UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

CAMPUS CHAPECÓ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LEONARDO CAUMO BIASOTTO

ESTRATÉGIAS PARA O ENSINO DE LOGARITMOS VISANDO A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

CHAPECÓ – SC

2025

LEONARDO CAUMO BIASOTTO

ESTRATÉGIAS PARA O ENSINO DE LOGARITMOS VISANDO A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Concentração: Matemática na Educação Básica, sob a orientação do Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing

CHAPECÓ – SC

2025

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Biasotto, Leonardo Caumo
Estratégias para o ensino de logaritmos visando a Aprendizagem Significativa / Leonardo Caumo Biasotto. -- 2025.
215 f.:il.

Orientador: Doutor Paulo Rafael Bösing

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Chapecó,SC, 2025.

1. Matemática. 2. Logaritmos. 3. Ensino. 4. Aprendizagem Significativa. 5. Exame Nacional do Ensino Médio. I. Bösing, Paulo Rafael, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

Elaborada pelo sistema de Geração Automática de Ficha de Identificação da Obra pela UFFS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

LEONARDO CAUMO BIASOTTO

ESTRATÉGIAS PARA O ENSINO DE LOGARITMOS VISANDO A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Este trabalho foi defendido e aprovado pela banca em 21/02/2025.

BANCA EXAMINADORA

gov.br Documento assinado digitalmente
PAULO RAFAEL BOSING
Data: 24/02/2025 16:27:33-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing – UFFS
Orientador

gov.br Documento assinado digitalmente
ROSANA MARIA LUVEZUTE KRIPKA
Data: 26/02/2025 18:49:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Rosana Maria Luvezute Kripka – EENAV
Avaliador externo

gov.br Documento assinado digitalmente
JANICE TERESINHA REICHERT
Data: 25/02/2025 10:50:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Janice Teresinha Reichert – UFFS
Avaliador

Aos educadores e a todas as pessoas que veem na educação a chave
para o futuro e a principal solução para os problemas do mundo.

AGRADECIMENTOS

Este é um trabalho escrito a duas mãos, sob orientação de outras duas, mas com inúmeros pares de mãos orbitando-as ao longo do tempo. E são aos donos e donas destas mãos que agradeço aqui.

À minha mãe, Marileda, por fazer das minhas ambições e sonhos os dela e por lutar incansavelmente, movendo mundos e fundos todos os vinte e cinco anos da minha vida, pela minha educação. Sem ela, eu com certeza não estaria aqui hoje. Foi você quem me manteve caminhando rumo ao onde almejo chegar. Te amo.

Ao restante da minha família presente de sangue ou alma: minhas tias Marli e Elza, meu irmão Tomás, minha avó Maria, meus afilhados Brenda, Isabela e Mathias e meu pai André Roberto, além de tantos outros não citados aqui mas que também me proporcionaram momentos de afeto, força e suporte ao longo deste processo revelador, assustador, intenso, cansativo e divertido chamado Mestrado.

Aos meus amigos, pelos quais sou grato diariamente por fazerem parte de momentos tão importantes da minha existência. Marina, Natália, Clara, Laíza, Daniele, Simone, Eduardo, Vanessa(s), Andrei, Renata, Pâmela e todos os que não couberam neste espaço limitado: vocês me constroem, desconstroem e reconstroem através das experiências que passamos juntos. Saibam que o espaço de todos é ilimitado em meu coração. Sejam os que vejo toda semana, sejam aqueles distantes fisicamente, mas presentes em energia e recordações, ou aqueles que o tempo afastou, mas cujas intensidades levo comigo para a vida. Também à Débora, Gustavo, Andressa e Josiéli, em especial, pela companhia quase toda sexta-feira ao longo de 2022 e 2023 – os dois longos anos que fomos juntos a Chapecó.

Aos meus colegas de trabalho, que me motivam sempre a ser um profissional melhor, me dão oportunidades para que eu me desafie e confiam no meu trabalho e na minha entrega, mesmo nas vezes em que a minha insegurança fala mais alto.

Aos meus professores, detentores de uma profissão tão poderosa, que ainda se sustenta mesmo diante das dúvidas e dos ventos que parecem sempre soprar contra a educação. Nós somos a resistência frente à desinformação, à censura e ao retrocesso. Tanto aqueles que me formaram quando criança na Educação Infantil e no Ensino Fundamental, quanto jovem no Ensino Médio e Superior ou agora, na vida adulta, na Pós-Graduação: Juliana, Graziela, Francelise, Susan, Vanderlusa, Jocilei, Vera, Betine, Maria de Fátima, Neuza, Rosana, Vanessa, Dirceu e Janice. São alguns nomes que me tornaram quem eu sou hoje: uma amálgama de inspirações, lições e memórias.

Aos meus alunos, que são o motivo pelo qual piso todo dia em uma sala de aula com um sorriso no rosto e fome de ensinar. São vocês que me impulsionam a nunca desisti de ser professor.

À Sociedade Brasileira de Matemática, à CAPES e à Universidade Federal da Fronteira Sul - campus Chapecó -, isto é, a todas àquelas pessoinhas que estão por trás dessas instituições. Eu não as conheço, mas foram vocês quem pavimentaram o caminho para que este programa de Mestrado existisse.

Por fim, agradeço às mãos que me orientaram: as do professor Paulo Rafael Bösing, um ser humano único, gentil, extremamente profissional, dedicado, paciente e dotado de uma inteligência singular. Obrigado pelas revisões, pelas dicas e pelo encorajamento que tornaram possível encher estas mais de 200 páginas de números, palavras, equações e gráficos e cujos agradecimentos hoje escrevo como um ponto final desta dissertação.

A todos e cada um de vocês, citados direta ou indiretamente, meu muitíssimo obrigado!

[...] — Não foi fácil, não é mesmo?
— Não.
— E ainda tem dúvidas, não tem?
— Tenho.
— Isso é suficiente. [...]

