



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT**



RAQUEL AUGUSTA BORGES RODRIGUES

EXPLORANDO OS NÚMEROS PRIMOS

**SINOP
2024**

RAQUEL AUGUSTA BORGES RODRIGUES

EXPLORANDO OS NÚMEROS PRIMOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do departamento de Matemática da Universidade Estadual do Mato Grosso – UNEMAT, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Giovane Maia do Vale
Orientador
Prof. Dr. João Gabriel Ribeiro Damian
Coorientador

SINOP
2024

Ficha catalográfica elaborada pela Supervisão de Bibliotecas da UNEMATCatalogação de Publicação na Fonte.
UNEMAT - Unidade padrão

Rodrigues, Raquel Augusta Borges.

Explorando os números primos / Raquel Augusta Borges
Rodrigues. - Sinop, 2024.
150 f.: il.

Universidade do Estado de Mato Grosso "Carlos Alberto Reyes
Maldonado", Matemática/SNP-PROFMAT - Sinop - Mestrado
Profissional, Campus Universitário De Sinop.

Orientador: Dr. Giovane Maia do Vale.

Coorientador: Dr. João Gabriel Ribeiro Damian.

1. Números Primos. 2. Ensino de Matemática. 3. Almanaque. 4.
Software. I. Vale, Giovane Maia do, Dr. II. Damian, João Gabriel
Ribeiro, Dr. III. Título.

UNEMAT / MT-SCB

CDU 51(07)



ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT
UNEMAT - SINOP



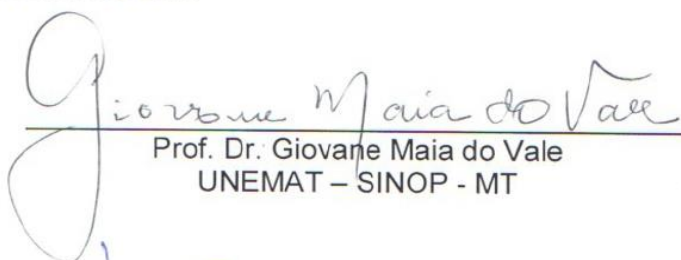
RAQUEL AUGUSTA BORGES RODRIGUES

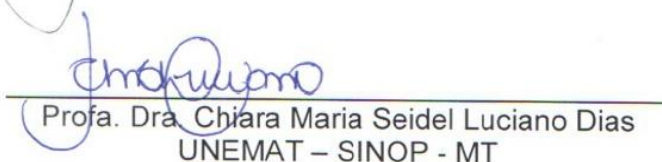
EXPLORANDO OS NÚMEROS PRIMOS

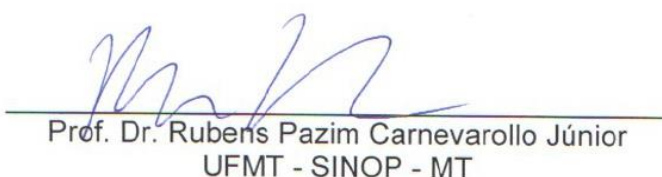
Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Giovane Maia do Vale
Aprovado em 11/09/2024

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Giovane Maia do Vale
UNEMAT – SINOP - MT


Profa. Dra. Chiara Maria Seidel Luciano Dias
UNEMAT – SINOP - MT


Prof. Dr. Rubens Pazim Carnevarollo Júnior
UFMT - SINOP - MT

Sinop/MT
2024



Programa de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional – PROFMAT/UNEMAT/Sinop/MT
Av. dos Ingás, 3001, CEP: 78.550-000, Sinop, MT
Tel/PABX: (66) 3511 2100. www.unemat.br – Email:
profmatt@unemat.br

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso
Carlos Alberto Reyes Maldonado

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

A Deus, pela sabedoria e companheirismo.

A mim mesma, por ter aproveitado cada momento desse mestrado com meus professores e colegas.

Aos meus professores, Dra. Adriana S. Resende, Dr. Emivan F. da Silva, Dr. Giovane M. do Vale, Dr. Inédio Arcari, Dra. Luciana M. E. de Assis, Dr. Miguel T. Koga, Dr. Raul A. de Assis, Dra. Chiara M. S. L. Dias, por me auxiliarem durante minha trajetória e por me inspirarem a me tornar uma excelente profissional.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Giovane Maia do Vale, por conduzir essa pesquisa de forma tranquila, paciente. Por se disponibilizar e orientar a construção deste trabalho.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. João Gabriel Ribeiro Damian, por auxiliar, orientar e dar conselhos durante a construção dessa pesquisa.

Aos meus colegas, Carla, Celso, Douglas, Erick, Geraldo, Grasiela, Isac, Marcos, Marinete, Raphael, pela amizade e pelas trocas de conhecimento.

Aos meus familiares Nicanor (pai), Maria (mãe), Pamela (irmã) e Leo (irmão).

Ao Antoniel (esposo) por acreditar em mim e me apoiar a realizar este sonho.

À banca avaliadora do Projeto de Pesquisa Prof. Dra. Chiara M. S. L. Dias e Prof. Dr. João Gabriel Ribeiro Damian.

À banca avaliadora da defesa pública Prof. Dra. Chiara M. S. L. Dias e Prof. Dr. Rubens P. C. Júnior.

EPÍGRAFE

*A maior aventura que você pode
realizar é viver a vida de seus
sonhos.*

Oprah Winfrey.

RESUMO

A pesquisa aqui descrita teve como objetivo principal a elaboração de um material didático significativo, envolvente e com aspectos lúdicos, sobre o tema “números primos”. O material, dicado a estudantes da Educação Básica, foi desenvolvido com base em aspectos teóricos e práticos presentes na literatura da área. A metodologia de pesquisa adotada consistiu, inicialmente, em uma revisão bibliográfica de caráter exploratório, com o objetivo de angariar o arcabouço teórico necessário para a elaboração do material proposto. De posse do referencial teórico criou-se o almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”. Em adição a isso, foi projetado e implementado, em C/C++, um *software (for Windows)* capaz de efetuar testes de primalidade por meio dos métodos Crivo de Eratóstenes e Força Bruta. O *software*, denominado Primus, se destina a fornecer um *feedback* em tempo real aos alunos sobre a primalidade de números de interesse. O *software* é capaz de gerar listas de números primos e de números compostos. De posse do almanaque, este foi trabalhado em 7 salas do Ensino Médio da Escola Estadual São Vicente de Paula, em Sinop - MT. Por meio de questionário, se coletou as impressões, dos 143 alunos participantes, acerca do material. Os dados foram analisados do ponto de vista qualitativo, segundo a análise de conteúdo de Bardin (2016), e do ponto de vista quantitativo, utilizando-se Estatística Descritiva e Inferencial. As análises foram efetivas em validar o material, dada a sua aceitação. Infere-se da pesquisa que, a implementação de metodologias inovadoras pode melhorar significativamente o engajamento dos alunos e sua compreensão sobre o tema.

Palavras-chave: Números Primos. Ensino de Matemática. Almanaque. *Software*.

ABSTRACT

The main objective of the research described here was to develop a meaningful, engaging and playful teaching material on the topic of “prime numbers”. The material, intended for students in Basic Education, was developed based on theoretical and practical aspects present in the literature in the area. The research methodology adopted initially consisted of an exploratory bibliographic review, with the objective of gathering the theoretical framework necessary for the development of the proposed material. Using the theoretical framework, the almanac “Leãozito: The Mysteries of Prime Numbers” was created. In addition, a *software* (for Windows) capable of performing primality tests using the Sieve of Eratosthenes and Brute Force methods was designed and implemented in C/C++. The *software*, called Primus, is intended to provide real-time feedback to students on the primality of numbers of interest. In addition, the *software* is also capable of generating lists of prime numbers and composite numbers. Once the almanac was in hand, it was used in seven high school classrooms at the São Vicente de Paula State School, in Sinop - MT. The impressions of the 143 participating students about the material were collected through a questionnaire. The data were analyzed from a qualitative point of view, according to Bardin's content analysis (2016), and from a quantitative point of view, using descriptive and inferential statistics. The analyses were effective in validating the material, given its acceptance. It can be inferred from the research that the implementation of innovative methodologies can significantly improve student engagement and their understanding of the topic.

Keywords: Prime Numbers. Teaching Mathematics. Almanac. *Software*.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Osso de Ishango, exposto no Real Instituto de Ciências Naturais, na Bélgica.	30
Figura 2 – Entalhes esculpidos no Osso Ishagono.	31
Figura 3 – Representação artística de Euclides.	32
Figura 4 – Fragmento de papiro “Os Elementos” datado de cerca de 100 d.C.	32
Figura 5 – Erastóstenes de Cirene.....	37
Figura 6 – Mapa do mundo de Eratóstenes.	37
Figura 7 – Representação artística da face de Júlio César.	40
Figura 8 – Frequência aproximada das letras em português	41
Figura 9 – Registro fotográfico de Rivest, Sherman e Adleman.	42
Figura 10 – Codificando uma mensagem: Algoritmo RSA.	44
Figura 11 – Decodificando uma mensagem: Algoritmo RSA.	45
Figura 12 – Distribuição livre e sem normalidade hipotética de dados com as regiões críticas de aceitação e rejeição de H_0 para um teste bilateral.	50
Figura 13 – Distribuição livre sem normalidade hipotética com as regiões críticas de aceitação e rejeição de H_0 para um teste unilateral a direita.	51
Figura 14 – Distribuição livre dos dados com as regiões críticas de aceitação e rejeição de H_0 para um teste unilateral a esquerda.	51
Figura 15 – Personagem Leãozito.	56
Figura 16 – Ilustração do trajeto percorrido pelo Leãozito.	57
Figura 17 – Capa do material didático: Almanaque.	57
Figura 18 – Atividade do material didático.....	59
Figura 19 – A interface do <i>software</i> Primus.	60
Figura 20 – A interface do <i>software</i> Primus.	61
Figura 21 – Fluxograma do <i>software</i> Primus.....	63
Figura 22 – Caixa de mensagem alertando que não houve valor fornecido ao programa.	64
Figura 23 – Caixa de mensagem alertando de que não houve método de verificação de primalidade selecionado.....	64
Figura 24 – Caixa de mensagem informando ao usuário que o número fornecido não é válido.....	65

Figura 25 – Caixa de mensagem que informa sobre a paridade de um número primo...	65
Figura 26 – Caixas de mensagens que informam o método de verificação de primalidade escolhido pelo usuário: a) Crivo de Eratóstenes; b) Força Bruta.	65
Figura 27 – Interface do <i>software</i> Primus com o valor 23 inserido no componente 1, o método “Crivo de Eratóstenes” selecionado e o resultado apresentado no componente 4.	66
Figura 28 – Lista de números primos gerada pelo <i>software</i> Primus: Números_Primos.txt.	67
Figura 29 – Lista de números compostos gerada pelo <i>software</i> Primus: Números_Compostos.txt.	67
Figura 30 – Registro fotográfico da Escola Estadual São Vicente de Paula 1977-1986 ...	75
Figura 31 – Registro dos alunos desenvolvendo as atividades com o almanaque.....	78
Figura 32 – Registro da aplicação 2ª série	79
Figura 33 – Registro dos alunos caça palavras	80
Figura 34 – Registro da aplicação “Cifra de César”	81
Figura 35 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (Total).....	87
Figura 36 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (Total).	88
Figura 37 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (Total).....	89
Figura 38 – Boxplot referente às notas atribuídas pelos 143 alunos.....	90
Figura 39 – Histograma referente às notas atribuídas pelos 143 alunos.....	91
Figura 40 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente às notas atribuídas pelos 143 alunos.....	91
Figura 41 – Boxplot referente às notas atribuídas pelos 143 alunos, por turma e total...	93
Figura 42 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos” para outra pessoa? (Total)	94
Figura 43 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (1ª série E).	115
Figura 44 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no almanaque? (1ª série E).....	115
Figura 45 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (1ª série E).	116
Figura 46 – Boxplot referente às notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série E.....	117
Figura 47 – Histograma referente às notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série E.....	117

Figura 48 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente às notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série E.....	117
Figura 49 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (1ª série E).....	119
Figura 50 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (1ª série F).....	120
Figura 51 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (1ª série F).	120
Figura 52 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (1ª série F). 121	
Figura 53 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série F.....	122
Figura 54 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série F.	122
Figura 55 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série F.....	122
Figura 56 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (1ª série F).....	124
Figura 57 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (1ª série G).	125
Figura 58 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (1ª série G).	125
Figura 59 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (1ª série G). 126	
Figura 60 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 1ª série G.....	127
Figura 61 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 1ª série G.	127
Figura 62 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 1ª série G.....	127
Figura 63 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (1ª série G).....	129
Figura 64 – Como foi a sua experiência com o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”? (1ª série N).....	130
Figura 65 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (1ª série N).....	130
Figura 66 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (1ª série N). 131	
Figura 67 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 12 alunos da 1ª série N.	132
Figura 68 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 12 alunos da 1ª série N.	132

Figura 69 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 12 alunos da 1ª série <i>N</i>	132
Figura 70 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (1ª série <i>N</i>).	134
Figura 71 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (2ª série <i>B</i>).	135
Figura 72 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (2ª série <i>B</i>).	135
Figura 73 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (2ª série <i>B</i>).	136
Figura 74 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 30 alunos da 2ª série <i>B</i>	137
Figura 75 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 30 alunos da 2ª série <i>B</i>	137
Figura 76 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 30 alunos da 2ª série <i>B</i>	137
Figura 77 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (2ª série <i>B</i>).	139
Figura 78 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (2ª série <i>C</i>).	140
Figura 79 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (2ª série <i>C</i>).	140
Figura 80 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (2ª série <i>C</i>).	141
Figura 81 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 2ª série <i>C</i>	142
Figura 82 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 2ª série <i>C</i>	142
Figura 83 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 2ª série <i>C</i>	142
Figura 84 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (2ª série <i>C</i>).	144
Figura 85 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (3ª série <i>A</i>).	145
Figura 86 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (3ª série <i>A</i>).	145
Figura 87 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (3ª série <i>A</i>).	146
Figura 88 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 7 alunos da 3ª série <i>A</i>	147
Figura 89 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 7 alunos da 3ª série <i>A</i>	147
Figura 90 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 7 alunos da 3ª série <i>A</i>	147

Figura 91 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (3ª série A) 149

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Dissertações selecionadas.....	25
Quadro 2 – Metodologia de ensino, aplicação e atividades desenvolvidas nas pesquisas analisadas.	27
Quadro 3 – Decisão do teste de hipótese com base no erro do tipo 1 (α).	48
Quadro 4 – Atividades, objetivos e habilidades desenvolvidas no almanaque.....	58
Quadro 5 – Número de alunos que preencheram o questionário por série avaliada.	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Como foi a sua experiência com Almanaque? (Por Turma).....	87
Tabela 2 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (Por turma).	88
Tabela 3 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (Por turma)..	89
Tabela 4 – Análise descritiva das notas atribuídas pelo total dos alunos.	90
Tabela 5 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk para as notas dos alunos.	91
Tabela 6 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x_{total} = 7,88$, possa ser maior.....	92
Tabela 7 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x_{total} = 7,88$, possa ser menor.....	92
Tabela 8 – Estatísticas descritivas e resumo dos testes aplicados.....	93
Tabela 9 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (Por turma).	94
Tabela 10 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série E.	116
Tabela 11 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk nas notas dos alunos da 1ª série E.	118
Tabela 12 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x_{1ª série E} = 7,52$ possa ser maior.	118
Tabela 13 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x_{1ª série E} = 7,52$ possa ser menor.	118
Tabela 14 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série F.	121
Tabela 15 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk nas notas dos alunos da 1ª série F.	123
Tabela 16 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x_{1ª série F} = 7,28$, possa ser maior.	123
Tabela 17 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x_{1ª série E} = 7,28$, possa ser menor.	123
Tabela 18 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série G.	126
Tabela 19 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk nas notas dos alunos da 1ª série G.	128
Tabela 20 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x_{1ª série G} = 8,66$, possa ser maior.	128
Tabela 21 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x_{1ª série G} = 8,66$, possa ser menor.	128

Tabela 22 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série N.....	131
Tabela 23 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk para as notas dos alunos da 1ª série N.	133
Tabela 24 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x1^a$ série N = 8,71, possa ser maior.....	133
Tabela 25 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x1^a$ série N = 8,71, possa ser menor.....	133
Tabela 26 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 2ª série B.	136
Tabela 27 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk para as notas dos alunos da 2ª série B.	138
Tabela 28 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x2^a$ série B = 7,63, possa ser maior.....	138
Tabela 29 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x2^a$ série B = 7,63, possa ser menor.	138
Tabela 30 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 2ª série C.	141
Tabela 31 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk para as notas dos alunos da 2ª série C.	143
Tabela 32 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x2^a$ série C = 8,04, possa ser maior.	143
Tabela 33 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x2^a$ série C = 8,04, possa ser menor.	143
Tabela 34 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 3ª série A.	146
Tabela 35 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk para as notas dos alunos da 3ª série A.	148
Tabela 36 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x3^a$ série A = 7,97, possa ser maior.	148
Tabela 37 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $x3^a$ série A = 7,97, possa ser menor.	148

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
IES	Instituição de Ensino Superior
PE	Produto Educacional
PPG	Programa de Pós-graduação
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede
RSA	Rivest-Shamir-Adleman.
SEDUC	Secretaria Estadual de Educação
TFA	Teorema Fundamental da Aritmética
UNEMAT	Universidade do Estado do Mato Grosso

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	19
1.1.	Objetivos	21
1.1.1.	<i>Objetivo Geral.....</i>	<i>21</i>
1.1.2.	<i>Objetivos Específicos</i>	<i>21</i>
1.2.	Estrutura do Trabalho	22
2.	EXPLORANDO NÚMEROS PRIMOS E TÓPICOS DE ESTATÍSTICA DESCRITIVA E INFERENCIAL	23
2.1.	A Educação Básica e os Números Primos.....	23
2.1.1.	<i>Trabalhos Relacionados: uma Análise Crítica</i>	<i>24</i>
2.2.	Aritmética e os Números Primos.....	28
2.3.	Aspectos Históricos: a Gênese	30
2.4.	Euclides de Alexandria: Pai da Geometria e suas Contribuições para a Aritmética ..	31
2.4.1.	<i>Algoritmo de Euclides</i>	<i>34</i>
2.4.2.	<i>Máximo Divisor Comum</i>	<i>35</i>
2.4.3.	<i>Teorema Fundamental da Aritmética</i>	<i>35</i>
2.5.	O Crivo de Eratóstenes: Um Método Eficaz para Encontrar Números Primos	36
2.6.	Criptografia	39
2.6.1.	<i>Cifra de César</i>	<i>40</i>
2.6.2.	<i>Criptografia RSA (Rivest Shamir Adleman).....</i>	<i>41</i>
2.7.	Tópicos de Estatística Descritiva e Inferencial	46
2.7.1.	<i>Estatísticas Descritivas</i>	<i>46</i>
2.7.2.	<i>Testes de Hipóteses e Erro Tipo 1 em Testes de Hipóteses.....</i>	<i>47</i>
2.7.3.	<i>Teste de Shapiro-Wilk</i>	<i>48</i>
2.7.4.	<i>Teste de Postos Sinalizados de Wilcoxon, para Localização</i>	<i>49</i>
3.	METODOLOGIA	52
3.1.	Delineamento Metodológico	52
3.1.1.	<i>Pesquisa Bibliográfica</i>	<i>52</i>
3.1.2.	<i>Elaboração de Material Didático: O Almanaque</i>	<i>53</i>
3.1.3.	<i>O Software Primus</i>	<i>54</i>
3.1.4.	<i>Aplicação do Almanaque em Sala, Coleta e Avaliação dos Dados</i>	<i>54</i>
4.	MATERIAL DIDÁTICO – O ALMANAQUE	56
4.1.	A Elaboração do Almanaque: “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”	56
5.	SOFTWARE PRIMUS – UM FEEDBACK EM TEMPO REAL	60
5.1.	O software “Primus”	60
5.2.	Os Métodos de Verificação de Primalidade Implementados	67
5.2.1.	<i>A Implementação do Crivo de Eratóstenes</i>	<i>68</i>
5.2.2.	<i>A Implementação do Método Força Bruta.....</i>	<i>71</i>
6.	ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÕES: ASPECTOS QUALITATIVOS	75
6.1.	Local da Pesquisa, Público Participante e Duração	75
6.2.	Técnicas de Coleta de Dados, Tratamento e Interpretação	76
6.3.	Experiências e Reflexões.....	77
6.3.1.	<i>Compartilhando Vivências</i>	<i>77</i>
6.3.2.	<i>Discursões e Reflexões</i>	<i>81</i>
7.	ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÕES: ASPECTOS QUANTITATIVOS	85
7.1.	Resultados e Discussões	86
7.1.1.	<i>Análise da Questão “Como foi a sua experiência com o Almanaque?”</i>	<i>86</i>

7.1.2. Análise da Questão “Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque?”	87
7.1.3. Análise da Questão “Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque?”	89
7.1.4. Análise da Questão “Avalie, em uma escala de 0 a 10, a sua satisfação geral com o Almanaque?”	90
7.1.5. Análise da Questão “Você recomendaria o Almanaque, para outra pessoa?”	93
8. CONCLUSÕES	95
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97
APÊNDICES	100
Apêndice A	101
Material Didático: “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”	101
Apêndice B	114
Questionário Avaliativo	114
Apêndice C	115
Análises e discussões dos dados do quantitativos por turma.....	115

1. INTRODUÇÃO

A pesquisa aqui descrita foi desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual de Mato Grosso (UNEMAT), campus Universitário de Sinop, e tem como tema os números primos. O interesse por essa temática surgiu por parte da pesquisadora, quando de sua graduação. Tal interesse continuou na pós-graduação, culminando nos resultados aqui apresentados.

Nos dois parágrafos a seguir, a pesquisadora apresenta, em caráter de “relato de experiência”, com o uso de primeira pessoa, a justificativa para escolha da temática.

Durante minha jornada na graduação, percebi que eu tinha uma ideia errada sobre a definição de números primos. Acreditava que o número 1 fosse primo, pois satisfazia as duas condições frequentemente enunciadas em sala de aula: “um número é primo se for divisível por um e por ele mesmo”. Na graduação, também conheci um pouco da história dos números primos e dos mistérios em torno desses números. Contudo, foi apenas na pós-graduação que adquiri a maturidade Matemática necessária para compreender a relevância dessa sequência numérica e o motivo pelo qual o número 1 não é considerado primo.

Como professora, vejo a grande relevância da compreensão dos números primos durante toda a Educação Básica. Compreendo que o entendimento desses números facilitaria em muito a resolução de exercícios matemáticos corriqueiros. Assim, juntamente com o orientador deste trabalho de dissertação, definimos que seria realizada a presente pesquisa sobre os números primos.

Em complemento ao expresso no preâmbulo acima, cabe especificar que, os números, de modo geral, têm chamado a atenção de matemáticos, educadores e estudantes ao longo dos séculos. Dentre os números encontram-se, particularmente, os números primos, que são aqueles números naturais que possuem exatamente dois divisores: o 1 e eles próprios. Ao se examinar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nota-se que os números primos, apesar de sua importância, são introduzidos aos alunos durante o 6º ano de forma sucinta. E mais, após essa etapa, não há uma formalização teórica direta e mais abrangente que envolva os números primos. Contudo, eles são utilizados em atividades dentro de sala de aula em vários momentos subsequentes.

Ao se consultar profissionais da área e as pesquisas desenvolvidas sobre o tema no *site* Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), depreende-se que haja uma dificuldade por parte dos alunos em utilizar e compreender os números primos, mesmo que

estes sejam utilizados constantemente para determinar, por exemplo, mínimo múltiplo comum, operações de adição e de subtração de frações com denominadores diferentes, frações irredutíveis e problemas de divisibilidade. Nestes termos, considera-se que a compreensão dos números primos possa contribuir para a materialização de conceitos e auxiliar na significação das operações a eles relacionadas. Além disso, o trabalho com números primos pode aplacar a curiosidade dos alunos e auxiliar no desenvolvimento de seu raciocínio lógico.

A importância dos números primos vai além do ambiente educacional. Pereira e Teixeira (2020) afirmam que:

“[...] os números primos admitem um papel relevante nas coisas simples do dia a dia da sociedade e, portanto, podem ser abordados com mais ênfase e naturalidade no Ensino Fundamental. Não é conveniente falar apenas seus conceitos e definições sem abordar sua importância histórica e aplicabilidade, como se isso não fizesse parte da realidade do aluno” (PEREIRA; TEIXEIRA, 2020, p. 64123)

Corroborando com a afirmação acima, tem-se o exemplo da criptografia. Isto é, os números primos desempenham também um papel crucial na criptografia, que é a técnica na qual se usa números primos para se codificar mensagens que devem ser privadas. Esses algoritmos garantem que as informações não possam ser acessadas por ninguém, exceto pelo destinatário pretendido (SILVA, 2023). Essa singularidade dos números primos também influencia outras áreas como, por exemplo, a Teoria dos Números, a Computação, a geração de números aleatórios e a Matemática Aplicada; destacando-se sua relevância, tanto em contextos teóricos, quanto práticos.

Ao revisar os trabalhos da BDTD, relacionados ao tema, é possível observar que se dá destaque principal à “Teoria dos Números”, e às demonstrações associadas aos números primos e suas propriedades. Pode-se observar ainda que, as propostas de atividade que se pôde encontrar exploram fracamente a curiosidade do aluno e significância dos números primos, relegando o aspecto lúdico a um segundo plano. Depreende-se desta constatação que a materialização de conceitos deva ser deficitária.

Dessa forma, nesta pesquisa buscou-se responder a seguinte questão norteadora: “Como elaborar um material didático com números primos que fosse significativo e envolvente para alunos de diferentes faixas etárias da Educação Básica?”. Neste sentido, se criou um Almanaque intitulado “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”, no qual, tanto a definição de números primos, quanto as aplicações basilares que envolvem tais números, fossem trabalhadas por meio de atividades lúdicas, mas embasadas pelo rigor matemático característico e usual. A fim de se buscar a validação de tal material, este foi trabalhado em 7 turmas de Ensino

Médio da Escola Estadual São Vicente de Paula, em Sinop – MT. Após o trabalho, se efetuou uma sondagem junto aos alunos por meio de um questionário avaliativo. De posse dos questionários respondidos, se efetuou a tabulação dos dados e as posteriores análises, qualitativa e quantitativa.

Como material suplementar ao almanaque, se projetou e se implementou um *software* que materializa dois métodos de verificação de primalidade: “Crivo de Eratóstenes” e “Força Bruta”. O *software*, denominado Primus, além da verificação de primalidade preconizada, a cada sondagem realizada, gera uma lista de números primos e uma lista de números compostos, tendo por base o número fornecido pelo usuário. Tal *software* foi pensado com o objetivo de fornecer ao aluno um *feedback* quanto à primalidade de números naturais de interesse, atuando, por exemplo, como um coadjuvante ao almanaque produzido. Porém, dadas as suas potencialidades, o *software* pode ser utilizado em atividades não vinculadas ao almanaque. Cabe expressar por fim que, se implementou dois métodos de verificação de primalidade a fim de se mostrar ao usuário a discrepância entre métodos algoritmicamente distintos, mas que geram resultados idênticos. Neste caso, a discrepância é expressa pelos seus respectivos tempos de processamento. Ou seja, por meio dos tempos de processamento distintos, pode-se constatar, mesmo que indiretamente, as diferenças algorítmicas entre ambos os métodos.

1.1. Objetivos

A pesquisa empreendida buscou alcançar os seguintes objetivos, geral e específicos.

1.1.1. Objetivo Geral

A fim de responder à questão norteadora, expressa anteriormente, buscou-se, como objetivo geral, pesquisar os aspectos teóricos e práticos dos números primos com o intuito de elaborar um material didático significativo, envolvente e com aspectos lúdicos, passível de ser trabalhado com os alunos da Educação Básica. Em adição a isso, almejou-se projetar e implementar um *software* que pudesse efetuar a verificação de primalidade de um dado número e que fornece um *feedback* aos alunos que trabalhassem com o material elaborado, voltado aos números primos.

1.1.2. Objetivos Específicos

A fim de se atingir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram definidos:

- Realizar uma revisão da literatura pertinente sobre os números primos e suas nuances;

- Buscar por exercícios e atividades lúdicas relativas aos números primos;
- Elaborar um material didático com viés lúdico sobre os números primos (almanaque);
- Projetar e implementar, em C/C++, um *software (for Windows)* que conseguisse identificar se um dado número é primo e, adicionalmente, que fosse capaz de gerar listas de números primos e de números compostos;
- Fazer a experimentação do material didático gerado junto aos alunos;
- Coletar dados junto aos alunos e analisar qualitativamente e quantitativamente tais dados a fim de se obter a possível validação do material elaborado.

1.2. Estrutura do Trabalho

Esta dissertação é composta por 8 capítulos. Logo após a introdução, na qual se deu a contextualização do trabalho de pesquisa, tem-se o capítulo 2, onde se pode encontrar as bases teóricas para execução da pesquisa proposta. Nele se encontram conteúdos relativos aos números primos e à Educação Básica, trabalhos relacionados à pesquisa aqui descrita, tópicos sobre a vida e os trabalhos de Euclides e Eratóstenes, pormenores inerentes à criptografia e tópicos sobre Estatística Descritiva e Inferencial.

No capítulo 3 se descreve a metodologia executada, fornecendo ao leitor os pormenores e as justificativas das decisões tomadas.

O almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos” é apresentado e detalhado no capítulo 4. Por sua vez, o *software* Primus tem suas principais rotinas apresentadas e descritas no capítulo 5.

As análises de cunho qualitativo, que dizem respeito aos dados obtidos por meio da aplicação de questionário, constam no capítulo 6.

No capítulo 7 são apresentadas as análises estatísticas dos referidos dados. As análises são de cunho descritivo e inferencial e, assim como as análises de cunho qualitativo, se destinaram à validação do almanaque construído.

Ao final da dissertação, no capítulo 8, se encontram as principais conclusões que se pôde depreender quando da realização do trabalho de pesquisa aqui descrito.

2. EXPLORANDO NÚMEROS PRIMOS E TÓPICOS DE ESTATÍSTICA DESCRITIVA E INFERENCIAL

Este capítulo destina-se à apresentação da fundamentação teórica que alicerça a pesquisa realizada. Inicialmente discorre-se sobre a importância dos números primos no ensino de Matemática e no contexto da pesquisa realizada. Posteriormente, são explorados alguns conceitos basilares e históricos dos números primos, com destaque para os estudos de Euclides e Eratóstenes. Além disso, discute-se a aplicação dos números primos na criptografia RSA, incluindo a prática de criptografia de mensagens na antiguidade. O capítulo se encerra com a apresentação de tópicos de Estatística Descritiva e Inferencial, utilizada no âmbito das análises dos dados coletados, inerentes ao almanaque construído.

2.1. A Educação Básica e os Números Primos

A Educação Básica é uma fase crucial, na qual os alunos adquirem competências fundamentais em diversas disciplinas, incluindo a Matemática. Neste contexto, considera-se a teoria voltada aos números primos como um dos fatores que pode despertar a curiosidade dos alunos e entende-se que a sua compreensão facilite o aprendizado de conteúdos matemáticos posteriores. De acordo com as competências gerais expressas na BNCC, ao se ensinar tais conteúdos deve-se:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p.11).

Observando a relevância e o papel desses números para a compreensão de novos conceitos matemáticos e considerando que a BNCC aponta para a relevância em se ensinar esses números no 6º ano do Ensino Fundamental, espera-se que sejam desenvolvidas no aluno as seguintes habilidades:

(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (BRASIL, 2018, p.301)

Nestes termos, entende-se que todo e qualquer esforço que conduza o aluno a uma compreensão holística da Matemática e, particularmente, dos números primos, é uma ação válida e que deva ocorrer da melhor forma possível.

Ressalta-se que o ensino dos números primos na Educação Básica é considerado superficial, uma vez que, esses números são apresentados e trabalhados apenas no 6º ano. Tal

afirmação é corroborada por Farias (2016), que analisa seis livros didáticos de épocas diferentes do 6º ano e verifica que a forma como os números primos são abordados é leviana, deixando uma impressão de pouca importância para o leitor menos informado. De acordo com Farias (2016), nesses livros “(...) não há uma grande preocupação, pelo menos não tão aparente, com a sua conceituação, dando até a falsa impressão de pouca utilidade desse assunto para o restante da vida escolar do educando.” (FARIAS, 2016, p.15). Esta superficialidade pode ser um dos fatores que tem impactado negativamente o entendimento dos estudantes sobre os números primos. O estudo de Farias (2016) ainda sugere a necessidade de revisões curriculares e a inclusão de abordagens didáticas que enfatizem a relevância dos números primos. Vasconcelos (2000) complementa:

Ensinar Matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é, segundo Sebastião e Silva, como falar de cores a um daltônico: é construir no vazio. Especulações Matemáticas que, pelo menos no início, não estejam solidamente apoiadas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não o iluminam. É necessário fornecer experiências que encorajem e permitam aos alunos dar valor à Matemática, ganhar confiança nas suas capacidades Matemáticas, tornar-se em solucionadores de problemas matemáticos, comunicar matematicamente. (VASCONCELOS, 2000, p.5)

Em sua pesquisa, Vasconcelos (2000) reconhece ainda que os alunos geralmente possuem algumas dificuldades e defasagens de aprendizagem em Matemática e, em decorrência disso, a forma como a Matemática é apresentada nos livros didáticos acaba se tornando maçante e, por vezes, os alunos se sentem fadigados por desconhecerem termos e conceitos matemáticos que envolvem um único exercício. Onuchic (2008) faz a seguinte consideração:

“Ensinar” bem Matemática é um empenho complexo e não há receitas fáceis para se fazer isso. Não há um caminho único para se “ensinar” e “aprender” Matemática. Mudar nosso sistema radicalmente, querendo, como primeiro objetivo, atingir a vasta maioria dos estudantes é como que criar uma consciência do quê, do como e do porquê em Matemática. Tal consciência nos faz chegar a duas importantes razões para mudar: que os cidadãos que estão se formando hoje possam apreciar o papel penetrante da Matemática na cultura onde vivem; e que os indivíduos, que têm interesse em Matemática e talento para ela, possam ser expostos à sua verdadeira natureza e extensão. (ONUCHIC, 2008, p. 2)

Do comentário geral, depreende-se que a Educação Básica enfrenta desafios no ensino da Matemática, e diversos estudos buscam identificar e abordar essas lacunas para melhorar o engajamento e a compreensão dos alunos. Especificamente, este estudo buscou desenvolver um material didático significativo e lúdico sobre números primos para Educação Básica.

2.1.1. Trabalhos Relacionados: uma Análise Crítica

Entende-se que, o conceito e o uso de números primos não se limitam ao 6º ano e que, frequentemente, os professores necessitam utilizar esses números durante todo o Ensino Fundamental II e Médio. Logo, a fim de que a pesquisa aqui apresentada consistisse em uma proposta original que despertasse o interesse e a compreensão dos alunos acerca dos números primos, de forma a gerar uma imersão efetiva para a maior quantidade possível de alunos, buscou-se consultar e explorar as pesquisas já realizadas sobre o tema "Números Primos". Assim, realizou-se uma breve revisão da literatura, visando identificar estudos desenvolvidos na Educação Básica, que envolvessem este tema, a fim de se apreciar as principais atividades e metodologias de ensino utilizadas. Esta revisão foi realizada em três etapas:

- **1ª Etapa:** localização das fontes de trabalhos;
- **2ª Etapa:** análise e seleção de trabalhos;
- **3ª Etapa:** sintetização e interpretação de conteúdo.

Para realizar uma análise focada no ensino de números primos na Educação Básica, utilizou-se a Base de Dados de Teses e Dissertações (BDTD). A busca inicial foi realizada utilizando o filtro “Título” e palavra-chave "Números Primos", resultando na identificação de 35 trabalhos, distribuídos nos anos de 2013 a 2023. Buscando atender ao objetivo geral desta pesquisa, foram selecionados apenas os estudos que aplicaram conceitos de números primos na Educação Básica. Essa junção reduziu a cardinalidade do conjunto para apenas 4 (quatro) trabalhos, conforme o apresentado no Quadro 1. Esta seleção permitiu focar em pesquisas diretamente relacionadas ao ambiente educacional fundamental, oferecendo uma visão clara sobre os relatos das práticas e abordagens adotadas nos últimos anos.

Quadro 1 – Dissertações selecionadas

Autor (ano)	Título	Orientador	IES - PPG
Jezadaque Quintans (2020)	O ensino dos números primos inter-relacionados a conteúdos diversos através da resolução de problemas	Dra. Rosana Retsos Signorelli	Instituto de Ciências Matemáticas e de computação, Universidade de São Paulo – PROFMAT
Calos Eduardo de Carvalho Macedo (2019)	Números primos, nossos amigos únicos	Dra. Geraldine Góes Bosco	Instituto de Ciências Matemáticas e de computação, Universidade de São Paulo – PROFMAT
Frederico Torres de Moura (2018)	Números Primos: uma fórmula geradora	Dr. Robson Martins de Mesquita	Universidade Federal do Tocantins – PROFMAT
Edson Ribeiro Machado (2015)	Números primos: uma abordagem educacional	Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata	Universidade Federal do Amazonas – PROFMAT

Fonte: acervo da pesquisa (2024).

A dissertação de Quintans (2020) buscou responder à seguinte pergunta: "Seria possível aprofundar o conhecimento sobre números primos, ao longo do Ensino Fundamental

e Médio, inter-relacionando este conceito com os demais?". Inicialmente, a pesquisadora aplicou um questionário nas turmas de 7º ano e 8º ano do Ensino Fundamental, e 3º ano do Ensino Médio, em três escolas diferentes de São Miguel Paulista, com o objetivo de verificar o conhecimento atual dos alunos sobre números primos. Posteriormente, foi aplicada a uma das turmas de 7º ano duas atividades que envolviam os números primos, utilizando a metodologia de resolução de problemas. A pesquisadora concluiu que, de acordo com os resultados obtidos, é possível aprofundar o conhecimento sobre números primos por meio da resolução de problemas.

A dissertação de Macedo (2019) teve como proposta, apresentar os números primos por meio de vários exemplos e aplicações, tentando deixar os conceitos mais esclarecedores e motivadores a cargo dos leitores. O pesquisador apresenta e aplica uma sequência didática em uma turma de 9º ano, na cidade de Ribeirão Preto. As atividades da sequência didática tiveram como objetivo introduzir, de maneira lúdica e pouco tradicional, o conceito dos números primos, bem como, suas propriedades e aplicações. O autor destaca que a aplicação do material despertou um grande interesse nos alunos e houve um excelente nível de participação na turma na qual se trabalhou.

A dissertação de Moura (2018) teve como objetivo principal investigar os números primos e algumas das suas características e propriedades. O pesquisador desenvolveu um questionário com questões básicas sobre os números primos e o aplicou aos estudantes da terceira série do Ensino Médio na cidade de Formosa - GO, com o intuito de avaliar o conhecimento desses alunos sobre o tema. Após a aplicação do questionário inicial, o pesquisador esclareceu as dúvidas sobre os números primos e, em seguida, realizou uma nova avaliação. Ao final da aplicação dos questionários, foi observado um interesse crescente por parte dos alunos em relação ao assunto, demonstrando a satisfação em terem aprendido algo novo no campo da Matemática.

A dissertação de Machado (2015) buscou apresentar uma proposta de abordagem do tema dos Números Primos no Ensino Fundamental e Médio. A pesquisa desenvolveu-se fora do período normal das aulas, com 20 alunos do Ensino Fundamental e Médio do Colégio Militar de Manaus. O pesquisador considerou a experiência extremamente satisfatória e defendeu a necessidade de se dar um novo enfoque no ensino desse conteúdo. Sugeriu especialmente que se adotasse uma abordagem didática lúdica, que tornasse o tema mais atrativo e facilitasse a aprendizagem dos alunos. Além disso, foi observado que os estudantes enfrentam dificuldades em compreender conceitos como, congruência e organização dos números inteiros em classes

numéricas. Machado (2015) destacou ainda a falta de um estudo mais estruturado sobre números primos, números compostos e divisibilidade, apontando para a necessidade de se aprimorar o ensino desses conteúdos nas escolas de Ensino Fundamental e Médio.

De acordo com a leitura e a síntese dos trabalhos, foi possível elaborar o Quadro 2, no qual se ressalta a metodologia de ensino, a quem a metodologia foi aplicada e as atividades desenvolvidas em cada pesquisa.

Quadro 2 – Metodologia de ensino, aplicação e atividades desenvolvidas nas pesquisas analisadas.

Autor (ano)	Metodologia de Ensino	Aplicando a	Atividades Desenvolvidas
Quintans (2020)	Resolução de problemas	01 turma do 7º ano	Atividade 1: Razão, proporcionalidade direta e inversa; Atividade 2: Proporcionalidade, escalas, regras de três.
Macedo (2019)	Sequência didática	01 turma do 9º ano	Atividades 1: Crivo de Eratóstenes; Atividade 2: Representar os números numa disposição retangular; Atividade 3, 4, 5, 6, 7 e 8: Identificação de números primos e compostos, fatoração, divisores, quadrado perfeito.
Moura (2018)	Questionário	01 turma do 3 série do ensino médio	Atividade 1: Questionário diagnóstico sobre números primos; Atividade 2: Reaplicação do questionário, após sanar as dúvidas.
Machado (2015)	Sequência didática	01 turma, formada por alunos do Ensino Fundamental e Médio	Atividade 1: Leitura e debate da história dos primos; Atividade 2: Conceitos e aplicações dos números primos; Atividade 3 Avaliação e verificação dos exercícios.

Fonte: acervo da pesquisa (2024).

As pesquisas de Quintans (2020), Macedo (2019), Moura (2018) e Machado (2015) refletem uma clara necessidade de inovação e adaptação nas estratégias pedagógicas utilizadas para ensinar números primos na Educação Básica. Com base na análise realizada, observou-se que a principal metodologia empregada foi a sequência didática. Segundo Ugalde e Roweder (2020):

(...) a sequência didática surge como estratégia de metodologia inovadora da maneira de ensinar. Trata-se, portanto, de uma metodologia de ensino-aprendizagem centrada no aluno, que surgiu a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e que vem sendo adotada por professores de várias disciplinas. (UGALDE e ROWEDER, 2020, p.1)

Verificou-se que, as aplicações das pesquisas ocorreram de maneira variada entre as turmas do Ensino Fundamental e Médio, sendo que as atividades se concentraram principalmente na exploração dos conceitos e aplicações dos números primos. De modo geral, Quintans (2020), Macedo (2019), Moura (2018) e Machado (2015) ressaltam a relevância dos números primos durante o Ensino Fundamental II e Médio.

A presente revisão da literatura alcançou seu objetivo, o qual foi consultar e explorar

as pesquisas já realizadas sobre o tema "Números Primos" na Educação Básica. Foram identificados 35 trabalhos no *website* BDTD e destes apenas quatro foram aplicados na Educação Básica, indicando que, embora existam diversas propostas e iniciativas, há uma necessidade evidente de aumentar a frequência e a profundidade com que esse tema é tratado na Educação Básica.

Destaca-se que nenhuma das pesquisas selecionadas¹ foi desenvolvida no 6º ano, apesar de uma habilidade estar prevista para esse ano. Isso evidencia a necessidade de se incluir a habilidade e o estudo dos números primos nos anos subsequentes, garantindo uma compreensão contínua desse conceito ao longo da Educação Básica.

Para estudos futuros, entende-se que deva ser feita uma análise mais aprofundada das construções teóricas e das atividades propostas pelos autores¹, bem como, a identificação de pontos de melhoria e possíveis adaptações nas metodologias e materiais didáticos.

Assim, destaca-se que apesar da crescente atenção acadêmica dada aos números primos nos últimos anos, as aplicações práticas na Educação Básica ainda são relativamente escassas. Esta revisão apontou para uma oportunidade valiosa de integrar e aprofundar o estudo dos números primos na Educação Básica, desenvolvendo materiais e abordagens pedagógicas que possam fortalecer a compreensão e o interesse dos alunos ao longo da Educação Básica.

2.2. Aritmética e os Números Primos

Para uma maior e mais efetiva compreensão dos números primos e das concepções a eles associadas, é fundamental que sejam apresentados alguns conceitos matemáticos basilares. Esses conceitos fornecerão as condições necessárias para se entender o desenvolvimento e os avanços conceituais dos números primos. Uma complementação teórica mais aprofundada é apresentada em seções posteriores.

A Aritmética, por sua vez, é uma das áreas fundamentais da Matemática, focando-se na manipulação de números por meio de operações básicas como adição, subtração, multiplicação e divisão. Desde as civilizações antigas, a Aritmética tem sido essencial para o desenvolvimento de outras áreas da Matemática e para a resolução de problemas cotidianos. Um dos conceitos mais intrigantes dentro da Aritmética é o dos números primos.

O conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$, é definido como o conjunto de todos os números inteiros positivos. Formalmente, representa-se os naturais por:

¹ Quintans (2020), Macedo (2019), Moura (2018) e Machado (2015),

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Se n é um número natural, os números $n \cdot 1, n \cdot 2, n \cdot 3 \dots$ são chamados de *múltiplos* de n . Os múltiplos de “um” são todos os números naturais. Os múltiplos de 2 são todos os números pares. Os números naturais que não são pares, são chamados ímpares.

Observe a seguir a sequência dos números múltiplos de três:

$$m(3): 3, 6, 9, 12, \dots$$

Como mostrado acima, $m(3)$ denota os múltiplos de 3. Para verificar se um número natural é múltiplo de outro, basta efetuar uma divisão entre eles, se a divisão for exata (resto igual a zero: “ $r = 0$ ”), então o número é múltiplo.

