorema Mágico, responsável por explicar a existência exata de 17 tipos de padrões planos. A partir dessa base teórica, são organizados módulos didáticos voltados para o ensino médio, que incluem atividades práticas com espelhos, dobraduras, observação de padrões no cotidiano e uso da notação de assinaturas para classificação das simetrias. A proposta estabelece uma ponte entre a matemática formal e a sala de aula, aproximando os alunos de uma visão mais estética, estrutural e lógica da matemática. Além de dialogar com a BNCC, o trabalho evidencia o potencial pedagógico do tema ao relatar experiências de aplicação em turmas reais, nas quais os estudantes se envolveram de forma criativa e significativa.

Palavras-chave: 1. Simetria. 2. Padrões geométricos. 3. Orbifold. 4. Característica de Euler. 5. Educação básica.

ABSTRACT

This dissertation presents a didactic proposal for teaching symmetries and geometric patterns in high school, inspired by the book *The Symmetries of Things* by Conway, Burgiel, and Goodman-Strauss. The work begins with the mathematical characterization of symmetries — with emphasis on orbits, orbifolds, the Euler characteristic, and the cost of symmetries — and shows how these concepts lead to the demonstration of the so-called Magic Theorem, which explains the exact existence of 17 types of planar patterns. From this theoretical foundation, didactic modules for high school are organized, including practical activities with mirrors, paper folding, observation of everyday patterns, and the use of signature notation for the classification of symmetries. The proposal builds a bridge between formal mathematics and classroom practice, bringing students closer to an aesthetic, structural, and logical view of mathematics. In addition to aligning with the Brazilian National Curriculum (BNCC), the work highlights the pedagogical potential of the topic by reporting experiences of implementation in real classes, where students engaged creatively and meaningfully.

Keywords: 1.Symmetry. 2. Geometric patterns. 3. Orbifold. 4. Euler characteristic. 5.High school.

SUMÁRIO

Introdução	2
1 Desenhando Simetrias: Cores, Assinaturas e Padrões	4
1.1 Caleidoscópios e padrões reflexivos	4
1.2 Rotações e Wonder-rings	6
1.3 Os 17 padrões planos	7
1.3.1 As 5 reflexões vermelhas	7
1.3.2 As 5 rotações azuis	8
1.3.3 Os 7 padrões híbridos	9
2 Conceitos Fundamentais	10
2.1 O que é uma Relação? Classe de Equivalência, Órbita e Orbifold	10
2.2 A característica de Euler e seu papel nos padrões de simetria	11
2.3 O \$custo de um padrão	12
2.4 Da esfera para o plano	14
3 O Teorema Mágico	16
3.1 O Teorema Mágico na esfera	17
3.1.1 Os 14 padrões esféricos	18
3.2 O Teorema Mágico no plano e os 17 padrões	20
4 E na Educação Básica?	23
4.1 Estrutura dos módulos	24
4.1.1 Módulo 1 — Introdução aos Conceitos Básicos	24
4.1.2 Módulo 2 — A Notação de Assinatura e a Classificação das Simetrias	24
4.1.3 Módulo 3 — O Custo das Simetrias	25
4.1.4 Módulo 4 — Os 17 Padrões Planos	25
4.2 Conexão com a BNCC	26
4.3 Mais do que matemática	26
5 Quando a Teoria Encontra a Prática	27
5.1 Quando a matemática sai do papel	27
5.2 Os desafios também fazem parte	28
5.3 Uma experiência que valeu cada segundo	28
A Anexo	29
Anexo	29

INTRODUÇÃO

A simetria está em toda parte. Ela aparece nas conchas, nas flores, nas colmeias, nos azulejos, na arte, na arquitetura e até na organização dos cristais. Faz parte do nosso olhar sobre o mundo e, muitas vezes, surge de forma intuitiva, quase natural. Mas o que, afinal, significa algo ser simétrico? E mais. Existe um jeito matemático de classificar todas essas simetrias?

Foi a partir dessas perguntas que este trabalho nasceu. A proposta aqui é construir uma ponte entre conceitos avançados da matemática, que muitas vezes ficam restritos ao ambiente acadêmico, e o ensino básico, de uma forma acessível, visual e, acima de tudo, que faça sentido para quem está aprendendo.

O ponto de partida está na observação dos padrões de simetria. Quando olhamos para um piso geométrico, para uma mandala ou para a estrutura de uma colmeia, percebemos que há repetições, rotações e reflexões. Mas existe um limite para isso, e não é qualquer combinação de simetrias que funciona. A matemática explica exatamente o porquê.

Por trás dessa classificação está um conceito fundamental: a característica de Euler. Esse número, que surge do modo como contamos vértices, arestas e faces de uma superfície, é quem vai ditar as regras do jogo. É ele que estabelece quais combinações de simetrias são possíveis e quais não são. Na esfera, esse número é 2, no plano é zero. E entender por que isso acontece é uma das chaves para entender toda essa teoria que vem pela frente.

A partir da característica de Euler, surge uma forma muito elegante de organizar os padrões de simetria, usando uma notação visual criada por John Conway, Heidi Burgiel e Chaim Goodman-Strauss. Com essa notação, que utiliza cores, números, asteriscos e outros símbolos, conseguimos olhar para qualquer padrão e saber exatamente quais simetrias ele possui. Mais do que isso. Conseguimos entender por que só existem exatamente 17 tipos de padrões simétricos no plano.

Essa história começa na esfera, passa pelo conceito de orbifold, depois desembarca no plano, onde a matemática e a topologia se encontram de forma surpreendente. No meio desse caminho surgem conceitos como órbita, classe de equivalência e custo de um padrão, que vão se encaixando como peças de um quebra-cabeça.

O objetivo deste trabalho, portanto, é duplo. De um lado, apresentar de forma acessível essa construção matemática, que combina topologia, simetria e geometria de um jeito elegante e visual. De outro, propor atividades e reflexões para que esse conteúdo possa chegar até a sala de aula da educação básica, tornando a matemática mais conectada com o mundo, com a arte, com a cultura e com o olhar dos alunos.

Mais do que responder quantos padrões existem, a proposta aqui é convidar quem lê a enxergar a simetria com outros olhos. Olhos que conseguem ver a beleza, mas também a lógica, a estrutura e a matemática escondida por trás dos padrões que estão por toda parte.

DESENHANDO SIMETRIAS: CORES, ASSINATURAS E PADRÕES

O livro base desta dissertação aborda dois grandes tipos de padrões de simetria: os **padrões planos** e os **padrões esféricos**. Nesta dissertação, o foco principal serão os padrões planos, que servirão de base para a construção das atividades propostas. Depois, é discutido também os padrões esféricos, que, embora fundamentais para a demonstração do chamado *Teorema Mágico*, não farão parte das propostas didáticas, sendo abordados apenas em nível teórico.

Para compreender a nomenclatura introduzida por Conway e colaboradores [4], é essencial entender os tipos de simetria envolvidos e o motivo dos nomes e cores atribuídos a cada um.

Conway utiliza um sistema visual baseado em duas cores principais: vermelho (**Red**) e azul (**Blue**).

Essa escolha de cores também brinca com a sonoridade das palavras em inglês: **reflect** e **red**, **true** e **blue**.

Chamamos de **assinatura** a combinação de símbolos que descreve as simetrias presentes em um padrão. Essa assinatura pode incluir:

- Números em azul, indicando rotações (ex: **3**, **4**);
- Asteriscos vermelhos (*****), indicando presença de espelhos;
- Símbolos como **o** ou **x**.

Nos trechos a seguir, aprofundamos como cada tipo de simetria se manifesta em padrões visuais, utilizando imagens, construções concretas e exemplos didáticos.

1.1 CALEIDOSCÓPIOS E PADRÕES REFLEXIVOS

Vamos começar pelas simetrias de reflexão. Essas simetrias ocorrem quando uma figura pode ser dividida por uma linha imaginária (os espelhos) e suas duas metades são imagens espelhadas uma da outra.

O caleidoscópio é um ótimo exemplo visual. Caleidoscópio é um dispositivo óptico que utiliza espelhos em prisma para criar padrões simétricos repetitivos.

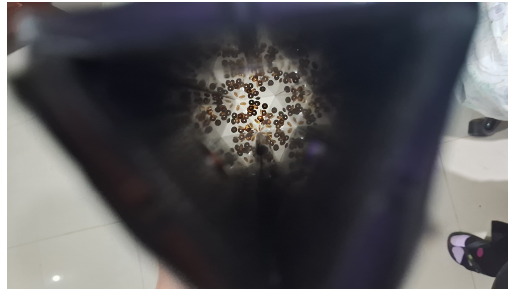


Figura 1: Caleidoscópio feito por alunos

Na nomenclatura de Conway, padrões reflexivos recebem o símbolo * seguido dos números correspondentes à quantidade de espelhos se cruzando num mesmo ponto.

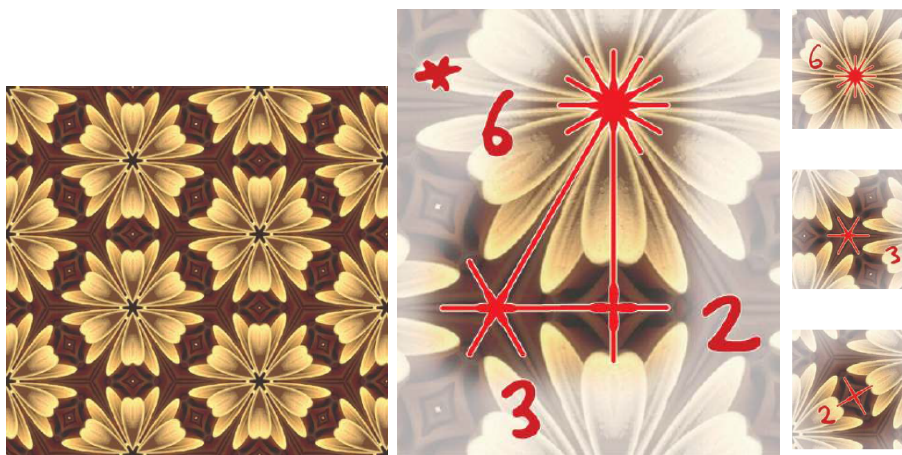


Figura 2: Padrão de reflexão *632. Fonte: [4]

Padrões formados exclusivamente por espelhos paralelos, que não se cruzam em nenhum ponto, são identificados pela assinatura **.

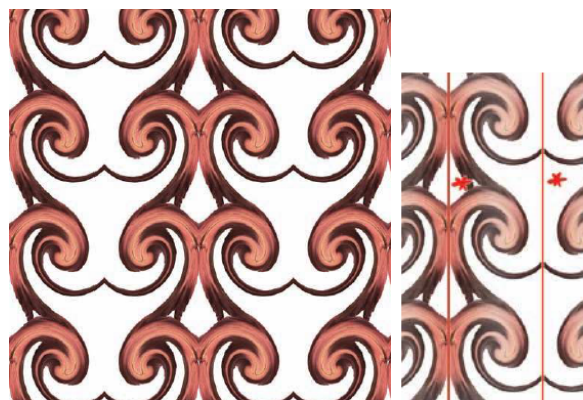


Figura 3: Padrão ** com espelhos paralelos. Fonte: [4]

Os milagres (*miracles*) são um tipo curioso de simetria: eles invertem a orientação da figura, como numa reflexão, mas sem que haja uma linha de espelho visível no padrão.

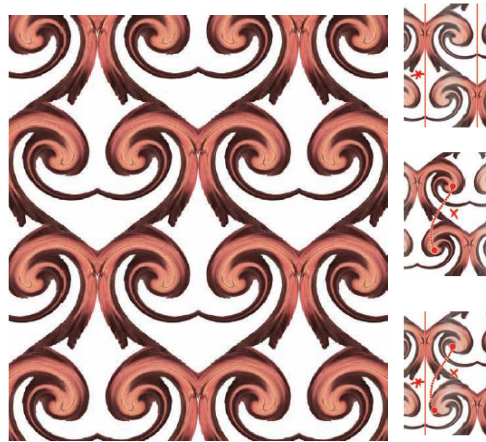


Figura 4: Padrão com reflexão e milagre: assinatura *x. Fonte: [4]

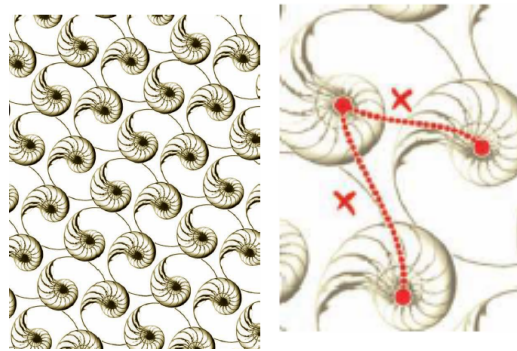


Figura 5: Somente milagres: assinatura xx. Fonte: [4]

1.2 ROTAÇÕES E WONDER-RINGS

Rotações são transformações nas quais a figura é girada ao redor de um ponto central, mantendo sua forma e organização visual.

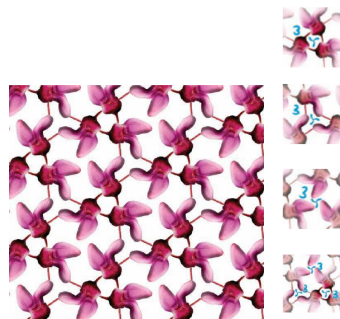


Figura 6: Rotação com assinatura 333. Fonte: [4]

Wonder-rings são padrões onde a única simetria presente é a **translação**. Representa-se por \circ .

