UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E
TECNOLÓGICAS MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDENACIONAL PROFMAT

RAPHAEL BEZERRA TEIXEIRA

MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA E OS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO SAC E PRICE

Contextualização aplicada em sala de aula para o 1° ano do ensino médio

SINOP-MT

2024

RAPHAEL BEZERRA TEIXEIRA

MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA E OS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO SAC E PRICE

Contextualização aplicada em sala de aula para o 1° ano do ensino médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação, Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – UNEMAT, Campus Universitário de Sinop-MT, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Emivan Ferreira da Silva

Coorientador: Profa. Dra. Adriana Souza Resende

SINOP – MT

2024

Ficha catalográfica elaborada pela Supervisão de Bibliotecas da UNEMATCatalogação de Publicação na Fonte. UNEMAT - Unidade padrão

Teixeira, Raphael Bezerra.
Matemática financeira básica e os sistemas de amortização SAC e Price - contextualização aplicada em sala de aula para o 1° ano do ensino médio / Raphael Bezerra Teixeira. - Cáceres, 2024.
100f.: il.

Universidade do Estado de Mato Grosso "Carlos Alberto Reyes Maldonado", Matemática/SNP-PROFMAT - Sinop - Mestrado Profissional, Campus Universitário De Sinop.
Orientador: Dr. Emivan Ferreira da Silva.
Coorientadora: Dra. Adriana Souza Resende.

1. Matemática Financeira. 2. Modelagem Matemática. 3. Sistema de Amortização SAC e Price. 4. Contextualização. I. Silva, Emivan Ferreira da, Dr. II. Resende, Adriana Souza, Dra. III. Título.

UNEMAT / MT-SCB CDU 658.15

ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT
UNEMAT - SINOP

RAPHAEL BEZERRA TEIXEIRA

MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA E OS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO SAC E PRICE

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Emivan Ferreira da Silva
Coorientador(a): Profa. Dra. Adriana Souza Resende
Aprovado em 30/08/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Emivan Ferreira da Silva
UNEMAT – SINOP - MT

Prof. Dr. Rogério dos Reis Gonçalves
UNEMAT – SINOP - MT

Profa. Dra. Polyanna Possani da Costa Petry
UNEMAT - SINOP - MT

Sinop/MT
2024

PROFMAT

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UNEMAT/Sinop/MT
Av. dos Ingás, 3001, CEP: 78.550-000, Sinop, MT
Tel/PABX: (66) 3511 2100. www.unemat.br – Email: profmat@unemat.br

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso
Carlos Alberto Reyes Maldonado

AGRADECIMENTO

Gostaria de expressar meus mais sinceros agradecimentos a todos que me apoiaram ao longo desta jornada. Primeiramente, agradeço a Deus por me conceder esta oportunidade. Aos meus familiares e amigos, que estiveram ao meu lado, meu profundo reconhecimento. Um agradecimento especial à minha esposa, Vitória França Albuquerque, por sua paciência e compreensão durante minhas ausências devido aos estudos. Ao meu pai, à minha mãe e aos meus irmãos, que sempre me incentivaram e me deram forças nos momentos difíceis, meu sincero muito obrigado.

Agradeço também aos professores do PROFMAT, que instigaram minha capacidade de aprender e buscar conhecimento, mesmo quando os desafios pareciam intransponíveis. Em especial, ao professor Emivan Ferreira da Silva e a professora Adriana Souza Resende, cuja paciência e orientação foram fundamentais para a conclusão desta dissertação. Registro também meus sinceros agradecimentos à banca avaliadora, que gentilmente aceitou avaliar este trabalho e contribuir para a qualidade desta pesquisa.

Aos meus colegas e amigos do mestrado, que se mostraram essenciais ao longo do curso, sempre dispostos a ajudar e a organizar aulas extras, mesmo nas disciplinas optativas obrigatórias, meu profundo agradecimento.

A todos, minha eterna gratidão por tornarem esta conquista possível.

RESUMO

Esta dissertação tem como foco abordar a matemática financeira de forma contextualizada na sala de aula e reconhecer a importância da modelagem matemática na vida financeira como crucial, pois permite traduzir situações práticas, como financiamentos, para a linguagem matemática. Para isso, esse trabalho teve como objetivo realizar um estudo abrangente sobre matemática financeira, abordando desde conceitos básicos como porcentagem, juros simples e compostos, até uma explicação detalhada dos modelos matemáticos que formam os sistemas de amortização SAC e PRICE. Além disso, buscou promover a compreensão desses conteúdos por meio da resolução de situações-problema em sala de aula, contextualizando sua relevância no cotidiano dos alunos. Baseado nos pressupostos metodológicos das pesquisas bibliográfica, qualitativa e quantitativa, conforme Marconi e Lakatos (2010), Gil (2002) e Strauss e Corbin (2015), a produção dos dados ocorreu através de explicações detalhadas dos conteúdos abordados e da aplicação de atividades contextualizadas em uma escola da rede privada de ensino. Este processo foi realizado com duas turmas do 1º ano do Ensino Médio, situadas em um município ao norte do estado de Mato Grosso. Após a parte teórica de cada etapa da matemática financeira, a execução do teste se desdobrou em duas etapas. Na primeira, foram realizadas sete questões sobre porcentagem, juros simples e juros compostos; na segunda etapa, foram desenvolvidas mais cinco questões sobre os sistemas de amortização SAC e PRICE. Além da aplicação do teste, ao final foi realizado um diálogo entre os alunos e o professor sobre a experiência, proporcionando debates e trocas de ideias prazerosas sobre os conteúdos estudados. Ao apresentar os conceitos de matemática financeira de maneira contextualizada e relacionada à vida dos alunos, o processo de aprendizado tornou-se significativamente mais envolvente e eficaz. Essa abordagem facilitou não apenas a compreensão teórica dos conteúdos estudados, mas também sua aplicação prática. A contextualização dos temas permitiu que os alunos percebessem a relevância do que estavam aprendendo e como esses conhecimentos poderiam ser aplicados em situações reais. Dessa forma, a contextualização despertou nos alunos o interesse pelo estudo da matemática. Com isso, a educação financeira foi enriquecida, preparando melhor os estudantes para lidarem com questões financeiras no futuro e refinando a matemática financeira, gerando ferramentas que permitem aos estudantes tomar decisões conscientes.

Palavras-chave: Matemática Financeira; Modelagem Matemática; Sistema de Amortização Sac e Price; Contextualização.

ABSTRACT

This dissertation focuses on approaching financial mathematics in a contextualized way in the classroom and recognizing the importance of mathematical modeling in financial life as crucial, as it allows practical situations, such as financing, to be translated into mathematical language. To this end, this work aimed to carry out a comprehensive study of financial mathematics, from basic concepts such as percentages, simple and compound interest, to a detailed explanation of the mathematical models that make up the SAC and PRICE amortization systems. It also sought to promote understanding of these contents by solving problem situations in the classroom, contextualizing their relevance to the students' daily lives. Based on the methodological assumptions of bibliographical and qualitative research, according to Marconi and Lakatos (2010), Gil (2002) and Strauss and Corbin (2015), the data was produced through detailed explanations of the content covered and the application of contextualized activities in a private school. This process was carried out with two 1st year high school classes, located in a municipality in the north of the state of Mato Grosso. After the theoretical part of each stage of financial mathematics, the test was divided into two stages. In the first stage, seven questions were asked about percentages, simple interest and compound interest; in the second stage, five more questions were asked about the SAC and PRICE amortization systems. In addition to administering the test, at the end there was a dialog between the students and the teacher about the experience, which led to debates and pleasant exchanges of ideas about the content studied. By presenting the concepts of financial mathematics in a contextualized way and related to the students' lives, the learning process became significantly more engaging and effective. This approach facilitated not only the theoretical understanding of the content studied, but also its practical application. The contextualization of the topics allowed the students to see the relevance of what they were learning and how this knowledge could be applied in real situations. In this way, contextualization aroused students' interest in studying mathematics. As a result, financial education was enriched, better preparing students to deal with financial issues in the future and refining financial mathematics, generating tools that allow students to make informed decisions.

Keywords: Financial Mathematics; Mathematical Modeling; Sac and Price Amortization System; Contextualization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ABRAINC-FIPE - Associação Brasileira de Incorporadoras Imobiliárias/Fundação instituto de Pesquisas Econômicas

BCB - Banco Central do Brasil

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

INSS - Instituto Nacional do Seguro Social

IRPF - Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas

PRICE - Sistema de Amortização Francês

SAC - Sistema de Amortização Constante

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática financeira é um ramo da matemática aplicada que lida com o estudo do dinheiro e dos instrumentos financeiros. Para Assaf (2005, p.13), a matemática financeira é o "estudo do dinheiro no tempo, ao longo do tempo". Logo, qual é o verdadeiro valor do seu dinheiro? E o quanto vale o seu tempo? Essas questões são totalmente dependentes do ponto de referência escolhido. O valor do dinheiro pode estar intrinsecamente ligado ao seu poder de compra,considerando como ele evolui ao longo do tempo e o que pode ser adquirido com ele. Quanto ao tempo, podemos avaliá-lo pelo valor agregado das atividades que realizamos por meio dele. Embora o valor do tempo seja subjetivo, cada pessoa o aprecia de acordo com sua própria perspectiva de mundo.

A mensuração do valor do dinheiro pode ser realizada de maneira determinística, por meio de fórmulas matemáticas, cenários e índices de preços e valores. Além disso, é possível estimá-lo de forma estocástica, levando em conta as variações aleatórias. Apesar de existirem diversas fórmulas para medir o valor do dinheiro, o importante é reconhecer que essas ferramentas estão disponíveis. Nesse sentido, Puccini (1977, p. 12), defende a matemática financeira como:

> [...] um corpo de conhecimento que estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso de tempo [...]; para iniciar o seu estudo é necessário que se estabeleça uma linguagem própria para designar os diversos elementos que serão estudados e que esses elementos sejam contextualizados com precisão.

Podemos pensar então que o valor do dinheiro pode ser medido, calculado, através de fórmulas matemáticas. Em particular, a matemática financeira é amplamente utilizada em áreas como investimentos, empréstimos, financiamentos, avaliação de ativos e gestão de riscos. Essa disciplina abrange uma variedade de modelos matemáticos para calcular juros simples e compostos, valor presente, valor futuro, taxas de retorno, amortização e entre outros.

Abordar esse conteúdo em sala de aula, no contexto de compreender a importância da matemática financeira na vida humana, desperta um grande fascínio nos estudantes. Essa área é fundamental para entender o funcionamento do sistema capitalista no qual estamos inseridos. Desse modo, compreender conceitos como descontos, empréstimos e juros pagos em financiamentos é crucial para os alunos, pois eles lidam constantemente com essas aplicações em seu dia a dia.

Portanto, quando os conteúdos abordados em sala de aula estão interligados com situações práticas do mundo real, essa conexão facilita a compreensão e o aprendizado do estudante. Dessa forma, este trabalho priorizou a contextualização da matemática financeira de maneira aplicada na realidade dos aluno. Desenvolver essas habilidades e competências em matemática é essencial, pois, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018, p. 266), o aluno desenvolverá:

> [...] as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.

Hoje, a matemática financeira é uma disciplina crucial em áreas como bancos, seguros, investimentos e planejamento financeiro, desempenhando um papel fundamental na compreensão e gestão das complexidades do mundo financeiro. Portanto, fornece ferramentas e métodos matemáticos para analisar e resolver problemas financeiros do mundo real, sendo uma disciplina essencial para profissionais e indivíduos que lidam com questões financeiras em investimentos e financiamentos.

Além disso, a discussão sobre matemática financeira reflete a experiência vivida pelas pessoas. Portanto, é inevitável não mencionar a modelagem matemática, conforme observado por Bassanezi (2002, p.24).

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.

Dada a importância dos modelos matemáticos nos sistemas financeiros, é crucial compreender os sistemas de financiamento adotados pelos métodos Sistema de Amortização Constante (SAC) e Sistema de Amortização Francês (PRICE). Isso se deve ao fato de que uma das principais maneiras de adquirir uma casa própria ou até mesmo um automóvel é por meio de financiamentos que utilizam esses tipos de sistema de amortização.

Nos últimos anos, tem havido um crescimento na busca por residências próprias. De acordo com o indicador ABRAINC-FIPE (Associação Brasileira de Incorporadoras

Imobiliárias/Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas), o mercado imobiliário brasileiro apresentou crescimento de 14,4% nas vendas de imóveis nos sete primeiros meses de 2023 em comparação ao mesmo período do ano anterior. Devido aos elevados custos dos imóveis, uma alternativa bastante comum para concretizar esse sonho é recorrer às linhas de crédito por meio de financiamentos. Conforme Cepal (2002, p.13; original em espanho, tradução livre):

> A moradia constitui um bem durável, talvez o mais importante ativo da maioria das unidades familiares, cujo preço costuma ser várias vezes superior às rendas de potenciais demandantes. Por essa razão, a aquisição da moradia, na maioria dos casos, somente é viável mediante a disponibilidade de crédito de longo prazo,que permita diferir no tempo a pressão que esse preço exerce sobre a renda familiar e, portanto, torne possível a compra deste bem.

Geralmente, aqueles que buscam adquirir sua moradia por meio de financiamento deparam-se com duas opções: SAC e PRICE. Esses métodos de financiamento têm abordagens bastante distintas. A tabela PRICE adota um método de amortização que mantém prestações iguais do início ao fim do financiamento, sendo a sigla uma abreviação para “Prestações Iguais”. Em contraste, a tabela SAC, ou Sistema de Amortização Constante, utiliza prestações compostas por uma parte fixa destinada à amortização do saldo devedor e uma parte variável correspondente aos juros sobre o saldo devedor remanescente. Em outras palavras, as parcelas começam mais altas e diminuem ao longo do tempo.

No entanto, grande parte da sociedade adulta, assim como os alunos, desconhece as regras que regem esses tipos de contratos e, muito menos, compreende como são calculados os juros, as parcelas e a amortização do saldo devedor. Dessa forma, a compreensão dos modelos matemáticos aplicados nesses sistemas tornou-se crucial para esta pesquisa.

Diante dessas considerações, nossa pesquisa foi direcionada para a seguinte problematização: Como os fundamentos matemáticos subjacentes aos financiamentos influenciam a estrutura de contrato e regras, e de que maneira esses modelos podem ser incorporados ao ensino básico de forma contextualizada para uma compreensão mais prática e abrangente pelos estudantes?

Assim, este trabalho teve como principal objetivo realizar um estudo abrangente sobre a matemática financeira, abordando desde os conceitos básicos de porcentagem, juros simples e compostos até a explanação detalhada das regras dos modelos matemáticos que constituem os sistemas de amortização SAC e PRICE. Além disso, buscou-se promover a compreensão desses conteúdos por meio da resolução de situações-problema em sala de aula, contextualizando sua relevância no cotidiano dos alunos.

Para essa proposta, foram considerados os seguintes objetivos específicos:

I - Realizar uma revisão bibliográfica sobre matemática financeira do ponto de vista histórico e das vendas a prazo;

II- Escrever sobre as tabelas de financiamentos SAC e Price e sobre as regulamentações vigentes sobre consórcios, empréstimos, vendas parceladas e em particular financiamento da casa própria;

III – Simular e resolver problemas de matemática financeira usando os modelos da tabela SAC e PRICE para aplicar em sala de aula;

IV- Abordar e aplicar de forma contextualizada a matemática financeira na sala de aula, usando a calculadora ou outros Softwares para realizar simulações.

Esta dissertação foi desenvolvida com base em pesquisa bibliográfica, buscando compreender estudos anteriores para possíveis readequações. Além disso, adota a pesquisa qualitativa, com o objetivo de oferecer uma compreensão detalhada e abrangente de um fenômeno, explorando sua complexidade e diversidade. Também utiliza a abordagem da pesquisa quantitativa, permitindo a análise de dados numéricos coletados durante a experiência.

O trabalho está estruturado em nove capítulos. O primeiro capítulo é a introdução, o segundo capítulo apresenta o referencial teórico, abordando o contexto histórico da matemática financeira e sua evolução ao longo do tempo. No terceiro capítulo, há uma ênfase na modelagem matemática, destacando a importância da contextualização e a explicação das definições, regras e fórmulas de porcentagem, juros simples e compostos que fundamentam a matemática financeira. O quarto capítulo oferece uma breve explanação sobre financiamento imobiliário, enquanto no quinto capítulo são discutidos os conceitos e definições das regras dos modelos matemáticos aplicados aos sistemas de amortização SAC e PRICE. No sexto capítulo, são descritos os procedimentos metodológicos da pesquisa, incluindo o campo de investigação e as práticas aplicadas em sala de aula. O sétimo capítulo apresenta os resultados, detalhando as aplicações dos testes em sala de aula e os relatos de experiências. O oitavo capítulo aborda a socialização e a aplicação de um questionário com o propósito de obter *feedback* dos alunos sobre a realização do trabalho. Por fim, o nono capítulo expressa as considerações finais da dissertação.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Um vislumbre do passado: breve histórico

Os aspectos históricos relacionados ao tema proporcionam uma compreensão mais profunda dos conceitos atuais da matemática financeira. Neste contexto, são apresentadas diversas referências que remontam à sua origem, desde as primeiras transações comerciais, passando pelo estabelecimento de equivalências nas trocas, até a instituição da moeda e as aplicações contemporâneas dos princípios matemáticos financeiros na resolução de problemas.

Ao incorporar elementos históricos, as aulas ganham profundidade e levam o aluno a viajar por diferentes épocas, revelando a evolução do conhecimento em resposta às necessidades das relações humanas. Explorar a história da matemática financeira significa explorar a história da humanidade e suas interações sociais e comerciais, que remontam ao período anterior à existência do dinheiro. Neste sentindo, o presente capítulo tem como objetivo oferecer um embasamento histórico ao professor, abrangendo desde as primitivas transações de troca até a criação da moeda e o posterior uso da matemática financeira na solução de desafios contemporâneos.

2.2 Mundo Antigo - Moeda Mercadoria

O processo de civilização trouxe novos desafios sociais e econômicos que contribuíram para o desenvolvimento de um pensamento matemático mais complexo e estimularam o homem a pensar numericamente. A necessidade de calcular estoques, gerenciar transações comerciais e resolver problemas relacionados à distribuição de recursos incentivou o aprimoramento das habilidades matemáticas.

Os primeiros grupos humanos adotavam um estilo de vida nômade, extraindo diretamente da natureza os produtos para suprir suas necessidades. Nesse estágio inicial, ainda não havia desenvolvimento da linguagem escrita nem conhecimento matemático ou científico sistematizado. Segundo Eves (2011), a Era Neolítica, que teve seu início por volta de 3000 a.C., marcou o surgimento das primeiras comunidades agrícolas. Esse período também trouxe consigo a crescente necessidade e oportunidade de desenvolver conhecimentos matemáticos e científicos.

Entre os povos antigos, certos locais são conhecidos como “berços da humanidade”, como a Mesopotâmia, o Egito, a Grécia, a Índia, o Oriente Médio, os Andes e a China. Foi devido às questões econômicas e sociais que os primeiros conhecimentos matemáticos surgiram, incluindo problemas como o câmbio de moedas e a troca de mercadorias.

Nessas regiões, desenvolveram-se a escrita, a agricultura, a astronomia e práticas comerciais e financeiras, que incluíam a arrecadação de impostos. Os sumérios antigos, embora não tenham deixado demonstrações matemáticas elaboradas, eram hábeis na elaboração de contratos legais, faturas, notas promissórias, recibos, escrituras e no cálculo de juros simples e compostos.

O surgimento da agricultura levou à produção de alimentos além das necessidades da comunidade, resultando em excedentes. Esses excedentes eram trocados por meio de um sistema conhecido como escambo, onde ambas as partes interessadas precisavam concordar com os produtos e suas quantidades. O valor dos produtos era determinado pela sua raridade e pelo tempo necessário para sua produção. Surgiu, então, a primeira forma de comércio entre as sociedades, a troca direta de mercadorias, assim descrita por Ifrah (1997, p. 145, grifo do autor):

> [...] o primeiro tipo de troca comercial foi o *escambo*, fórmula segundo a qual se trocam diretamente (e, portanto, sem a intervenção de uma “moeda” no sentido moderno da palavra) gêneros e mercadorias correspondentes a matérias primas ou a objetos de grande necessidade.

É possível observar que, no sistema de troca direta, as mercadorias eram apresentadas em seu estado natural e destinadas a satisfazer as necessidades básicas dos membros do grupo. No entanto, com o advento da Idade do Ferro nos últimos séculos do segundo milênio a.C., ocorreram mudanças significativas tanto políticas quanto econômicas no mundo antigo. Civilizações como a egípcia e babilônica perderam sua hegemonia, cedendo lugar ao crescimento das civilizações gregas, assírias, fenícias e hebraicas. Isso foi acompanhado pelo desenvolvimento de armamentos mais robustos, ferramentas agrícolas avançadas e a introdução de moedas cunhadas, o que impulsionou a produção de mercadorias e o comércio.

Posteriormente, à medida que as comunidades interagiam cada vez mais e o artesanato e a cultura se desenvolviam, surgiram dificuldades nas trocas devido à falta de uma medida comum de valor entre os produtos a serem trocados. Diante desse aumento do comércio, surgiu a necessidade de uma medida comum para facilitar as trocas. Assim, foi estabelecido um sistema de equivalência com padrões fixos, chamado moeda-mercadoria, que consistia em uma mercadoria escolhida como unidade de troca. Segundo Ifrah (1997, p. 146):

> A primeira unidade de escambo admitida na Grécia pré-helênica foi o boi. No século VIII a.C., na Ilíada de Homero (XXIII, 705, 749-751 e VI, 236), uma mulher hábil para mil trabalhos é assim avaliada em 4 bois, a armadura em bronze de Glauco em 9 bois e a de Diomedes (que era de ouro) em 100 bois; ademais, numa lista de recompensas, vêem-se suceder-se, na ordem dos valores decrescentes, uma copa de prata cinzelada, um boi e um meio talento de ouro.

Diferentes regiões utilizaram diferentes tipos de moeda-mercadoria. Por exemplo, em ilhas do Pacífico, conchas e pérolas eram comuns, enquanto na América Central pré-colombiana, produtos como cacau, algodão, cerâmica e tecido eram usados como moeda. Na Grécia antiga, o gado e o sal eram utilizados como moeda-mercadoria (daí vem a origem da palavra "salário", remuneração paga em sal pelos serviços prestados). O uso do gado como padrão tinha vantagens devido a sua capacidade de locomoção, reprodução e utilidade para serviços, conforme Grando e Shneider (2010).

Essas moedas variavam conforme a época e a localização geográfica, refletindo os costumes e práticas dos grupos sociais em que eram utilizadas. A Tabela 1 ilustra a diversidade de mercadorias empregadas como moeda ao longo dos diferentes períodos da história humana.

Tabela 1- Principais mercadorias utilizadas como moeda.

Regiões	Mercadorias-Moeda
Antiguidade (Até 410 d. C.)	
Egito	Cobre
Babilônia, Assíria	Cobre, prata, cevada
Pérsia	Gado
Bretanha	Barras de ferro, escravos
Índia	Animais domésticos, arroz, metais
China	Conchas, seda, sal, cereais
Idade Média (410 a 1453 d. C.)	
Ilhas Britânicas	Moedas de couro, gado, ouro, prata
Alemanha	Gado, cereais, mel
Islândia	Gado, tecidos, bacalhau
Noruega	Gado, escravos, tecidos
Rússia	Gado, prata
China	Arroz, chá, sal, estanho, prata
Japão	Anéis de cobre, pérolas, arroz
Idade Moderna (1453 a 1789 d. C.)	
Estados Unidos	Fumo, cereais, madeira, gado
Austrália	Rum, trigo, carne
Canadá	Peles, cereais
França	Metais preciosos, cereais
Japão	Arroz

Fonte: Adaptado de Nogami (2012).

O gado, estabelecido como referência de equivalência, possuía a vantagem de se reproduzir entre uma transação e outra. No entanto, sua dificuldade residia no transporte, divisão e manipulação. Essas limitações são corroboradas por Singer (1983, p. 43) quando afirma que:

> [...] o gado servia de moeda, ele só podia ser utilizado para transações mais ou menos valiosas, pois uma vaca ou um boi tem bastante valor, nunca foi barato. Para transações de pouco valor esse meio de troca não serve, pois não haveria troco. Uma boa moeda-mercadoria é, portanto, aquela que seja não-perecível, durável, que seja divisível homogeneamente, e além disso, de fácil transporte.