Adicionalmente, denota-se por $l = [a, b]$ e se denomina mínimo múltiplo comum (*mmc*), de dois naturais a e b , o menor valor que seja divisível por a e por b . Cada múltiplo de l é um múltiplo de a e de b . Se c é um múltiplo comum de a e b , então c é um múltiplo de l . Por exemplo, sejam a e b iguais a 12 e 15. Eles têm um múltiplo comum que é 12×15 e, dentre todos os múltiplos comuns, existe um menor de todos, o *mmc*. Uma das formas de calculá-lo é escrever a lista de múltiplos de 12 e uma lista dos múltiplos 15.

- Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, ...
- Múltiplos de 15: 15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, ...

Neste caso, o menor múltiplo comum é 60. Portanto, $[12, 15] = 60$.

Dados dois números naturais a e b , com $a \neq 0$, diz-se que a divide b , escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$, tal que $b = a \cdot c$. Note que a notação $a|b$ representa uma sentença que diz ser verdade que existe c , tal que $b = a \cdot c$. A negação dessa sentença é representada por $a \nmid b$, significando que não existe nenhum número natural c , tal que $b = a \cdot c$. Todo número natural $n > 1$ têm os divisores 1 e n e, às vezes, outros divisores (HEFEZ, 2016).

Com base nisso, define-se que os números primos são números naturais maiores que 1 que tem somente dois divisores naturais distintos: 1 e ele mesmo. Ou seja, um número natural p é primo se ele só puder ser escrito na forma: $p = 1 \cdot p$ ou $p = p \cdot 1$.

Com base no acima exposto, pode-se apresentar as seguintes elucubrações. O número 2 é primo, pois seus únicos divisores naturais são 1 e 2. Já o número 6 não é primo, pois além do 1 e do 6, ele também é divisível por 2 e por 3. De forma geral, se um número n não é primo, então ele pode ser expresso como o produto de dois números naturais, ambos maiores que 1 e menores que n . Neste caso, n é chamado de número composto. Note que, o número 1 não é primo e não é composto.

O intuito do conteúdo apresentado nesta seção foi situar o leitor sobre algumas notações e conceitos matemáticos que contribuíram para a compreensão da trajetória dos números primos ao longo do tempo.

2.3. Aspectos Históricos: a Gênese

Os números primos permeiam expressivamente a história da Matemática, com registros que remontam a milênios. Um exemplo notável deste fato é o "Osso de Ishango" (Figura 1), que data de cerca de 20.000 a.C. e exibe vestígios intrigantes de um conhecimento primitivo sobre números primos. Este artefato foi encontrado pelo belga Jean Heinelin de Braucourt em 1960 em Ishango, na África Central, e é reconhecido como o segundo objeto matemático mais antigo já descoberto. A descoberta do Osso de Ishango sugere que os povos primitivos tinham concepções Matemáticas. Esse artefato proporciona um vislumbre das concepções antigas sobre esses números.

Figura 1 – Osso de Ishango, exposto no Real Instituto de Ciências Naturais, na Bélgica.

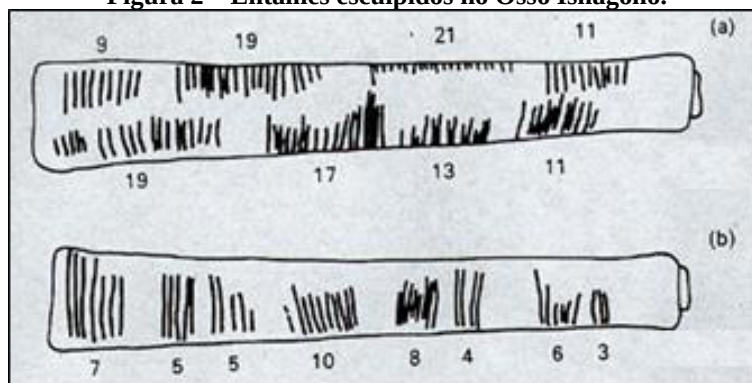


Fonte: Wikipédia².

Tal osso possui marcações que sugerem uma lista dos números primos no intervalo de 10 a 20, ou seja, 11, 13, 17 e 19 (Figura 2 (a)). Estudos recentes com microscópios revelaram mais marcações, levando à compreensão de que o osso também funcionava como um contador de fases lunares.

² Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Osso_de_Ishango>. Acesso em: 04 julh. 2024

Figura 2 – Entalhes esculpidos no Osso Ishagono.



Fonte: Math Buffalo³.

Conforme Viera (2023), a verdadeira exploração dos números primos remonta à cultura chinesa por volta de 1.000 a.C.. Na cultura chinesa da época eram atribuídas características femininas aos números pares e masculinas aos ímpares, reservando a designação de "números machões" aos números primos (VIEIRA, 2023).

Esse entendimento dos números primos ao longo das diferentes épocas evidência como o interesse por esses números impulsionou avanços significativos na Matemática. A sistematização e o estudo mais aprofundado dos números primos, contudo, só começaram a ganhar forma com o trabalho de Euclides, “Os Elementos”.

2.4. Euclides de Alexandria: Pai da Geometria e suas Contribuições para a Aritmética

Euclides, também conhecido como Euclides de Alexandria, foi um matemático grego que viveu durante o período helenístico, aproximadamente entre 300 a.C. e 260 a.C. (Figura 3). Este período foi marcado pela difusão da cultura grega após as conquistas de Alexandre, o Grande, que criou um vasto império que se estendia da Grécia ao Egito, indo até a Índia. Euclides viveu em Alexandria, que abrigava a famosa Biblioteca de Alexandria, uma das maiores e mais importantes bibliotecas do mundo antigo, e o Museu de Alexandria, que funcionava como um centro de pesquisa e aprendizado (EVES, 2011).

³ Disponível em: <<http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html>>. Acesso em: 05 jun. 2024

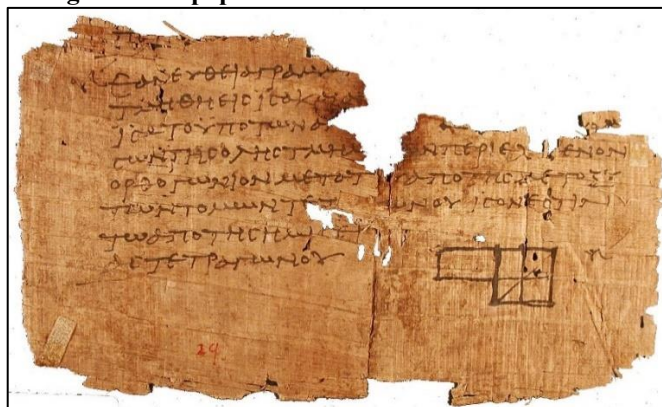
Figura 3 – Representação artística de Euclides.



Fonte: Britannica⁴.

A coleção "Os Elementos" exerceu uma influência significativa na Matemática. Durante séculos, essa obra foi o principal livro-texto utilizado no ensino de Geometria em escolas e universidades, consolidando seu papel essencial na educação Matemática. Além de "Os Elementos", Euclides escreveu outras obras, incluindo "Data", "Sobre as divisões de figuras", "Fenômenos" e "Óptica", que tratam de diversos tópicos matemáticos e científicos.

Figura 4 – Fragmento de papiro “Os Elementos” datado de cerca de 100 d.C.



Fonte: Personal Math⁵.

Um dos diagramas mais antigos existentes das obras de Euclides é o fragmento de papiro encontrado em Oxirrínco, em 1896-97, pela expedição de B.P. Grenfell e A.S. Hunt (Figura 4). O fragmento acompanha a proposição 5 do Livro II, como o material e a caligrafia

⁴ Disponível em: <<https://www.britannica.com/topic/Elements-by-Euclid>>. Acesso em: 24 jun. 2024.

⁵ Disponível em: <<https://personal.math.ubc.ca/~cass/Euclid/papyrus/>>. Acesso em: 04 julho. 2024.

não são de qualidade profissional de escriba, foi conjecturado que foi escrito por alguém para uso privado.

Os números para Euclides eram entendidos como magnitudes geométricas, ou seja, comprimentos, áreas e volumes que podiam ser comparados entre si. Na obra "Os Elementos", de Euclides, os números não eram considerados abstrações, como na Matemática moderna, mas sim como representações de quantidades geométricas. Ele tratava os números como segmentos de reta, áreas de figuras ou volumes de sólidos, que podiam ser somados ou multiplicados da mesma forma que se pode somar ou multiplicar comprimentos ou áreas.

Esse entendimento geométrico dos números refletia a concepção Matemática da época, na qual a Aritmética e a Geometria estavam intimamente ligadas. Dessa forma, Euclides demonstrou teoremas e expressou definições utilizando a Geometria e, especificamente, no Livro VII (Proposição 32), Euclides definiu um número primo. A clareza e precisão da definição permitiram que ela resistisse ao tempo, permanecendo essencialmente inalterada. Nela se diz:

Todo número ou é primo ou é medido por algum número primo.

Seja o número A; digo que o A ou é primo ou é medido por algum número primo.

Se, por um lado, de fato, o A é primo, o prescrito acontecerá. Se, por outro lado, é composto, algum número primo o medirá.

Portanto, todo número ou é primo ou é medido por algum número primo; o que era preciso provar. (EUCLIDES, tradução de Irineu Bicudo, 2009, p.293)

A

Em outras palavras, um número natural maior do que 1, que só possui exatamente dois divisores 1 e ele próprio é chamado de número primo. Além de definir números primos, Euclides demonstrou que não existe uma coleção finita de números primos que contenha todos eles (Proposição 20, Livro IX). Seu argumento é simples, mas impactante.

Os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos.

Sejam os números primos que tenham sido propostos A, B, C; digo que os números primos são mais numerosos do que os A, B, C.

Fique, pois, tomado o menor medido pelos A, B, C e seja o DE, e fique acrescida a unidade DF ao DE.

Então, o EF ou é primo ou não. Primeiramente, seja primo; portanto, os números primos A, B, C, EF achados são mais numerosos do que os A, B, C.

Mas, então, não seja primo o EF; portanto, é medido por algum número primo. Seja medido pelo primo G; digo que o G não é o mesmo que algum dos A, B, C. Pois, se possível, seja. Mas os A, B, C medem o DE; portanto, o G também medirá o DE. E também mede o EF; e o G, sendo um número, medirá a unidade DF restante; o que é absurdo. Portanto, o G não é o mesmo que algum dos A, B, C. E foi suposto primo. Portanto, os números primos achados, A, B, C, G são mais numerosos do que a quantidade que tenha sido proposta dos A, B, C; o que era preciso provar. (EUCLIDES, tradução de Irineu Bicudo, 2009, p.343)

A B C
E D F

Essa prova não só estabelece a infinitude dos números primos, mas também exemplifica a beleza e a profundidade do pensamento matemático de Euclides, sendo uma referência fundamental na teoria dos números até os dias atuais.

2.4.1. Algoritmo de Euclides

Na Aritmética quando um número natural a não divide o número natural b , é sempre possível efetuar a divisão de b por a , com resto (r). Assim, tem-se que:

Teorema 1: Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r , tais que $0 \leq r < a$ e $b = a \cdot q + r$. Existem dois únicos números q e r com as propriedades indicadas acima (RIBENBOIM, 2015, p. 10).

Este teorema é a base do algoritmo de Euclides, que permite encontrar o máximo divisor comum (mdc) entre dois números. A seguir, demonstra-se o Teorema 1 expresso acima.

Os números

$$a = 1 \cdot a < 2 \cdot a < 3 \cdot a < \dots$$

estão crescendo. Então existe um número q tal que b ainda é maior ou igual $q \cdot a$, mais ainda menor que $(q + 1) \cdot a$. Logo,

$$q \cdot a \leq b < (q + 1) \cdot a.$$

Subtraindo $q \cdot a$ temos:

$$0 \leq b - q \cdot a < a.$$

Seja r igual ao número $b - q \cdot a$, então,

$$0 \leq r < a \text{ e } b = q \cdot a + r. \blacksquare$$

Pelo Teorema da divisão Euclidiana, tem-se, como exemplo, que:

- $12 \nmid 45$, pois $45 = 3 \cdot 12 + 9$ e $0 \leq 9 < 12$
- $15 \mid 45$, pois $45 = 3 \cdot 15 + 0$ e $r = 0$.

Relaciona-se à definição de divisibilidade e de resto, a definição de congruência modular ou congruência módulo m , dada por:

Definição: Seja m um número natural. Tem-se que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m , escreve-se $a \equiv b \pmod{m}$. (Hefez, 2014, p. 192).

Segundo Hefez (2014), a congruência módulo m pode facilitar a realização da divisão de números grandes, o que é algo desejável, principalmente quando não se dispõe de dispositivos eletrônicos para tal fim.

2.4.2. Máximo Divisor Comum

Dados dois números inteiros positivos a e b , eles certamente têm pelo menos um divisor comum, o “1”. Como todos os divisores comuns de a e b são menores ou iguais a a e/ou b , então, existe o máximo divisor comum (mdc) de a e b , este número é designado por (a, b) (RIBENBOIM, 2015).

Se a e b não são primos entre si, o Algoritmo de Euclides pode ser utilizado para determinar o mdc . O método consiste em continuar o processo de divisão, utilizando a e r como novos termos, até que o resto seja zero. O último divisor não nulo será o mdc entre a e b . Por exemplo, considere os números 72 e 27, pelo algoritmo de Euclides temos que:

$$72 = 2 \cdot 27 + 18$$

dividindo o 27 pelo resto 18, tem-se:

$$27 = 1 \cdot 18 + 9$$

posteriormente, dividindo 18 pelo resto 9:

$$18 = 2 \cdot 9 + 0$$

Assim, o número 9 é o mdc de 72 e 27, ou $(72, 27) = 9$.

Em termos geométricos, Euclides descreveu o Algoritmo de Euclides, nas proposições 1 e 2 do Livro VII. Na proposição 1, Euclides estabelece um critério para decidir quando dois números a e b são primos entre si, ou seja, quando o mdc entre eles é 1. Já na proposição 2, Euclides apresenta o método para determinar a maior medida comum entre dois segmentos que não sejam primos entre si, o que corresponde ao cálculo do mdc na Aritmética, mostrado anteriormente.

2.4.3. Teorema Fundamental da Aritmética

O Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) afirma que qualquer número inteiro positivo pode ser decomposto de maneira única em um produto de números primos (PADILHA, 2013). Embora a ideia central do teorema já estivesse implícita em trabalhos antigos, a prova completa só foi apresentada em 1801 por Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss, um dos matemáticos mais influentes da história, formalizou e consolidou a compreensão desse conceito fundamental da teoria dos números. Assim:

Dados dois números primos p e q e um número inteiro a qualquer, decorrem da definição de número primo acima os seguintes fatos:

Se $p|q$, então $p = q$.

De fato, como $p|q$ e sendo q primo, tem-se que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que $p > 1$, o que acarreta $p = q$.

Se $p \nmid q$, então $(p, q) = 1$.

De fato, se $(p, a) = d$, tem-se que $d|p$ e $d|a$. Portanto, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois $p \nmid a$ e, conseqüentemente, $d = 1$.

Um número maior do que 1 e que não é primo será dito composto.

Portanto, se um número natural $n > 1$ é composto, existirá um divisor natural n_1 de n tal que $1 < n_1 < n$. Logo, existirá um número natural n_2 tal que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n_2 < n$.

Por exemplo, 2, 3, 5, 7, 11 e 13 são números primos, enquanto 4, 6, 8, 9, 10 e 12 são compostos.

Do ponto de vista da estrutura multiplicativa dos naturais, os números primos são os mais simples e ao mesmo tempo são suficientes para gerar todos os números naturais, logo, todos os números inteiros não nulos, conforme o Teorema Fundamental da Aritmética (HEFEZ, 2016, p. 122).

Complementando o exposto acima, tem-se o seguinte teorema:

Teorema: Todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Basicamente, a fatoração única consiste em duas propriedades: existência e unicidade. Existência significa que um elemento está representado como um produto finito e irredutível e, unicidade, significa que esta representação é única em certo sentido. A Fatoração única apareceu pela primeira vez como uma propriedade dos números naturais. Esta propriedade é conhecida hoje como o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) (FONSECA, MOTEIRO, FONSECA, 2021, p. 72).

Embora o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) não seja explicitamente mencionado em "Os Elementos" de Euclides, o Livro VII contém duas proposições muito significativas, a Proposição 30 e a Proposição 31, que estão intimamente relacionadas com o teorema:

30. Caso dois números, sendo multiplicados entre si, façam algum, e algum número primo meça o produzido deles, medirá também um dos do princípio.

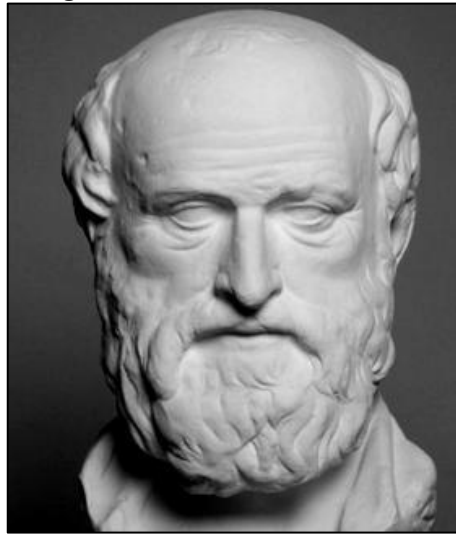
31. Todo número composto é medido por algum número primo. (Euclides, tradução de Irineu Bicudo, 2009, p.291)

Segundo Fonseca, Monteiro e Fonseca (2021), a demonstração do TFA pode ser abordada através da Proposição 31, que garante a existência de uma representação única para qualquer número natural maior que 1 como um produto de números primos. A Proposição 30, por sua vez, complementa essa ideia ao estabelecer a unicidade dessa representação, confirmando que tal decomposição é exclusiva para cada número.

2.5. O Crivo de Eratóstenes: Um Método Eficaz para Encontrar Números Primos

Eratóstenes de Cirene (276 a.C. a 194 a.C.), ilustrado pela Figura 5, viveu no mesmo período de Euclides. Nascido em Cirene, uma colônia grega na atual Líbia, Eratóstenes foi um polímata, conhecido por suas realizações em diversos campos como, Matemática, Geografia, Astronomia, Filosofia e poesia.

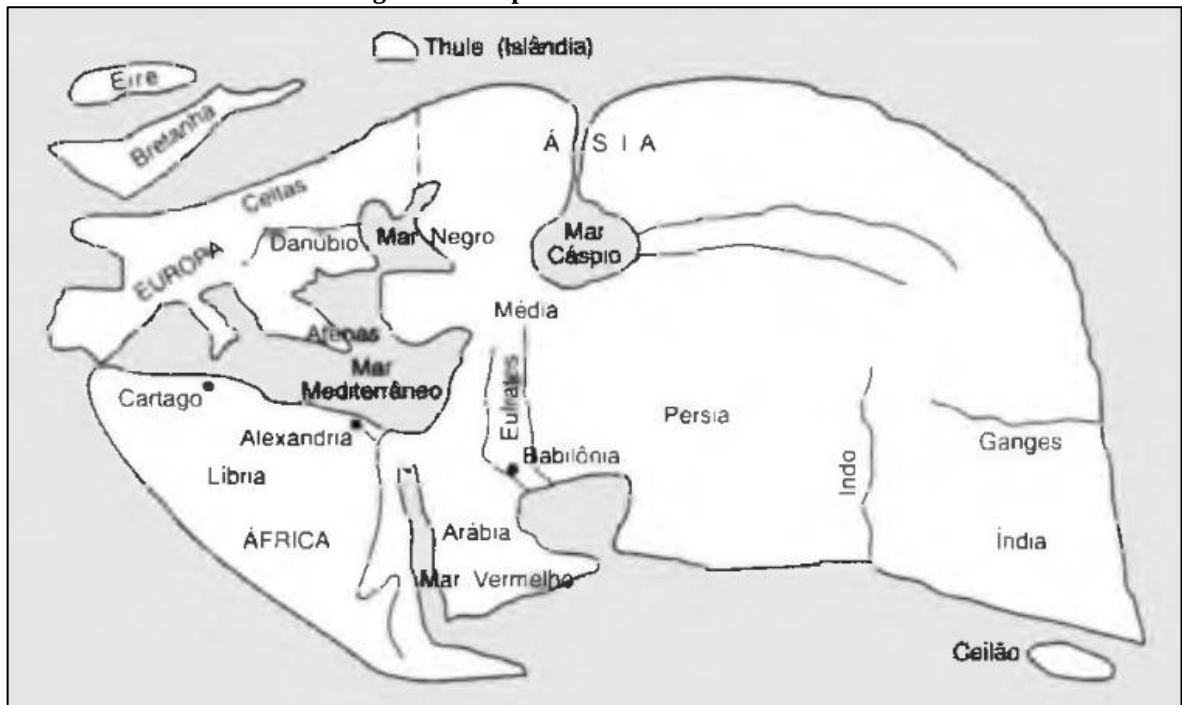
Figura 5 – Eratóstenes de Cirene.



Fonte: Jerfferson E V Ramos⁶.

Ele estudou em Atenas e, mais tarde, foi convidado por Ptolomeu III a se tornar o diretor da Biblioteca de Alexandria e tutor de seu filho (EVES, 2011). Além de desenvolver o Crivo que leva seu nome, suas contribuições à Geografia foram notáveis. Eratóstenes foi o primeiro a calcular a circunferência da Terra com impressionante precisão, utilizando apenas a Geometria e observações solares.

Figura 6 – Mapa do mundo de Eratóstenes.



Fonte: Eves (2011, p. 198).

⁶ Disponível em: <<https://www.suapesquisa.com/quemfoi/eratostenes.htm>>. Acesso em: 04 julho. 2024.

Eratóstenes também criou um mapa do mundo conhecido em sua época (Figura 6), desenvolveu um calendário que incluía anos bissextos e propôs um sistema de latitude e longitude que teve uma profunda influência na Cartografia.

Apesar dos poucos detalhes pessoais sobre sua vida, sabe-se que ele foi um dos maiores eruditos de sua época, respeitado por sua vasta gama de conhecimentos. Suas obras e invenções, como o Crivo de Eratóstenes, destacam sua habilidade em formular métodos matemáticos eficientes.

O Crivo de Eratóstenes é um dos métodos mais antigos e eficientes para encontrar números primos. O Crivo facilitou a identificação de números primos na antiguidade, e é ensinado e aplicado em diversas áreas da Matemática e da Ciência da Computação até os dias de hoje.

O processo para encontrar números primos com o Crivo de Eratóstenes é marcar e eliminar os múltiplos de cada número primo à medida que avança em uma sequência de números. Para ilustrar esse método, considere os números de 1 a 30, apresentados abaixo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Inicialmente, elimina-se o 1. Logo, o primeiro número não marcado é o 2, que é primo. Marca-se todos os múltiplos de 2 (em rosa) na lista:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

O próximo número não marcado é o 3, que é primo. Marca-se todos os múltiplos de 3 (em laranja) na lista, repetindo esse processo para o 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Observe que, a partir da retirada dos múltiplos de 5, todos os primos até 30 já estão definidos. Percebe-se que, no crivo de Eratóstenes existe um nível maior de inteligência algorítmica. Ou seja, a estratégia incorporada ao seu algoritmo demanda um esforço muito menor do que se, simplesmente se executasse a busca exaustiva. Entende-se que a busca exaustiva é a estratégia que integra o algoritmo de Força Bruta, que verifica a primalidade de um determinado número por tentativa e erro, testando, como divisor de tal número, todos os valores menores que ele.

A eficácia do Crivo de Eratóstenes está relacionada ao fato de que, ao marcar os múltiplos de cada número, se elimina os números compostos da lista, focando a busca apenas nos números primos. Isso reduz significativamente a quantidade de números a serem verificados, tornando o método bastante eficiente, especialmente para encontrar primos em segmentos relativamente pequenos. Pode-se concluir o seguinte resultado pelo crivo de Eratóstenes (RIBEIRO, 2013): Se $n \in \mathbb{N}$ não possui nenhum divisor $r \in \mathbb{N}$, tal que $r < \sqrt{n}$, então $n \in P$ (i.e., n é primo).

A partir do crivo de Eratóstenes pode-se obter uma fórmula maljeitosa para determinar o número de primos inferiores a n , quando se conhecem os primos inferiores a $\sqrt{n}$. Essa fórmula foi consideravelmente aprimorada em 1870 por Ernst Meissel que conseguiu mostrar que o número de primos inferiores a 10^8 é 5 761 455. O matemático dinamarquês Bertelsen prosseguiu esses cálculos e anunciou em 1893 que o número de primos abaixo de 10^9 é 50 847 478. Em 1959 o matemático americano D. H. Lehmer mostrou que esse último resultado não é correto (o número encontrado por ele foi 50 847 534); Lehmer mostrou também que o número de primos abaixo de 10^{10} é 455 052 511. (EVES, p.625)

Cabe especificar que, não há nenhum procedimento prático para testar se um número grande é primo, apesar de, ao longo da história, matemáticos como, Fermat, Mersenne e outros, terem dedicado grandes esforços para desenvolver métodos capazes de identificar números primos. Fermat, por exemplo, formulou o Pequeno Teorema de Fermat, que se tornou uma base importante para testes de primalidade. Mersenne, por sua vez, se dedicou ao estudo de números primos da forma $2^n - 1$ com $n \in \mathbb{N}$, conhecido como primos de Mersenne. No entanto, um método de verificação de primalidade totalmente efetivo ainda é um assunto em aberto.

2.6. Criptografia

Buscando por aplicações dos números primos pôde-se chegar à criptografia. Etimologicamente, a palavra criptografia⁷ se originou do grego, sendo formada pela união das palavras *kruptós*, que significa “secreto” ou “oculto”, e *graphía*, que quer dizer “escrita”. Portanto, no sentido literal a palavra criptografia significa “escrita secreta”.

A ideia de enviar mensagens secretas, nasceu da necessidade de guardar informações principalmente durante a diplomacia e transições militares. A relevância de não se revelar segredos e estratégias levou ao desenvolvimento de códigos, cifras e técnicas para mascarar uma mensagem, possibilitando apenas ao destinatário ler o conteúdo (MALAGUTTI, BEZERRA e RODRIGUES, 2010).

⁷ Disponível em: <<https://www.significados.com.br/criptografia/>>. Acesso: 04 julho 2024.

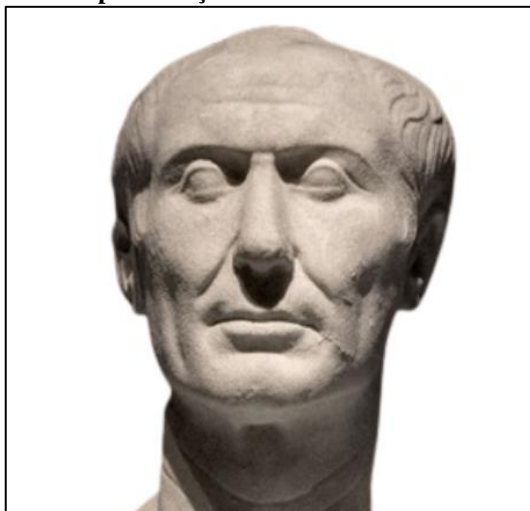
Atualmente, utiliza-se a criptografia para preservar informações como dados pessoais, transações financeiras, comunicações confidenciais e documentos sensíveis. Tal técnica é crucial para a privacidade pessoal e profissional, permitindo que indivíduos e organizações compartilhem informações sensíveis sem medo de interceptação ou espionagem.

Nas subseções que seguem, se discorre um pouco mais sobre as origens da criptografia, buscando se fazer um resgate histórico dessa ideia que, mais recentemente, abarca fortemente os números primos.

2.6.1. *Cifra de César*

Caio Júlio Cesar (ver Figura 7) nasceu na cidade de Roma (100 a.C.) e foi um militar, político e advogado. Como um líder romano, desempenhou um papel crucial no processo de transição do modelo republicano para o Império. Destacou-se principalmente no serviço militar, onde foi responsável pela expansão territorial do domínio romano (FUNARI, 2002).

Figura 7 – Representação artística da face de Júlio César.



Fonte: Wikimedia Commons.

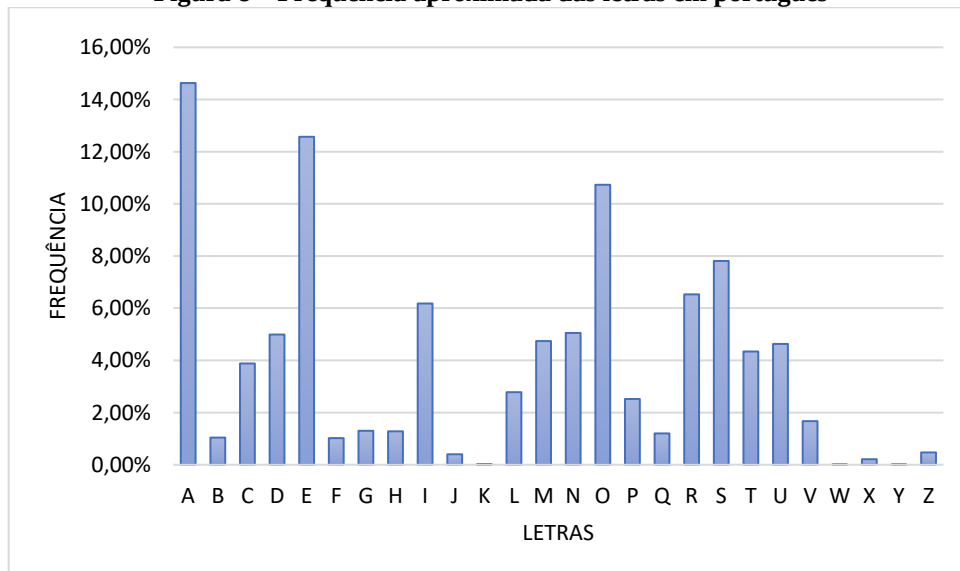
Durante o serviço militar Júlio César desenvolveu uma forma de comunicação com seu exército, conhecida como a Cifra de César. Esse método inicialmente consistia em substituir cada letra do alfabeto por outras letras, de modo a cifrar o texto que se desejava enviar. Dessa forma, a menos que se soubesse da correspondência biunívoca utilizada por César, seria difícil se chegar, em tempo hábil, à mensagem enviada.

Por exemplo, a mensagem “NUMEROS PRIMOS” se tornaria “QXPHURV SULPRV”, se substituíssem cada letra da mensagem original por outra, três posições a frente, conforme a correspondência expressa abaixo.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Cifrar uma mensagem utilizando esse método é relativamente fácil, mas descobrir o código e decifrar a mensagem é um desafio, uma vez que, o alfabeto pode ser permutado em $26!$ maneiras, resultando em uma quantidade muito grande de permutações entre as letras.

Figura 8 – Frequência aproximada das letras em português



Fonte: adaptado Wikipédia⁸.

Em meio aos conflitos, desenvolveu-se um método eficaz para se decifrar mensagens com um número razoável de letras. Este método consiste em realizar o estudo da frequência relativa aproximada das letras do alfabeto usadas em um idioma. Assim, para decifrar uma mensagem, pode-se considerar a frequência com que cada letra aparece no texto codificando e comparar com a frequência das letras do dito idioma. Logo, usando essas frequências torna-se viável decifrar mensagens que utilizam a técnica de substituição das letras (Cifra de César). O gráfico da Figura 8 exemplifica a frequência de cada letra em português.

Note que este método só é eficiente se a mensagem não for curta. Caso ela seja curta, existe uma grande chance de que a frequência das letras contidas na mensagem seja totalmente diferente daquela obtida a partir do idioma, tornando a decifração mais difícil.

2.6.2. Criptografia RSA (Rivest Shamir Adleman)

A ideia de desenvolver um método seguro e eficiente para manter mensagens e informações seguras levou ao desenvolvimento de diferentes métodos para cifrar mensagens ao

⁸ Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%A2ncia_de_letras>. Acesso em: 10 julho. 2024.

longo da história. Alguns dos métodos mais conhecidos incluem a cifra de César, visto anteriormente, a cifra de Vigenère, a cifra de substituição e a cifra de transposição. Cada um desses métodos apresenta suas próprias características e níveis de segurança. No entanto, com o avanço da criptografia moderna e o uso de algoritmos complexos, novos métodos foram desenvolvidos para garantir uma proteção ainda maior dos dados e informações sensíveis.

Especificamente, Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman desenvolveram um método eficiente para cifrar mensagens: o algoritmo de criptografia RSA. Ronald Rivest (nascido em 1947) é um americano matemático e criptologista. Adi Shamir (nascido em 1952) é um israelense matemático e criptologista. Por sua vez, Leonard Adleman (nascido em 1945) é um pesquisador americano em Ciência da Computação Teórica e professor de Ciência da Computação e Biologia molecular na Universidade do Sul da Califórnia (icour.fr⁹). Na Figura 9, pode ser vista uma foto dos três pesquisadores.

Figura 9 – Registro fotográfico de Rivest, Sherman e Adleman.



Fonte: Clubes obmep¹⁰

A criptografia RSA, nomeada pelas iniciais de seus três idealizadores, Rivest, Shamir e Adleman, é amplamente utilizada para a transmissão de dados de forma segura. Descrito publicamente em 1977, o algoritmo RSA é um criptosistema de chave pública que garante a segurança das informações.

⁹ Disponível em: <https://www.icour.fr/ELeveSeconde/2nde2/rsa_legrand/index.html>. Acesso em: 15/07/2024.

¹⁰ Disponível em: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/fatorando-de-um-jeito-diferente/>>. Acesso em: 04/07/2024

Em um sistema de criptografia RSA, existem duas chaves distintas que desempenham funções complementares. A primeira chave é usada para cifrar as mensagens e pode ser compartilhada publicamente, sendo por isso chamada de chave pública. Por outro lado, para decifrar essas mensagens, é necessária uma segunda chave, que deve permanecer em segredo e ser conhecida somente pelo destinatário. Esta é chamada de chave privada.

Diante do preâmbulo expresso acima, a seguir se apresenta o processo de codificação de mensagens em quatro etapas, utilizando o algoritmo RSA.

1ª Etapa: Pré-codificação

No processo de pré-codificação, as letras ou símbolos da mensagem são associados a números distintos, o que significa que cada letra (caractere) é substituída por um valor numérico específico. Para evitar ambiguidades entre as letras e os números, é necessário fazer cada letra corresponder a um número de pelo menos dois algarismos. É importante garantir que a associação entre letras e números seja clara e unívoca, para que a decodificação posterior seja feita corretamente. Por exemplo, a letra 'A' pode ser representada pelo número 10, 'B' pelo número 11, e assim por diante.

2ª Etapa: Chaves

Inicialmente, são escolhidos dois números primos distintos, denotados por p e q , que servirão como chaves privadas. Em seguida, calcula-se n , que é a chave pública, sendo n o produto de p e q . Depois, escolhe-se um número natural c , também faz parte da chave pública. Este número deve estar dentro do intervalo $1 < c < (p - 1)(q - 1)$. Dessa forma, o sistema RSA utiliza esses parâmetros para criptografar uma mensagem.

3ª Etapa: Blocos

Esta etapa consiste em quebrar em blocos (b) o número formado pela mensagem pré-codificada na 1ª etapa, sendo os blocos números naturais maiores que 0 e menores que n . Note que a maneira de escolher os blocos não é única e os blocos não precisam sequer ter mesmo tamanho. Não é permitido escolher um bloco que comece por 0, pois isso traria problemas na decodificação, já que não se pode distinguir o bloco 021 do bloco 21.

4ª Etapa: Codificação

Para criptografar cada bloco “ b ” da mensagem, deve se determinar um bloco “ a ” correspondente, tal que:

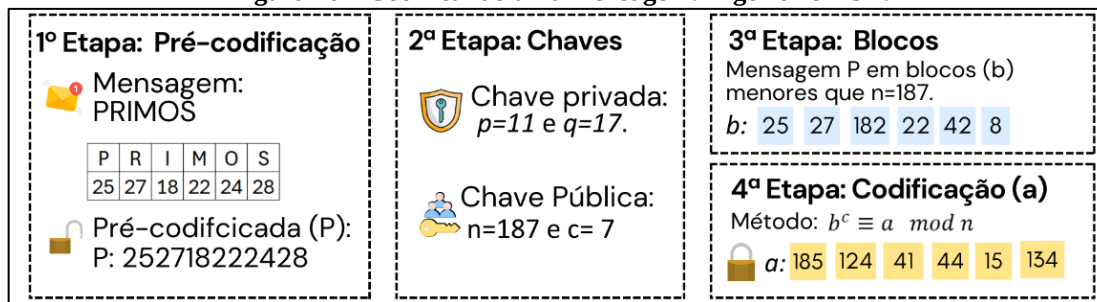
$$b^c \equiv a \pmod{n} \quad (1)$$

Observe que “ a ” é um resíduo (resto) de b^c módulo (por) n . Os blocos codificados são essenciais para garantir a segurança da mensagem. Um ponto crucial do processo é que,

após a codificação, os blocos não podem ser reunidos para formar um único número longo. Se isso ocorrer, a decodificação da mensagem se tornará impossível.

Buscando exemplificar o método de codificação de uma mensagem utilizando o algoritmo RSA, utiliza-se como exemplo a mensagem: PRIMOS. Para a melhor compreensão deste método, ilustra-se a codificação de mensagens, na Figura 10, na qual os 4 passos acima podem ser verificados.

Figura 10 – Codificando uma mensagem: Algoritmo RSA.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Utilizou-se a seguinte tabela para realiza a pré-codificação da mensagem “PRIMOS”.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35

Assim, a mensagem pré-codificada (P) fica:

$P: 252718222428.$

Escolhem-se os primos $p = 11$ e $q = 17$ (chave privada). Logo, $n = 11 \times 17 = 187$ (chave pública) e escolhe-se $c = 7$.

Quebra-se o número P em blocos (b) menores que 187.

$b: 25 - 27 - 182 - 22 - 42 - 8.$

Utiliza-se a equação (1) para criptografar cada bloco “ b ” da mensagem em blocos “ a ”:

$$25^7 \equiv 185 \pmod{187}$$

$$27^7 \equiv 124 \pmod{187}$$

$$182^7 \equiv 41 \pmod{187}$$

$$22^7 \equiv 44 \pmod{187}$$

$$42^7 \equiv 15 \pmod{187}$$

$$8^7 \equiv 134 \pmod{187}.$$

Reunido todos os blocos, descobre-se que a mensagem codificada (a) é:

$a: 185 - 124 - 41 - 44 - 15 - 134.$

A seguir apresenta-se o processo de decodificação de mensagens, utilizando o algoritmo RSA.

A princípio tem-se a chave pública n e c , sendo preciso obter a chave privada p, q e d . Tem-se que, $n = p \cdot q$ e d é expoente utilizando do método de decodificação. Para determinar esse valor (d) é necessário encontrar o inverso multiplicativo de c módulo $(p - 1)(q - 1)$. Isso significa que d deve satisfazer a congruência $cd \equiv 1 \text{ mod } ((p - 1)(q - 1))$. De posse da chave privada: p, q e d , pode-se decodificar os blocos “a”. Pelo método:

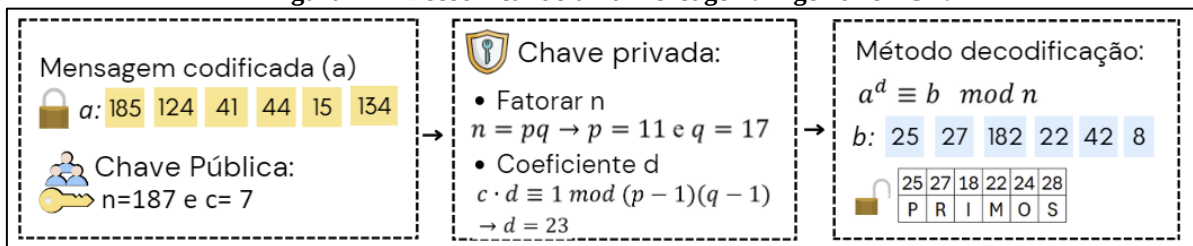
$$a^d \equiv b \text{ mod } n \quad (2)$$

em que b é o resíduo de a^d módulo n .

Para garantir que o inverso multiplicativo exista, utiliza-se como chave pública $c = 7$ e como chaves privadas $p \equiv 5 \text{ mod } 6$ e $q \equiv 5 \text{ mod } 6$. Para mais detalhes desse assunto consultar a bibliografia Coutinho (2015).

Conforme o exemplo dado para codificação ilustra-se, na Figura 11, o processo de decodificação de um bloco da mensagem codificada.

Figura 11 – Decodificando uma mensagem: Algoritmo RSA.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Para realizar a decodificação precisa-se determinar a chave privada. Inicialmente tem-se a chave pública $n = 187$ e $c = 7$ e a mensagem codificada (a) é:

$a: 185 - 124 - 41 - 44 - 15 - 134$.

O primeiro passo é fatorar n de modo a determinar os dois primos p e q . Então, $n = 187 = 11 \cdot 17$. Logo, $p = 11$ e $q = 17$.

Esse processo se torna simples quando os números são pequenos. Porém, quanto maior o número, mais difícil é efetuar a fatoração.

O segundo passo é determinar d :

$$c \cdot d \equiv 1 \text{ mod } (p - 1)(q - 1) \rightarrow 7d \equiv 1 \text{ mod } 160 \rightarrow d = 23$$

Após se determinar a chave privada, pode-se decodificar o bloco codificado por meio da equação (2):

$$185^{23} \equiv 25 \text{ mod } 187$$

$$124^{23} \equiv 27 \text{ mod } 187$$

$$41^{23} \equiv 182 \text{ mod } 187$$

$$44^{23} \equiv 41 \text{ mod } 187$$

$$15^{23} \equiv 44 \pmod{187}$$

$$134^{23} \equiv 8 \pmod{187}$$

Reunindo-se todos os blocos, chega-se à mensagem pré-codificada (P):

$P: 252718222428.$

Associando cada número às letras do quadro anterior, tem-se que a mensagem decodificada é: PRIMOS.

Este algoritmo tem a sua eficácia associada à dificuldade de se fatorar números grandes em números primos. Atualmente, não existem algoritmos eficientes capazes de realizar a fatoração de um número com muitos algarismos em um tempo razoável, o que torna a obtenção da chave privada, a partir da chave pública, uma tarefa praticamente impossível, considerando-se a tecnologia atualmente disponível. Ou seja, se os números p e q forem números extremamente grandes, com mais de 200 algarismos cada, a chave de decodificação será ainda maior. Tornando a fatoração deste número impossível de ser realizada em um tempo hábil. Consequentemente, a obtenção da chave privada a partir da chave pública torna-se uma tarefa impraticável com a tecnologia disponível.

2.7. Tópicos de Estatística Descritiva e Inferencial

Nesta seção encontram-se os principais tópicos estatísticos utilizados na análise dos dados coletados via questionário avaliativo. Tais conteúdos foram utilizados na avaliação e consequente validação do material didático criado. Assim, além da elaboração do referido material, buscou-se compreender suas potencialidades educacionais e analisá-las por meio de técnicas estatísticas.

2.7.1. Estatísticas Descritivas

Para fins de análises estatísticas, pode-se lançar mão de medidas descritivas para um determinado conjunto de dados amostrais, com intuito de resumir e retirar maiores informações acerca de seu comportamento médio e sua variabilidade. Algumas das medidas que podem ser calculadas são: a média aritmética ($\bar{x}$), a variância amostral (S^2), o desvio padrão amostral (S) e o coeficiente de variação (CV). Cabe dizer que, a média é uma medida de tendência central, ao passo que, as demais medidas quantificam a variabilidade dos dados e, por conseguinte, fornecem a noção de variação do próprio conjunto de dados ao redor da média. Assim, considerando um conjunto de dados composto pelos elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$, estas medidas são dadas pelas seguintes fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} : \text{média aritmética} \quad (3)$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} : \text{variância amostral} \quad (4)$$

$$S = \sqrt{S^2} : \text{desvio padrão amostral} \quad (5)$$

$$CV = \left(\frac{S}{\bar{x}} \right) \cdot 100 : \text{coeficiente de variação amostral} \quad (6)$$

2.7.2. Testes de Hipóteses e Erro Tipo 1 em Testes de Hipóteses

Há uma infinidade de testes estatísticos aplicáveis a amostras que apresentam um comportamento apenas aproximado ao das populações que representam. Assim, os pesquisadores podem apresentar suas hipóteses de análise para serem testadas, as quais geralmente ocorrem da seguinte maneira:

- **H_0** : realidade óbvia, presente em uma pesquisa
- **H_1** : investigação distinta, proposta pelo pesquisador a partir da realidade óbvia

Neste caso, a hipótese H_0 poderá ser aceita ou rejeitada. Se H_0 for rejeitada, então H_1 será aceita. Neste contexto, surgem os termos estatísticos:

- **α** : probabilidade de erro tipo 1 de um teste, ou o quanto se pode errar em um teste. O parâmetro α também é conhecido como nível de significância de um teste, já que nesses testes se trabalha com uma amostra diferente/aproximada da população; e
- **$1 - \alpha$** : nível de confiança de um teste, ou o quanto se pode acertar em um teste.

Desta maneira ao se iniciar um teste estatístico de hipóteses, se estabelece inicialmente os níveis de significância α (1%, 5% e 10%, níveis científicos comumente utilizados) e de confiança $1 - \alpha$ (99%, 95% e 90%).

Em seguida após a aplicação de um determinado teste, se calcula:

- **$p - \text{valor}$** : probabilidade do erro de um teste estatístico, ou seja, o quanto se erra no teste aplicado ao ser comparado com α ; e
- **$1 - (p - \text{valor})$** : o quanto se acerta em um teste ao ser comparado com $1 - \alpha$.

Vale salientar que o $p - \text{valor}$ é uma probabilidade encontrada de acordo com o tipo de estatística utilizada em cada teste. O Quadro 3, mostra como ocorre a decisão de um teste de hipótese.

Quadro 3 – Decisão do teste de hipótese com base no erro do tipo 1 (α).