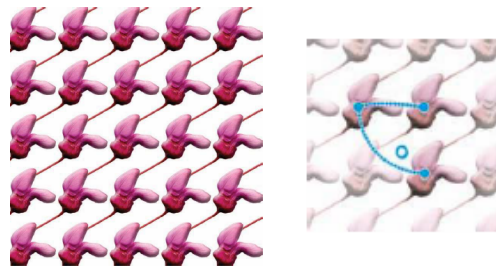


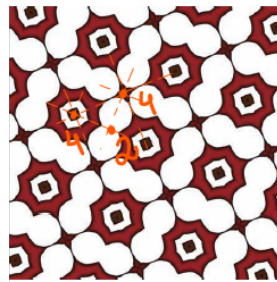
Figura 7: Wonder-rings: assinatura \circ . Fonte: [4]

1.3 OS 17 PADRÕES PLANOS

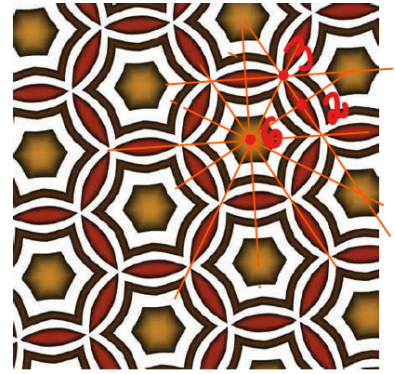
1.3.1 As 5 reflexões vermelhas



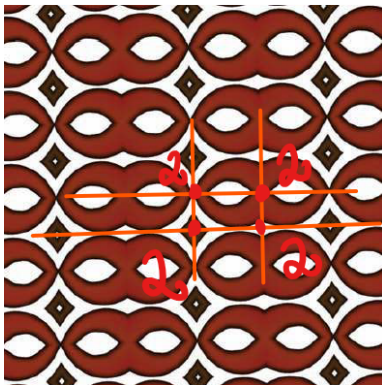
*333



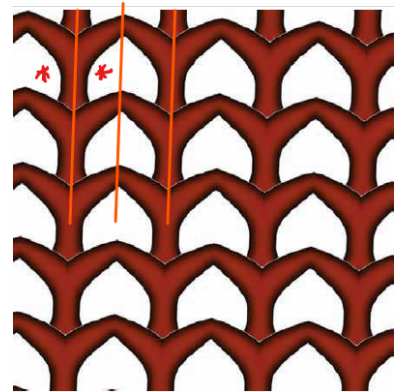
*442



*632



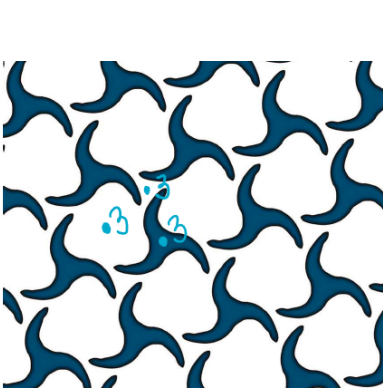
*2222



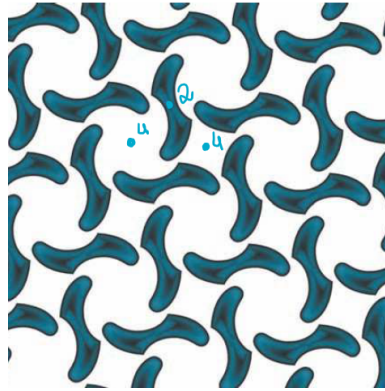
**

Figura 8: Padrões reflexivos editados de [4]: *333, *442, *632, *2222, **.

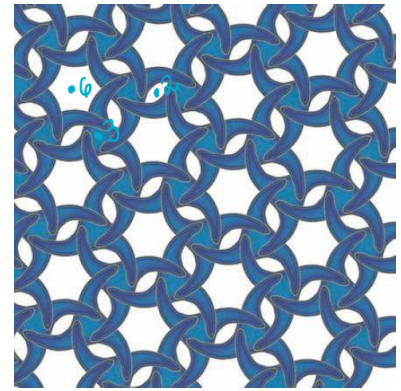
1.3.2 As 5 rotações azuis



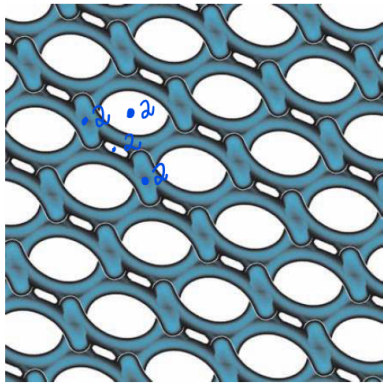
333



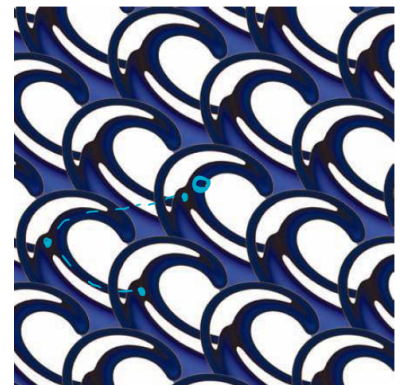
442



632



2222



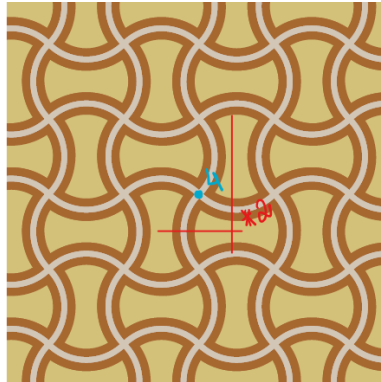
o

Figura 9: Padrões azuis editados de [4]: 333, 442, 632, 2222, o.

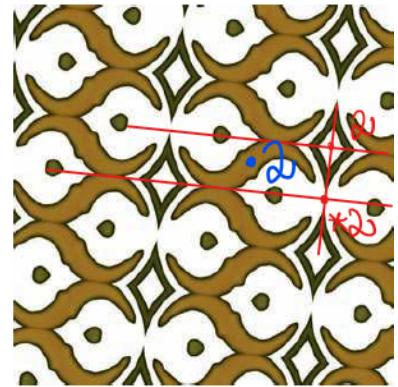
1.3.3 Os 7 padrões híbridos



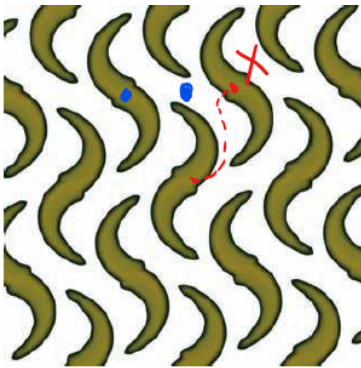
3^*3



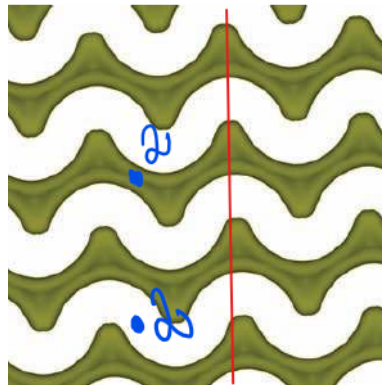
4^*2



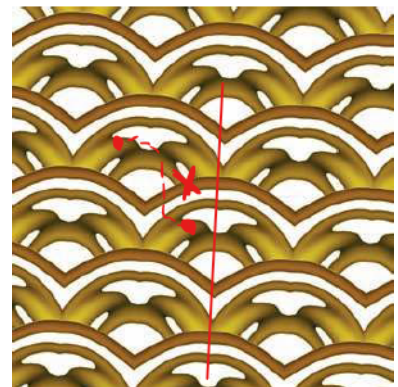
2^*22



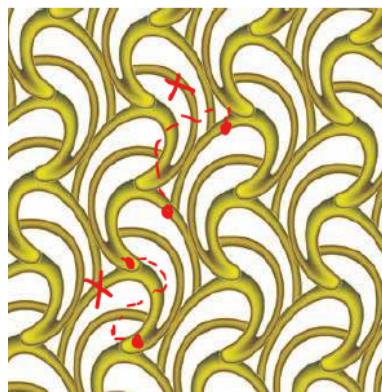
$22 \times$



22^*



$^* \times$



$\times \times$

Figura 10: Padrões híbridos editados de [4]: 3^*3 , 4^*2 , 2^*22 , $22 \times$, 22^* , $^* \times$, $\times \times$.

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

No capítulo anterior, vimos como a matemática representa as simetrias por meio de cores, números e símbolos. Agora é hora de entender a base que sustenta essa classificação. Aqui entram alguns conceitos que vão costurar toda a história: relação de equivalência, órbita, orbifold, a tal característica de Euler e, por fim, o custo de um padrão.

2.1 O QUE É UMA RELAÇÃO? CLASSE DE EQUIVALÊNCIA, ÓRBITA E ORBIFOLD

Seja X um conjunto e G o grupo de simetrias de X . Definimos a relação

$$x \alpha y \iff \exists g \in G \text{ tal que } g(x) = y.$$

Ou seja, x e y estão relacionados se existe uma simetria que leva x em y .

A relação α satisfaz as propriedades:

1. **Reflexiva:** $x \alpha x$ para todo $x \in X$ (simetria identidade).
2. **Simétrica:** se $x \alpha y$, então $y \alpha x$ (pela simetria inversa g^{-1}).
3. **Transitiva:** se $x \alpha y$ e $y \alpha z$, então $x \alpha z$ (pela composição das simetrias).

Logo, α é uma **relação de equivalência** em X .

A **órbita** de um ponto x é a sua classe de equivalência:

$$\text{Orb}(x) = \{y \in X \mid x \alpha y\}.$$

Ou seja, todos os pontos que podem ser obtidos a partir de x por alguma simetria de G pertencem à mesma órbita.

Exemplo: se X for um hexágono regular e x um vértice, então $\text{Orb}(x)$ contém todos os seis vértices, pois rotações do hexágono levam x a qualquer outro vértice.

Um **orbifold** é obtido escolhendo-se *um* representante de cada órbita. Assim, em vez de considerar todos os pontos equivalentes sob α , o orbifold retém apenas um representante de cada classe de equivalência, condensando a estrutura simétrica de X .

Exemplo: se $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e as simetrias agrupam os elementos em duas órbitas $\{a, b, c\}$ e $\{d, e, f\}$, então podemos escolher a e d como representantes. O orbifold será $\{a, d\}$, enquanto X continua contendo todos os elementos originais.

2.2 A CARACTERÍSTICA DE EULER E SEU PAPEL NOS PADRÕES DE SIMETRIA

Se existe um conceito que vai atravessar todo o caminho que estamos construindo, é a característica de Euler. Ela é, de certa forma, a base invisível que sustenta toda essa teoria. Por mais que, à primeira vista, pareça só uma conta simples envolvendo vértices, arestas e faces, ela carrega uma informação topológica muito poderosa sobre a superfície que estamos observando.

A fórmula da característica de Euler é bem conhecida. Para qualquer decomposição de uma superfície em vértices (V), arestas (A) e faces (F), ela é calculada por:

$$\chi = V - A + F$$

Mas o que esse número significa, de fato? A característica de Euler é um *invariante topológico*, ou seja, ela não muda se você estica, entorta ou deforma a superfície, desde que não fure, rasgue ou cole pedaços. Ela descreve, de maneira muito direta, a estrutura global da superfície, especialmente no que diz respeito aos “buracos” que ela possui.

Por exemplo, no caso da esfera, a característica de Euler vale 2. Isso vale tanto pra uma esfera perfeita quanto pra qualquer objeto que seja equivalente a ela do ponto de vista topológico, como uma bola de futebol, uma bexiga inflada ou até uma casca de laranja inteira. Sempre que fazemos uma decomposição dessa superfície em vértices, arestas e faces — como, por exemplo, desenhando um mapa na superfície da Terra, a conta $V - A + F$ vai resultar em 2.

Esse não é apenas um resultado empírico, é um teorema bem estabelecido e demonstrado, como pode ser visto no artigo de Arantes, Pedrochi e Martins [1].

Quando olhamos para o plano, o raciocínio muda. O plano é uma superfície aberta, infinita, sem fronteiras nem limites, o que faz com que sua característica de Euler seja zero. Uma das formas de entender isso é imaginar uma região circular cada vez maior no plano. O número de vértices, arestas e faces no interior dessa região cresce proporcionalmente à sua área, enquanto os elementos na borda crescem proporcionalmente ao perímetro. À medida que essa região cresce indefinidamente, a influência da borda se torna irrelevante, e o cálculo da característica de Euler tende a zero. Esse raciocínio é apresentado de forma elegante em [4].

Por fim, vale destacar que a característica de Euler não é algo exclusivo do plano ou da esfera. Ela vale para qualquer superfície. No toro, por exemplo, ela é zero, e em superfícies com mais de um buraco, ela diminui ainda mais. Mas, neste trabalho, nosso foco será entender o

papel desse número na esfera e no plano, porque é justamente a diferença entre $\chi = 2$ e $\chi = 0$ que vai nos permitir, mais adiante, compreender por que certas combinações de simetrias são possíveis e outras não.

Essa é a chave que conecta a topologia com a simetria. A partir daqui, seguimos olhando para como as simetrias interferem nesse número, e como elas são capazes de “gastar” parte da característica de Euler, abrindo caminho para o conceito de *custo* que surge logo na próxima seção.

2.3 O \$CUSTO DE UM PADRÃO

Agora que entendemos o que é uma relação de equivalência, como agrupamos pontos em órbitas e como a característica de Euler nos ajuda a descrever a estrutura da superfície, é hora de olhar para como as simetrias interferem nessa contagem.

Quando aplicamos uma simetria sobre uma superfície, alguns pontos acabam sendo identificados entre si. Isso significa que, no orbifold, esses pontos não aparecem mais como elementos distintos, e sim como um único representante. É como se eles compartilhassem sua existência dentro da simetria.

Toda vez que isso acontece, esses pontos deixam de contribuir integralmente na contagem de vértices, arestas e faces. É aí que surge a ideia do **custo**. O custo mede exatamente quanto a presença de uma simetria faz com que um ponto “deixe de contribuir” na característica de Euler da superfície.