A especialização de uma mercadoria como meio de troca simplifica consideravelmente a generalização das transações em qualquer economia de mercado. A moeda-mercadoria solucionou o desafio das trocas diretas, porém esse modelo enfrentava sérias dificuldades práticas, evidenciando a necessidade de encontrar uma forma mais conveniente para facilitar as transações comerciais. Foi então que entramos na era da moeda metálica.

De forma análoga, na antiga China, entre os séculos XI e XVI a.C., o intercâmbio comercial contava com a utilização de chifres, cascos de tartaruga, conchas, pedras e metais, que tinham potencial para serem empregados na manufatura de armamentos. Enquanto isso, no Egito, a moeda-mercadoria consistia em metais como cobre, bronze, prata e ouro, cujo valor era estabelecido de acordo com seu peso. A concepção desse sistema ideal de trocas comerciais, conforme a maioria dos especialistas, é creditada à Grécia da Ásia (ou Ásia Menor) e à Lídia, durante o século VII antes da era cristã. Devido às diversas vantagens que oferecia, sua adoção se difundiu rapidamente pela Grécia, Fenícia, Roma e entre diversas outras civilizações, incluindo a China (Ifrah, 1997).

A seguir, explora-se o advento da moeda de metal no cotidiano da humanidade e sua significância para as sociedades antigas.

2.3 Moeda de Metal

A prata, o ouro e o cobre estavam entre os metais que tinham maior aceitação pelo povo e aos poucos ganhavam a função de moeda-mercadoria. As primeiras moedas, tal como conhecemos hoje, peças representando valores, geralmente em metal, surgiram na Lídia (atual Turquia), no século VII A. C. As características que se desejava ressaltar eram transportadas para as peças através da pancada de um objeto pesado (martelo), em primitivos cunhos. Foi o surgimento da cunhagem a martelo, onde os signos monetários eram valorizados também pela nobreza dos metais empregados, como o ouro e a prata.

Embora a evolução dos tempos tenha levado à substituição do ouro e da prata por metais menos raros ou suas ligas, preservou-se, com o passar dos séculos, a associação dos atributos de beleza e expressão cultural ao valor monetário das moedas, que quase sempre, na atualidade, apresentam figuras representativas da história, da cultura, das riquezas e do poder das sociedades (Casa da Moeda do Brasil, 2023).

Este sistema monetário não apenas prosperou, mas também se disseminou amplamente entre os fenícios, os cartagineses, os persas e as diversas cidades-estado gregas. Durante o período do Império Romano, moedas de ouro conhecidas como solidus foram cunhadas e utilizadas para remunerar os soldos dos mercenários a serviço do Império, originando assim a própria palavra “soldo”. A partir de Roma, a prática de cunhar moedas de metal precioso se espalhou rapidamente por todo o continente europeu e pelas terras do Oriente.

À medida que as atividades comerciais avançavam e se intensificavam, tornou-se comum a circulação de moedas originárias de diferentes países. Inicialmente, essas moedas eram trocadas com base na quantidade de ouro ou prata contida em cada uma delas. Com o passar do tempo, no entanto, estabeleceu-se um padrão-ouro para cada nação, determinando a quantidade de ouro que cada país possuía como reserva. Esse padrão passou então a servir como base para as taxas de câmbio utilizadas nas transações comerciais. Em seguida, apresentamos a Figura 1 com a representação das primeiras moedas.

Figura 1- Primeiras moedas.

Fonte: Produzido a partir de Sánchez (2020).

Explorando essa oportunidade, certos comerciantes começaram a acumular consideráveis estoques de moedas provenientes de várias nações e se especializaram na comercialização dessas diversas moedas, desencadeando o surgimento dos cambistas como uma nova classe de negociantes. Para além de apenas facilitar a troca de moedas, esses indivíduos também se dedicavam ao armazenamento e empréstimo das moedas, encontrando uma fonte de lucro adicional por meio dessas atividades financeiras. Essas práticas marcam os primeiros indícios de transações baseadas em crédito cujo capital inicialmente investido passava a se multiplicar, inaugurando, desse modo, os primórdios da instituição bancária. De acordo com Grando e Shneider (2010, p. 47), “Quando o comércio começava a atingir o auge, com a figura do mercador, iniciou-se uma atividade nova: o comércio do próprio dinheiro, na época, o ouro e a prata.”

2.4 Da moeda metálica ao papel: a evolução monetária da humanidade

A moeda em papel tem suas origens na China medieval, onde os primeiros registros confiáveis de seu uso datam do século VII durante a dinastia Tang (618-907 d.C.). O governo chinês enfrentava o desafio de facilitar as transações comerciais em um vasto império e de lidar com o peso e a inconveniência de transportar grandes quantidades de moedas de metal.

A fim de resolver esses problemas, os governantes da dinastia Tang começaram a emitir certificados de papel conhecidos como “*Jiaozi*”. Esses certificados representavam uma determinada quantia de moedas de metal, como cobre, prata ou ouro, que estavam armazenadas nos cofres do governo. Os comerciantes e cidadãos podiam usar esses certificados para realizar transações comerciais e pagamentos, facilitando o comércio em todo o império. Adiante, expomos a Figura 2 com a ilustração do “*Jiaozi*”, o primeiro papel-moeda da China.

Figura 2 - Jiaozi – Papel-moeda da China.

Fonte: Ibrachina (2023).

Estas notas, fabricadas a partir de cascas de amoreira, ostentavam as assinaturas de diversas pessoas envolvidas na administração ou controle da moeda na época. Sua autenticidade era garantida por um selo vermelho, utilizado pelo imperador Kublai Khan, que dominava a região. Quando o explorador italiano Marco Polo chegou à China no século XIII, ficou maravilhado com a introdução do papel-moeda. Em seu relato épico, “O Livro das Maravilhas do Mundo”, ele descreveu essa extraordinária inovação. No capítulo intitulado “Como o grande Khan transforma cascas de árvores em algo semelhante a papel, que circula como moeda em todo o país”, Marco Polo registrou suas impressões (Ibrachina, 2023).

Quando Marco Polo voltou para a Itália, muitas pessoas não acreditavam nas histórias sobre o uso papel-moeda na China. Apenas séculos mais tarde o Ocidente começou a imprimir notas em papel, mais especificamente em 1661, na Suécia.

Assim, o uso inicial desses certificados de papel estava restrito a certas regiões e períodos, mas sua conveniência e eficácia rapidamente os tornaram populares. Com o passar do tempo, o uso de moeda em papel se espalhou para outras partes da Ásia e eventualmente para o mundo ocidental.

No Ocidente, a moeda em papel ganhou popularidade durante os séculos XVII e XVIII, particularmente na Europa, onde os primeiros bancos começaram a emitir notas promissórias. Essas notas eram recibos de depósito que podiam ser trocados por moedas de metal a qualquer momento. Elas representavam uma forma conveniente de realizar transações comerciais e reduziam a necessidade de transportar grandes quantidades de moedas físicas.

Ao longo do tempo, o uso de moeda em papel se tornou mais generalizado, e os sistemas financeiros modernos foram desenvolvidos para facilitar sua emissão, circulação e controle. Hoje, a moeda em papel desempenha um papel fundamental na economia global, facilitando o comércio, as transações financeiras e o crescimento econômico em todo o mundo.

A seguir, discutiremos sobre a transição da forma física da moeda para o âmbito digital.

2.5 Da cédula ao *byte*: a mudança da moeda para o digital

A transição da cédula física para a moeda digital foi um processo gradual e complexo impulsionado por avanços tecnológicos e mudanças nas preferências dos consumidores. Antes mesmo do surgimento da moeda digital, o dinheiro eletrônico já estava presente, com cartões de crédito e débito possibilitando transações eletrônicas, reduzindo a dependência de dinheiro em espécie.

No entanto, foi com o crescimento da *Internet* e do comércio eletrônico que a busca por formas de pagamento mais eficientes e seguras se intensificou. Atualmente, uma forma de pagamento muito utilizada é o PIX, criada em 2020 para facilitar as transações financeiras. O surgimento do *Bitcoin* em 2009 marcou o início da era das criptomoedas descentralizadas, baseadas na revolucionária tecnologia *blockchain*. Essa moeda demonstrou o potencial das criptomoedas como uma forma de dinheiro digital que não depende de intermediários tradicionais. O sucesso inicial do dessa criptomoedas inspirou o desenvolvimento de várias outras e também de *tokens* digitais, levando empresas a aceitarem criptomoedas como forma de pagamento e o surgimento de *exchanges* especializadas para facilitar a compra, venda e troca desses ativos digitais.

Além das criptomoedas, outras tecnologias financeiras, como a *blockchain* e os contratos inteligentes, foram integradas aos sistemas financeiros tradicionais e emergentes, oferecendo maior segurança, transparência e eficiência às transações digitais. No entanto, a crescente popularidade das criptomoedas trouxe consigo desafios, incluindo preocupações com segurança, volatilidade de preços e seu uso indevido em atividades ilegais. Como resultado, governos e autoridades regulatórias começaram a desenvolver políticas e regulamentações para lidar com o uso e a comercialização de moedas digitais.

Hoje, a moeda digital é amplamente reconhecida como uma parte importante do sistema financeiro global, com um número crescente de pessoas e empresas utilizando criptomoedas e outros ativos digitais em suas transações e investimentos. A transição da cédula física para a moeda digital continua a evoluir à medida que novas tecnologias e práticas comerciais emergem. Abaixo, apresentamos a Figura 3 que retrata a moeda digital Bitcoin.

Figura 3 – Bitcoin.

Fonte: Blockmaster (2019).

3 MATEMÁTICA FINANCEIRA E A MODELAGEM MATEMÁTICA

Os estudantes e professores de exatas frequentemente sentem fascínio pela modelagem matemática, pois é por meio dela que situações do mundo real são representadas usando equações e conceitos matemáticos. Esses modelos proporcionam a capacidade de compreender e solucionar fenômenos complexos que fazem parte do nosso cotidiano. Para Chaves (2014, p. 25), a Modelagem Matemática é:

> [...] um processo que traduz ou que organiza situações problema provenientes docotidiano ou de outras áreas do conhecimento, também dita situação real, segundoa linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um conjunto de modelos ou de relações Matemáticas que procura representar ou organizar a situação/problema proposta, com vistas a compreendê-la ou solucioná-la

É crucial reconhecer a relevância da modelagem matemática para a vida financeira, uma vez que situações concretas, como um financiamento, demandam ser traduzidas para a linguagem matemática. Isso possibilita uma compreensão mais aprofundada e eficaz desses contextos financeiros.

Desenvolver modelos matemáticos que capturem com precisão situações do mundo real nem sempre é tarefa fácil; requer uma variedade de habilidades e enfrenta desafios complexos. Por exemplo, ao lidar com financiamentos imobiliários, as regras matemáticas que envolvem o valor da parcela, os juros, a amortização e outros fatores dependem de várias variáveis, como o montante do financiamento, o prazo, a taxa de juros, e assim por diante. Além disso, há diferentes métodos de financiamento a serem considerados. Segundo Biembengut e Hein (2014, p. 12).

> Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, paraelaborar um modelo, além do conhecimento de Matemática, o modelador precisade uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis.

Os modelos matemáticos desempenham um papel fundamental no financiamento por várias razões. Em primeiro lugar, eles proporcionam uma estrutura analítica que permite compreender e prever o comportamento financeiro ao longo do tempo. Isso é crucial para os mutuários, credores eoutros envolvidos no processo financeiro. Em resumo, a importância do modelo matemático no financiamento reside em sua capacidade de oferecer uma representação precisa e mensurável das transações financeiras, contribuindo para uma gestão mais eficiente e uma compreensão mais profunda dos cenários financeiros.

Considerando a relevância de entender os modelos aplicados na matemática financeira, especialmente nos financiamentos pelos sistemas SAC ou PRICE, e tendo em mente que o estudo da matemática financeira no ensino básico não aborda esses modelos de forma aprofundada, propomos uma análise detalhada dos modelos matemáticos utilizados no sistema de financiamento SAC e PRICE. Para isso, realizamos uma revisão dos principais conceitos e regras da matemática financeira, além de apresentar exemplos matemáticos que facilitem a compreensão do leitor.

3.1 Conceitos Fundamentais da matemática financeira

Entender as regras, fórmulas e conceitos básicos da matemática financeira é crucial para tomar decisões conscientes sobre o dinheiro. Isso nos permite evitar endividamentos indesejados e gerenciar nossas despesas mensais de forma eficaz. Em um mundo onde lidar com o dinheiro é essencial, independentemente da nossa posição social, é importante termos compreensão dos princípios fundamentais da matemática financeira. Vivemos em uma sociedade capitalista que demanda que saibamos administrar nosso dinheiro no dia a dia.

3.1.1 Porcentagem

Em uma razão com denominador 100, por exemplo $\frac{30}{100}$ ou $\frac{0,15}{100}$ estamos nos referindo a porcentagem. Assim, toda fração representada por $\frac{p}{100}$ pode ser expressa por p%, ou seja $\frac{30}{100} = 30\%$ e $\frac{0,15}{100} = 0,15\%$.

A presença da porcentagem é frequente em nosso dia a dia, seja para calcularmos o desconto de um produto ou para determinarmos o aumento percentual do nosso salário, entre outros exemplos. Para realizar esses cálculos de porcentagem, existem algumas técnicas matemáticas que podem ser empregadas.

3.1.2 Cálculo de porcentagem em forma de fração pelo todo

Como mencionado anteriormente, um número p% pode ser reescrito como $\frac{p}{100}$. Assim, uma forma comum de calcular a porcentagem é multiplicar $\frac{p}{100}$ pelo valor total, ou seja $\left(\frac{p}{100} \cdot valor\ total\right)$, o que equivale a uma multiplicação de frações. Para facilitar a compreensão, vamos colocar o número 1 no denominador do valor total para multiplicar as frações, ou seja. $\left(\frac{p}{100} \cdot \frac{valor\ total}{1}\right)$.

Exemplo 1: Calcule 30% de 50.

Quadro 1- Exemplo1: resolução do cálculo de porcentagem.

$Sabemos\ que\ 30\% = \frac{30}{100}, assim:$
$\frac{30}{100} \cdot 50 = \frac{30}{100} \cdot \frac{50}{1} = \frac{1500}{100} = 15$
$Portando, 30\%\ de\ 50\ é\ equivalente\ a\ 15!$

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

3.1.3 Cálculo de porcentagem usando a estratégia do 1%

Entendemos que o valor total de um produto é equivalente a 100%, isso significa que 1% é equivalente a 1 parte de cada 100 partes. Portanto, se conhecemos à proporção que representa 1% desse produto, podemos calcular qualquer porcentagem desse produto com precisão.

Exemplo 2: Uma bola de futebol custa R$ 250,00 e está com uma promoção de 20% de desconto. Qual é o valor do desconto oferecido nessa bola?

"Entendemos que 250 reais representam 100%. Assim, ao dividir 250 por 100 partes, obtemos R$2,50, indicando que cada 1% equivale a R$2,50. Logo, se 1% corresponde a R$2,50, então $20 \cdot 2{,}50 = 50$, logo, 20% de 250 equivalem R$50,00".

Quadro 2- Exemplo 2: cálculo usando a estratégia do 1%.

Procedimentos matemáticos
$como\ 100\% = 250\ reais$ $e\ 100\% : 100 = 1\%$

$$e\ 250 : 100 = 2{,}50$$
$$então, 1\%\ de\ 250 = 2{,}50$$
$$assim, 1\% \cdot 20 = 2{,}50 \cdot 20$$
$$logo\ 20\%\ de\ 250 = 50\ reais$$

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

3.1.4 Cálculo de porcentagem usando a estratégia da regra de três

O cálculo de porcentagem por regra de três é uma técnica amplamente empregada e útil para determinar a porcentagem de um número em relação a outro. A fórmula básica para realizar esse cálculo é reconhecer que o valor inicial ($\boldsymbol{V_i}$) do elemento corresponde a 100%, e então relacionamos o valor desejado, expresso como p%, a uma incógnita que corresponde ao valor final ($\boldsymbol{V_f}$). Em linguagem matemática temos:

Quadro 3 - representação genérica de valor final e inicial.

$\boldsymbol{Porcentagem}$		$\boldsymbol{Valores}$
$\mathbf{100}\%$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{V_i}$
$\mathbf{p}\%$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{V_f}(\mathbf{x})$

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Se as grandezas são diretamente proporcionais, tem-se:

Quadro 4 - Razões de proporcionalidade.

$$\frac{100}{\boldsymbol{V_i}} = \frac{p\%}{\boldsymbol{V_f}} \Rightarrow \boldsymbol{V_i} \cdot p\% = 100 \cdot \boldsymbol{V_f}$$

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Exemplo 3: Qual é o valor de 20% de 80?

Quadro 5 - Exemplo 3: cálculo de porcentagem por regra de três.

$\boldsymbol{Porcentagem}$		$\boldsymbol{Valores}$
$\mathbf{100}\%$	$\rightarrow$	$\mathbf{80}$
$\mathbf{20}\%$	$\rightarrow$	$\mathbf{x}$

Assim:

$$\frac{100}{\mathbf{80}} = \frac{20}{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow 100x = \mathbf{80} \cdot \mathbf{20}$$

$$100x = 1600$$

$$x = \frac{1600}{100} = 16$$

$$portanto, concluimos\ que\ 20\%\ de\ 80\ é\ 16.$$

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

3.1.5 Variação percentual

Em matemática financeira, a variação percentual é um valor numérico que representa a mudança em porcentagem do valor inicial. Quando você calcula a variação percentual entre dois valores, o resultado é uma porcentagem que mostra o quanto o valor mudou em relação ao valor inicial.

Uma forma Simples de calcular essa variação é:

$$\text{Variação percentual} = \frac{V_f - V_i}{V_i} \cdot 100\%$$

Exemplo 4: Considerando que em 2014 o preço médio do quilo da carne era de R$ 15,00 e que em 2024 o preço médio da mesma é R$ 36,00. Qual foi o aumento percentual no preço da carne nesse período?

Quadro 6 - Exemplo 4: aumento percentual.

$V_i = 15$

$V_f = 36$

Assim: $\frac{36 - 15}{15} = \frac{21}{15} = 0{,}14 \cdot 100\% = 140\%$

Portanto, o aumento percentual em dez anos foi de 140%.

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

3.1.6 Regime de capitalização

O regime de capitalização diz respeito à forma como os juros são calculados e acumulados ao longo do tempo em investimentos ou empréstimos. Existem dois principais regimes de capitalização: juros simples e juros compostos. Antes de nos aprofundarmos nesses dois tipos de regimes, é importante definir alguns termos essenciais para o trabalho, juntamente com suas respectivas notações que serão empregadas ao longo desta dissertação.

Capital: O termo “capital”, também conhecido como principal, refere-se ao valor inicial de dinheiro investido ou emprestado em uma transação financeira. Esse valor pode ser utilizado para realizar investimentos, como também pode ser emprestado a outra parte com a expectativa de retorno futuro, seja na forma de juros, dividendos, ou outros ganhos financeiros. O capital é uma parte fundamental em diversos cálculos financeiros, como o cálculo de juros simples e compostos, amortizações, entre outros.

- Vamos representar sua **notação matemática** por **“$\boldsymbol{C}$”.**

Juros: O termo “juros” é definido como a remuneração paga pelo uso de capital emprestado ou o ganho obtido a partir do investimento de capital. Basicamente, os juros representam o custo do dinheiro ao longo do tempo.

- Vamos representar sua **notação matemática** por **“$\boldsymbol{J}$”.**

Prazo: O termo “prazo” refere-se ao período no qual uma transação financeira ocorre ou durante o qual um investimento ou empréstimo está em vigor. Em outras palavras, o prazo é a duração ou o período durante o qual o capital é emprestado, investido ou usado para pagar uma dívida.

- Vamos representar sua **notação matemática** por **“$\boldsymbol{n}$”.**

Taxa de juros: O termo “taxa de juros” é a medida do custo do dinheiro ao longo do tempo, expressa como uma porcentagem do valor inicial do capital (principal) emprestado, investido ou utilizado em uma transação financeira. Em outras palavras, a taxa de juros representa a remuneração paga pelo uso do capital emprestado ou o ganho obtido a partir do investimento desse capital.

- Vamos representar sua **notação matemática** por **“$\boldsymbol{i}$”.**

Existem duas formas principais de taxa de juros:

I - **Taxa de juros nominal**: É a taxa de juros expressa em uma base anual, sem considerar a frequência de capitalização dos juros.

II - **Taxa de juros efetiva:** É a taxa de juros que leva em conta a frequência de capitalização dos juros ao longo do tempo, refletindo o verdadeiro custo ou ganho do capital emprestado ou investido.

Podemos representar a taxa de juros como $\boldsymbol{i = \frac{J}{C}}$. Além disso, quando formos realizar os cálculos em problemas da matemática financeira precisamos usar a porcentagem em sua forma decimal: $p\% = \frac{p}{100}$.

Por exemplo: $15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15.$

A taxa de juros está diretamente relacionada ao prazo, e é essencial garantir que essas duas grandezas estejam expressas nas mesmas unidades de medida. Para isso, utilizamos algumas abreviaturas padronizadas, veja:

- Ao dia → a.d.
- Ao mês → a.m.
- Ao bimestre → a.b
- Ao trimestre → a.t.
- Ao semestre → a.s.
- Ao ano → a.a.

Observação: no capítulo 3.1.10 (taxas equivalentes e proporcionais), abordaremos as transformações de unidades de medida entre taxa de juros e tempo.

Montante: O termo "montante" é o valor total acumulado ao final de um período de tempo após a aplicação de capital inicial (principal) a uma determinada taxa de juros, considerando quaisquer pagamentos adicionais ou juros acumulados. Em outras palavras, é o resultado da soma do capital inicial mais quaisquer ganhos (ou menos quaisquer perdas) obtidos ao longo do tempo.

- Vamos representar sua **notação matemática** por **"$\boldsymbol{M}$".**

O cálculo do montante é realizado da seguinte maneira: $\boldsymbol{M = C + J}$**.**

Essas são as principais notações matemáticas que usaremos nesse trabalho.

3.1.7 Juros Simples

Os juros simples são calculados sempre sobre o valor inicial do capital em relação a uma taxa de juros durante todo o período em que o empréstimo ou investimento está ativo.

A fórmula para calcularmos o juro simples é:

$$\boldsymbol{J_n = C \cdot i \cdot n}$$

Demonstração da fórmula:

Para demonstrarmos a fórmula de juros simples, usaremos o princípio de indução finita.

Por hipótese, temos que $P(n) = J_n = C \cdot i \cdot n$, assim aplicando a indução em *n* temos:

I – $P(0) = J_0 = C \cdot i \cdot 0 = 0$, que é verdade, pois no monto zero não é gerado juros sobre o capital em uma aplicação.

$P(1) = J_1 = C \cdot i \cdot 1 = C \cdot i$, que também é verdadeira, pois os juros acumulados após o decorrer de um período é o resultado do capital pela taxa.

II – Agora, vamos supor que $P(n)$ é valido para n natural, então queremos demostrar que $P(n+1) = J_{n+1} = C \cdot i \ (n+1)$ é verdadeira.

Temos que J_{n+1} é o juros gerado pelo período $(n+1)$, e como definido anteriormente o juros simples é calculado sobre o valor inicial, então:

$$J_{n+1} = C \cdot i + J_n$$

Por hipótese: $J_n = C \cdot i \cdot n$, então:

$$J_{n+1} = C \cdot i + \mathrm{C} \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{n} \Leftrightarrow J_{n+1} = C \cdot i \cdot (\mathrm{n}+1)$$

Portanto, pelo princípio de indução, concluímos $P(n+1)$ é verdadeiro. Logo, provamos que os juros simples gerados no tempo “n”, sobre um capital inicial “C” à uma taxa de juros i (na forma decimal) é: $\boldsymbol{J = C \cdot i \cdot n}$**.**

Exemplo 5: Considere um investimento de R$ 1 000,00 aplicado a uma taxa de juros simples de 5% ao ano. Qual será o juro após 4 anos?

Quadro 7- Exemplo 5: cálculo de juros simples.

$C = 1000$	$\Rightarrow$	$J = 1000 \times 0{,}05 \times 4$
$i = 5\% = 0{,}05\ a.a.$		$J = 200$
$n = 4\ anos$		
$Assim, o\ juros\ após\ os\ 4\ anos\ foi\ de\ 200\ reais.$		

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Tratando-se de juros simples, o montante é o valor total acumulado ao final de um período de tempo quando um capital inicial é emprestado ou investido a uma taxa de juros constante. É o resultado da soma do capital inicial com os juros ganhos durante o período de tempo especificado, ou seja: $M = C + J$, mas sabemos que $J = C \cdot i \cdot n$, então:

$$M = C + C \cdot i \cdot n \Rightarrow M = C \cdot (1 + i \cdot n).$$

Exemplo 6: Marcos emprestou R$ 500,00 a uma taxa de juros simples de 8% ao ano e quer calcular o montante que ele vai receber ao final de 3 anos.