Realidade	Conclusão do Teste	
	Rejeitar H_0 :	Aceitar H_0 :
Real	Erro tipo I: α	Correto: $1 - \alpha$
Imposta (Verdadeira H_0)	$p - valor$	$1 - (p - valor)$

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Assim, na maioria dos testes estatísticos, podem ocorrer as seguintes situações inferenciais comparativas com relação aos valores do $p - valor$ e de α :

- 1) Se o $p - valor \leq \alpha$, pode-se se dizer que se erra menos ou igual ($p - valor$) que o nível de significância (α), permitido e imposto inicialmente no teste, ou seja, $1 - (p - valor) \geq 1 - \alpha$. Pode-se se dizer que, se acerta mais ou igual ($1 - (p - valor)$) que o nível de confiança ($1 - \alpha$) imposto anteriormente. Quando ocorrem estes dois fatos simultaneamente **rejeita-se H_0** ;
- 2) Já se o $p - valor > \alpha$, pode-se se dizer que se erra mais ($p - valor$) que o nível de significância (α), permitido e imposto inicialmente no teste, ou seja, $1 - (p - valor) < 1 - \alpha$. Pode-se se dizer que se acerta menos ($1 - (p - valor)$) que o nível de confiança ($1 - \alpha$) imposto anteriormente. Quando ocorrem estes dois fatos simultaneamente **aceita-se H_0** .

Estes tipos de análises são utilizados diretamente nos testes de normalidade de Shapiro-Wilk e nos testes de Wilcoxon de postos sinalizados para localização.

2.7.3. Teste de Shapiro-Wilk

O teste de normalidade de Shapiro-Wilk (1965) é aplicado nos dados a um nível de significância α (que poderá ser 1%, 5%, 10%). Desta forma pode-se comparar as seguintes hipóteses:

- H_0 : Os dados apresentam distribuição normal
- H_1 : Os dados não apresentam distribuição normal

A partir de cada uma das amostras $x_1, x_2, \dots, x_n$ independentes e ordenadas com $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, obtém-se:

- 1) Os desvios quadráticos $S^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}$;
- 2) Calculam-se $b = \sum_{i=1}^n a_{n-i+1}(x_{n-i+1} - x_i)$, sendo que a_{n-i+1} , são coeficientes tabelados de Shapiro-Wilk.

Assim pode-se obter a estatística do teste, pela seguinte expressão:

$$W_{calculado} = \frac{b^2}{S^2} \quad (7)$$

Logo se a estatística $W_{calculado} < W_{\alpha}$ aceita-se a hipótese H_0 referente à normalidade dos dados (ou seja $p - valor > \alpha$, em que $p - valor$ representa o erro obtido no teste aplicado em cada amostra), e se $W_{calculado} \geq W_{\alpha}$ (ou seja $p - valor \leq \alpha$, em que $p - valor$ representa o erro obtido no teste aplicado em cada amostra) rejeita-se H_0 .

2.7.4. Teste de Postos Sinalizados de Wilcoxon, para Localização

A partir de cada uma das amostras coletadas, aqui consideradas como $x_1, x_2, \dots, x_n$, independentes e ordenadas, com $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, e que não apresentam normalidades, com distribuições assimétricas, são calculadas as médias dos valores amostrados, da seguinte forma:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (8)$$

em que, n é número de observações ou amostras coletadas.

Calculada a média, efetua-se o teste do sinal de Wilcoxon, descrito nas pesquisas de Wilcoxon *et al.* (1970), Wilcoxon (1992) e Conover (1999), para avaliar em um primeiro momento se há indicativo de que a média é igual ou maior que o valor médio das amostras, ao nível de significância α (que poderá ser 1%, 5%, 10%), conforme a hipóteses expressa abaixo:

$$\begin{aligned} H_0: \mu &= \bar{x} \\ H_1: \mu &> \bar{x} \end{aligned}$$

Neste caso, havendo a rejeição de H_0 , conclui-se que existe o indicativo que, ao nível de significância α , haja a possibilidade de aumento do valor da média. Em outras palavras, se este fato ocorre, há um indicativo de que a média seja maior do que o valor calculado.

Pode-se também realizar um teste nos mesmos moldes, para se avaliar se a média apresenta indício de igualdade ao calculado a partir das amostras, ou há algum indicativo de diminuição do seu valor. As hipóteses para este fim são

$$\begin{aligned} H_0: \mu &= \bar{x} \\ H_1: \mu &< \bar{x} \end{aligned}$$

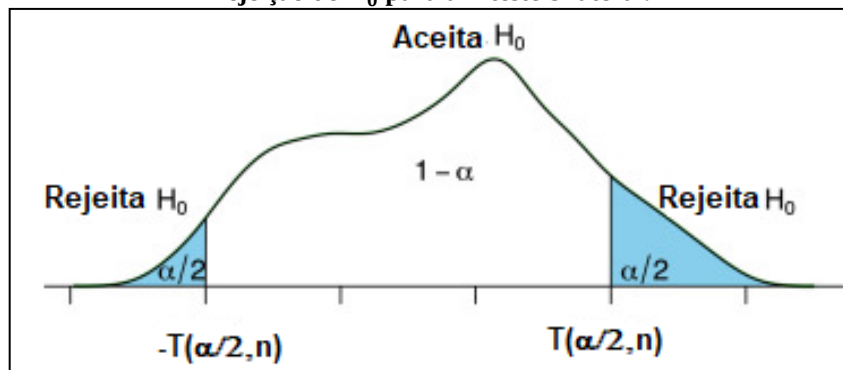
Neste segundo momento, considerando que haja a aceitação de H_0 , significa que há um indicativo de que a média das amostras não corre o risco de diminuir de seu valor calculado a cada amostra analisada.

A partir destas hipóteses construídas, e conhecendo o valor $\bar{x}$ das amostras analisadas tem-se, os seguintes passos metodológicos a serem seguidos:

- 1) Subtrair a média $\bar{x}$ de cada uma das observações de cada uma das amostras analisadas, obtendo a variável $d_i = x_i - \bar{x}$. Se algum $x_i = \bar{x}$, então $d_i = 0$, elimine esse d_i dos cálculos e reduza o n amostral em uma unidade, e siga com o processo;
- 2) Classifique os d_i utilizáveis do menor para o maior sem levar em conta o sinal de d_i , ou seja, avalia-se o valor absoluto de $|d_i|$ nessa classificação (ranqueamento). Se dois ou mais $|d_i|$ são iguais deve-se atribuir a cada valor empatado a média das posições de classificação que os valores ocupam. Se, por exemplo, os três menores valores $|d_i|$ são todos iguais, coloque-os nas posições de classificações 1, 2 e 3, e atribua a classificação $(1+2+3)/3 = 2$;
- 3) Atribua a cada classificação o sinal d_i que produz essa classificação;
- 4) Encontre as estatísticas T_+ e T_- , que correspondem a soma dos postos com sinais positivos e negativos, encontrados;

A Figura 12 mostra como seria o comportamento de dados hipotéticos com uma distribuição livre sem normalidade hipotética e suas hipóteses em um teste bilateral com $H_0: \mu = \bar{x}$ e $H_1: \mu \neq \bar{x}$.

Figura 12 – Distribuição livre e sem normalidade hipotética de dados com as regiões críticas de aceitação e rejeição de H_0 para um teste bilateral.



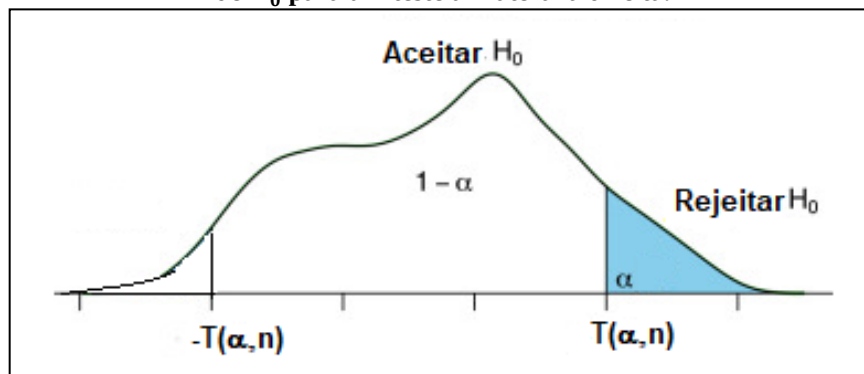
Fonte: Resultados da Pesquisa

A estatística do teste é o T_+ ou T_- , dependendo da hipótese alternativa. Assim, se a hipótese nula $H_0: \mu = \bar{x}$ é aceita a um certo nível de significância α pré-estabelecido, o valor de $T_+ = T_-$, ou seja, $T_+ < T_{(\frac{\alpha}{2}, n)}$ ou $T_- > -T_{(\frac{\alpha}{2}, n)}$ (ou seja $p - valor > \frac{\alpha}{2}$, em que o $p - valor$ representa a probabilidade do erro obtido no teste aplicado em cada amostra), caso contrário H_0 será rejeitada (ou seja $p - valor \leq \frac{\alpha}{2}$).

Por exemplo, considerando que se queira testar uma média, a qual espera-se que seja alta, deve-se considerar a presença das seguintes hipóteses alternativas, de modo que os resultados abaixo aconteçam:

- a) Rejeita-se $H_0: \mu = \bar{x}$ ou, igualmente, aceita-se $H_1: \mu > \bar{x}$ a um certo nível de significância α . Assim, tem-se que $T_+ > T_{(\alpha,n)}$ ($p\text{-valor} \leq \alpha$). A Figura 13 mostra como seria o comportamento de dados com uma distribuição livre e sem normalidade hipotética, e suas hipóteses e um teste unilateral com $H_0: \mu = \bar{x}$ e $H_1: \mu > \bar{x}$.

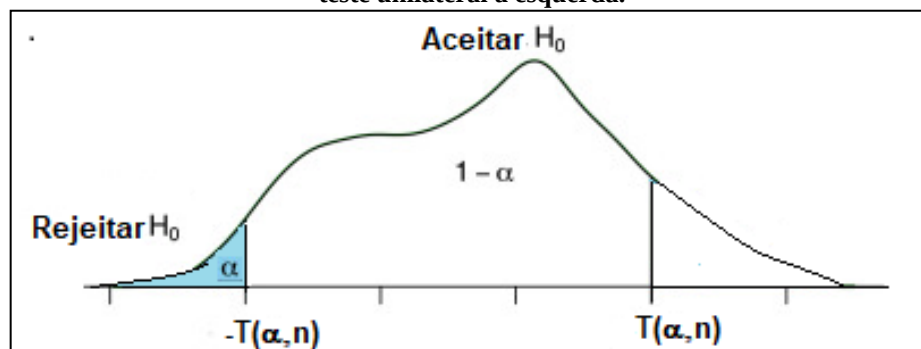
Figura 13 – Distribuição livre sem normalidade hipotética com as regiões críticas de aceitação e rejeição de H_0 para um teste unilateral a direita.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

- b) Aceita-se $H_0: \mu = \bar{x}$ a um certo nível de significância α . Assim tem-se que $T_- > -T_{(\alpha,n)}$ ($p\text{-valor} > \alpha$). A Figura 14 mostra como seria o comportamento de dados com uma distribuição livre e sem normalidade, e suas hipóteses e um teste unilateral com $H_0: \mu = \bar{x}$ e $H_1: \mu < \bar{x}$

Figura 14 – Distribuição livre dos dados com as regiões críticas de aceitação e rejeição de H_0 para um teste unilateral a esquerda.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

3. METODOLOGIA

Na pesquisa aqui relatada, buscou-se responder a seguinte questão norteadora: Como elaborar um material didático com números primos que fosse significativo e envolvente para alunos de diferentes faixas etárias da Educação Básica? Visando se chegar às possíveis respostas para esta pergunta, foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre números primos no âmbito da Educação Básica, destacando-se os trabalhos desenvolvidos com essa temática.

Com base nesse referencial teórico desenvolvido, foi elaborado e aplicado o material didático (Apêndice A), com o objetivo de responder à questão proposta. Em adição a isso e com o intuito de se gerar um *feedback* em tempo real aos alunos que viessem a trabalhar com o almanaque, foi desenvolvido um *software* em linguagem computacional C/C++. Durante a aplicação do almanaque em sala, o *software* serviu como uma ferramenta auxiliar para exemplificar os números primos. Para avaliar o material didático desenvolvido, aplicou-se um questionário (Apêndice B) aos alunos. Por fim, utilizou-se a análise de conteúdo de Bardin (2016), juntamente com técnicas Estatísticas, para a organização e o tratamento dos dados, e a consequente discussão dos resultados.

Nas seções que seguem, os passos metodológicos citados neste preâmbulo são detalhados à contento.

3.1. Delineamento Metodológico

O delineamento metodológico adotado é composto de alguns passos, os quais são descritos a seguir.

3.1.1. Pesquisa Bibliográfica

O delineamento adotado neste trabalho científico passa, inicialmente, pela pesquisa bibliográfica, a fim de angariar a fundamentação teórica necessária à execução da proposta.

Entende-se que:

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Boa parte dos estudos exploratórios pode ser definida como pesquisas bibliográficas. As pesquisas sobre ideologias, bem como aquelas que se propõem à análise das diversas posições acerca de um problema, também costumam ser desenvolvidas quase exclusivamente mediante fontes bibliográficas (GIL, 2002, p. 44).

Para a realização desta etapa, foram então utilizadas diversas fontes de pesquisa como, por exemplo, livros didáticos do Ensino Fundamental, que possuíam conteúdo voltado aos Números Primos. Também foram pesquisados livros/artigos relativos à teoria dos números e, em complemento, foram consultados artigos, dissertações e teses que apresentavam diferentes propostas de ensino e que envolviam o estudo dos números primos. Com esses levantamentos, foi possível constituir um referencial teórico sólido para embasar a pesquisa proposta e elaborar o material didático preconizado *a priori*.

3.1.2. *Elaboração de Material Didático: O Almanaque*

Cabe esclarecer que, com relação à proposta do Mestrado Profissional, relacionada à pesquisa e à elaboração de dissertação, tem-se que uma de suas finalidades é a elaboração de um Produto Educacional que: “[...] pode ser alguma nova estratégia de ensino, uma nova metodologia de ensino para determinados conteúdos, um aplicativo, um ambiente virtual, um texto” (BORBA, ALMEIDA, GRACIA, 2020, p. 87). Neste contexto, foi elaborado como resultado da presente pesquisa um produto de apoio/suporte com fins didáticos na mediação do processo ensino-aprendizagem em diferentes contextos educacionais (BRASIL, 2019).

Diante dos objetivos intrínsecos da pesquisa e das necessidades postas acima, elaborou-se um material didático significativo envolvente e com características lúdicas expresso sob a forma de um “almanaque” denominado “Leãozito: Os Mistério dos Números Primos” (Apêndice A). O referido material didático traz informações, curiosidades e atividades lúdicas sobre os números primos, fornecendo respostas das atividades ao final.

Cabe informar que, o almanaque foi construído com o auxílio do sistema Canva, que é uma ferramenta intuitiva, na qual é possível criar e editar *designs* gráficos. O Canva, que pode ser acessado no endereço https://www.canva.com/pt_br/about/, foi lançado em 2013 e consiste em uma plataforma *on-line* de *design* e comunicação visual. A filosofia da plataforma é colocar o poder do *design* e edição gráfica ao alcance das pessoas em geral, de modo que haja a liberdade de criação e publicação de conteúdos autorais.

Especificamente, o almanaque aqui proposto, que teve como foco os Números Primos, será posteriormente disponibilizado *on-line* em formato digital para que professores possam utilizá-lo com seus os alunos, visando motivar e resgatar tais conhecimentos de forma descontraída. Com tal atitude, almeja-se fazer com que o material produzido chegue à comunidade, de modo a contribuir efetivamente para com a Educação.

3.1.3. O Software Primus

Juntamente com o almanaque, foi projetado e desenvolvido um *software* educacional, em linguagem computacional C/C++, que é capaz de informar se um determinado número, fornecido pelo usuário, é primo ou não. Além disso, o *software* é capaz de gerar uma lista de números primos e uma lista de números compostos, menores que o número dado.

Para integrar o *software* foram escolhidos os métodos de verificação de primalidade: “Crivo de Erastóstenes” e “Força Bruta” (ver seção 2.5). O referido *software*, implementado em C/C++ no ambiente de desenvolvimento integrado Borland Builder C++ 6.0 (domínio público), é uma aplicação do tipo “*for Windows*” e possui interface gráfica amigável e didática.

Especifica-se que, o C++ Builder é um ambiente de desenvolvimento integrado, ou IDE (em inglês: *Integrated Development Environment*), produzido atualmente pela empresa Embarcadero Technologies e presta-se ao desenvolvimento de *softwares* na linguagem C/C++. A versão 6 deste IDE, produzida anteriormente pela firma Borland Software Corporation, foi utilizada neste trabalho, pois, além da linguagem de programação ser de média complexidade e cumprir com o esperado, a referida versão da IDE é de domínio público.

A linguagem C++, materializada no IDE, foi criada pelo cientista da Computação dinamarquês Bjarne Stroustrup e teve origem por volta da década de 70. O C++ é uma linguagem de programação compilada, multiparadigma e de uso geral. Ou seja, o C++, que traz a linguagem C encapsulada, é uma linguagem muito versátil, poderosa e uma das mais usadas, dentro e fora do meio científico. Uma das vantagens da linguagem é que ela é multiplataforma, ou seja, ela pode ser utilizada em sistemas operacionais como, o Windows, o Mac, o Linux, entre outras.

3.1.4. Aplicação do Almanaque em Sala, Coleta e Avaliação dos Dados

Nesta etapa, quanto à natureza, a pesquisa se enquadra como sendo exploratória, uma vez que, o material desenvolvido foi trabalhado, em salas de aula da Educação Básica, pela pesquisadora. Tal ação permitiu a coleta *in loco* de dados relativos à receptividade e aceitação do material. Com isso buscou-se a validação do material, por meio da avaliação de sua eficácia e relevância no contexto educacional. Cabe lembrar que:

Os estudos exploratórios permitem ao investigador aumentar sua experiência em torno de determinado problema. O pesquisador parte de uma hipótese e aprofunda seu estudo nos limites de uma realidade específica, buscando antecedentes, maiores conhecimentos para, em seguida, planejar uma pesquisa descritiva ou tipo experimental. Outras vezes, deseja delimitar ou manejar com maior segurança uma teoria cujo enunciado resulta em demasiado amplo para os objetivos da pesquisa que tem em mente realizar (TRIVIÑOS, 1987, p.109).

Especifica-se que, o questionário aplicado, que se encontra no Apêndice B, foi composto por questões relativas apenas ao almanaque, uma vez que, este foi o foco principal da pesquisa. Entende-se ainda que, o *software* criado desempenhe papel coadjuvante ao almanaque, proporcionando um *feedback* rápido para os alunos, quanto à primalidade de algum número natural de interesse.

Os dados gerados inicialmente foram analisados qualitativamente, segundo o preconizado por Bardin (2016). Em um segundo momento os dados foram analisados quantitativamente, pelo uso de técnicas estatísticas descritivas e inferenciais. Neste caso, se analisou de modo descritivo as questões de 2 a 4 e 6, e de modo descritivo e inferencial a questão 5. As análises foram empreendidas de acordo com a teoria descrita na seção 2.7.

Cabe especificar que, os cálculos, testes de hipóteses e gráficos que integram a análise quantitativa foram gerados via *softwares* livres *R* e *RStudio*. O *software R* materializa uma linguagem de programação voltada à análise de dados, possuindo rotinas pré-programadas que podem ser acessadas via *script*. Por sua vez, o *RStudio* é uma interface gráfica para o *R*, a qual facilita a programação, visto que estabelece um ambiente de trabalho amigável, intuitivo e eficiente. Dentre as inúmeras facilidades propiciadas pelo *RStudio* estão: a praticidade na edição de *scripts*, a facilidade no gerenciamento de pacotes, a disponibilidade de um histórico de comandos e a existência de um ambiente de trabalho organizado.

O almanaque foi trabalhado em sete turmas do Ensino Médio (1ª série *E*, *F*, *G* e *N*, 2ª série *B* e *C*, e 3ª série *A*) da Escola Estadual de 1º Grau São Vicente de Paula, Sinop - MT, durante o período de 24/04/2024 a 06/05/2024, totalizando uma amostra de 143 questionários aplicados ao final. Assim, as análises estatísticas se deram de forma desagregada (por série) e de forma agregada (totalidade das séries). Buscou-se então analisar os dados por meio de sua organização e tratamento de formas distintas, que embasassem a consequente discussão dos resultados, buscando se averiguar a possível aceitação e consequente validação do almanaque. Tais análises e resultados são apresentados e discutidos nas seções que seguem.

4. MATERIAL DIDÁTICO – O ALMANAQUE

Neste capítulo se descreve a construção do material didático “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, que é foco da pesquisa realizada. Assim, as decisões tomadas na execução do delineamento metodológico são apresentadas e justificadas a contento.

4.1. A Elaboração do Almanaque: “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”

Cabe explicar inicialmente que, a escolha de se elaborar um almanaque como material didático, nasceu da facilidade em se reunir, neste tipo de estrutura, informações diversas, de forma organizada e didática. Além disso, costumeiramente, os almanaques são uma fonte de entretenimento, oferecendo curiosidades, fatos históricos, biografias e outros temas de interesse geral. Pode-se citar, por exemplo, o caso do Almanaque Sadol, da firma “Catarinense Pharma”, que é bem conhecido e aceito pelo público. Acreditou-se que, abordar conteúdos matemáticos por meio de um almanaque pudesse ser mais envolvente e interessante para o aluno que, desde o início da atividade, passaria a esperar por algo lúdico, conforme sugere o nome do material.

Figura 15 – Personagem Leãozinho.



Fonte: acervo da pesquisa.

Cabe lembrar que, o material didático foi construído no sistema *on-line Canva*, (https://www.canva.com/pt_br/about/) que é uma ferramenta intuitiva na qual é possível criar e editar *designs* gráficos. Para tornar o material atrativo, criou-se o personagem Leãozinho (Figura 15) utilizando o *website Pixton* que, assim como o Canva, consiste em uma plataforma *on-line*, que disponibiliza vários recursos para a criação de histórias em quadrinho em formato digital

(ver <https://www.pixton.com/welcome>). Ao longo do almanaque, este personagem viaja para diferentes épocas e lugares contando um pouco da história dos números primos.

Nesta aventura, o personagem Leãozito viaja para Alexandria (300 a.C.), Líbia (276 a.C.), Roma (50 a.C.) e para os Estados Unidos (2000 d.C.), conforme ilustra a Figura 16. Durante suas viagens, Leãozito explora conceitos e descobertas sobre os números primos de uma forma lúdica e acessível, buscando tornar a Matemática mais divertida e relevante.

Figura 16 – Ilustração do trajeto percorrido pelo Leãozito.



Fonte: acervo da pesquisa

Figura 17 – Capa do material didático: Almanaque.



Fonte: acervo da pesquisa.

As atividades do material visam então contribuir para com a compreensão dos conceitos associados aos números primos de maneira lúdica e interativa. Ao longo do material, os alunos são incentivados a explorar as propriedades dos números primos e a entender suas aplicações. Cada atividade foi elaborada para reforçar o conteúdo apresentado pelo personagem Leãozito.

A imagem, apresentada na Figura 17, mostra a capa do almanaque. O almanaque é integralmente apresentado no Apêndice A. Além dos detalhes históricos descritos pelo Leãozito, o almanaque conta com atividades e jogos, estabelecidos conforme o apresentado no Quadro 4.

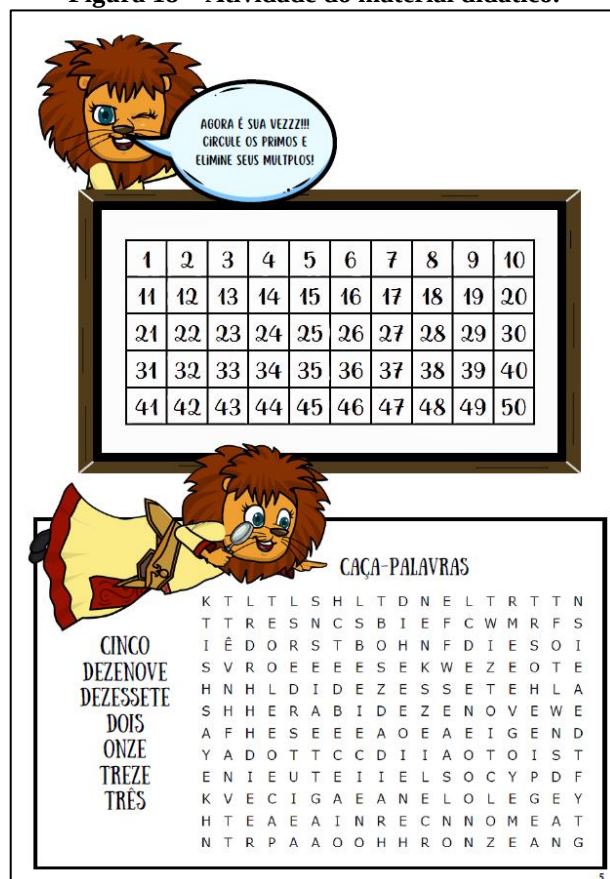
Quadro 4 – Atividades, objetivos e habilidades desenvolvidas no almanaque.

Atividades	Objetivos	Habilidades
Cruzadinha.	Consolidar e explorar a definição dos números primos.	(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
Pinte os números primos.	Reconhecer e identificar números primos, desenvolver o raciocínio lógico.	
Complete as caixinhas com primos até 30.	Familiarizar-se com os números primos até 30.	
Crivo de Eratóstenes.	Compreender os múltiplos de números e aplicar o método do Crivo de Eratóstenes para identificar números primos.	
Caça-palavras.	Desenvolver o raciocínio lógico. Reforçar os números primos de forma descontraída.	
Calcular MMC e MDC.	Desenvolver a compreensão sobre a fatoração e a decomposição de números	(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
Ligar os números aos seus respectivos fatores.	Identificar e relacionar números aos seus fatores, compreender a decomposição em fatores primos e aprimorar a habilidade de análise Matemática.	(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.
A cifra de César.	Entender os princípios básicos da criptografia, aplicar a Cifra de César para codificar e decodificar mensagens e reconhecer a importância da criptografia na segurança da informação.	

Fonte: acervo da pesquisa.

As atividades e jogos foram escolhidos conforme as intencionalidades descritas no quadro acima (coluna 2 - Objetivos), seguindo as habilidades previstas na coluna 3 (Habilidades). E mais, buscando alcançar um aproveitamento efetivo, ao final do almanaque se encontram as respostas das atividades e jogos.

Figura 18 – Atividade do material didático.



Fonte: acervo da pesquisa.

A imagem que consta na Figura 18 mostra uma das páginas do almanaque, exemplificando a qualidade do material e seu acabamento gráfico superior.

5. SOFTWARE PRIMUS – UM *FEEDBACK* EM TEMPO REAL

Considerando que a busca por números primos pode ser uma tarefa exaustiva e que a pesquisa aqui apresentada possuiu cunho educacional, buscou-se, em adição ao almanaque construído e aplicado em sala, se fornecer uma ferramenta computacional que pudesse, não apenas facilitar a busca por números primos, como também fornecer um *feedback* para o aluno e para o professor na prática do processo ensino-aprendizagem. Assim, mesmo não sendo o foco principal da pesquisa empreendida, o *software* construído pode ser um recurso coadjuvante, tanto para o professor, quanto para o aluno, quando de seus estudos. Logo, na seção que segue, se descreve o *software* implementado nesta pesquisa.

5.1. O *software* “Primus”

O Primus é um *software* “*for Windows*”, implementado em linguagem computacional C/C++, no ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) Borland C++Builder (versão 6).

Figura 19 – A interface do *software* Primus.



A interface do software Primus é uma janela com o título "Primus". No topo, há uma barra de entrada com o texto "Entre com o número que deseja verificar:". Abaixo dela, há um campo de texto para digitar o número. Segue-se uma seção com o rótulo "Escolha o método de verificação:" e duas opções de seleção por rádio: "Crivo de Eratóstenes" e "Força Bruta". Abaixo das opções, há um botão "VERIFICAR". Na parte inferior, há uma seção com o rótulo "O número fornecido é primo?" e um campo de texto para o resultado. No rodapé, há dois botões: "Números Primos" e "Números Compostos".

Fonte: acervo da pesquisa.

O Primus, cuja interface é apresentada na Figura 19, foi projetado de modo que sua utilização fosse simples e intuitiva.

A fim de se apresentar de forma detalhada a referida interface, tem-se a Figura 20, na qual os seus componentes estão identificados numericamente (números em vermelho).

Figura 20 – A interface do software Primus.

A interface do software Primus é apresentada em uma janela com o título "Primus". O layout é dividido em seções. No topo, há um campo de entrada de texto com o rótulo "Entre com o número que deseja verificar:". Abaixo dele, há um grupo de botões de opção com o rótulo "Escolha o método de verificação:", contendo as opções "Crivo de Eratóstenes" e "Força Bruta". Um botão "VERIFICAR" está posicionado abaixo das opções. Na parte inferior, há um campo de saída de texto com o rótulo "O número fornecido é primo?". Abaixo deste campo, há dois botões: "Números Primos" e "Números Compostos". Os componentes são identificados por números vermelhos: 1 para o campo de entrada, 2 para o grupo de botões de opção, 3 para o botão "VERIFICAR", 4 para o campo de saída, 5 para o botão "Números Primos" e 6 para o botão "Números Compostos".

Fonte: acervo da pesquisa.

Seguindo a numeração dos componentes, apresentada na Figura 20, tem-se o seguinte detalhamento dos componentes que integram a interface:

1) Campo de Inserção Numérica: Entrada de Valor

Neste campo de inserção de caracteres deve ser inserido o número que se quer saber ser primo ou composto. Assim, não se deve inserir texto ou outros caracteres neste componente.

2) Componente *Radio Button* para a Escolha de Método de Verificação de Primalidade

O componente *Radio Button* é um recurso de seleção de item e as escolhas feitas por meio dele tem caráter mutuamente exclusivo. Assim, se uma opção for escolhida, então todas as

demais não ficarão selecionadas. No caso em questão, as opções de métodos de verificação de primalidade são: “Crivo Eratóstenes” e “Força Bruta”.

3) Botão de Ativação da Rotina de Verificação de Primalidade: “VERIFICAR”

Uma vez que um número válido tenha sido inserido em “1” e um método de verificação de primalidade tenha sido escolhido (ver “2”), aciona-se o botão “VERIFICAR”, que dá início à execução de uma rotina de verificação de primalidade.

4) Componente *Panel*, que Externa o Resultado do Processamento

Por meio do componente *Panel*, o programa externa o resultado imediato do processamento da rotina de verificação de primalidade escolhida. As frases que poderão aparecer no componente são: “O Número dado é primo!” ou “O Número dado não é primo!”.

5) Botão para a Visualização da Lista de Números Primos: “Números Primos”

Além da informação externada via *Panel* (componente 4), o programa ainda armazena, em um arquivo de texto (*ASCII*), todos os números primos de 2 até o número fornecido pelo usuário. O referido arquivo, denominado *Numeros_Primos.txt*, pode ser aberto no “Bloco de Notas” ao se acionar o botão “Números Primos” (componente 5). Este arquivo fica armazenado na pasta onde o executável do programa Primus estiver.

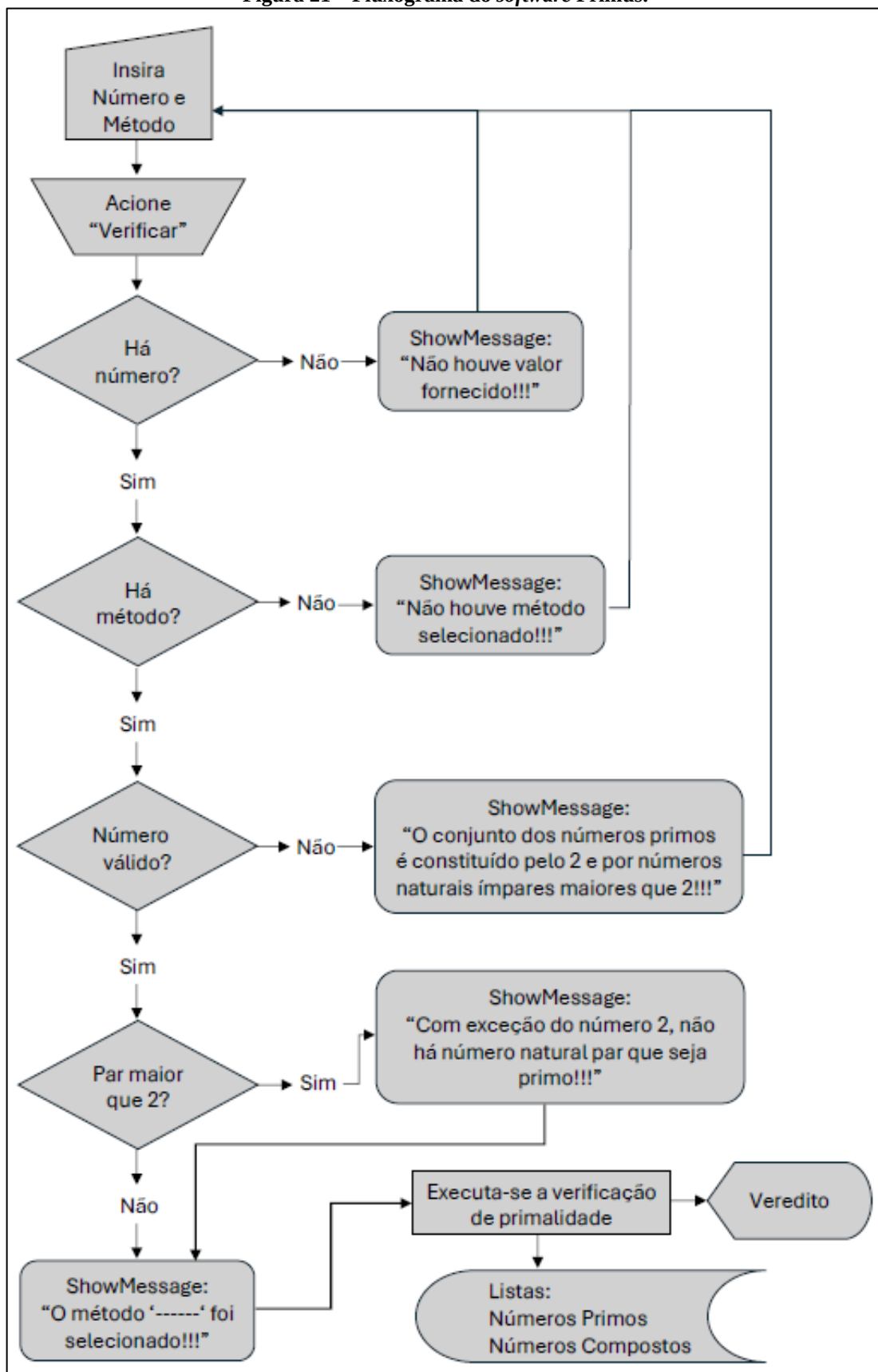
6) Botão para a Visualização da Lista de Números Compostos: “Números Compostos”

De forma análoga ao previsto no item anterior, pode-se ter acesso ao conteúdo do arquivo *Numeros_Compostos.txt*, que armazena os números compostos de 2 até o número fornecido, ao se acionar o botão “Números Compostos” (componente 6).

O fluxograma presente na Figura 21, mostra as etapas algorítmicas materializadas na implementação do *software* Primus e as mensagens que o usuário recebe como *feedback* quando da execução do programa. Tais mensagens são externadas por meio de caixas de mensagens do *Windows*, as quais são geradas por meio da instrução “ShowMessage”.

Especifica-se que, dado o caráter educacional do *software* Primus, optou-se por fornecer ao usuário um *feedback* a cada passo de execução da rotina. Dessa forma, acredita-se que o uso do programa possa ser facilitado e, principalmente, quando o usuário não tiver um conhecimento efetivo sobre os números primos, que não haja maiores problemas para que este venha a utilizar o *software* satisfatoriamente, podendo, eventualmente, aprender algo sobre tais números por meio das mensagens.

Figura 21 – Fluxograma do software Primus.



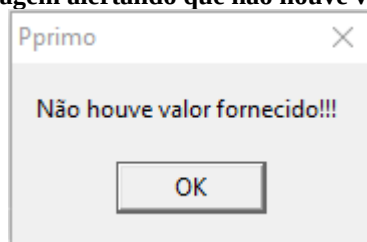
Fonte: acervo da pesquisa.

A seguir, os pormenores algorítmicos e as referidas caixas de mensagens são apresentadas e detalhadas a contento, tendo por base a ordem preconizada no fluxograma apresentado na Figura 21.

1) Valor não inserido no componente 1.

Quando o usuário não insere um valor no componente 1 e aciona o botão “VERIFICAR”, então a seguinte caixa de mensagem (Figura 22) alerta o usuário sobre esta ocorrência.

Figura 22 – Caixa de mensagem alertando que não houve valor fornecido ao programa.

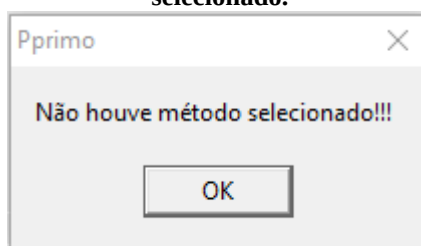


Fonte: acervo da pesquisa.

2) Valor inserido no componente 1 e método de verificação de primalidade não selecionado

Quando o usuário insere algum valor no componente 1, mas não seleciona um método de verificação de primalidade por meio do componente *Radio Button* (componente 2), então, ao acionar o botão “VERIFICAR”, o programa apresenta a caixa de mensagem ilustrada pela Figura 23. A mensagem alerta o usuário da necessidade de se escolher um método para a verificação de primalidade.

Figura 23 – Caixa de mensagem alertando de que não houve método de verificação de primalidade selecionado.



Fonte: acervo da pesquisa.

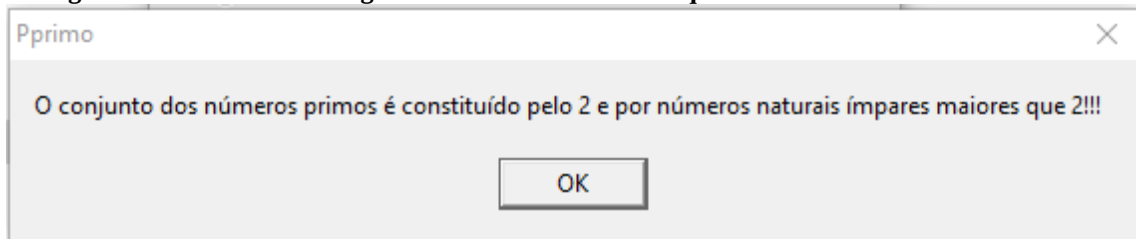
3) Valor inválido fornecido

Se o usuário inserir na componente 1 um valor menor ou igual a 1, optar por um método de verificação de primalidade e acionar o botão “VERIFICAR”, então a caixa de mensagem ilustrada pela Figura 24 será apresentada.

Neste caso, a caixa de mensagem fornece ao usuário uma informação teórica, definindo para ele que um número primo é, obrigatoriamente, um número natural igual a 2 ou um

número ímpar maior que 2. Assim, o usuário, não apenas utiliza o programa como ferramenta matemática, como também, obtém informações conceituais complementares provenientes dele.

Figura 24 – Caixa de mensagem informando ao usuário que o número fornecido não é válido.

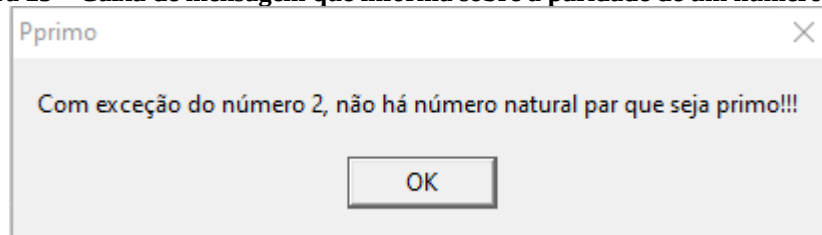


Fonte: acervo da pesquisa.

4) Inserção de número par maior que 2

Se o usuário fornece ao programa um número par maior que 2, optar por um método de verificação de primalidade e acionar o botão “VERIFICAR”, então o *software* apresentará a informação teórica que pode ser visualizada na Figura 25.

Figura 25 – Caixa de mensagem que informa sobre a paridade de um número primo.

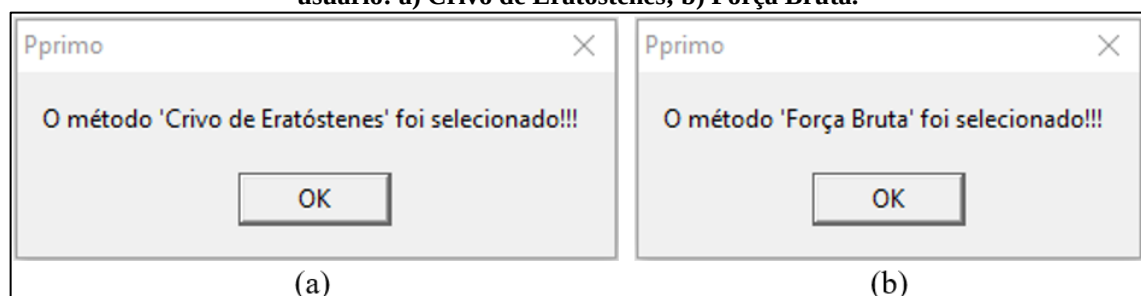


Fonte: acervo da pesquisa.

Mais uma vez uma informação teórica é fornecida ao usuário, de modo que este venha a saber qual a paridade de um número primo.

O fato de o usuário ter fornecido ao programa um número par maior que 2 não impede que o processamento ocorra. Assim, o programa, tão logo o usuário acione o botão “OK”, apresentado na caixa de mensagem ilustrada na Figura 25, o programa lhe apresentará uma nova caixa de mensagem, informando ao usuário o nome do método de verificação de primalidade escolhido. As possíveis caixas de mensagens são apresentadas na Figura 26.

Figura 26 – Caixas de mensagens que informam o método de verificação de primalidade escolhido pelo usuário: a) Crivo de Eratóstenes; b) Força Bruta.



Fonte: acervo da pesquisa.

Independentemente do valor par informado, o *software*, por meio da componente *Panel*, externará seu veredito. Em adição a isso, os botões, aqui identificados como componentes 5 e 6, darão acesso, respectivamente, aos números primos e aos números compostos identificados entre 2 e o número par fornecido.

5) Inserção de número ímpar

Quando um número ímpar e maior que 2 for fornecido ao programa, tudo funcionará como o descrito no item anterior (item 4), a menos da apresentação da informação descrita na caixa de mensagem ilustrada na Figura 26.

Para fins de exemplificação, descreve-se um processamento no qual o número 23 foi fornecido ao programa e o método “Crivo de Eratóstenes” foi selecionado.

A Figura 27 mostra o número 23 inserido no componente 1, o método “Crivo de Eratóstenes” selecionado e o resultado do processamento apresentado no componente 4.

Figura 27 – Interface do *software* Primus com o valor 23 inserido no componente 1, o método “Crivo de Eratóstenes” selecionado e o resultado apresentado no componente 4.

?

Primus

Entre com o número que deseja verificar:

23

Escolha o método de verificação:

☒ Crivo de Eratóstenes

☐ Força Bruta

VERIFICAR

O número fornecido é primo?

O Número dado é primo!

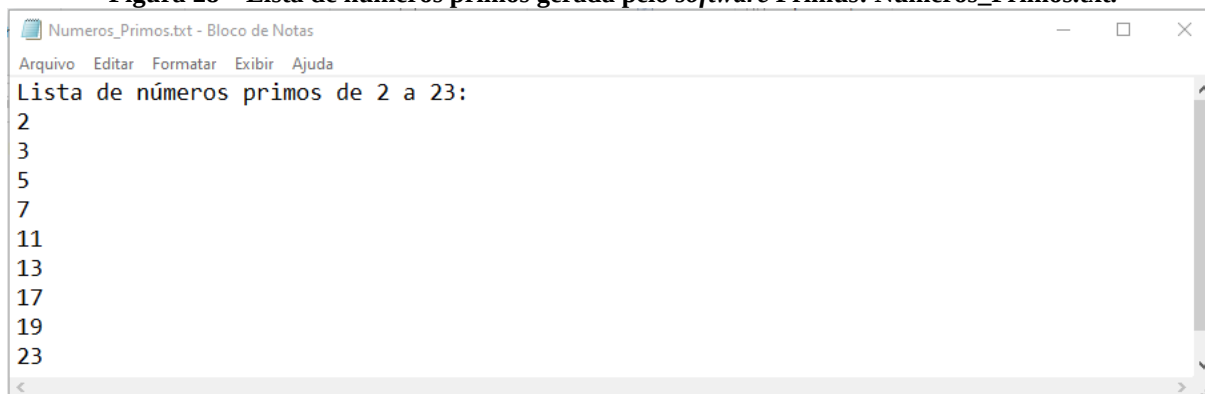
Números Primos

Números Compostos

Fonte: acervo da pesquisa.