(Brandon Sanderson)

RESUMO

Esta dissertação tem como principal objetivo apresentar estratégias que possam ser aplicadas em sala de aula para se ensinar logaritmos, suas propriedades, seu uso na resolução de equações exponenciais, técnicas de resolução de equações e inequações logarítmicas, funções logarítmicas e seus gráficos no Ensino Médio, visando a ocorrência da aprendizagem significativa. Ao longo deste processo de criação de estratégias, foram utilizadas as questões retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que fazem uso de logaritmos (direta ou indiretamente) em suas resoluções. Também se explorou recursos que fomentassem e intensificassem a participação dos alunos nas aulas, como processos exploratório-investigativos e o uso de tecnologias, a fim de tornar o material potencialmente significativo e estimular no aluno a predisposição a aprender. Inicialmente, realizou-se uma pesquisa bibliográfica para compor uma fundamentação teórica que buscou sistematizar definições e proposições relacionados a logaritmos aplicáveis ao Ensino Médio, seguidos de demonstrações completas, além de uma análise com a intenção de aferir a configuração do ensino de logaritmos atualmente no Brasil. Visto que a aprendizagem depende do ensino, e vice-versa, estas estratégias foram divididas em dois sequenciamentos didáticos, cada um deles tendo como base a reconciliação integrativa ou a diferenciação progressiva, dois conceitos atrelados à Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), de David Paul Ausubel, e que contribuem, independentes ou combinados, para o processo de significação, facilitando a ancoragem de novos conceitos subsunçores e a modificação dos já existentes na estrutura cognitiva dos alunos. A finalidade das tarefas concebidas e das conduções propostas não é amarrar o professor a elas, tornando seu planejamento engessado, mas servir como um guia para imaginar, organizar, executar e avaliar aulas no Ensino Médio, oportunizando ao professor uma flexibilidade para adaptar e incrementar sua prática docente.

Palavras-chave: Matemática; Logaritmos; Ensino; Aprendizagem Significativa; Exame Nacional do Ensino Médio.

ABSTRACT

The main objective of this thesis is to present strategies that can be applied in classrooms to teach logarithms, their properties, their use in solving exponential equations, the mechanisms of solving logarithmic equations and inequalities, logarithmic functions and their graphs in high school, aiming at the occurrence of meaningful learning. Throughout this process of creating strategies, questions taken from the National Secondary Education Examination that use logarithms (directly or indirectly) in their resolutions were used. Resources that encourage and intensify student participation in classes were also explored, such exploratory-investigative processes and the use of technologies, in order to make the material potentially meaningful and estimulate in the student the predisposition to learn. Initially, a bibliographical research was conducted to compose a theoretical foundation that sought to systematize definitions and propositions related to logarithms applicable to high school, followed by their complete demonstrations, in addition to an analysis intending to understand the configuration of the teaching of logarithms currently in Brazil. Since learning relies on teaching, and vice-versa, these strategies were divided into two didactic sequences, each of them based on integrative reconciliation or progressive differentiation, two concepts linked to David Paul Ausubel's Theory of Meaningful Learning, and which contribute, independently or combined, to the process of signification, facilitating the anchoring of new subsuming concepts and the modification of those already existing in the cognitive structure of the students. The purpose of the tasks designed and the proposed approaches is not to tie the teacher to them, making their planning rigid, but to serve as a guide to imagine, organize, execute and evaluate classes in high school, providing the teacher flexibility to adapt and improve their teaching practice.

Keywords: Mathematics; Logarithms; Teaching; Meaningful Learning; National Secondary Education Examination.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Paulo Freire (1998, p.69), em sua *Psicologia da Autonomia*, define educação como “[...] comunicação, [...] diálogo, na medida que não é transferência de saber, mas um encontro de sujeitos interlocutores que buscam a significação dos significados”. Esta busca por um ensino carregado de significados e que propicie uma aprendizagem que agregue substancialmente ao aluno, seja de modo teórico ou, posteriormente, através de aplicações práticas dos conhecimentos, é um dos principais objetivos do processo de ensino.

Indo ao encontro desta procura por significação, Ausubel (1963) propõe sua Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), onde se destaca a preocupação com os conhecimentos que os estudantes já possuem de antemão, ou seja, leva em consideração seu desenvolvimento cognitivo prévio. Isso evidencia a atenção que deve ser dada ao processo de ensino e aprendizagem como um todo e à sua continuidade.

No que tange à Matemática, tal consideração faz-se ainda mais importante. Bordin (2016, p.16) disserta que “[...] muitas vezes nos detemos a ensinar Matemática sem dar muito sentido a ela, como se fosse pronta e acabada [...]”. Esta prática promove, segundo Oliveira (1985, p.79), “[...] uma visão estática do conteúdo matemático [...]”, sem levar em consideração sua história e os motivos que o fizeram ser estudado. Tal atitude perante o objeto de ensino invalida a maioria das chances de torná-lo atrativo aos alunos, distanciando-o de seu potencial significativo.

Aragão (*apud* Kripka, 2018, p.60) expõe que, “[...] para Ausubel, existe relação entre ‘saber como o aluno aprende’, que remete às teorias de aprendizagem, e ‘saber o que fazer para o aluno aprender melhor’, que remete às teorias de ensino [...]”. Na Matemática, a qualidade da aprendizagem do aluno, bem como a condição do processo de ensino (um *continuum*, pois um leva ao outro), estão relacionadas ao letramento matemático, chamado assim pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), com base no conceito trazido originalmente pela Matriz do Pisa (2012). Diz respeito às “[...] competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente [...]”, que permitem ao aluno elaborar, de modo facilitado, “[...] conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (BRASIL, 2018, p.266).

Para Matos et al. (2017, p.2), o letramento matemático “[...] preocupa-se com as diversificadas práticas socioculturais de leitura, escrita, interpretação, argumentação, visualização e raciocínio que envolvem os sujeitos no contexto escolar e fora dele”. Ou seja, o letramento matemático vai além da sala de aula, extrapolando o teórico e vinculando-se ao prático e às aplicações do conhecimento.

Tais aplicações são importantes de serem levadas à sala de aula, pois podem ser relacionadas a situações contemporâneas, onde a matemática está presente, direta ou indiretamente, em inúmeras e nas mais diversas situações, ou então vinculada à própria História da Matemática. No caso dos logaritmos, estas iniciativas se tornam ainda mais importantes, considerando o preconceito e a visível dificuldade enfrentada no Ensino Médio, tanto pelos alunos (para aprendê-los) quando pelos professores (para ensiná-los). A Teoria da Aprendizagem Significativa se apresenta, portanto, como uma aliada importante para este processo.

Os logaritmos possuem um arcabouço histórico e grande importância na história das ciências, visto que, em seu advento, "[...] aumentavam enormemente a capacidade de computação dos astrônomos" (Lima, 1996, p.3). Não apenas isto, mas ao tratar da necessidade de otimizar e tornar mais precisos os cálculos, atrelada às evoluções humanas na História, Eves (2004, p.341) escreve que "[...] quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores". Os logaritmos são colocados, portanto, no mesmo patamar de importância pregressa que nosso sistema de numeração atual e os próprios computadores. Infelizmente, na maioria das vezes, eles não são estudados sob esta visão tão valorosa.