Quadro 8 - Exemplo 6: montante a juros simples.

$C = 500$	$M = 500 \cdot (1 + 0{,}08 \cdot 3)$
$i = 8\% = 0{,}08\ a.a.$	$M = 500 \cdot (1 + 0{,}24)$
$n = 3\ anos$	$M = 500 \cdot 1{,}24$
	$M = 620$
$Assim, o\ motante\ após\ os\ 3\ anos\ foi\ de\ 620\ reais.$	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Note que podemos associar o montante dos juros simples com a progressão aritmética (PA), já que seus comportamentos ao longo do tempo são semelhantes. Para verificarmos isso, considere as relações abaixo, que nos permitem relacionar cada variável correspondente:

Fórmula da PA: $a_n = a_1 + (n` - 1) \cdot r = a_0 + n` \cdot r$

Fórmula do montante: $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$

Assim, igualando os termos da PA com os termos do montante, temos:

- Termo geral igual ao Montante, ou seja: $a_n = M$
- Termo inicial igual Capital, ou seja: $a_0 = C$
- Razão igual ao capital pela taxa, ou seja: $r = C \cdot i$
- Número de termos igual tempo, ou seja: $n` = n$

Portanto, $a_n = a_0 + n` \cdot r = M = C \cdot (1 + i \cdot n)$.

Exemplo 7: Um valor de R$ 500,00 foi emprestado a uma taxa de juros de 3% ao mês no sistema de juros simples. Se esse empréstimo for quitado após 5 meses, qual será o valor total pago?

I- Pela fórmula dos juros simples: $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$

Quadro 9 - Exemplo 7: resolução usando a fórmula de juros simples.

$C = 500$	$M = 500 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot 5)$
$i = 3\% = 0{,}03$	$M = 500 \cdot 1{,}15$
$n = 5$	$M = 575$
$M = ?$	
Portanto, o montante pago após 5 meses será de R$ 575,00	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

II – Pela fórmula da PA: $a_n = a_0 + n` \cdot r$

Quadro 10 - Exemplo 7: resolução usando a fórmula de progressão aritmética.

$a_0 = 500$	$a_n = 500 + 15 \cdot 5$
$r = 500 \cdot 0{,}03 = 15$	$a_n = 500 + 75$
$n` = 5$	$a_n = 575$
$a_n = ?$	
Portanto, o montante pago após 5 meses será de R$ 575,00	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

3.1.8 Juros compostos

Juros compostos é um conceito financeiro no qual os juros são calculados não apenas sobre o capital inicial (principal), mas também sobre os juros acumulados ao longo do tempo. Isso significa que, em cada período de tempo, os juros são adicionados ao montante principal, e nos períodos subsequentes, os juros são calculados com base nesse novo montante. Ao contrário dos juros simples, nos quais os juros são constantes em cada período, nos juros compostos, os juros aumentam a cada período devido ao acúmulo sobre o montante principal e os juros anteriores.

A fórmula para calcular o montante ($\boldsymbol{M}$) com juros compostos é dada por:

$$\boldsymbol{M_n = C \cdot (1 + i)^n}$$

- Demonstração da fórmula:

Sejam $M_1, M_2, M_3, M_4 \ ... M_n$ os montantes gerados a partir de um determinado tempo $n \geq 0$, a juros composto. Anteriormente, provamos que o montante a juros simples é: $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$. Como o montante a juros composto são adicionados ao montante principal, e nos períodos subsequentes, vamos demostrar a fórmula dos juros compostos por recorrência: Observe a sequência abaixo:

$* \boldsymbol{n = 0 \Rightarrow M_0} = C \cdot (1 + i \cdot 0) = C \cdot (1 + i)^0 = C$

$* \boldsymbol{n = 1 \Rightarrow M_1} = \boldsymbol{M_0} \cdot (1 + i \cdot 1) = C \cdot (1 + i \cdot 1) = C \cdot (1 + i)^1$

$* \boldsymbol{n = 2 \Rightarrow M_2} = \boldsymbol{M_1} \cdot (1 + i \cdot 1) = C \cdot (1 + i)^1 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$

$* \boldsymbol{n = 3 \Rightarrow M_3} = \boldsymbol{M_2} \cdot (1 + i \cdot 1) = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^3$

$* \boldsymbol{n = 4 \Rightarrow M_4} = \boldsymbol{M_3} \cdot (1 + i \cdot 1) = C \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^4$

$$\vdots$$

$\boldsymbol{\Rightarrow M_n} = \boldsymbol{M_{n-1}} \cdot (1 + i \cdot 1) = C \cdot (1 + i)^{\mathrm{n}-1} \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^n$

Portanto, provamos que a fórmula dos juros compostos realmente é definida por:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C} \cdot (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}}$$

Exemplo 8: Rafael pegou um empréstimo de $R\$ \, 3.000,00$, no regime de juros compostos, à uma taxa de $3\% \, a.m.$ no prazo de 3 meses. Qual será o valor total que ele irá pagar pelo empréstimo?

Quadro 11 – Exemplo 8: cálculo do montante a juros compostos.

$C = 3000$	$M = 3000 \cdot (1 + 0{,}03)^3$
$i = 3\% = 0{,}03 \, a.m.$	$M = 3000 \cdot (1{,}03)^3$
$n = 3 \, meses$	$M = 3000 \cdot 1{,}0927$
$M = ?$	$M = 3278{,}10$
$Portanto, o \, motante \, após \, os \, 3 \, meses \, foi \, de \, 3278{,}10 \, reais.$	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Note que podemos associar o montante dos juros compostos com a progressão geométrica (PG), já que seus comportamentos ao longo do tempo são semelhantes. Para verificarmos isso, considere as relações abaixo, que nos permitem relacionar cada variável correspondente:

Fórmula do termo geral da PG: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_0 \cdot q^{n`}$

Fórmula do montante: $M = C \cdot (1 + i \cdot)^n$

Assim, igualando os termos da PG com os termos do montante, temos:

- Termo geral igual ao Montante, ou seja: $a_n = M$
- Termo inicial igual Capital, ou seja: $a_0 = C$
- Razão igual a taxa mais 1, ou seja: $q = 100\% + i\% = 1 + i$
- Número de termos igual tempo, ou seja: $n` = n$

Portanto, $a_n = a_0 \cdot q^{n`} = M = C \cdot (1 + i)^n$.

Exemplo 9: Vitoria realizou um empréstimo no valor de R$ 2500,00 a uma taxa de juros composto de 3% ao mês. Se esse empréstimo for quitado em um período de 5 meses, qual será o valor total pago?

I- Pela fórmula dos juros compostos: $M = C \cdot (1+i)^n$

Quadro 12 - Exemplo 9: resolução usando a fórmula de juros compostos.

$C = 2500$	$M = 2500 \cdot (1 + 0{,}03)^5$
$i = 3\% = 0{,}03$	$M = 2500 \cdot 1{,}03^5$
$n = 5$	$M = 2500 \cdot 1{,}1592$
$M = ?$	$M = 2898$
Portanto, o montante pago após 5 meses será de R$ 2898,00	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

II – Pela formula da PG: $a_n = a_0 \cdot q^{n`}$

Quadro 13 - Exemplo 9: resolução usando a fórmula de progressão geométrica.

$a_0 = 2500$	$a_5 = 2500 \cdot 1{,}03^5$
$q = 1 + 0{,}03 = 1{,}03$	$a_5 = 2500 \cdot 1{,}1592$
$n` = 5$	$a_5 = 2898$
$a_5 = ?$	
Portanto, o montante pago após 5 meses será de R$ 2898,00	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

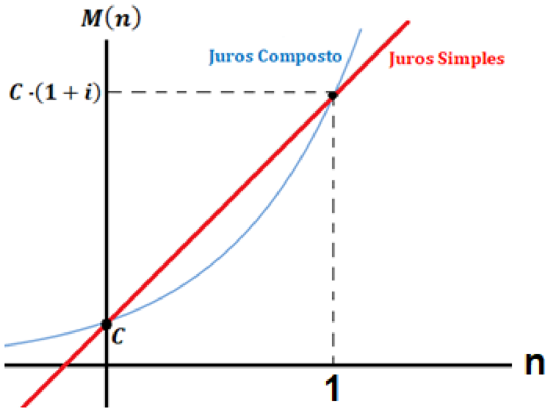
3.1.9 Comparação gráfica entre juros simples e juros compostos

Quando discutimos o montante em juros simples e compostos, e os comparamos com uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, como demonstrado anteriormente, é crucial salientar que, embora frequentemente usemos valores aproximados, eles podem ser expressos por funções.

O juro simples pode ser relacionado a uma função afim, expressa por $M(n) = C \cdot (1 + i \cdot n)$. Da mesma forma, o montante em juros compostos pode ser associado a uma função exponencial, representada por $M(n) = C \cdot (1+i)^n$. Essas representações ao longo do tempo nos permitem analisar seus comportamentos graficamente.

Para descrever de maneira genérica o comportamento Gráfico entre os dois tipos de capitalização, consideremos um capital $\boldsymbol{C}$, a uma taxa de juros $\boldsymbol{i}$ por um período de tempo $\boldsymbol{n}$. É sabido que o montante, tanto a juros simples quanto a juros compostos, só será igual quando $\boldsymbol{n = 1}$, ou seja: $\boldsymbol{n = 1} \begin{cases} M(1) = C \cdot (1 + i \cdot 1) = C \cdot (1+i) \\ M(1) = C \cdot (1+i)^1 = C \cdot (1+i) \end{cases}$.

Gráfico 1 - Comparação entre juros simples e juros compostos.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

No Brasil, o tipo de capitalização mais comumente utilizado é os juros compostos. Isso ocorre porque os juros compostos têm uma aplicação mais frequente em diversos tipos de transações financeiras, como empréstimos, investimentos e financiamentos imobiliários. Os juros compostos são preferidos devido ao seu potencial de crescimento mais acelerado ao longo do tempo, o que pode resultar em maiores retornos para os investidores e empréstimos mais lucrativos para as instituições financeiras. Sobre o Gráfico 1, vale ressaltar que, quando as instituições financeiras cobram juros por prazos menores que um período completo, como por dia ou por semanas em relação a um mês, elas utilizam juros simples. Isso ocorre porque, nesses casos, os juros simples resultam em um valor ligeiramente maior do que os juros compostos. Nos juros compostos, o efeito da composição (capitalização) não tem tempo suficiente para se manifestar plenamente em períodos muito curtos, e, por isso, o crescimento exponencial dos juros compostos ainda não supera a linearidade dos juros simples.

3.1.10 Taxas equivalentes e proporcionais

Frequentemente, ao nos depararmos com situações financeiras que envolvem juros, percebemos que muitas das vezes a taxa de juros e os períodos são distintos. Por exemplo, em um financiamento, a taxa de juros é geralmente expressa mensalmente, enquanto o tempo para quitar a dívida é em anos. Nesse caso, para realizar cálculos com precisão, é necessário adequar as unidades de medida para uma mesma referência.

Nesse caso, as taxas equivalentes ou proporcionais são aquelas que representam a mesma relação de crescimento ou decrescimento em diferentes períodos. Veja que, se uma taxa de juros simples de 10% ao ano é considerada, ela é equivalente a uma taxa de juros de 5% a cada seis meses, pois ambas resultam no mesmo montante de juros após um ano. Para calcular as taxas equivalentes, pode-se utilizar fórmulas ou métodos que ajustam a taxa de juros de acordo com o período de capitalização. Esses cálculos são importantes em finanças para comparar diferentes alternativas de investimento ou empréstimo, garantindo uma análise precisa dos custos ou ganhos envolvidos. Em matemática financeira, usamos o período comercial, conforme a tabela abaixo:

Tabela 2 - Período de tempo comercial.

1 mês	30 dias
1 bimestre	2 meses
1 trimestre	3 meses
1 semestre	6 meses
1 ano	12 meses
1 ano	5 bimestres
1 ano	4 trimestres
1 Ano	3 semestres

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

3.1.11 Conversões de taxas equivalentes a juros simples

Realizar a conversão de taxas equivalentes para juros simples é uma tarefa direta. Consiste em determinar se é necessário multiplicar ou dividir a taxa original pelo valor numérico relativo à unidade de medida específica para cada período.

Para uma melhor compreensão, observe os exemplos de conversão entre taxa e prazo representados na tabela a seguir, onde as proporções são equivalentes:

Tabela 3 - Conversão de taxas equivalentes a juros simples.

Período de tempo	**Taxa de juros original**	**Conversão**	**Taxa de juros equivalente**
Mês pra dias	12% a.m.	12% : 30 = 0,4%	0,4% a.d.
Mês para ano	2% a.m.	2% · 12 = 24%	24% a.a.
Ano para mês	18% a.a.	18% : 12 = 1,5%	1,5% a.m.

Trimestre para ano	1,5% a.t.	1,5% · 4 = 6%	6% a.a
Ano para semestre	10% a.a.	10% : 2 = 5%	5% a.s.

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Essa tabela estabelece uma relação direta entre a taxa de juros e o prazo de investimento, demonstrando uma proporção em relação às taxas equivalentes para cada período.

Exemplo 10: Gabriel, ao pesquisar os preços de computadores em sua cidade, descobriu que em uma determinada loja, poderia adquirir o computador desejado por R$ 3.000,00 à vista. No entanto, a loja oferecia a seguinte condição: se ele optasse por comprar o computador com a opção de pagar no próximo mês, a loja cobraria uma taxa de juros simples de 0,2% ao dia. Qual seria o valor a ser pago por esse computador se Gabriel decidir pagá-lo após um mês?

Quadro 14 - Exemplo 10: situação problema a juros simples.

$C = 3000$	$M = C \cdot (1 + i \cdot n)$
$i = 0{,}2\%\ a.d. = 0{,}2\% \cdot 30 = 6\%$ a.m $= 0{,}06$	$M = 3000 \cdot (1 + 0{,}06 \cdot 1)$
$n = 1$	$M = 3000 \cdot 1{,}06$
$M = ?$	$M = 3180$
Portanto, o valor pago no computado após 1 mês será de R$ 3 180,00	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

3.1.12 Conversões de taxas equivalentes a juros Compostos

No regime de juros compostos, é comum ocorrer uma confusão ao acreditar que uma taxa de 24% ao ano equivale a uma taxa de 2% ao mês. No entanto, essas taxas proporcionais não são equivalentes, pois elas só funcionam dessa forma para juros simples.

Vamos agora compreender e deduzir uma fórmula que nos permite realizar essas transformações de taxas de forma que elas sejam proporcionais a juros compostos:

Sabemos que o montante é $M = C + J$ e que a fórmula do montante a juros composto é $M = C \cdot (1 + i)^n$, então:

$$C + J = C \cdot (1 + i)^n$$

$$J = C \cdot (1+i)^n - C$$
$$J = C \cdot [(1+i)^n - 1]$$

Observe que $(1+i)^n - 1$ é chamado "fator de acumulação", é o fator pelo qual o principal (ou valor inicial) é multiplicado para calcular o montante total acumulado ao longo de vários períodos, levando em consideração uma determinada taxa de juros. E essa expressão que usaremos para realizar as transformações das taxas proporcionais e equivalentes.

Assim, para realizarmos essas transformações, temos que analisar dois casos:

I - Se a transformação for de um período **menor** para um período **maior**, usaremos: $(1+i)^n - 1$, na qual n será o período maior.

Exemplo 11: 2% a.m. é equivalente a quantos por cento ao ano?

Quadro 15 - Exemplo 11: conversão de taxas equivalentes de um período menor para um maior.

$i = 2\%\ a.m. = 0{,}02$	$(1+0{,}02)^{12} - 1$
$n = 1\ ano = 12\ meses$	$1{,}02^{12} - 1$
	$1{,}2682 - 1$
	0,2682
Assim: 0,2684 · 100 = 26,82%	
Portanto, uma taxa de juros de 2% a.m. é equivalente a 26,82% a.a.	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

II - Se a transformação for de um período **maior** para um período **menor**, usaremos: $(1+i)^{\frac{1}{n}} - 1$, na qual n será o período menor.

Note que $(1+i)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1+i}$, logo $(1+i)^{\frac{1}{n}} - 1 = \sqrt[n]{1+i} - 1$.

Exemplo 12: 10% ao trimestre é equivalente a quantos por cento ao mês?

Quadro 16 - Exemplo 12: conversão de taxas equivalentes de um período maior para um menor.

$i = 10\%\ a.t. = 0{,}1$	$\sqrt[3]{1+0{,}1} - 1$
$n = 1\ trimestre = 3\ meses$	$\sqrt[3]{1{,}1} - 1$
	$1{,}03228 - 1$
	0,0323
Assim: 0,0323 · 100 = 3,23%	
Portanto, uma taxa de juros de 10% a.t. é equivalente a 3,23% a.m.	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

É relevante salientar que os dois casos previamente apresentados correspondem à mesma fórmula. A divisão foi realizada unicamente com o intuito de facilitar a compreensão. De maneira geral, independentemente da ordem das taxas, seja da maior para a menor ou da menor para a maior, será demonstrada a seguir a fórmula para a transformação de taxas equivalentes. Consideraremos $(n+)$ como o período maior, $(n-)$ como o período menor e (t)a taxa do período, temos:

$$i_t = (1 + i_{n+})^{n-} - 1$$

$$i_t + 1 = (1 + i_{n+})^{n-}$$

$$\sqrt[n-]{i_t + 1} = 1 + i_{n+}$$

$$i_{n+} = \sqrt[n-]{i_t + 1} - 1$$

Exemplo 13 (geral):

João está pesquisando opções de investimento. Ele descobriu uma oportunidade que promete gerar a quantia desejada, mas requer um período de espera de um ano, pois esta aplicação possui uma taxa de juros de 12% ao ano. No entanto, ele precisa de um investimento que gere rendimento mensalmente. Qual deve ser a taxa de juros mensal para alcançar uma quantia equivalente aos 12% ao ano?

Quadro 17- Exemplo 13: situação problema envolvendo taxas equivalentes.

Nesse caso, vamos transforma a taxa de juros de ano para meses.	
$i = 12\%\ a.a. = 0{,}12$	$\sqrt[12]{1 + 0{,}12} - 1$
$n = 1\ ano = 12\ meses$	$\sqrt[12]{1{,}12} - 1$
	$1{,}0094 - 1$
	$0{,}0094$
Assim: 0,0094 · 100 = 0,94%	
Portanto, uma taxa de juros de 12% a.a. é equivalente a 0,94% a.m.	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

3.2 Contextualização da matemática financeira na sala de aula

A matemática é como um quebra-cabeças em que cada peça é essencial. Muitas vezes, a falta de compreensão dos conteúdos matemáticos pelos alunos gera uma rejeição significativa, dificultando seu aprendizado em sala de aula. No entanto, quando percebem sua aplicação prática no dia a dia, o processo de ensino e aprendizagem se torna mais agradável para esses estudantes. Em relação a isso, os documentos curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), embora atualmente menos utilizados, têm importância histórica em nosso país. Eles recomendam que as disciplinas (hoje conhecidas como componentes curriculares, conforme a BNCC) sejam abordadas de maneira integrada, e não de forma isolada, ao estabelecer que:

> [...] o critério central é o da **contextualização** e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema (BRASIL, 1999, p. 43, grifos nossos).

Contextualizar a matemática na vida dos estudantes possibilita que assimilem os conteúdos trabalhados em sala de aula com situações reais da vida, despertando curiosidade e interesse pelo tema. Segundo Silva (2007, p. 10),

> [...] a contextualização se apresenta como um modo de ensinar conceitos das ciências ligados à vivência dos alunos, seja ela pensada como recurso pedagógico ou como princípio norteador do processo de ensino. A contextualização como princípio norteador caracteriza-se pelas relações estabelecidas entre o que o aluno sabe sobre o contexto a ser estudado e os conteúdos específicos que servem de explicações e entendimento desse contexto [...].

Entre os diversos conteúdos abordados nos materiais didáticos de matemática, a matemática financeira se destaca por captar especialmente a atenção dos alunos, pois envolve situações financeiras em que eles conseguem relacionar diretamente com suas atividades diárias. Consoante Pellegrin e Damazio (2015, p. 491) a contextualização,

> [...] é um recurso que deve ser utilizado como forma de possibilitar a apreensão dos conceitos científicos construídos ao longo da história e que permite a compreensão de fatos naturais, sociais, políticos, econômicos que fazem parte do cotidiano do aluno.

Frequentemente, o ensino de alguns conteúdos matemáticos enfrenta desafios, porém é crucial destacar que a matemática foi desenvolvida para atender às necessidades humanas, desde conceitos básicos de contagem até os teoremas mais complexos. Portanto, relacioná-los com situações reais em sala de aula facilita a compreensão do aluno sobre a relevância dos temas estudados. Nessa perspectiva, Moraes e Onuchic (2011, p. 2) afirmam:

> [...] quanto mais relações os alunos conseguirem estabelecer entre os conteúdos estudados, melhor será sua aprendizagem. Essa relação entre os conteúdos já aprendidos e os novos conteúdos poderia se caracterizar, de acordo com nossa concepção, como contextualização. Essas relações podem ser mais representativas de acordo com o contexto em que as atividades se desenvolvem, podendo ocorrer também dentro da própria Matemática.

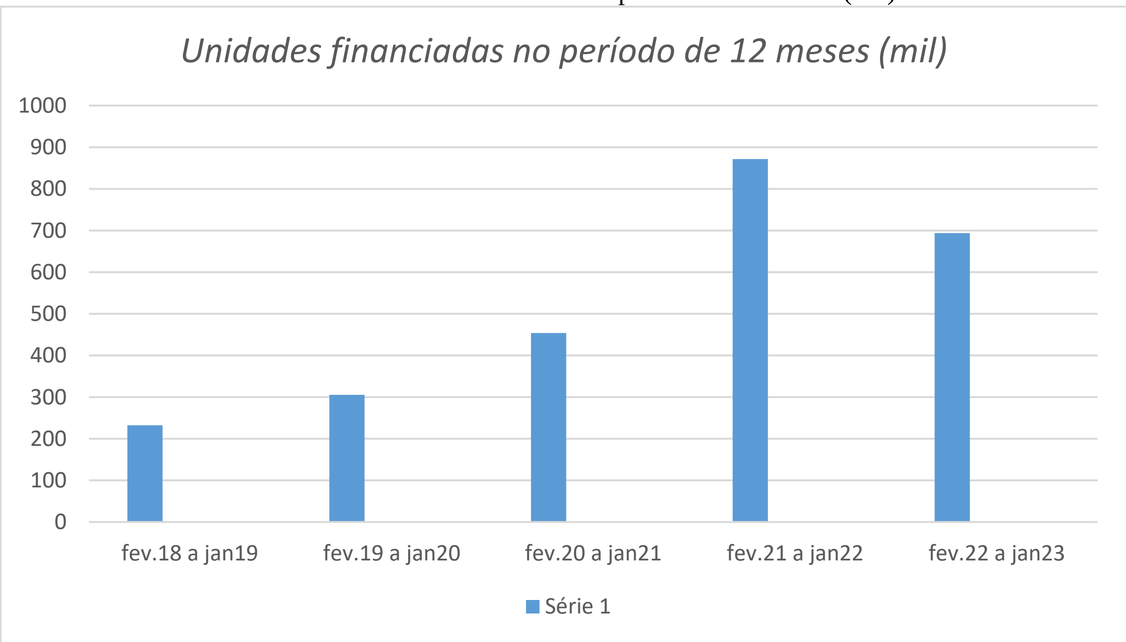
Assim, a contextualização da matemática financeira na vida do aluno é essencial, pois transforma conceitos abstratos em ferramentas práticas para tomar decisões. Isso conscientiza os estudantes sobre o que e quanto estão pagando, além de lhes transmitir noções de economia, ajudando-os a gerenciar recursos e entender a economia real.

4 Financiamento Imobiliário

O Sistema de Financiamento Imobiliário, estabelecido em 1997 pela Lei nº 9.514/1997, tem crescido significativamente nos últimos anos. Essa iniciativa tem simplificado, em certa medida, o processo de conquistar a tão desejada casa própria. A opção por financiamento tornou-se uma estratégia adotada por muitos brasileiros, dada a elevada cifra dos imóveis, e, frequentemente, a indisponibilidade de recursos financeiros imediatos. Recorrer a linhas de créditooferecidas por instituições financeiras, como a Caixa Econômica Federal, emerge como uma solução para aqueles que verdadeiramente almejam alcançar a propriedade residencial.