Chamamos de *simetria de ordem N* aquela em que um ponto é identificado com outros $N - 1$ pontos por meio da ação do grupo de simetrias, ou seja, a órbita desse ponto tem exatamente N elementos. Cada um deles, portanto, passa a contribuir apenas com $\frac{1}{N}$ na contagem. Assim, o custo associado a esse ponto é o que ele deixou de contribuir em relação a uma unidade inteira, ou seja:

$$\text{Custo} = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N - 1}{N}$$

Esse raciocínio vale para as simetrias de rotação. Se, por exemplo, um ponto tem uma simetria de ordem 3 (como uma rotação que divide o espaço em três setores idênticos), ele contribui apenas com $\frac{1}{3}$ para a característica de Euler, e seu custo é:

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

No caso das reflexões, o raciocínio é semelhante, mas com um detalhe. Quando temos espelhos que cruzam, a contribuição é ainda menor, porque cada ponto na intersecção desses espelhos representa não apenas repetições espaciais, mas também simetrias que invertem a

orientação. Por isso, o custo nesses pontos é calculado de forma proporcional, considerando que cada espelho "corta" a contribuição pela metade. Para um ponto onde se cruzam N espelhos, a contribuição é $\frac{1}{2N}$, e o custo é:

$$1 - \frac{1}{2N} = \frac{N-1}{2N}$$

Mas no caso mais comum, que é quando há apenas uma linha de espelho (ou seja, não estamos olhando pra intersecções, e sim pra pontos sobre o espelho), a contribuição é $\frac{1}{2}$, levando a um custo de:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Esse é, inclusive, o primeiro custo que aparece na tabela, porque os espelhos são sempre nosso ponto de partida na construção dos padrões.

Essa lógica vale também para os milagres (simetrias que invertem a orientação sem uma linha de espelho visível), que também têm custo $\frac{1}{2}$, pois seu efeito sobre a contribuição dos pontos é equivalente ao de uma reflexão.

A partir desse raciocínio, é possível construir uma tabela que associa a cada símbolo da notação de Conway um custo específico. É justamente essa soma de custos que vai determinar, no caso do plano, se o padrão é possível ou não. Como veremos no capítulo seguinte, para que um padrão simétrico no plano seja viável, o custo total da sua assinatura precisa ser exatamente 2.

Isso acontece porque, no plano, a característica de Euler é zero. Assim, o padrão precisa "gastar" os 2 pontos da característica da esfera, o que fecha a conta da equação:

$$\chi = 2 - \text{custo} = 0$$

Essa é a chave que conecta a topologia com a classificação das simetrias no plano. A partir daqui, o problema vira algo quase aritmético: descobrir todas as combinações de custos que somam exatamente 2.

Na Tabela 1, apresentamos os custos associados a cada símbolo utilizado na nomenclatura de Conway.

Com esse entendimento, o que antes parecia uma simples combinação de símbolos agora ganha uma leitura matemática precisa. Cada pedaço do padrão tem um peso, um custo, e entender isso é essencial para explicar por que alguns padrões existem e outros não.

Símbolo	Custo \$	Símbolo	Custo \$
○	2	* ou ×	1
2	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{3}{4}$	4	$\frac{3}{8}$
5	$\frac{4}{5}$	5	$\frac{5}{12}$
6	$\frac{5}{6}$	6	$\frac{5}{12}$
⋮	⋮	⋮	⋮
N	$\frac{N-1}{N}$	N	$\frac{N-1}{2N}$
∞	1	∞	$\frac{1}{2}$

Tabela 1: Custo de cada símbolo utilizado na nomenclatura

2.4 DA ESFERA PARA O PLANO

Ao longo deste capítulo, vimos que a característica de Euler é uma peça fundamental para entender como as simetrias se organizam, seja na esfera, seja no plano. Também entendemos como as simetrias afetam essa contagem por meio da ideia de custo. Mas é importante reforçar um ponto que muitas vezes passa despercebido: essa história toda não começa no plano. Na verdade, ela começa na esfera.

É na esfera que o raciocínio sobre como as simetrias interferem na característica de Euler aparece de forma mais natural e, até certo ponto, mais simples. A característica da esfera vale 2, e é a partir dela que surge a fórmula que relaciona a quantidade de simetrias de um padrão com o orbifold correspondente:

$$\chi = \frac{2}{g}$$

onde g é o número de simetrias do padrão.

Essa fórmula não surge por acaso. Ela vem do fato de que, quando aplicamos as simetrias sobre a esfera, estamos, na prática, "colapsando" várias cópias do mesmo ponto em um único representante no orbifold. E é justamente isso que faz a característica de Euler diminuir proporcionalmente ao número de simetrias.

A partir desse raciocínio na esfera, é que conseguimos transitar para o plano. Quando olhamos localmente para a esfera, em uma região muito pequena, ela se comporta como se fosse plana. Isso permite que as mesmas regras sejam aplicadas, mas com uma diferença crucial: no plano, a característica de Euler é zero.

Essa transição não é apenas uma adaptação. Ela é, na verdade, a base do Teorema Mágico no plano. É exatamente o fato de que a característica do plano é zero que obriga o custo das simetrias a somar exatamente 2. Ou seja, os padrões no plano precisam “gastar” os mesmos 2 pontos que, na esfera, formam sua característica topológica.

Essa conexão entre a esfera e o plano não é só um detalhe técnico. Ela é o fio que amarra a topologia com a simetria. E é a partir dela que, no próximo capítulo, vamos entender como essa equação leva diretamente à classificação dos 17 padrões possíveis no plano.

O TEOREMA MÁGICO

Até aqui, construímos toda a base necessária para entender como a matemática enxerga e organiza os padrões de simetria. Falamos sobre relações, órbitas, orbifolds, sobre a característica de Euler e sobre como as simetrias interferem nessa contagem por meio da ideia de custo.

Agora, chegamos no ponto central desta dissertação. O que chamamos de *Teorema Mágico* não é apenas um resultado isolado. Na verdade, ele é a síntese de tudo que vimos até agora, unindo a topologia com a simetria de uma forma surpreendente.

O Teorema Mágico explica por que existem exatamente 17 tipos de padrões simétricos no plano. E mais do que isso, ele mostra que essa não é uma coincidência, nem uma lista criada por tentativa e erro. Esse número surge diretamente da matemática, como uma consequência da maneira como as simetrias “gastam” a característica de Euler da superfície onde estão aplicadas.

Esse teorema tem sua origem na esfera, onde a característica de Euler vale 2. É lá que percebemos que, toda vez que aplicamos simetrias sobre a superfície, estamos, na prática, reduzindo a contagem dos elementos do espaço, agrupando pontos equivalentes e, com isso, diminuindo proporcionalmente a característica de Euler.

Mas quando olhamos para o plano, a situação muda. Como vimos no capítulo anterior, a característica de Euler no plano é zero. Isso significa que, pra que um padrão simétrico no plano exista, ele precisa “gastar” exatamente os 2 pontos da característica da esfera. E é desse raciocínio que surge a condição fundamental:

$$\chi = 2 - \text{custo} = 0 \implies \text{custo} = 2$$

Essa é a regra que define se uma assinatura de simetria no plano é válida ou não. Toda assinatura precisa ter custo total 2. E o que o Teorema Mágico nos mostra é que, ao aplicar essa regra, existem exatamente 17 combinações possíveis. Nenhuma a mais, nenhuma a menos.

Nas próximas seções, vamos percorrer esse raciocínio em duas etapas. Primeiro, entender como essa fórmula aparece na esfera. Depois, aplicamos esse mesmo raciocínio ao plano, onde ela se traduz na condição do custo igual a 2. E, a partir disso, conseguimos compreender de forma clara por que só existem 17 padrões de simetria no plano.

3.1 O TEOREMA MÁGICO NA ESFERA

Antes de aplicar o Teorema Mágico ao plano, é importante entender como ele surge na esfera. É aqui que aparece, de forma clara, a relação entre simetria e topologia. E é na esfera que conseguimos perceber, de maneira mais direta, como as simetrias impactam a característica de Euler.

Na esfera, sabemos que a característica de Euler é igual a 2. Isso significa que, sempre que desenhemos um mapa, uma rede de arestas, vértices e faces sobre a superfície esférica, a fórmula

$$\chi = V - A + F$$

sempre resulta em 2.

Quando aplicamos um grupo de simetrias sobre a esfera, estamos basicamente dividindo a superfície em regiões que são cópias umas das outras, como se estivéssemos “dobrando” a esfera sobre si mesma de acordo com as simetrias. O que sobra desse processo é o *orbifold*, que funciona como uma versão simplificada da esfera, contendo apenas uma região que representa todas as outras.

A quantidade de vezes que essa região se repete na esfera completa é exatamente o número de simetrias do padrão, que denotamos por g . E, ao formar o orbifold, a característica de Euler da esfera também é “dividida” por esse número. Isso nos leva à fórmula:

$$\chi = \frac{2}{g}$$

Essa é a versão do Teorema Mágico na esfera. Ela diz que, para qualquer padrão simétrico esférico com g simetrias, a característica de Euler do orbifold resultante é igual a $\frac{2}{g}$.

Pra ficar mais claro, vamos olhar para um exemplo. Imagine um padrão na esfera que tem 4 simetrias. Isso significa que podemos dividir a esfera em 4 regiões iguais, cada uma representando uma parte do todo. A característica de Euler do orbifold correspondente será:

$$\chi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

E essa característica é de extrema importância. Ela aparece porque, ao formar o orbifold, alguns vértices, arestas e faces foram “compactados”, muitos deles representando várias cópias do mesmo elemento na esfera original.

Esse raciocínio vale para qualquer padrão na esfera. E é exatamente essa lógica que vamos levar para o plano, fazendo a adaptação necessária ao fato de que, no plano, a característica de Euler não é mais 2, e sim zero.

No entanto, a essência continua a mesma. Toda vez que aplicamos simetrias sobre uma superfície, estamos, na prática, reduzindo sua característica de Euler. E é essa redução que vai ser formalizada, no próximo passo, na versão do Teorema Mágico para o plano.

3.1.1 Os 14 padrões esféricos

Mesmo que o foco principal deste trabalho esteja nos padrões planos, é importante reconhecer que toda essa teoria começa na esfera.

Os padrões possíveis são aqueles cuja assinatura tem custo menor do que 2. Isso porque a equação nesse caso é:

$$\chi = \frac{2}{g}$$

onde g é o número de simetrias do padrão. Isso significa que, quanto mais simetrias um padrão tem, menor vai ser a característica de Euler do orbifold correspondente.

Essa regra, por si só, já impõe várias restrições — e quando levamos em conta as combinações possíveis de simetrias, descobrimos que só existem exatamente 14 tipos distintos de padrões esféricos. Cada um deles corresponde a uma combinação específica de rotações, reflexões e estruturas que, ao serem aplicadas sobre a esfera, resultam em padrões com simetria global.

A seguir, uma imagem com esses 14 tipos que foi retirada da página 53 do livro [4]:

*532	*432	*332	*22N	*MN
		3*2	2*N	N*
				N×
532	432	332	22N	MN

Figura 11: Os 14 padrões esféricos possíveis segundo a notação de Conway (adaptado de [4]).



*432



*532



332



332



532



3*2

Figura 12: Exemplos visuais de padrões esféricos com diferentes assinaturas.

3.2 O TEOREMA MÁGICO NO PLANO E OS 17 PADRÕES

Quando levamos esse raciocínio para o plano, surge uma condição topológica diferente. Como vimos no capítulo anterior, a característica de Euler do plano é $\chi = 0$. Isso significa que, pra que um padrão simétrico no plano exista, ele precisa “gastar” exatamente os 2 pontos da característica da esfera por meio das simetrias.

Essa condição se traduz na equação:

$$\chi = 2 - \text{custo} = 0 \implies \text{custo} = 2$$

Isso transforma o problema da classificação dos padrões planos em algo muito mais objetivo: encontrar todas as combinações de símbolos cuja soma dos custos seja exatamente 2.

Mas por que exatamente 17?

Ao aplicar o Teorema Mágico ao plano, vimos que a assinatura de um padrão precisa ter custo total 2. Essa condição, por si só, já restringe bastante o que é possível. Mas não é tudo. Os símbolos disponíveis também são limitados, cada um com um valor específico — como $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{1}{2}$, entre outros — e a combinação entre eles precisa ser coerente do ponto de vista geométrico.

Com isso, a classificação dos padrões passa a depender de um tipo de problema matemático bastante concreto: encontrar todas as somas possíveis entre esses valores que resultem exatamente em 2. Como essas somas representam as assinaturas de padrões simétricos, estamos, na prática, identificando quais combinações de simetrias “fecham a conta” com o custo correto.

Esse processo — que envolve tanto os aspectos geométricos (que tipos de simetrias podem conviver) quanto a soma exata dos custos — conduz a um conjunto finito de possibilidades. Ao final da análise, chegamos a um número bem específico: existem exatamente 17 combinações distintas que satisfazem todos os critérios.

E isso não é um acaso. Não é uma lista feita por tentativa e erro. Esses 17 padrões são o reflexo direto da estrutura matemática por trás da simetria plana — um desdobramento natural da exigência de custo 2 dentro das regras impostas pela notação de assinatura.

É essa conexão entre topologia e simetria que torna o Teorema Mágico não apenas um resultado matemático, mas uma verdadeira tradução da beleza estrutural dos padrões que observamos no mundo.

*632	*442	*333	*2222	**
			2*22	*x
	4*2	3*3	22*	xx
			22x	
632	442	333	2222	o

Figura 13: Os 17 padrões planos - a notação de Conway (adaptado da Tabela 3.2 de [4])

Um parêntese sobre os frisos

Embora o foco deste trabalho esteja nos padrões planos e esféricos, vale abrir um parêntese para mencionar os frisos, padrões que se repetem indefinidamente em uma única direção. Esses padrões, apesar de mais simples à primeira vista, também se encaixam na lógica do Teorema Mágico e compartilham com os demais a mesma matemática.

Nos padrões esféricos, existem casos em que a assinatura contém um parâmetro N , como em $*22N$, N^* , 2^*N ou $*Nx$. Quando esse número cresce indefinidamente, ou seja, tende ao infinito, o que surge como caso limite é justamente a estrutura de um friso. O símbolo ∞ , utilizado na notação, representa essa translação infinita, um tipo de simetria que desloca o padrão continuamente na direção da faixa.