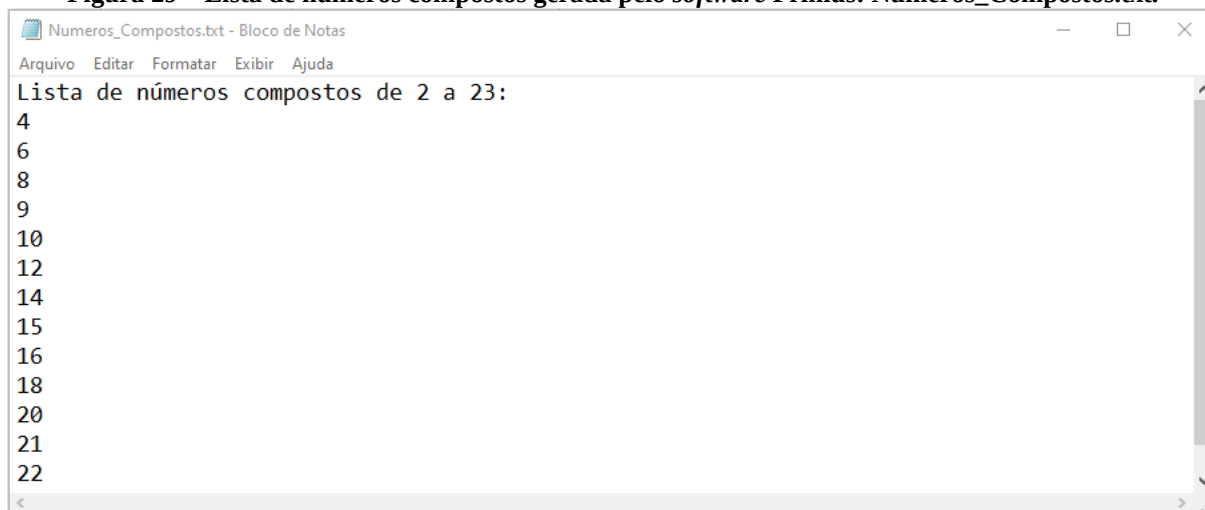
Na Figura 27 pode-se ver, no componente 4, que o número 23 foi identificado como primo. Além disso, as listas de números primos e de números compostos de 2 até 23 podem ser acessadas por meio dos botões posicionados na parte inferior da referida interface.

Figura 28 – Lista de números primos gerada pelo software Primus: Números_Primos.txt.



Fonte: acervo da pesquisa.

Figura 29 – Lista de números compostos gerada pelo software Primus: Números_Compostos.txt.



Fonte: acervo da pesquisa.

As Figuras 28 e 29, apresentadas acima, mostram os resultados do processamento, salvos em seus respectivos arquivos de texto e abertos no Bloco de Notas.

5.2. Os Métodos de Verificação de Primalidade Implementados

Os métodos de verificação de primalidade escolhidos para a implementação foram: o Crivo de Eratóstenes e o Força Bruta. Cabe especificar que, estes métodos foram escolhidos a fim de, não apenas se ter um método capaz de apresentar um veredito acerca de um determinado número, como também, mostrar a discrepância entre métodos distintos. Neste contexto, especifica-se que o Crivo de Eratóstenes consiste em um algoritmo que traz consigo algum nível de inteligência, ao passo que o método Força Bruta nada mais é do que a busca exaustiva baseada na “tentativa e erro”.

A diferença entre os algoritmos fica evidente quando um número muito grande é fornecido ao *software*. Por exemplo, se o número 1.000.000 for fornecido ao *software* e o Crivo de Eratóstenes for selecionado, então, em um *laptop* com processador *Intel Core i7* de segunda geração, bastará uma fração de segundos para que o processamento seja finalizado e o resultado seja exibido no componente 4. Por outro lado, se o método Força Bruta for selecionado, então cerca de 45 minutos serão necessários para que se complete o processamento, considerando o mesmo *hardware* citado anteriormente.

A seguir as implementações são apresentadas e detalhadas, a fim de se expor os pormenores deste trabalho ao leitor. A princípio é apresentada a rotina relativa ao Crivo de Eratóstenes e, a seguir, se explana sobre o método Força Bruta.

5.2.1. A Implementação do Crivo de Eratóstenes

A implementação do Crivo de Eratóstenes seguiu o preconizado no capítulo 2, de fundamentação teórica deste trabalho. E mais, conforme o apresentado *a priori* neste capítulo, a partir de um número fornecido pelo usuário, a rotina externa um veredito acerca da primalidade do número fornecido e gera uma lista de números primos e uma lista de números compostos, compreendidos entre 2 e o número informado ao programa. Cabe especificar que, independentemente do método escolhido, o programa externa resultados idênticos, considerando um mesmo número de entrada. A diferença fica por conta do tempo de processamento, quando valores muito grandes forem fornecidos.

Uma vez que, o número tenha sido fornecido ao programa pelo usuário, o método do Crivo de Eratóstenes tenha sido selecionado e o programa tenha sido posto em execução, então os seguintes códigos serão executados.

1) Preâmbulo

A priori se aloca memória, dinamicamente, para um vetor de $n - 1$ posições (*Lista_Num*), onde n é o número fornecido pelo usuário. Assim, por exemplo, se o número fornecido for o 20, então o vetor terá 19 posições e estas posições serão preenchidas com números de 2 a 20, que são os valores que terão sua primalidade verificada. No código, o valor fornecido pelo usuário é assumido pela variável *Num*. O código de alocação para o vetor *Lista_Num* é o seguinte:

```
if ((Lista_Num = (int *) malloc((Num - 1) * sizeof(int))) == NULL)
```

Após a alocação de memória para o vetor, denominado *Lista_Num*, este é preenchido com $n - 1$ valores inteiros, sendo o primeiro deles o número 2. O trecho de código abaixo se refere ao preenchimento do vetor *Lista_Num*. Cabe explicar que a variável *i*, mostrada abaixo, é um contador para o laço **for**.

```
for(i = 0; i < (Num - 1); i++)
{
    Lista_Num[i] = i + 2;
}
```

2) O Crivo de Eratóstenes

Uma vez que, o vetor *Lista_Num* tenha sido preenchido com os candidatos a número primo, é executado o bloco de código relativo ao Crivo de Eratóstenes, apresentado abaixo. Para facilitar a explanação, as linhas do código foram numeradas de 01 a 21.

```
01  for(i = 0; i < Num - 1; i++)
02  {
03      if(Lista_Num[i] != -1)
04      {
05          j = 2;
06          Saida_Primos[k] = Lista_Num[i];
07          primo = Saida_Primos[k];
08          tabuada = (j * primo) - 2;
09          k++;
10          if(tabuada <= Num - 2)
11          {
12              do
13              {
14                  Lista_Num[tabuada] = -1;
15                  j++;
16                  tabuada = (j * primo) - 2;
17              }
18              while(tabuada <= Num - 2);
19          } //Fim do bloco if interno
20      } //Fim do bloco if externo
21  } //Fim do laço for
```

O laço **for**, que começa na linha 01 e termina na linha 21, destina-se a percorrer o vetor *Lista_Num*, no qual se encontram os candidatos a números primos. O bloco de código, interno a este laço **for**, dedica-se à verificação de primalidade dos elementos de *Lista_Num*.

Ao adentrar ao laço **for**, na linha 03 encontra-se uma instrução **if**. A condição expressa neste **if** determina que seu bloco de código interno só será executado se o *i* – ésimo elemento do vetor *Lista_Num* for diferente de -1 . Cabe lembrar que, no Crivo de Eratóstenes todos os múltiplos de um determinado número primo serão excluídos da lista de candidatos a número primo. Na implementação, a exclusão de um múltiplo (número composto) é indicada pela inserção do número -1 na posição da *Lista_Num* onde este múltiplo estiver. Assim, ao se analisar os elementos de *Lista_Num* e se encontrar em alguma posição o valor -1 , sabe-se que a dita posição era anteriormente ocupada por um número composto.

Por exemplo, no algoritmo, a princípio, o primeiro número de *Lista_Num* identificado como primo é o número 2. Assim, todos os números pares, com exceção do 2, em *Lista_Num*, serão substituídos por -1 , o que indica que estes números são compostos. Dessa forma, segundo a instrução **if** (linha 03), o código relativo à verificação de primalidade, interno à instrução **if**, só será executado para um número que não tiver sido identificado anteriormente como um número composto.

Se uma posição de *Lista_Num* não estiver preenchida com -1 , então o bloco interno à referida instrução **if** será executado. O bloco relativo ao **if** tem início na linha 03 e termina na linha 20. Neste bloco, uma variável *j* (do tipo inteiro) é inicializada por 2 (na linha 05, tem-se $j = 2$). A variável *j* auxilia na construção de múltiplos de um determinado número primo encontrado, de modo que se saiba em quais posições do vetor *Lista_Num* se deva atribuir -1 .

Cabe explicar que, se um determinado número atender satisfatoriamente à instrução **if** (linha 03), então, automaticamente, este número é um primo. Assim, na linha 06, o referido valor, em *Lista_Num*, é passado para um outro vetor de saída, *Saida_Primos*, destinado a armazenar os números primos de saída. A partir daí se procede a busca por múltiplos do número primo encontrado. Cabe especificar que, a variável inteira *k* (linhas 06, 07 e 09) indexa as posições de memória do vetor *Saida_Primos*.

A busca por múltiplos se dá por meio das posições de memória do vetor *Lista_Num* e não por meio dos seus respectivos conteúdos, presentes em cada posição. Do acima exposto, explica-se que a busca por tais números ocorre a partir da linha 07, na qual o valor tido como primo é passado para a variável *primo*.

De posse das variáveis *j* e *primo* se calcula o valor da variável *tabuada* (linha 08), que será o contador que indexará, em *Lista_Num*, a posição do primeiro múltiplo do número primo encontrado. Internamente, ao laço **do – while**, compreendido entre as linhas 12 e 18, o valor da variável *tabuada* sofre atualizações até que todos os múltiplos do referido número primo, presentes em *Lista_Num*, sejam substituídos por –1. Neste caso, o critério de parada do laço **do – while** se baseia no valor assumido pela variável *tabuada*, o qual não pode ser maior que o comprimento do vetor *Lista_Num*.

Uma pequena otimização ocorre na linha 10, por meio de uma instrução **if**. Nesta linha, antes que a busca por múltiplos ocorra, verifica-se se o primeiro valor da variável *tabuada* excede a quantidade de posições alocada no vetor *Lista_Num*. Se isso ocorrer, então não haverá nem um múltiplo do referido número primo em *Lista_Num* e o programa seguirá buscando, por meio do laço **for**, por outros possíveis números primos.

Ao final do processo, quando o laço **for** tiver se encerrado, haverá um vetor com números primos (*Saida_Primos*) e, a partir deste vetor, são construídos os arquivos do tipo texto (ASCII) de números primos e de números compostos, os quais podem ser acessados via interface do *software* Primus. E mais, se o número fornecido ao programa (*Num*) não estiver na última posição do arquivo de números primos, então o componente 4, apresentado na Figura 20, exibirá a seguinte mensagem “O Número dado não é primo!!!”. Por outro lado, se o número fornecido pelo usuário estiver ao final da lista de números primos, então a mensagem “O Número dado é primo!!!” aparecerá expressa no componente 4.

5.2.2. A Implementação do Método Força Bruta

Assim como no caso da implementação do Crivo de Eratóstenes, a implementação do método Força Bruta seguiu o preconizado no capítulo 2, de fundamentação teórica deste trabalho. E mais, considerando o caráter didático do *software* Primus, padronizou-se os resultados externados por ambos os métodos. Ou seja, independentemente do método escolhido, o programa externa resultados idênticos, considerando um mesmo número de entrada. Sendo assim, a diferença fica por conta do tempo de processamento que, no caso do método Força Bruta, se valores muito grandes forem fornecidos ao *software* Primus, então o

método Força Bruta levará um tempo consideravelmente maior de processamento para se chegar ao mesmo resultado externado pelo Crivo de Eratóstenes. Isto se dá pelo fato de o algoritmo trabalhar por “tentativa e erro”, não havendo alguma heurística que otimize o processamento. Na verdade, a escolha deste método veio do desejo de se fornecer ao usuário um contraponto, estabelecido entre um método mais refinado (Crivo de Eratóstenes) e de um método menos elaborado (Força Bruta).

Assumindo que, um número tenha sido fornecido ao programa pelo usuário, o método Força Bruta tenha sido selecionado e o programa tenha sido posto em execução, então o processamento se dará conforme o descrito a seguir.

1) Preâmbulo

A priori, como no caso do Crivo de Eratóstenes, se aloca memória, dinamicamente, para um vetor de $n - 1$ posições, denominado *Lista_Num*, onde n é o número fornecido pelo usuário. No código implementado neste trabalho, o valor fornecido pelo usuário é assumido pela variável *Num*. Após a alocação de memória para o vetor *Lista_Num*, este é preenchido com $n - 1$ valores inteiros, sendo o primeiro deles o número 2.

2) O Método Força Bruta

Uma vez que, o vetor *Lista_Num* tenha sido preenchido com os candidatos a número primo, é executado o bloco relativo ao método Força Bruta, cujo código é apresentado a seguir. Para facilitar a explanação, as linhas do código foram numeradas de 01 a 22.

No código, tem-se inicialmente (linha 01) a variável k , que indexará as posições de memória relativas ao vetor *Saida_Primos*. Cabe informar que, assim como no bloco de código relativo ao Crivo de Eratóstenes, o vetor *Saida_Primos* destina-se ao armazenamento dos números reconhecidos como primos. Logo após a inicialização da variável k ($k = 0$), tem-se, da linha 2 à linha 22, o laço **for** e seu respectivo código destinado a percorrer o vetor *Lista_Num* e verificar a primalidade de seus componentes. A primeira instrução interna a este laço **for** é *band = 0* (linha 04). Esta instrução destina-se a inicializar com o valor zero a variável que indicará se um determinado número em *Lista_Num* é ou não um primo.

```

01  k = 0;
02  for(i = 0; i < Num - 1; i++)
03  {
04      band = 0;
05      for(j = 0; j <= i; j++)
06      {
07          resto = Lista_Num[i] % Lista_Num[j];
08          if(resto == 0)
09          {
10              band++;
11          }
12      } //Fim do for interno
13      if(band == 1)
14      {
15          Saida_Primos[k] = Lista_Num[i];
16          k++;
17      }
18      else
19      {
20          fprintf(NS_Compostos, "%d \n", Lista_Num[i]);
21      }
22  } //Fim do for externo

```

Após se definir o primeiro laço **for** (laço **for** externo), um segundo laço é criado internamente ao primeiro (laço **for** interno). Este segundo laço **for** (linha 05) destina-se à busca exaustiva de divisores de um determinado número proveniente do laço **for** externo. Assim, ao percorrer o vetor *Lista_Num*, o laço **for** externo, por meio de seu contador, seleciona sequencialmente e de modo crescente os valores deste vetor e os envia, um após outro, para o laço **for** interno, que toma estes números e busca por seus possíveis divisores. A busca se baseia no uso do operador “%” que, na linguagem C/C++, fornece o resto de uma divisão entre dois valores. Assim, por exemplo, $24\%5$ resulta em 4, pois o resto da divisão de 24 pelo número 5 será 4. Note que, quando a divisão for exata, ou seja, se um número *a* for divisível por um número *b*, então ter-se-á $a\%b = 0$. Pode-se verificar a operação de cálculo de restos na linha 07. Neste caso, todas as vezes que houver uma

divisão exata, por meio da instrução *if*, na linha 08, será acrescida uma unidade à variável *band*, que contabiliza a quantidade de divisores do número testado. Ou seja, como não se tem o número 1 em *Lista_Num*, então um número primo, ao final da verificação de restos, corresponderá a *band* = 1, o que indica que tal número possui apenas um divisor, que é ele mesmo. Logo, por consequência, tal número é primo.

Note que, na linha 7, ocorre o cálculo do resto de modo que, *Lista_Num[i]* é o número enviado ao laço *for* interno e *Lista_Num[j]* assumirá valores menores ou igual a *Lista_Num[i]*. Assim, se pode verificar todos os possíveis divisores de *Lista_Num[i]* e, se houver apenas um divisor, então *band* = 1 e *Lista_Num[i]* será primo. Se tal fato ocorrer, então na linha 15, o número primo será armazenado no vetor destinado ao armazenamento de números primos, *Saida_Primos*.

Por outro lado, se *Lista_Num[i]* possuir mais de um divisor, então *band* > 1 e *Lista_Num[i]* será armazenado diretamente no arquivo de números compostos, como mostra a linha 20. Cabe explicar que a instrução *fprintf* armazena o valor composto *Lista_Num[i]* no ponteiro do tipo FILE, denominado “*NS_Compostos*”, que dá origem ao arquivo de texto *Números_Compostos.txt*.

Por fim, cabe explicar que, as inúmeras operações aritméticas e lógicas feitas pelo método Força Bruta elevam em muito o custo computacional da rotina, tomando um tempo considerável de processamento.

6. ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÕES: ASPECTOS QUALITATIVOS

Este capítulo destina-se à apresentação, análise e discussão dos dados coletados após se trabalhar com o material didático em sala. Especifica-se que, os dados foram coletados utilizando-se o questionário que se encontra no Apêndice B. Assim, aqui se especifica o local onde a pesquisa ocorreu, o público com o qual se trabalhou e o tempo de duração da pesquisa (seção 6.1). Em adição a isso, se discorre sobre a forma de avaliação (seção 6.2) e, em seguida, se apresenta a análise de cunho qualitativo (seção 6.3).

6.1. Local da Pesquisa, Público Participante e Duração

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual São Vicente de Paula, localizada na Rua Colonizador Ênio Pipino S/N, Bairro São Cristóvão, na cidade de Sinop-MT. A presente escola é mantida pelo Governo de Mato Grosso, através da Secretária de Estado de Educação sob jurisdição da Diretoria Regional de Educação (DRE).

Inicialmente a Escola São Vicente de Paula, cuja história começou em 1977, funcionava como extensão da Escola Estadual Nilza de Oliveira Pipino. Apenas em 1986, o prefeito Geraldino Dal'Maso construiu um prédio próprio para a escola, inicialmente com sete salas de aula. Em 1987, a escola tornou-se independente, com documentação e registros próprios. O nome "Escola Estadual de 1º Grau São Vicente de Paula" foi escolhido considerando o pedido do Sr. Vicente de Souza, doador do primeiro terreno para a construção da escola. A Figura 30 mostra uma imagem dos primórdios da referida escola.

Figura 30 – Registro fotográfico da Escola Estadual São Vicente de Paula 1977-1986



Fonte: *escolasaovicente*¹¹

¹¹ Disponível em: <<https://escolasaovicente.blogspot.com/2008/10/histria-da-escola.html>> Acesso em: 01/07/2024.

A educação escolar deste estabelecimento de ensino é composta pelas etapas da Educação Básica: Ensino Médio e EJA (Educação de Jovens e Adultos); apresentando condições propícias à experimentação. Especificamente, esta pesquisa contou com participação de 143 alunos de 7 turmas diferentes com idades entre 15 e 18 anos incompletos matriculados no Ensino Médio Regular.

O Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos” (capítulo 4), o *software*: Primus (capítulo 5) e o questionário de avaliação (Apêndice B) foram aplicados no período de 24/04/2024 a 06/05/2024, em 7 turmas, sendo: quatro turmas da 1ª série, duas turmas da 2ª série e uma turma da 3ª série. O tempo para o desenvolvimento das atividades foi de aproximadamente 1 hora e 30 min.

Os resultados obtidos, coletados via questionário, foram analisados qualitativamente, levando em consideração as respostas dos alunos e a observação direta do pesquisador durante a aplicação das atividades. Os dados coletados proporcionaram uma visão sobre o engajamento e a compreensão dos estudantes com relação aos conteúdos abordados.

6.2. Técnicas de Coleta de Dados, Tratamento e Interpretação

A presente pesquisa utilizou as seguintes técnicas de coleta de dados: observação participante, o questionário e os registros escritos (GIL, 2008). Para o tratamento dos dados, empregou-se a técnica de análise de conteúdo, conforme o preconizado em Bardin (2016). Com base nos dados coletados, foi realizada uma reflexão, buscando esclarecer os significados das considerações e dados obtidos ao longo de toda a pesquisa.

Para a análise qualitativa, a observação é um elemento essencial para a pesquisa, tornando-se particularmente evidente na fase de coleta de dados. Nesta pesquisa, a observação foi utilizada para registrar as impressões da pesquisadora durante a aplicação do material didático, proporcionando impressões sobre a interação dos participantes com o material didático, permitindo uma análise dos dados produzidos. Tem-se então que:

A observação participante, ou observação ativa, consiste na participação real do conhecimento na vida da comunidade, do grupo ou de uma situação determinada. Neste caso, o observador assume, pelo menos até certo ponto, o papel de um membro do grupo. Daí por que se pode definir observação participante como a técnica pela qual se chega ao conhecimento da vida de um grupo a partir do interior dele mesmo (GIL, 2008, p.103).

O questionário (Apêndice B) aplicado de forma anônima, teve o objetivo de coletar considerações a respeito do material didático de modo que, preservando a identidade dos participantes, se pudesse chegar a opiniões mais precisas acerca do material elaborado.

Conforme Bardin (2016, p.125) a análise de conteúdo desenvolve-se em três fases: (a) pré-análise; (b) exploração do material; e (c) tratamento dos dados, inferência e interpretação:

A pré-análise é a fase de organização. Inicia-se geralmente com os primeiros contatos com os documentos (leitura flutuante). A seguir, procede-se à escolha dos documentos, à formulação de hipóteses e à preparação do material para análise. **A exploração do material** constitui, geralmente, uma fase longa e fastidiosa que tem como objetivo administrar sistematicamente as decisões tomadas na pré-análise. Refere-se fundamentalmente às tarefas de codificação, envolvendo: o recorte (escolha das unidades), a enumeração (escolha das regras de contagem) e a classificação (escolha de categoria). **O tratamento dos dados**, a inferência e a interpretação, por fim, objetivam tornar os dados válidos e significativos. Para tanto são utilizados procedimentos estatísticos que possibilitam estabelecer quadros, diagramas e figuras que sintetizam e põem em relevo as informações obtidas. À medida que as informações obtidas são confrontadas com informações já existentes, pode-se chegar a amplas generalizações, o que torna a análise de conteúdo um dos mais importantes instrumentos para a análise das comunicações de massa. (BARDIN, 2016, p.125)

Para interpretar os resultados, o pesquisador precisa ir além da leitura dos dados, com vistas a integrá-los num universo mais amplo em que poderão ter algum sentido. Esse universo é o dos fundamentos teóricos da pesquisa e o dos conhecimentos já acumulados em torno das questões abordadas (GIL, 2008, p.178).

6.3. Experiências e Reflexões

A implementação de novas estratégias pedagógicas é essencial para se fomentar o interesse e a compreensão dos alunos em disciplinas como a Matemática. Com esse objetivo, foi desenvolvido o almanaque educativo, que utiliza o personagem Leãozinho como atrativo para se ensinar sobre números primos de maneira lúdica e envolvente. Este almanaque foi aplicado nas diferentes séries do Ensino Médio para se avaliar sua eficácia e impacto no aprendizado dos alunos. Além do almanaque, o *software* “Primus” foi desenvolvido e utilizado para diálogos e exemplificações referentes aos números primos. Assim, diante das atividades executadas com estes objetos de aprendizagem, cabe expressar a análise quantitativa abaixo.

6.3.1. Compartilhando Vivências

A seguir são apresentadas observações e análises com foco nos dados coletados durante a aplicação do almanaque nas turmas da 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio. Como o almanaque foi aplicado em sete turmas diferentes, optou-se por organizar a apresentação dos dados por série para maior concisão e objetividade. Desta forma, são destacadas as impressões gerais mais relevantes sobre as aplicações em cada série, buscando facilitar a compreensão dos resultados.

➤ **Aplicação 1, 2, 3 e 4 – 1ª série**

Objetivo Inicial: Observar como os alunos se saíam com explicações e orientações sobre as atividades.

Atividade: Explicação sobre números primos e desenvolvimento das atividades do almanaque (90 min).

Observações:

- Notou-se que os alunos estavam engajados na proposta.
- Os alunos, de modo geral, elogiaram as atividades.
- Cerca de 5 alunos não demonstraram interesse pelas atividades.

Figura 31 – Registro dos alunos desenvolvendo as atividades com o almanaque



Fonte: Acervo da pesquisa.

A imagem da Figura 31 mostra os alunos, quando da execução das atividades.

➤ **Aplicação 5 e 6 – 2ª série**

Objetivo Inicial: Observar se os alunos conseguiriam realizar as atividades sem orientações prévias.

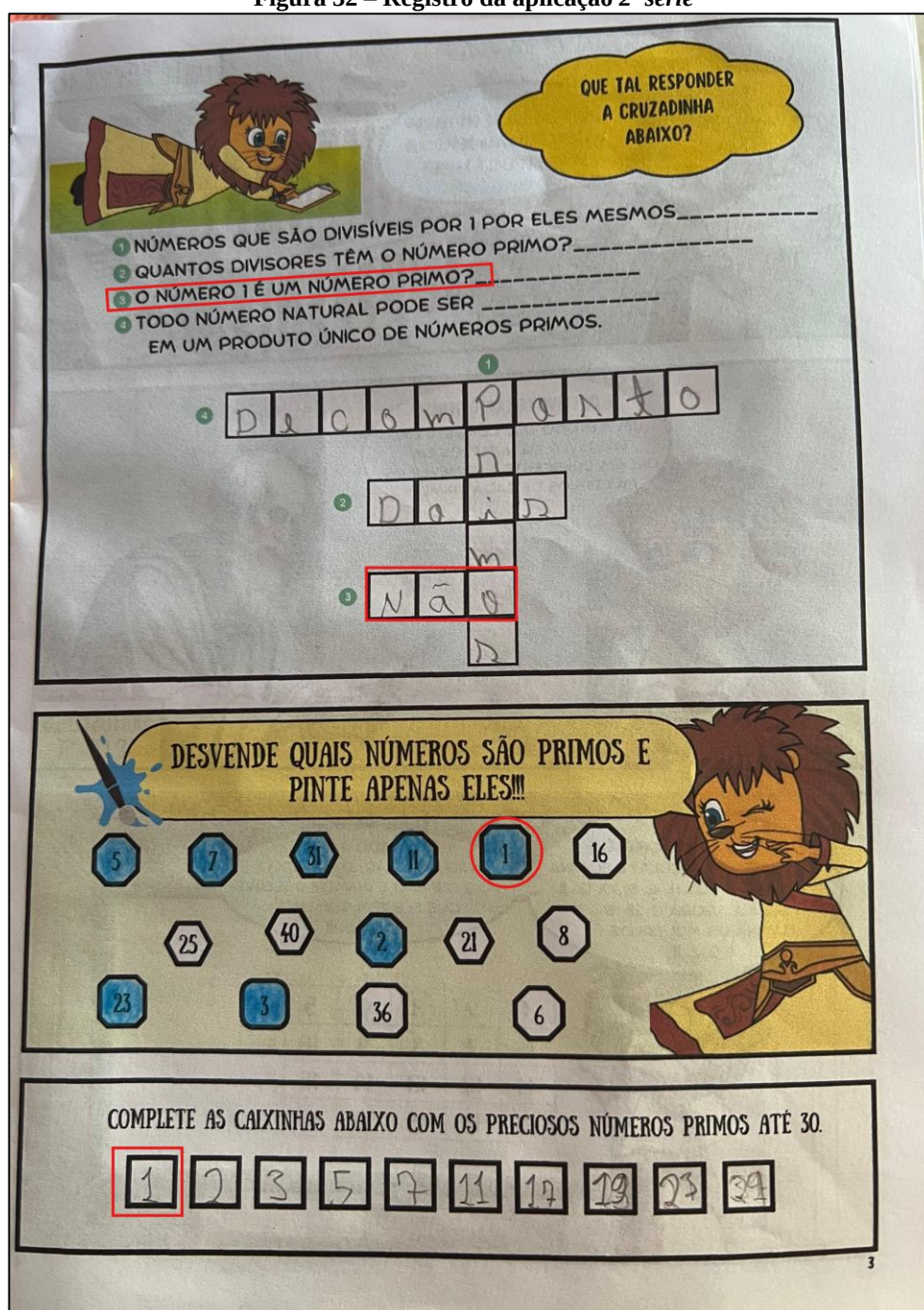
1ª Aula (45 min):

Atividades: Apresentação do almanaque.

Observações:

- A pesquisadora não relembrou o conceito de números primos.
- A apresentação inicial do material, sem uma revisão dos conceitos básicos, levou a uma falta de compreensão e dúvidas por parte os alunos.

Figura 32 – Registro da aplicação 2ª série



QUE TAL RESPONDER A CRUZADINHA ABAIXO?

1. NÚMEROS QUE SÃO DIVISÍVEIS POR 1 POR ELES MESMOS _____

2. QUANTOS DIVISORES TÊM O NÚMERO PRIMO? _____

3. O NÚMERO 1 É UM NÚMERO PRIMO? _____

4. TODO NÚMERO NATURAL PODE SER EM UM PRODUTO ÚNICO DE NÚMEROS PRIMOS. _____

Decomposto

Divisor

DESVENDE QUAIS NÚMEROS SÃO PRIMOS E PINTE APENAS ELES!!!

5 7 31 11 1 16

25 40 2 21 8

23 3 36 6

COMPLETE AS CAIXINHAS ABAIXO COM OS PRECIOSOS NÚMEROS PRIMOS ATÉ 30.

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29

Fonte: Acervo da pesquisa.

Na Figura 32, pode-se verificar os erros cometidos pelos alunos ao realizarem as atividades sem orientações prévias. Parte dos alunos foram direto para o caça palavras alegando que não haviam entendido.

Por sua vez, a Figura 33 mostra duas alunas, tentando resolver as atividades cooperativamente, diante das dificuldades impostas.

Figura 33 – Registro dos alunos caça palavras



Fonte: Acervo da pesquisa, 2024.

2ª Aula (45 min)

Atividade: Efetuou-se a explicação sobre números primos.

Observações:

- Os alunos apresentaram falta de maturidade para compreender os números primos apenas com a leitura do almanaque.
- Foi necessário relembrar conceitos de múltiplos, divisores e números primos.
- O *software* foi apresentado às turmas como um gerador de números primos, buscando demonstrar a grandeza dessa sequência.
- Os alunos demonstraram interesse nas atividades do almanaque.

➤ Aplicação 7 – 3ª série A

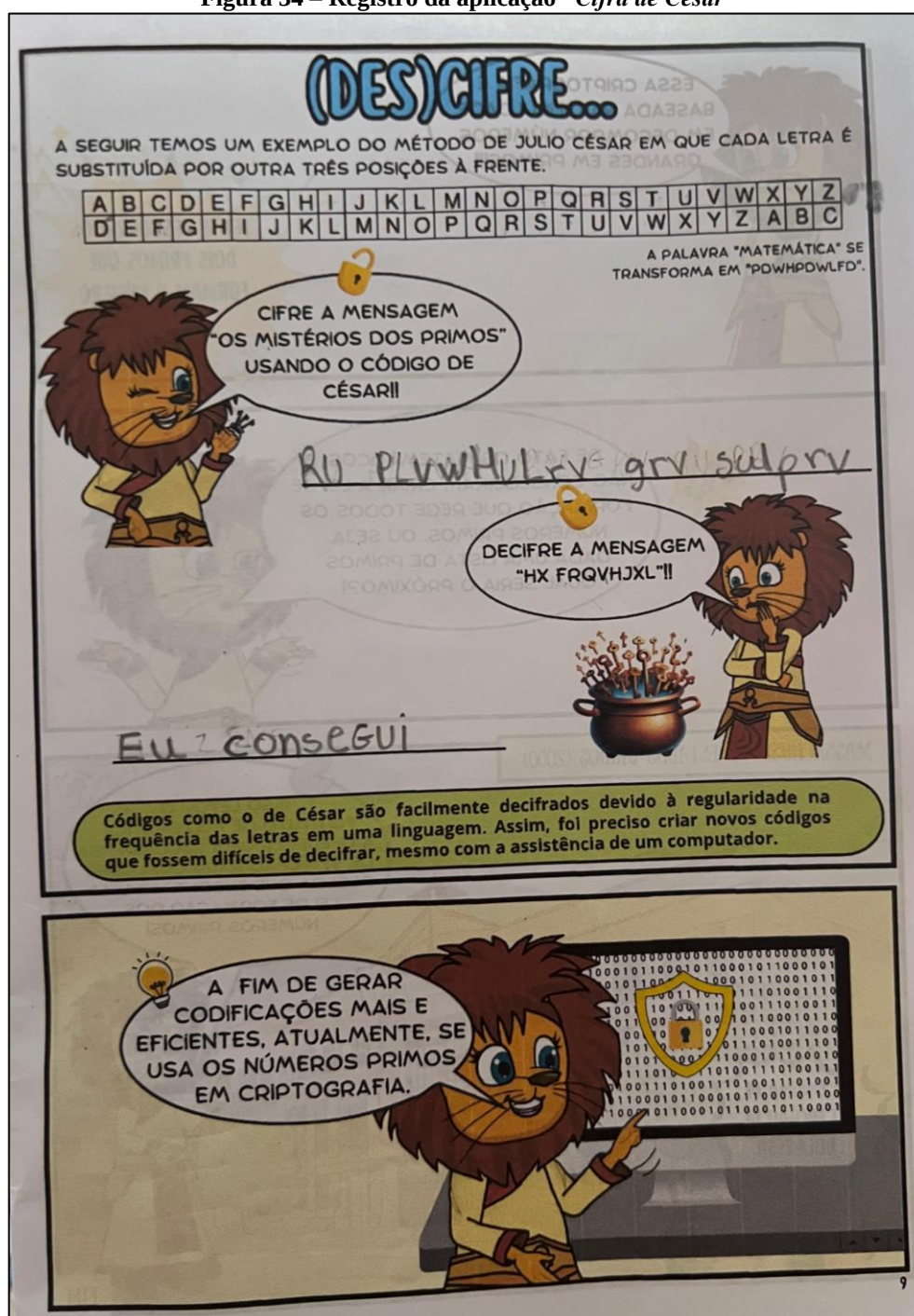
1ª Aula (50 min):

Atividade: Explicação prévia sobre os números primos.

Observações:

- Os alunos elogiaram o almanaque e pediram mais atividades como as desta aula.
- Os alunos escreveram mensagens criptografadas utilizando a Cifra de César.
- Houve participação de alunos que normalmente não participavam das atividades.

Figura 34 – Registro da aplicação “Cifra de César”



Fonte: Acervo da pesquisa.

A Figura 34 ilustra uma atividade da Cifra de César resolvida por um aluno.

6.3.2. Discursões e Reflexões

Os resultados obtidos variaram entre as turmas. Algumas mostraram maior engajamento e outras enfrentaram maiores dificuldades. A interação entre os alunos foi

especialmente eficaz, sugerindo que as atividades desenvolvidas com o material didático podem aumentar o engajamento e a compreensão dos alunos a respeito dos números primos. “O lúdico é também uma maneira eficiente de unir uma atividade agradável e motivadora com o conteúdo educacional que o educador pretende transmitir.” (CATONIO, MUNIZ, 2014, p. 63). Apresenta-se a seguir uma reflexão sobre as observações anteriormente destacadas para as atividades.

➤ **Reflexões da aplicação 1, 2, 3 e 4 – 1ª série**

A explicação inicial sobre o material e o esclarecimento dos termos utilizados no almanaque foram, sem dúvida, fatores positivos que contribuíram para o engajamento dos alunos. Ao compreenderem melhor o conteúdo e os objetivos do almanaque, os estudantes puderam se sentir mais seguros e interessados em explorar suas páginas.

A motivação é provavelmente o fator mais importante, a fim de melhorar a aprendizagem. (...) É relevante o papel do professor como mediador desse caminho, devendo ele observar e criar situações para trabalhar e desenvolver as habilidades e competências dentro da sala de aula, propiciando a motivação entre os alunos (MELLO, RUBIO, 2013, p.598)

Normalmente, os alunos não apresentam um alto nível de engajamento ou comprometimento no desenvolvimento de atividades escolares tradicionais. No entanto, o almanaque conseguiu romper essa barreira ao combinar elementos educativos com aspectos lúdicos e interativos. Isso sugere que a inclusão de recursos didáticos que despertam a curiosidade e a criatividade dos alunos pode ser uma estratégia eficaz para aumentar o envolvimento e a participação em sala de aula. Conforme expressam Catonio e Muniz (2014, p. 62):

Atividades lúdicas envolvem as mais variadas áreas de estimulação, podendo criar diversas situações em que as crianças e os jovens estarão com corpo e mente envolvidos, aprendendo e se socializando ao mesmo tempo; lendo, escrevendo e desenvolvendo o raciocínio, a criatividade e a compreensão do mundo. Lúdico é brincadeira e brincar significa divertir-se, entreter-se, distrair-se, comunicar-se, ter o prazer do brincar e ao mesmo tempo de ser levado a sério.

Essa experiência levou a refletir sobre a relevância de se utilizar outras metodologias pedagógicas. Como Sousa e Ventura (2022, p.504) apontam, “É importante investir em metodologias que priorizem o aprender fazendo, a autoria, a participação ativa, o interesse e o envolvimento discente nas atividades propostas, caso contrário, os alunos se distanciarão cada vez mais do processo de aprender”. Quando os educadores se esforçam para tornar o aprendizado

mais atraente e significativo, utilizando materiais que vão além do convencional, eles promovem um ambiente mais dinâmico e estimulante.

O jogo como condutor de um determinado conteúdo motiva os educandos e os educadores, mas não dá para ser trabalhado todos os dias, é preciso haver equilíbrio entre jogar e ensinar, pois, ainda hoje, alguns pais e escolas veem o jogo como um momento de lazer e não de aprendizado. (CATONIO, MUNIZ, 2014, p. 64)

Assim, considera-se essencial continuar explorando e implementando abordagens que despertem o interesse dos estudantes, ao mesmo tempo que resgatam conceitos matemáticos basilares, garantindo uma educação mais inclusiva e participativa.

➤ **Reflexões das aplicações 5 e 6 – 2ª série**

Ao entregar o almanaque aos alunos sem realizar uma orientação e uma explicação sobre os conceitos, se acabou por se gerar dúvidas e dificuldades entre eles. Destaca-se que são vários os motivos relacionados com as dificuldades de se desenvolver as atividades inicialmente.

As dificuldades de aprendizagem em Matemática podem estar relacionadas a impressões negativas oriundas das primeiras experiências do aluno com a disciplina, à falta de incentivo no ambiente familiar, à forma de abordagem do professor, a problemas cognitivos, a não entender os significados, à falta de estudo, entre outros fatores. (PACHECO e ANDREIS, 2017, p. 106)

A presente experiência mostrou que é necessário estar preparado para ajustar o material com base nos comentários dos alunos. Na visão da professora/pesquisadora, destaca-se que os conhecimentos necessários para desenvolver as atividades do almanaque são considerados básicos, levando em conta que os alunos estão no Ensino Médio. No entanto, é justamente esse “básico” que, por vezes, se torna o maior obstáculo em sala de aula.

Observa-se que essas são as dificuldades mais presentes em sala de aula e que são frutos da ausência de conceitos simples, muitas vezes pouco trabalhados pelos educadores e, por esse fato, os alunos não conseguem no processo de ensino, suprir suas necessidades. (SOUSA e VENTURA, 2022, p. 493)

Muitos estudantes chegam ao Ensino Médio com lacunas significativas em conceitos matemáticos básicos, o que frequentemente contribui para com a falta de motivação para enfrentar as atividades propostas. Diante disto, se reflete sobre a necessidade de realizar reposições de aprendizagem, conforme a BNCC aponta “as dificuldades de aprendizagem precisam de intervenção na sala de aula e o quanto antes ocorrerem a detecção e a atuação do profissional docente menores serão as lacunas e os efeitos resultantes disso.” (BRASIL, 2018).

Destaca-se que ao explicar os conceitos fundamentais como múltiplos, divisores e números primos, e utilizar o *software* “Primus” como um gerador de números primos. Observou-se um aumento significativo na compreensão das atividades e no interesse dos alunos. Segundo Rocha, Ramos e Brasil (2019, p.9-10) “A tecnologia é uma das soluções favoráveis para o ensino e aprendizagem, pois quanto mais possibilidades de ambas forem trazidas para o espaço escolar, mais atenção e participação dos “nativos digitais” serão alcançadas. Logo, destaca-se que o uso consciente e planejado da tecnologia na educação pode potencializar o ensino de Matemática.

➤ Reflexões da aplicação 7 – 3ª série do Ensino Médio

Os alunos apresentaram entusiasmo em desenvolver as atividades do almanaque. Falas como “Professora traz mais atividades assim!” foram destaque nessa turma. Em particular essa turma sempre demonstrou baixo engajamento nas atividades em sala. Nessa aula específica, porém, os alunos desenvolveram e brincaram com as atividades. Destaca-se que:

(...) na ausência de motivação, temos queda de investimento pessoal, portanto, da qualidade na tarefa de aprendizagem, pois os alunos estudam pouco ou nada e, por conseguinte, aprendem pouco. Logo, junto à necessidade de que o aluno adquira ou construa os conceitos científicos corretamente, está a exigência de despertar o interesse para aprender esses conceitos. Se não existir interesse, a estrutura afetiva se torna desfavorável e, do ponto de vista da motivação, há perda na qualidade acadêmica por falta de envolvimento do aprendiz. (LABURÚ, 2006, p.388)

Acredita-se que recursos como o material didático e o *software* “Primus” são essenciais para fortalecer o engajamento entre alunos e professores. Pode-se reconhecer que, em muitos casos, tanto estudantes quanto docentes enfrentam desafios de motivação devido às mais variadas adversidades que ocorrem na Educação Básica. Esses recursos, no entanto, podem atuar como ferramentas para superar essas barreiras, promovendo um ambiente de aprendizado mais estimulante e engajando. Como Heinzman e Pellenz (2014, p.156) afirmam:

A variedade das atividades apresentadas em sala influencia o rendimento da aprendizagem, a empatia e a consequente relação dos alunos com o professor. Eles aceitam melhor os argumentos desse e geralmente as executam de forma mais efetiva. Conforme o andamento da aprendizagem, é preciso planejar e adequar-se de acordo com as temáticas e diferentes enfoques aos quais se busca direcionar os estudos, considerando os pontos que evoluíram ou progrediram.

Assume-se que atividades diferenciadas atuam como “suspiro” no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Elas permitem que os alunos enxerguem a Matemática sob uma nova perspectiva, enquanto o professor consegue desenvolver um maior engajamento com a turma. Cabe supor, no entanto, que essas atividades nem sempre garantirão sucesso imediato, mas se acredita que, ao diversificar as atividades em sala, aumentam-se as chances de despertar o interesse e a motivação dos alunos e do professor.

7. ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÕES: ASPECTOS QUANTITATIVOS

Conforme o exposto anteriormente, foi realizada a coleta de opiniões dos alunos com os quais se trabalhou o almanaque. Tal coleta se deu por meio da aplicação de um questionário avaliativo (Apêndice B), elaborado e relacionado com as atividades propostas. Se coletou dados nas séries 1ª série *E*, *F*, *G* e *N*, 2ª série *B* e *C*, e 3ª série *A*, durante o período de 24/04/2024 a 06/05/2024, na Escola Estadual São Vicente de Paula, Sinop - MT, totalizando uma amostra de 143 questionários aplicados. As quantidades de alunos por série são apresentadas no Quadro 5.

Quadro 5 – Número de alunos que preencheram o questionário por série avaliada.

Séries Avaliadas	Número de Alunos	Porcentagem da Amostra
1ª série <i>E</i>	25	17,48
1ª série <i>F</i>	25	17,48
1ª série <i>G</i>	22	15,38
1ª série <i>N</i>	12	8,39
2ª série <i>B</i>	30	20,98
2ª série <i>C</i>	22	15,38
3ª série <i>A</i>	7	4,91
Total	143	100,00

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Apesar da primeira questão do questionário prever que este poderia ser aplicado também aos professores, dado o número ínfimo destes, optou-se por não se aplicar o questionário a eles, devido à representatividade igualmente diminuta da amostra.

Para as análises relativas às questões de 2 a 4, foram construídos diversos gráficos de barras para se descrever os cenários de opiniões e suas porcentagens inerentes à cada uma das séries escolares em particular e também em conjunto. Assim, as análises se deram de forma desagregada (por série) e agregada (totalidade das séries).

Em seguida analisou-se os dados relativos à questão 5, na qual cada aluno atribuía uma nota de 0 a 10 às atividades executadas. Mais uma vez as análises se deram de forma desagregada, por série, e de forma agregada, considerando a totalidade das amostras. Neste caso, foram calculadas médias aritméticas, desvios padrões, variâncias e coeficientes de variações dos dados, além de se construir histogramas e gráficos boxplot, com o objetivo de avaliar o comportamento da distribuição destes dados.

Posteriormente, foram aplicados os testes estatísticos de normalidade de Shapiro-Wilk, para verificar a normalidade dos dados. Segundo a literatura, verifica-se que o comportamento de normalidade é raro em dados de opinião. No entanto, caso os dados apresentassem normalidade, poder-se-ia fazer uso de testes paramétricos. Caso contrário, se utilizaria testes

não paramétricos. De antemão, se esclarece que foi utilizado o teste não paramétrico de postos sinalizados de Wilcoxon para localização, que considera a distribuição das notas livre, com presença de assimetria ou não normalidade dos dados. O referido teste foi utilizado para se investigar se as médias encontradas em cada uma das séries de notas coletadas, desagregadas e agregadas, possuíam o indicativo de serem maiores ou menores ou iguais à média encontrada nestes dados.

Ato contínuo, para a análise da questão 6, foram construídos gráficos de setores (gráficos de “pizza”) para apresentar visualmente o quantitativo e as porcentagens de opiniões “sim” e “não”, referentes à possível indicação da atividade proposta para alguém. Neste caso, a análise também se deu de forma agregada e desagregada.

Por fim, com relação à questão 7, relacionada às opiniões particulares dos alunos sobre a atividade, cabe informar que os resultados obtidos não foram trabalhados quantitativamente, mas embasam as análises qualitativas, presentes no capítulo 6.