Segundo informações do portal de notícias da Globo (G1), o setor de habitações popularesliderou o avanço, registrando um aumento significativo de 18,3%, com transações totalizando R$11,9 bilhões. O segmento de Médio e Alto Padrão também obteve resultados positivos,apresentando um crescimento de 15,1%, com transações totalizando R$ 10,7 bilhões. No entanto,a pandemia de COVID-19 teve um impacto perceptível no último ano, conforme indicado pelos dados divulgados pela Associação Brasileira das Entidades de Crédito Imobiliário e Poupança (Abecip) no período de fevereiro de 2018 a janeiro de 2023. Observe o Gráfico 2 abaixo que representam esses dados.

Gráfico 2 - Unidades financiadas no período de 12 meses (mil).



Fonte: Elaborado pelo autor segundo os dados fornecidos pela ABECIP (2023).

Embora a busca por financiamentos imobiliários seja comum, muitos brasileiros enfrentama falta de familiaridade com a complexa matemática envolvida nos juros, nos montantes, nos valores das parcelas e, ainda mais, nas taxas de amortização de cada tipo de financiamento. Uma ótima solução é dedicar tempo a um estudo de matemática financeira e compreender os diversos tipos de financiamentos disponíveis. No meio financeiro, encontramos vários sistemas modelados para atender a diferentes perfis de pessoas, exemplificados pelas tabelas SAC e PRICE.

5 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

No contexto da amortização de financiamentos, iremos compreender neste trabalho os modelos SACe PRICE. Embora essas abordagens moldem o financiamento de maneiras diferentes, são elas que determinam como os valores das parcelas evoluem ao longo do tempo. Em um contexto de financiamento imobiliário, por exemplo, cada pagamento mensal não se destina apenas ao pagamento dos juros incidentes sobre o saldo devedor, mas também à redução do próprio valor principal do empréstimo.

Como nas operações de financiamento, os juros são consistentemente calculados com base no saldo devedor do período anterior, é importante conhecermos agumas variáveis que são usadas ao longo desse trabalho.

Tabela 4 - Nomenclaturas da matemática financeira.

Valor da dívida ou valor financiado	C
Taxa efetiva de juros mensal	$i\%$
Número de prestações contratadas	n
Valor amortizado do período	A_n
Saldo devedor do período	S_n
Juros aplicados ao saldo devedor do período anterior	$J_n = i \cdot V_{n-1}$
Valor da parcela a ser paga mensalmente	$P_n = V_n + J_n$

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

O propósito deste trabalho é oferecer uma compreensão mais aprofundada dos modelos matemáticos que sustentam os financiamentos, capacitando os alunos a entender como os valores de cada parcela são calculados e como as regras para a construção das tabelas de amortização dos sistemas SAC e PRICE são estabelecidas. Alé disso, queremos que eles consigam entender as especificações emtre os dois sistemas. Além disso, pretendemos que eles compreendam as especificações distintivas entre os dois sistemas.

5.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

No sistema SAC, a amortização, que representa a redução do saldo devedor, permanece constante ao longo de todo o período do empréstimo. As parcelas mensais compreendem uma parte fixa destinada à amortização e outra parte variável relacionada aos juros sobre o saldo devedor restante. Em termos simples, inicialmente, as parcelas são mais elevadas, pois a amortização é constante, mas os juros incidem sobre um saldo inicial mais alto. Conforme o tempo avança e as parcelas são pagas, o valor necessário para quitar o financiamento diminui, resultando em uma redução proporcional dos juros em relação ao saldo devedor. Esse processo torna as parcelas mais acessíveis ao longo do tempo.

Para calcular o valor da amortização, basta dividir o valor financiado (valor principal) pelo número de parcelas: $A_n = \frac{C}{n}$. E para calcular o valor da primeira parcela, devemos somar a amortização com os juros sobre o saldo devedor: $(P_1) = A_1 + J_1$.

Como no sistema SAC, a amortização é constante e os juros são calculados sobre o saldo devedor, podemos relacionar o valor das parcelas ao longo do tempo como uma progressão aritmética, em que a razão é negativa e é calculada pelo produto da amortização pela taxa de juros, ou seja: $P_n = P_1 + (n-1) \cdot (-r), tal\ que, r = A_n \cdot i\%$.

Exemplo 14: Raphael e sua esposa pretendem construir sua casa própria no próximo ano, mas não têm dinheiro suficiente para completar a obra até a conclusão. Para isso, planejam aderir a um financiamento pela Caixa Econômica Federal. O valor financiado será de R$ 75.000,00 com uma taxa de juros de 4,0% ao mês. O empréstimo será quitado em 15 meses, considerando o sistema de amortização constante (SAC). Com isso:

a) Qual será o valor amortizado a cada mês?

Quadro 18 - Exemplo 14: cálculo da amortização no sistema SAC.

$$A = \frac{75000}{15} = 5000\ reais$$

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

b) Qual será o valor da primeira prestação?

Quadro 19 - Exemplo 14: cálculo do valor da primeira parcela no sistema SAC.

$$J = 75000 \cdot 0{,}04 = 3000 \ \rightarrow \ (P_1) = 5000 + 3000 = 8000\ reais$$

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

c) Construa uma tabela de amortização desse financiamento.

Tabela 5 - Tabela do sistema SAC do exemplo 14.

Meses	**Amortização**	**juros**	**Prestação**	**Saldo devedor**
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{A = \frac{C}{n}}$	$\boldsymbol{J_n = i \cdot S_n}$	$\boldsymbol{A + J_n}$	$\boldsymbol{S_n}$
0				R$ 75.000,00
1	R$ 5.000,00	R$ 3.000,00	R$ 8.000,00	R$ 70.000,00
2	R$ 5.000,00	R$ 2.800,00	R$ 7.800,00	R$ 65.000,00
3	R$ 5.000,00	R$ 2.600,00	R$ 7.600,00	R$ 60.000,00
4	R$ 5.000,00	R$ 2.400,00	R$ 7.400,00	R$ 55.000,00
5	R$ 5.000,00	R$ 2.200,00	R$ 7.200,00	R$ 50.000,00
6	R$ 5.000,00	R$ 2.000,00	R$ 7.000,00	R$ 45.000,00
7	R$ 5.000,00	R$ 1.800,00	R$ 6.800,00	R$ 40.000,00
8	R$ 5.000,00	R$ 1.600,00	R$ 6.600,00	R$ 35.000,00
9	R$ 5.000,00	R$ 1.400,00	R$ 6.400,00	R$ 30.000,00
10	R$ 5.000,00	R$ 1.200,00	R$ 6.200,00	R$ 25.000,00
11	R$ 5.000,00	R$ 1.000,00	R$ 6.000,00	R$ 20.000,00
12	R$ 5.000,00	R$ 800,00	R$ 5.800,00	R$ 15.000,00
13	R$ 5.000,00	R$ 600,00	R$ 5.600,00	R$ 10.000,00
14	R$ 5.000,00	R$ 400,00	R$ 5.400,00	R$ 5000,00
15	R$ 5.000,00	R$ 200,00	R$ 5.200,00	R$ 000,00
Total	R$ 75.000,00	R$ 24.000,00	R$ 99.000,00	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

5.2 Sistema Francês de Amortização (PRICE)

De acordo com o professor Mario Geraldo Pereira, o Sistema Francês foi desenvolvido pelo matemático e físico belga Simon Stevin no século XVI. Foi utilizado pelo economista e matemático inglês Richard Price, no século XVIII, no cálculo previdenciário inglês da época, e ficou conhecido no Brasil como Sistema Price (VIEIRA SOBRINHO, 2000, p. 222).

No sistema PRICE, as parcelas mensais permanecem fixas ao longo do tempo. Isso ocorre porque a estrutura das parcelas envolve uma parte destinada à amortização e outra aos juros. Ao contrário do SAC, no PRICE, a parcela de juros diminui progressivamente, enquanto a de amortização aumenta ao longo do tempo. Essa dinâmica resulta em parcelas constantes do início ao fim do financiamento, embora a proporção entre juros e amortização se inverta ao longo do prazo.

Para calcular o valor das parcelas (P) de um financiamento pelo sistema PRICE, podemos utilizar a fórmula abaixo, onde é considerada uma dívida (C) ao longo de um período de tempo (n) com uma taxa de juros (i).

$$P = C \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Demonstração da formula: Considerando n a partir do periodo de tempo zero, temos:

$$C = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$$C = P \cdot \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Note que: $\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$ representa a soma dos termos de uma prgressão geométrica cujo a razão é $q = \frac{1}{1+i}$, primeiro termo é $a_1 = \frac{1}{1+i}$ e com uma quantidade n de termos.

Sabemos que a soma dos n termos de uma PG é: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$. Potanto:

$$C = P \cdot \left[\left(\frac{1}{1+i}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1+i}\right) - 1}\right]$$

$$C = P \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1+i}\right) - 1}$$

$$C = P \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

$$C = P \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{1-1-i}{1+i}}$$

$$C = P \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)}{(-i)}$$

$$C = P \cdot \frac{1 - (1+i)^n}{(-i) \cdot (1+i)^n}$$

$$C = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(i) \cdot (1+i)^n}$$

Assim, isolando P na equação acima temos:

$$P = C \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Com isso demostramos a formula do calculo do valor da parcela no sistema Price. E veja que a amortização do enésino periódo será $A_n = P - J_n$, que representa a diferença entre o valor da prestação e os juros do período. O saldo devedor pode ser calculado como a diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período $S_n = S_{n-1} - A_n$.

Exemplo 15: Para podermos fazer uma comparação entre os dois tipos de sistema SAC e PRICE, vamos calcular o valor da parcela e elaborar uma tabela pelo sistema PRICE do exemplo 14.

Temos o quadro20:

Quadro 20 - Exemplo 15: cálculo do valor das parcelas no sistema PRICE.

Fórmula da parcela constante	$\boldsymbol{P = C \cdot \dfrac{(1+i\%)^{n} \cdot i\%}{(1+i\%)^{n}-1}}$
$Parcela\ (P)\ = ?$ $Capital\ (C)\ =\ 75\ 000$ $Período\ (n)\ =\ 15\ meses$ $Taxa(i\%)\ =\ 4{,}0\%\ a.m. =\ 0{,}04$	$\boldsymbol{P = 75\ 000 \cdot \dfrac{(1+0,04)^{15} \cdot 0,04}{(1+0,04)^{15}-1}}$ $\boldsymbol{P = 75\ 000 \cdot \dfrac{(1,04)^{15} \cdot 0,04}{(1,04)^{15}-1}}$ $\boldsymbol{P = 75\ 000 \cdot \dfrac{0,0720}{0,8009}}$ $\boldsymbol{P = \dfrac{5\ 402,55}{0,8009}}$ $\boldsymbol{P = 6\ 745,58}$
Portanto, arredondando os centavos, as parcelas serão de R$ 6 745,58	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Construção da tabela:

Tabela 6 - Tabela do sistema PRICE do exemplo 15.

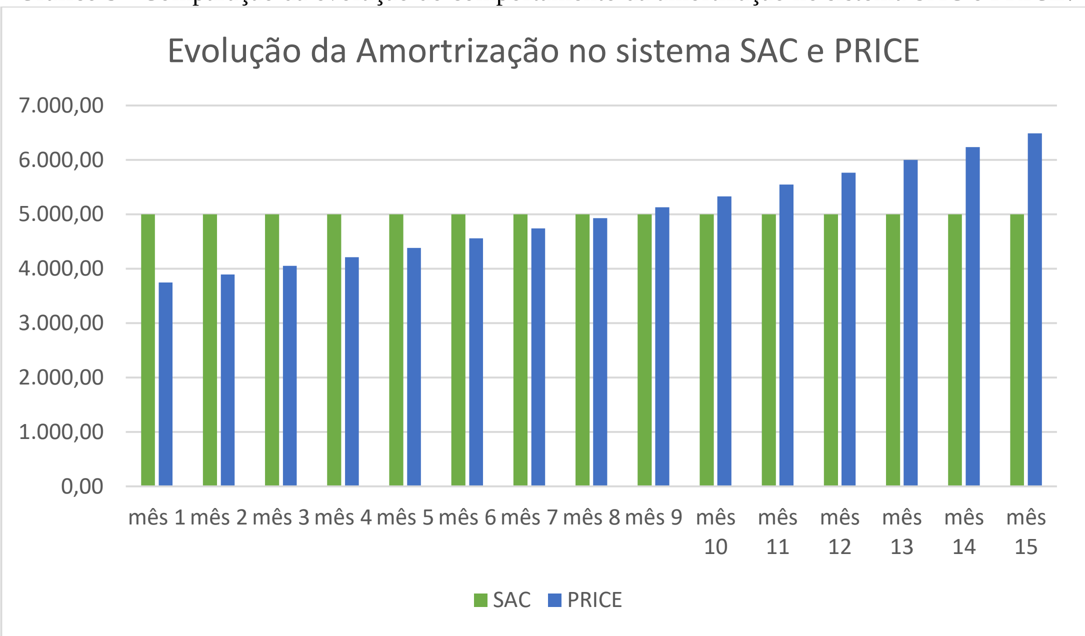
Meses	Amortização	juros	Prestação	Saldo devedor
	$\boldsymbol{A_n = P - J_n}$	$\boldsymbol{J_n = i \cdot S_n}$	$\boldsymbol{P = C \cdot \dfrac{i \cdot (1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}}$	$\boldsymbol{S_n}$
0				R$ 75.000,00
1	R$ 3.745,58	R$ 3.000,00	R$ 6.745,58	R$ 71.254,42
2	R$ 3.895,41	R$ 2.850,18	R$ 6.745,58	R$ 67.359,01
3	R$ 4.051,22	R$ 2.694,36	R$ 6.745,58	R$ 63.307,79
4	R$ 4.213,27	R$ 2.532,31	R$ 6.745,58	R$ 59.094,52
5	R$ 4.381,80	R$ 2.363,78	R$ 6.745,58	R$ 54.712,72
6	R$ 4.557,07	R$ 2.188,51	R$ 6.745,58	R$ 50.155,64
7	R$ 4.739,36	R$ 2.006,23	R$ 6.745,58	R$ 45.416,29

8	R$ 4.928,93	R$ 1.816,65	R$ 6.745,58	R$ 40.487,36
9	R$ 5.126,09	R$ 1.619,49	R$ 6.745,58	R$ 35.361,27
10	R$ 5.331,13	R$ 1.414,45	R$ 6.745,58	R$ 30.030,13
11	R$ 5.544,38	R$ 1.201,21	R$ 6.745,58	R$ 24.485,76
12	R$ 5.766,15	R$ 979,43	R$ 6.745,58	R$ 18.719,61
13	R$ 5.996,80	R$ 748,78	R$ 6.745,58	R$ 12.722,81
14	R$ 6.236,67	R$ 508,91	R$ 6.745,58	R$ 6.486,14
15	R$ 6.486,14	R$ 259,45	R$ 6.745,58	R$ 0,00
Total	R$ 75.000,00	R$ 26.183,74	R$ 101.183,74	

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Utilizando os dados das Tabelas dos exemplos 14 e 15 e visando uma compreensão visual do comportamento das parcelas, dos juros e da amortização ao longo do tempo nos sistemas SAC e PRICE, examinaremos os três gráficos a seguir. Eles oferecem uma comparação da evolução desses fatores-chave em um financiamento.

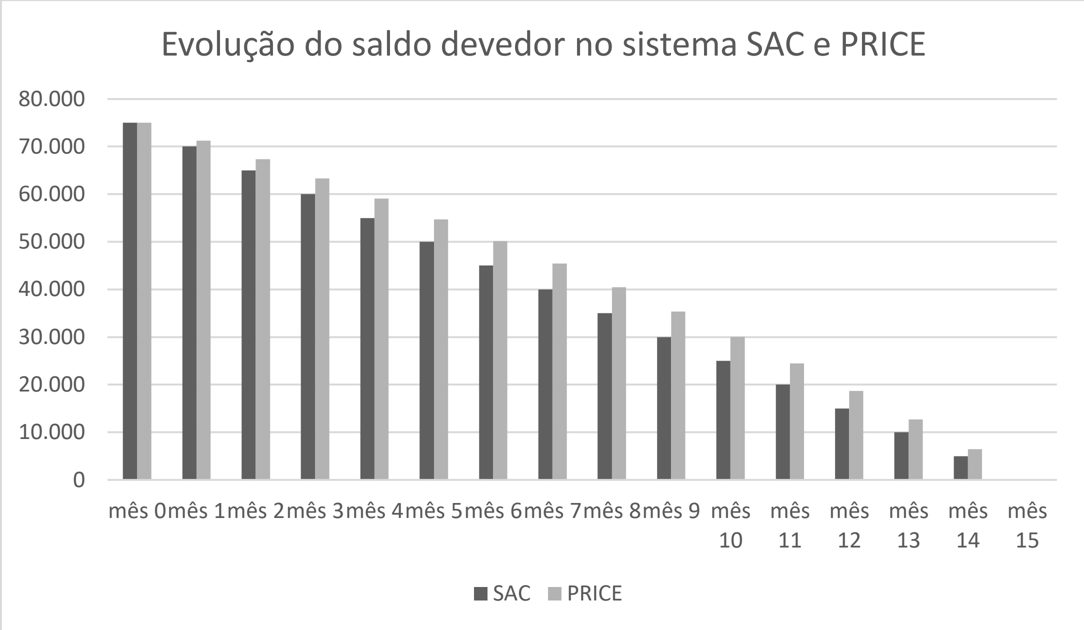
Gráfico 3 - Comparação da evolução do comportamento da amortização no sistema SAC e PRICE.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Como observado no Gráfico 3, os valores da amortização no sistema SAC permanecem constantes ao longo de todo o período de vigência, enquanto, no sistema PRICE a amortização começa baixa e aumenta progressivamente com o tempo. Essas são características distintas de cada sistema em relação à forma como os valores são amortizados em cada parcela.

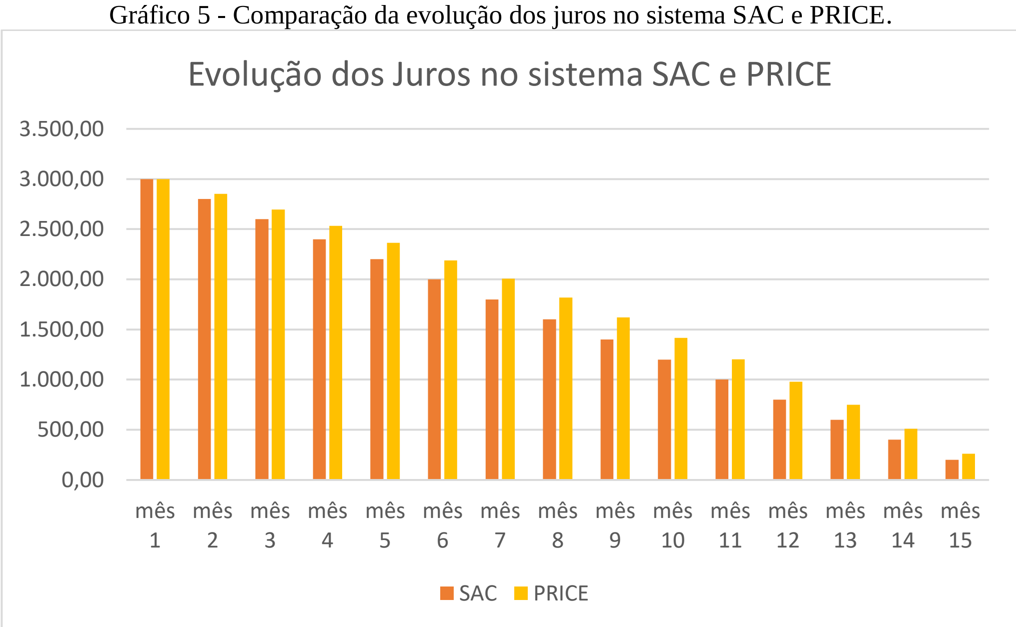
Gráfico 4 - Evolução do saldo devedor no sistema SAC e PRICE.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

O saldo devedor é o montante remanescente a ser pago em um financiamento. Conforme ilustrado no Gráfico 4, o saldo devedor é decrescente tanto no sistema PRICE quanto no sistema SAC, pois a cada parcela o saldo devedor é reduzido, ou seja, está sendo amortizado. Conforme observado no Gráfico 3, a amortização no sistema SAC é inicialmente maior e constante, resultando em uma diminuição mais rápida do saldo devedor.

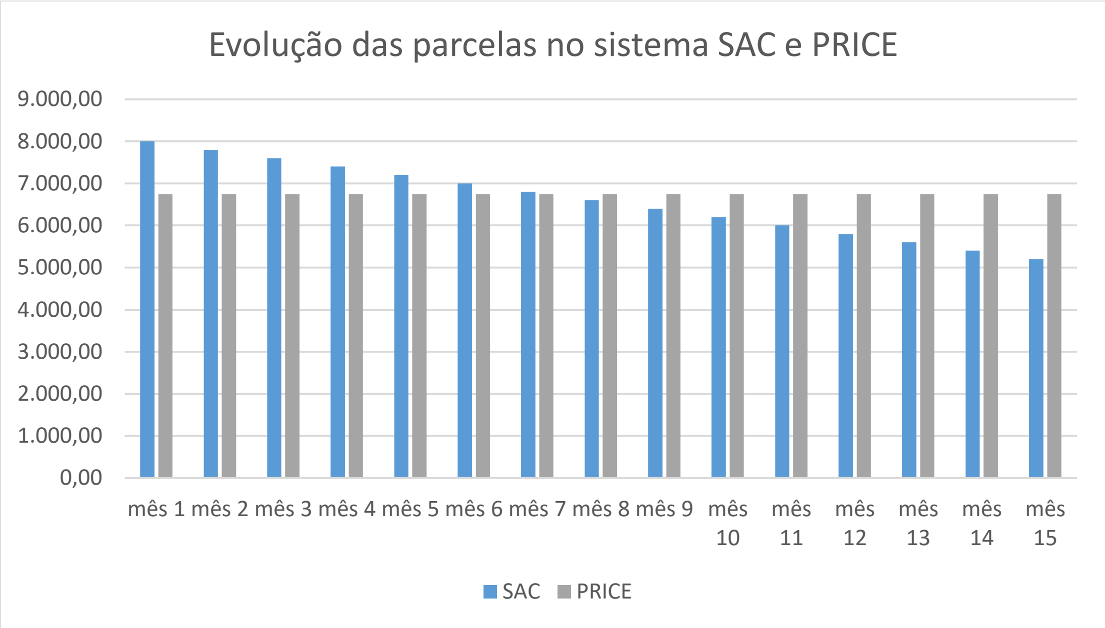
Gráfico 5 - Comparação da evolução dos juros no sistema SAC e PRICE.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

O Gráfico 5 compara os juros em ambos os sistemas. Observa-se que ambos os sistemas começam com valores de juros iguais; no entanto, a redução dos juros no sistema SAC é mais rápida do que no sistema PRICE. Isso ocorre porque a amortização inicial no sistema SAC é maior do que no sistema PRICE, conforme evidenciado no Gráfico 3. Dado que os juros são calculados com base no saldo devedor, fica justificado por que, nesse caso, os juros no sistema SAC diminuem mais rapidamente.

Gráfico 6 - Comparação da evolução das parcelas no sistema SAC e PRICE.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Pelo Gráfico 6 e pela análise dos Gráficos 3, 4 e 5 podemos compreender o comportamento dos valores das parcelas ao longo de 15 meses. No sistema SAC, as parcelas começam maiores e diminuem com o passar do tempo. Isso ocorre porque as parcelas são calculadas como a soma da amortização constante e dos juros sobre o saldo devedor. No sistema PRICE, os valores das parcelas são constantes. Embora também sejam calculados como a soma da amortização e dos juros sobre o saldo devedor, a amortização cresce e os juros diminuem proporcionalmente ao longo do tempo, mantendo o valor das parcelas constante.

No contexto dos exemplos 14 e 15, bem como nas análises dos gráficos, observa-se que o sistema SAC apresenta vantagens consideráveis em relação ao sistema PRICE. No entanto, a escolha entre SAC e PRICE não é simples e deve ser baseada em uma análise detalhada de diversas circunstâncias específicas. A decisão sobre qual sistema é melhor depende de vários fatores, incluindo o perfil financeiro do mutuário, suas preferências de pagamento e os objetivos específicos do financiamento. Cada sistema possui suas próprias vantagens e desvantagens, que podem torná-lo mais adequado em diferentes situações.