Cada tipo de friso pode ser descrito por uma combinação específica de simetrias, e, assim como nos padrões anteriores, essas simetrias também são representadas por cores na notação visual proposta por Conway e colaboradores: azul para simetrias que preservam a orientação e vermelho para aquelas que a invertem.

Do ponto de vista topológico, os frisos também obedecem à regra do custo total igual a 2. A presença de uma translação (símbolo ∞) tem custo 1, enquanto simetrias como reflexões e milagres contribuem com custos fracionários, geralmente $\frac{1}{2}$. A soma desses valores determina a viabilidade da assinatura — exatamente como ocorre nos padrões planos e esféricos.

Ao todo, existem sete tipos possíveis de frisos, cada um com sua assinatura e suas simetrias características. Ainda que não sejam o foco desta dissertação, os frisos mostram como a mesma estrutura matemática se mantém em diferentes contextos, reforçando a robustez do modelo proposto. Eles também oferecem um campo fértil para futuras investigações ou desdobramentos didáticos, especialmente quando o objetivo é aproximar conceitos de simetria do cotidiano dos alunos.

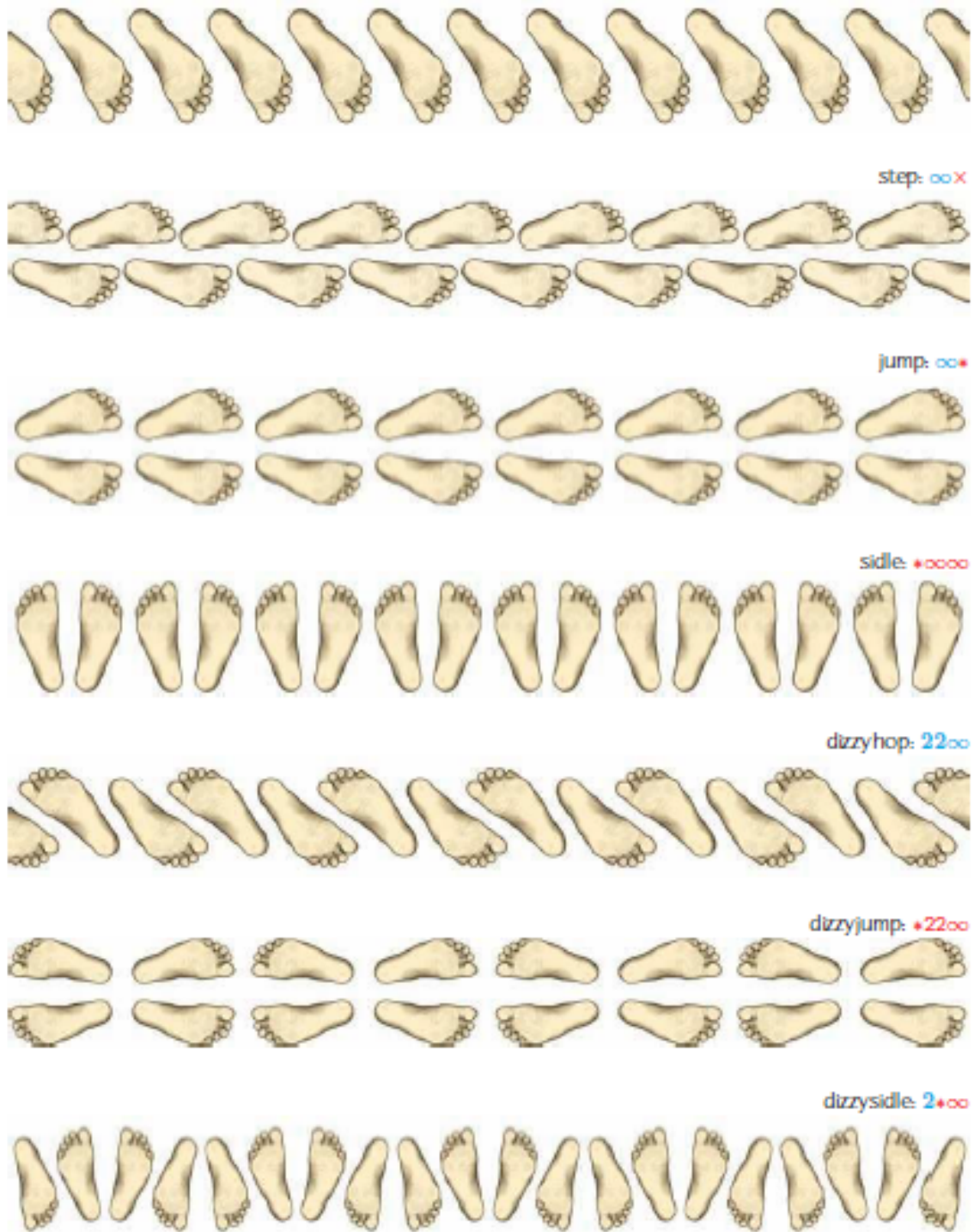


Figura 14: Os sete tipos possíveis de frisos, com suas respectivas assinaturas (adaptado de [4]).

E NA EDUCAÇÃO BÁSICA?

Quando a gente olha pra tudo que construiu até aqui — toda essa matemática que aparece na organização dos padrões, na lógica das simetrias, na estrutura que conecta topologia, geometria e beleza —, surge uma pergunta que, pra mim, é inevitável: e como é que tudo isso chega na sala de aula?

Se a simetria está em toda parte — nas flores, nas colmeias, na arquitetura, na arte e até nas roupas que a gente veste —, então ela também precisa estar na escola. E não só como um tópico isolado da matemática, mas como uma forma de olhar pro mundo, de entender padrões, de fazer conexões e de desenvolver o pensamento matemático de forma viva.

Foi pensando nisso que organizei essa proposta didática. O objetivo é transformar essa matemática, que muitas vezes fica escondida nos livros mais avançados, em algo que faça sentido pros alunos da educação básica. Algo que eles possam enxergar, tocar, desenhar, construir e, principalmente, entender.

Antes de detalhar cada módulo, gostaria de avisar que todos os materiais do curso estão disponíveis em um link do Google Drive. Esse material reúne os quatro módulos completos, com o guia do professor, as atividades para os alunos e os slides prontos para uso em sala de aula. Assim, além de conhecerem aqui uma síntese do trabalho, vocês terão acesso a todo o conteúdo na íntegra para consultar depois. O acesso pode ser feito diretamente pelo link [Material do curso](#) ou, de forma mais prática, pelo QR Code a seguir:



Figura 15: QR Code com materiais

4.1 ESTRUTURA DOS MÓDULOS

O trabalho foi organizado em quatro módulos. Cada módulo tem um foco específico, com atividades que vão do concreto pro simbólico, da observação pro raciocínio e da prática pro conceito.

4.1.1 Módulo 1 — *Introdução aos Conceitos Básicos*

Esse é o momento de encantar. De fazer os alunos perceberem que simetria não é um conceito abstrato, mas algo que está em todo lugar. É aqui que eles começam a identificar reflexões, rotações e translações no mundo que os cerca.

Atividades principais:

- **Espelho mágico:** Usando espelhos pequenos, os alunos exploram como as reflexões funcionam, criando padrões a partir de objetos e desenhos.
- **Dobradura simétrica:** A partir de dobraduras no papel, os alunos observam como se formam figuras simétricas, identificando as linhas de reflexão.
- **Pesquisa no ambiente:** Eles saem pela escola, pela casa, pela vizinhança (ou até pesquisam na internet) procurando exemplos de simetria. Depois, compartilham com a turma o que encontraram.

4.1.2 Módulo 2 — *A Notação de Assinatura e a Classificação das Simetrias*

Depois que já entenderam, de forma bem concreta, como as simetrias aparecem, os alunos começam a se apropriar da linguagem matemática que descreve essas simetrias. Aqui entra a notação das assinaturas.

O que eles aprendem:

- Que as reflexões são representadas pelo símbolo $*$.
- Que as rotações aparecem como números em azul, indicando quantas vezes o padrão se repete numa volta completa.
- Que esses símbolos se combinam pra formar as assinaturas que classificam os padrões.

Atividades principais:

- **Análise de imagens:** Observar padrões reais (em azulejos, roupas, fachadas) e identificar quais simetrias aparecem.

- **Desafio das assinaturas:** Dada uma assinatura, os alunos tentam imaginar como seria o padrão correspondente e desenhá-lo.
- **Criação de padrões:** Inverter o processo: os alunos desenharam um padrão e depois descrevem sua assinatura.

4.1.3 Módulo 3 — O Custo das Simetrias

Aqui entra aquele olhar mais matemático. Os alunos aprendem que cada tipo de simetria tem um “peso” na construção do padrão — aquilo que, ao longo da dissertação, chamamos de *custo*.

O que eles entendem:

- Que cada simetria “gasta” uma parte da característica de Euler.
- Que a soma desses custos é o que faz um padrão ser possível ou não.

Atividades principais:

- **Calculando custos:** Analisar diferentes assinaturas e calcular se o custo fecha certinho em 2.
- **Desafio do padrão possível:** Montar uma assinatura com custo 2 e depois desenhar o padrão correspondente.
- **Discussão:** Entender por que certas combinações não são possíveis — e fazer os alunos perceberem que isso não é uma regra inventada, mas uma consequência matemática da topologia do plano.

4.1.4 Módulo 4 — Os 17 Padrões Planos

O fechamento do trabalho. É aqui que os alunos percebem que toda aquela brincadeira com espelhos, dobras, números e símbolos leva, no final, à lista dos 17 padrões possíveis.

Atividades principais:

- **Reconhecimento dos 17 padrões:** Ver imagens, observar, nomear e entender cada um deles.
- **Desafio de criação:** Escolher uma assinatura real dos 17 padrões e tentar desenhar o padrão correspondente.
- **Análise de padrões do cotidiano:** Voltar ao mundo real e perceber quais desses 17 padrões aparecem em ladrilhos, tecidos, fachadas, artesanato, etc.

4.2 CONEXÃO COM A BNCC

Toda essa proposta dialoga diretamente com as competências e habilidades previstas na BNCC [5] e no Currículo Paulista [8], especialmente naquelas que desenvolvem:

- O uso das transformações geométricas (reflexão, rotação, translação) pra analisar e produzir padrões.
- A capacidade de perceber e modelar situações do mundo real usando conceitos matemáticos.
- O desenvolvimento do pensamento geométrico, da visão espacial e da linguagem matemática.
- O uso de ferramentas digitais na construção, análise e representação de padrões.
- E também uma aproximação interdisciplinar, especialmente com a arte, a cultura e a história.

4.3 MAIS DO QUE MATEMÁTICA

O trabalho com simetrias vai muito além de ensinar matemática. Ele permite que os alunos desenvolvam olhar estético, sensibilidade pra perceber padrões no mundo, raciocínio lógico, capacidade de análise e criatividade.

Durante a aplicação dessa proposta, ficou muito evidente o quanto os alunos se encantam quando percebem que a matemática não está só no papel, mas nas paredes, nas roupas, nas construções, nos mosaicos, nas mandalas, nas flores e até nas ondas do mar.

No final das contas, trabalhar com simetria é muito mais do que ensinar um conteúdo. É ensinar uma forma de olhar pro mundo. Uma forma onde beleza, estrutura e lógica andam juntas. Uma forma onde a matemática deixa de ser uma lista de fórmulas e vira, de fato, uma linguagem pra entender a realidade.

QUANDO A TEORIA ENCONTRA A PRÁTICA

Se tem uma coisa que esse trabalho me mostrou, é que matemática não é só conta, fórmula ou regra. Matemática é olhar pro mundo, entender padrões, perceber estruturas e, mais do que tudo, se encantar com isso. E foi exatamente isso que aconteceu quando eu levei essa proposta pra sala de aula.

Depois de passar meses mergulhada nesse universo das simetrias, estudando padrões, entendendo a lógica dos orbifolds, do custo, da característica de Euler e de tudo que está por trás dos 17 padrões planos, eu sabia que não dava pra deixar isso só no papel. Esse conteúdo precisava ir pra escola, precisava ganhar vida no olhar dos alunos, na mão que desenha, no espelho que reflete, no mosaico que eles constroem.

E assim foi. Sempre que aparecia uma brecha — um professor que precisou se ausentar, uma aula vaga, ou simplesmente uma oportunidade —, eu entrava em sala e levava um pedaço desse projeto comigo. E, sem exagero, foram momentos que me mostraram que esse trabalho faz todo sentido.

5.1 QUANDO A MATEMÁTICA SAI DO PAPEL

Foi incrível ver como os alunos se envolveram. De verdade. O pessoal do 9º ano, mais agitado, mergulhou de cabeça nas atividades práticas. O caleidoscópio, por exemplo, foi sucesso absoluto. Eles ficaram encantados em ver como, com poucos espelhos, surgem padrões lindos, cheios de simetria. E mais do que isso: começaram a perceber que esses padrões não são só no caleidoscópio, mas na vida, na natureza, na arquitetura, na arte.

Os alunos do 1º ano do Ensino Médio, que no começo estavam mais na deles, meio desconfiados, começaram a se soltar quando entenderam que a proposta não era “só” fazer conta. Quando começaram a observar imagens, fachadas, azulejos, vitrines, roupas... a chave virou. Eles começaram a perceber que sabiam mais do que imaginavam. E que, na real, estavam cercados de simetria o tempo todo — só nunca tinham parado pra pensar nisso desse jeito.

E o mais legal: quando chegou a parte da notação, das assinaturas, do custo... ninguém torceu o nariz. Ao contrário! Eles acharam interessante demais essa ideia de que existe uma “matemática escondida” por trás dos padrões. Que não é só bonito — é matematicamente estruturado, lógico, rigoroso. Isso, pra mim, foi simplesmente sensacional.

5.2 OS DESAFIOS TAMBÉM FAZEM PARTE

Claro que nem tudo foi fácil. Nenhuma sala é igual a outra, nenhum grupo reage do mesmo jeito. Teve turma que se jogou na parte da pesquisa, saiu fotografando a escola inteira pra achar simetrias. Teve turma que preferiu ficar no papel, desenhando, rabiscando, montando padrões. E tudo bem. Faz parte.