7.1. Resultados e Discussões

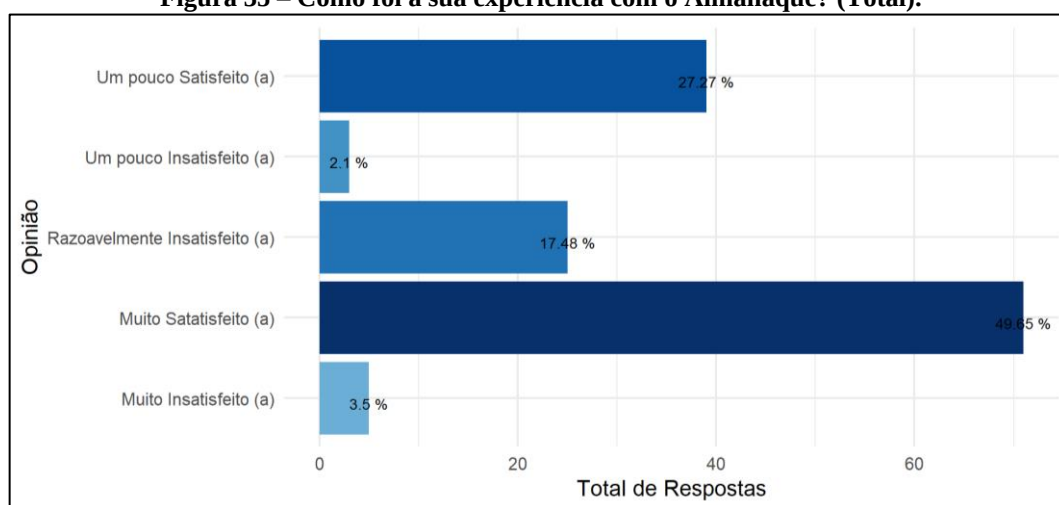
Nesta seção apresentam-se os resultados e as análises das hipóteses mencionadas acima, considerando dados, agregados e desagregados, para cada questão que compõe o questionário. As análises dos dados relativos a cada série (dados desagregados) são apresentadas resumidamente e as análises dos dados agregados são apresentadas com maiores detalhes. Apesar de se apresentar aqui as análises resumidas dos dados desagregados, cabe esclarecer que, as análises detalhadas de tais dados podem ser encontradas no Apêndice C. Nas subseções que seguem, são apresentadas as análises dos dados obtidos para cada questão do questionário.

7.1.1. Análise da Questão “Como foi a sua experiência com o Almanaque?”

Os dados relativos à questão 2, que se refere à opinião sobre a experiência com o Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”, estão sintetizados no gráfico de barras que se encontra na Figura 35.

A partir da Figura 35, observa-se que 76,92% dos alunos participantes estão muito satisfeitos e um pouco satisfeitos com a experiência com material desenvolvido e 23,08% dos alunos apresentam algum grau de insatisfação. Assim, verifica-se a predominância de algum grau de satisfação, considerando a totalidade dos dados. Tal fato mostra a boa receptividade ao material por parte do aluno.

Figura 35 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (Total).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

A Tabela 1 mostra a distribuição dos níveis de satisfação por turma. Os resultados indicam uma variação na experiência dos alunos, com percentuais de satisfação geral (incluindo "muito satisfeito" e "um pouco satisfeito") variando entre 64% e 91,7%, enquanto que os níveis de insatisfação (incluindo "um pouco insatisfeito", "razoavelmente insatisfeito" e "muito insatisfeito") variam de 8,3% a 36%.

Tabela 1 – Como foi a sua experiência com Almanaque? (Por Turma)

Respostas	1º E	1º F	1º G	1º N	2º B	2º C	3º A	Total
Um pouco satisfeito	32%	32%	13,6%	41,7%	33,3%	18,2%	14,29%	27,3%
Um pouco insatisfeito	8%	0%	0%	8,33%	0%	0%	0%	2,1%
Razoavelmente insatisfeito	28%	12%	13,6%	0%	26,7%	18,2%	0%	17,5%
Muito satisfeito	32%	52%	72,7%	50%	33,3%	59,1%	71,4%	49,6%
Muito insatisfeito	0%	4%	0%	0%	6,7%	4,5%	14,3%	3,5%

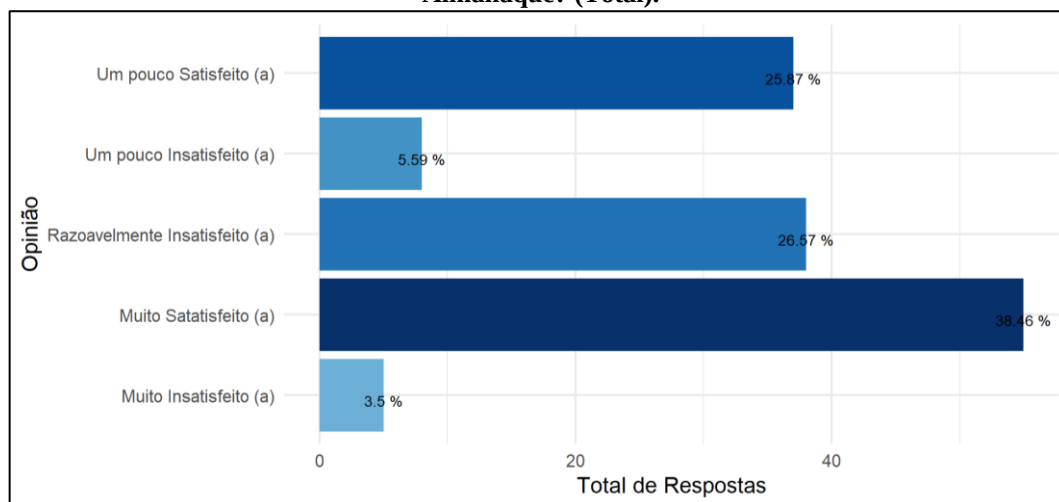
Fonte: Resultados da Pesquisa.

A turma 1º N apresenta a maior porcentagem de alunos muito satisfeitos (91,7%), seguida pela turma 1º G (86,4%). Em contrapartida, a turma com o maior nível de insatisfação é a 1º E, na qual 36% dos alunos relatam algum grau de insatisfação, com 28% estando razoavelmente insatisfeitos e 8% se sentindo um pouco insatisfeitos. Os resultados apresentados sugerem que a experiência com o material proposto foi majoritariamente positiva, com uma maioria significativa de alunos expressando algum grau de satisfação.

7.1.2. Análise da Questão “Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque?”

Os dados relativos à questão 3, que se referem à compreensão dos alunos sobre o passo a passo e o aprendizado das atividades propostas no Almanaque "Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos", estão sintetizados na Figura 36 e na Tabela 2.

Figura 36 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (Total).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Os dados mostram que, 64,33% dos alunos dessa turma estão muito satisfeitos e um pouco satisfeitos quanto à compreensão do passo a passo das atividades contidas no material. Por sua vez, 35,66% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

Tabela 2 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (Por turma).

Estatísticas	1º E	1º F	1º G	1º N	2º B	2º C	3º A	Total
<i>Um pouco satisfeito</i>	24%	28%	18,2%	25%	30,0%	22,7%	42,8%	25,9%
<i>Um pouco insatisfeito</i>	12%	8%	0%	0%	3,3%	9,1%	0%	5,6%
<i>Razoavelmente insatisfeito</i>	32%	24%	13,6%	25%	40,0%	18,2%	28,6%	26,6%
<i>Muito satisfeito</i>	32%	40%	59,1%	50%	23,4%	45,5%	14,3%	38,5%
<i>Muito insatisfeito</i>	0%	0%	9,1%	0%	3,3%	4,5%	14,3%	3,5%

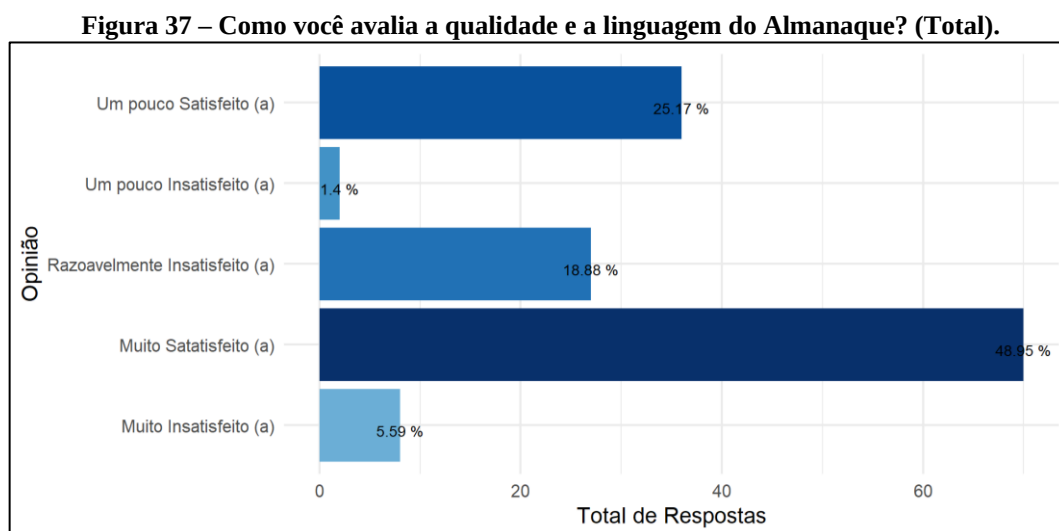
Fonte: Resultados da Pesquisa.

Conforme a Tabela 2, que sintetiza os níveis de satisfação por turma, o maior índice de satisfação foi verificado na turma 1º G, com 77,3% dos alunos possuindo algum grau de satisfação (incluindo "muito satisfeito" e "um pouco satisfeito"). Deste total, 59,1% dos alunos ficaram muito satisfeitos. Verificou-se que, as turmas 1º N e 1º F também mostraram níveis elevados de satisfação, com 75% e 68%, respectivamente.

Em contrapartida, a turma 2º B apresentou 46,6% de algum grau de insatisfação (incluindo "um pouco insatisfeito", "razoavelmente insatisfeito" e "muito insatisfeito"), sendo este percentual uma das avaliações negativas mais expressivas. O nível de insatisfação também foi alto na turma 3º A, na qual o percentual atingiu 42,9%. Tais resultados podem indicar uma necessidade de ajustes para melhor atender aos alunos, com relação ao entendimento do passo a passo das atividades. Apesar destes percentuais, ainda se pode concluir pela predominância da satisfação dos alunos, com relação à compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas.

7.1.3. Análise da Questão “Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque?”

Os dados coletados, relativos à questão 4, que busca estimar a opinião dos alunos quanto à qualidade e a linguagem do almanaque "Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos", são apresentados na Figura 37 e na Tabela 3.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Da análise do gráfico acima, depreende-se que 74,12% dos alunos ficaram muito satisfeitos e um pouco satisfeitos com a qualidade e a linguagem do Almanaque. Ao se analisar os dados por turma, destacaram-se os resultados das turmas 1º F e 1º N com, respectivamente, 92% e de 91,6% dos alunos muito satisfeitos ou um pouco satisfeitos (Tabela 3), o que sugere que o material foi particularmente bem recebido por essas turmas.

Tabela 3 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (Por turma).

Estatísticas	1º E	1º F	1º G	1º N	2º B	2º C	3º A	Total
<i>Um pouco satisfeito</i>	28%	40%	9,1%	33,3%	30,0%	9,1%	28,6%	25,2%
<i>Um pouco insatisfeito</i>	4%	0%	0%	8,3%	3,3%	0%	0%	1,4%
<i>Razoavelmente insatisfeito</i>	24%	8%	13,6%	0%	30,0%	22,7%	28,6%	18,9%
<i>Muito satisfeito</i>	36%	52%	72,7%	58,3%	33,3%	59,1%	28,6%	48,9%
<i>Muito insatisfeito</i>	8%	0%	4,6%	0%	6,7%	9,1%	14,2%	5,6%

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Apesar da satisfação geral, as turmas do 2º B e 3º A apresentaram um percentual significativo de alunos com algum nível de insatisfação (respectivamente, 40% e 42,8%) com a qualidade e linguagem do material. Essas porcentagens de insatisfação sugerem que, embora o material tenha sido bem recebido, há margem para ajustes. Por outro lado, dados os níveis de satisfação obtidos, entende-se que tais alterações devam ocorrer de modo preciso e não generalizado, a fim de não se empreender alterações desnecessárias e pouco eficazes.

7.1.4. Análise da Questão “Avalie, em uma escala de 0 a 10, a sua satisfação geral com o Almanaque?”

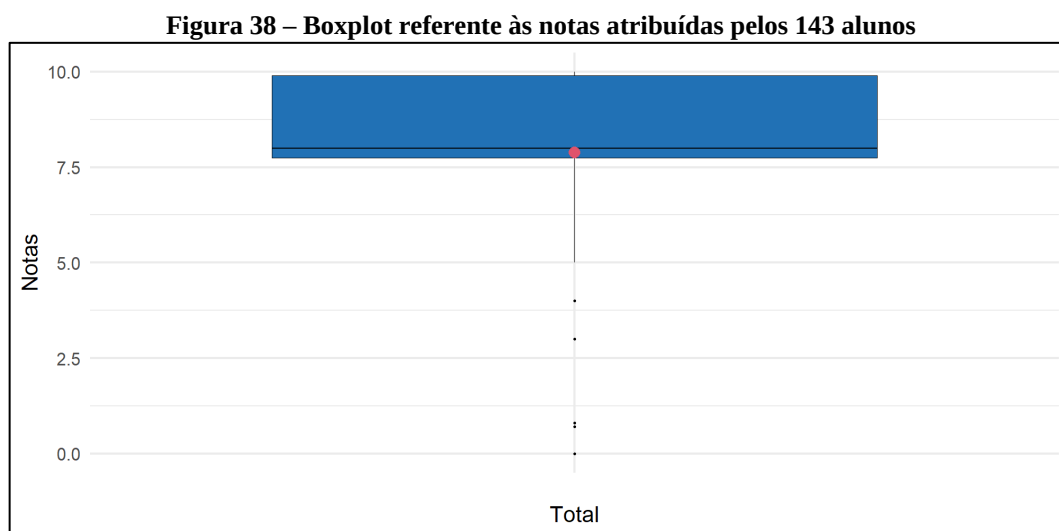
A análise da questão 5 diz respeito à nota relacionada à satisfação geral dos alunos com o almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”, considerando a totalidade dos entrevistados. A Tabela 4 apresenta as medidas descritivas calculadas para esta questão.

Tabela 4 – Análise descritiva das notas atribuídas pelo total dos alunos.	
Estatística das Notas atribuídas	Valores
Número de observações: n_{total}	143
Média: $\bar{x}_{total}$	7,88
Variância: S_{total}^2	6,27
Desvio Padrão: S_{total}	2,50
Coefficiente de Variação: CV_{total}	31,77 %

Fonte: Resultados da Pesquisa.

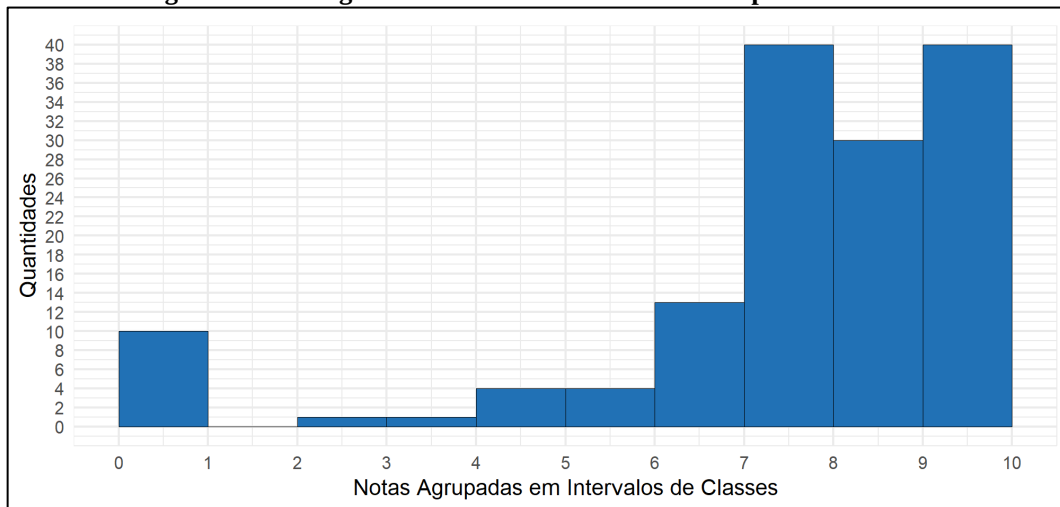
A nota média dos 143 alunos que responderam ao questionário foi de $\bar{x}_{total} = 7,88$, podendo ser considerada alta. A variação dos dados é baixa, se o coeficiente de variação $CV_{total} = 31,77\%$ for observado. As demais medidas de dispersão dos dados são igualmente baixas.

A seguir, nas Figuras 38, 39 e 40 são apresentados os gráficos boxplot, histograma e histograma com sua função de densidade de probabilidade, relativos aos dados coletados, inerentes à questão 5.



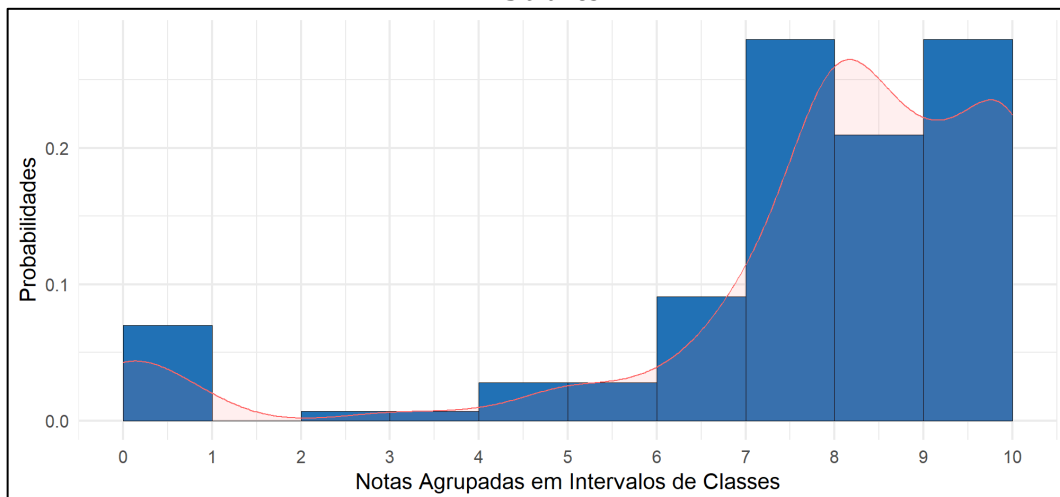
Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 39 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 143 alunos



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 40 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente às notas atribuídas pelos 143 alunos



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Analisando os gráficos das Figuras 38, 39 e 40, verifica-se que a maior parte das notas atribuídas pelos alunos se concentram entre 7 e 10. Depreende-se aqui que esta assimetria à direita seja um ponto positivo, pois revela que a percepção média dos alunos acerca do almanaque tende a se manter favorável ou melhorar. Tal fato pode ser o reflexo de uma boa recepção ao almanaque. Com o intuito de avaliar este fato de forma mais rigorosa, foi realizado o teste de normalidade de Shapiro Wilk nestes dados, conforme o explicitado na Tabela 5.

Tabela 5 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk para as notas dos alunos.

Estatística W	p-valor
0,73	6,09e-15
<i>H₀: os dados das notas dos alunos apresentam normalidade</i>	
ou	
<i>H₁: os dados das notas dos alunos não apresentam normalidade</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Com base no apresentado na tabela anterior, rejeita-se H_0 , ao nível de significância $\alpha = 10\%$. Nestes termos, infere-se que haja indícios de que estes dados não apresentem normalidade. Ou seja, tais dados possuem assimetria conforme o que pôde ser visto nos gráficos das Figuras de 38 a 40. Este comportamento é algo esperado, já que os dados são referentes a notas advindas de opiniões distintas de alunos.

Em seguida, apresenta-se o resultado de dois testes não paramétricos de Wilcoxon com postos sinalizados, que foram realizados a fim de avaliar:

1. Se há indicativo de que a nota média $\bar{x}_{total} = 7,88$ possa apresentar valor maior que o descrito ou permanecer como está;
2. Se há indícios de que a nota média possa diminuir ou permanecer conforme o calculado ($\bar{x}_{total} = 7,88$).

Estes testes estão discriminados nas Tabelas 6 e 7.

Tabela 6 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{total} = 7,88$, possa ser maior.

Estatística T	p-valor
6932	1,53e-04
$H_0: \mu = \bar{x}_{total} = 7,88$	
ou	
$H_1: \mu > \bar{x}_{total} > 7,88$	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Tabela 7 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{total} = 7,88$, possa ser menor.

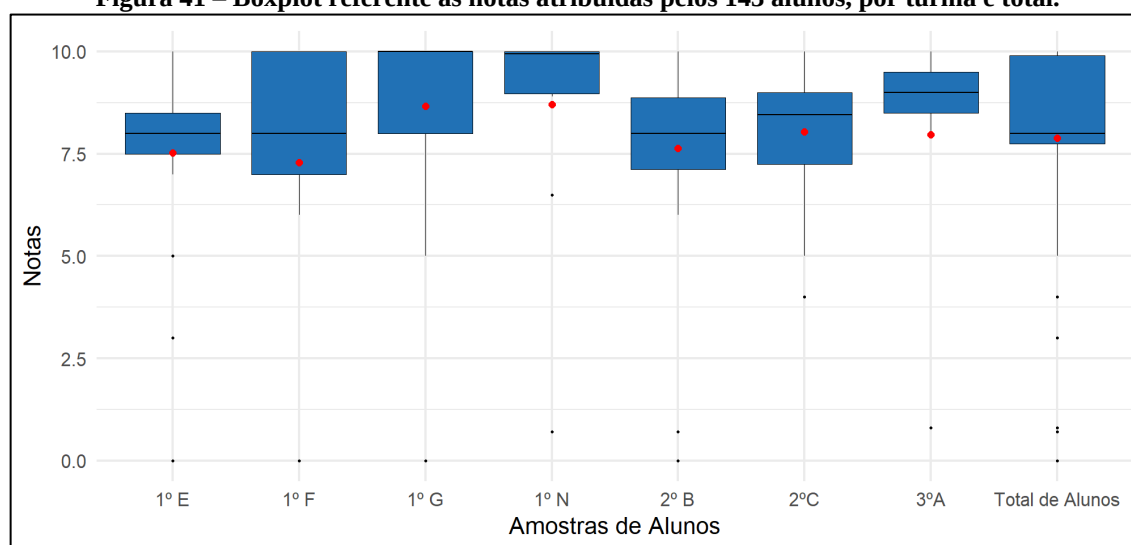
Estatística T	p-valor
21	0,99
$H_0: \mu = \bar{x}_{total} = 7,88$	
ou	
$H_1: \mu < \bar{x}_{total} < 7,88$	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

As Tabelas 6 e 7 indicam que há, respectivamente, uma rejeição e uma aceitação de H_0 em cada teste. Assim, há o indicativo de que a média das notas, $\bar{x}_{total} = 7,88$, poderá ser maior que este valor e que ela também não correrá o risco diminuir, considerando a amostra analisada ao nível de significância de $\alpha = 10\%$. Este resultado mostra que há uma perspectiva de aumento e de manutenção da nota média das notas dada à atividade proposta.

Os dados das avaliações dos alunos participantes da atividade e, consequentemente, dos questionários, estão resumidos no gráfico da Figura 41 e na Tabela 8.

Figura 41 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 143 alunos, por turma e total.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Tabela 8 – Estatísticas descritivas e resumo dos testes aplicados.

Estatísticas	1º E	1º F	1º G	1º N	2º B	2º C	3º A	Total
<i>n</i>	25	25	22	12	30	22	7	143
$\bar{x}$	7,52	7,28	8,66	8,71	7,63	8,04	7,97	7,88
S^2	4,34	11,75	5,51	7,38	4,80	3,27	10,47	6,27
<i>S</i>	2,08	3,43	2,35	2,72	2,19	1,81	3,24	2,50
<i>CV</i>	27,71	47,09	27,11	31,20	28,70	22,51	40,60	31,78
Teste T_1	R	R	R	R	R	A	A	R
Teste T_2	A	A	A	A	A	A	A	A

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Na tabela acima tem-se:

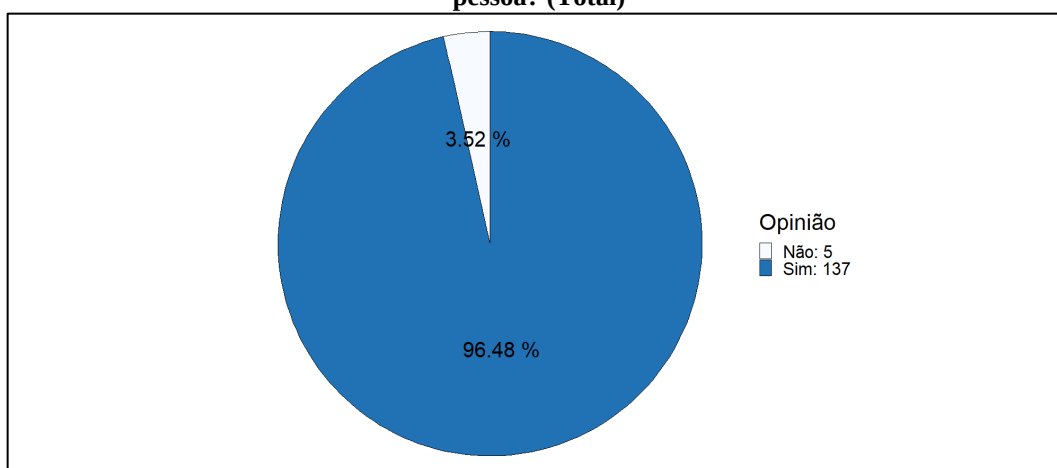
- **Teste T_1 :** teste de Wilcoxon com as seguintes hipóteses: $H_0: \mu = \bar{x}$ ou $H_1: \mu > \bar{x}$;
- **Teste T_2 :** teste de Wilcoxon com as seguintes hipóteses: $H_0: \mu = \bar{x}$ ou $H_1: \mu < \bar{x}$;
- **A:** Aceitação de H_0 ;
- **R:** Rejeição de H_0 .

A análise do gráfico da Figura 41 juntamente com a Tabela 8 mostra que a média das notas por turma e do total variam entre 7,28 e 8,04. Os gráficos boxplot mostram que a distribuição da maioria das notas é assimétrica a direita, concentrando-se entre as notas de 6 e 10. Os testes de Wilcoxon indicam que as turmas 1ª série E, 1ª série F, 1ª série G, 1ª série N, 2ª série B e Total, tem indícios de manutenção de sua média descritiva e a perspectiva de aumento ao nível de significância $\alpha = 10\%$. Por sua vez, a 2ª série C e a 3ª série A apresentam indicativo apenas de manutenção de suas médias.

7.1.5. Análise da Questão “Você recomendaria o Almanaque, para outra pessoa?”

Com a questão 6 do questionário buscou-se investigar se os alunos recomendariam o Almanaque "Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos" para outras pessoas. Os resultados obtidos indicam uma alta receptividade por parte dos estudantes. A Figura 42 apresenta um gráfico de setores que sintetiza as respostas dos 142 alunos que responderam à pergunta. Um aluno da 2ª série B não respondeu a esta questão, reduzindo o total de entrevistados, neste caso, para 142.

Figura 42 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos” para outra pessoa? (Total)



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Os resultados apresentados na Tabela 9 reforçam a ideia de que o material foi bem recebido pelos alunos. A expressiva maioria dos estudantes, 96,5%, afirmou que recomendaria o almanaque, enquanto apenas 3,5% dos entrevistados alegaram que não o recomendariam. O pequeno percentual de alunos que alegou que não recomendaria o material foi proveniente das turmas 1º E (4%), 1º G (4,5%), 2º B (6,9%), e 2º C (4,5%). Esses dados evidenciam que o almanaque foi bem aceito e valorizado pela maioria dos estudantes, o que reflete, tanto a qualidade das atividades, quanto a acessibilidade do conteúdo.

Tabela 9 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (Por turma).

Respostas	1º E	1º F	1º G	1º N	2º B	2º C	3º A	Total
Não	4%	0%	4,5%	0%	6,9 %	4,5%	0%	3,5%
Sim	96%	100%	95,5%	100%	93,1%	95,5%	100%	96,5%

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Todos esses resultados revelam uma boa aceitação do material proposto, validando-o como uma ferramenta eficaz para o ensino de números primos. A alta taxa de recomendação, somada aos índices de satisfação em relação à compreensão das atividades, confirma que o Almanaque "Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos" atingiu seu objetivo geral e foi bem recebido pelos alunos. Ajustes pontuais podem ser considerados para melhorar ainda mais a experiência, mas, de modo geral, o almanaque cumpriu seu papel e foi validado positivamente.

8. CONCLUSÕES

A presente dissertação buscou responder à questão: Como elaborar um material didático com números primos de forma significativa e envolvente para alunos de diferentes faixas etárias da Educação Básica? A partir de uma pesquisa bibliográfica, construiu-se o material voltado aos números primos denominado “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”. Com a elaboração de tal material didático objetivou-se tornar o ensino de números primos mais atrativo e acessível.

Os números primos são um tema fundamental no Ensino da Matemática, possuindo uma história rica e aplicações significativas como, por exemplo, aquelas voltadas à criptografia. A pesquisa evidenciou que a abordagem dos números primos na Educação Básica é, em muitos casos, superficial e limitada ao 6º ano do Ensino Fundamental. Esse tratamento restrito pode impedir que os alunos reconheçam a importância e a utilidade dos números primos ao longo de sua trajetória educacional.

Conforme o identificado por Farias (2016), os materiais didáticos muitas vezes não enfatizam a conceituação dos números primos, o que pode levar a uma percepção errônea sobre sua importância. Além disso, a revisão das dissertações de Quintans (2020), Marcelo (2019), Moura (2018) e Machado (2015), demonstrou a relevância de se resgatar e trabalhar com os números primos durante os anos subsequentes ao 6º ano. Com base nos resultados das pesquisas, fica evidente a necessidade de se aprimorar os materiais didáticos e de se desenvolver práticas pedagógicas.

Baseando-se nos estudos acerca dos números primos, elaborou-se um material didático, no caso o almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, enriquecido com informações envolventes e atividades lúdicas sobre números primos. Além do almanaque, foi desenvolvido um *software* em C/C++ chamado Primus, que serviu como uma ferramenta auxiliar durante a aplicação do material didático. O *software*, que exibe listas de números primos e compostos, e fornece um *feedback* imediato aos alunos sobre a primalidade de um dado número, facilitou a compreensão, a exemplificação e a explicação acerca do tema.

Uma vez que a construção do almanaque foi completada, efetuou-se a aplicação de tal material junto a alunos do Ensino Médio. Esta etapa da pesquisa foi realizada na Escola Estadual São Vicente de Paula, em Sinop-MT, envolvendo 143 alunos de diferentes turmas do Ensino Médio, durante o período de aplicação de 24/04/2024 a 06/05/2024. Observou-se um aumento significativo no engajamento e na compreensão dos estudantes em relação aos

números primos. As atividades foram desenvolvidas para serem lúdicas e interativas, incentivando os alunos a explorarem as propriedades dos números primos de maneira divertida.

Após o trabalho com os alunos, foram coletados dados sobre a atividade por meio de questionário e observação participante. Os dados foram analisados qualitativamente e quantitativamente. Na análise qualitativa se utilizou a técnica de análise de conteúdo de Bardin (2016). Nesta análise, os resultados indicaram que o material didático e o *software* desenvolvidos contribuíram positivamente para o processo de ensino-aprendizagem, tornando o estudo dos números primos mais interessante e significativo para os alunos. Por sua vez, a análise estatística, que teve caráter descritivo e inferencial, também apontou para a eficácia e a boa aceitação do material, validando-o.

A compreensão e o ensino dos números primos representam um desafio significativo na Educação Básica, mas também uma oportunidade valiosa para enriquecer a experiência educacional dos alunos. Este trabalho reforça a necessidade de uma abordagem mais abrangente e contextualizada para o ensino dos números primos, envolvendo não apenas o domínio conceitual, mas também o engajamento e o entusiasmo dos alunos pela Matemática.

Portanto, conclui-se que a elaboração de um material didático que integra elementos lúdicos, históricos e tecnológicos pode efetivamente facilitar a aprendizagem de conceitos matemáticos como os números primos. A utilização de recursos inovadores como almanaques e *softwares* educacionais pode proporcionar uma experiência de aprendizagem mais dinâmica e envolvente, promovendo um ambiente educacional mais motivador e eficaz.

Com base nos resultados obtidos, recomenda-se a continuidade de pesquisas e desenvolvimentos de materiais didáticos que utilizem abordagens similares para outros conteúdos matemáticos. A integração de tecnologia e a narrativa lúdica tem o potencial de transformar a maneira como conceitos matemáticos são ensinados, contribuindo para uma educação mais inclusiva e significativa.

Para futuros trabalhos, pode-se realizar uma pesquisa mais detalhada sobre os números primos, ampliando o número de atividades do material didático. Além disso, pode-se apresentar tal material a professores para que eles possam avaliar e sugerir melhorias, contribuindo para um ensino e aprendizagem do tema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ALMEIDA, Helber Rangel Formiga Leite; GRACIAS, Telma Aparecida de Souza. **Pesquisa em Ensino e Sala de Aula: diferentes vozes em uma investigação**. 2º ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Produção Técnica - Grupo de Trabalho**. Brasília, 2019. Disponível em: <https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/10062019-producao-tecnica-pdf>. Acesso em: 23 de nov. de 2023

CATONIO A. C. D. R.; MUNIZ M. R. **O lúdico como estímulo à leitura e à escrita: Um estudo sobre o projeto de extensão almanaque**. p. 58-66. Revista Diálogos: Extensão e Aprendizagem: tempos e espaços, Brasília, v.19, n.1, dez 2014.

CONOVER, W. J. **Practical nonparametric statistics** (Vol. 350). John Wiley & Sons. 1999.

COUTINHO, Severino Collier. **Criptografia. Rio de Janeiro, Programa de Iniciação Científica da OBMEP (PIC-OBMEP)**, 2015.

EUCLIDES (Irineu Bicudo, Tradução. & Intr.). **Os Elementos**. Editora UNESP. 2009.

Eves, Howard. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FARIAS, Djalma Gomes de et al. **Um estudo do ensino de números primos na Educação Básica**. 2016.

FONSECA, Rubens Vilhena; MONTEIRO, Andreza Thalia Menezes; FONSECA, Richard Campos Vilhena. **O teorema fundamental da aritmética–números primos e sutilezas ocultas da aritmética**. Matemática & Ciência, v. 4, n.2, p. 67-93, dez. 2021.

FUNARI, Pedro Paulo. **Grécia e Roma**. São Paulo: Contexto, 2002.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Altas, 2002.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HEINZMANN, Marisa; PELLEZ, Nadine Daniela. **PIBID: Laboratório de atividades diferenciadas para a sala de aula**. Revista Acadêmica Licenciaturas, v. 2, n. 2, p. 153-159, 2014.

LABURÚ, Carlos Eduardo. **Fundamentos para um experimento cativante**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 23, n. 3, p. 383-405, 2006.

Macedo, Carlos Eduardo de Carvalho. **Números primos, nossos amigos únicos**. orientador Geraldine Goes Bosco. São Carlos, 2019. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

Machado, Edson Ribeiro **Números Primos uma abordagem educacional**. Orientador: Roberto Antonio Cordeiro Prata Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

MALAGUTTI, Pedro Luiz; BEZERRA, Débora de Jesus; RODRIGUES, Vânia Cristina da Silva. **Aprendendo criptologia de forma divertida**. Biental de Matemática, v.5, 2010.

MELLO, Tágides; RUBIO, J. D. A. S. **A importância da afetividade na relação professor/aluno no processo de ensino/aprendizagem na educação infantil**. Revista Eletrônica Saberes da Educação, v. 4, n. 1, p. 1-11, 2013.

MOURA, Frederico Torres de. **Números primos: uma fórmula geradora**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Arraias, 2018.

ONUICHIC, Lurdes de la Rosa. **Uma história da resolução de problemas no Brasil e no mundo**. In: Seminário em resolução de problemas, 1., Rio Claro. Anais. Rio Claro: UNESP 2008.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. S. L. **Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio**. Revista Principia-Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB, [S.l.], n. 38, p. 105-119, fev. 2017. ISSN 2447-9187.

PADILHA, José Cleiton Rodrigues. **Números Primos**. 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

PEREIRA, Taniele de Sousa; TEIXEIRA, Leandro Silva. **Números primos: sugestões de aula**. Brazilian Journal of Development, v. 6, n. 9, p. 64120-64125, 2020.

QUINTANS, Jeozadaque. **O Ensino Dos Números Primos Inter-relacionados a Conteúdos Diversos Através Da Resolução De Problemas**. 2020.

RIBENBOIM, Paulo. **Números primos amigos que causam problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

ROCHA, Paul Symon Ribeiro; RAMOS, Carlos Vieira; BRASIL, Tainara Antunes. **A utilização de softwares no ensino de matemática para Ensino Fundamental e médio**. In: Anais do IV Congresso sobre Tecnologias na Educação. SBC, 2019. p. 40-49.

SHAPIRO, S. S., WILK, M. B. **An analysis of variance test for normality (complete samples)**, Biometrika 52, 591–611. 1965.

SILVA, José Fabiano da. **O ensino de números primos na Educação Básica**. João Pessoa, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/27301/1/JFS29062023.pdf>. Acesso em: 22 nov. de 2023.

SOUSA, Anna Karol Moura de; VENTURA, Paula Patrícia Barbosa. **Dificuldades de aprendizagem cognitivas em Matemática: estudo de caso com professor do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação**, Ciência e Tecnologia do Ceará—campus Canindé. Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática, v. 6, n. 3, p. 490-507, 2022.

TRIVIÑOS, Augusto Nivaldo Silva, **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

UGALDE, Maria Cecília Pereira; ROWEDER, Charlys. **Sequência didática: uma proposta metodológica de ensino-aprendizagem**. Educitec-Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico, v. 6, p. e99220-e99220, 2020.

VASCONCELOS, Cláudia Cristina. **Ensino-aprendizagem da matemática: velhos problemas, novos desafios**. Revista Millenium, v. 20, p. 2023-03, 2000.

VIEIRA, Márcia Oliveira. **O teorema dos números primos**. 98 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, SE, 2023.

WILCOXON, F. **Individual comparisons by ranking methods**. In Breakthroughs in statistics: Methodology and distribution (pp. 196-202). New York, NY: Springer New York. 1992.

WILCOXON, F., KATTI, S., & WILCOX, R. A. **Critical values and probability levels for the Wilcoxon rank sum test and the Wilcoxon signed rank test**. Selected tables in mathematical statistics, 1, 171-259. 1970.

APÊNDICES

Apêndice A

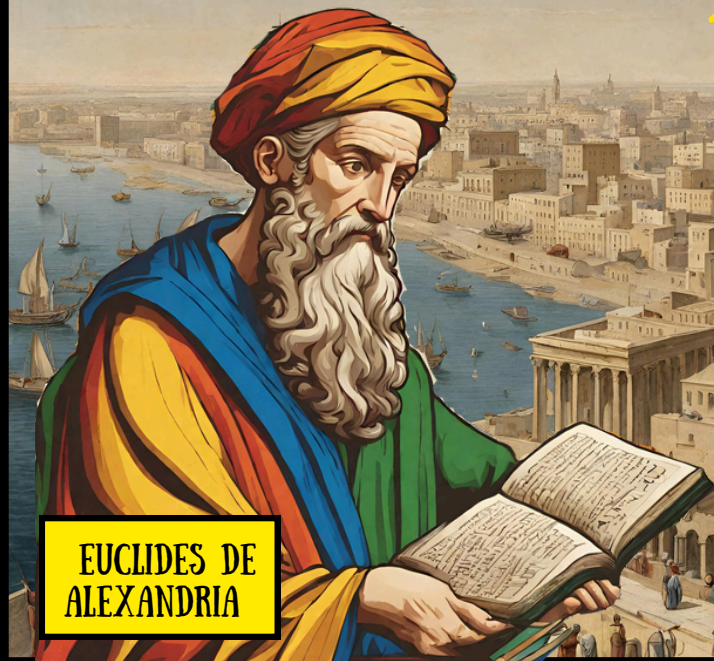
Material Didático: “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”

Leãozinho

OS MISTÉRIOS DOS
NÚMEROS PRIMOS
ALMANAQUE



ALEXANDRIA, EGITO (300 A.C.)



EUCLIDES DE ALEXANDRIA

EUCLIDES,
EM SEUS ESTUDOS
MOSTROU QUE TODO
NÚMERO NATURAL PODE
SER DECOMPOSTO EM UM
PRODUTO ÚNICO DE
NÚMEROS PRIMOS.

LEÃOZITO

MAS AFINAL O QUE É
NÚMERO PRIMO?

VAMOS DAR UMA OLHADA
NOS ESTUDOS DE EUCLIDES!



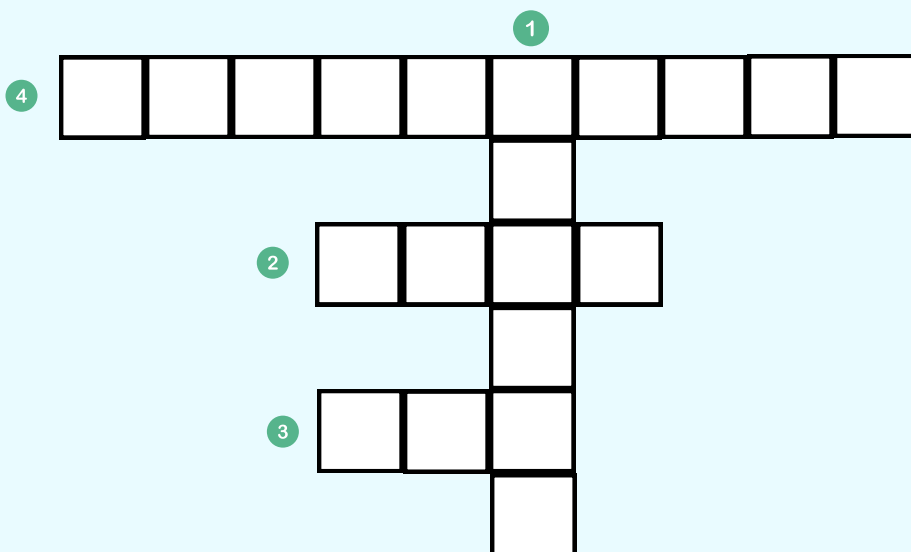
AHHH..
AQUI TA DIZENDO QUE:
"OS PRIMOS SÃO NÚMEROS NATURAIS
MAIORES QUE 1, QUE TEM SOMENTE DOIS
DIVISORES O NÚMERO 1 E ELES
MESMOS"

OLHA SÓ :
2, 3, 5, 7 SÃO PRIMOS!!!
JÁ O 4 E O 6 NÃO SÃO
PRIMOS!! O 4 TEM TRÊS
DIVISORES: 1, 2, 4! E O 6 TEM
QUATRO DIVISORES:
1, 2, 3 E 6!!

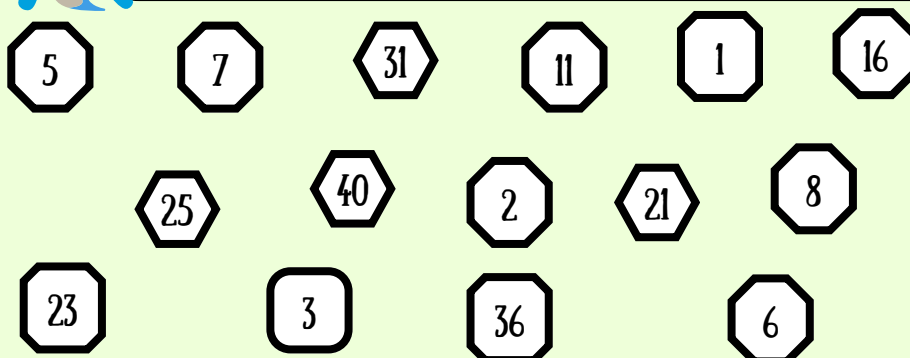


QUE TAL RESPONDER
A CRUZADINHA
ABAIXO?

- 1 NÚMEROS QUE SÃO DIVISÍVEIS POR 1 POR ELES MESMOS _____
- 2 QUANTOS DIVISORES TÊM O NÚMERO PRIMO? _____
- 3 O NÚMERO 1 É UM NÚMERO PRIMO? _____
- 4 TODO NÚMERO NATURAL PODE SER _____
EM UM PRODUTO ÚNICO DE NÚMEROS PRIMOS.



DESVENDE QUAIS NÚMEROS SÃO PRIMOS E
PINTE APENAS ELES!!!



COMPLETE AS CAIXINHAS ABAIXO COM OS PRECIOSOS NÚMEROS PRIMOS ATÉ 30.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

CIRENE, LÍBIA (276 A.C.)

SABIA QUE EXISTE UM TRUQUE
MATEMÁTICO PARA DESCOBRIR
SE UM NÚMERO É PRIMO?

É O, CRIVO DE ERATÓSTENES!!!
UM MÉTODO QUE CONSISTE EM
ESCREVER OS NÚMEROS EM
ORDEM CRESCENTE E REMOVER OS
MÚLTIPLOS DE CADA PRIMO!!!!

ERATÓSTENES
DE CIRENE

SACA SÓ, COMO É!!!
O 2 A GENTE CÍRCULA!! E ELIMINA
OS MÚLTIPLOS 4, 6, 8, 10, 12...!!
CÍRCULA AGORA O 3!! E
ELIMINA OS MÚLTIPLOS
6,9,12...!!

