

**Autora:** Marina Mendes Silva

**Dissertação:** Simetrias e Padrões no Ensino Básico: uma proposta didática inspirada no livro *The Symmetries of Things*

**Programa:** PROFMAT – UNIFESP

**Ano/Série sugerida:** Ensino Médio

**Carga horária estimada:** 2 aulas de 50 minutos por módulo.

## Apresentação

Este Guia do Professor faz parte do produto educacional desenvolvido na dissertação *Simetrias e Padrões no Ensino Básico: uma proposta didática inspirada no livro The Symmetries of Things*, defendida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP).

O material foi elaborado como um guia prático para professores, reunindo propostas de aulas que traduzem conceitos avançados de simetria e padrões geométricos para a realidade do ensino médio. O objetivo é oferecer atividades que tragam uma matemática diferente, mais visual, investigativa e conectada ao cotidiano dos estudantes, sem abrir mão do rigor conceitual.

A proposta está estruturada em quatro módulos, cada um funcionando como um conjunto de aulas articuladas:

1. Conceitos Básicos de Simetria
2. Nomeando as Simetrias (Notação de Conway)
3. O Custo das Simetrias
4. Os 17 Padrões Planos

## Módulo 1 – Conceitos Básicos de Simetria

Professor, comece a aula mostrando uma imagem qualquer que contenha simetria, pode ser uma flor, uma roda, uma figura geométrica simples. Pergunte para a turma: “*O que vocês veem nessa imagem? Onde já encontraram simetria no dia a dia?*”. Deixe que os alunos falem livremente, sem corrigir de imediato, apenas vá anotando no quadro os exemplos que surgirem: natureza, arquitetura, objetos do cotidiano. A ideia é levantar hipóteses e ativar o conhecimento prévio.

Depois desse momento inicial, explique: “*Vocês deram ótimos exemplos. Agora, pensando matematicamente, simetria é quando fazemos uma transformação numa figura e ela continua igual.*”. Diga também que hoje vocês vão focar em três tipos principais: rotação, reflexão e translação. Aproveite para perguntar se alguém já ouviu essas palavras em outros contextos. Alguns podem citar a rotação do ponteiro do relógio, o reflexo no espelho

ou a translação de azulejos repetidos. Valorize essas contribuições e conecte com a matemática.

Em seguida, mostre exemplos de rotação. Pegue um objeto real, como a tampa de uma garrafa, e mostre que, ao girar, ela continua a mesma. Diga: *“Rotação é quando uma figura gira em torno de um ponto e continua igual. Pensem numa roda-gigante ou nos ponteiros do relógio.”*. Pergunte: *“Que outros exemplos vocês lembram de algo que gira e fica igual?”*. Os alunos podem citar moedas girando, flores vistas de cima, estrelas. Aproveite para reforçar o conceito de centro de rotação no quadro.

Passe para a reflexão. Diga: *“A reflexão acontece quando conseguimos imaginar uma linha que divide a figura em duas partes iguais, como no espelho ou nas asas de uma borboleta.”*. Pergunte: *“Quais letras do alfabeto têm simetria de reflexão?”*. Incentive que testem no caderno, desenhando as letras e traçando as linhas de simetria. Depois complemente: algumas letras, como A, H, I, M, O, T, U, V, W, X e Y são simétricas; outras não. Use exemplos no quadro para reforçar.

Na sequência, trabalhe a translação. Diga: *“Na translação, a figura se repete sem mudar de forma nem de tamanho. É como deslizar a mesma figura várias vezes. Um bom exemplo é o calçadão de Copacabana, os azulejos portugueses ou uma grade de janela.”*. Pergunte: *“Vocês conseguem citar outros lugares onde vemos esse tipo de repetição?”*. Espere que mencionem estampas de roupas, papel de parede, telhados. Conecte com a cultura e com o cotidiano dos alunos.