Outro desafio grande foi o tempo. Nem sempre dava pra fazer tudo que eu queria. Teve atividade que precisei enxugar, adaptar, transformar num desafio mais rápido. Mas, honestamente, isso me fez perceber que a proposta é, sim, flexível. Dá pra ajustar, pra adaptar, pra levar pra qualquer sala, de qualquer jeito.

5.3 UMA EXPERIÊNCIA QUE VALEU CADA SEGUNDO

No final, o que ficou muito claro pra mim é que trabalhar com simetrias não é só ensinar matemática. É ensinar a olhar pro mundo. É fazer o aluno perceber que aquele ladrilho que ele pisa, aquela estampa da camiseta, aquele vitral da igreja, aquele mosaico da praça... tudo isso carrega uma história de simetrias, de padrões, de matemática.

E mais do que isso: eles entenderam que não é qualquer combinação que funciona. Que pra um padrão se repetir direitinho no plano, ele precisa “fechar a conta” — e que essa conta se chama custo, que tem a ver com a característica de Euler, com a topologia do plano e com toda essa matemática linda que a gente estudou aqui.

Se eu pudesse resumir, eu diria que essa foi uma das experiências mais ricas que eu já vivi como professora. Rica pedagogicamente, sim, mas principalmente rica matematicamente. Porque, no fim, ficou muito claro que não era só sobre desenhar padrões bonitos. Era sobre entender que existe uma matemática poderosa por trás disso tudo. E ver os alunos descobrindo isso foi, sem dúvida, a parte mais bonita de todo esse trabalho.

ANEXO



Módulo 1 - Conceitos básicos de simetria

 por MARINA MENDES SILVA

O que é Simetria?

No estudo da geometria, especialmente no ensino médio, focamos em três tipos fundamentais de simetria: rotação, reflexão e translação. Vamos agora explorar cada uma delas através de exemplos práticos.

1

Simetria por Rotação

Uma forma possui simetria por rotação quando ela permanece idêntica após ser girada em torno de um ponto central por um determinado ângulo, menor que 360 graus.



2

Simetria por Reflexão

Também conhecida como simetria especular, ocorre quando uma figura pode ser dividida por uma linha (o eixo de simetria) de modo que cada metade seja a imagem espelhada da outra.



3

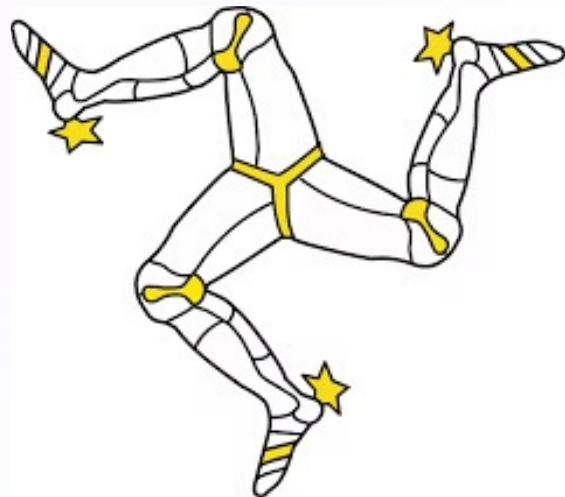
Simetria por Translação

Neste tipo de simetria, um objeto ou padrão é repetido em um espaço em uma direção específica sem que sua orientação ou tamanho sejam alterados. É como "deslizar" a forma.



Simetria por Rotação

A rotação acontece quando uma figura pode girar em torno de um ponto e permanecer igual.



Simetria por Reflexão

A reflexão acontece quando conseguimos imaginar uma linha que divide a figura em duas partes iguais.

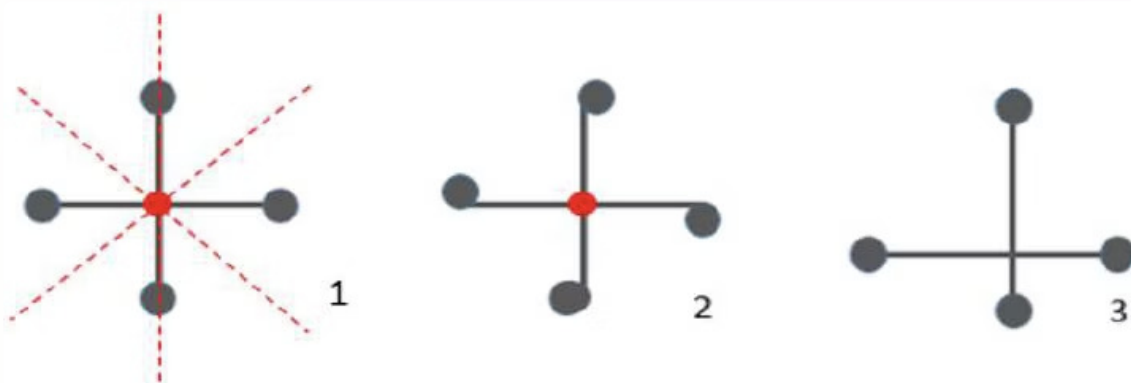


Translação



É com você:

Existe simetria nas imagens abaixo?



Espelhos Mágicos

Vamos explorar reflexões com o espelho mágico. O que acontece quando colocamos o espelho em diferentes posições?

Material

Espelhos pequenos e objetos variados.

Procedimento

Posicionar espelhos sobre objetos. Observar e desenhar a imagem refletida. É simétrica?



Dobradura Simétrica: Criando Formas

Nesta atividade, exploraremos como as dobraduras nos permitem criar figuras simétricas. Observe atentamente as linhas de reflexão que surgem durante o processo.

Material

Papel colorido, tesouras e canetas.

Procedimento

Dobrar o papel, recortar uma forma e desdobrar. Identificar a linha de reflexão e descrever a simetria.





Simetria pelo mundo

Agora, vamos procurar simetrias no mundo real e registrar o que encontramos.



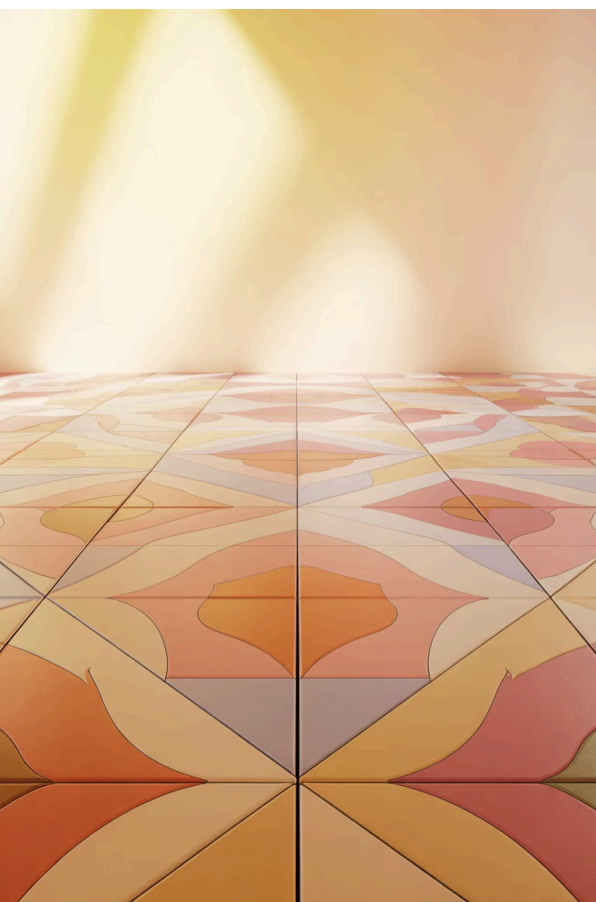
Material

Celulares, tablets, computadores ou fotos trazidas pelos alunos.



Procedimento

Encontrar objetos e imagens simétricas no dia a dia, como flores, portões e logos.



Módulo 2 — Nomeando as Simetrias

No Módulo 1, exploramos os três tipos fundamentais de simetria: rotação, reflexão e translação. Agora, neste Módulo 2, vamos aprofundar nossos conhecimentos.

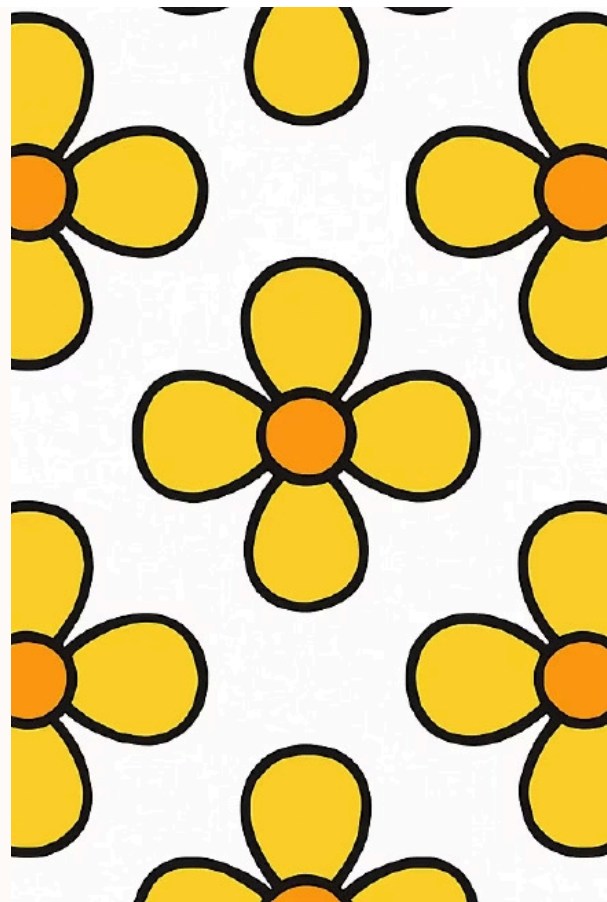
Aqui, aprenderemos a classificar e nomear os diferentes padrões de simetria que encontramos ao nosso redor, usando uma linguagem específica para descrever cada tipo de organização.

Assinatura de um padrão

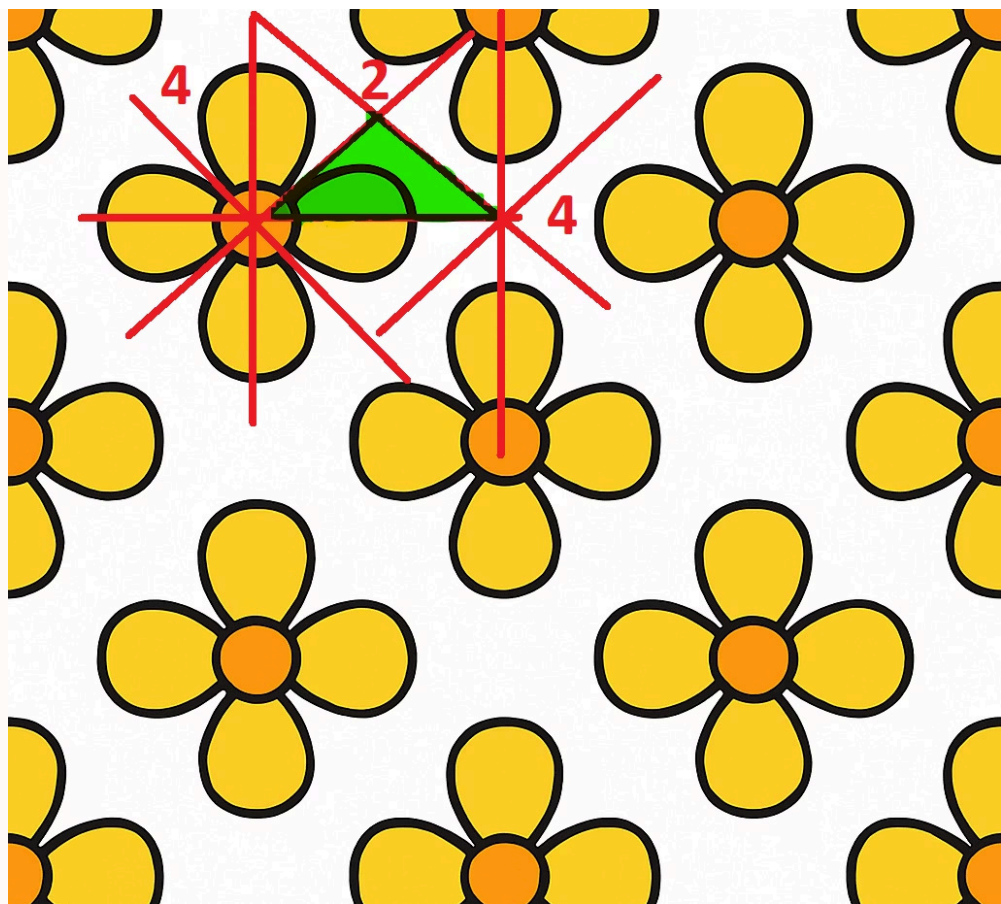
Para conseguir identificar e nomear os padrões de simetria, utilizamos uma notação específica conhecida como "Assinatura de Conway". Ela é composta por símbolos que representam os diferentes tipos de simetria presentes em um padrão. Vamos conhecer os principais símbolos:

- * (asterisco vermelho): Indica a presença de **reflexão**, ou seja, um eixo de espelhamento no padrão.
- N (número azul): Representa a **rotação de ordem N**. Isso significa que o padrão pode ser rodado em um determinado ângulo ($360^\circ/N$) e parecer o mesmo.
- ◦ (círculo): Simboliza a presença de **translação**, onde o padrão se repete ao ser deslocado em uma determinada direção sem rotação ou reflexão.

A combinação desses símbolos forma a "assinatura" única de cada padrão de simetria.