O sistema SAC, por exemplo, proporciona uma redução mais rápida do saldo devedor, resultando em um custo total de juros menor ao longo do tempo. No entanto, as parcelas iniciais são significativamente mais altas em comparação com o sistema PRICE, o que pode ser um desafio para mutuários com capacidade de pagamento limitada no início. Por outro lado, o sistema PRICE, apesar de apresentar amortizações menores no início e juros relativamente mais altos, oferece parcelas constantes ao longo do período do financiamento. Essa característica facilita o planejamento financeiro e proporciona uma melhor previsibilidade para o mutuário.

Portanto, a escolha entre o sistema SAC e o sistema PRICE deve levar em consideração as necessidades e condições individuais do mutuário, bem como o impacto das características de cada sistema sobre o planejamento financeiro e os custos totais do financiamento. Além disso, é fundamental estar atento às taxas extras, como seguros, taxas administrativas e outros encargos, que também podem afetar o valor total a ser pago.

6 ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA DE FORMA CONTEXTUALIZADA

Esta experiência objetivou a promoção do estudo de matemática financeira de maneira contextualizada no ambiente escolar, com foco em alunos do 1º ano do ensino médio. O propósito principal foi não apenas proporcionar uma análise detalhada dessa temática, mas também estimular o interesse dos estudantes pelo estudo da matemática. Em um trabalho subsequente a esta dissertação, pretende-se desenvolver uma cartilha que possa ser utilizada por outros professores como uma ferramenta para orientar a implementação de uma abordagem contextualizada do ensino de matemática financeira em sala de aula.

Com isso, neste capítulo, detalharemos as etapas e os métodos utilizados para desenvolver e abordar os conteúdos de matemática financeira em sala de aula. Apresentaremos o público-alvo, os instrumentos de pesquisa, os materiais utilizados, a metodologia aplicada com os alunos, as atividades desenvolvidas, os desafios enfrentados, as conquistas alcançadas, a coleta de dados e, claro, o verdadeiro propósito que motivou este trabalho.

6.1 Local de realização da experiência

A pesquisa foi realizada em um colégio da rede privada de ensino regular, que atende desde o maternal até o terceiro ano do ensino médio. Este colégio está localizado na cidade de Sinop, no estado de Mato Grosso, a 478 km da capital, Cuiabá. Atualmente, a instituição atende aproximadamente 900 alunos, com idades entre 2 e 19 anos. Este tradicional e prestigiado colégio de Sinop possui dezoito salas de aula, um laboratório de informática, um laboratório de ciências, uma biblioteca, uma quadra de esportes coberta, um parquinho, uma cantina, três banheiros grandes, além das salas dos professores e dos serviços administrativos. A seguir, apresentamos a Figura 4 com a imagem da entrada do colégio.

Figura 4 - Entrada do colégio.

Fonte: Site do colégio (2024).

A pesquisa foi realizada/desenvolvida em duas turmas do 1º ano do ensino médio, uma com 29 alunos e a outra com 27 alunos. A escolha dessas turmas se deu pela oportunidade de explorar um grupo de alunos que estão em uma faixa etária caracterizada por curiosidades em compreender o valor do dinheiro e o funcionamento do sistema financeiro em que estamos inseridos. Além disso, a experiência pôde aproveitar os conteúdos de matemática financeira que estavam sendo abordados no material didático dessas turmas.

Todas as atividades foram desenvolvidas durante as aulas de matemática, pois o professor pesquisador é o titular dessas aulas nas turmas envolvidas na experiência. Durante o período em que trabalhamos a matemática financeira tradicional do livro didático (porcentagem, juros simples e compostos), foi possível realizar as atividades em todas as aulas da semana. No entanto, ao começarmos os conteúdos extras, como calcular parcelas e amortização de dívidas pelos sistemas SAC e PRICE, foi necessário dedicar duas aulas semanais para o desenvolvimento dessas atividades, pois precisávamos continuar abordando os outros conteúdos presentes no material didático das turmas.

A experiência foi realizada ao longo de seis semanas, começando no meio do 1º bimestre e se estendendo até o 2º bimestre de 2024. Durante as primeiras duas semanas, foi possível utilizar todas as cinco aulas semanais para abordar os conteúdos propostos e realizar as atividades. Nas quatro semanas seguintes, foram dedicadas duas aulas semanais para a conclusão das atividades.

Vale ressaltar que o foco dessa abordagem em sala de aula não é simplesmente medir o conhecimento dos alunos sobre matemática financeira, mas sim apresentar uma matemática contextualizada que lhes ofereça uma perspectiva diferente e provoque uma reflexão sobre a importância de entenderem as regras matemáticas dos sistemas financeiros presentes em sua vida. Dessa forma, buscou-se promover um maior interesse dos estudantes em estudar matemática, possibilitando que compreendam e administrem seu dinheiro de maneira responsável, ajudando-os a tomar decisões financeiras informadas e conscientes.

6.2 Caracterização da experiência

Antes de realizar um trabalho prático em sala de aula, foi necessário estudar materiais previamente publicados para obter uma compreensão mais profunda e confiável sobre o conteúdo de matemática financeira abordado. Para isso, utilizamos uma pesquisa bibliográfica, que ajuda o pesquisador a encontrar em materiais existentes as fundamentações teóricas que enriquecem a compreensão dos temas estudados. Conforme Marconi e Lakatos (2010, p. 44), “a realização da pesquisa bibliográfica compreende oito fases distintas”:

I - escolha do tema;

II - elaboração do plano e trabalho;

III - identificação;

IV - localização;

V - compilação;

VI - fichamento;

VII - análise e interpretação;

VIII - redação.

Com base nessas fundamentações, conduzimos este estudo realizando uma análise de diversos textos que abordam o tema, levando em consideração seu desenvolvimento histórico e a relevância tanto para a ciência quanto para a sociedade em estudo. Tendo em vista também que a modelagem matemática é uma abordagem para descrever, de forma matemática, questões do mundo real e as técnicas ou métodos de solução dos modelos como uma estratégia para abordar a problemática apresentada.

Além da pesquisa bibliográfica, este trabalho se fundamenta na pesquisa qualitativa, pois buscamos entender o posicionamento dos alunos em relação ao valor do dinheiro, bem como despertar neles o interesse e a curiosidade sobre a matemática financeira aplicada a problemas contextualizados. A pesquisa qualitativa auxilia na análise e compreensão dos indivíduos estudados através de atividades aplicadas diretamente ou indiretamente, utilizando abordagens como entrevistas em profundidade, observação dos participantes, coleta e análise de dados, entre outros métodos. Para Gil (2002, p. 53), a pesquisa qualitativa é caracterizada da seguinte maneira:

> Tipicamente, o estudo de campo focaliza uma comunidade, que não é necessariamente geográfica, já que pode ser uma comunidade de trabalho, de estudo, de lazer ou voltada para qualquer outra atividade humana. Basicamente, a pesquisa é desenvolvida por meio da observação direta das atividades do grupo estudado e de entrevistas com informantes para captar suas explicações e interpretações do que ocorre no grupo. Esses procedimentos são geralmente conjugados com muitos outros, tais como a análise de documentos, filmagens e fotografias.

Essa técnica permite que o pesquisador obtenha uma percepção mais detalhada do objeto de estudo, possibilitando uma análise aprofundada e crítica dos dados coletados durante o processo de verificação, analisando o comportamento social, cultural e ético dos participantes.

Além disso, conforme os resultados da pesquisa sobre a temática, a técnica pode ser adaptada para diferentes contextos, contribuindo para o avanço pessoal e profissional do ser humano.

A pesquisa qualitativa desempenhou um papel fundamental nesta dissertação. Segundo Aliaga e Gunderson (2002), a pesquisa quantitativa pode ser compreendida como a “explicação de fenômenos por meio da coleta de dados numéricos, analisados por métodos matemáticos, especialmente os estatísticos”. Isso se aplica à análise das atividades realizadas em sala de aula, que exigiram a interpretação de materiais mensuráveis apresentados em planilhas, tabelas e gráficos. Conforme Strauss e Corbin (2015), a pesquisa qualitativa é composta basicamente por três elementos: (i) os dados, que podem ser obtidos de fontes como entrevistas, observações, documentos, registros e gravações; (ii) os procedimentos utilizados para interpretar e organizar esses dados; e (iii) relatórios escritos e verbais, que podem ser apresentados em artigos, palestras ou livros.

As atividades foram realizadas diretamente na sala de aula, caracterizando a pesquisa como uma investigação de campo, conduzida in loco. Essa abordagem possibilita uma análise direta do objeto de estudo e do comportamento dos fenômenos observados. Para isso, foram utilizados testes com questões de matemática financeira contextualizadas, os quais geraram documentos válidos para a análise dos dados coletados.

6.3 Coleta e análise de dados

Lidar com o dinheiro de forma consciente e compreender as regras matemáticas que regem o sistema financeiro é essencial para a qualidade de vida financeira confortável. Desse modo, esta pesquisa buscou entender o quanto os alunos se sentiriam interessados e empolgados em estudar matemática por meio de situações-problema contextualizadas, que se conectam com suas realidades, independentemente de sua classe social ou filosofia de vida. A pesquisa foi desenvolvida em cinco etapas:

1- Realização de levantamento dos conceitos básicos de matemática financeira, abordando regras de porcentagens, juros simples e compostos;

2- Resolução de uma lista com sete exercícios relacionados aos conteúdos trabalhados em sala de aula, com o objetivo de contextualizar a matemática financeira na realidade dos estudantes;

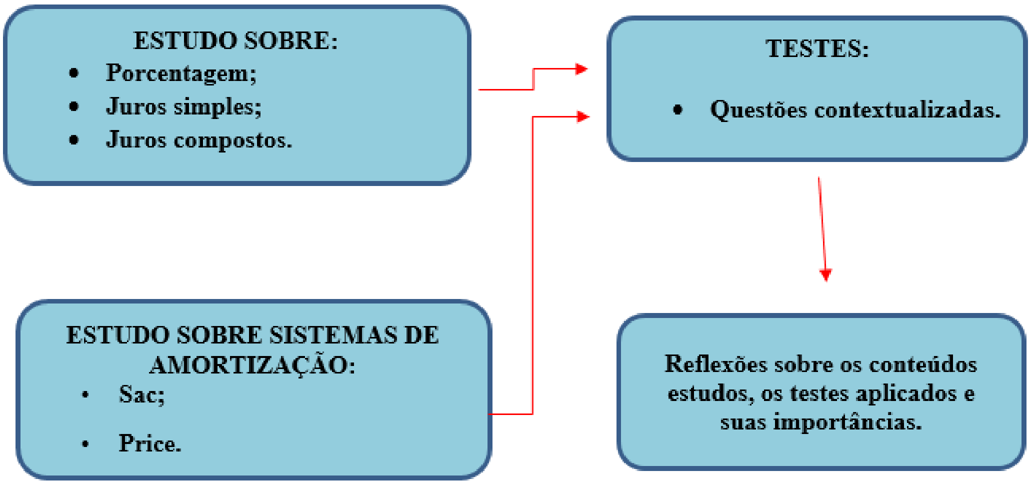
3- Estudo dos sistemas de amortização SAC e PRICE, explicando seus significados, importância no sistema financeiro, e detalhando as regras matemáticas de cada sistema;

4- Aplicação de uma lista de exercícios com cinco questões focadas nos sistemas de amortização, direcionadas na compreensão do comportamento das parcelas e dos juros ao longo do tempo;

5- Socialização com as turmas a fim de compreender como os alunos se sentiram ao aprender matemática financeira com conteúdo não convencionais e bem contextualizados para a sala de aula.

Adiante, apresentamos a Figura 5 que demonstra a organização do planejamento e aplicação da pesquisa.

Figura 5 - Diagrama do planejamento da aplicação da pesquisa.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

O processo de coleta de dados ocorreu ao longo de todas as atividades realizadas em sala de aula, desde a introdução dos conteúdos de porcentagem até o último passo de socialização. Em cada etapa, os alunos foram avaliados de maneira direta e indireta por meio das atividades realizadas, considerando suas habilidades, interesses, comprometimento e evolução ao longo do processo. Essas coletas de dados são essenciais para gerar um relatório confiável e substancial em relação à pesquisa realizada. Para auxiliar nesta análise detalhada, foram consultados estudos de fontes conceituadas de matemática financeira, permitindo uma avaliação coerente dos dados coletados.

Durante todo o desenvolvimento da experiência foram mantidos a ética, o respeito, a transparência e todos os direitos humanos dos alunos, assegurando uma pesquisa coerente e a extração de dados confiáveis que possam servir como auxílio para professores e novos pesquisadores da área de matemática financeira. É importante destacar que os participantes, alunos do 1º ano do ensino médio da rede privada, aceitaram participar da pesquisa com a aprovação do colégio e de seus responsáveis.

Mantendo o código de ética, nenhuma informação pessoal dos participantes será apresentada neste trabalho, permanecendo acessível apenas para o pesquisador. Dessa forma, seguindo esses conceitos e regras, a pesquisa se mostra confiável, robusta e socialmente responsável.

7 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, será exposta a descrição e análise de dados, organizadas cronologicamente, juntamente com as reflexões geradas ao longo desse processo. Também serão discutidas as estratégias adotadas pelos alunos na resolução das atividades propostas, bem como os desafios enfrentados no contexto da matemática financeira. Tal como, será apresentado o planejamento simplificado empregado para orientar esta experiência na consecução dos objetivos. Para uma análise mais detalhada, o plano de aula completo utilizado durante a execução da pesquisa está disponível no apêndice A.

7.1 Desenvolvimento das atividades

Antes de iniciar o ensino direto dos conteúdos de matemática financeira aos alunos, empregou-se diversas analogias financeiras baseadas em situações cotidianas das pessoas. Essa abordagem visava despertar a curiosidade e o interesse deles pelo estudo iminente. A estratégia revelou-se fundamental para o desenvolvimento da experiência, uma vez que estimulou a maioria dos alunos a reconhecer a relevância da matemática financeira em suas vidas.

Durante os diálogos sobre a aplicação da disciplina, surgiram várias perguntas e curiosidades, evidenciando que muitos dos alunos do 1º ano do ensino médio já possuíam opiniões formadas sobre questões financeiras. Inicialmente, esta abordagem não apenas os cativou, mas também instigou o pesquisador deste estudo ao perceber que esse trabalho, embora enquadrado como pesquisa acadêmica convencional, apresentaria importância significativa tanto para seus alunos quanto para outros professores que desejarem utilizar este estudo como base para futuros projetos.

Etapa 1 - Estudo sobre porcentagem, juros simples e compostos

Todo o levantamento de dados deste estudo seguiu cinco fases fundamentais, conforme descrito na seção 2.3. Na primeira fase, realizou-se uma revisão abrangente e contextualização da matemática financeira, abordando conceitos, regras e fórmulas relacionadas a porcentagem, juros simples e juros compostos.

A compreensão dos conteúdos de porcentagem e juros simples foi relativamente tranquila para os alunos, uma vez que estes temas já eram familiares a partir de anos anteriores.

No entanto, ao abordar os juros compostos, embora a maioria dos alunos tenha conseguido entender o significado, as regras e o comportamento do dinheiro ao longo do tempo, surgiram algumas dúvidas durante a execução das atividades planejadas para a segunda fase. Nesta etapa inicial, foram elaboradas sete questões, sendo três sobre porcentagens, duas sobre juros simples e duas sobre juros compostos. Todas as questões foram formuladas de maneira a abranger integralmente os conteúdos trabalhados, com níveis graduais de complexidade. A seguir, apresentamos a Figura 6 que demonstra a realização do teste.

Figura 6 - Realização do teste.

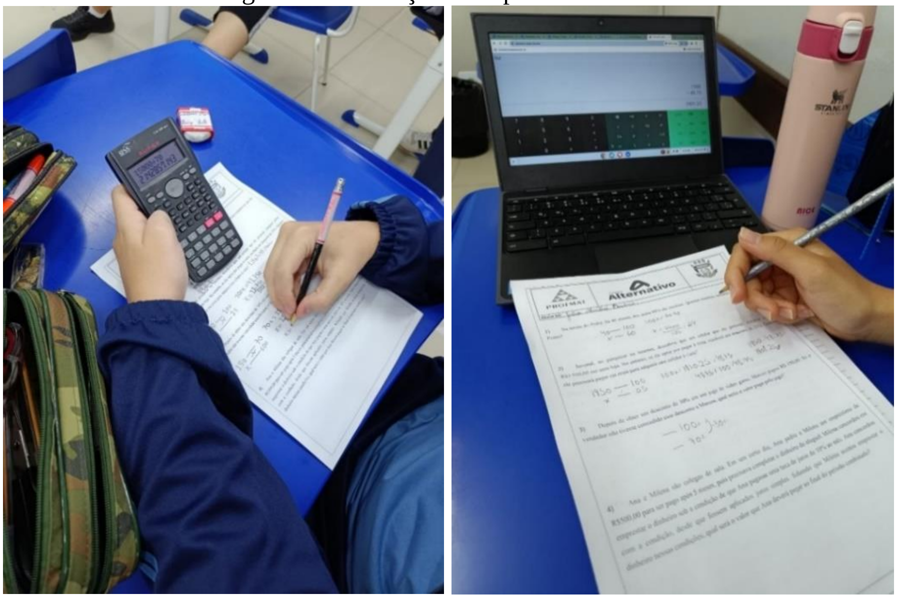
Fonte: Acervo particular (2024).

Etapa 2 – Resolução de exercícios envolvendo porcentagem, juros simples e juros compostos

Durante a resolução dos problemas, os alunos foram autorizados a utilizar calculadoras científicas como ferramenta auxiliar nos cálculos, especialmente nas questões envolvendo juros compostos. No entanto, alguns alunos não possuíam calculadoras, sendo permitido o uso da calculadora disponível nos *Chromebooks*[1] fornecidos a todos os alunos, conforme a Figura7.

[1] Esses *Chrome books* são ofertados como materiais didáticos para os alunos do 1º ano do ensino médio para acessarem a apostila digital.

Figura 7 - Resoluções dos problemas.



Fonte: Acervo particular (2024).

Os alunos tiveram 1 hora para resolver as sete questões propostas, que abordavam porcentagem, juros simples e juros compostos. No entanto, alguns alunos não conseguiram concluir todas as questões dentro do tempo estipulado. As questões de porcentagem apresentaram índices de aproveitamento com 84% de acerto na turma A e 87% na turma B. As questões sobre juros simples foram resolvidas com êxodo por 64% dos alunos da turma A e 65% da turma B, enquanto as questões de juros compostos foram resolvidas por 49% da turma A e 56% da turma B.

Para uma análise mais detalhada dos dados, observemos as Tabelas 7 e 8 a seguir, que apresenta informações sobre as sete questões da primeira etapa. A tabela mostra a quantidade de acertos, erros e questões deixadas em branco.

Tabela 7 - Desempenho dos alunos da turma A nas atividades de Matemática Financeira (29 Alunos).

TURMA A COM 29 ALUNOS				
QUESTÕES	**ACERTOS**	**ERROS**	**NÃO FEITAS**	**PORCENTAGEM DE ACERTOS**
1	27	1	1	93,1%
2	24	2	3	82,3%
3	22	5	2	76%
4	19	6	4	65,5%
5	18	7	4	62%
6	15	7	7	52%
7	13	1	15	45%
TOTAL	138	29	36	66, 4%

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Tabela 8 – Desempenho dos alunos da turma A nas atividades de Matemática Financeira (27 Alunos).

TURMA B COM 27 ALUNOS				
QUESTÕES	**ACERTOS**	**ERROS**	**NÃO FEITAS**	**PORCENTAGEM DE ACERTOS**
1	25	1	1	92,6%
2	23	2	2	85,2%
3	22	3	2	81,5%
4	18	7	2	66,6%
5	17	7	3	63%
6	16	6	5	59,2%
7	14	7	6	52%
TOTAL	135	33	21	71,5%

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

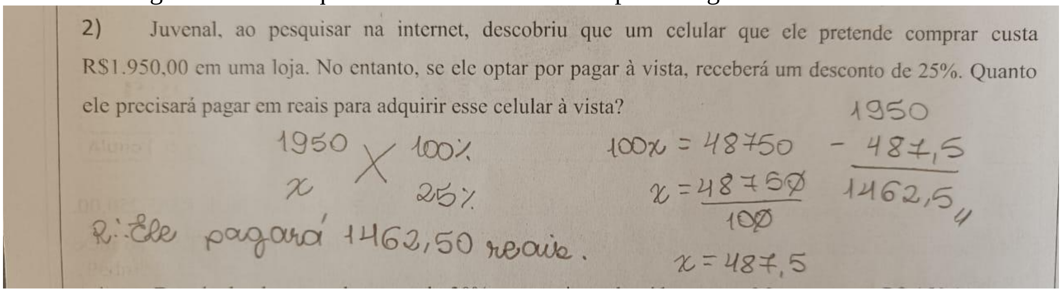
É inegável que ensinar matemática no ensino médio é uma tarefa desafiadora, pois requer que os alunos tenham adquirido uma base sólida no ensino fundamental para alcançarem um bom desempenho. Atualmente, observamos que há cada vez mais uma defasagem em relação a essa disciplina por parte de alguns alunos durante o processo de aprendizagem, isso se deve também pela pandemia de COVID-19. A realização desta experiência envolveu todos os alunos de ambas as turmas do 1º ano do ensino médio, incluindo aqueles que apresentavam defasagens e os que possuíam necessidades especiais.

Durante a resolução das questões, verificamos diversas situações: alunos que solucionaram todas as questões corretamente, alunos que calcularam a porcentagem, mas esqueceram de determinar o desconto, alunos que resolveram as questões de forma aleatória, alunos que aplicaram corretamente as fórmulas de juros simples e compostos, alunos que deixaram as resoluções incompletas e aqueles que deixaram questões em branco.

Quanto aos alunos que deixaram as questões em branco ou pela metade, além daqueles com necessidades especiais, incluiu-se também os que apresentam significativas defasagens nos conteúdos matemáticos. Alguns desses alunos, apesar de tentarem abordar os problemas, deixaram as questões incompletas devido à falta de conhecimento básico das operações matemáticas. Assim, um olhar diferente deve ser direcionado para esses alunos, pois quando o aluno apresenta esforço e dedicação, essa defasagem pode ser superada com o tempo.

A seguir, apresentamos alguns exemplos das resoluções realizadas em sala de aula, acompanhados de comentários analíticos sobre as soluções apresentadas.

Figura 8 - Aluno que fez o cálculo correto de porcentagem e desconto.


2) Juvenal, ao pesquisar na internet, descobriu que um celular que ele pretende comprar custa R$1.950,00 em uma loja. No entanto, se ele optar por pagar à vista, receberá um desconto de 25%. Quanto ele precisará pagar em reais para adquirir esse celular à vista?

1950 — 100%
x — 25%

100x = 48750
x = 48750 / 100
x = 487,5

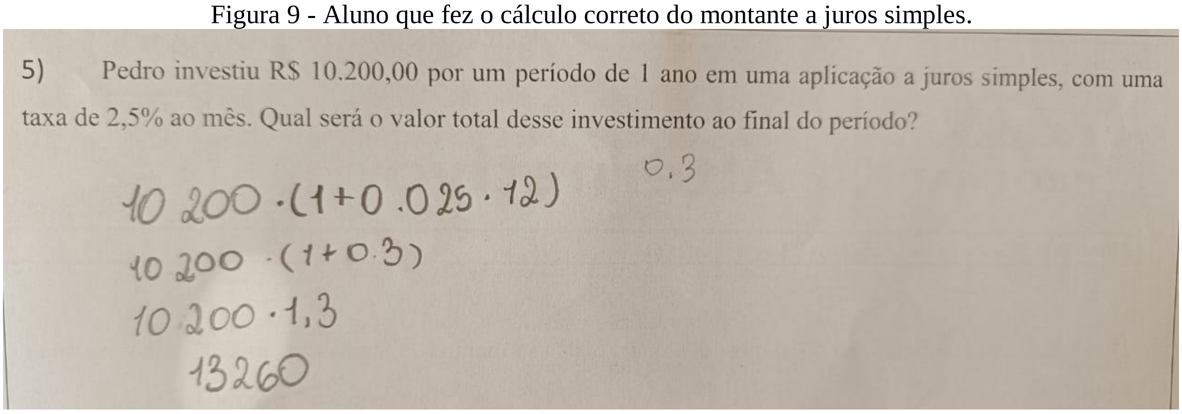
1950
− 487,5
1462,5

R: Ele pagará 1462,50 reais.

Fonte: Acervo particular (2024).