CUIDADO PARA
NÃO CÍRCULAR O NÚMERO 1,
POIS ELE NÃO É PRIMO!!! OBSERVE
QUE ELE TEM SOMENTE
1 DIVISOR!!

~~1~~	2	3	~~4~~	5
~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~
~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~



AGORA É SUA VEZZZ!!!
CIRCULE OS PRIMOS E
ELIMINE SEUS MULTIPLOS!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50



CAÇA-PALAVRAS

CINCO
DEZENOVE
DEZESSETE
DOIS
ONZE
TREZE
TRÊS

K	T	L	T	L	S	H	L	T	D	N	E	L	T	R	T	T	N
T	T	R	E	S	N	C	S	B	I	E	F	C	W	M	R	F	S
I	Ê	D	O	R	S	T	B	O	H	N	F	D	I	E	S	O	I
S	V	R	O	E	E	E	E	S	E	K	W	E	Z	E	O	T	E
H	N	H	L	D	I	D	E	Z	E	S	S	E	T	E	H	L	A
S	H	H	E	R	A	B	I	D	E	Z	E	N	O	V	E	W	E
A	F	H	E	S	E	E	E	A	O	E	A	E	I	G	E	N	D
Y	A	D	O	T	T	C	C	D	I	I	A	O	T	O	I	S	T
E	N	I	E	U	T	E	I	I	E	L	S	O	C	Y	P	D	F
K	V	E	C	I	G	A	E	A	N	E	L	O	L	E	G	E	Y
H	T	E	A	E	A	I	N	R	E	C	N	N	O	M	E	A	T
N	T	R	P	A	A	O	O	H	H	R	O	N	Z	E	A	N	G

TODO NÚMERO NATURAL MAIOR QUE 1 É PRIMO OU PODE SER ESCRITO COMO UM PRODUTO DE FATORES PRIMOS!



5

$2 \cdot 3$

7

$2 \cdot 2$

2

$3 \cdot 3$

3

$2 \cdot 2 \cdot 2$

$2 \cdot 5$

LEMBRE-SE • MMC: MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM
• MDC: MÁXIMO DIVISOR COMUM

AO ESCREVER OS NÚMEROS NATURAIS COMO A MULTIPLICAÇÃO DE PRIMOS, PODEMOS DETERMINAR O MMC E O MDC ENTRE ELES!!!!



6

$2 \cdot 3$

4

$2 \cdot 2$

PRODUTO DE TODOS OS FATORES

$3 \cdot 2 \cdot 2$

• $\text{MMC}(6,4) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

PRODUTO DOS FATORES COMUNS

$3 \cdot 2 \cdot 2$

• $\text{MDC}(6,4) = 2$

$MMC(6,4) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

PRODUTO DE TODOS FATORES

$MDC(6,4) = 2 = 2$

PRODUTO DOS FATORES COMUNS

TAMBÉM PODEMOS DECOMPOR OS NÚMEROS SIMULTANAMENTE!

PASSATEMPO

VAMOS CALCULAR O MMC E MDC!!!

$MMC(12,6) = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

$MDC(12,6) = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

OS NÚMEROS QUE NÃO SÃO PRÍMOS PODEM SER ESCRITOS COMO UM PRODUTO DE FATORES PRÍMOS!! VAMOS LIGAR CADA NÚMERO AO SEU PRODUTO DE FATORES PRÍMOS?

14

18

10

30

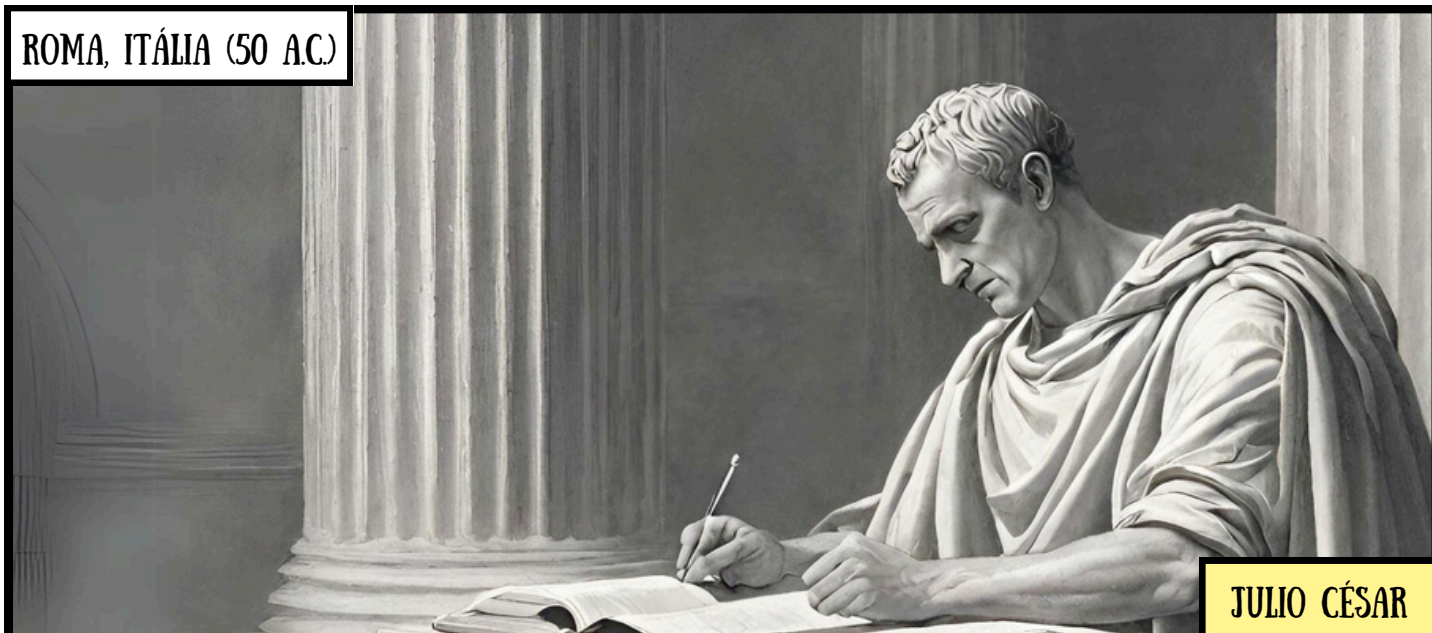
2.5

2.3.5

2.7

2.3.3

ROMA, ITÁLIA (50 A.C.)



JULIO CÉSAR



(DES)CIFRE...

A SEGUIR TEMOS UM EXEMPLO DO MÉTODO DE JULIO CÉSAR EM QUE CADA LETRA É SUBSTITUÍDA POR OUTRA TRÊS POSIÇÕES À FRENTE.

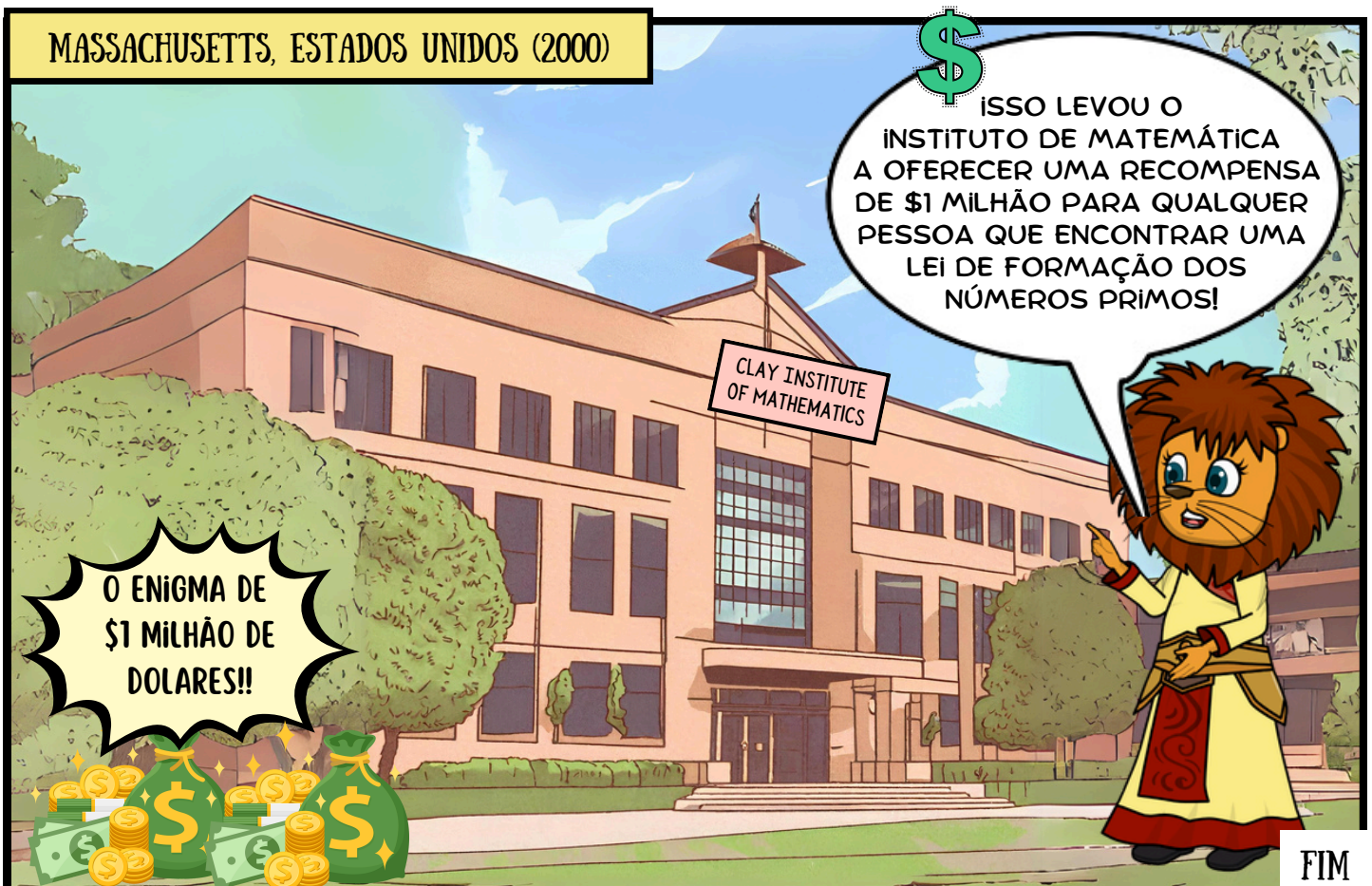
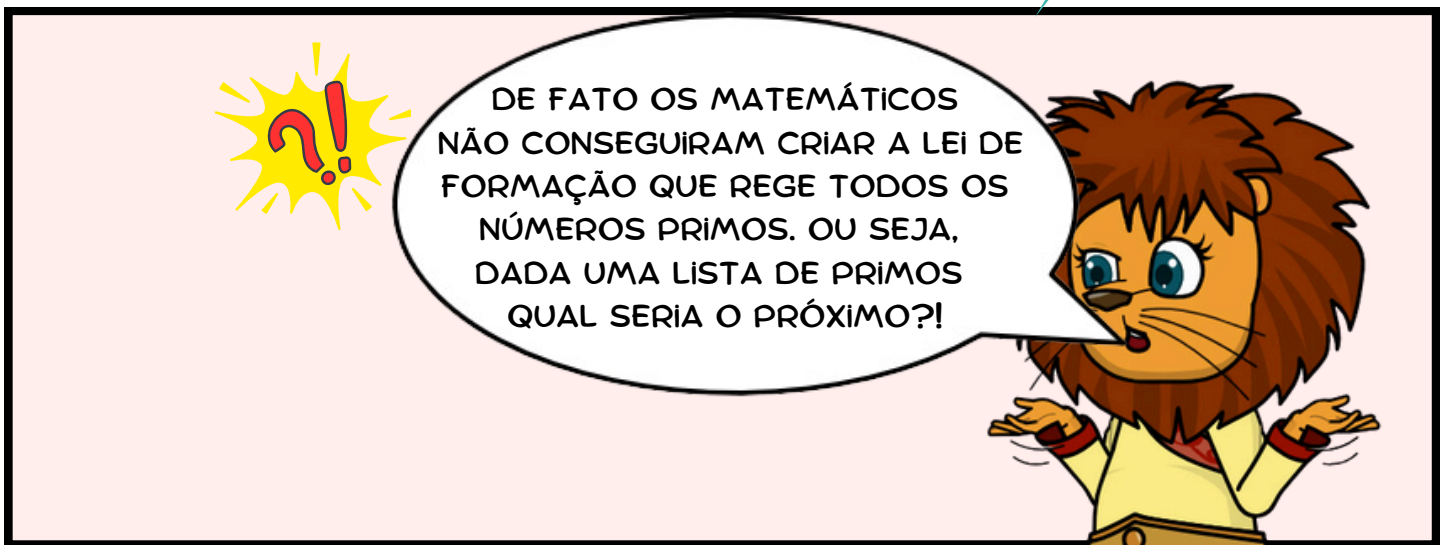
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

A PALAVRA "MATEMÁTICA" SE TRANSFORMA EM "PDWHPDWLFD".



Códigos como o de César são facilmente decifrados devido à regularidade na frequência das letras em uma linguagem. Assim, foi preciso criar novos códigos que fossem difíceis de decifrar, mesmo com a assistência de um computador.





P. 3

Resp. primos; dois; não; decomposto

Resp. 2,3,5,7,11,23,31

Resp. 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29

P. 5

Resp. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Resp.

 T T
 R R
 Ê E
 S Z
 D E Z E S S E T E
 D E Z E N O V E
 O
 C I
 I S
 N
 C
 O N Z E

P. 7

Resp. MMC= $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ e MDC= $2 \cdot 3 = 6$

Resp. $14 = 2 \cdot 7$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

P. 9

Resp. "Rv plwwhulrv grv sulprv"

Resp. "Eu consegui"

OS MISTÉRIOS DOS NÚMEROS PRIMOS

Este almanaque foi criado para ajudá-lo a explorar os números primos de uma maneira acessível e divertida. Acompanhado pelo personagem Leãozito, você aprenderá passo a passo sobre esses números primos, através de atividades práticas e curiosidades matemáticas.

Material didático vinculado à dissertação intitulada:
“Explorando Números Primos”



PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

AUTORES

Raquel Augusta Borges Rodrigues
Giovane Maia do Vale
João Gabriel Ribeiro

Apêndice B

Questionário Avaliativo

Este questionário foi elaborado com intuito de obter dados, que serão utilizados na análise e avaliação de impressões dos alunos, professores e outras pessoas que tiveram contato com o almanaque “LEÃOZITO: Os Mistérios dos Números Primos”.

QUESTIONÁRIO PARA A AVALIAÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO DO ALMANAQUE “LEÃOZITO: OS MISTÉRIOS DOS NÚMEROS PRIMOS”

1- Enquadramento do participante:

- 1) Professor (a)
- 2) Aluno (a)
- 3) Outros (as)

2- Como foi sua experiência com o Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”?

- 1) Muito Insatisfeito (a)
- 2) Um pouco Insatisfeito (a)
- 3) Razoavelmente Satisfeito (a)
- 4) Um pouco Satisfeito (a)
- 5) Muito Satisfeito (a)

3- Como foi a sua compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”?

- 1) Muito Insatisfatórias
- 2) Um pouco Insatisfatórias
- 3) Razoavelmente Satisfatórias
- 4) Um pouco Satisfatórias
- 5) Muito satisfatórias

4- Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”?

- 1) Muito Insatisfatórias
- 2) Pouco Insatisfatórias
- 3) Razoavelmente Satisfatórias
- 4) Um pouco Satisfatórias
- 5) Muito Satisfatórias

5- Avalie, em uma escala de 0 a 10, a sua satisfação geral com o Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”: _____

6- Você recomendaria o Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos” para outra pessoa?

- 1) Sim
- 2) Não

7- O que você achou do Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”? (Por favor, descreva criticamente os pontos positivos e negativos).

Obrigado pela colaboração!

Apêndice C

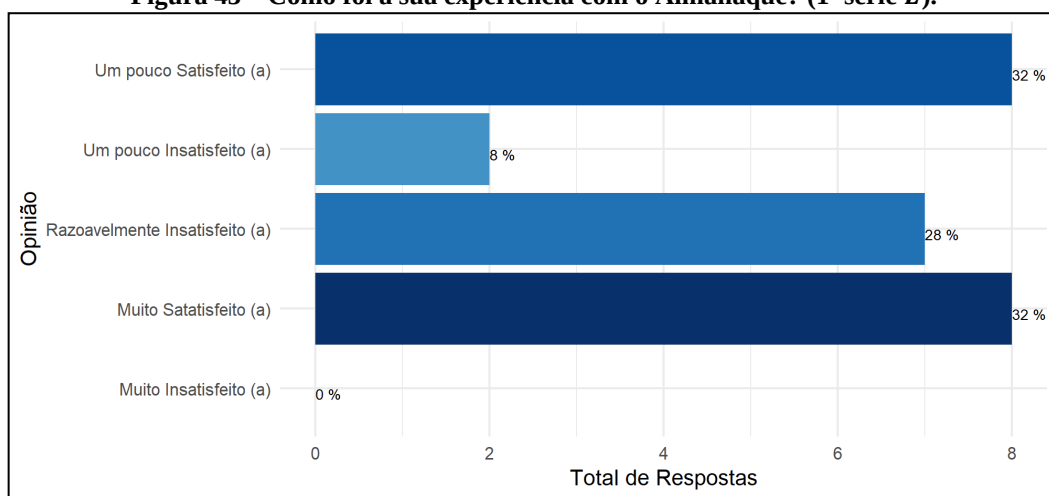
Análises e discussões dos dados do quantitativos por turma

Neste apêndice são apresentados, de forma detalhada, os resultados e as análises das hipóteses mencionadas no capítulo 7, considerando dados desagregados (por série).

➤ Turma da 1ª série E

Participaram da atividade proposta, na turma da 1ª série E, um total de $n_{1ª \text{ série } E} = 25$ alunos. O resultado do questionário para a questão 2, referente à opinião sobre a experiência com Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”, está resumido no gráfico presente na Figura 43.

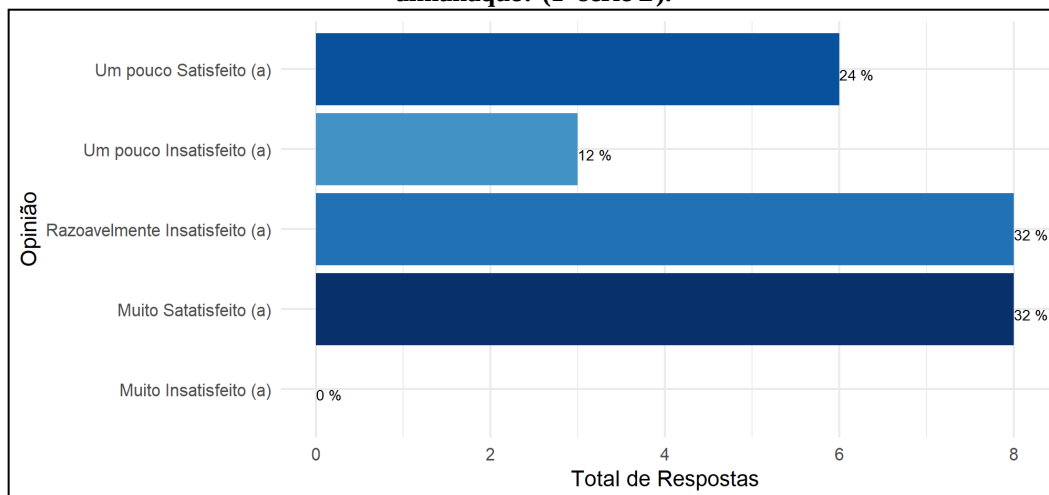
Figura 43 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (1ª série E).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Observa-se que 64% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” ou “um pouco satisfeitos(as)” com a experiência que tiveram com material desenvolvido. Contudo, 34% dos alunos apresentam algum grau de insatisfação.

Figura 44 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no almanaque? (1ª série E).



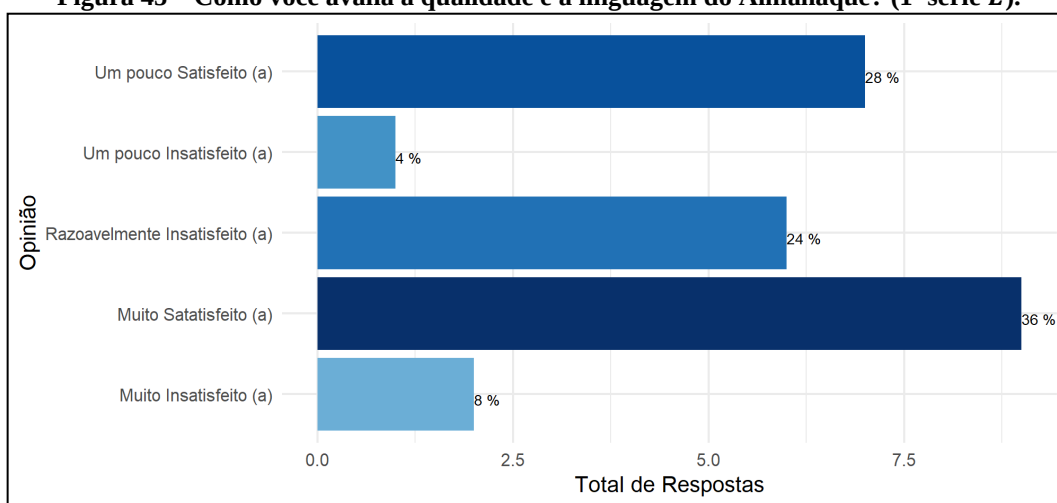
Fonte: Resultados da Pesquisa.

O resultado do questionário para a questão 3, referente à opinião sobre a compreensão acerca da atividade proposta, é apresentado no gráfico presente na Figura 44.

A partir do gráfico, verifica-se que 56% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” quanto à compreensão do passo a passo da atividade contida no material. Por sua vez, 44% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 4, referente à avaliação da qualidade e da linguagem do Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, tem seus resultados expressos na Figura 45.

Figura 45 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (1ª série E).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Observa-se que 64% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a qualidade e a linguagem das atividades propostas no almanaque. Em contrapartida, 36% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 5 relaciona-se à nota geral de satisfação dos entrevistados relativa à atividade proposta. Cabe lembrar que, a nota a ser atribuída poderia variar de 0 (zero) à 10 (dez). A Tabela 10 apresenta as medidas descritivas desta questão.

Tabela 10 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série E.

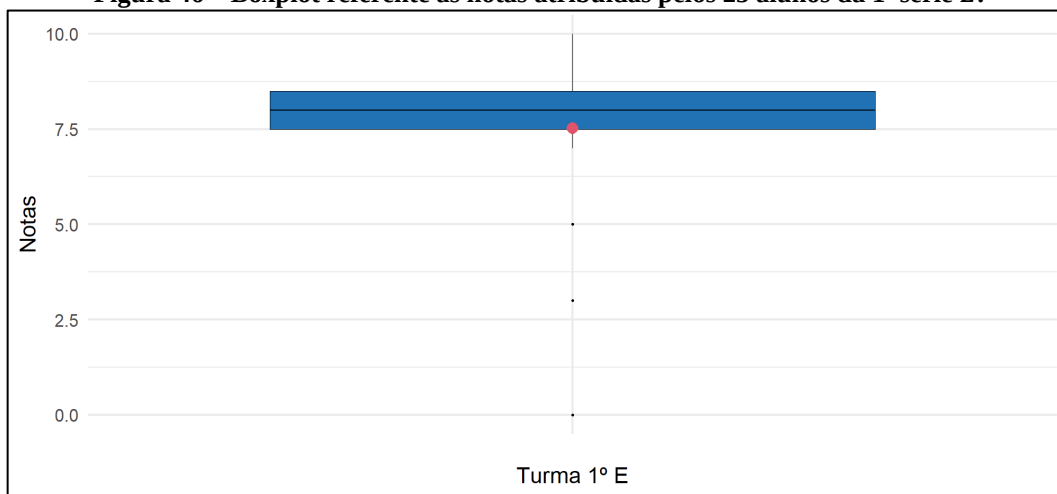
Estatística das Notas atribuídas	Valores
Número de observações: $n_{1^a \text{ série } E}$	25
Média: $\bar{x}_{1^a \text{ série } E}$	7,52
Variância: $S_{1^a \text{ série } E}^2$	4,34
Desvio Padrão: $S_{1^a \text{ série } E}$	2,08
Coefficiente de Variação: $CV_{1^a \text{ série } E}$	27,71 %

Fonte: Resultados da Pesquisa.

A nota média de 25 alunos que responderam ao questionário foi de $\bar{x}_{1^a \text{ ano } E} = 7,52$, a qual foi considerada alta e com uma baixa variação, aqui quantificada pelo coeficiente de variação $CV_{1^a \text{ ano } E} = 27,71\%$. Como era de se esperar, as demais medidas de dispersão

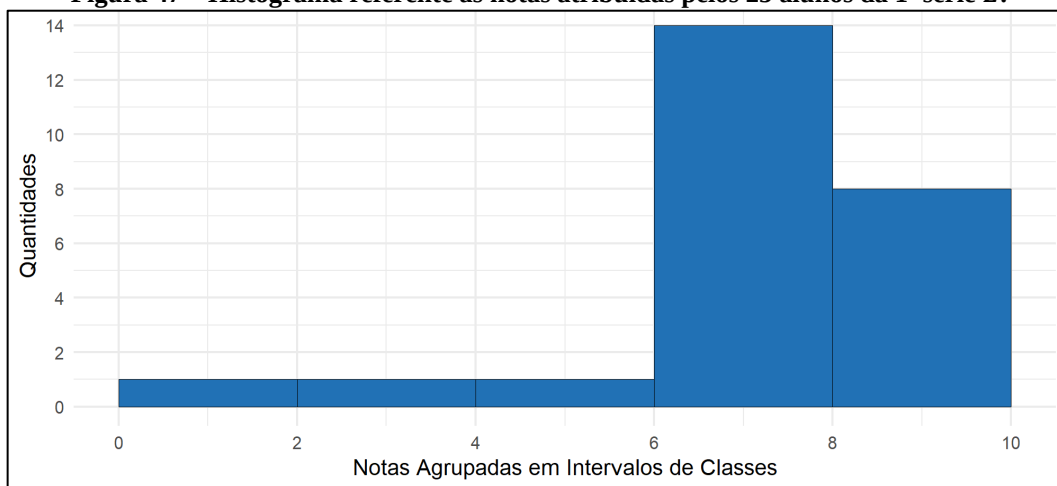
corroboram com o $CV_{1^a \text{ ano } E}$. A seguir são apresentados os gráficos boxplot, histograma e histograma com sua função de densidade de probabilidade, nas Figuras 46, 47 e 48.

Figura 46 – Boxplot referente às notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série E.



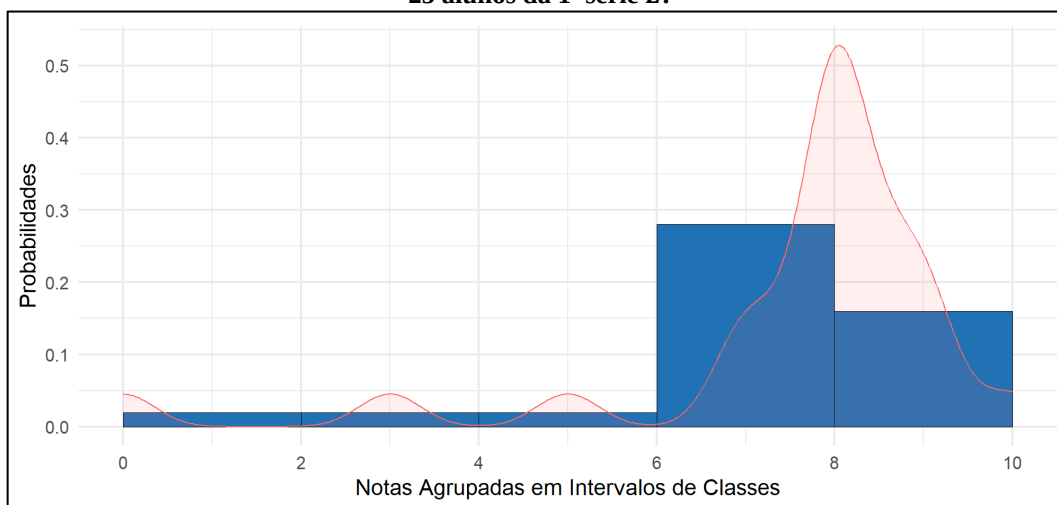
Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 47 – Histograma referente às notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série E.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 48 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente às notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série E.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Avaliando as Figuras 46, 47 e 48, verifica-se que a maior parte das notas atribuídas pelos alunos se concentram entre 6 e 10 pontos e observa-se um comportamento assimétrico relacionado aos dados das notas atribuídas. E mais, com o intuito de avaliar este comportamento com maior eficácia, foi realizado o teste de normalidade de Shapiro Wilk nestes dados, conforme o estabelecido na Tabela 11, na qual as hipóteses testadas são apresentadas.

Tabela 11 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk nas notas dos alunos da 1ª série E.

Estatística W	p-valor
0,69	6,15e-06
<i>H₀: os dados das notas dos alunos do 1ª série E apresentam normalidade</i>	
ou	
<i>H₁: os dados das notas dos alunos do 1ª série E não apresentam normalidade</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Segundo o teste, rejeita-se H_0 , ao nível de significância $\alpha = 10\%$. Logo, há indícios de que estes dados não apresentem normalidade. Ou seja, existe assimetria no conjunto de dados, conforme verificado nas Figuras de 37 a 39. Este comportamento é algo esperado, já que os dados são referentes às notas advindas de opiniões distintas de alunos.

Em seguida, apresenta-se o resultado de dois testes não paramétricos de Wilcoxon com postos sinalizados, que foram realizados a fim de avaliar:

1. Se há indicativo de que a nota média $\bar{x}_{1ª série E} = 7,52$ possa apresentar valor maior que o descrito ou permanecer como está;
2. Se há indícios de que a nota média possa diminuir ou permanecer conforme o calculado ($\bar{x}_{1ª série E} = 7,52$).

Estes testes estão discriminados nas Tabelas 12 e 13.

Tabela 12 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{1ª série E} = 7,52$ possa ser maior.

Estatística T	p-valor
231	0,09
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{1ª série E} = 7,52$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu > \bar{x}_{1ª série E} > 7,52$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Tabela 13 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{1ª série E} = 7,52$ possa ser menor.

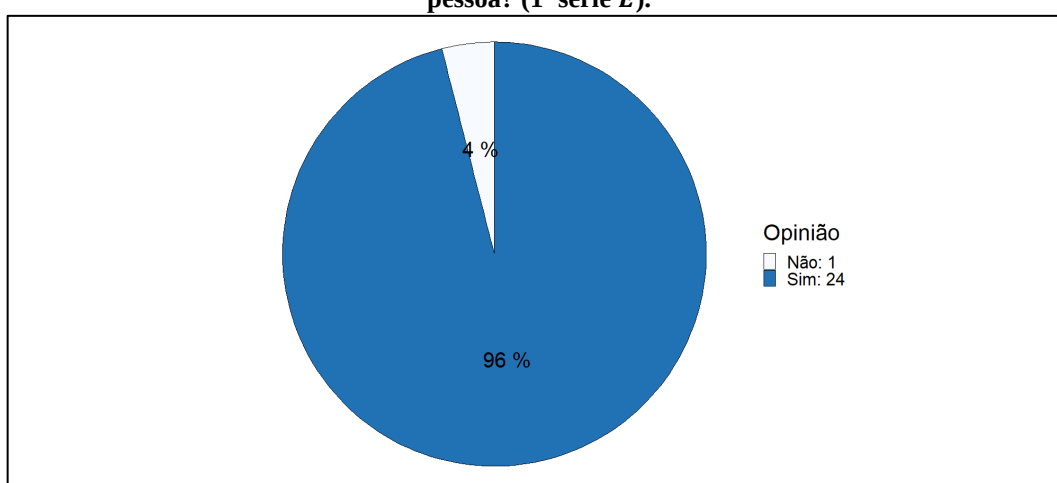
Estatística T	p-valor
231	0,91
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{1ª série E} = 7,52$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu < \bar{x}_{1ª série E} < 7,52$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Os resultados expressos nas Tabelas 12 e 13 indicam que há, respectivamente, uma rejeição e uma aceitação de H_0 . Depreende-se, dos resultados acima, que há o indicativo de que a média das notas, $\bar{x}_{1^a\ série\ E} = 7,52$, poderá ser maior que este valor e que ela também não correrá o risco diminuir, considerando a amostra analisada ao nível de significância de $\alpha = 10\%$. Assim, os testes mostram que há uma perspectiva de aumento e de manutenção da nota média da atividade proposta.

Quanto à questão 6, relativa à recomendação do material proposto, o gráfico de setores presente na Figura 49 sumariza percentualmente a totalidade de respostas coletadas.

Figura 49 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (1ª série E).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

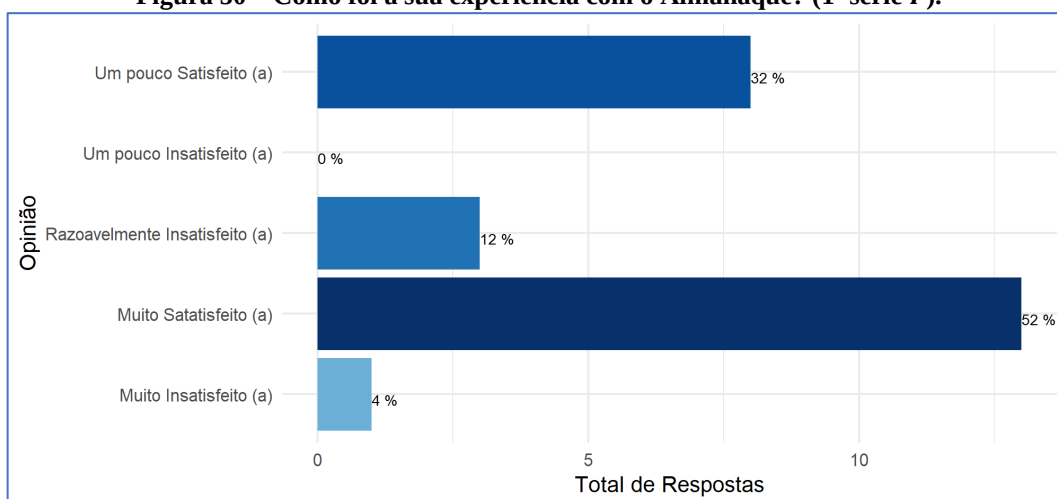
A quase totalidade dos alunos recomendaria a atividade para uma outra pessoa. Tal resultado é mais uma sinalização da boa aceitação do material e suas atividades propostas, nesta turma.

➤ **Turma da 1ª série F**

Participaram da atividade proposta um total de $n_{1^a\ série\ F} = 25$ alunos da turma da primeira série F do Ensino Médio. Os resultados relativos à questão 2, que se refere à opinião sobre a experiência com Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”, estão sintetizados no gráfico de barras que se encontra na Figura 50.

A partir do gráfico que se encontra na Figura 50, observa-se que 84% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a experiência com material desenvolvido e 16% apresentam algum grau de insatisfação.

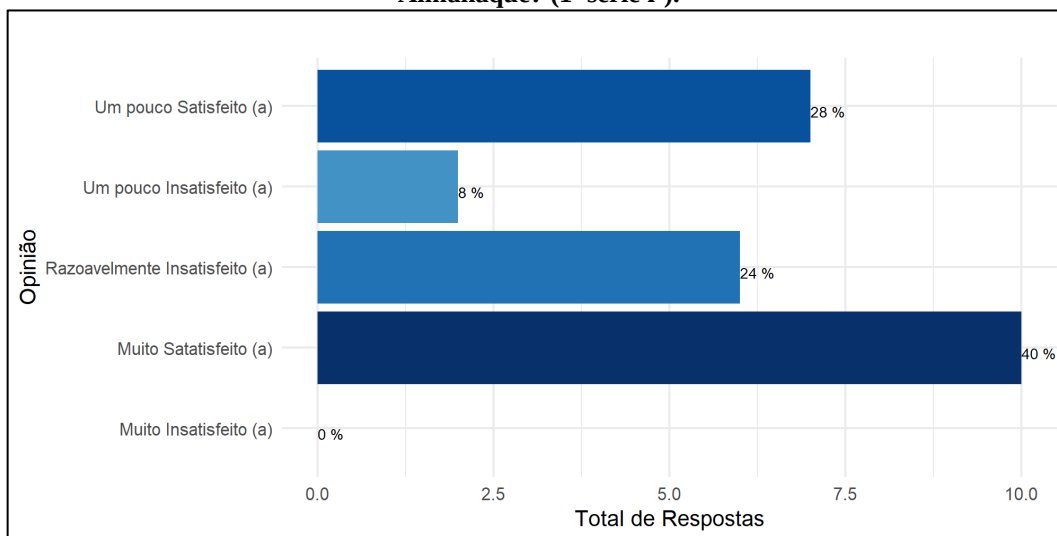
Figura 50 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (1ª série F).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

O resumo da coleta de dados relativa à questão 3, que faz alusão à compreensão do Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, é apresentado na Figura 51.

Figura 51 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (1ª série F).

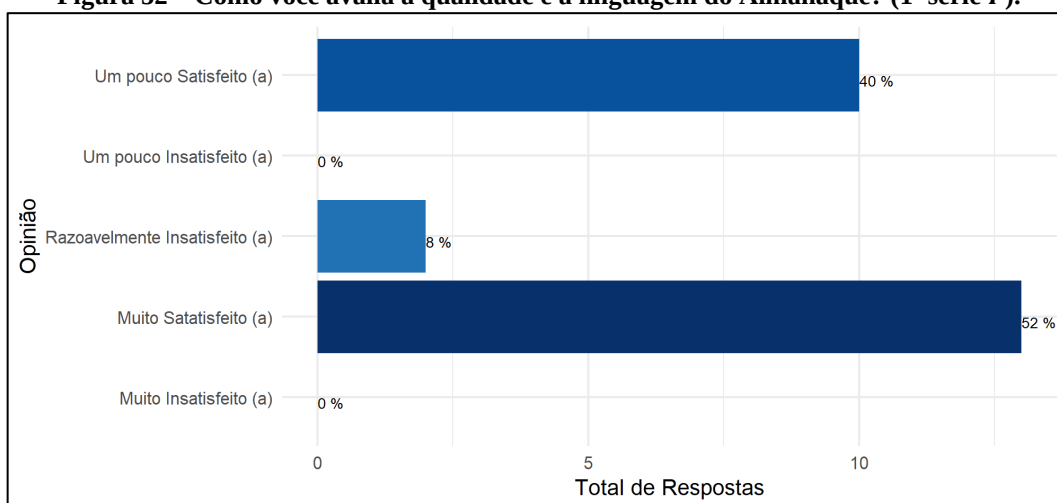


Fonte: Resultados da Pesquisa.

Verifica-se que 68% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com relação à compreensão do passo a passo das atividades contidas no material elaborado e 32% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 4 se refere à avaliação da qualidade e linguagem do Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”. A sinopse dos dados coletados está presente no gráfico da Figura 52.

Figura 52 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (1ª série F).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Observa-se que 92% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a qualidade e a linguagem do Almanaque e 8% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 5 diz respeito à nota relacionada à satisfação geral dos entrevistados com relação à atividade proposta. A Tabela 14 apresenta as medidas descritivas calculadas para esta questão.

Tabela 14 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série F.

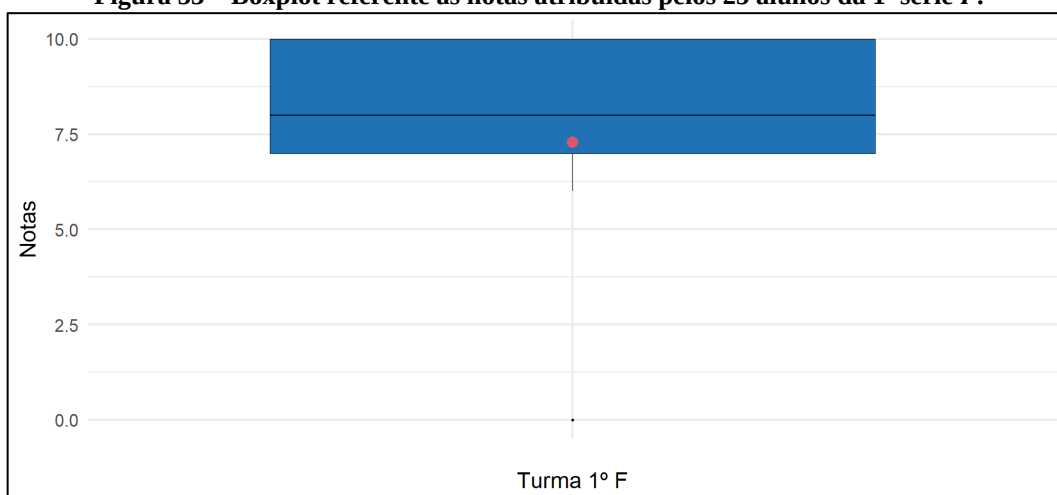
Estatística das Notas atribuídas	Valores
Número de observações: $n_{1^a \text{ série } F}$	25
Média: $\bar{x}_{1^a \text{ série } F}$	7,28
Variância: $S_{1^a \text{ série } F}^2$	11,75
Desvio Padrão: $S_{1^a \text{ série } F}$	3,43
Coefficiente de Variação: $CV_{1^a \text{ série } F}$	47,09 %

Fonte: Resultados da Pesquisa.

A nota média dos 25 alunos que responderam ao questionário foi de $\bar{x}_{1^o \text{ ano } F} = 7,28$. Pode-se considerar esta nota alta. Porém, a variação dos dados também é alta, pois, por exemplo, o coeficiente de variação é alto, $CV_{1^o \text{ ano } F} = 47,09\%$, e as demais medidas de dispersão acompanham do $CV_{1^o \text{ ano } F}$.

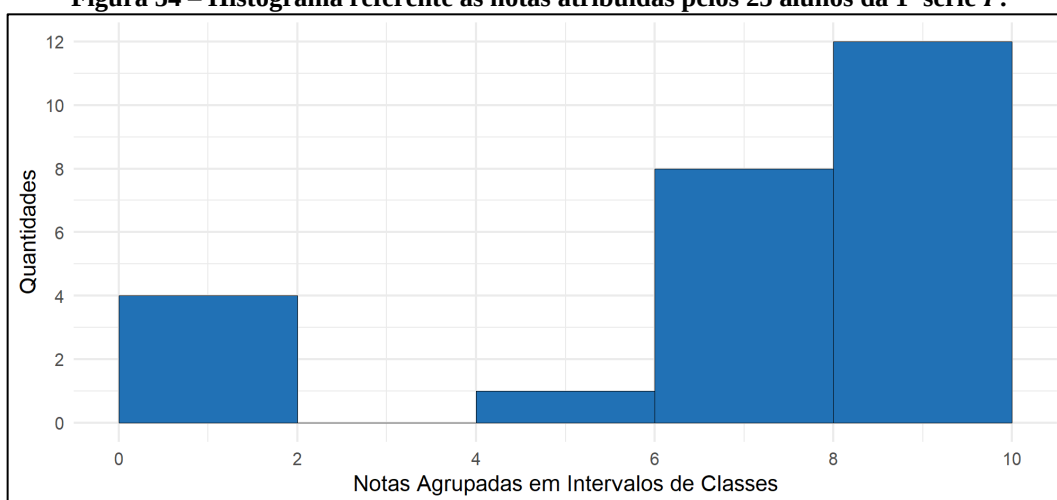
A seguir, nas Figuras 53, 54 e 55 são apresentados os gráficos boxplot, histograma e histograma com sua função de densidade de probabilidade, relativos aos dados coletados, inerentes à questão 5.

Figura 53 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série F.



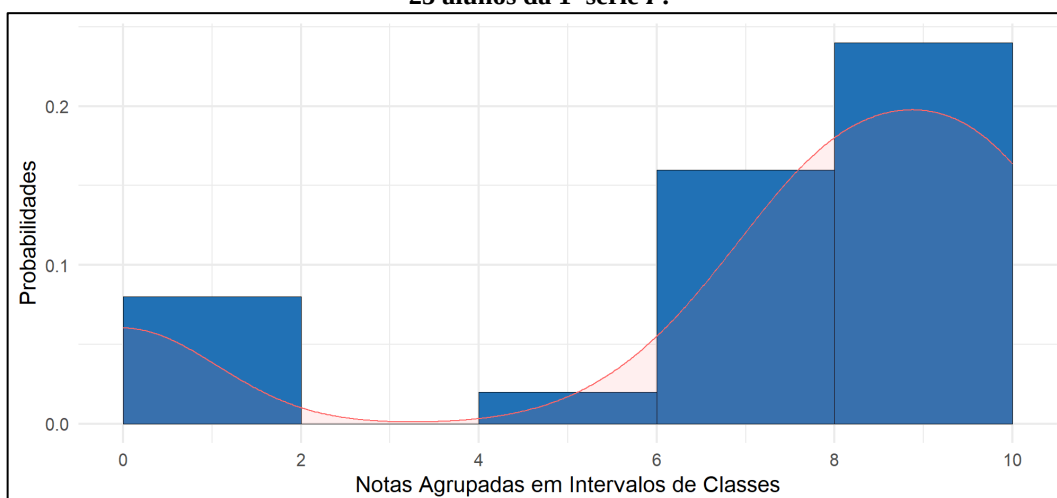
Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 54 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série F.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 55 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 25 alunos da 1ª série F.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Analisando os gráficos das Figuras 53, 54 e 55, verifica-se que a maior parte das notas atribuídas se concentram entre 6 e 10. Observa-se ainda um comportamento assimétrico dos dados das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série F. Assim, com o intuito de avaliar este comportamento de forma mais rigorosa, foi realizado o teste de normalidade de Shapiro Wilk nestes dados, conforme o explicitado na Tabela 15.