Exemplo de
assinatura *442



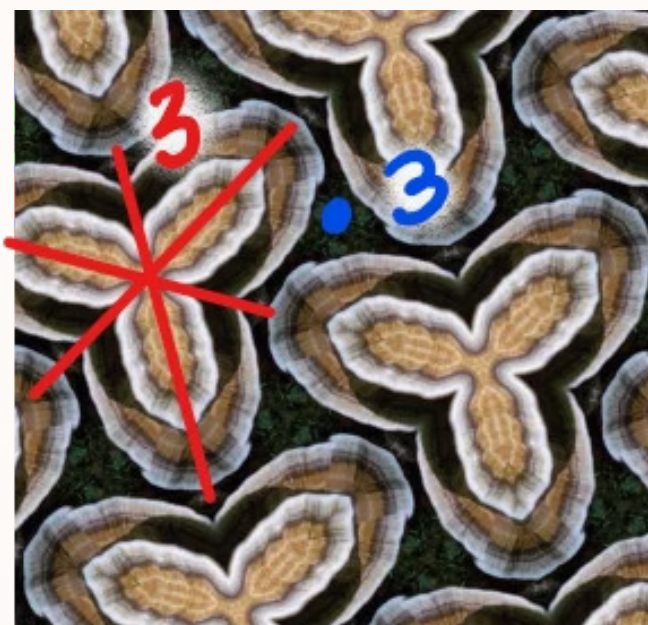
Mais um exemplo



Exemplo de assinatura 3^*3

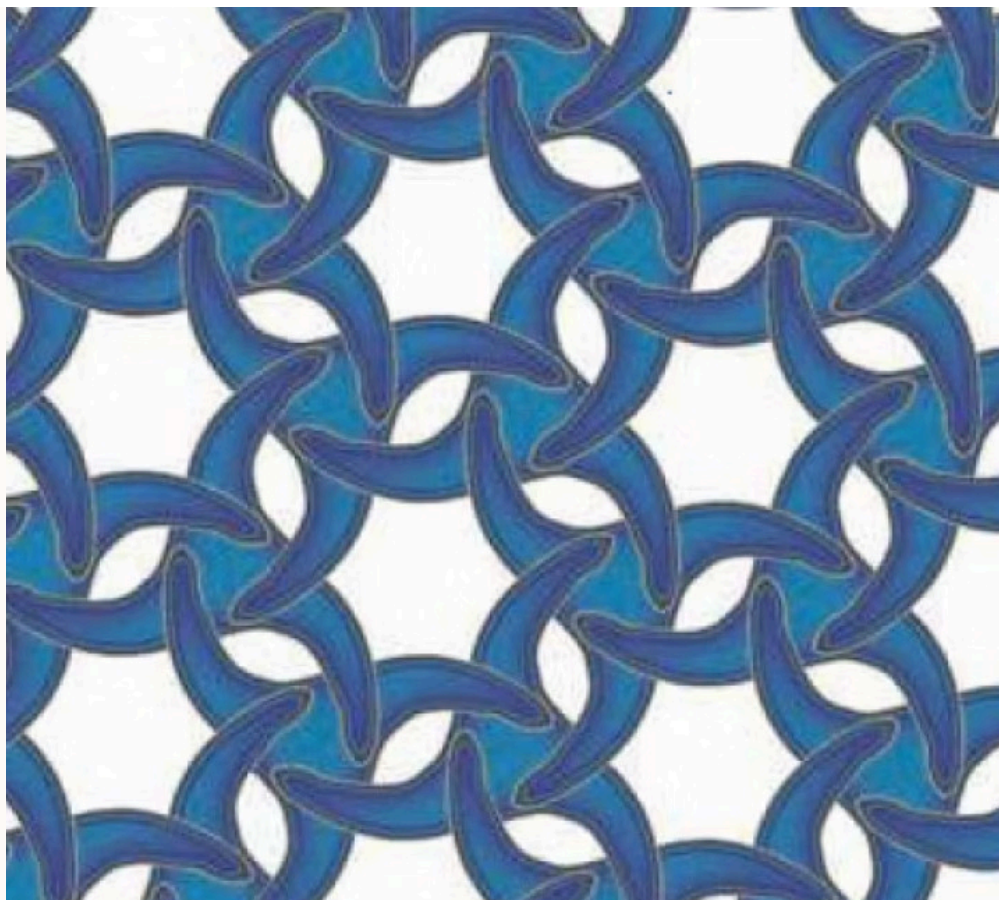
A assinatura 3^*3 representa um padrão onde:

- O **3** azul indica uma rotação de ordem 3 (120°).
- O ***** indica a presença de espelhos (reflexões).
- O último **3** mostra que existem reflexões triplas.



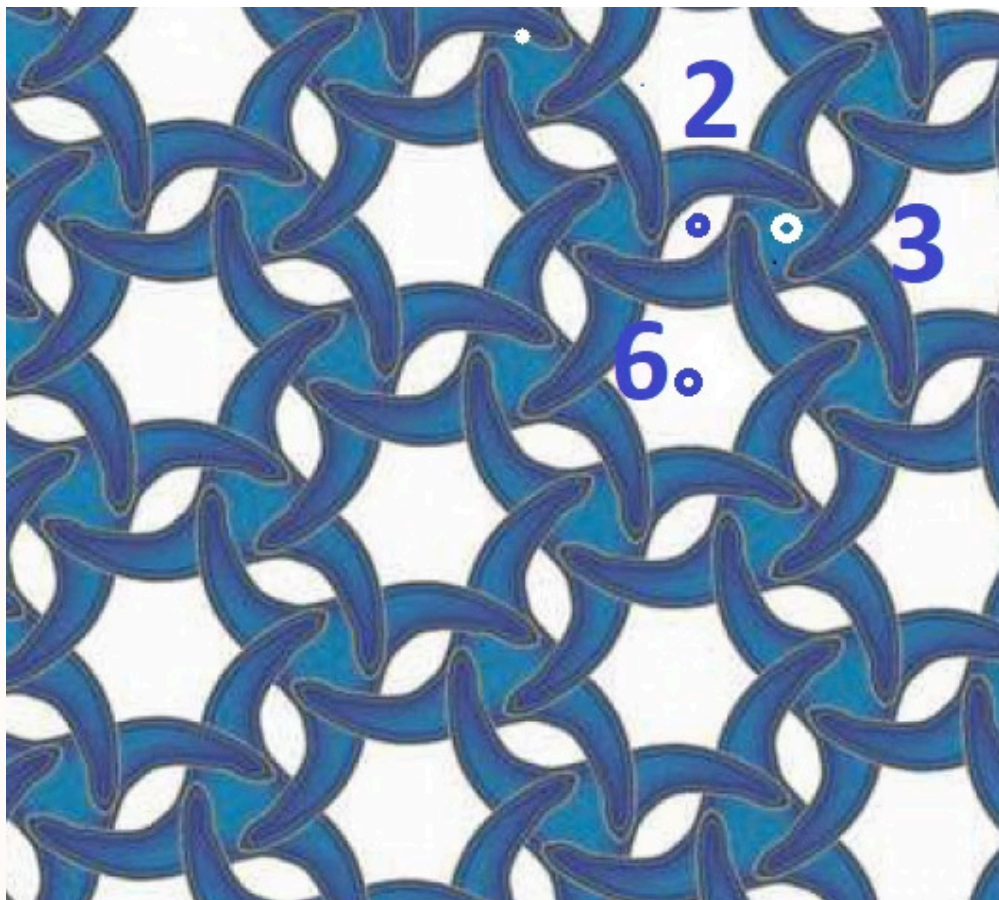
Origem das Assinaturas de Simetria

Essas assinaturas foram formalizadas e amplamente divulgadas no influente livro "*The Symmetries of Things*", escrito por John H. Conway, Heidi Burgiel e Chaim Goodman-Strauss. A obra é uma referência fundamental para a compreensão das simetrias e padrões.



Os 17 padrões possíveis no plano

Existe um teorema fundamental na geometria que demonstra que, ao combinar as simetrias de rotação, reflexão e translação de todas as formas possíveis, obtemos um número limitado e exato de 17 tipos de padrões únicos que podem preencher um plano de forma repetitiva. Estes são conhecidos como os 17 grupos de simetria do plano ou grupos de papel de parede.



Cada um desses 17 grupos descreve uma maneira distinta pela qual um padrão pode ser repetido infinitamente no plano, mantendo sua estrutura e características. A imagem ao lado ilustra um exemplo de um desses padrões, demonstrando uma das 17 combinações possíveis de simetrias.

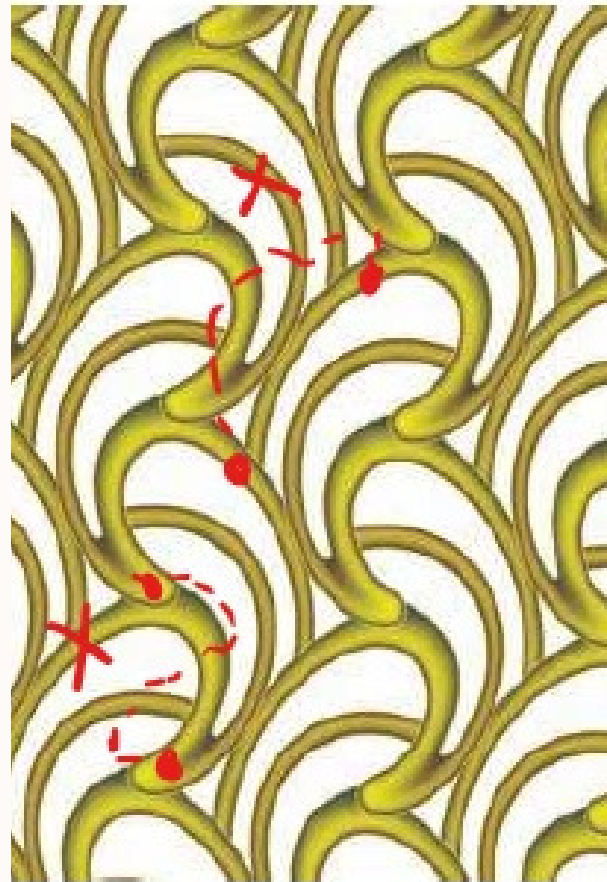


Os 17 padrões possíveis no plano

Existem apenas 17 tipos únicos de padrões de simetria que podem preencher um plano. Cada um possui uma "assinatura" distinta, que combina rotações, reflexões e translações.

*632	*442	*333	*2222	**
			2*22	*×
	4*2	3*3	22*	×
			22×	×
632	442	333	2222	○

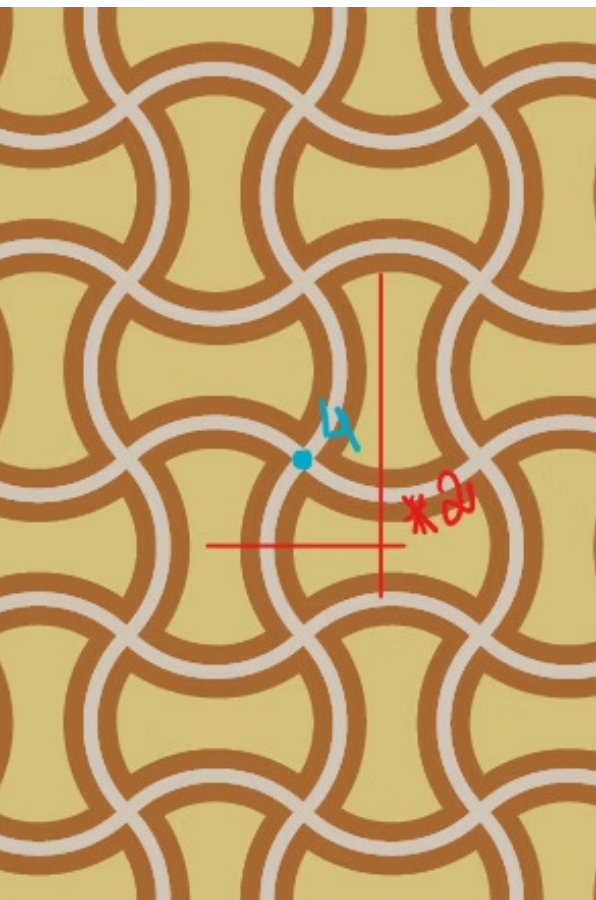
Esta tabela ilustra os 17 grupos de simetria de papel de parede, cada um com sua assinatura Conway e um exemplo visual do padrão que representa.





Módulo 3 – O Custo das Simetrias

Neste módulo, vamos entender que cada tipo de simetria tem um "custo" matemático ao construir padrões geométricos.



O que é o custo de uma simetria?

Neste contexto, cada rotação ou reflexão de uma simetria geométrica gasta uma parte de um "orçamento" matemático fixo, que é 2.

Característica de Euler - Relembrando

Para poliedros regulares (também conhecidos como Sólidos Platônicos), a Característica de Euler é sempre 2. A fórmula é dada por:

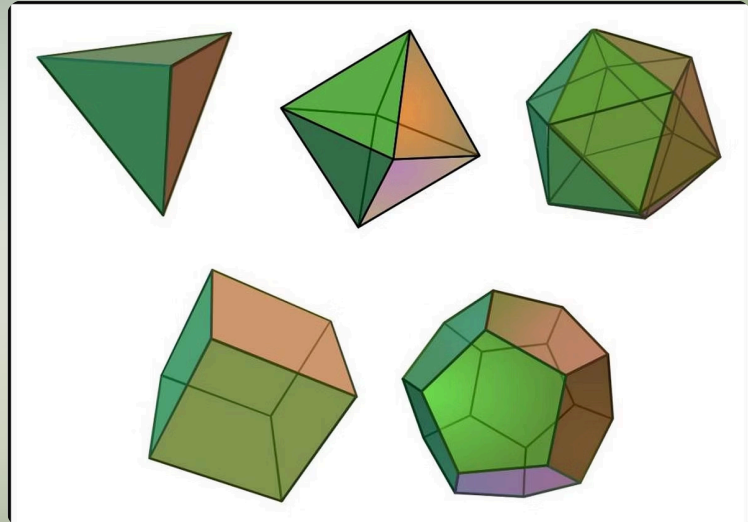
$$V - A + F = 2$$

Onde:

- V = Número de Vértices
- A = Número de Arestas
- F = Número de Faces

Vamos aplicar esta fórmula a alguns exemplos clássicos de poliedros:

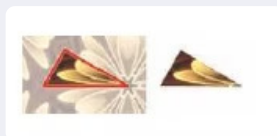
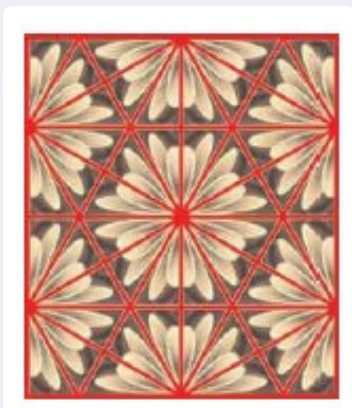
- **Tetraedro:** Possui 4 vértices, 6 arestas e 4 faces $\rightarrow 4 - 6 + 4 = 2$
- **Cubo (Hexaedro):** Possui 8 vértices, 12 arestas e 6 faces $\rightarrow 8 - 12 + 6 = 2$
- **Octaedro:** Possui 6 vértices, 12 arestas e 8 faces $\rightarrow 6 - 12 + 8 = 2$



O custo em um padrão

Esse padrão tem assinatura *632.