Nas questões de porcentagens, como exemplificado na Figura 8, a maioria dos alunos utilizou a estratégia da regra de três. Esta abordagem é frequentemente empregada devido à sua relação com grandezas proporcionais, o que a torna uma ferramenta versátil para diversos conteúdos matemáticos. Na Figura 8, observa-se que o aluno calculou inicialmente o valor do desconto para, em seguida, subtrair esse valor do preço inicial, determinando assim o valor do celular à vista. No entanto, houve alunos que, embora também tenham utilizado a regra de três, optaram por uma abordagem diferente: em vez de calcular 25% de desconto, determinaram diretamente o valor final do celular, considerando que pagariam 75% do valor original do produto.

Figura 9 - Aluno que fez o cálculo correto do montante a juros simples.


5) Pedro investiu R$ 10.200,00 por um período de 1 ano em uma aplicação a juros simples, com uma taxa de 2,5% ao mês. Qual será o valor total desse investimento ao final do período?

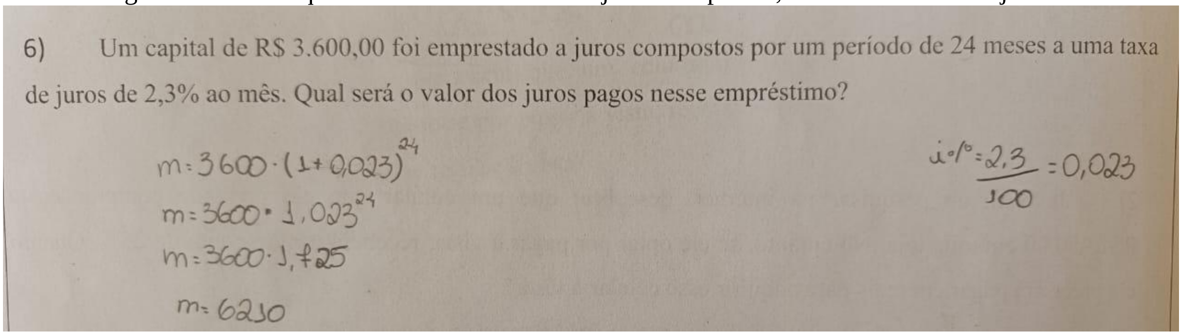
0.3

10 200 · (1 + 0.025 · 12)
10 200 · (1 + 0.3)
10 200 · 1,3
13260

Fonte: Acervo particular (2024).

Na Figura 9, observa-se que, para resolver o problema, o aluno utilizou a fórmula de juros simples, assim como a maioria dos demais alunos. Apesar de calcular corretamente o valor do montante, a resolução foi executada de maneira mecânica e sem justificativa. Em contraste, alguns alunos resolveram as questões de juros simples detalhando passo a passo suas resoluções. Houve também alunos que se disperçaram/perderam na execução das resoluções, sendo alguns fatores responsáveis pelos erros: a principal dificuldade foi a correta execução da ordem das operações na fórmula, além de dificuldades na leitura e interpretação de texto. Outro problema identificado foi a conversão da taxa de tempo; alguns alunos não transformaram a taxa em decimal antes de realizar os cálculos. É importante destacar que, antes da aplicação das atividades, foram ministradas aulas sobre os conteúdos trabalhados.

Figura 10 - Aluno que calculou o montante do juros compostos, mas não calculou o juros.



Fonte: Acervo particular (2024).

Na Figura 8, percebemos uma questão mais elaborada e justificada. De maneira similar à Figura 9, o exemplo apresentado na Figura 10 mostra uma resolução um pouco mais detalhada, porém sem muitas justificativas. Nota-se que o aluno aplicou corretamente a fórmula de juros compostos, efetuando a conversão da taxa de juros e realizando os cálculos de maneira eficaz. No entanto, assim como outros alunos, ele não se atentou ao verdadeiro propósito da questão, que era determinar o valor dos juros pagos nesse empréstimo. Embora o cálculo do montante esteja correto, essa falta de leitura minuciosa das questões revela que muitos alunos sabem realizar os cálculos matemáticos, mas não compreendem plenamente o que deve ser feito em determinadas situações. Ainda assim, a maioria dos alunos conseguiu resolver corretamente as questões de juros compostos, apesar de terem sentido mais dificuldades em comparação com as questões de juros simples.

Etapa 3 - Estudos sobre os sistemas de amortização SAC e PRICE

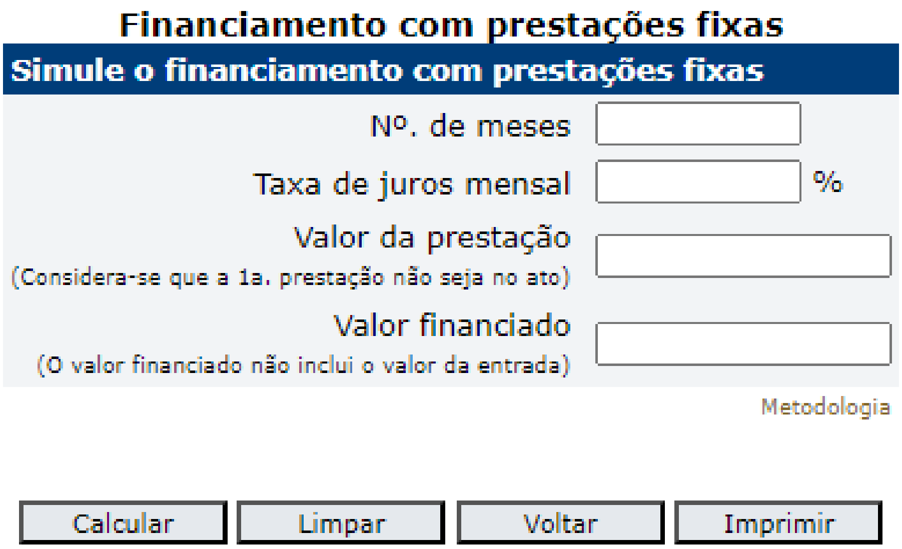
Na terceira etapa do trabalho, foi introduzido um contexto da matemática financeira menos familiar aos alunos. Iniciamos com um diálogo sobre como funciona a aquisição de uma casa própria por meio de financiamento, abordando a determinação dos juros e o cálculo das parcelas. Discutimos também se é possível reduzir o pagamento de juros ao longo do tempo e explorar diferentes formas de empréstimo, entre outras questões. Esse levantamento de perguntas despertou um interesse significativo nos alunos, superando os conteúdos anteriores. Uma frase marcante foi: *"Ah, para não pagar muitos juros é só pagar as parcelas de trás para frente,"* o que desencadeou a compreensão dos sistemas de amortização utilizados no sistema financeiro. Isto é, nos financiamentos, os juros são calculados com base no saldo devedor.

Portanto, ao pagar as últimas parcelas, o saldo devedor é reduzido devido à amortização gradual nas parcelas anteriores. Consequentemente, como o valor da dívida é menor, os juros calculados sobre esse saldo também são reduzidos.

Após uma série de analogias e perguntas direcionadas à vida financeira dos alunos, abordamos os modelos matemáticos aplicados nos sistemas de amortização SAC e PRICE, apresentando todas as definições e regras envolvidas em cada sistema. Além disso, realizamos várias comparações entre os sistemas SAC e PRICE, destacando a importância de cada um e considerando suas vantagens e desvantagens.

Uma ferramenta online muito útil para o sistema PRICE, utilizada nas aulas para fazer simulações com os alunos, foi a "Calculadora do Cidadão", disponibilizada pelo Banco Central do Brasil (BCB). Esta ferramenta permite realizar simulações práticas do valor das parcelas, tempo de financiamento, taxas de juros, capital e montante. Basta inserir as informações, deixar o campo que deseja calcular em branco e, em seguida, clicar em "calcular" para gerar um relatório financeiro. A Figura 11 abaixo ilustra esses indicadores.

Figura 11 - Calculadora cidadão.



Fonte: Banco Central do Brasil (2024).

Essa ferramenta foi muito significativa para o aprendizado dos alunos, permitindo-lhes realizar várias simulações aleatórias de acordo com seus interesses e comparar os resultados com os cálculos feitos manualmente. Um exemplo disso é a comparação entre a Figura 15 e a Figura 16. Vale ressaltar que todo o processo inicial, tanto na abordagem do conteúdo quanto na resolução das questões, foi realizado de forma manual, utilizando fórmulas e regras estabelecidas. Posteriormente, foram apresentadas essas ferramentas online para facilitar e comparar os cálculos.

Como o principal objetivo desses sistemas é determinar a amortização da dívida ao longo do tempo, foram construídas tabelas de financiamento manuais com situações-problema hipotéticas e contextualizadas, representando a vida real. Isso ajudou os alunos a entenderem o cálculo das amortizações, dos juros e das parcelas.

Etapa 4 – Questões-teste do sistema de amortização SAC e PRICE

Após a aquisição de conhecimentos e simulações, passamos para a quarta etapa do trabalho, que consistiu na resolução de mais cinco questões envolvendo os sistemas de amortização SAC (três questões) e PRICE (duas questões). Entre os dois sistemas, o preferido dos alunos foi o SAC, devido ao fato de que os valores das parcelas diminuem ao longo do tempo.

Os índices de acertos das questões foram positivos, considerando que esses conteúdos não são usuais no cotidiano dos alunos. A maioria conseguiu desenvolver bem os problemas propostos. Comparativamente, os alunos tiveram mais facilidade em resolver as questões do sistema SAC. Assim, as questões do sistema SAC tiveram um aproveitamento de 82% na turma A e 70% na turma B, enquanto as questões do sistema PRICE tiveram 68% de acertos na turma A e 67% na turma B.

Analisemos as Tabelas 9 e 10 com mais detalhes dos índices de aproveitamentos das questões.

Tabela 9 - Desempenho dos alunos da turma A nas atividades de Matemática Financeira (SAC e PRICE).

TURMA A COM 29 ALUNOS				
QUESTÕES	**ACERTOS**	**ERROS**	**NÃO FEITAS**	**PORCENTAGEM DE ACERTOS**
8	22	6	1	76%
9	24	5	0	83%
10	25	3	1	86,2%
11	20	7	2	69%
12	19	7	3	65,5%
TOTAL	110	28	7	75,9%

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

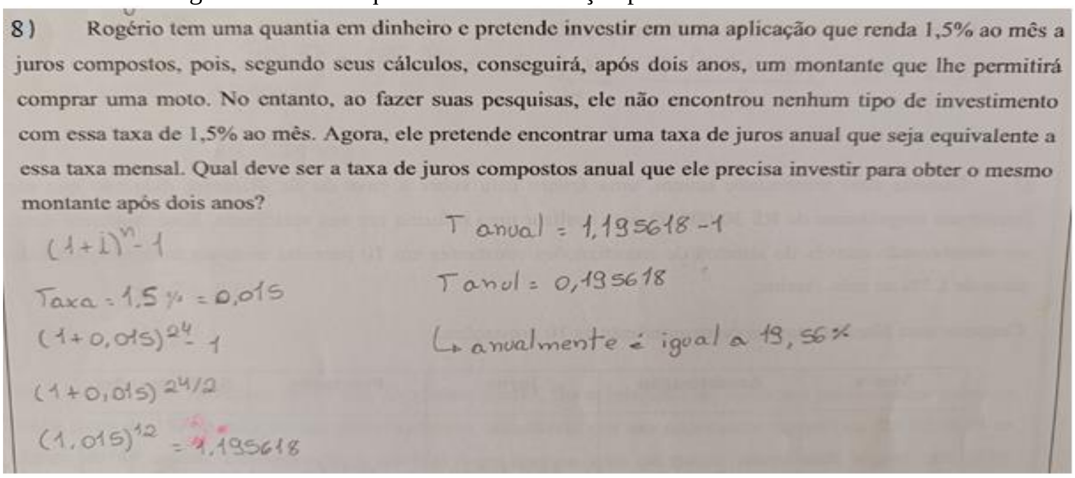
Tabela 10 - Desempenho dos alunos da turma B nas atividades de Matemática Financeira (SAC e PRICE).

TURMA B COM 27 ALUNOS				
QUESTÕES	**ACERTOS**	**ERROS**	**NÃO FEITAS**	**PORCENTAGEM DE ACERTOS**
8	17	7	3	63%
9	17	7	3	63%
10	22	3	2	81,5%
11	20	6	1	74%
12	16	8	3	44,5%
TOTAL	92	31	12	68,1%

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Apesar de envolver estratégias matemáticas já vivenciadas pelos alunos, essa temática diferente gerou bons resultados. Para entendermos um pouco sobre como foi a resolução das questões durante todo esse processo, vejamos abaixo algumas soluções.

Figura 12 - Aluno que fez a transformação percentual anual correta.



Fonte: Acervo particular (2024).

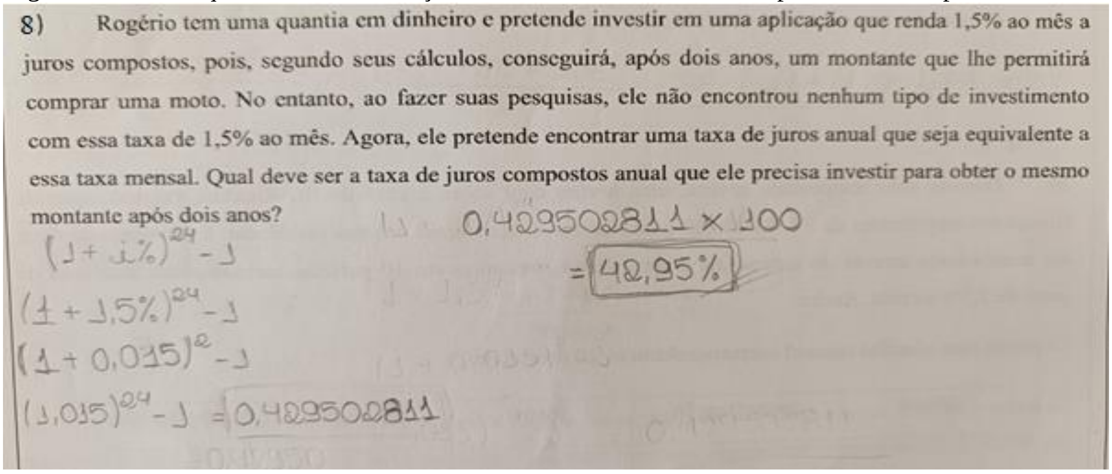
Na Figura 12, o aluno utilizou um período de um ano, equivalente a 12 meses, para realizar a transformação da taxa. Dessa forma, a taxa anual apresentada na Figura 12 é apropriada, pois o objetivo do problema era determinar a taxa anual equivalente à taxa mensal.

Para uma melhor compreensão, considere o seguinte exemplo: um empréstimo no valor de R$ 1.000,00, conforme as condições descritas no problema da Figura 12.

- Taxa de 1,5% a.m. -> $M = 1000 \cdot (1 + 0{,}015)^{24} = 1429.$
- Taxa de 19,56% a.a. -> $M = 1000 \cdot (1 + 0{,}1956)^{2} = 1429.$

Portanto, a taxa mensal de 1,5% é equivalente a taxa anual de 19,56%.

Figura 13 - Aluno que fez a transformação de taxa usando os 24 meses apresentados no problema.



8) Rogério tem uma quantia em dinheiro e pretende investir em uma aplicação que renda 1,5% ao mês a juros compostos, pois, segundo seus cálculos, conseguirá, após dois anos, um montante que lhe permitirá comprar uma moto. No entanto, ao fazer suas pesquisas, ele não encontrou nenhum tipo de investimento com essa taxa de 1,5% ao mês. Agora, ele pretende encontrar uma taxa de juros anual que seja equivalente a essa taxa mensal. Qual deve ser a taxa de juros compostos anual que ele precisa investir para obter o mesmo montante após dois anos?

$(1 + i\%)^{24} - 1$

$(1 + 1{,}5\%)^{24} - 1$

$(1 + 0{,}015)^{2} - 1$

$(1{,}015)^{24} - 1 = \boxed{0{,}4295028211}$

$0{,}4295028211 \times 100 = \boxed{42{,}95\%}$

Fonte: Acervo particular (2024).

Na Figura 13, observa-se que o aluno não considerou o período anual de 12 meses e, em vez disso, utilizou o período de 24 meses correspondente a dois anos, conforme apresentado na questão. Apesar de esse procedimento não ser o adequado para o exercício, é interessante notar que, ao considerar a taxa de 24 meses como um único período de dois anos, essa taxa resulta em um valor equivalente quando ajustada para um ano. Por exemplo, ao aplicar uma taxa anual de 42,95%:

- Taxa de 42,95% a.a. -> $M = 1000 \cdot (1 + 0{,}42{,}95)^1 = 1429$.

Figura 14 - Tabela SAC desenvolvida manualmente pelo aluno.

10) Durante uma tempestade severa, uma árvore caiu sobre a casa do Sr. Ricardo, exigindo que ele fizesse um empréstimo de R$ 30.000,00 para realizar uma reforma em sua residência. Esse montante deve ser reembolsado através do sistema de amortizações constantes em 10 parcelas mensais, com uma taxa de juros de 1,5% ao mês. Assim:

Construa uma planilha manual correspondente às 10 prestações:

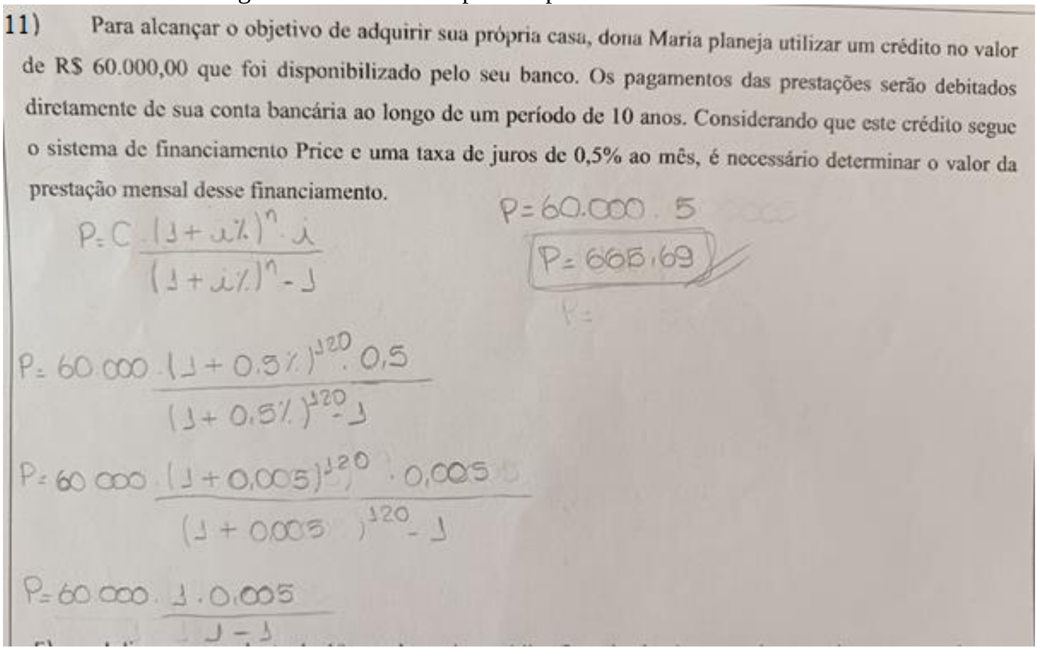
Meses	**Amortização**	**juros**	**Prestação**	**Saldo devedor**
n	$A = \frac{C}{n}$	$J_n = i \cdot S_n$	$A + J_n$	S_n
0				R$ 30.000,00
1	3000,00	450,00	3450,00	27000,00
2	3000,00	405,00	3405,00	24000,00
3	3000,00	360,00	3360,00	21000,00
4	3000,00	315,00	3315,00	18000,00
5	3000,00	270,00	3270,00	15000,00
6	3000,00	225,00	3225,00	12000,00
7	3000,00	180,00	3180,00	9000,00
8	3000,00	135,00	3135,00	6000,00
9	3000,00	90,00	3090,00	3000,00
10	3000,00	45,00	3045,00	0,00
Total	30000,00	2475,00	32475,00	

Fonte: Acervo particular (2024).

Na resolução do Problema 10, conforme apresentado na Figura 14, alguns alunos calcularam cada item mensalmente. No entanto, alguns rapidamente identificaram o padrão mantido pela tabela de Amortização Constante (SAC), onde a amortização permanece constante, enquanto os juros e o valor das parcelas diminuem continuamente a cada mês, com o saldo devedor diminuindo conforme a amortização. Esses alunos que reconheceram a sequência completaram a tabela de forma mais eficiente, em contraste com aqueles que realizaram os cálculos mês a mês. Entre os 12 problemas abordados no teste, a elaboração da tabela SAC foi considerada a mais satisfatória pelos alunos.

As Figuras 15 e 16 ilustram a resolução de um problema utilizando o sistema PRICE. A Figura 15 apresenta o cálculo manual realizado pelo aluno com o uso de uma calculadora científica, enquanto a Figura 16 mostra os valores fornecidos pela Calculadora Cidadão, permitindo a comparação dos resultados obtidos pelos alunos.

Figura 15 - Cálculo da parcela pelo sistema PRICE.


11) Para alcançar o objetivo de adquirir sua própria casa, dona Maria planeja utilizar um crédito no valor de R$ 60.000,00 que foi disponibilizado pelo seu banco. Os pagamentos das prestações serão debitados diretamente de sua conta bancária ao longo de um período de 10 anos. Considerando que este crédito segue o sistema de financiamento Price e uma taxa de juros de 0,5% ao mês, é necessário determinar o valor da prestação mensal desse financiamento.

$P = C \frac{(1+i\%)^n \cdot i}{(1+i\%)^n - 1}$

$P = 60.000 \cdot \frac{(1+0,5\%)^{120} \cdot 0,5}{(1+0,5\%)^{120} - 1}$

$P = 60.000 \cdot \frac{(1+0,005)^{120} \cdot 0,005}{(1+0,005)^{120} - 1}$

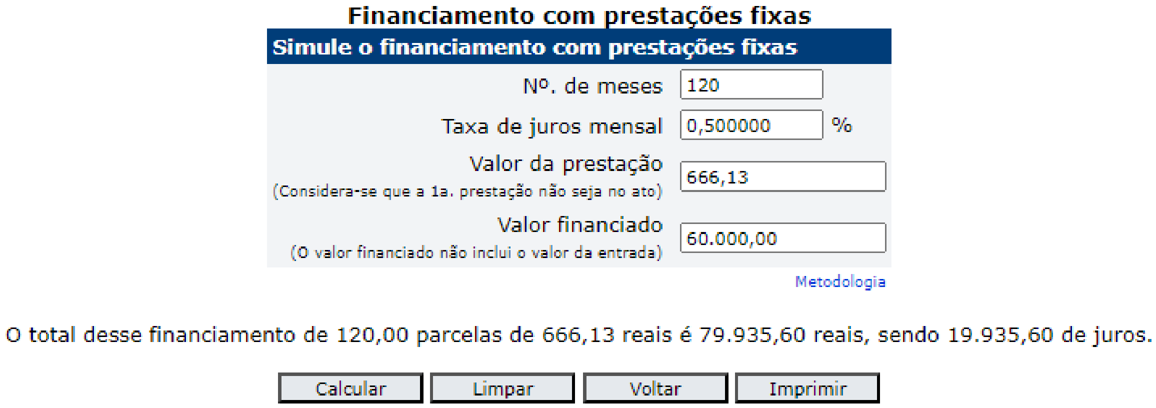
$P = 60.000 \cdot \frac{1 \cdot 0,005}{1 - 1}$

$P = 60.000 \cdot 5$

$\boxed{P = 666,69}$

Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Figura 16 - Resolução do problema da Figura 15 pela Calculadora Cidadão.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Como evidenciado pelos exemplos apresentados nas figuras 15 e 16, os valores obtidos são praticamente idênticos, considerando o cálculo manual realizado na figura 15. As questões envolvendo o sistema PRICE apresentaram maior complexidade para os alunos, devido à fórmula utilizada para calcular as parcelas, que requer múltiplas operações com números decimais e arredondamentos, além de exigir um domínio adequado da calculadora científica.

Em ambas as turmas, a maioria dos alunos conseguiu completar todas as questões. No entanto, alguns não conseguiram finalizar, deixando alguns problemas em branco ou incompletos. Conforme mencionado anteriormente, é fundamental adotar uma abordagem diferenciada para esses alunos. Embora os alunos com necessidades especiais, necessitem de estratégias específicas, os alunos que apresentam defasagens significativas também exigem atenção especial. Nessa situação, a abordagem da matemática de forma contextualizada pode ser uma solução eficaz. Ao relacionar a matemática com situações da vida real, essa abordagem pode despertar a curiosidade e promover um interesse genuíno pela matéria. Para alunos que percebem a matemática como uma disciplina desinteressante, possivelmente devido a experiências passadas, essa metodologia pôde contribuir para um maior prazer e engajamento no estudo dessa área.