Soares (2011) disserta sobre a dificuldade que os estudantes apresentam quando se deparam, no Ensino Médio, com os logaritmos e com as propriedades operatórias da logaritmação. O autor aponta que um dos fatores que impacta este quadro reside no fato do conteúdo ser pouco aprofundado pelos professores, e isto se agrava ainda mais quando a abordagem dada é puramente algébrica e operacional. Ferreira e Bisognin (2007, p.65), em suas considerações sobre uma aplicação de uma sequência didática, apontam "[...] que as dificuldades apresentadas devem-se ao fato de que, do ponto de vista da aquisição de um conhecimento, este não pode ser gerado a partir da definição algébrica, definição esta que muitas vezes é memorizada".

Urge, portanto, a necessidade de se estabelecer mudanças no processo de se ensinar (e consequentemente aprender) logaritmos e todas as suas consequências, desde as propriedades operatórias, passando pela resolução de equações e inequações logarítmicas, sua utilidade na resolução de equações exponenciais, e subsequente aplicação dentro do universo das funções, tanto no formato algébrico quanto gráfico. Um modo de fazer isso é transitando estre estas representações. Viana (2024) destaca que utilizar abordagens geométricas para resolver problemas algébricos é uma estratégia válida para intensificar a aprendizagem de tais conceitos, pois permite que o estudante compreenda um mesmo conceito de diferente maneiras e formas, mas que se interligam. Tal consideração vai ao encontro da compreensão de Duval (2012, p.270), quando afirma que "[...] é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis". Ao propor aos alunos que transitem entre diferentes representações de um mesmo tópico, o processo de subsunção – aprofundado no *Capítulo 01* desta dissertação – é intensificado e suas estruturas cognitivas se fortalecem.

Com isso em mente e diante do que já foi exposto, a elaboração deste trabalho, que caracteriza-se como uma revisão bibliográfica para produção de material de apoio pedagógico, teve como principal objetivo elaborar e descrever estratégias para ensinar logaritmos, visando sua aplicação em sala de aula por professores do Ensino Médio, servindo como um possível material didático atualizado para guiar e fomentar aulas com diferentes abordagens. Tais perspectivas levam em conta dois processos explicitados por Ausubel (1963) em sua teoria: a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa.

Para tal, construiu-se detalhadamente, no *Capitulo 02*, as definições de logaritmo e de função logarítmica. A compreensão de como os conceitos relacionados ao tema são postos rigorosamente é importante pois, tal como Euclides fez séculos atrás em seu livro *Elementos*, compilando e construindo o conhecimento matemático da época a partir de cinco axiomas e seguindo apenas regras lógicas, faz-se necessário uma base e uma continuidade rigorosa, de modo que os conceitos sejam bem estruturados e atrelados um no outro. A Teoria da Aprendizagem Significativa também é apresentada e relaciona-se diretamente com este ponto, pois afirma que a estrutura cognitiva do estudante precisa estar organizada e pronta para receber novos conceitos que serão ancorados nos subsunçores já existentes.

Por outro lado, devido ao grande interesse em saber como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) cobra os conceitos relacionados a logaritmos em suas questões, visto que a prova é de âmbito nacional, o trabalho apresenta, no *Capítulo 03*, um mapeamento completo das questões do ENEM, após sua reformulação em 2009, envolvendo logaritmos e conteúdos que deles fazem uso. Tais questões foram utilizadas para guiar a construção das estratégias que se constituem o material atualizado e potencialmente significativo apresentado ao final desta dissertação.

Além disso, também foram levadas em consideração algumas aplicações de logaritmos a partir de funções exponenciais tratadas no *Capítulo 01*, como as relacionadas à economia, à física e à química. Isto garante uma adequação à Matriz de Referência do ENEM (BRASIL, 2025c), discutida no mesmo capítulo, pois trará consigo inúmeras possibilidades de organização, construção, análise, interpretação e compreensão de fenômenos de diferentes naturezas científicas a partir de suas representações algébricas (leis de formação, equações e inequações), geométricas (gráficos) e situações em que ambas são relacionadas. Compreende-se que tais conteúdos, quando vinculados a processos exploratório-investigativos e ao uso de tecnologias, compõe um material *potencialmente significativo*.

O "material didático" elaborado com as estratégias traçadas segue, portanto, dois princípios:

a. a sequência lógica da sistematização dos conteúdos de logaritmos e funções logarítmicas, construídos de duas formas diferentes valendo-se de suas diferentes representações, com base em conceitos distintos da Teoria da Aprendizagem Significativa, e;

b. a abordagem dada pelo ENEM em suas questões sobre este tema.

Assegura-se que todas as estratégias desenvolvidas e descritas estão embasadas na TAS de Ausubel. Isso implica em estimular o aprimoramento da estrutura cognitiva do aluno por meio de conexões entre conhecimentos prévios bem colocados, devidamente mapeados pelo professor, e as novas informações apresentadas. Afinal de contas, apesar da Teoria da Aprendizagem Significativa ser uma teoria de aprendizagem, ela serve também como um guia prático de ensino.

CAPÍTULO 01 – REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, trata-se da fundamentação da teoria sob a qual o restante deste trabalho é construído. Para isso, emprega-se a Teoria da Aprendizagem Significativa, proposta por David Paul Ausubel (1963), e propagada no Brasil por Marco Antônio Moreira. Livros como *Logaritmos* (Lima, 1996) e *Números e Funções Reais* (Lima, 2013), ambos de Elon Lages Lima, *Conceitos Fundamentais da Matemática* (Caraça, 1951), de Bento Jesus Caraça e *Fundamentos da Matemática Elementar, 2: Logaritmos* (Iezzi, Dolce e Murakami, 2013), de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Carlos Murakami, além de obras de outros autores que já trataram do tema, serviram de suporte para escrever sobre a criação, a história dos logaritmos e suas principais aplicações científicas. Comenta-se também sobre o Exame Nacional do Ensino Médio, suas definições, marcos legais e como a Matemática e, mais especificamente, os logaritmos, são abordados nesta prova tão importante para a educação nacional. Por fim, uma seção que explora as dificuldades de ensinar e aprender logaritmos no sistema educacional brasileiro é apresentada.

1.1. O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

O Exame Nacional do Ensino Médio, ou ENEM, é uma prova aplicada à nível nacional desde 1998, tendo como objetivo “[...] avaliar o desempenho escolar dos estudantes ao término da educação básica [...]” (BRASIL, 2025a, n.p.). Em 2009, o ENEM sofreu severas modificações, com a finalidade de servir “[...] como mecanismo de acesso à educação superior” (BRASIL, 2025a, n.p.).