Para visualizar, vamos pegar um padrão com assinatura 632. Ele pode ser representado por um triângulo fundamental (o pedaço em destaque), que é justamente a parte que se repete no plano. O custo é o valor desse pedaço em relação ao todo



A regra prática é que cada vértice de ordem n "gasta" $(1 - \frac{1}{n})$. Somando os "gastos" dos três vértices do triângulo, o total tem que dar 2 no plano.

Cálculo detalhado para *632:

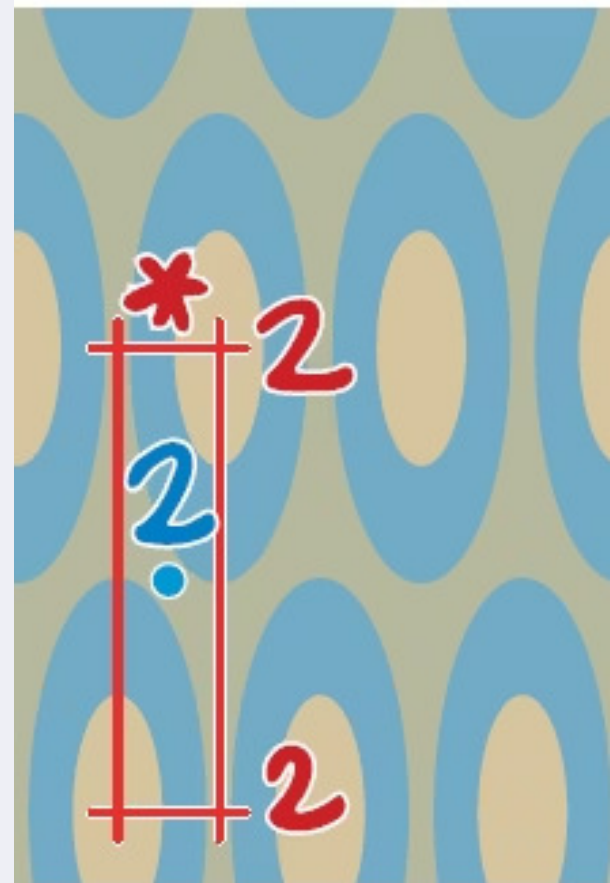
- vértice 6 + $1 - \frac{1}{6} = 5/6$
- vértice 3 + $1 - \frac{1}{3} = 2/3$
- vértice 2 + $1 - \frac{1}{2} = 1/2$

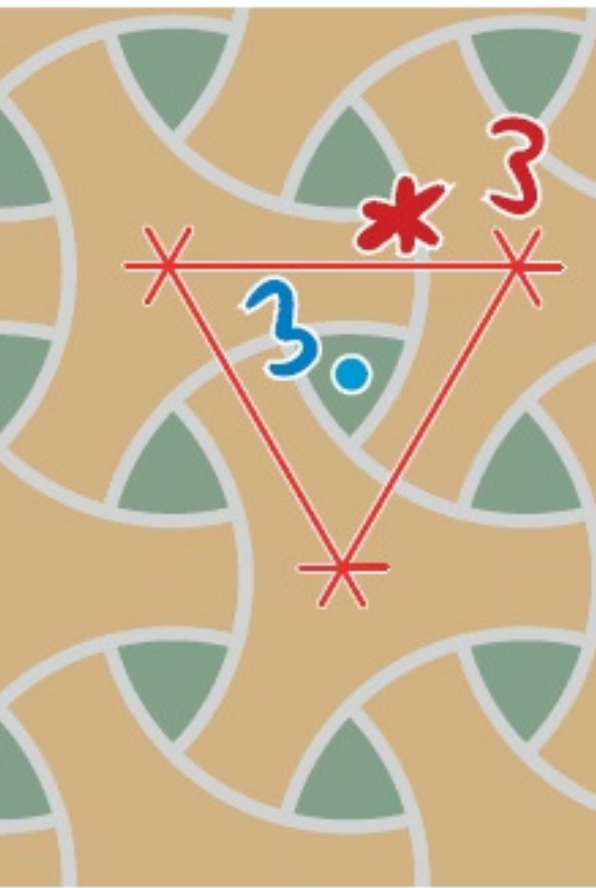
Soma: $5/6 + 2/3 + 1/2 = 10/12 + 8/12 + 6/12 = 24/12 = 2$

Conclusão: Isso mostra que o "pedaço que se repete" fecha a conta exatamente em 2, validando o padrão no plano.

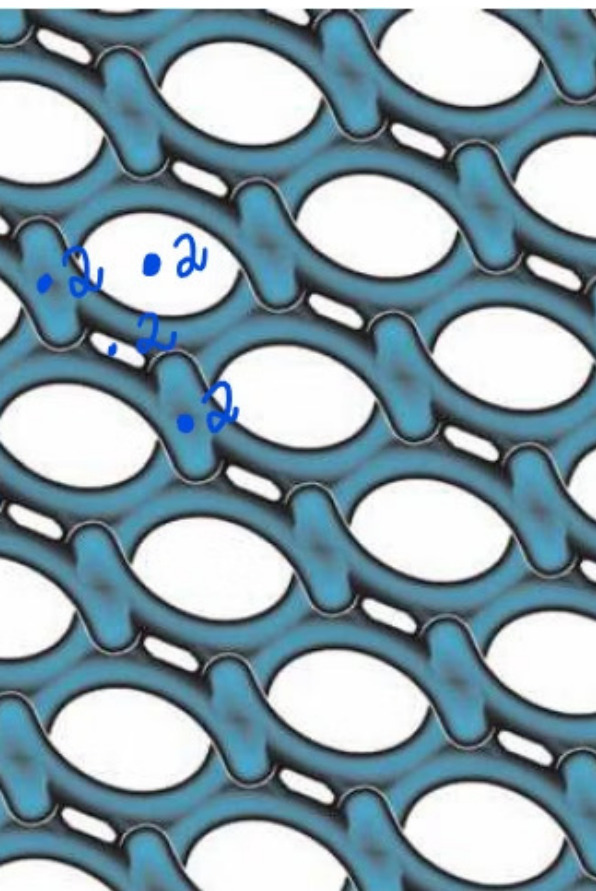
Tabela de Custos

Symbol	Cost ([§])	Symbol	Cost ([§])
○	2	* or ×	1
2	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{3}{4}$	4	$\frac{3}{8}$
5	$\frac{4}{5}$	5	$\frac{2}{5}$
6	$\frac{5}{6}$	6	$\frac{5}{12}$
⋮	⋮	⋮	⋮
N	$\frac{N-1}{N}$	N	$\frac{N-1}{2N}$
∞	1	∞	$\frac{1}{2}$





Exemplo: Assinatura 3*3



Conclusão

O estudo do custo nos mostra que cada simetria "consome" uma parte da característica de Euler. Quando somamos todos esses custos, o resultado deve ser exatamente 2 para que o padrão seja possível no plano.

Essa condição é tão restritiva que, surpreendentemente, leva a apenas 17 soluções diferentes.

No próximo módulo, vamos conhecer esses 17 padrões e entender como cada um deles aparece na prática.



Os 17 Padrões Planos

Apesar da diversidade infinita que parece existir em mosaicos, tecidos e construções, a matemática nos revela algo surpreendente: no plano existem apenas **17 padrões possíveis**

Vocês imaginavam que seriam infinitos ou poucos?

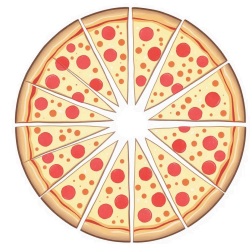


Por que a soma tem que ser 2?

Cada padrão tem que gastar exatamente 2 do orçamento do plano. Se a soma for menor que 2, o padrão não completa, sobra espaço vazio. Se for maior que 2, o padrão se sobrepõe e não encaixa.

Só quando fecha em 2 é que ele se organiza e pode se repetir no plano inteiro.

Se a soma for menor que 2, sobra espaço. Se for maior, não encaixa. Só quando a soma fecha em 2 o padrão pode se repetir



- Analogia da Pizza:** É como montar uma pizza: se os pedaços não completam, sobra; se passam do tamanho, não encaixa. Só quando somam certinho é que a pizza fica inteira.



Por que só 17 padrões?

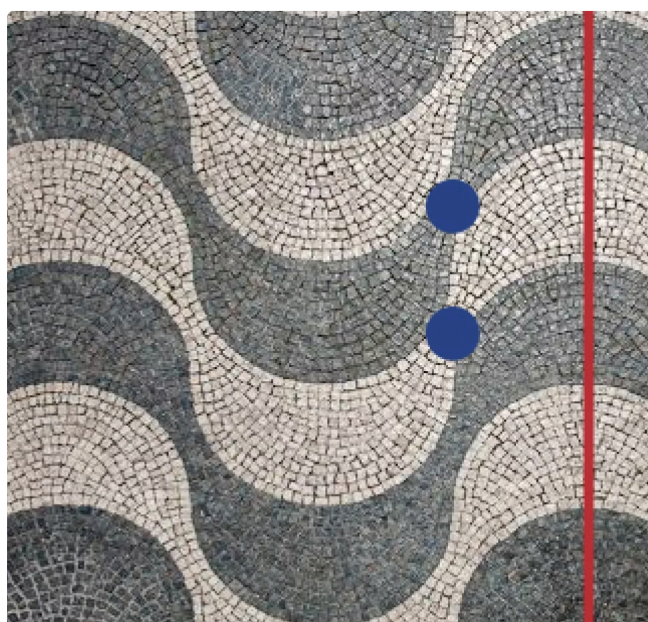
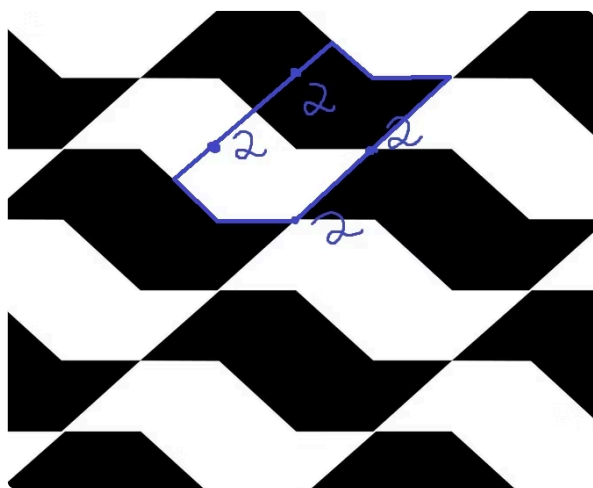
É como quando você precisa formar um valor exato com notas de dinheiro. Existem muitas notas, mas só algumas combinações chegam ao total. Na simetria do plano acontece a mesma coisa: só 17 combinações funcionam.

Você consegue identificar que padrão é esse?

Você consegue identificar?



Você consegue identificar?



**E em outras
superfícies,
quantos
padrões será
que existem?**



Autora: Marina Mendes Silva

Dissertação: Simetrias e Padrões no Ensino Básico: uma proposta didática inspirada no livro *The Symmetries of Things*

Programa: PROFMAT – UNIFESP

Ano/Série sugerida: Ensino Médio

Carga horária estimada: 2 aulas de 50 minutos por módulo.

Apresentação

Este Guia do Professor faz parte do produto educacional desenvolvido na dissertação *Simetrias e Padrões no Ensino Básico: uma proposta didática inspirada no livro The Symmetries of Things*, defendida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP).

O material foi elaborado como um guia prático para professores, reunindo propostas de aulas que traduzem conceitos avançados de simetria e padrões geométricos para a realidade do ensino médio. O objetivo é oferecer atividades que tragam uma matemática diferente, mais visual, investigativa e conectada ao cotidiano dos estudantes, sem abrir mão do rigor conceitual.

A proposta está estruturada em quatro módulos, cada um funcionando como um conjunto de aulas articuladas:

1. Conceitos Básicos de Simetria
2. Nomeando as Simetrias (Notação de Conway)
3. O Custo das Simetrias
4. Os 17 Padrões Planos

Módulo 1 – Conceitos Básicos de Simetria

Professor, comece a aula mostrando uma imagem qualquer que contenha simetria, pode ser uma flor, uma roda, uma figura geométrica simples. Pergunte para a turma: “*O que vocês veem nessa imagem? Onde já encontraram simetria no dia a dia?*”. Deixe que os alunos falem livremente, sem corrigir de imediato, apenas vá anotando no quadro os exemplos que surgirem: natureza, arquitetura, objetos do cotidiano. A ideia é levantar hipóteses e ativar o conhecimento prévio.

Depois desse momento inicial, explique: “*Vocês deram ótimos exemplos. Agora, pensando matematicamente, simetria é quando fazemos uma transformação numa figura e ela continua igual.*”. Diga também que hoje vocês vão focar em três tipos principais: rotação, reflexão e translação. Aproveite para perguntar se alguém já ouviu essas palavras em outros contextos. Alguns podem citar a rotação do ponteiro do relógio, o reflexo no espelho

ou a translação de azulejos repetidos. Valorize essas contribuições e conecte com a matemática.