Depois de apresentar os três tipos de simetria, faça uma pequena atividade de identificação. Mostre algumas imagens e peça: *“Qual tipo de simetria aparece aqui?”*. Espere que identifiquem rotação, reflexão ou ausência de simetria. Incentive justificativas curtas, apenas para fixar o conceito.

Agora proponha a atividade do **Espelho Mágico**. Entregue espelhos para os grupos e oriente: *“Experimentem colocar o espelho em diferentes posições, com letras, objetos ou desenhos, e vejam o que acontece.”*. Pergunte: *“Será que todas as letras ficam iguais quando refletidas?”*. Eles vão perceber que apenas algumas se mantêm iguais. Deixe que explorem e registrem o que encontrarem em desenhos ou fotos.

Finalize com a atividade de dobradura. Entregue folhas, peça para dobrarem, recortarem e abrirem para ver as figuras simétricas que surgem. Explique que as linhas de dobra são as linhas de reflexão. Sugira figuras simples, como corações ou estrelas, mas, se a turma gostar, desafie-os com origamis.

Encerrando a aula, diga: *“Na próxima aula quero que vocês tragam exemplos de simetrias que encontrarem no mundo real. Pode ser numa flor, num portão, numa estampa de roupa, até no logo de uma marca.”*. Combine a forma de registro (foto, desenho, anotação) e depois monte um mural coletivo com os achados da turma.

## Módulo 2 – Nomeando as Simetrias (Notação de Conway)

Professor, comece retomando rapidamente o que foi feito no módulo anterior. Pergunte: “*Vocês lembram quais eram os três tipos de simetria que estudamos na aula passada?*”. Espere que respondam rotação, reflexão e translação. Valorize a lembrança deles e diga: “*Muito bem! Agora vamos aprender uma forma de dar nomes para os padrões usando uma linguagem matemática, chamada **assinatura**. É como se fosse um código secreto que descreve todas as simetrias de um desenho.*”

Explique que cada assinatura combina símbolos. Os números indicam rotações, enquanto o asterisco (\*) mostra a presença de espelhos, ou seja, de simetrias de reflexão. Diga: “*Com esses símbolos conseguimos escrever a assinatura de qualquer padrão do plano.*”. Pergunte: “*Se eu mostrar para vocês um código como 442, será que dá para imaginar como é o padrão?*”. Alguns alunos vão dizer que sim, outros que não, e está tudo bem — o objetivo é mostrar que com prática eles vão conseguir.

Mostre então o primeiro exemplo, a assinatura \*442. Diga: “*O asterisco mostra que existem reflexões. O 4 representa rotações de 90° e o 2 representa rotações de 180°. Só essa combinação já descreve todas as simetrias do padrão.*”. Incentive a turma: “*Onde vocês acham que está a rotação de ordem 4 nesse desenho? E onde estão os espelhos?*”. Espere que apontem o centro da figura e as linhas que a dividem em partes iguais. Mostre você mesmo no quadro ou no slide, reforçando a observação.

Passe em seguida ao exemplo 3\*3. Diga: “*Aqui o número 3 mostra rotações de 120°. O asterisco indica espelhos, e o último 3 mostra que essas reflexões passam por um centro de rotação de ordem 3.*”. Pergunte: “*Se tirássemos os espelhos, o padrão continuaria o mesmo?*”. Os alunos vão perceber que não, porque as reflexões mudam completamente o padrão. Reforce: “*A assinatura muda o padrão por completo. Sem o espelho, teríamos apenas rotações.*”.

Depois apresente o exemplo 632. Diga: “*Nessa assinatura, temos três rotações diferentes: uma de ordem 6 (60°), uma de ordem 3 (120°) e uma de ordem 2 (180°). Apenas com esses números já conseguimos descrever todas as simetrias do padrão.*”. Pergunte para a turma: “*Vocês conseguem pensar em coisas do dia a dia que tenham essas rotações?*”. Espere que respondam colmeias de abelha ou flocos de neve (ordem 6), triângulos equiláteros ou cataventos (ordem 3), cruzeiros ou janelas com duas divisões (ordem 2). Aproveite para mostrar imagens de mosaicos hexagonais e reforçar o conceito.