Acolhendo as particularidades de cada indivíduo, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), que comanda a elaboração da prova, esclarece que “A Política de Acessibilidade e Inclusão do INEP garante atendimento especializado e tratamento pelo nome social, além de diversos recursos de acessibilidade. Há também uma aplicação para pessoas privadas de liberdade.” (BRASIL, 2025a, n.p.)

Após a reformulação de 2009, a prova passou a ser aplicada em dois dias, sendo composta por 180 questões divididas em quatro áreas do conhecimento: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias. Conforme o Ministério da Educação,

> Desde 2009, o Enem é composto por quatro provas objetivas, com 45 questões cada, e uma redação. As provas são estruturadas em quatro matrizes de referência, uma para cada área de conhecimento. Há um caderno de questões para cada dia de aplicação. (BRASIL, 2025b, n.p.)

Tais matrizes de referência definem cinco eixos cognitivos, que são comuns a todas as áreas do conhecimento. Sobre tais eixos cognitivos, destaca-se o segundo e o terceiro, que dizem respeito, respectivamente, à compreensão de fenômenos e ao enfrentamento de situações-problema. A Matriz de Referência aprofunda tais eixos explicando que é intrínseco aos estudantes serem capazes de “[...] construir e aplicar conceitos [...] para a compreensão de fenômenos [...]” e “[...] selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas” (BRASIL, 2025c, p.1).

No que tange à Matemática e suas Tecnologias, estabelece trinta habilidades, divididas em sete competências de área. Aprofundando-se na área, a quinta e sexta das sete competências tratam, respectivamente, de “Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas [...]” e “Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos [...]” (BRASIL, 2025c, p.3). As habilidades relativas a estas competências têm como um dos objetivos a identificação de funções e a interpretação de gráficos de funções, ambas vinculadas à resolução de situações-problema, à associação ao cotidiano e à argumentação matemática.

O mesmo verifica-se quando se analisa os objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência, anexados ao documento. Ao tratar de conhecimentos algébricos, as Matrizes citam “[...] gráficos e funções; funções [...] exponenciais e logarítmicas; equações e inequações [...]” (BRASIL, 2025c, p.15).

Em consonância, a educação no Brasil é guiada por meio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que norteia a Educação Básica no Brasil e serve como parâmetro para a elaboração de currículos e propostas pedagógicas pelas escolas (BRASIL, 2018).

No tocante ao Ensino Médio, e mais precisamente à Matemática, a BNCC busca que os currículos potencializem o desenvolvimento de competências relacionadas a raciocinar, representar, argumentar e comunicar, dado que “[...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas [...]” (BRASIL, 2018, p.529).

O documento também esclarece que seu “[...] foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade [...]” (BRASIL, 2018, p.518), e complementa que

> [...] quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BRASIL, 2018, p.518)

Na BNCC, contudo, não há nenhuma menção às palavras “logaritmação” ou “logaritmo”. O documento se refere apenas à expressão “funções logarítmicas”, o que corrobora que o foco do ensino de logaritmos no Ensino Médio deve ser dado às suas potenciais aplicabilidades. Esta conclusão vai ao encontro de todas as cinco competências específicas traçadas pelo documento. Elas dizem respeito, em resumo, a valer-se de estratégias para “[...] interpretar situações em diversos contextos [...]”, “[...] construir modelos e resolver problemas [...]” e empregar “[...] recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais [...]” (BRASIL, 2018, p.531).

No entanto, para trabalhar com aplicações dos logaritmos em situações-problemas ou em modelagem de fenômenos demanda-se que haja uma base teórica consistente, de modo que o estudante possua domínio das propriedades operatórias para manipular logaritmos corretamente, além de saber técnicas para resolver equações tanto logarítmicas quanto exponenciais. A aprendizagem teórica mostra-se tão importante quanto sua subsequente aplicação prática.

A BNCC (BRASIL, 2018, p.527-529) também traz que “[...] os estudantes do Ensino Fundamental têm [...] a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico.” Ainda, “[...] em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio [...] a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental”.

A fim de desenvolver habilidades que envolvem racionar matematicamente, a BNCC (BRASIL, 2018, p.529) enfatiza que

> [...] é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática.

Quanto à importância do registro para a aprendizagem da Matemática, a BNCC (BRASIL, 2018, p.529) enfatiza que “[...] o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade [...]”, principalmente “[...] da linguagem específica da Matemática”.

Ao longo do processo de análise e seleção de questão das provas do ENEM após 2009, tópico que foi abordado no *Capítulo 03*, percebeu-se que aquelas que envolvem logaritmos, seja direta ou indiretamente, exigem tais conhecimentos específicos. Muitas delas, inclusive, demandam que o estudante modele problemas usando generalizações, ou seja, a partir de expressões algébricas, e interprete-as como funções. Na abordagem usada procura-se, inclusive, relacionar a fenômenos de diversas áreas das ciências, tanto naturais quanto sociais.

É inegável, portanto, que as questões do ENEM, mesmo as mais desafiadoras, podem servir de base para a elaboração de materiais didáticos que atendam às competências e habilidades propostas pelas Matrizes de Referência (BRASIL, 2025c). É esta ponte que este trabalho pretende construir: apresentar estratégias utilizando em grande parte tais questões para se ensinar logaritmos, suas propriedades, equações exponenciais, equações e inequações logarítmicas e funções logarítmicas (tanto algébrica quanto graficamente) no Ensino Médio.

1.2. A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A Teoria da Aprendizagem Significativa, em suas concepções originais, relaciona-se muito com a vida de David Paul Ausubel, seu criador. Segundo Fernandes (2011), Ausubel nasceu em 1918 e, durante sua infância, sofreu preconceitos dada sua descendência judia. Tantas humilhações fizeram-no revoltar-se com os moldes violentos da educação. Depois de formado psicólogo, Ausubel especializou-se na linha cognitivista e construtivista. Unindo sua formação com sua insatisfação pelos métodos escolares, ele propõe sua Teoria da Aprendizagem Significativa.

Ausubel (1963) explica que, para a aprendizagem ser significativa, deve-se levar em consideração os conhecimentos que os estudantes já possuem (conhecimentos prévios). Estes estariam organizados em um conjunto de saberes chamado de estrutura cognitiva. Moreira e Masini (1982, p.8) explicam estrutura cognitiva como “[...] uma estrutura hierárquica de conceitos que são abstrações da experiência do indivíduo.” Neste sentido, Biasotto, Fim e Kripka (2018, p.3) entendem a estrutura cognitiva

> [...] como uma teia de conhecimentos, onde coexistem concepções diversas, sobre vários assuntos. Quando novas informações ligam-se à essas concepções, elas modificam ou ampliam essa rede por meio de novos significados que se estabelecem, a partir de um determinado conceito, ou de um conjunto deles.