Tabela 15 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk nas notas dos alunos da 1ª série F.

Estatística W	p-valor
0,71	1,11e-15
<i>H₀: os dados das notas dos alunos do 1ª série F apresentam normalidade</i>	
ou	
<i>H₁: os dados das notas dos alunos do 1ª série F não apresentam normalidade</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Com base no apresentado na tabela anterior, rejeita-se H_0 , ao nível de significância $\alpha = 10\%$. Nestes termos, infere-se que haja indícios de que estes dados não apresentem normalidade. Ou seja, tais dados possuem assimetria à direita conforme o que pode ser visto nos gráficos das Figuras de 53 a 55, e este comportamento é algo esperado, já que os dados são referentes a notas advindas de opiniões distintas de alunos.

Em seguida, apresenta-se o resultado de dois testes não paramétricos de Wilcoxon com postos sinalizados, que foram realizados a fim de avaliar:

1. Se há indicativo de que a nota média $\bar{x}_{1ª \text{ série } F} = 7,28$ possa apresentar valor maior que o descrito ou permanecer como está;
2. Se há indícios de que a nota média possa diminuir ou permanecer conforme o calculado ($\bar{x}_{1ª \text{ série } F} = 7,28$).

Estes testes estão discriminados nas Tabelas 16 e 17.

Tabela 16 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{1ª \text{ série } F} = 7,28$, possa ser maior.

Estatística T	p-valor
215	0,08
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{1ª \text{ série } F} = 7,28$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu > \bar{x}_{1ª \text{ série } F} > 7,28$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Tabela 17 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{1ª \text{ série } F} = 7,28$, possa ser menor.

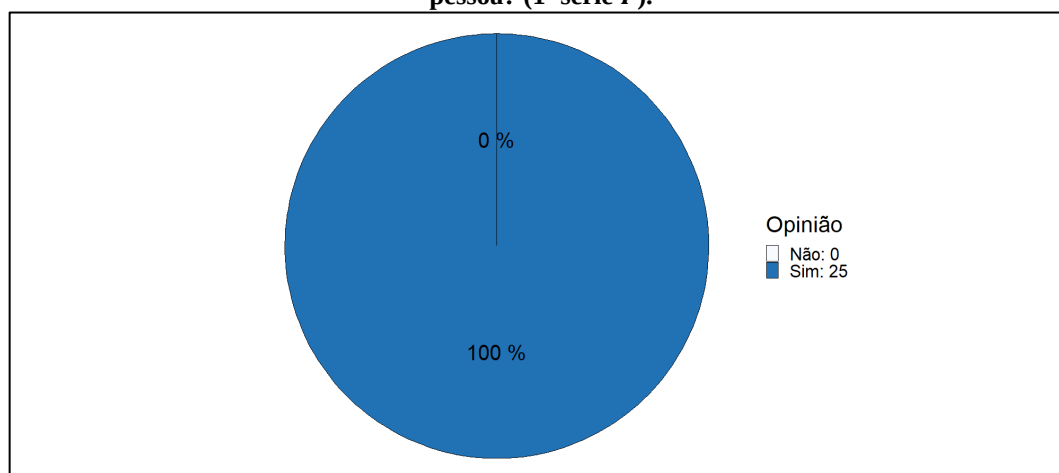
Estatística T	p-valor
215	0,92
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{1ª \text{ série } F} = 7,28$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu < \bar{x}_{1ª \text{ série } F} < 7,28$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

As Tabelas 16 e 17 indicam que há, respectivamente, uma rejeição e uma aceitação de H_0 em cada teste. Assim, há o indicativo de que a média das notas, $\bar{x}_{1^{\circ} \text{ ano } F} = 7,28$, poderá ser maior que este valor e que ela também não correrá o risco diminuir, considerando a amostra analisada ao nível de significância de $\alpha = 10\%$. Este resultado mostra que há uma perspectiva de aumento e de manutenção da nota média das notas dada à atividade proposta.

Tem-se, na Figura 56, um gráfico de setores que fornece uma síntese dos dados coletados a respeito da questão 6, relativa à recomendação do material proposto.

Figura 56 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (1ª série F).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

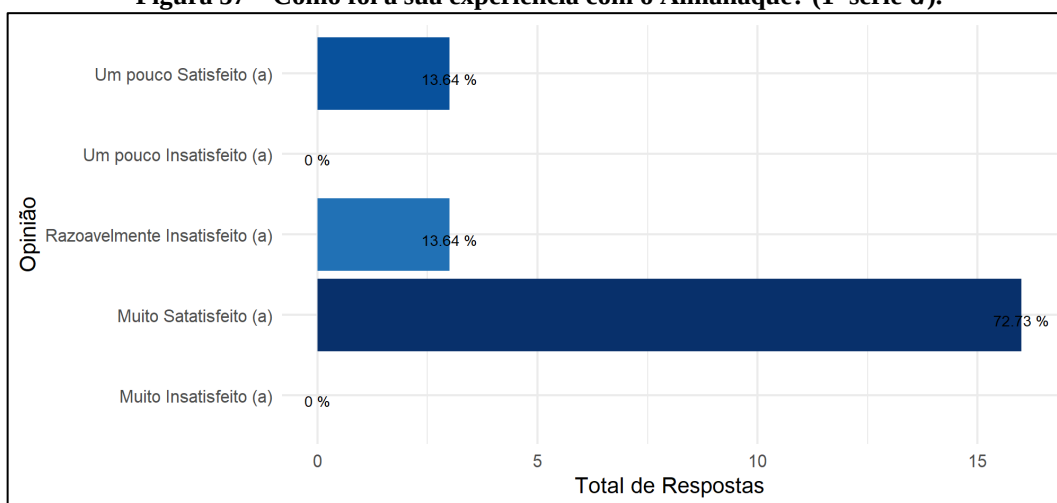
No gráfico acima, verifica-se que todos os alunos indicariam a atividade para uma outra pessoa, o que é mais uma sinalização da boa aceitação do material e suas atividades propostas, nesta turma.

➤ Turma da 1ª série G

Na sala da 1ª série G do Ensino Médio, participaram da atividade proposta um total de $n_{1^{\circ} \text{ ano } G} = 22$ alunos. Os resultados da coleta de dados inerentes à questão 2, relativa à opinião sobre a experiência com o Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”, pode ser vista Figura 57.

Observa-se, a partir do gráfico (Figura 57), que 86,37% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a atividade relativa ao almanaque e 13,64% apresentam algum grau de insatisfação com respeito relativa à atividade.

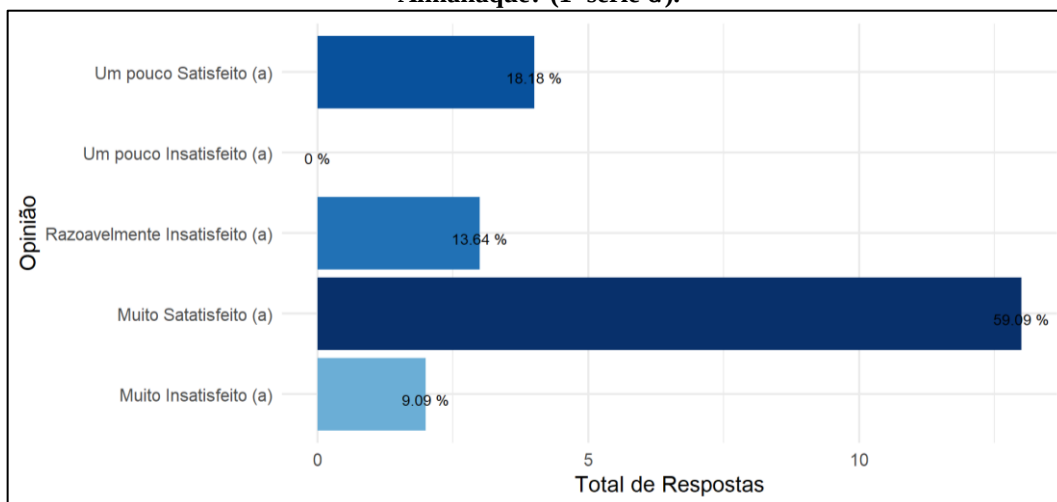
Figura 57 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (1ª série G).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

O sumário dos dados relativos à questão 3, que faz alusão à compreensão do Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”, é mostrado no gráfico da imagem presente na Figura 58.

Figura 58 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (1ª série G).

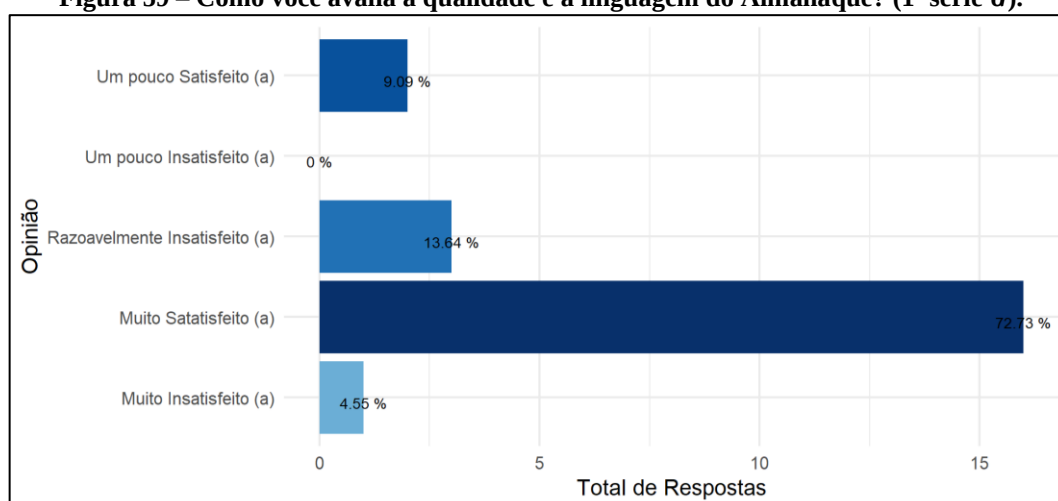


Fonte: Resultados da Pesquisa.

Ao visualizar o gráfico acima, verifica-se que 77,27% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” quanto à compreensão do passo a passo das atividades contidas no material e 27,73% apresentam alguma insatisfação.

A questão 4 é referente à avaliação da qualidade e linguagem do Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”. Os resultados dos dados coletados estão sumarizados no gráfico da Figura 59.

Figura 59 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (1ª série G).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Observa-se, no gráfico acima, que 81,82% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a qualidade e a linguagem proposta no Almanaque e 18,19% apresentam alguma insatisfação.

A questão 5 está relacionada com a nota de satisfação geral dos entrevistados com respeito à atividade proposta. A Tabela 18 apresenta as medidas descritivas calculadas, associadas às notas coletadas.

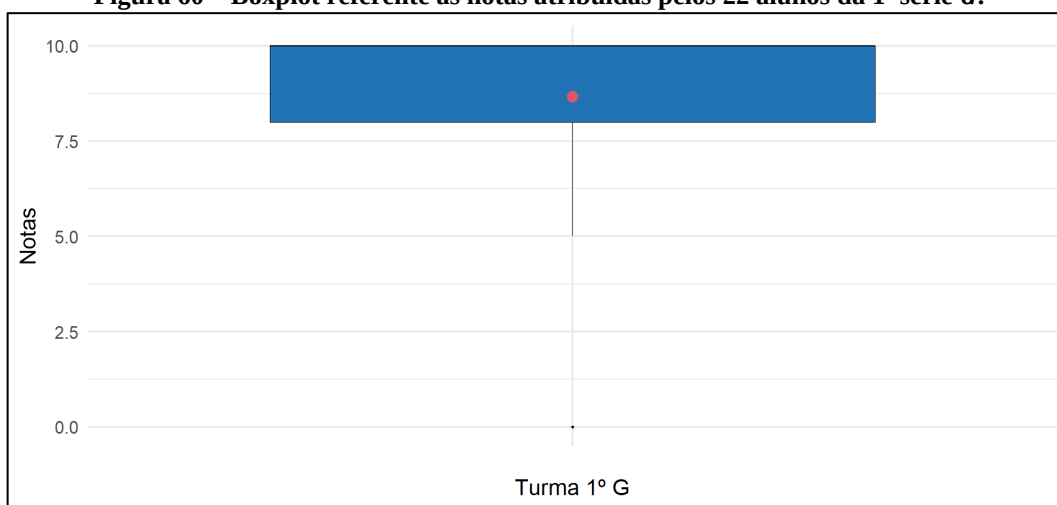
Tabela 18 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série G.

Estatística das Notas atribuídas	Valores
Número de observações: $n_{1^{\text{a}} \text{ ano } G}$	22
Média: $\bar{x}_{1^{\text{a}} \text{ ano } G}$	8,66
Variância: $S_{1^{\text{a}} \text{ ano } G}^2$	5,51
Desvio Padrão: $S_{1^{\text{a}} \text{ ano } G}$	2,35
Coeficiente de Variação: $CV_{1^{\text{a}} \text{ ano } G}$	27,11 %

Fonte: Resultados da Pesquisa.

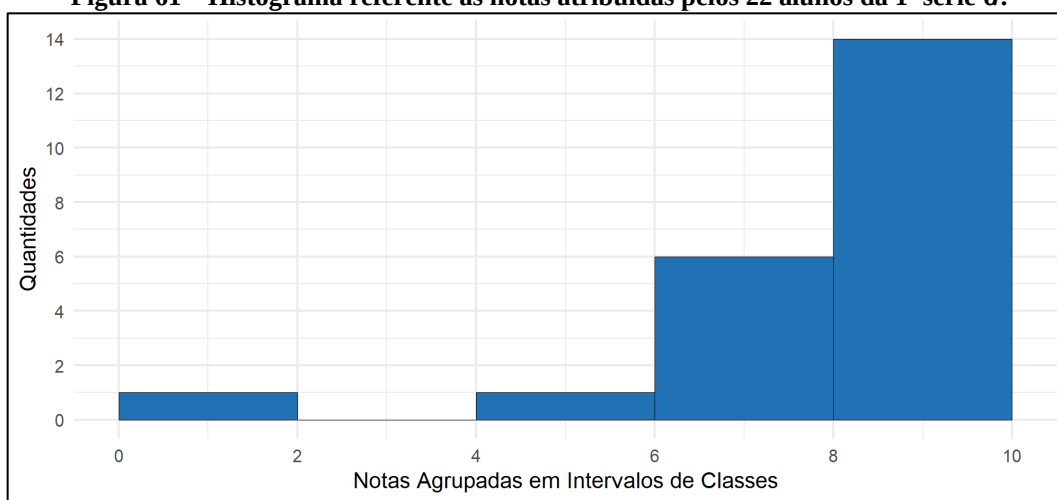
A nota média dos 22 alunos que responderam ao questionário foi de $\bar{x}_{1^{\text{a}} \text{ série } G} = 8,66$. Esta nota é considerada alta. Além disso, os dados possuem uma baixa variação, conforme mostra o coeficiente de variação $CV_{1^{\text{a}} \text{ série } G} = 27,11\%$, que é acompanhado pelas demais medidas de dispersão. A seguir, nas Figuras 60, 61 e 62, são apresentados os gráficos boxplot, histograma e histograma com sua função de densidade de probabilidade.

Figura 60 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 1ª série G.



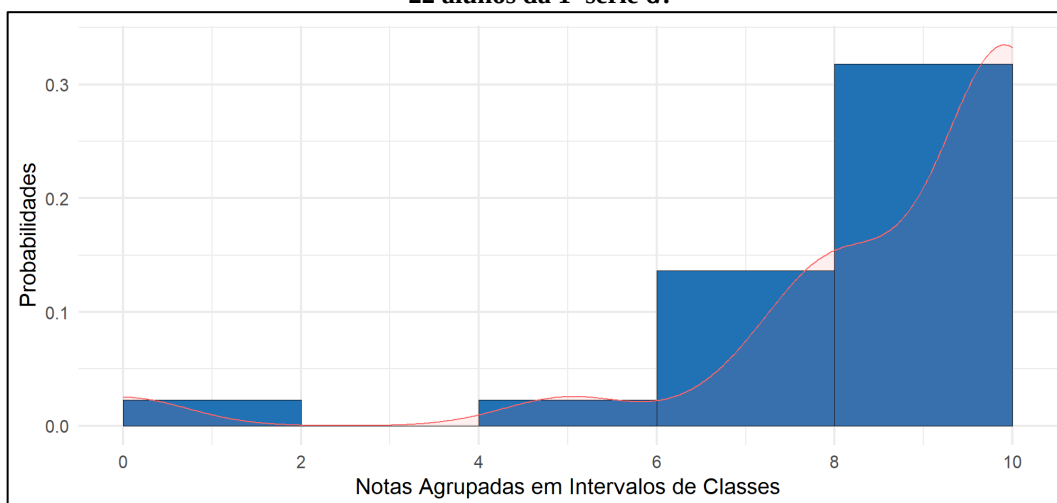
Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 61 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 1ª série G.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 62 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 1ª série G.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Avaliando os gráficos das Figuras 60, 61 e 62, observa-se que a maior parte das notas atribuídas se concentram entre 6 e 10. Observa-se também um comportamento assimétrico relacionado aos dados das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série G. Assim, com o intuito de avaliar este comportamento de modo mais rigoroso, foi realizado o teste de normalidade de Shapiro Wilk nestes dados, conforme o expresso na Tabela 19.

Tabela 19 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk nas notas dos alunos da 1ª série G.

Estatística W	p-valor
0,62	2,45e-06
<i>H₀: os dados das notas dos alunos do 1ª série G apresentam normalidade</i>	
ou	
<i>H₁: os dados das notas dos alunos do 1ª série G não apresentam normalidade</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Com base no apresentado na tabela anterior, rejeita-se H_0 , ao nível de significância $\alpha = 10\%$. Logo, há indícios de que estes dados não apresentam normalidade. Ou seja, os dados possuem assimetria conforme o que pode ser observado nas Figuras de 60 a 62. Especifica-se que, este comportamento é algo esperado, já que os dados são referentes às notas advindas de opiniões distintas de alunos.

Em seguida, apresenta-se o resultado de dois testes não paramétricos de Wilcoxon com postos sinalizados, que foram realizados a fim de avaliar:

1. Se há indicativo de que a nota média $\bar{x}_{1ª \text{ série } G} = 8,66$ possa apresentar valor maior que o descrito ou permanecer como está;
2. Se há indícios de que a nota média possa diminuir ou permanecer conforme o calculado ($\bar{x}_{1ª \text{ série } G} = 8,66$).

Tabela 20 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{1ª \text{ série } G} = 8,66$, possa ser maior.

Estatística T	p-valor
170	0,08
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{1ª \text{ série } G} = 8,66$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu > \bar{x}_{1ª \text{ série } G} > 8,66$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Tabela 21 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{1ª \text{ série } G} = 8,66$, possa ser menor.

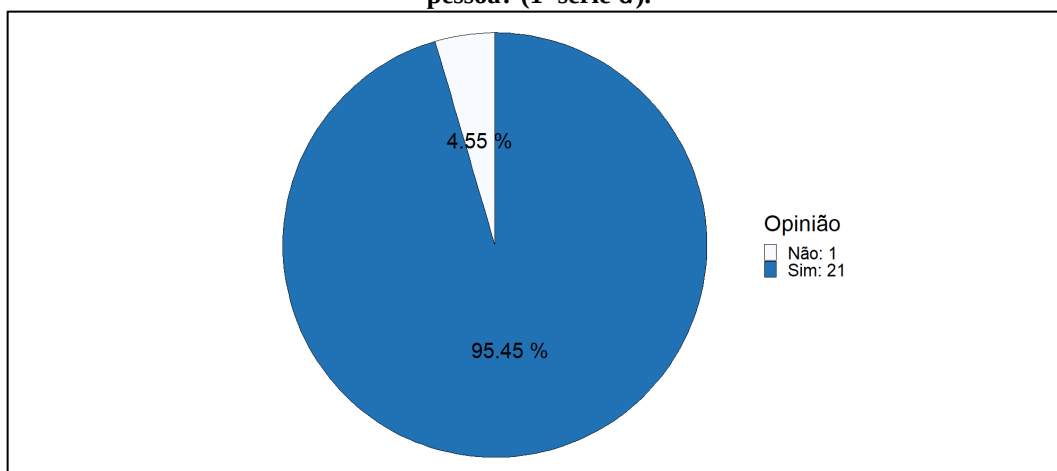
Estatística T	p-valor
170	0,93
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{1ª \text{ série } G} = 8,66$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu < \bar{x}_{1ª \text{ série } G} < 8,66$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

As Tabelas 20 e 21 indicam, respectivamente, que há uma rejeição e aceitação de H_0 em cada teste. Assim, há o indicativo de que a média das notas, $\bar{x}_{1^{\text{a}} \text{ ano } G} = 8,66$, poderá ser maior que este valor e que ela também não correrá o risco diminuir, considerando a amostra analisada ao nível de significância de $\alpha = 10\%$. Este resultado mostra que há uma perspectiva de aumento e de manutenção da nota média atividade proposta.

Tem-se, na Figura 63, um gráfico de setores que fornece uma síntese dos dados coletados a respeito da questão 6, relativa à recomendação do material proposto.

Figura 63 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (1ª série G).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

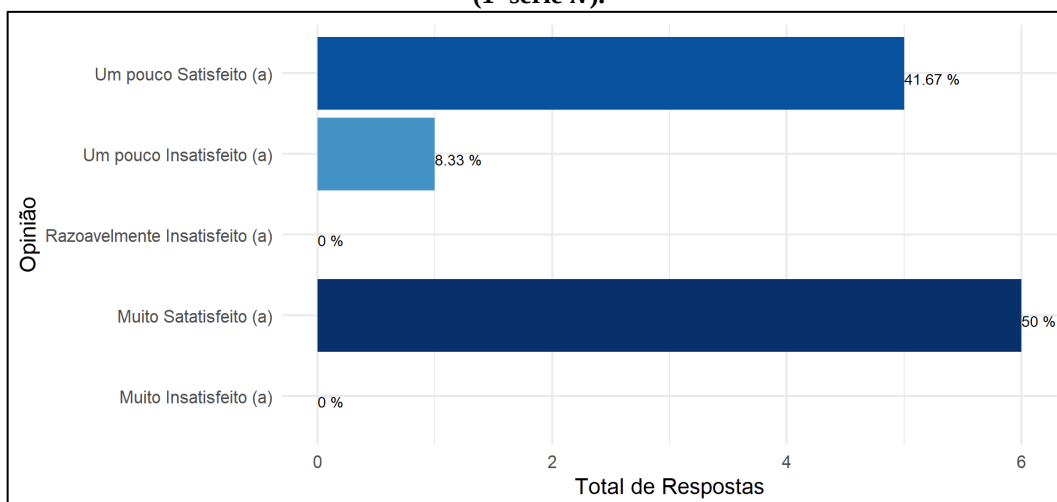
No gráfico acima, verifica-se que quase todos os alunos, com exceção de um único aluno, indicariam a atividade para uma outra pessoa. Esta é mais uma sinalização da boa aceitação do material e suas atividades propostas, nesta turma.

➤ Turma da 1ª série N

Participaram da atividade proposta um total de $n_{1^{\text{a}} \text{ ano } N} = 12$ alunos da turma da primeira série N do Ensino Médio. Os resultados relativos à questão 2, que se refere à opinião sobre a experiência com a atividade proposta, estão sintetizados no gráfico de barras que se encontra na Figura 64.

Com base no gráfico que segue, observa-se que 91,67% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a experiência com material desenvolvido e 8,33% apresentam algum grau de insatisfação.

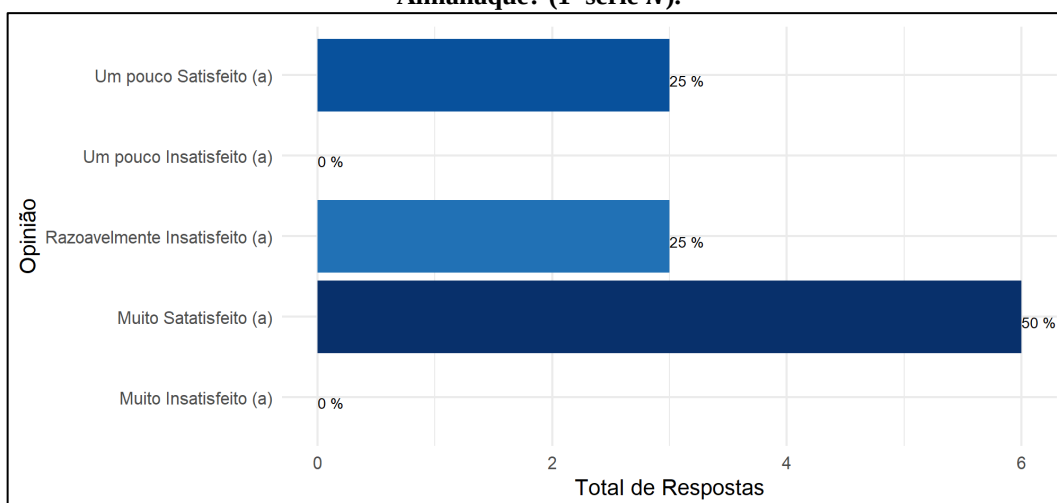
Figura 64 – Como foi a sua experiência com o Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”?
(1ª série N).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

O sumário da coleta de dados relativos à questão 3, que se refere à compreensão do Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”, é mostrado na Figura 65.

Figura 65 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (1ª série N).

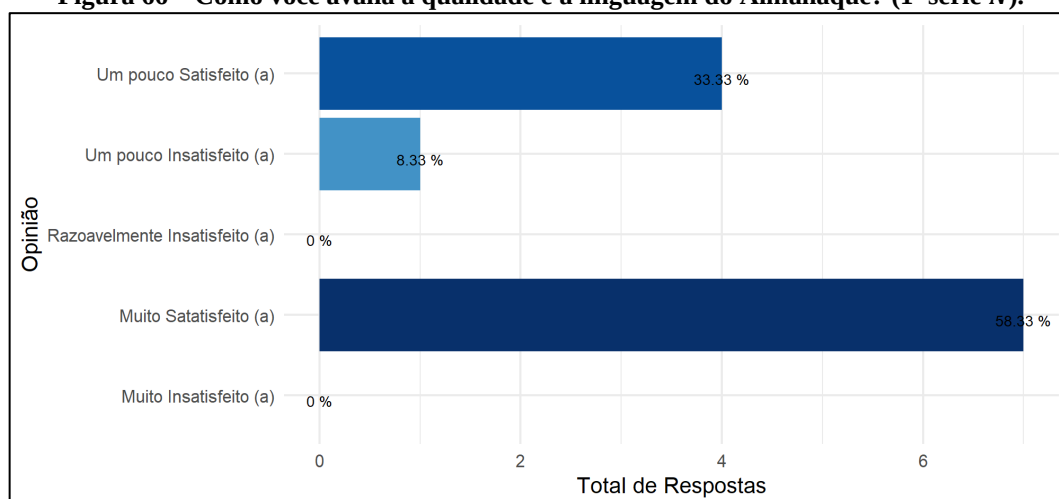


Fonte: Resultados da Pesquisa.

Verifica-se que 75% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” quanto à compreensão do passo a passo das atividades contidas no material e 25% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 4 se refere à avaliação da qualidade e linguagem do Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”. O resumo dos dados coletados pode ser visualizado no gráfico da Figura 66.

Figura 66 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (1ª série N).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Analisando o referido gráfico, observa-se que 91,96% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a qualidade e a linguagem do almanaque e 8,33% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 5 relaciona-se à nota de satisfação geral dos entrevistados com a atividade proposta. A Tabela 22 apresenta as medidas descritivas calculadas para a questão, com base nos valores coletados.

Tabela 22 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série N.

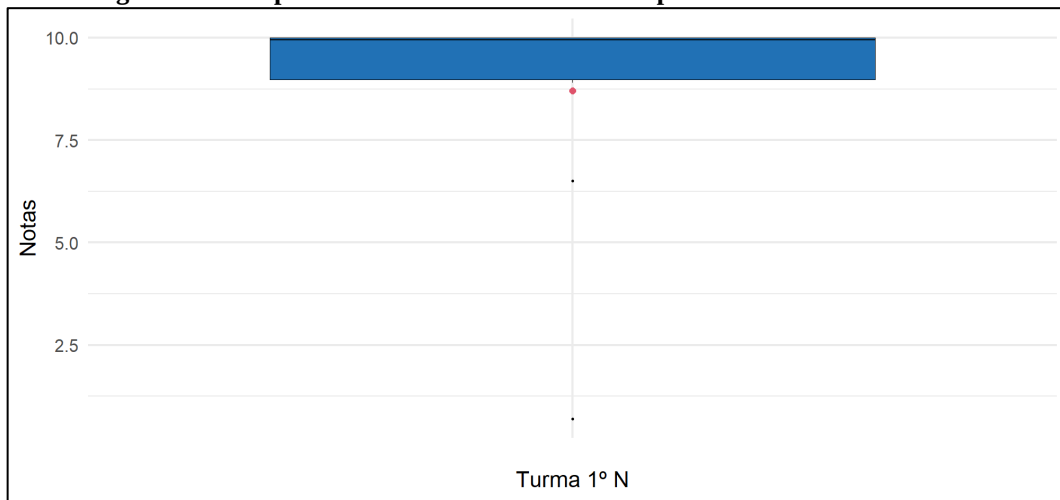
Estatística das Notas atribuídas	Valores
Número de observações: $n_{1^a \text{ série } N}$	12
Média: $\bar{x}_{1^a \text{ série } N}$	8,71
Variância: $S_{1^a \text{ série } N}^2$	7,38
Desvio Padrão: $S_{1^a \text{ série } N}$	2,72
Coefficiente de Variação: $CV_{1^a \text{ série } N}$	31,20 %

Fonte: Resultados da Pesquisa.

A nota média dos 25 alunos que responderam ao questionário foi de $\bar{x}_{1^a \text{ série } N} = 8,71$. Pode-se considerar que esta nota seja alta. A variação dos dados também pode ser considerada baixa, dado o coeficiente de variação $CV_{1^o \text{ ano } N} = 31,20\%$. As demais medidas de dispersão acompanham o $CV_{1^a \text{ série } N}$.

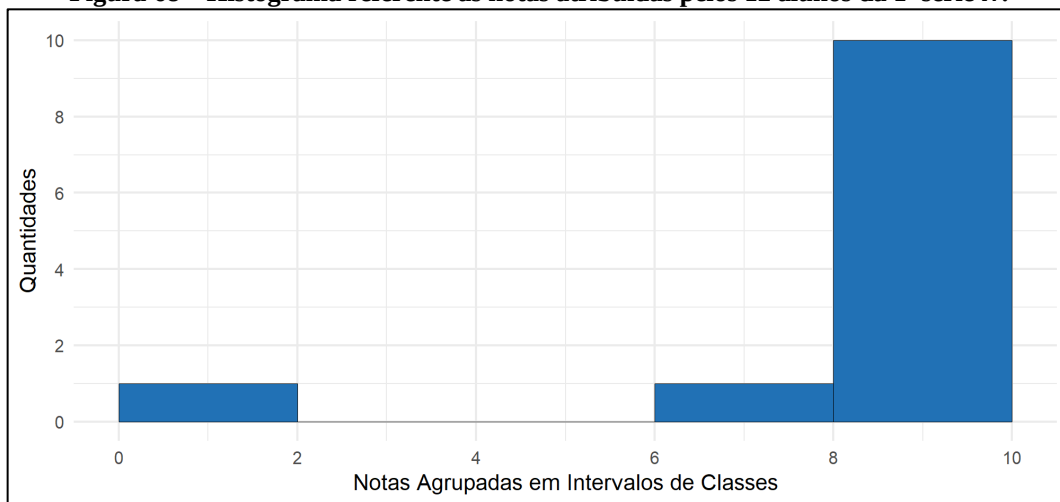
A seguir são apresentados os gráficos boxplot, histograma e histograma com sua função de densidade de probabilidade, os quais se encontram nas Figuras 67, 68 e 69.

Figura 67 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 12 alunos da 1ª série N.



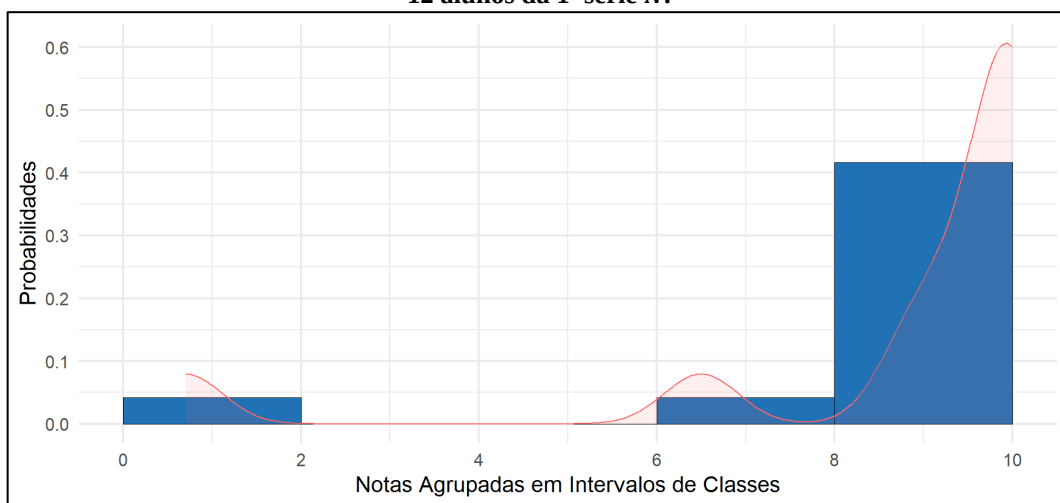
Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 68 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 12 alunos da 1ª série N.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 69 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 12 alunos da 1ª série N.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Analisando os gráficos das Figuras 67, 68 e 69, verifica-se que a maior parte das notas atribuídas se concentram entre 6 e 10. Observa-se um comportamento assimétrico relacionado aos dados das notas atribuídas pelos alunos da 1ª série N. Assim, com intuito de avaliar este comportamento de forma mais rigorosa, foi realizado o teste de normalidade de Shapiro Wilk nestes dados, nos moldes do apresentado na Tabela 23.

Tabela 23 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk para as notas dos alunos da 1ª série N.	
Estatística W	p-valor
0,55	4,76e-05
<i>H₀: os dados das notas dos alunos do 1ª série N apresentam normalidade</i>	
ou	
<i>H₁: os dados das notas dos alunos do 1ª série N não apresentam normalidade</i>	
Fonte: Resultados da Pesquisa.	

Com base no apresentado na Tabela 23, rejeita-se H_0 , ao nível de significância $\alpha = 10\%$. Logo, afirma-se que há indícios de que estes dados não apresentem normalidade. Ou seja, tais dados possuem assimetria como conforme o que pode ser visto nos gráficos das Figuras de 67 a 69. Este comportamento é algo esperado, já que os dados são referentes às notas advindas de opiniões distintas de alunos.

Em seguida, apresenta-se o resultado de dois testes não paramétricos de Wilcoxon com postos sinalizados, que foram realizados a fim de avaliar:

1. Se há indicativo de que a nota média $\bar{x}_{1ª\ série\ N} = 8,71$ possa apresentar valor maior que o descrito ou permanecer como está;
2. Se há indícios de que a nota média possa diminuir ou permanecer conforme o calculado ($\bar{x}_{1ª\ série\ N} = 8,71$).

Estes testes estão discriminados nas Tabelas 24 e 25.

Tabela 24 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{1ª\ série\ N} = 8,71$, possa ser maior.

Estatística T	p-valor
55	0,10
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{1ª\ série\ N} = 8,71$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu > \bar{x}_{1ª\ série\ N} > 8,71$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Tabela 25 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{1ª\ série\ N} = 8,71$, possa ser menor.

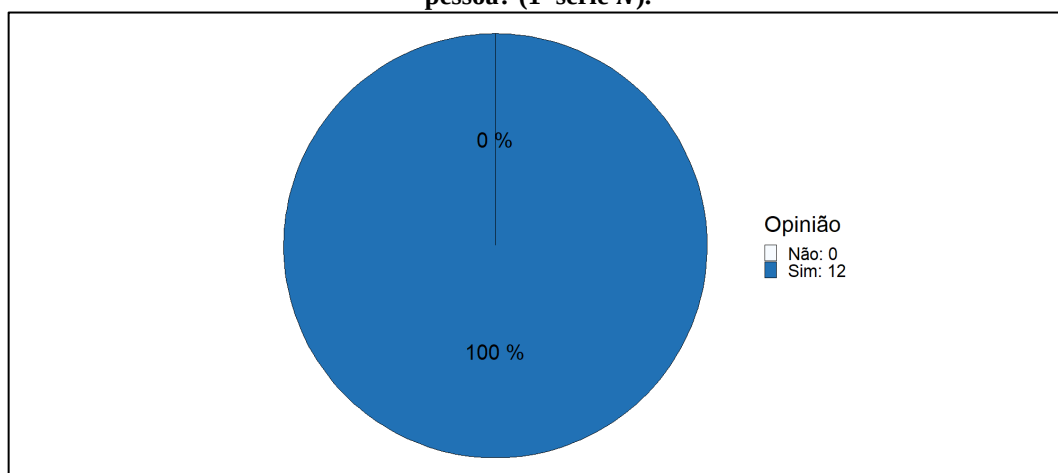
Estatística T	p-valor
55	0,90
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{1ª\ série\ N} = 8,71$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu < \bar{x}_{1ª\ série\ N} < 8,71$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

As Tabelas 24 e 25 indicam que há, respectivamente, uma rejeição e um aceitação de H_0 em cada teste. Assim, há o indicativo de que a média das notas, $\bar{x}_{1^{\text{a}} \text{ ano } N} = 8,71$, poderá ser maior que este valor e que ela também não correrá o risco diminuir, considerando a amostra analisada ao nível de significância de $\alpha = 10\%$. Este resultado mostra que há uma perspectiva de aumento e de manutenção da nota média da atividade proposta.

Tem-se, na Figura 70, um gráfico de setores que fornece uma síntese dos dados coletados a respeito da questão 6, relativa à recomendação do material proposto.

Figura 70 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (1ª série N).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

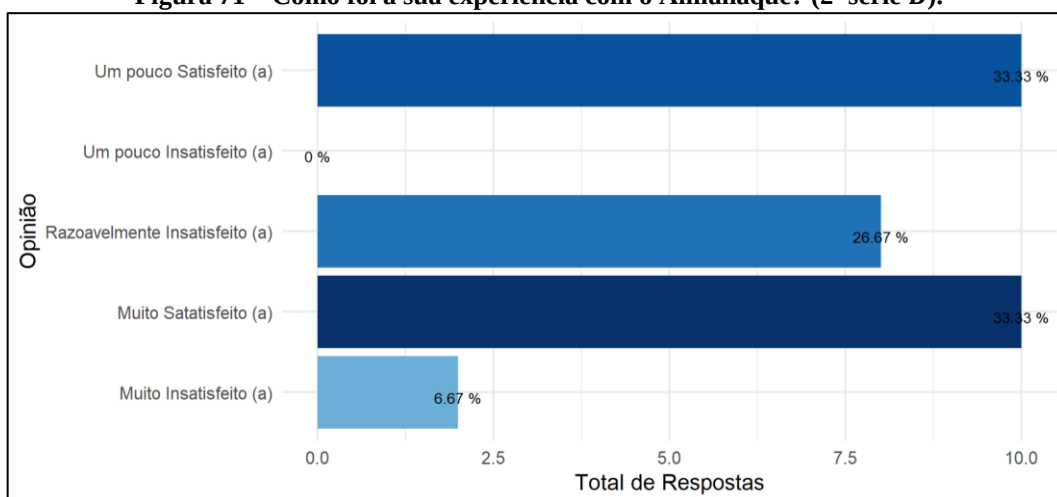
No gráfico acima, verifica-se que todos os alunos indicariam a atividade para uma outra pessoa, o que é mais uma sinalização da boa aceitação do material e suas atividades propostas, nesta turma.

➤ Turma da 2ª série B

Participaram da atividade proposta um total de $n_{2^{\text{a}} \text{ ano } B} = 30$ alunos da turma da segunda série B do Ensino Médio. Os resultados relativos à questão 2, que se refere à opinião sobre a experiência com a atividade proposta, estão sintetizados no gráfico de barras que se encontra na Figura 71.

A partir do gráfico que segue, observa-se que 66,66% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a experiência com material desenvolvido e 33,34% apresentam algum grau de insatisfação.

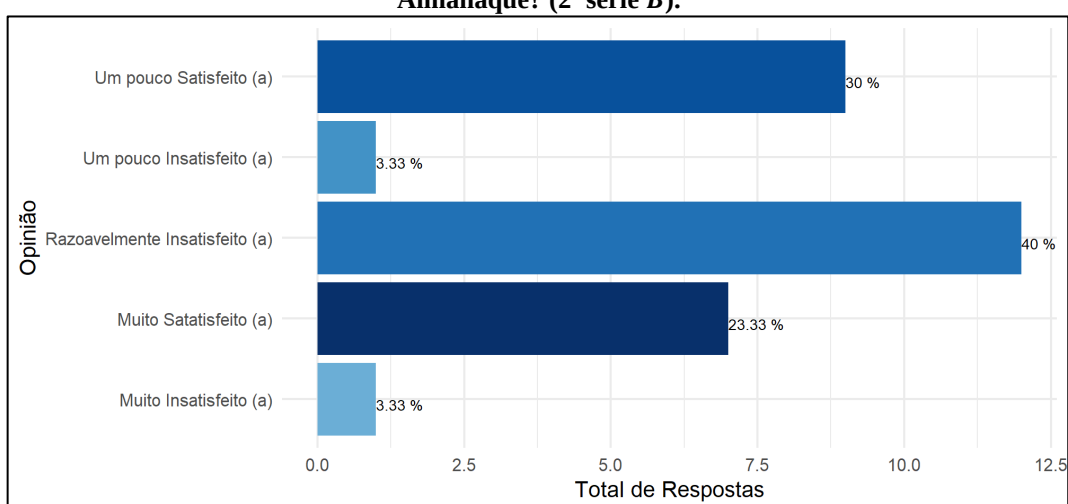
Figura 71 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (2ª série B).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

O resumo da coleta de dados relativa à questão 3, que faz alusão à compreensão da atividade proposta, é apresentado na Figura 72.

Figura 72 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (2ª série B).

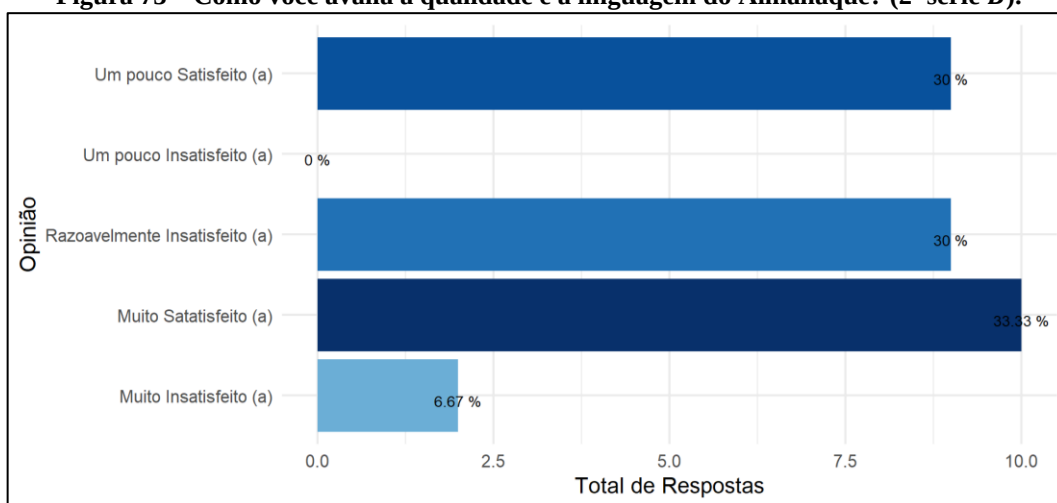


Fonte: Resultados da Pesquisa.

Verifica-se que 53,33% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com relação à compreensão do passo a passo das atividades contidas no material elaborado e 46,66% apresentam alguma insatisfação.

A questão 4 é referente à avaliação da qualidade e linguagem do Almanaque “Leãozito: Os Mistérios dos Números Primos”. O gráfico da Figura 73 sumariza os dados relativos à esta questão.

Figura 73 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (2ª série B).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Observa-se que 63,33% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a qualidade e a linguagem da atividade proposta no almanaque e 36,67% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 5 diz respeito à nota relacionada à satisfação geral dos entrevistados com relação à atividade proposta. A Tabela 26 apresenta as medidas descritivas calculadas para esta questão.

Tabela 26 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 2ª série B.