Etapa 5 – Reflexão

Como mencionado anteriormente, este trabalho teve como objetivo contextualizar a matemática financeira de maneira que ela fizesse e faça sentido para os alunos, permitindo-lhes compreender sua importância em suas vidas. Além disso, buscou-se gerar dados confiáveis que ofereçam uma nova perspectiva para os professores de matemática, auxiliando-os a abordar o estudo da matemática financeira de maneira mais eficaz com seus alunos.

É relevante abordar essa matéria em sala de aula de forma que desperte a curiosidade e o interesse dos alunos, inserindo situações-problema que façam sentido para a realidade de cada um. Compreender as regras matemáticas que envolvem o sistema financeiro é extremamente importante para que o cidadão consiga realizar seus sonhos, pois, independentemente de quais sejam, sempre envolverão planejamento financeiro. Este trabalho em sala de aula iniciou-se com perguntas pertinentes que levaram os alunos a refletirem sobre a importância de entender as regras matemáticas envolvidas nos sistemas financeiros. Perguntas como: *"Será que você está realmente recebendo o desconto oferecido? ", "Será que os juros que você está pagando coincidem com o contrato? ", "Para comprar uma moto daqui a um ano, quantos por centos do salário devo economizar? ", "Será que vou conseguir fazer uma viagem economizando um valor X por mês? "*. Essas foram algumas das perguntas feitas aos alunos, com o propósito de mostrar a quantidade de situações em que utilizamos o estudo da matemática financeira.

É inevitável fugirmos de um planejamento financeiro, pois vivemos em um sistema capitalista e planejar é necessário para atingirmos nossas metas. Hoje, se o cidadão não tem controle financeiro, independentemente de sua renda, o sistema de marketing vai tentar convencê-lo de que ele precisa comprar algo desnecessário, situação em que muitos brasileiros se encontram atualmente. Apesar de não ser o foco deste trabalho, a educação financeira também é extremamente importante para esse processo de conscientização e sensibilização.

8 SOCIALIZAÇÃO

Após a realização dos testes com os alunos, foi aplicado um questionário com o intuito de compreender o posicionamento dos estudantes em relação aos conteúdos abordados durante todo o processo dessa experiência. A aplicação de um questionário após uma atividade é crucial, pois possibilita a obtenção de *feedback* dos participantes, essencial para avaliar o sucesso da tarefa e identificar se o objetivo da investigação foi alcançado, bem como determinar quais ações precisam ser aprimoradas. Assim, Gil (2008, p. 121), define o questionário:

> [...] como a técnica de investigação composta por um conjunto que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado.

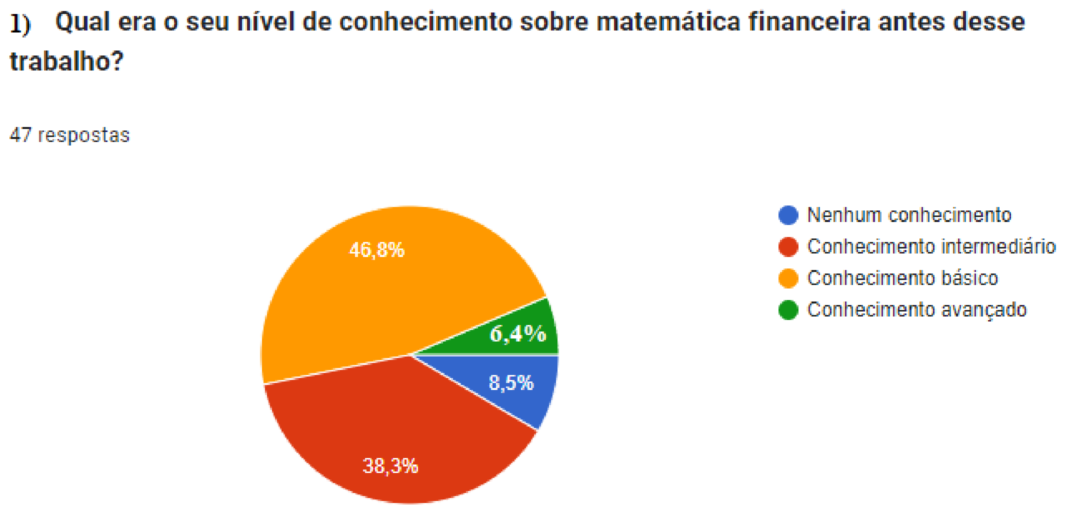
Nesta experiência, o questionário revelou-se fundamental, pois proporcionou uma reflexão analítica sobre o propósito da pesquisa, que consistia em verificar se o trabalho contextualizado contribuiria positivamente para aumentar a motivação dos alunos em estudar matemática. O questionário foi composto por cinco questões de múltipla escolha, conforme o anexo C, nas quais cada aluno poderia selecionar apenas uma alternativa. Ele foi elaborado no *Google Forms* para facilitar a coleta de dados, e não foi exigido que os alunos se identificassem, permitindo-lhes responder de forma sincera e sem receios. Para Lakatos (2010, p. 201), "Questionário é um instrumento de coleta de dados, construído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas sem a presença do entrevistador".

Para a realização do questionário, foi disponibilizado um QR Code que direcionava para o formulário, e os alunos utilizaram seus próprios dispositivos móveis para responder. Ressalta-se que, no dia da aplicação do questionário, 4 alunos do 1º ano A e 3 alunos do 1º ano B estavam ausentes, resultando em uma taxa de resposta de 84% dos participantes desta pesquisa. Cada aluno respondeu ao questionário individualmente, sem a possibilidade de trocar ideias com outros participantes, visando evitar induções e garantir que respondessem de maneira coerente às perguntas formuladas. Sob a perspectiva do pesquisador, observou-se que os alunos estavam confortáveis ao responder o questionário; todos aceitaram a proposta de maneira tranquila e sem objeções.

8.1 Análise do questionário

Para uma melhor compreensão sobre o índice de aproveitamento da pesquisa realizada, procederemos à análise dos gráficos que representam as respostas a cada pergunta.

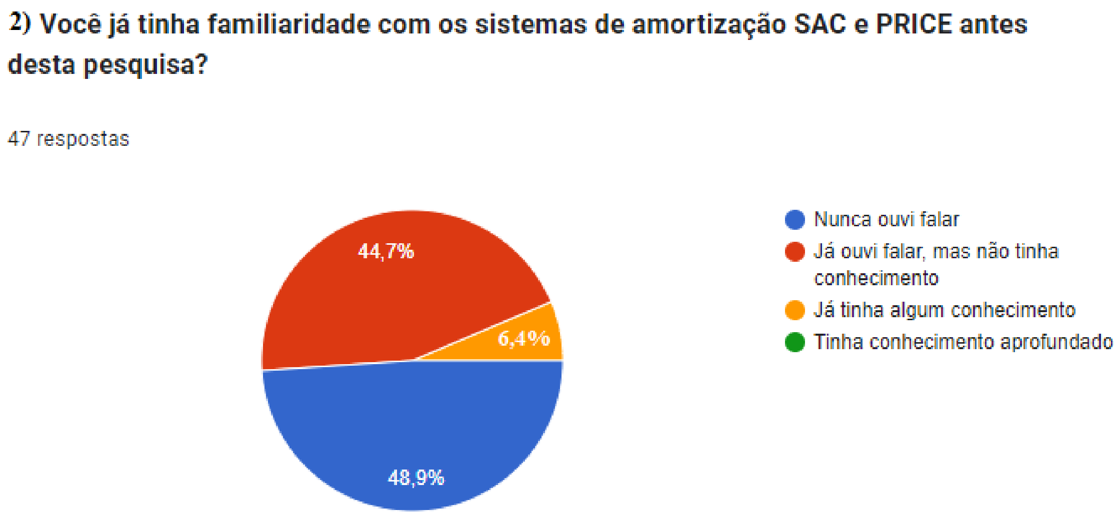
Gráfico 7 - O nível de conhecimento, dos alunos, sobre matemática financeira.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Analisando o Gráfico 7, notamos que a maioria dos alunos possuía conhecimento limitado sobre matemática financeira. A maioria dos respondentes declarou ter conhecimentos básicos, enquanto apenas 6,4% dos alunos afirmaram possuir um conhecimento avançado sobre os conceitos e regras envolvidos no estudo de matemática financeira. Vejamos agora o Gráfico 8.

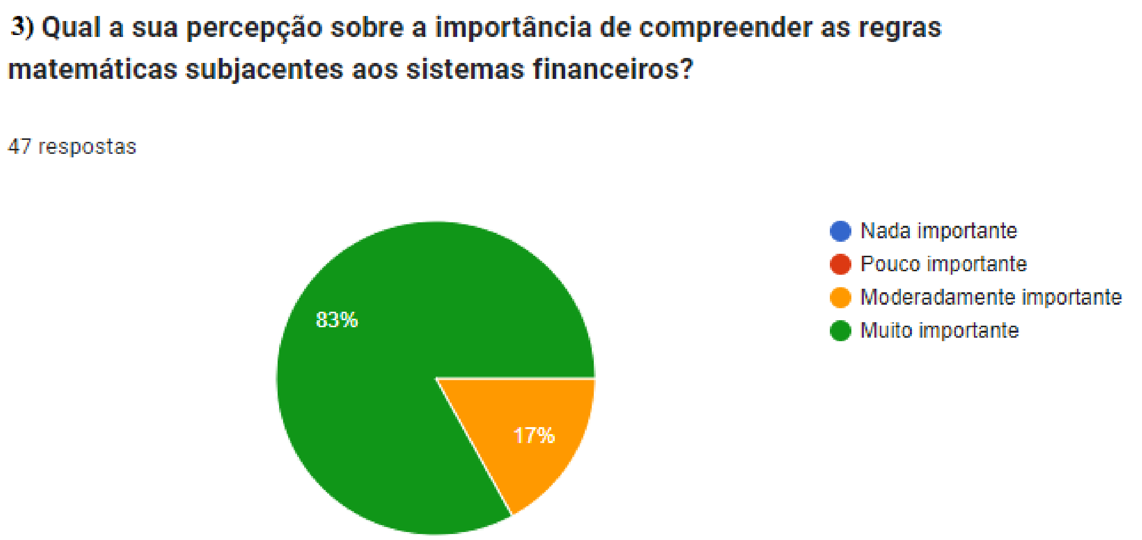
Gráfico 8 – Familiaridade dos alunos com os sistemas de amortização SAC e Price.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Quando se trata de tópicos mais avançados em matemática financeira, que não são abordados em sala de aula, como os sistemas de amortização SAC e PRICE, verifica-se, pelo Gráfico 8, que embora alguns alunos tenham ouvido falar sobre esses sistemas, mais de 93% não conheciam seu significado. É sabido que a carga horária das aulas de matemática no ensino médio muitas vezes não é suficiente para incluir conteúdos adicionais. No entanto, explorar temas não tradicionais, quando possível, pode ser um gatilho para despertar o interesse dos estudantes, especialmente quando esses temas são aplicáveis em suas vidas. Muitos alunos, apesar de estarem no ensino médio, já tentam projetar possíveis carreiras e compreendem que esses conhecimentos financeiros serão relevantes em suas vidas futuras. Adiante, analisemos o gráfico 9.

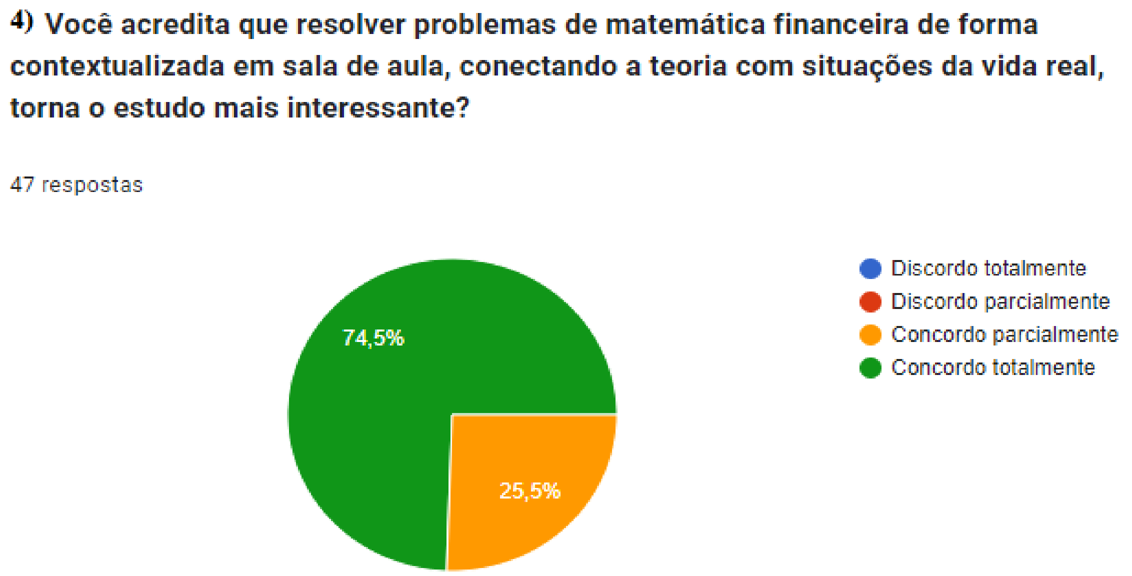
Gráfico 9 - Percepção dos alunos sobre a importância de compreender as regras matemáticas dos sistemas financeiros.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Como podemos observar no Gráfico 9, 83% dos alunos consideram muito importante compreender as regras matemáticas subjacentes aos sistemas financeiros. Esse resultado pode ser atribuído, em parte, às reflexões promovidas ao longo do desenvolvimento desta experiência, já que durante a realização das atividades foram estabelecidas situações-problema contextualizadas, abordando cenários que os alunos podem encontrar ao longo de suas vidas. Esse gráfico, expressa um sentimento de satisfação ao pesquisador, pois vemos que os alunos, apesar de alguns terem muitas dificuldades em conceitos matemáticos, entendem que compreender as regras matemáticas são muito importantes para tomadas de decisões financeiras independentemente a profissão ou carreira que eles vão seguir. Assim, o Gráfico 10 vai mostrar como o trabalho com conteúdos matemáticos relacionados em situações do dia a dia pode ser mais envolvente para os estudantes.

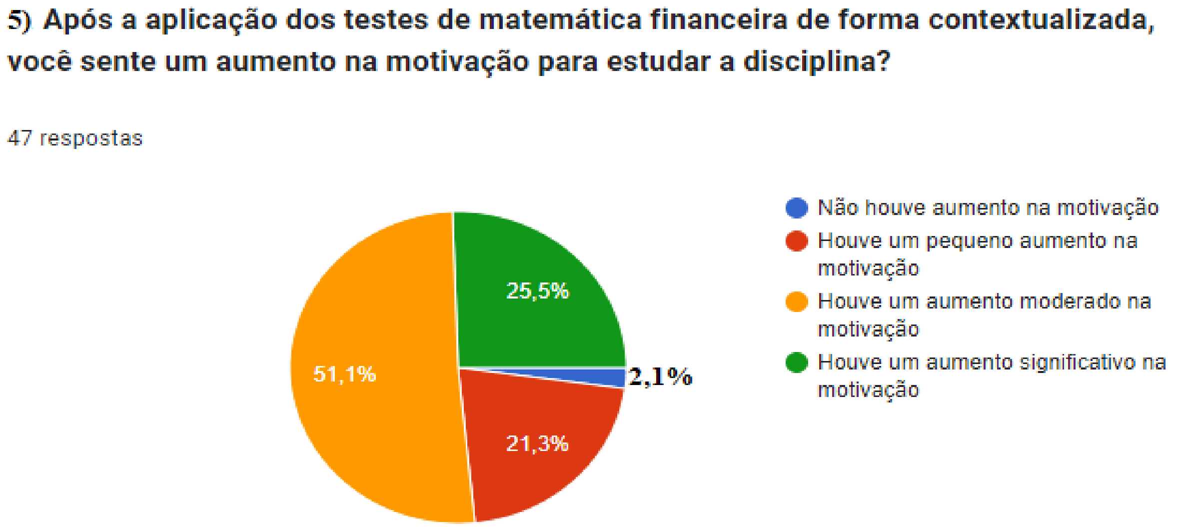
Gráfico 10 – Posicionamento dos alunos sobre a importância da resolução contextualizada de problemas de matemática financeira em sala de aula.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

O Gráfico 10 proporciona uma reflexão sobre o propósito desta experiência, ao demonstrar a percepção dos alunos quanto à resolução de problemas de matemática financeira de forma contextualizada em sala de aula. Observamos que a resposta dos participantes foi amplamente positiva, com 100% dos alunos concordando que a abordagem contextualizada torna o estudo mais interessante. Conforme justificado anteriormente pelo gráfico 9, os alunos compreendem que estudar matemática financeira é importante, especialmente quando visualizam as teorias aplicadas em situações de suas vidas. A seguir, o gráfico 11 ilustra como a motivação dos alunos para estudar a disciplina foi impactada após a abordagem contextualizada da matemática financeira.

Gráfico 11 – Opinião dos alunos sobre a contextualização em sala de aula.



Fonte: Produzido pelo autor (2024).

Neste caso, observa-se no gráfico 11 que as respostas foram bastante variadas. No entanto, pode-se considerar um posicionamento positivo, uma vez que 51,1% dos alunos relataram um aumento moderado no interesse, e 25,5% indicaram um aumento significativo. Essa combinação demonstra um percentual favorável para a pesquisa. É importante notar, que alguns alunos, apesar das estratégias diferenciadas de abordagem dos conteúdos em sala de aula, podem não ter sido completamente atingidos, mesmo estando cientes da importância do estudo da matemática.

O Gráfico 11 evidencia, ainda, que o ensino de matemática pode ser um desafio quando os alunos não estão devidamente motivados, especialmente no ensino médio, em que alguns estudantes já possuem uma atitude desfavorável em relação à disciplina. O questionário revela que os alunos reconhecem a importância de estudar e compreender as regras da matemática para suas vidas. No entanto, é importante notar que sempre haverá alunos que resistem em integrar a matemática ao seu conhecimento, representando um desafio constante para os professores de matemática em sala de aula.

Dessa forma, as questões aplicadas no teste e no questionário foram fundamentais para esta pesquisa, pois possibilitaram a coleta e análise de dados confiáveis sobre o público estudado, permitindo a extração de respostas plausíveis para atender às necessidades desta dissertação.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da necessidade de concluir esta pesquisa, expressa nesta dissertação, retomamos as inquietações que a motivaram, com a intenção de traçar possíveis respostas por meio do diálogo a partir dos dados apresentados. A proposta de contextualizar a matemática financeira e entender o posicionamento dos alunos em relação à gestão do dinheiro, bem como como eles lidam com as finanças no seu dia a dia, foi executada conforme planejado. Durante todo o processo de execução das atividades, surgiram inúmeras contribuições dos alunos para enriquecer a pesquisa realizada. Vale ressaltar que o conteúdo de matemática financeira chama a atenção da maioria dos alunos, pois muitos deles já possuem um certo planejamento financeiro em seu dia a dia.

No que concerne à pergunta de pesquisa: "Como os fundamentos matemáticos subjacentes aos financiamentos influenciam a estrutura de contrato e regras, e de que maneira esses modelos podem ser incorporados ao ensino básico de forma contextualizada para uma compreensão mais prática e abrangente pelos estudantes?", identificamos a importância de entender como os conceitos matemáticos aplicados aos financiamentos, emprestimos e investimentos são essenciais para a estruturação de contratos financeiros e as regras que os regem. Esses fundamentos incluem cálculos de juros simples e compostos, amortização, valor presente e futuro do dinheiro, entre outros. Compreender esses conceitos permite uma melhor negociação e entendimento dos termos do financiamento.

No que diz respeito a como esses modelos ao ensino básico de forma contextualizada, podemos utilizar exemplos práticos, simulando situações reais como a compra de uma casa ou carro, em que os alunos puderam calcular os juros e comparar diferentes opções de financiamento.

Além disso, esses conceitos são fundamentais para situações reais mais simples, como calcular descontos ou acréscimos percentuais, assim como entender os descontos aplicados nos salários, como INSS e IRPF. Projetos e atividades em grupo também são eficazes, incentivando os alunos a criarem seus próprios planejamentos financeiros para projetos fictícios, promovendo a discussão e aplicação dos conceitos aprendidos. O uso de tecnologia, como ferramentas digitais e calculadoras financeiras, pode e puderam ajudar os alunos a visualizar e entender os cálculos envolvidos. Finalmente, o estudo de casos reais, analisando contratos de financiamento simplificados e adaptados ao nível dos alunos, proporciona uma visão prática e direta de como esses fundamentos são aplicados no mundo real.

Após a aplicação das atividades propostas neste trabalho, notou-se um aumento na motivação dos alunos para o estudo da matemática financeira, bem como uma maior conscientização dos alunos sobre as regras matemáticas que envolvem o sistema financeiro no qual estamos inseridos. Além disso, fazer uma boa gestão do dinheiro permite às pessoas administrar seus recursos de forma eficaz, evitando gastos desnecessários, o que contribui para uma qualidade de vida mais digna.

Usar questões de matemática financeira contextualizadas em sala de aula permite aos alunos assimilar os conteúdos trabalhados com situações reais do seu convívio, conforme apontado por Pellegrin e Damazio (2015), Moraes e Onuchic (2011), Silva (2007) e Bassanezi (2002) no aporte teórico. Isso os prepara para tomadas de decisões conscientes, além de fornecer ferramentas matemáticas que os ajudam a lidar com situações financeiras que fazem parte de sua rotina como cidadãos, permitindo tomar decisões pertinentes quando se trata de dinheiro.

Diante dos dados apresentados, podemos ressaltar a importância da modelagem matemática na sala de aula, pois ela é responsável por modelar situações-problema voltadas para a vida real, proporcionando aos alunos um aprendizado mais significativo e plausível em relação aos assuntos de matemática financeira. Assim, Entender as regras dos sistemas de financiamento disponibilizados por instituições financeiras, como SAC e PRICE, por exemplo, é fundamental para que as pessoas possam comparar cada modelo e chegar a uma conclusão consciente de qual modelo contribui para o seu tipo de financiamento. É importante saber que cada modelo de financiamento tem suas vantagens e desvantagens, de acordo com o perfil de cada pessoa.

Em resumo, o ensino da matemática pode ser desafiador, mas, quando contextualizado e o aluno compreende sua aplicação e importância, essa abordagem torna-se mais eficaz e envolvente. Os dados coletados revelam que os alunos se demonstram interessados em saber lidar com situações financeiras, especialmente ao projetarem sua vida adulta. Portanto, além de conscientizar os alunos sobre o controle de suas finanças, este estudo pode despertar novos investidores ou futuros empresários.

Este trabalho teve como objetivo despertar o interesse dos alunos pelo estudo da matemática financeira por meio de problemas contextualizados, estimulando a curiosidade e a reflexão sobre a importância de compreender as regras matemáticas presentes nos sistemas financeiros. No entanto, é importante destacar que muitas famílias no Brasil não conseguem aplicar essas regras em seu dia a dia, pois estão profundamente endividadas devido a situações particulares e frequentemente não têm dinheiro suficiente para cobrir suas despesas mensais, vivendo, às vezes, com menos do que o básico. Ainda assim, este trabalho apresenta algumas estratégias que podem ser úteis para alcançar uma vida financeira mais digna.

Assim, essa pesquisa aponta para outras discussões e implicações para a investigação de matemática financeira. Assim, como sugestões para estudos futuros nessa área apontamos:

1) **Desenvolvimento de uma cartilha ou e-book:** Uma proposta de como abordar a matemática financeira em sala de aula como produto desta dissertação;
2) **Projeto de extensão de matemática financeira:** Desenvolvimento de um projeto de extensão para instruir e conscientizar a comunidade interna e externa sobre a importância da educação e do planejamento financeiro;
3) **Estudo sobre a importância da educação financeira na juventude**: Investigação dos benefícios de ensinar conceitos de matemática financeira desde cedo, incluindo planejamento financeiro, poupança e investimentos;
4) **Estudo sobre a viabilidade de investimentos de risco**: Análise de diferentes tipos de investimentos, como ações, fundos imobiliários e criptomoedas, e a relação risco-retorno;
5) **Estudo sobre o orçamento pessoal e familiar**: Desenvolvimento de estratégias para criar e manter um orçamento eficaz, incluindo técnicas de controle de despesas e metas financeiras;
6) **Estudo sobre o mercado imobiliário**: Análise de financiamentos imobiliários, cálculo de parcelas, taxas de juros e a importância de planejamento ao adquirir um imóvel;
7) **Estudo sobre a matemática das criptomoedas**: Investigação do funcionamento das criptomoedas, como calcular seu valor, riscos e benefícios de investir nesse mercado emergente.