Em vista disso, o processo que leva à aprendizagem significativa relaciona uma nova informação, potencialmente significativa, a um conceito subsunçor já existente na estrutura cognitiva do estudante. Moreira (2012, p. 4), explica subsunçor como

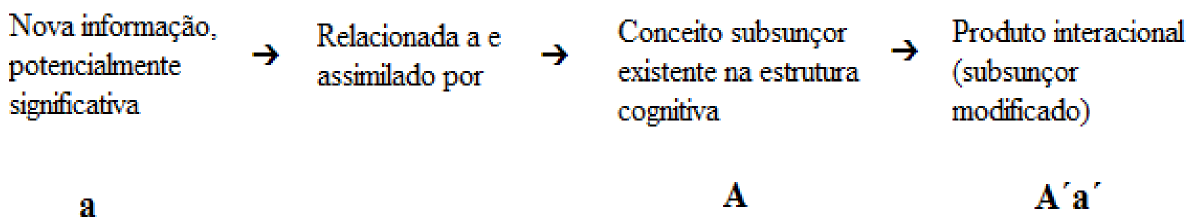
> [...] um conhecimento estabelecido na estrutura cognitiva do sujeito que aprende e que permite, por interação, dar significado a outros conhecimentos. Não é conveniente “coisificá-lo”, “materializá-lo” como um conceito, por exemplo. O subsunçor pode ser também uma concepção, um construto, uma proposição, uma representação, um modelo, enfim um conhecimento prévio especificamente relevante para a aprendizagem significativa de determinados novos conhecimentos.

O resultado da interação desta nova informação com o subsunçor, ou seja, o produto entre os dois conceitos, gera outro conceito que pode ser assimilado, ao passo que o subsunçor é modificado. Ou seja, a presença de muitos subsunçores bem ancorados e relacionados entre si na estrutura cognitiva garante que a aprendizagem significativa ocorra. Por isso, o mapeamento de conhecimentos prévios dos estudantes é imprescindível para que o ensino aconteça de forma mais orgânica e a aprendizagem significativa seja possibilitada efetivamente. Aragão (1976, p.26) disserta sobre este processo de aprendizagem significativa ao afirmar que

> Um processo de aprendizagem significativa tem início quando uma expressão simbólica, que é apenas potencialmente significativa, isto é, não tem ainda significado real para o aluno, é a ele apresentada. Esta expressão é então relacionada de modo substantivo (e consequentemente interage) com as ideias relevantes na estrutura cognitiva do aluno. No final do processo, surge o produto da interação que constitui o significado da expressão simbólica aprendida (um conteúdo cognitivo diferenciado) e que surgirá sempre que a expressão for reapresentada.

Tal processo de assimilação de novos conceitos pode ser organizado conforme o diagrama da Figura 1. É interessante perceber que tal processo depende da existência do conceito subsunçor na estrutura cognitiva do indivíduo e que, não obstante, tal subsunçor também se modifica ao final da interação da nova informação consigo. Ou seja, o subsunçor nunca é algo constante e fixo, afinal de contas, toda a estrutura cognitiva se transforma diante de novas aprendizagens.

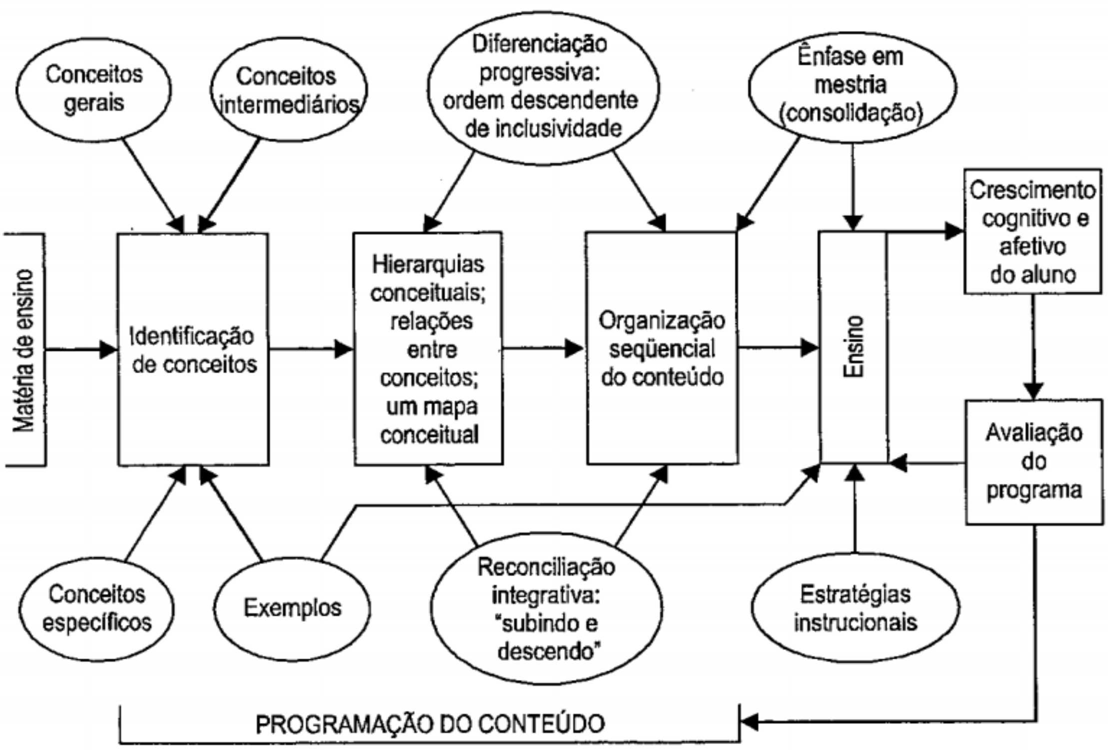
Figura 1 – Esquema representacional da assimilação de conceitos



Fonte: Moreira e Masini (1982, p.16)

Como a aprendizagem significativa leva em consideração o que o aluno já sabe, o papel do professor nesse cenário é mapear sua estrutura cognitiva para saber que ou quais conteúdos o aluno é capaz de aprender a partir dos subsunçores já existentes. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) evidenciam isso, explicando que as práticas docentes devem, a partir disso, favorecer a ocorrência da aprendizagem significativa. A Figura 2 apresenta um modelo de planejamento de aulas, proposto por Moreira e Masini, que leva em consideração todos os processos inerentes à aprendizagem significativa.