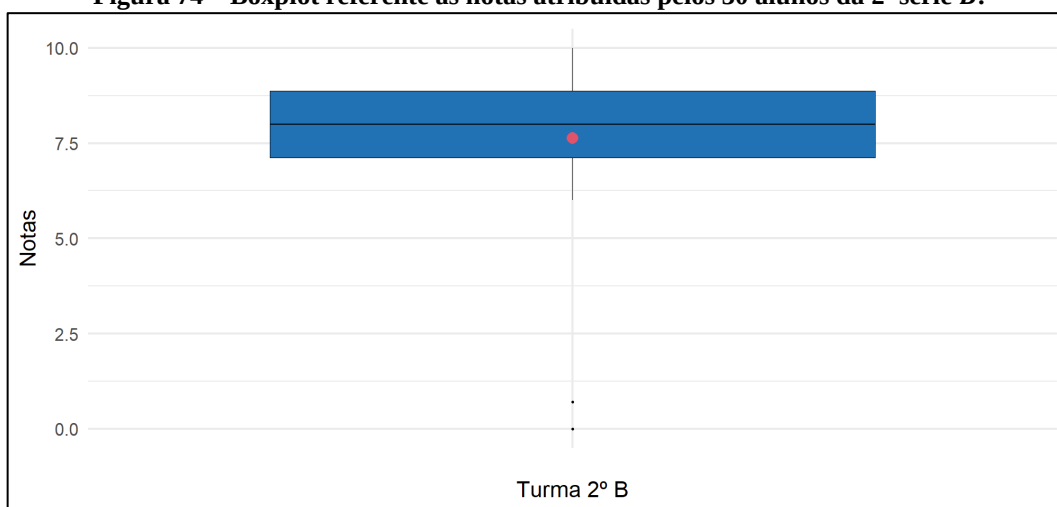
Estatística das Notas atribuídas	Valores
Número de observações: $n_{2^a \text{ série } B}$	30
Média: $\bar{x}_{2^a \text{ série } B}$	7,63
Variância: $S_{1^a \text{ série } B}^2$	4,80
Desvio Padrão: $S_{2^a \text{ série } B}$	2,19
Coefficiente de Variação: $CV_{2^a \text{ série } B}$	28,70 %

Fonte: Resultados da Pesquisa.

A nota média dos 30 alunos que responderam ao questionário foi de $\bar{x}_{2^a \text{ ano } B} = 7,63$. Esta nota pode ser considerada alta, ao passo que os dados possuem uma variação baixa, segundo coeficiente de variação $CV_{2^a \text{ ano } B} = 27,80\%$ obtido. As demais medidas de dispersão acompanham o coeficiente de variação.

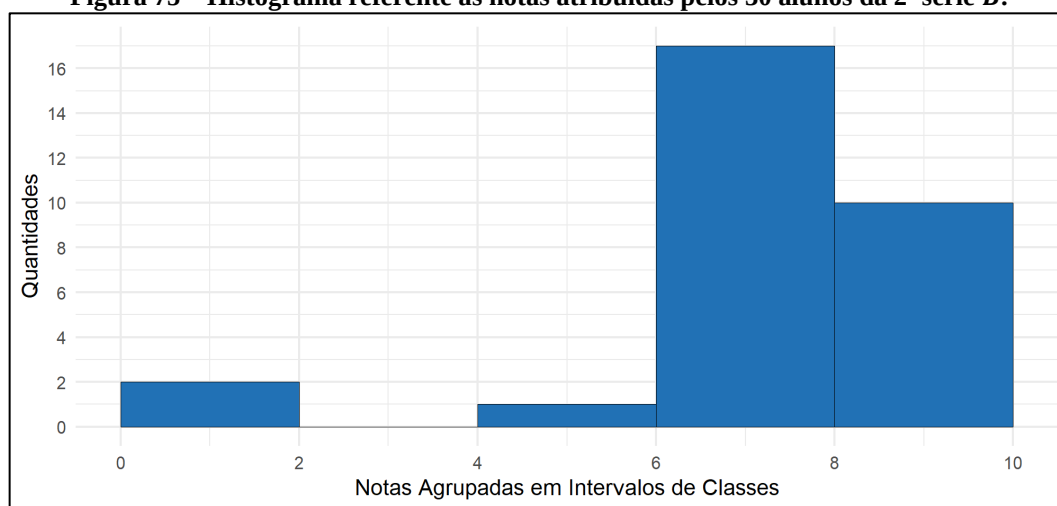
A seguir são apresentados os gráficos boxplot, histograma e histograma com sua função de densidade de probabilidade, presentes nas Figuras 74, 75 e 76.

Figura 74 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 30 alunos da 2ª série B.



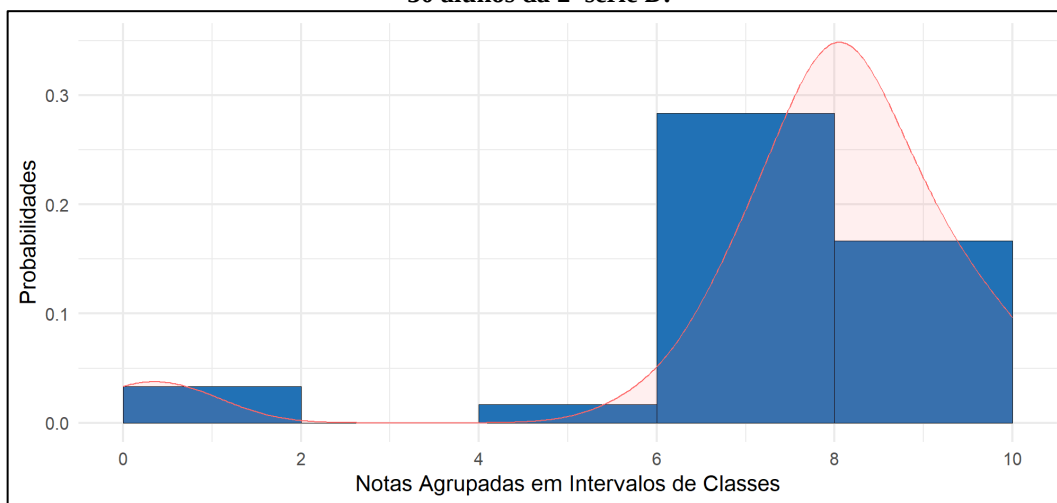
Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 75 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 30 alunos da 2ª série B.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 76 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 30 alunos da 2ª série B.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Analisando os gráficos das Figuras 74, 75 e 76, verifica-se que a maior parte das notas atribuídas pelos alunos da 2ª série B se concentram entre 6 e 10. Observa-se ainda um comportamento assimétrico dos dados das notas atribuídas pelos alunos. Assim, com o intuito de avaliar este comportamento de forma mais rigorosa, foi realizado o teste de normalidade de Shapiro Wilk nestes dados, conforme o explicitado na Tabela 27.

Tabela 27 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk para as notas dos alunos da 2ª série B.	
Estatística W	p-valor
0,68	7,91e-07
<i>H₀: os dados das notas dos alunos do 2ª série B apresentam normalidade</i>	
ou	
<i>H₁: os dados das notas dos alunos do 2ª série B não apresentam normalidade</i>	
Fonte: Resultados da Pesquisa.	

Com base no apresentado na tabela anterior, rejeita-se H_0 , ao nível de significância $\alpha = 10\%$. Nestes termos, infere-se que haja indícios de que estes dados não apresentem normalidade. Ou seja, tais dados possuem assimetria conforme o que pode ser visto nos gráficos das Figuras de 74 a 76. Este comportamento é algo esperado, já que os dados são referentes a notas advindas de opiniões distintas de alunos.

Em seguida, apresenta-se o resultado de dois testes não paramétricos de Wilcoxon com postos sinalizados, que foram realizados a fim de avaliar:

1. Se há indicativo de que a nota média $\bar{x}_{2^a \text{ série } B} = 7,63$ possa apresentar valor maior que o descrito ou permanecer como está;
2. Se há indícios de que a nota média possa diminuir ou permanecer conforme o calculado ($\bar{x}_{2^a \text{ série } B} = 7,63$).

Estes testes estão discriminados nas Tabelas 28 e 29.

Tabela 28 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{2^a \text{ série } B} = 7,63$, possa ser maior.

Estatística T	p-valor
305	0,07
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{2^a \text{ série } B} = 7,63$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu > \bar{x}_{2^a \text{ série } B} > 7,63$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Tabela 29 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{2^a \text{ série } B} = 7,63$, possa ser menor.

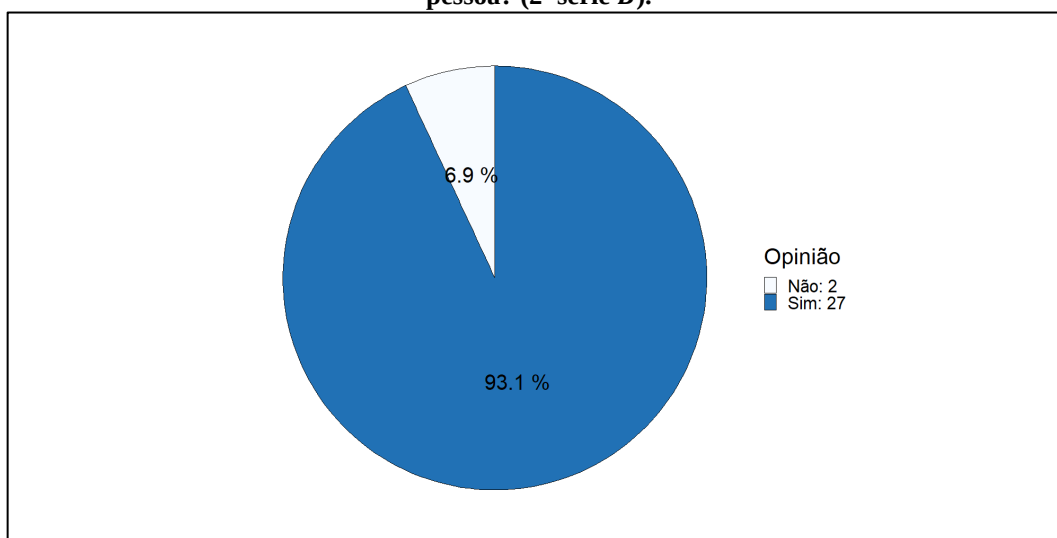
Estatística T	p-valor
305	0,93
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{2^a \text{ série } B} = 7,63$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu < \bar{x}_{2^a \text{ série } B} < 7,63$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

As Tabelas 28 e 29 indicam que há, respectivamente, uma rejeição e uma aceitação de H_0 em cada teste. Assim, há o indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{2^a \text{ série } B} = 7,63$, poderá ser maior que este valor e que ela também não correrá o risco diminuir na amostra analisada ao nível de significância de $\alpha = 10\%$. Este resultado mostra que há uma perspectiva de aumento e de manutenção da nota média da atividade proposta.

Tem-se, na Figura 77, um gráfico de setores que fornece uma síntese dos dados coletados a respeito da questão 6, relativa à recomendação do material proposto.

Figura 77 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (2ª série B).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

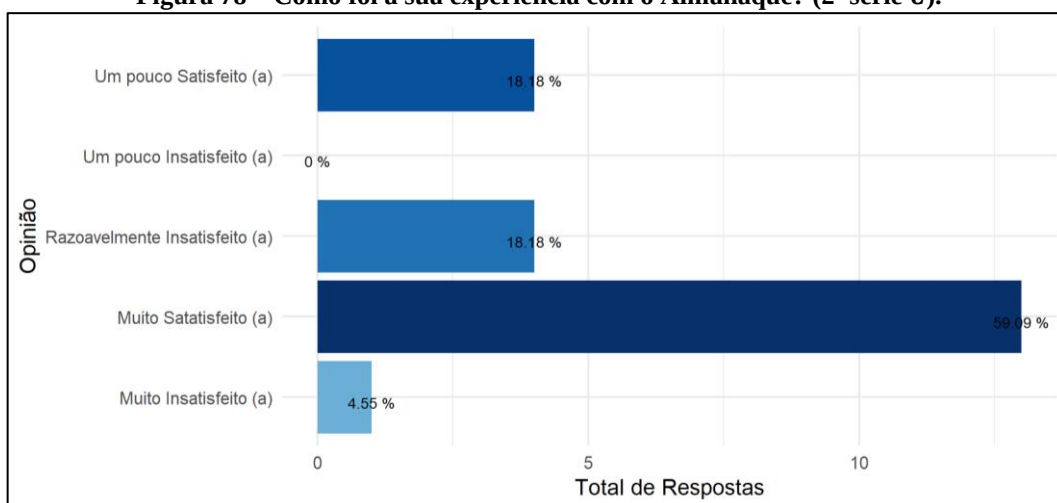
No gráfico acima, verifica-se que quase totalidade dos alunos indicariam a atividade para uma outra pessoa, o que é mais uma sinalização da boa aceitação do material e suas atividades propostas, nesta turma. Vale ressaltar que, houve um aluno na 2ª série B que não respondeu à questão. Logo, o gráfico da Figura 77 representa apenas a opinião de 29 participantes.

➤ Turma da 2ª série C

Participaram da atividade proposta um total de $n_{2^a \text{ série } C} = 22$ alunos da turma do segundo série C do Ensino Médio. Os resultados relativos à questão 2, que se refere à opinião sobre a experiência com o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, estão sintetizados no gráfico de barras que se encontra na Figura 78.

A partir do gráfico que segue, observa-se que 77,27% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a experiência com o material desenvolvido e 22,73% apresentam algum grau de insatisfação.

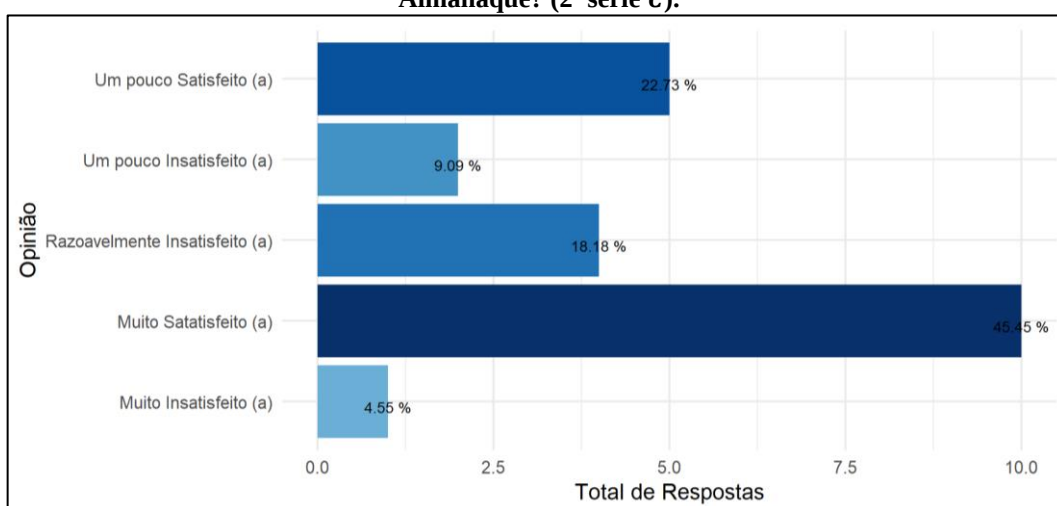
Figura 78 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (2ª série C).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

O resumo da coleta de dados relativo à questão 3, que faz alusão à compreensão do Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, é apresentado na Figura 79.

Figura 79 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (2ª série C).

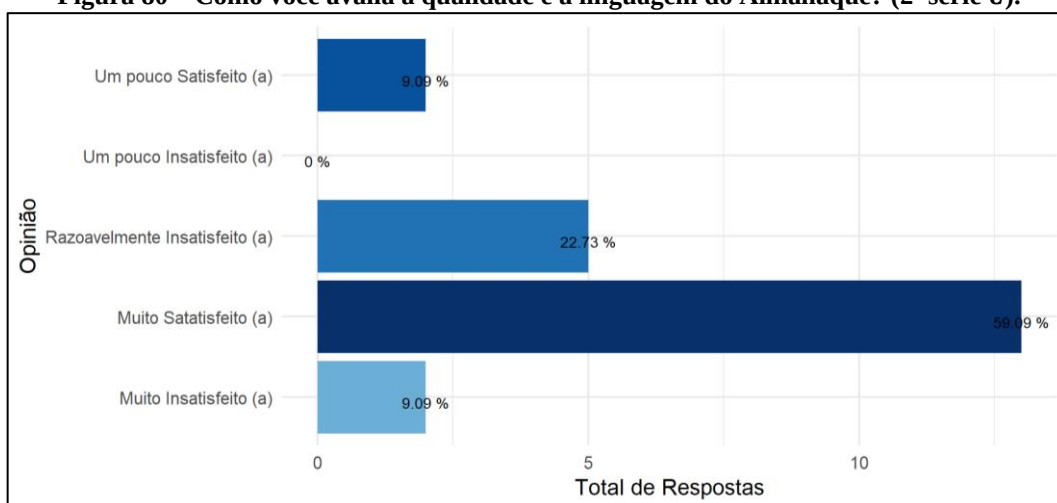


Fonte: Resultados da Pesquisa.

Verifica-se, que 68,18% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” quanto à compreensão do passo a passo da atividade contida no material e 31,82% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 4 se refere à avaliação da qualidade e linguagem do Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”. A sinopse dos dados coletados está presente no gráfico da Figura 80.

Figura 80 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (2ª série C).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Observa-se que 68,18% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a qualidade e a linguagem do Almanaque e 31,82% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 5 diz respeito à nota relacionada à satisfação geral dos entrevistados com relação à atividade proposta. A Tabela 30 apresenta as medidas descritivas calculadas para esta questão.

Tabela 30 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 2ª série C.

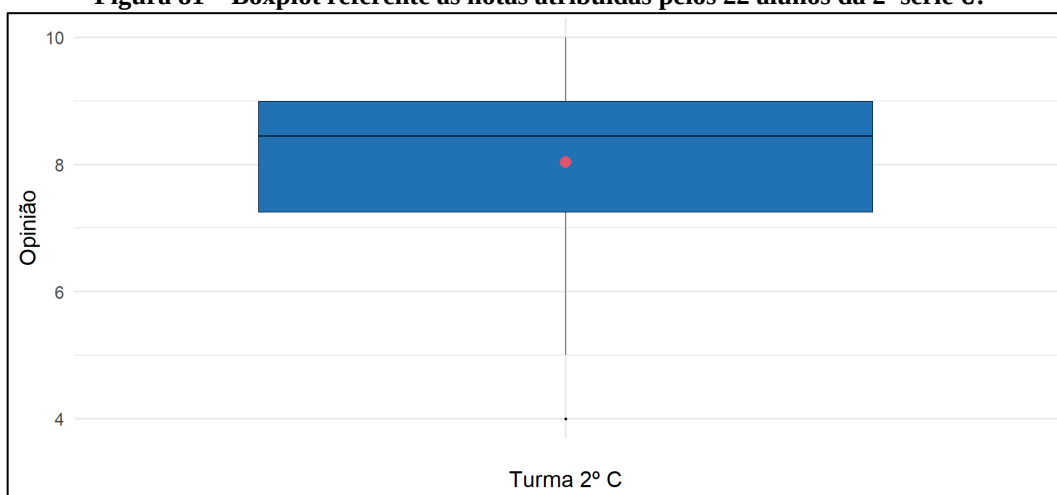
Estatística das Notas atribuídas	Valores
Número de observações: $n_{2^a \text{ série } C}$	22
Média: $\bar{x}_{2^a \text{ série } C}$	8,04
Variância: $S_{2^a \text{ série } C}^2$	3,27
Desvio Padrão: $S_{2^a \text{ série } C}$	1,81
Coefficiente de Variação: $CV_{2^a \text{ série } C}$	22,50 %

Fonte: Resultados da Pesquisa.

A nota média de 22 alunos que responderam ao questionário foi de $\bar{x}_{2^a \text{ série } C} = 8,04$, a qual pode ser considerada alta. Além disso, verifica-se que os dados possuem uma variação baixa, conforme indica o coeficiente de variação $CV_{2^a \text{ série } C} = 22,50\%$ e as demais medidas de dispersão.

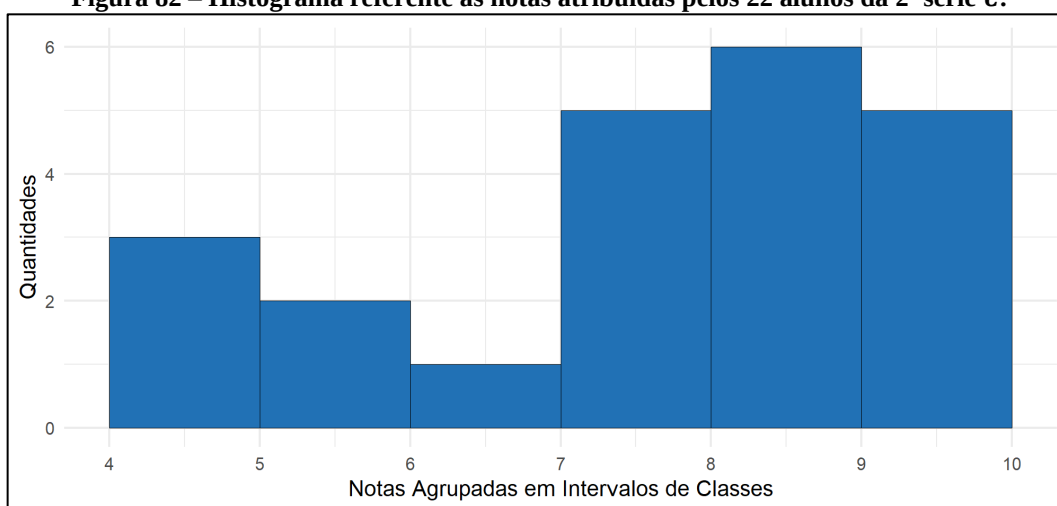
A seguir, nas Figuras 81, 82 e 83 são apresentados os gráficos boxplot, histograma e histograma com sua função de densidade de probabilidade, relativos aos dados coletados, inerentes à questão 5.

Figura 81 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 2ª série C.



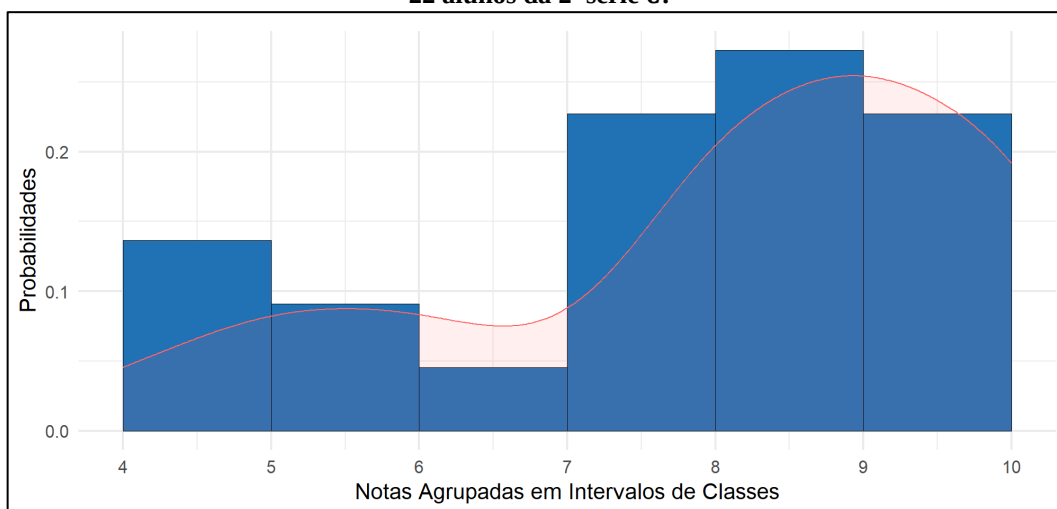
Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 82 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 2ª série C.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 83 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 22 alunos da 2ª série C.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Analisando os gráficos das Figuras 81, 82 e 83, verifica-se que a maior parte das notas atribuídas pelos alunos se concentram entre 7 e 10. Observa-se ainda um comportamento assimétrico dos dados das notas atribuídas pelos alunos da 2ª série C. Assim, com o intuito de avaliar este comportamento de forma mais rigorosa, foi realizado o teste de normalidade de Shapiro Wilk nestes dados, conforme o explicitado na Tabela 31.

Tabela 31 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk para as notas dos alunos da 2ª série C.	
Estatística W	p-valor
0,88	0,01
<i>H₀: os dados das notas dos alunos da 2ª série C apresentam normalidade</i>	
ou	
<i>H₁: os dados das notas dos alunos da 2ª série C não apresentam normalidade</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Com base no apresentado na tabela anterior, rejeita-se H_0 , ao nível de significância $\alpha = 10\%$. Nestes termos, infere-se que haja indícios de que estes dados não apresentem normalidade. Ou seja, tais dados possuem assimetria conforme o que pode ser visto nos gráficos das Figuras de 81 a 83. Este comportamento é algo esperado, já que os dados são referentes a notas advindas de opiniões distintas de alunos.

Em seguida, apresenta-se o resultado de dois testes não paramétricos de Wilcoxon com postos sinalizados, que foram realizados a fim de avaliar:

1. Se há indicativo de que a nota média $\bar{x}_{2^a \text{ série } C} = 8,04$ possa apresentar valor maior que o descrito ou permanecer como está;
2. Se há indícios de que a nota média possa diminuir ou permanecer conforme o calculado ($\bar{x}_{2^a \text{ série } C} = 8,04$).

Estes testes estão discriminados nas Tabelas 32 e 33.

Tabela 32 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{2^a \text{ série } C} = 8,04$, possa ser maior.

Estatística T	p-valor
126	0,51
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{2^a \text{ série } C} = 8,04$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu > \bar{x}_{2^a \text{ série } C} > 8,04$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Tabela 33 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{2^a \text{ série } C} = 8,04$, possa ser menor.

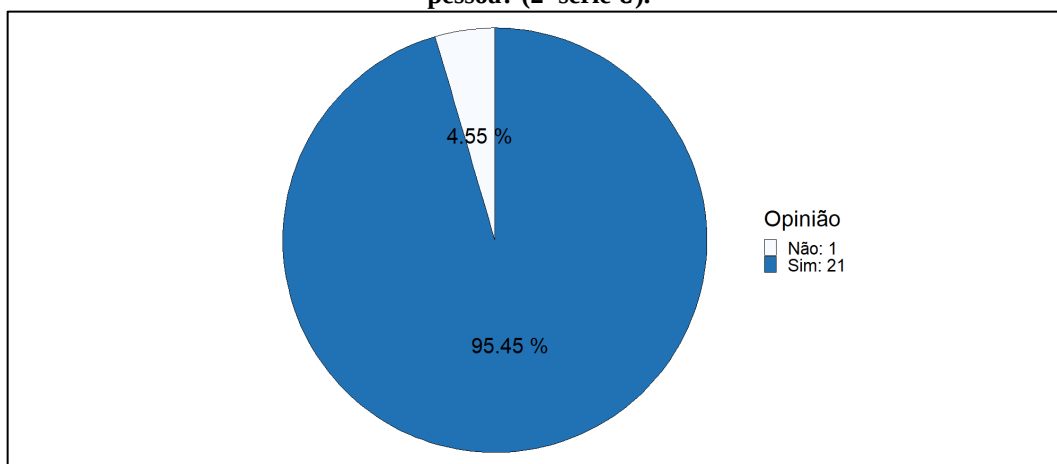
Estatística T	p-valor
126	0,50
<i>H₀: $\mu = \bar{x}_{2^a \text{ série } C} = 8,04$</i>	
ou	
<i>H₁: $\mu < \bar{x}_{2^a \text{ série } C} < 8,04$</i>	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

As Tabelas 32 e 33 indicam que há uma aceitação de H_0 em cada teste. Assim, há o indicativo de que a média das notas, $\bar{x}_{2^{\text{a}} \text{ ano C}} = 8,04$, se manterá conforme o valor calculado, não possuindo indícios de alteração, considerando a amostra analisada ao nível de significância de $\alpha = 10\%$. Este resultado mostra que não há uma perspectiva de aumento da média e que deve ocorrer a manutenção da nota média, das notas dadas à atividade proposta.

Tem-se, na Figura 84, um gráfico de setores que fornece uma síntese dos dados coletados a respeito da questão 6, relativa à recomendação do material proposto.

Figura 84 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (2ª série C).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

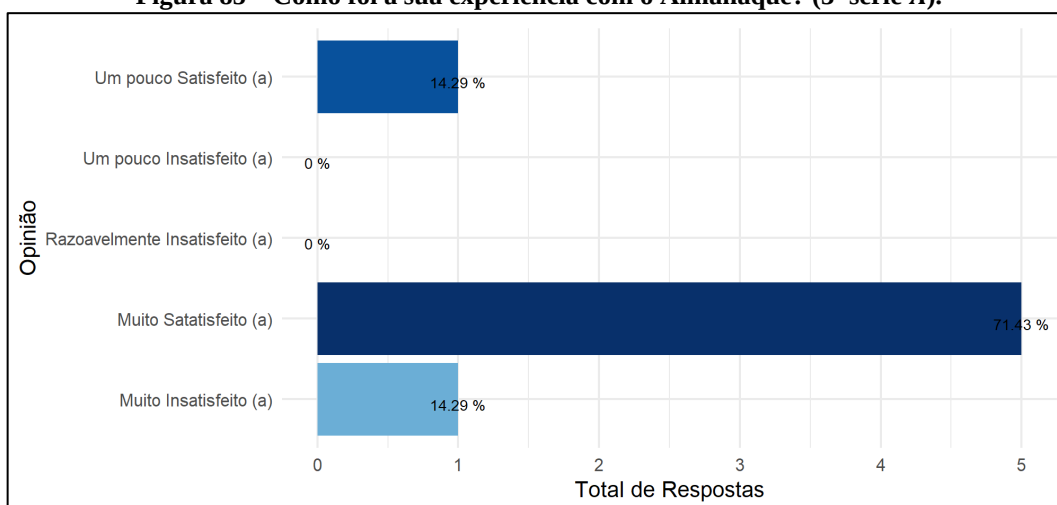
No gráfico acima, verifica-se que todos os alunos, com exceção de um único indivíduo, indicariam a atividade para uma outra pessoa, o que é mais uma sinalização da boa aceitação do material e suas atividades propostas, nesta turma.

➤ Turma da 3ª série A

Participaram da atividade proposta um total de $n_{3^{\text{a}} \text{ série A}} = 7$ alunos da turma do terceiro série A do Ensino Médio. O gráfico que sumariza os dados coletados, com respeito à questão 2, a qual diz respeito à opinião sobre a experiência com o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, pode ser visto na Figura 85.

A partir do gráfico que segue, observa-se que 85,72% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a experiência com material desenvolvido e 14,29% apresentam algum grau de insatisfação.

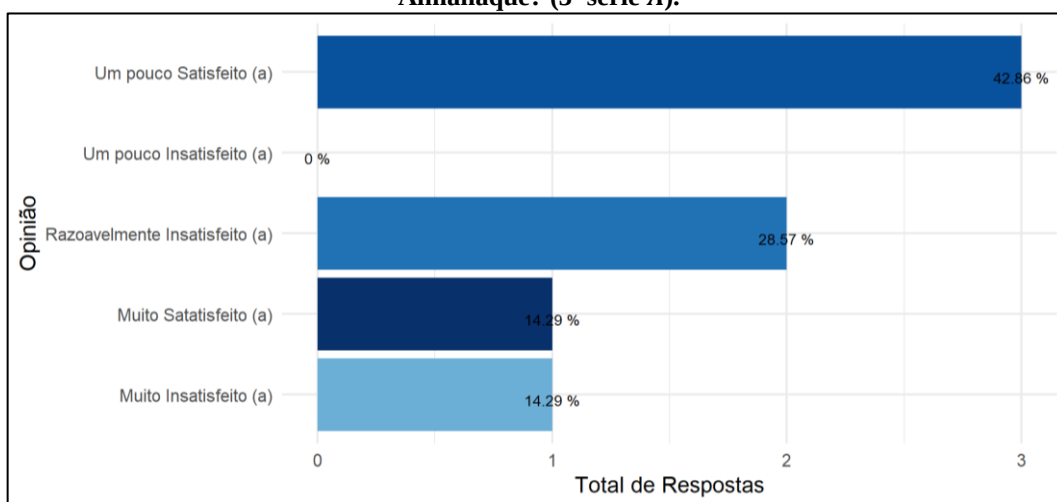
Figura 85 – Como foi a sua experiência com o Almanaque? (3ª série A).



Fonte: Resultados da Pesquisa.

O resumo da coleta de dados relativa à questão 3, que faz alusão à compreensão da atividade proposta, é apresentado no gráfico da Figura 86.

Figura 86 – Como foi a compreensão do passo a passo e aprendizado das atividades propostas no Almanaque? (3ª série A).

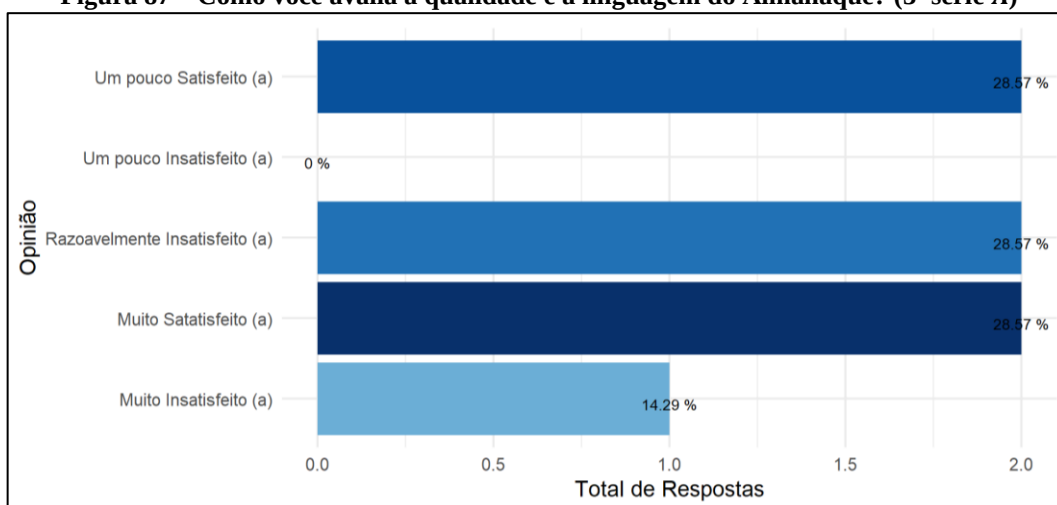


Fonte: Resultados da Pesquisa.

Verifica-se que 57,15% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com relação à compreensão do passo a passo das atividades contidas no material elaborado e 42,86% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 4 se refere à avaliação da qualidade e linguagem do Almanaque. O sumário dos dados coletados está presente no gráfico da Figura 87.

Figura 87 – Como você avalia a qualidade e a linguagem do Almanaque? (3ª série A)



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Observa-se que 57,14% dos alunos dessa turma estão “muito satisfeitos(as)” e “um pouco satisfeitos(as)” com a qualidade e a linguagem do Almanaque e 42,86% dos alunos apresentam alguma insatisfação.

A questão 5 diz respeito à nota relacionada à satisfação geral dos entrevistados com relação à atividade proposta. A Tabela 34 apresenta as medidas descritivas calculadas para esta questão.

Tabela 34 – Análise descritiva das notas atribuídas pelos alunos da 3ª série A.

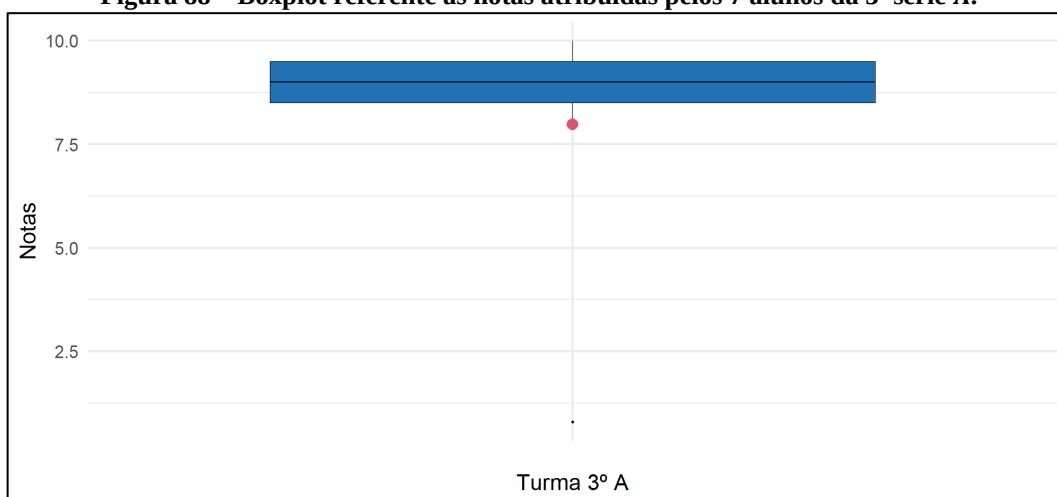
Estatística das Notas atribuídas	Valores
Número de observações: $n_{3^a \text{ série } A}$	7
Média: $\bar{x}_{3^a \text{ série } A}$	7,97
Variância: $S_{3^a \text{ série } A}^2$	10,47
Desvio Padrão: $S_{3^a \text{ série } A}$	3,24
Coefficiente de Variação: $CV_{3^a \text{ série } A}$	40,60 %

Fonte: Resultados da Pesquisa.

A nota média dos 7 alunos que responderam ao questionário foi de $\bar{x}_{3^o \text{ ano } A} = 7,97$. Pode-se considerar esta nota alta. A variação dos dados também é alta, pois, por exemplo, o coeficiente de variação foi alto, $CV_{3^o \text{ ano } A} = 40,60\%$, e as demais medidas de dispersão acompanham do $CV_{3^o \text{ ano } A}$

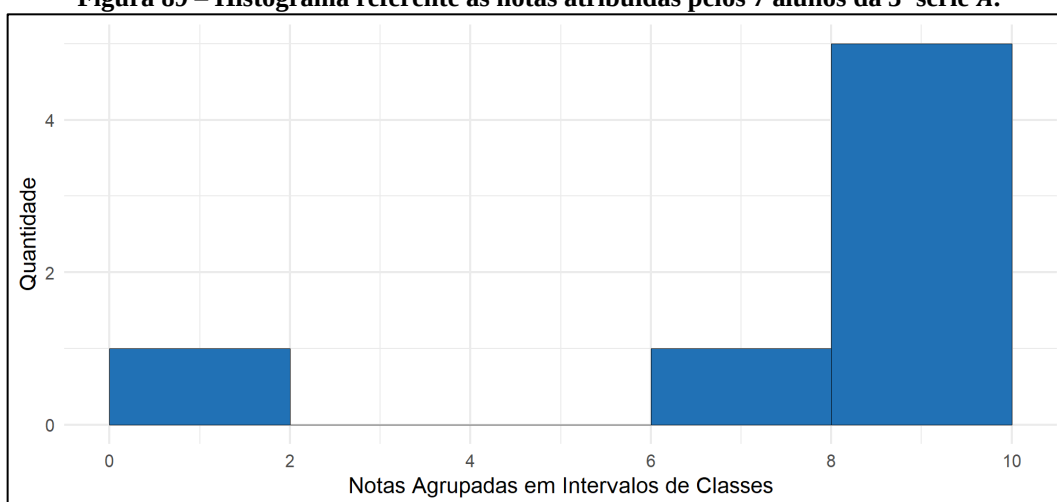
A seguir, nas Figuras 88, 89 e 90 são apresentados os gráficos boxplot, histograma e histograma com sua função de densidade de probabilidade, relativos aos dados coletados, inerentes à questão 5.

Figura 88 – Boxplot referente as notas atribuídas pelos 7 alunos da 3ª série A.



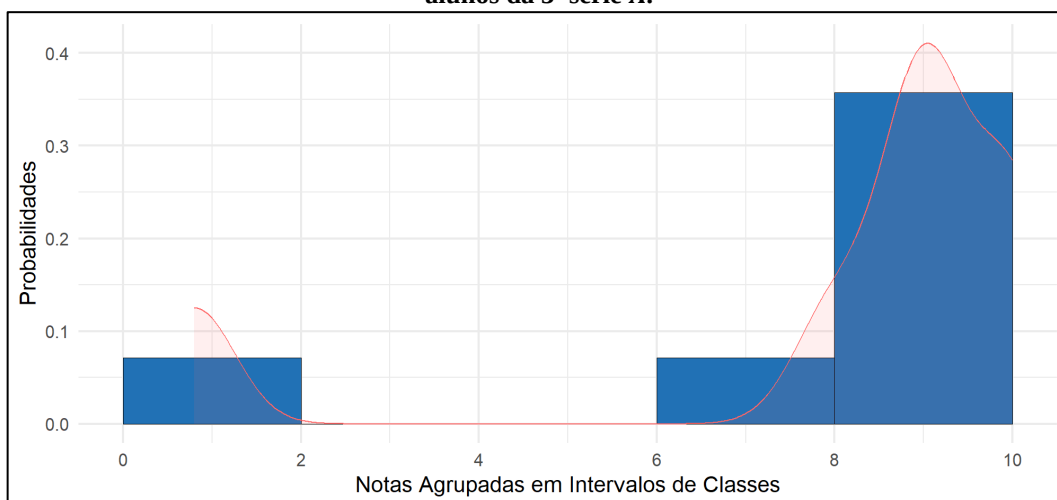
Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 89 – Histograma referente as notas atribuídas pelos 7 alunos da 3ª série A.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Figura 90 – Histograma com a função de densidade de probabilidade referente as notas atribuídas pelos 7 alunos da 3ª série A.



Fonte: Resultados da Pesquisa.

Analisando os gráficos das Figuras 88, 89 e 90, verifica-se que a maior parte das notas atribuídas pelos alunos se concentram entre 6 e 10. Observa-se ainda um comportamento assimétrico dos dados das notas atribuídas pelos alunos da 3ª série A. Assim, com o intuito de avaliar este comportamento de forma mais rigorosa, foi realizado o teste de normalidade de Shapiro Wilk nestes dados, conforme o explicitado na Tabela 35.

Tabela 35 – Teste de normalidade de Shapiro Wilk para as notas dos alunos da 3ª série A.	
Estatística W	p-valor
0,64	7,80e-3
H_0 : os dados das notas dos alunos da 3ª série A apresentam normalidade	
ou	
H_1 : os dados das notas dos alunos da 3ª série A não apresentam normalidade	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Com base no apresentado na tabela anterior, rejeita-se H_0 , ao nível de significância $\alpha = 10\%$. Nestes termos, infere-se que haja indícios de que estes dados não apresentem normalidade. Ou seja, tais dados possuem assimetria conforme o que pode ser visto nos gráficos das Figuras de 88 a 90. Este comportamento é algo esperado, já que os dados são referentes a notas advindas de opiniões distintas de alunos.

Em seguida, apresenta-se o resultado de dois testes não paramétricos de Wilcoxon com postos sinalizados, que foram realizados a fim de avaliar:

1. Se há indicativo de que a nota média $\bar{x}_{3^a \text{ série } A} = 7,97$ possa apresentar valor maior que o descrito ou permanecer como está;
2. Se há indícios de que a nota média possa diminuir ou permanecer conforme o calculado ($\bar{x}_{3^a \text{ série } A} = 7,97$).

Estes testes estão discriminados nas Tabelas 36 e 37.

Tabela 36 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{3^a \text{ série } A} = 7,97$, possa ser maior.

Estatística T	p-valor
21	0,13
$H_0: \mu = \bar{x}_{3^a \text{ série } A} = 7,97$	
ou	
$H_1: \mu > \bar{x}_{3^a \text{ série } A} > 7,97$	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

Tabela 37 – Teste de Wilcoxon com posto sinalizado, para avaliar se há indicativo de que a média das notas $\bar{x}_{3^a \text{ série } A} = 7,97$, possa ser menor.

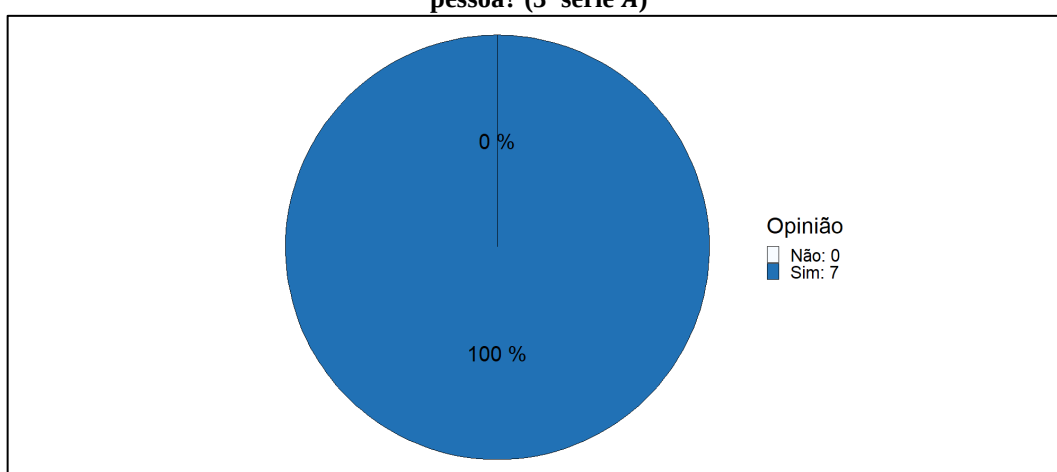
Estatística T	p-valor
21	0,89
$H_0: \mu = \bar{x}_{3^a \text{ série } A} = 7,97$	
ou	
$H_1: \mu < \bar{x}_{3^a \text{ série } A} < 7,97$	

Fonte: Resultados da Pesquisa.

As Tabelas 36 e 37 indicam que há, respectivamente, uma aceitação de H_0 em cada teste. Assim, há o indicativo de que a média das notas, $\bar{x}_{3^a\ série\ A} = 7,97$, não se alterará, permanecendo como o próprio valor calculado, considerando a amostra analisada ao nível de significância de $\alpha = 10\%$. Este resultado mostra que não há uma perspectiva de aumento, mas sim de manutenção da nota média das notas dadas à atividade proposta.

Tem-se, na Figura 91, um gráfico de setores que fornece uma síntese dos dados coletados a respeito da questão 6, relativa à recomendação o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”.

Figura 91 – Você recomendaria o Almanaque “Leãozinho: Os Mistérios dos Números Primos”, para outra pessoa? (3ª série A)



Fonte: Resultados da Pesquisa.

No gráfico acima, verifica-se que todos os alunos indicariam a atividade para uma outra pessoa, o que é mais uma sinalização da boa aceitação do material e suas atividades propostas, nesta turma.