Nesse ponto, explique de onde vem essa notação. Diga: “*Essa linguagem foi organizada no livro *The Symmetries of Things*, de John Conway e colegas. É uma forma elegante de classificar padrões e hoje é usada no mundo todo.*”. Pergunte: “*Por que será que é importante ter uma linguagem universal para falar de padrões de simetria?*”. Os alunos vão comentar que ajuda a entender melhor, que facilita a comunicação e que permite que matemáticos e artistas falem a mesma língua.

Mostre agora a tabela completa dos 17 padrões possíveis no plano. Diga: “*Um resultado matemático incrível mostra que, combinando rotações e reflexões, só existem **17 tipos de padrões diferentes** no plano. Nenhum a mais, nenhum a menos.*”. Pergunte: “*Vocês reconhecem aqui algum padrão parecido com os que já estudamos?*”. Alguns vão

identificar o 632 como colmeia, outros podem associar o \*442 a mosaicos de azulejo. Dê tempo para que explorem a tabela antes de você comentar.

Finalize a aula retomando o que foi aprendido. Diga: *“Hoje vimos que as assinaturas funcionam como uma linguagem matemática para descrever padrões. Essa linguagem vai ser essencial no próximo módulo, quando vamos falar sobre o custo das simetrias.”*. Para manter a curiosidade acesa, deixe uma pergunta no ar: *“Se cada padrão tem uma assinatura, o que será que acontece quando tentamos medir o ‘peso’ de cada simetria?”*.

### Módulo 3 – O Custo das Simetrias

Professor, inicie este módulo lembrando a turma do que aprenderam no anterior. Diga: *“Agora que já sabemos dar nomes para os padrões, vamos conhecer um conceito muito importante: o custo das simetrias. Assim como no nosso dia a dia cada coisa tem um preço, na matemática cada simetria também tem um custo. Esse custo vem de um orçamento fixo, que é sempre 2. Se passarmos desse valor, o padrão não pode existir no plano.”*.

Pergunte aos alunos: *“O que vocês acham, será que todos os padrões gastam exatamente 2, menos que 2 ou mais que 2?”*. Deixe que arrisquem hipóteses, mas não corrija de imediato — apenas registre no quadro. Ao longo da aula vocês vão descobrir juntos que a soma tem que dar exatamente 2.

A característica de Euler é um número que resume a forma de um objeto, relacionando seus vértices, arestas e faces. Para poliedros, por exemplo, ela é dada pela fórmula

$$\chi = V - A + F,$$

onde V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces. Assim, a característica de Euler funciona como um tipo de ‘orçamento’ que precisa ser distribuído entre as simetrias de cada padrão.

Explique então de onde vem essa ideia. Diga: *“Cada rotação ou reflexão aparece em um ponto especial chamado ponto de ordem n. O custo desse ponto é calculado por uma regra bem simples:  $(n-1)/n$ . Por exemplo, um ponto de ordem 2 gasta 1/2, um ponto de ordem 3 gasta 2/3 e um ponto de ordem 6 gasta 5/6.”*. Pergunte: *“E se tivermos um ponto de ordem 4, qual será o custo dele?”*. Espere que respondam 3/4 e confirme. Aproveite para explicar que essa regra vem da característica de Euler, mas que no ensino médio não é preciso se aprofundar nessa parte formal.

Agora mostre um exemplo concreto: o padrão \*632. Diga: *“Esse padrão pode ser representado por um triângulo fundamental, que é o pedaço que se repete no plano. Ele tem três vértices: um de ordem 6, um de ordem 3 e um de ordem 2. Vamos calcular o custo de cada um.”*. Escreva no quadro: 5/6, 2/3 e 1/2. Em seguida, faça a soma:  $5/6 + 2/3 + 1/2 = 2$ . Pergunte: *“O que significa o fato de a soma dar exatamente 2?”*. Os alunos vão perceber que isso confirma que o padrão \*632 é possível no plano.