Figura 2 – Um modelo para planejar a instrução conforme a Teoria de Ausubel



Fonte: Moreira e Masini (1982, p.43)

Percebe-se que há uma grande importância dada à "programação do conteúdo". Tal passo compreende a organização dos conceitos a serem ensinados de modo a corroborarem com a estrutura cognitiva dos estudantes, previamente mapeada. Esse processo também se preocupa com os exemplos e com sua organização sequencial, que abarca as noções de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, tratadas mais adiante neste texto.

Ainda, vê-se que é dada bastante importância ao "crescimento afetivo do aluno" e à "avaliação". O primeiro diz respeito ao fato de que uma das condições para ocorrer a aprendizagem significativa é a predisposição do aluno para aprender, e uma relação afetiva bem construída e fortalecida entre o educador e o estudante torna-se fundamental para a consolidação desta "vontade". A avaliação, por sua vez, não diz respeito ao final do processo de ensino, como normalmente é entendida. Pelo contrário, ela está diretamente conectada à programação do conteúdo, pois é nela que o professor deve se basear para mapear a estrutura cognitiva do indivíduo e, a partir disso, reorganizar e reiniciar o ensino e o processo de aprendizagem.

Quanto mais subsunçores o aluno tiver, mais conexões existirão dentro de sua estrutura cognitiva e, por consequência, mais complexa esta construção será. Assim, a aprendizagem significativa é facilitada. O contrário também ocorre. Quanto menos relações o indivíduo for capaz de realizar, mas difícil será para ele aprender significativamente. Quando o conteúdo é aprendido arbitrariamente, ou seja, sem conexão literal com os subsunçores que o estudante possui distribuídos por sua estrutura cognitiva, Ausubel (1963) explica que a aprendizagem se deu de forma mecânica.

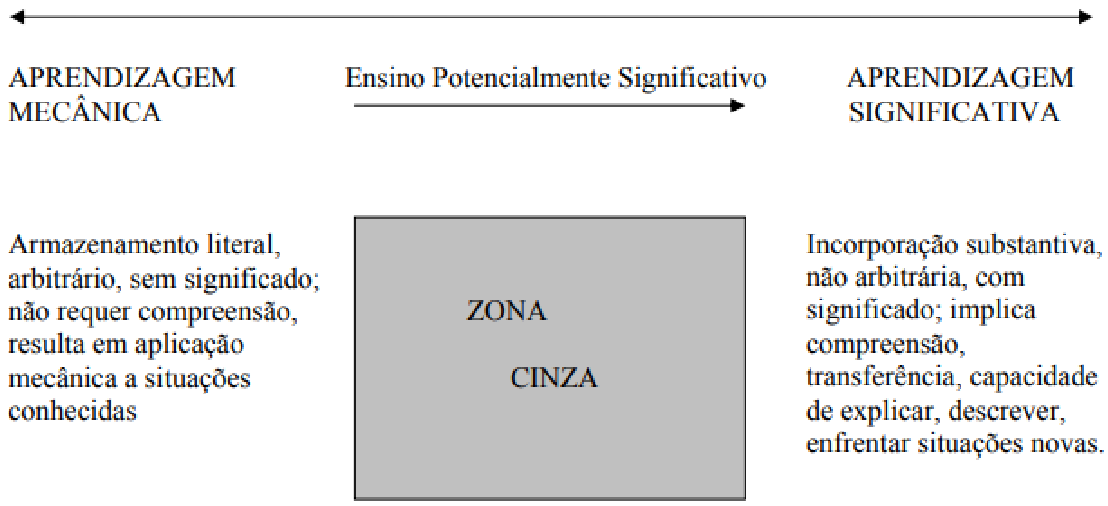
Indo de encontro a isto, Müller (2000, p.136) escreve que

> O treino excessivo de definições, técnicas e demonstrações se torna uma atividade rotineira e mecânica, em que se valoriza apenas o produto final. A desconsideração das etapas de exploração e comunicação das idéias lógico-matemáticas impede a necessária construção dos conceitos.

Isto é, quando os conteúdos são apresentados aos alunos de forma desconexa, sem que sejam propostos momentos de reflexão acerca da continuidade e necessidade de conhecimento prévios, ou então tarefas que induzam o aluno a pesquisar, investigar, avaliar, conjecturar e testar e validar (ou não) hipóteses a aprendizagem não é significativa. Nesta perspectiva, "[...] o conhecimento assim adquirido fica arbitrariamente distribuído na estrutura cognitiva sem ligar-se a conceitos subsunçores específicos [...]" (Moreira e Masini, 1982, p.8).

A aprendizagem significativa e a mecânica, apesar de aparentemente opostas, não devem ser tratadas como tal. É possível que o educador, ao introduzir um novo conteúdo, ensine mecanicamente e, ao dar continuidade, leve os alunos a uma aprendizagem significativa. Tal continuidade possível de ocorrer é ilustrada pelo esquema da Figura 3.

Figura 3 – Representação do *continuum* da aprendizagem significativa e mecânica



Fonte: Moreira (2012, p.12)

Existem várias maneiras de diagnosticar e determinar o que o aluno já sabe. Ausubel (1963) propõe o uso de organizadores prévios. Moreira (2012) os traduz como pontos cognitivas entre o que já se sabe com o que há de saber. Além disso, para que a aprendizagem seja devidamente significativa, o material precisa ser potencialmente significativo e o estudante precisa estar predisposto a aprender. De nada adianta haver uma coisa se a outra não ocorrer, ou vice-versa.

A definição de um “significado” ao material é dada pelo aluno, e por isso tal processo muitas vezes demora para acontecer ou, até mesmo, não é consolidado. Por isso, a existência de conceitos subsunçores e de uma estrutura cognitiva organizada são essenciais para que o estudante reconheça o conhecimento e coloque-se predisposto àquela aprendizagem. Moreira (2012, p.18) resume bem todas estas relações e necessidades, ao dizer que

> [...] o aluno aprende a partir do que já sabe. É a estrutura cognitiva prévia, ou seja, conhecimentos prévios (conceitos, proposições, idéias, esquemas, modelos, construtos, [...] hierarquicamente organizados, a principal variável a influenciar a aprendizagem significativa de novos conhecimentos.

Ausubel (1963) classifica a aprendizagem significativa em três tipos: representacional, conceitual e proposicional. A representacional, mais primária, relaciona uma palavra da estrutura cognitiva à sua representação concreta. Moreira (2012, p. 16) traz que “aprendizagem representacional é a que ocorre quando símbolos arbitrários passam a representar, em significado, determinados objetos ou eventos em uma relação unívoca”. A palavra floresta é associada a um agrupamento de árvores, por exemplo.

A aprendizagem conceitual funciona como uma continuação da representacional. Utilizando o exemplo de floresta, a aprendizagem conceitual diferencia diversos tipos de floresta, como as tropicais, as equatoriais e as subtropicais, cintando algumas.