Esta pesquisa mostra que a matemática financeira desempenha um papel fundamental na vida das pessoas, pois oferece ferramentas essenciais para o gerenciamento eficaz de recursos financeiros, planejamento de gastos e investimentos futuros. Compreender esses conceitos pode levar a melhores tomadas de decisões financeiras, contribuindo para a segurança econômica e o sucesso pessoal a longo prazo.

Por fim, esperamos que esta pesquisa possa contribuir significativamente para o campo de pesquisas em matemática aplicada e destacar a necessidade e a importância de investigar esse tema em sala de aula no cenário nacional. Além disso, esperamos que o estudo auxilie outros pesquisadores em específicos professores de matemática a se aprofundarem na compreensão de como a falta de conhecimento sobre matemática financeira pode afetar não só a vida profissional, mas também a pessoal.

REFERÊNCIAS

ABECIP (2023). Diponível em https://www.abecip.org.br/imprensa/informativos-mensais. acesso em 20 nov. 2023.

ALIAGA, M.; GUNDERSON, B. **Interactive Statistics**. Thousand Oaks: Sage, 2002.

ASSAF NETO, A. **Finanças corporativas e valor**. 2a ed. São Paulo: Atlas, 2005.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. Editora Contexto,São Paulo, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo, SP: Contexto,2014.

BRASIL. **Ministério da Educação**. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: 10 jun. 2024.

Casa da Moeda do Brasil: 290 anos de História, 1694/1984. **A origem do dinheiro**. Casa da Moeda do Brasil. 2023. Disponível em: https://www.casadamoeda.gov.br/portal/socioambiental/cultural/origem-do-dinheiro.html. Acesso: 20 nov. 2023.

CEPAL (2002). **“El crédito hipotecario y el accesso a La vivienda para los hogares de menores ingresos en America latina**”. Serie financiamiento del desarrollo.

CHAVES, M. I. A. **Repercussões de experiências com modelagem Matemática em ações docentes**.**REMATEC**, Natal (RN), ano 9, n. 17, set. - dez., 2014, p. 24–45. Disponível em: http://www.rematec.net.br/index.php/inicio/issue/view/18/showToc Acesso em: 20 nov. 2023.

EVES, Howard. **Introdução à História da Civilização**. 2. ed. São Paulo: Editora ABC, 2011.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. -4. ed.-São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GRANDO, N. I.; SCHNEIDER, I. J. **Matemática financeira**: alguns elementos históricos e contemporâneos. Zetetiké, v. 18, n. 1, 2010.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.

Instituto Sociocultural Brasil-China. **Invenções chinesas**: o dinheiro. 9 de agosto de 2023. Disponível em: https://ibrachina.com.br/invencoes-chinesas-dinheiro/. Acesso: 16 mai. 2024.

LAKATOS, E. Maria; MARCONI, M. de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**:Técnicas de pesquisa. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

LIMA, C. B.; SÁ, I. P. de. Matemática financeira no ensino fundamental. **Revista Eletrônica TECCEN**, v. 3, n. 1, p. 34–43, 2010.

MORAES, R. S; ONUCHIC, L. R. **A aprendizagem de polinômios através da resolução de problemas por meio de um ensino contextualizado**. *In*: XIII Conferência Interamericana De Educação Matemática - CIAEM, Brasil, Recife, 2011.

National Geographic. **As primeiras moedas da história**. 29 de março de 2020. Disponível em: https://www.nationalgeographic.pt/historia/as-primeiras-moedas-da-historia_2099. Acesso: 16 mai. 2024.

NOGAMI, O. **Economia**. [S.l.]: IESDE BRASIL SA, 2012.

PELLEGRIN, T. P. DAMAZIO, A. Manifestações da contextualização no ensino de ciências naturais nos documentos oficiais de educação: reflexões com a teoria da vida cotidiana. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, Belo Horizonte, v. 15, n. 3, p. 477-496, 2015.

Portal de notícias da Globo. 2023. Disponível em https://g1.globo.com/sp/vale-do-paraiba-regiao/especial-publicitario/franco-consultoria-de-imoveis/sendo-franco-sobre-o-mercado-imobiliario/noticia/2023/10/20/crescimento-do-mercado-imobiliario-em-2023.ghtml. Acesso: 20 nov. 2023.

PUCCINI, A. d. L. **Matemática financeira**: objetiva e aplicada. [S.l.]: Saraiva Educação SA, 1977.

SÁNCHEZ, Fernando López. **As primeiras moedas da história**. *In*: National Geographic Portugal. 29 de março de 2020. Disponível em: https://www.nationalgeographic.pt/historia/as-primeiras-moedas-da-historia_2099. Acesso: 10 nov. 2023.

SILVA, E. L. **Contextualização no ensino de química: ideias e proposições de um grupo de professores**. 2007. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

SINGER, P. **Aprender economia**, 2ª edição. São Paulo: Editora Brasiliense, 1983.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. **Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory**. 4. ed. Thousand Oaks: Sage, 2015.

APÊNDICE A – Plano de aula

Objetivos das aulas:

- Compreender os conceitos fundamentais de porcentagens, juros simples e compostos.
- Perceber a importância da porcentagem no dia a dia.
- Relacionar os juros simples com a Progressão Aritmética e os juros composto com a Progressão Geométrica.
- Aprender a calcular juros simples e compostos.
- Explorar as diferenças entre juros simples e compostos e sua aplicação em situações do cotidiano.
- Entender os sistemas de amortização SAC e PRICE, assim como compreender o cálculo das parcelas e dos juros em cada sistema.

Público Alvo;

- Alunos do 1° ano do ensino médio com conhecimento básico em matemática.

Recursos Necessários:

- Quadro branco e data show.
- Marcadores e canetões.
- Calculadora cientifica e calculadora cidadão.
- Exercícios impressos.

Duração da Atividade:

18 aulas com duração de 50 minutos cada uma.

Metodologia:

1. Porcentagem (2 aulas):

- Apresentação do tema da aula.
- Definições e propriedades usadas nos cálculos de porcentagens.
- Discussão sobre a importância da porcentagem no contexto financeiro e em situações do dia a dia.
- Exercícios de fixação sobre porcentagem.

2. Juros Simples (3 aulas):

- Explicação do conceito de juros simples, incluindo definições de capital inicial, taxa de juros e tempo.
- Demonstrar a fórmula para calcular juros simples: $J = C \cdot i \cdot n$, onde Jé o juros, Cé o capital inicial, i é a taxa de juros e n é o tempo.
- Resolver exemplos práticos de cálculo de juros simples em diferentes contextos, como empréstimos e investimentos.
- Distribuir exercícios para os alunos resolverem individualmente.

3. Juros Compostos (3 aulas):

- Introdução ao conceito de juros compostos, destacando a diferença em relação aos juros simples.
- Apresentar a fórmula para calcular juros compostos: $M = C \cdot (1+i)^n$, onde Mé o montante total, C é o capital inicial, i é a taxa de juros e $\boldsymbol{t}$ é o tempo.
- Resolver exemplos de cálculo de juros compostos e compará-los com os resultados de juros simples.
- Proporcionar aos alunos a oportunidade de resolver exercícios contextualizados relacionados aos juros compostos.
- Distribuir exercícios para os alunos resolverem individualmente.

4. Sistema de Amortização Constante (SAC) (2 aulas):

- Explicação do conceito de amortização SAC, destacando sua característica de parcelas decrescentes ao longo do tempo.
- Apresentação da forma de calcular as parcelas no sistema SAC.
- Resolução de exemplos práticos de cálculo de parcelas e juros no sistema SAC.
- Discussão sobre as vantagens e desvantagens do sistema SAC em diferentes contextos financeiros.

5. Sistema de Amortização Francês (PRICE) (2 aulas):

- Introdução ao sistema de amortização PRICE, enfatizando sua característica de parcelas constantes ao longo do tempo.
- Apresentação da fórmula para calcular as parcelas no sistema PRICE.
- Resolução de exemplos práticos de cálculo de parcelas e juros no sistema PRICE.
- Comparação entre o sistema PRICE e o sistema SAC, destacando suas diferenças e aplicabilidades.

6. Discussão e Aplicação (5 aulas):

- Promover uma discussão em sala de aula sobre a importância de compreendermos as regras matemáticas envolvidas no meio financeiro.
- Proporcionar aos alunos a habilidade de resolver problemas de matemática financeira quando envolvida porcentagem, juros simples e juros compostos.
- Entender a diferença entre juros simples e compostos.
- Promover uma discussão em sala de aula sobre as principais características, vantagens e desvantagens de cada sistema de amortização.
- Proporcionar aos alunos a oportunidade de resolver exercícios práticos que envolvam a escolha e aplicação do sistema de amortização mais adequado em diferentes cenários financeiros.

7. Socialização e aplicação de questionário(1/2 aula):

Por fim, para concluir a pesquisa, será realizada uma socialização e aplicado um questionário de satisfação para compreender o posicionamento dos alunos em relação às atividades desenvolvidas ao longo dessa experiência.

Conclusão (1/2 aula):

- Recapitulação dos postos-chaves abordados na aula.
- Deixar claro a aplicação da matemática financeira no cotidiano do aluno.
- Reforço da importância do entendimento das regras da matemática financeira e da compreensão dos sistemas de amortização na gestão financeira eficaz.
- Encorajamento dos alunos para explorarem mais sobre o tema e suas aplicações na prática profissional.

APÊNDICE B – Teste com resoluções

1) Na turma do Pedro, há 40 alunos, dos quais 60% são meninas. Quantas meninas estudam na sala do Pedro?

Seja: $40 \rightarrow (100\%) total\ de\ alunos$ $x \rightarrow (60\%) total\ de\ alunas\ meninas$	$40 \rightarrow 100\%$ $x \rightarrow 60\%$ $\frac{40}{100} = \frac{x}{60}$ $100x = 240$ $x = \frac{240}{100}$ $x = 24$
Portanto, na turma do Pedro, há 24 meninas.	

2) Juvenal, ao pesquisar na internet, descobriu que um celular que ele pretende comprar custa R$ 1.950,00 em uma loja. No entanto, se ele optar por pagar à vista, receberá um desconto de 25%. Quanto ele precisará pagar em reais para adquirir esse celular à vista?

Seja: $1950 \rightarrow (100\%) preço\ total\ do\ celular$ $x \rightarrow (25\%)\ valor\ do\ desconto$	$1950 \rightarrow 100\%$ $x \rightarrow 25\%$ $\frac{1950}{100} = \frac{x}{25}$ $100x = 48750$ $x = \frac{48750}{100}$ $x = 487{,}50$
Com isso, temos que Juvenal terá um desconto de R$ 487,50 na compra do celular, então, O valor pago no celular será: 1950,00 – 487,50 = 1462,50. Logo, Juvenal terá que pagar R$ 1.462,50 pelo celular na compra à vista.	

3) Depois de obter um desconto de 30% em um jogo de vídeo game, Marcos pagou R$ 150,00. Se o vendedor não tivesse concedido esse desconto a Marcos, qual seria o valor pago pelo jogo?

Seja: $x \rightarrow (100\%) preço\ inicial\ do\ jogo$ $150 \rightarrow (100\% - 30\% =$ $70\%)$ o valor pago no jogo.	$x \rightarrow 100\%$ $150 \rightarrow 70\%$ $\frac{x}{100} = \frac{150}{70}$ $70x = 15000$ $x = \frac{15000}{70}$ $x = 214{,}30$
Logo, o valor do jogo de vídeo game nessa loja sem desconto é de R$ 214,30.	

4) Ana e Milena são colegas de sala. Em um certo dia, Ana pediu a Milena um empréstimo de R$ 500,00 para ser pago após 5 meses, pois precisava completar o dinheiro do aluguel. Milena concordou em emprestar o dinheiro sob a condição de que Ana pagasse uma taxa de juros de 10% ao mês. Ana concordou com a condição, desde que fossem aplicados juros simples. Sabendo que Milena aceitou emprestar o dinheiro nessas condições, qual será o valor que Ana deverá pagar ao final do período combinado?

Seja: $C = 500$ $i = 10\% = 0{,}10.$ $n = 5\ meses$ $M = ?$	$\boldsymbol{M = C \cdot (1 + i \cdot n)}$ $M = 500 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 5)$ $M = 500 \cdot (1 + 0{,}5)$ $M = 500 \cdot 1{,}5$ $M = 750$
Com isso, temos que Ana deve pagar R$ 750 reais após os 5 meses.	

5) Pedro investiu R$ 10.200,00 por um período de 1 ano em uma aplicação a juros simples, com uma taxa de 2,5% ao mês. Qual será o valor total desse investimento ao final do período?

Seja: $C = 10\,200$ $i = 2{,}5\%\ a.m = 0{,}025.$ $n = 1\ ano = 12\ meses$ $M = ?$	$\boldsymbol{M = C \cdot (1 + i \cdot n)}$ $M = 10200 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 12)$ $M = 10200 \cdot (1 + 0{,}3)$ $M = 10200 \cdot 1{,}3$ $M = 13260$
Após um ano, Pedro receberá um montante de R$ 13.260 reais.	

6) Um capital de R$ 3.600,00 foi emprestado a juros compostos por um período de 24 meses a uma taxa de juros de 2,3% ao mês. Qual será o valor dos juros pagos nesse empréstimo?

Seja: $C = 3600$ $i = 2{,}3\%\ a.m = 0{,}023.$ $n = 24\ meses$ $M = ?$	$\boldsymbol{M = C} \cdot (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}}$ $M = 3600 \cdot (1 + 0{,}023)^{24}$ $M = 3600 \cdot (1{,}023)^{24}$ $M = 3600 \cdot 1{,}7259$ $M = 6213{,}25$
Considerando que o valor total pago nesse empréstimo é de R$ 6213,25, então o juros pago será: $6213{,}25 - 3600{,}00 = 2\,613{,}25$.Então o juros pago será de R$2 613,25	

7) Após 5 anos pagando um financiamento, Seu Joaquim verificou que o valor total foi de R$ 65.250,00. No momento da contratação, o acordo foi de que ele pagaria uma taxa de juros composto de 1,8% ao mês. Sabendo dessas condições do financiamento, qual foi o valor que Seu Joaquim financiou?

Seja: $C = ?$ $i = 1{,}8\%\ a.m = 0{,}018.$ $n = 5\ anos = \ 60\ meses$ $M = 65250$	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C} \cdot (1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}}$ $65250 = C \cdot (1 + \ 0{,}018)^{24}$ $65250 = C \cdot (1{,}018)^{24}$ $65250 = C \cdot 2{,}9165$ $C = \dfrac{65250}{2{,}9165}$ $C = 22372{,}70$
Desta forma, Seu Joaquim fez um financiamento no valor de R$ 22.372,70	

8) Rogério tem uma quantia em dinheiro e pretende investir em uma aplicação que renda 1,5% ao mês a juros compostos, pois, segundo seus cálculos, conseguirá, após dois anos, um montante que lhe permitirá comprar uma moto. No entanto, ao fazer suas pesquisas, ele não encontrou nenhum tipo de investimento com essa taxa de 1,5% ao mês. Agora, ele pretende encontrar uma taxa de juros anual que seja equivalente a essa taxa mensal. Qual deve ser a taxa de juros compostos anual que ele precisa investir para obter o mesmo montante após dois anos?

Como a transformação é de um período **menor** para um período **maior**, usaremos: $(1 + i)^n - 1$, na qual n será o período maior.	
$i = 1{,}5\%\ a.m. = 0{,}015$ $n = 1\ ano = 12\ meses$	$(1 + 0{,}015)^{12} - 1$ $1{,}015^{12} - 1$ $1{,}1956 - 1$ 0,1956
Assim: 0,1956 · 100 = 19,56% Portanto, uma taxa de juros de 1,5% a.m. é equivalente a 19,56% a.a.	

9) Recentemente, João atingiu a maioridade, completando 18 anos, e decidiu adquirir uma motocicleta. Para concretizar essa compra, ele optou por financiar um montante de R$ 12.600,00. O contrato foi estabelecido sob o regime de amortizações constantes e deve ser liquidado em 36 prestações mensais. A taxa de juros aplicada ao seu financiamento foi de 2% ao mês. Com base nisso, é necessário determinar:

Considere:
Montante (M) valor total = 12600
Juros (J): $J = i\% \cdot Saldo\ devedor.$
Amortização $(A_n) = \frac{M}{n}.$
$Parcela\ (P) = A_n + J.$
$Período\ (n) = 36meses\ .$
$Taxa(i\%) = 2\%\ a.m. = 0{,}02.$
Valor da enésima parcela: $P_{n=} P_1 + (n-1)r$;
$r = A_n \cdot i\%$
$Soma\ de\ todas\ as\ parcelas: S_{n=} \frac{(P_1 + P_n)}{2} \cdot n$

a) O valor da amortização a cada mês;

$$A_n = \frac{12600}{36} = 350\ reais$$

b) O valor dos juros pagos no primeiro mês.

$$J = 0{,}02 \cdot 12600 = 252\ reais$$

c) O valor da primeira prestação.

$$P_1 = 350 + 252 = 602\ reias$$

d) O valor da 25° parcela.

$r = A_n \cdot i\% = 350 \cdot 0{,}02 = 7$ “Como a parcela diminui, a razão é -7”	$P_{25=}\ 602 + (25 - 1) \cdot (-7)$ $P_{25=}\ 602 + 24 \cdot (-7)$ $P_{25=}\ 602 - 168$ $P_{25=}\ 434$
Portanto, o valor da 25° parcela será de R$ 434,00	

e) O valor da última parcela.

Note que poderíamos usar a estratégia do item “d” para realizar o cálculo da P_{36}. Porém, podemos analisar que a última parcela será exatamente $A_m + A_m \cdot i\%$, pois o juros é correspondente ao saldo devedor.

$$P_{36} = 350 + 350 \cdot 0{,}02 = 350 + 7 = 357\ reais$$

f) O valor dos juros pagos nesse financiamento.

Como o comportamento do sistema SAC é correspondente a uma PA, podemos calcular o valor total pela soma da PA.

Ou seja: $S_{36} = \frac{(602+357)}{2} \cdot 36 = 959 \cdot 18 = 17262.$

Portanto, o juros pago será: R\$ 17.262,00 - R\$ 12.600,00 = R\$ 4.662,00

10) Durante uma tempestade severa, uma árvore caiu sobre a casa do Sr. Ricardo, exigindo que ele fizesse um empréstimo de R$ 30.000,00 para realizar uma reforma em sua residência. Esse montante deve ser reembolsado através do sistema de amortizações constantes em 10 parcelas mensais, com uma taxa de juros de 1,5% ao mês. Assim:

Construa uma planilha manual correspondente às 10 prestações:

Meses	**Amortização**	**juros**	**Prestação**	**Saldo devedor**
	$\frac{Capital}{N° \ de \ Parcelas}$	i% **sobre o saldo devedor**	**Amortização + juros**	
0				R$ 30.000,00
1	R$ 3.000,00	R$ 450,00	R$ 3.450,00	R$ 27.000,00
2	R$ 3.000,00	R$ 405,00	R$ 3.405,00	R$ 24.000,00
3	R$ 3.000,00	R$ 360,00	R$ 3.360,00	R$ 21.000,00
4	R$ 3.000,00	R$ 315,00	R$ 3.315,00	R$ 18.000,00
5	R$ 3.000,00	R$ 270,00	R$ 3.270,00	R$ 15.000,00
6	R$ 3.000,00	R$ 225,00	R$ 3.225,00	R$ 12.000,00
7	R$ 3.000,00	R$ 180,00	R$ 3.180,00	R$ 9.000,00
8	R$ 3.000,00	R$ 135,00	R$ 3135,00	R$ 6.000,00
9	R$ 3.000,00	R$ 90,00	R$ 3.090,00	R$ 3.000,00
10	R$ 3.000,00	R$ 45,00	R$ 3.045,00	R$ 0,00
Total	R$ 30.000,00	R$ 2475,00	R$ 32.475,00	

11) Para alcançar o objetivo de adquirir sua própria casa, dona Maria planeja utilizar um crédito no valor de R$ 60.000,00 que foi disponibilizado pelo seu banco. Os pagamentos das prestações serão debitados diretamente de sua conta bancária ao longo de um período de 10 anos. Considerando que este crédito segue o sistema de financiamento Price e uma taxa de juros de 0,5% ao mês, é necessário determinar o valor da prestação mensal desse financiamento.

	$\boldsymbol{P = C \cdot \frac{(1+i\%)^n \cdot i\%}{(1+i\%)^n - 1}}$
$Parcela\ (P)\ = ?$ $Capital\ (C)\ =\ 60\ 000$ $Período\ (n)\ =\ 10\ ano\ =\ 12\ meses$ $Taxa(i\%)\ =\ 0{,}5\%\ a.m. =\ 0{,}005$	$\boldsymbol{P = 60\ 000 \cdot \frac{(1+0{,}005)^{120} \cdot 0{,}005}{(1+0{,}005)^{120} - 1}}$ $\boldsymbol{P = 60\ 000 \cdot \frac{(1{,}005)^{120} \cdot 0{,}005}{(1{,}005)^{120} - 1}}$ $\boldsymbol{P = 60\ 000 \cdot \frac{0{,}0091}{0{,}8194}}$ $\boldsymbol{P = \frac{546}{0{,}8194}}$ $\boldsymbol{P = 666{,}35}$ Portanto, as parcelas serão de R$ 666,35

12) Julia, uma estudante do 1° ano do ensino médio, ficou intrigada ao ouvir seu pai comentar sobre os altos juros de 1% ao mês do seu financiamento, resultando em um pagamento mensal de R$ 1.200,00 ao longo de 48 meses. Determinada a resolver esse enigma sem perguntar diretamente ao seu pai, Julia pesquisou na internet e descobriu que o valor das parcelas pode variar dependendo do sistema de financiamento utilizado. Após uma conversa com seu pai, ela soube que o financiamento foi realizado através do sistema Price. Agora, Julia pode determinar qual foi o valor do financiamento? Qual foi o valor financiado?

$$\boldsymbol{P = C \cdot \frac{(1+i\%)^{n} \cdot i\%}{(1+i\%)^{n}-1} \rightarrow C = P \cdot \frac{(1+i\%)^{n}-1}{(1+i\%)^{n} \cdot i\%}}$$	
$\boldsymbol{Parcela\ (P) = 1200}$ $\boldsymbol{Capital\ (C) = ?}$ $\boldsymbol{Período\ (n) = 48\ meses}$ $\boldsymbol{Taxa(i\%) = 1\%\ a.m. = 0,01}$	$\boldsymbol{C = 1200 \cdot \frac{(1+0,01)^{48} - 1}{(1+0,01)^{48} \cdot 0,01}}$ $\boldsymbol{C = 1200 \cdot \frac{(1,01)^{48} - 1}{(1,01)^{48} \cdot 0,01}}$ $\boldsymbol{C = 1200 \cdot \frac{0,61222}{0,016122}}$ $\boldsymbol{C = \frac{734,67}{0,016122}}$ $\boldsymbol{C = 45\ 569}$
Assim, o valor financiado foi de R$ 45.569,00	

APÊNDICE C – Questionário de Socialização

1) **Qual era o seu nível de conhecimento sobre matemática financeira?**

( ) Nenhum conhecimento

( ) Conhecimento intermediário

( ) Conhecimento básico

( ) Conhecimento avançado

2) **Você já tinha familiaridade com os sistemas de amortização SAC e PRICE antes desta pesquisa?**

( ) Nunca ouvi falar

( ) Já ouvi falar, mas não tenho

( ) Tenho algum conhecimento

( )Tenho conhecimento aprofundado

3) **Qual a sua percepção sobre a importância de compreender as regras matemáticas subjacentes aos sistemas financeiros?**

( ) Nada importante

( ) Pouco importante

( ) Moderadamente importante

( ) Muito importante

4) Você acredita que resolver problemas de matemática financeira de forma contextualizada em sala de aula, conectando a teoria com situações da vida real, torna o estudo mais interessante?

( ) Discordo totalmente

( ) Discordo parcialmente

( ) Concordo parcialmente

( ) Concordo totalmente

5) **Após a aplicação dos testes de matemática financeira de forma contextualizada, você sente um aumento na motivação para estudar a disciplina?**

( ) Não houve aumento na motivação

( ) Houve um pequeno aumento na motivação

( ) Houve um aumento moderado na motivação

( ) Houve um aumento significativo na motivação