Para facilitar os cálculos, apresente uma tabela prática com alguns valores: ordem 2 →  $1/2$ ; ordem 3 →  $2/3$ ; ordem 4 →  $3/4$ ; ordem 6 →  $5/6$ . Diga: “Com essa tabela conseguimos calcular mais rápido se um padrão é possível ou não.”. Pergunte: “E se tivermos um ponto de ordem 5, qual será o custo?”. Espere que respondam  $4/5$  e confirme. Incentive que completem a tabela com outros exemplos.

Faça um novo exemplo com a assinatura 33. Diga: “Cada vértice de ordem 3 gasta  $2/3$ . Somando, chegamos a 2 novamente.”. Pergunte: “O que isso nos confirma?”. Os alunos responderão que esse padrão também é possível no plano. Use esse momento para propor que calculem outras assinaturas em duplas, reforçando a ideia da soma.

Finalize com a conclusão: “O estudo do custo mostra que cada simetria consome uma parte do orçamento de Euler. Para que o padrão seja possível no plano, a soma tem que ser exatamente 2. Isso é tão restritivo que só existem 17 padrões possíveis. No próximo módulo vamos conhecer quais são esses 17 padrões e como eles aparecem no nosso dia a dia.”. Pergunte: “Vocês acham que esses 17 padrões estão presentes no cotidiano de vocês? Onde?”. Espere que citem mosaicos, pisos, tecidos, azulejos, e aproveite para já preparar a transição para o módulo seguinte.

## Módulo 4 - Os 17 Padrões Planos

Professor, comece esta aula com uma abertura impactante. Diga: “Apesar da diversidade infinita que parece existir em mosaicos, tecidos e construções, a matemática nos revela algo surpreendente: no plano existem apenas 17 padrões possíveis.”. Deixe a turma reagir e em seguida pergunte: “Vocês imaginavam que seriam infinitos ou poucos?”. O objetivo é provocar surpresa e despertar a curiosidade.

Na sequência, retome a ideia do custo. Explique: “Cada padrão tem que gastar exatamente 2 do orçamento do plano. Se a soma for menor que 2, o padrão não completa: sobra espaço vazio. Se for maior que 2, o padrão se sobrepõe e não encaixa. Só quando fecha em 2 é que ele se organiza e pode se repetir no plano inteiro.”.

Para tornar a explicação mais concreta, use uma analogia próxima: “É como montar uma pizza: se os pedaços não completam, sobra; se passam do tamanho, não encaixam. Só quando somam certinho é que a pizza fica inteira.”. Isso ajuda os alunos do ensino médio a visualizarem de forma simples o porquê da soma sempre precisar ser 2.

Agora avance para a questão central. Diga: “Se o orçamento é sempre fixo e só pode ser 2, as combinações possíveis de custos são muito limitadas. É como quando você precisa formar um valor exato com notas de dinheiro. Existem muitas notas, mas só algumas combinações chegam ao total. Na simetria do plano acontece a mesma coisa: apenas 17 combinações funcionam.”.

Em seguida, proponha um exercício de observação. Mostre imagens de diferentes padrões e pergunte: “Vocês conseguem identificar que padrão é esse?”. Incentive que conversem em dupla ou em grupo antes de você dar a resposta. Essa dinâmica torna o reconhecimento mais participativo e ajuda a fixar a ideia dos 17 padrões.

Finalize a aula ampliando o horizonte dos alunos. Diga: “*Se no plano existem apenas 17 padrões, e em outras superfícies? Quantos padrões será que podem existir em uma esfera, ou em um toro?*”. Deixe essa pergunta em aberto como provocação. Ela encerra o módulo com curiosidade e conecta com outros contextos matemáticos, mesmo que não sejam trabalhados em detalhe no ensino médio.