Ao passo que a aprendizagem representacional torna específico, a conceitual expande e diversifica o universo de conceitos relacionados àquela representação.

A aprendizagem proposicional, por sua vez, utiliza-se das expansões geradas pela aprendizagem conceitual e vale-se de grupos de palavras para compor significados. Dizer que *“florestas equatoriais são úmidas durante boa parte do ano”*, relaciona o conceito de floreta equatorial com o de umidade e o de sazonalidade, previamente ancorados à estrutura cognitiva. Neste sentido, Moreira (2012, p.16) afirma que “[...] as aprendizagens representacional e conceitual são pré-requisito para a proposicional, mas o significado de uma proposição não é a soma dos significados dos conceitos e palavras nela envolvidos”.

Quanto às formas de se aprender significativamente, Ausubel (1963) fala que a aprendizagem devidamente significativa, tanto a conceitual quanto a proposicional, que já se dão mediante o reconhecimento simbólico a partir da representacional, podem ocorrer também de três formas: subordinada, superordenada e combinatória.

A primeira, subordinada, acontece quando um conceito se liga a uma estrutura maior. Por exemplo, a ideia de equação do segundo grau. Inicialmente, ela é relacionada à ideia geral de equação já ancorada previamente à estrutura cognitiva do indivíduo. Ao conseguir ir de um conceito mais abrangente a um mais específico, relacionado a este, o aluno passa a *diferenciar progressivamente*.

A aprendizagem significativa superordenada ocorre, por sua vez, quando um conceito é associado a algumas estruturas menores, de modo que também os relaciona entre si. Ao estudarmos conjuntos numéricos, por exemplo, começamos com os números naturais e os expandimos aos inteiros, racionais, irracionais e, por fim, ancoramos todos aos reais, até a introdução dos complexos, normalmente no final da Educação Básica. Quando o aluno é capaz de integrar conceitos, ou seja, ir de um conceito mais específico até sua generalização, dizemos que ele está *reconciliando integrativamente*.

Especificamente sobre diferenciação progressiva e reconciliação integrativa e a importância da predisposição do aluno à aprendizagem, Moreira (2012, p.8) escreve que

> [...] o sujeito que aprende deve se predispor a relacionar (diferenciando e integrando) interativamente os novos conhecimentos a sua estrutura cognitiva prévia, modificando-a, enriquecendo-a, elaborando-a e dando significados a esses conhecimentos.

A ideia de que os exemplos trabalhados para construir os conteúdos precisam seguir uma ordem lógica, tanto ao diferenciarem progressivamente quanto ao reconciliarem integrativamente, começando pelo mais básico e crescendo, progressivamente, em níveis de dificuldade vai ao encontro do que propõe Vergnaud (1990), ao tratar de campos conceituais. O autor explica que o processo de conceitualização se dá ao mesmo tempo que o estudante se apropria de situações cada vez mais complexas.

Por fim, o terceiro tipo de aprendizagem significativa é dita combinatória, e ocorre quando um conceito não se relaciona subordinada ou superordenadamente a outro, mas sim a um significado mais amplo e relevante já assimilado a tempo na estrutura cognitiva do indivíduo. A concepção de como resolver uma inequação exponencial a partir da substituição de uma incógnita auxiliar, por exemplo, depende que o estudante compreenda técnicas de resolução de equações e como funcionam os princípios da desigualdade e qual sua implicação no processo, ou seja, para aprender significativamente a resolver inequações mais complexas é necessário entender o processo e suas bases, que são utilizadas o tempo todo para dar sentido à resolução.

É também importante frisar que Ausubel (1963) trata da assimilação obliteradora, que explica que conceitos assimilados pelo processo de ancoragem podem ser esquecidos, mas continuam ligados aos subsunçores modificados. Moreira e Massini (1982) explicam que, para Ausubel, a assimilação obliteradora seria a responsável pelo esquecimento. Dentro de um ambiente escolar, este processo precisa ser neutralizado, de modo que o processo seja retardado dentro de um período de tempo necessário. Ao mesmo tempo, Moreira (2012, p.4) também nos explica que

> Na medida em que um subsunçor não é frequentemente utilizado ocorre essa inevitável obliteração, essa perda de discriminação entre significados. É um processo normal do funcionamento cognitivo, é um esquecimento, mas em se tratando de aprendizagem significativa a reaprendizagem é possível e relativamente rápida.

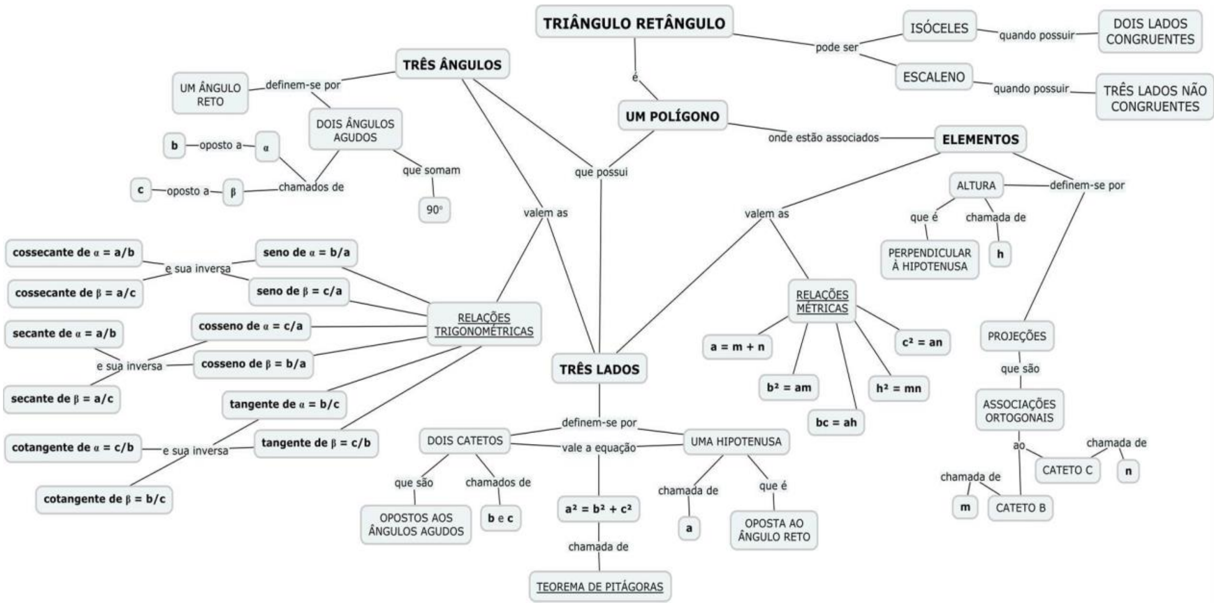
Diversos autores focaram seus estudos na Teoria da Aprendizagem Significativa. Muitos deles ampliaram as ideias de Ausubel ou relacionaram-nas com outras variáveis importantes dentro do ambiente de ensino e aprendizagem.