Em seguida, mostre exemplos de rotação. Pegue um objeto real, como a tampa de uma garrafa, e mostre que, ao girar, ela continua a mesma. Diga: *“Rotação é quando uma figura gira em torno de um ponto e continua igual. Pensem numa roda-gigante ou nos ponteiros do relógio.”*. Pergunte: *“Que outros exemplos vocês lembram de algo que gira e fica igual?”*. Os alunos podem citar moedas girando, flores vistas de cima, estrelas. Aproveite para reforçar o conceito de centro de rotação no quadro.

Passe para a reflexão. Diga: *“A reflexão acontece quando conseguimos imaginar uma linha que divide a figura em duas partes iguais, como no espelho ou nas asas de uma borboleta.”*. Pergunte: *“Quais letras do alfabeto têm simetria de reflexão?”*. Incentive que testem no caderno, desenhando as letras e traçando as linhas de simetria. Depois complemente: algumas letras, como A, H, I, M, O, T, U, V, W, X e Y são simétricas; outras não. Use exemplos no quadro para reforçar.

Na sequência, trabalhe a translação. Diga: *“Na translação, a figura se repete sem mudar de forma nem de tamanho. É como deslizar a mesma figura várias vezes. Um bom exemplo é o calçamento de Copacabana, os azulejos portugueses ou uma grade de janela.”*. Pergunte: *“Vocês conseguem citar outros lugares onde vemos esse tipo de repetição?”*. Espere que mencionem estampas de roupas, papel de parede, telhados. Conecte com a cultura e com o cotidiano dos alunos.

Depois de apresentar os três tipos de simetria, faça uma pequena atividade de identificação. Mostre algumas imagens e peça: *“Qual tipo de simetria aparece aqui?”*. Espere que identifiquem rotação, reflexão ou ausência de simetria. Incentive justificativas curtas, apenas para fixar o conceito.

Agora proponha a atividade do **Espelho Mágico**. Entregue espelhos para os grupos e oriente: *“Experimentem colocar o espelho em diferentes posições, com letras, objetos ou desenhos, e vejam o que acontece.”*. Pergunte: *“Será que todas as letras ficam iguais quando refletidas?”*. Eles vão perceber que apenas algumas se mantêm iguais. Deixe que explorem e registrem o que encontrarem em desenhos ou fotos.

Finalize com a atividade de dobradura. Entregue folhas, peça para dobrarem, recortarem e abrirem para ver as figuras simétricas que surgem. Explique que as linhas de dobra são as linhas de reflexão. Sugira figuras simples, como corações ou estrelas, mas, se a turma gostar, desafie-os com origamis.

Encerrando a aula, diga: *“Na próxima aula quero que vocês tragam exemplos de simetrias que encontrarem no mundo real. Pode ser numa flor, num portão, numa estampa de roupa, até no logo de uma marca.”*. Combine a forma de registro (foto, desenho, anotação) e depois monte um mural coletivo com os achados da turma.

Módulo 2 – Nomeando as Simetrias (Notação de Conway)

Professor, comece retomando rapidamente o que foi feito no módulo anterior. Pergunte: “Vocês lembram quais eram os três tipos de simetria que estudamos na aula passada?”. Espere que respondam rotação, reflexão e translação. Valorize a lembrança deles e diga: “Muito bem! Agora vamos aprender uma forma de dar nomes para os padrões usando uma linguagem matemática, chamada **assinatura**. É como se fosse um código secreto que descreve todas as simetrias de um desenho.”

Explique que cada assinatura combina símbolos. Os números indicam rotações, enquanto o asterisco (*) mostra a presença de espelhos, ou seja, de simetrias de reflexão. Diga: “Com esses símbolos conseguimos escrever a assinatura de qualquer padrão do plano.”. Pergunte: “Se eu mostrar para vocês um código como 442, será que dá para imaginar como é o padrão?”. Alguns alunos vão dizer que sim, outros que não, e está tudo bem — o objetivo é mostrar que com prática eles vão conseguir.

Mostre então o primeiro exemplo, a assinatura *442. Diga: “O asterisco mostra que existem reflexões. O 4 representa rotações de 90° e o 2 representa rotações de 180° . Só essa combinação já descreve todas as simetrias do padrão.”. Incentive a turma: “Onde vocês acham que está a rotação de ordem 4 nesse desenho? E onde estão os espelhos?”. Espere que apontem o centro da figura e as linhas que a dividem em partes iguais. Mostre você mesmo no quadro ou no slide, reforçando a observação.

Passe em seguida ao exemplo 3*3. Diga: “Aqui o número 3 mostra rotações de 120° . O asterisco indica espelhos, e o último 3 mostra que essas reflexões passam por um centro de rotação de ordem 3.”. Pergunte: “Se tirássemos os espelhos, o padrão continuaria o mesmo?”. Os alunos vão perceber que não, porque as reflexões mudam completamente o padrão. Reforce: “A assinatura muda o padrão por completo. Sem o espelho, teríamos apenas rotações.”.

Depois apresente o exemplo 632. Diga: “Nessa assinatura, temos três rotações diferentes: uma de ordem 6 (60°), uma de ordem 3 (120°) e uma de ordem 2 (180°). Apenas com esses números já conseguimos descrever todas as simetrias do padrão.”. Pergunte para a turma: “Vocês conseguem pensar em coisas do dia a dia que tenham essas rotações?”. Espere que respondam colmeias de abelha ou flocos de neve (ordem 6), triângulos equiláteros ou cataventos (ordem 3), cruces ou janelas com duas divisões (ordem 2). Aproveite para mostrar imagens de mosaicos hexagonais e reforçar o conceito.

Nesse ponto, explique de onde vem essa notação. Diga: “Essa linguagem foi organizada no livro *The Symmetries of Things*, de John Conway e colegas. É uma forma elegante de classificar padrões e hoje é usada no mundo todo.”. Pergunte: “Por que será que é importante ter uma linguagem universal para falar de padrões de simetria?”. Os alunos vão comentar que ajuda a entender melhor, que facilita a comunicação e que permite que matemáticos e artistas falem a mesma língua.

Mostre agora a tabela completa dos 17 padrões possíveis no plano. Diga: “Um resultado matemático incrível mostra que, combinando rotações e reflexões, só existem **17 tipos de padrões diferentes** no plano. Nenhum a mais, nenhum a menos.”. Pergunte: “Vocês reconhecem aqui algum padrão parecido com os que já estudamos?”. Alguns vão

identificar o 632 como colmeia, outros podem associar o *442 a mosaicos de azulejo. Dê tempo para que explorem a tabela antes de você comentar.

Finalize a aula retomando o que foi aprendido. Diga: *“Hoje vimos que as assinaturas funcionam como uma linguagem matemática para descrever padrões. Essa linguagem vai ser essencial no próximo módulo, quando vamos falar sobre o custo das simetrias.”*. Para manter a curiosidade acesa, deixe uma pergunta no ar: *“Se cada padrão tem uma assinatura, o que será que acontece quando tentamos medir o ‘peso’ de cada simetria?”*.

Módulo 3 – O Custo das Simetrias

Professor, inicie este módulo lembrando a turma do que aprenderam no anterior. Diga: *“Agora que já sabemos dar nomes para os padrões, vamos conhecer um conceito muito importante: o custo das simetrias. Assim como no nosso dia a dia cada coisa tem um preço, na matemática cada simetria também tem um custo. Esse custo vem de um orçamento fixo, que é sempre 2. Se passarmos desse valor, o padrão não pode existir no plano.”*.

Pergunte aos alunos: *“O que vocês acham, será que todos os padrões gastam exatamente 2, menos que 2 ou mais que 2?”*. Deixe que arrisquem hipóteses, mas não corrija de imediato — apenas registre no quadro. Ao longo da aula vocês vão descobrir juntos que a soma tem que dar exatamente 2.

A característica de Euler é um número que resume a forma de um objeto, relacionando seus vértices, arestas e faces. Para poliedros, por exemplo, ela é dada pela fórmula

$$\chi = V - A + F,$$

onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces. Assim, a característica de Euler funciona como um tipo de ‘orçamento’ que precisa ser distribuído entre as simetrias de cada padrão.

Explique então de onde vem essa ideia. Diga: *“Cada rotação ou reflexão aparece em um ponto especial chamado ponto de ordem n. O custo desse ponto é calculado por uma regra bem simples: $(n-1)/n$. Por exemplo, um ponto de ordem 2 gasta 1/2, um ponto de ordem 3 gasta 2/3 e um ponto de ordem 6 gasta 5/6.”*. Pergunte: *“E se tivermos um ponto de ordem 4, qual será o custo dele?”*. Espere que respondam 3/4 e confirme. Aproveite para explicar que essa regra vem da característica de Euler, mas que no ensino médio não é preciso se aprofundar nessa parte formal.

Agora mostre um exemplo concreto: o padrão *632. Diga: *“Esse padrão pode ser representado por um triângulo fundamental, que é o pedaço que se repete no plano. Ele tem três vértices: um de ordem 6, um de ordem 3 e um de ordem 2. Vamos calcular o custo de cada um.”*. Escreva no quadro: 5/6, 2/3 e 1/2. Em seguida, faça a soma: $5/6 + 2/3 + 1/2 = 2$. Pergunte: *“O que significa o fato de a soma dar exatamente 2?”*. Os alunos vão perceber que isso confirma que o padrão *632 é possível no plano.

Para facilitar os cálculos, apresente uma tabela prática com alguns valores: ordem 2 → $1/2$; ordem 3 → $2/3$; ordem 4 → $3/4$; ordem 6 → $5/6$. Diga: “Com essa tabela conseguimos calcular mais rápido se um padrão é possível ou não.”. Pergunte: “E se tivermos um ponto de ordem 5, qual será o custo?”. Espere que respondam $4/5$ e confirme. Incentive que completem a tabela com outros exemplos.

Faça um novo exemplo com a assinatura 33. Diga: “Cada vértice de ordem 3 gasta $2/3$. Somando, chegamos a 2 novamente.”. Pergunte: “O que isso nos confirma?”. Os alunos responderão que esse padrão também é possível no plano. Use esse momento para propor que calculem outras assinaturas em duplas, reforçando a ideia da soma.

Finalize com a conclusão: “O estudo do custo mostra que cada simetria consome uma parte do orçamento de Euler. Para que o padrão seja possível no plano, a soma tem que ser exatamente 2. Isso é tão restritivo que só existem 17 padrões possíveis. No próximo módulo vamos conhecer quais são esses 17 padrões e como eles aparecem no nosso dia a dia.”. Pergunte: “Vocês acham que esses 17 padrões estão presentes no cotidiano de vocês? Onde?”. Espere que citem mosaicos, pisos, tecidos, azulejos, e aproveite para já preparar a transição para o módulo seguinte.

Módulo 4 - Os 17 Padrões Planos

Professor, comece esta aula com uma abertura impactante. Diga: “Apesar da diversidade infinita que parece existir em mosaicos, tecidos e construções, a matemática nos revela algo surpreendente: no plano existem apenas 17 padrões possíveis.”. Deixe a turma reagir e em seguida pergunte: “Vocês imaginavam que seriam infinitos ou poucos?”. O objetivo é provocar surpresa e despertar a curiosidade.

Na sequência, retome a ideia do custo. Explique: “Cada padrão tem que gastar exatamente 2 do orçamento do plano. Se a soma for menor que 2, o padrão não completa: sobra espaço vazio. Se for maior que 2, o padrão se sobrepõe e não encaixa. Só quando fecha em 2 é que ele se organiza e pode se repetir no plano inteiro.”.

Para tornar a explicação mais concreta, use uma analogia próxima: “É como montar uma pizza: se os pedaços não completam, sobra; se passam do tamanho, não encaixam. Só quando somam certinho é que a pizza fica inteira.”. Isso ajuda os alunos do ensino médio a visualizarem de forma simples o porquê da soma sempre precisar ser 2.

Agora avance para a questão central. Diga: “Se o orçamento é sempre fixo e só pode ser 2, as combinações possíveis de custos são muito limitadas. É como quando você precisa formar um valor exato com notas de dinheiro. Existem muitas notas, mas só algumas combinações chegam ao total. Na simetria do plano acontece a mesma coisa: apenas 17 combinações funcionam.”.

Em seguida, proponha um exercício de observação. Mostre imagens de diferentes padrões e pergunte: “Vocês conseguem identificar que padrão é esse?”. Incentive que conversem em dupla ou em grupo antes de você dar a resposta. Essa dinâmica torna o reconhecimento mais participativo e ajuda a fixar a ideia dos 17 padrões.

Finalize a aula ampliando o horizonte dos alunos. Diga: “*Se no plano existem apenas 17 padrões, e em outras superfícies? Quantos padrões será que podem existir em uma esfera, ou em um toro?*”. Deixe essa pergunta em aberto como provocação. Ela encerra o módulo com curiosidade e conecta com outros contextos matemáticos, mesmo que não sejam trabalhados em detalhe no ensino médio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Luciene Parron Gimenes Arantes, Wellen Eder Pedrochi, and Rodrigo Martins. Característica de euler-poincaré para poliedros n-tóricos. *Professor de Matemática Online*, 7:215–225, 2021. Acesso em:18/08/2025.
- [2] F. Bellemain and A. Jahn. Padrões geométricos e simetria no ensino de matemática. *Educação Matemática em Revista*, (25):49–59, 2008.
- [3] A. Cannas da Silva, J. F. Rodrigues, and S. M. Nápoles. As simetrias nas calçadas de lisboa. *Revista Ciência Elem.*, 12(3):025, 2024.
- [4] John H Conway, Heidi Burgiel, and Chaim Goodman-Strauss. *The symmetries of things*. CRC Press, 2016.
- [5] Ministério da Educação do Brasil. Base Nacional Comum Curricular (BNCC), 2017. Acessado em: 7 jan. 2025.
- [6] Miriam Godoy Penteadó. Geometria e tecnologia: visualização e representação no ensino de matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(42):223–246, 2012.
- [7] W. O. Santos and E. D. Gomes. A simetria como tema interdisciplinar: conexões entre arte e matemática. *Revista Cocar*, 15(32):1–16, 2021.
- [8] SÃO PAULO (Estado). Habilidades essenciais: anos finais – Matemática, 2021. Acesso em: 15/03/2025.