Novak (1977) dá foco à teoria de Ausubel através de uma visão humanista, ao falar que esta é influenciada pelos sentimentos, ações e pensamentos dos estudantes. Há também a visão interacionista social de Gowin (1981), que explicita que dentro do contexto educacional existe um triplo diálogo, um compartilhamento amplo de significados, entre o aluno, o professor e os materiais didáticos. Em todas estas variações, apresentam-se fatores que corroboram com o que foi proposto na Figura 2, ao modelar um planejamento instrucional.

Quando se fala sobre diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, uma boa atividade estratégica que avalia a capacidade dos alunos de relacionar conceitos estabelecidos e ir e vir nestas relações são os mapas conceituais, que, segundo Moreira (2012b), são diagramas de significados, de relações significativas e de hierarquias conceituais, se for o caso. Para isso, é importante que o aluno desenvolva seu próprio mapa conceitual, a própria representação de sua estrutura cognitiva, afinal de contas, cada um aprende em seu ritmo. A Figura 4 apresenta um exemplo de mapa conceitual sob a pergunta focal *"quais são as características de um triângulo retângulo?"*.

Além do uso de mapas conceituais, pode-se também utilizar-se como importante estratégia, de relevância atual, o uso da tecnologia como potencializador do processo de ensino e aprendizagem. O estudante, a partir dela, consegue desenvolver-se de maneira quase autônoma e autodidata, ao buscar seu conhecimento pelas redes. Segundo Groenwald, Silva e Mora (2004, p.45), "[...] a incorporação da tecnologia ao trabalho cotidiano está diretamente vinculada à concepção de que os cidadãos de qualquer país devem conhecer, dominar e desenvolver crítica e apropriadamente a tecnologia, para benefício da humanidade [...]".

Figura 4 – Mapa conceitual



Fonte: Biasotto, Fim e Kripka (2018, p.13)

A Teoria da Aprendizagem Significava torna-se, portanto, uma alternativa extremamente válida à Educação Matemática, pois, segundo Biasotto, Fim e Kripka (2018, p.14), "[...] ela possibilita o planejamento do ensino de modo a facilitar a apreensão de conceitos com significados precisos, diferenciados e transferíveis, que são fundamentais na construção de conhecimentos em Matemática".

Em outras palavras, a Teoria da Aprendizagem Significativa, ao mesmo tempo que trata sobre como funciona e sobre como potencializar a aprendizagem para o aluno, diz respeito também a como o professor organiza a sua prática pedagógica, quase um *checklist* de processos que devem existir para que o produto final, ou seja, o novo conceito assimilado e o subsunçor modificado, se deem de forma satisfatória. Portanto, mais do que uma teoria de aprendizagem, Ausubel constrói um guia de como ensinar, que se relaciona muito bem à Matemática e sua construção na Educação Básica.

1.3. UMA VISITA HISTÓRICA AOS LOGARITMOS

A "descoberta" dos logaritmos mudou significativamente os rumos do Mundo Moderno, tendo englobado áreas tais como a Astronomia e a Navegação. Até o século XVI, os cientistas que estudavam tais ciências sempre se defrontavam com um grande empecilho: os extensos cálculos que precisavam realizar para obter seus resultados. Diversos avanços já haviam sido feitos até então para agilizar os processos, mas foram os logaritmos que realmente mudaram o jogo, tanto que "[...] poucas vezes na história da ciência uma ideia matemática abstrata teve tanta receptividade e repercussão na comunidade científica como a invenção dos logaritmos" (Maor, *apud* Pedrosa e Adames, 2018, p.9).

As operações aritméticas consideradas "básicas" são conhecidas por adição, subtração, multiplicação e divisão, e associam a dois números, respectivamente, sua soma, diferença, produto e quociente. As duas primeiras são chamadas de operações de 1ª espécie, ou de primeira ordem, ao passo que as outras duas foram denominadas operações de 2ª espécie (ou segunda ordem) (Caraça, 1951).

A noção de multiplicação, dentro do conjunto dos números naturais, vem diretamente da adição, dado que o produto $a \times b$ significa uma soma de b parcelas iguais a a. A subtração e a divisão, por sua vez, são ditas operações inversas da adição e da multiplicação, nesta mesma ordem. Se $a + b = c$ e $a \times b = d$, então $c - b = a$, $c - a = b$, $d \div b = a$ e $d \div a = b$ (Caraça, 1951).

Ao resolver-se uma divisão $a \div b$ pelo algoritmo tradicional, pergunta-se *"quantas vezes inteiras b cabe em a"*. Caso o número não caiba uma quantidade inteira de vezes, encontra-se um resto. Portanto, para se resolver uma operação de divisão, recorre-se diretamente às operações de multiplicação e subtração, que são classificadas por uma ordem menor ou igual à ordem da operação de divisão.

A operação de potenciação, dita a "quinta operação básica", de 3ª espécie ou ordem, decorre de maneira análoga à multiplicação: operar a^b, dentro do conjunto dos números naturais, significa multiplicar b vezes o fator a (Caraça, 1951). A extensão da potenciação para os números reais será feita, detalhadamente, no *Capítulo 02*.

A radiciação, por sua vez, é a operação inversa da potenciação (Caraça, 1951). De fato, $a^b = x$ se, e somente se, $\sqrt[b]{x} = a$. Mas, dado que a potenciação não goza na propriedade comutativa como ocorre com a adição e a multiplicação, isto é, se $a^b \neq b^a$ então $\sqrt[a]{x} \neq b$ para a maioria dos casos, de modo que a radiciação funciona apenas em uma ordem, especificamente para se encontrar a base da potenciação.

Instava-se, assim, a necessidade de se determinar uma segunda operação inversa da potenciação, a fim de se determinar o expoente da operação de potenciação dada a potência e a base, caso em que a radiciação falhava. Em linguagem simbólica, dados a e y, determinar x tal que $a^x = y$.

Trabalhar com expoentes, no entanto, ia além de uma necessidade matemática de completude das operações. A possibilidade de manipular os expoentes, em detrimento das potências, dava maior poder computacional ao cálculo com números de grandeza astronômica. De fato, poder trabalhar com o expoente 9 em oposição à potência 10^9 era de grande utilidade no mundo sem calculadoras, afinal somar dois números grandes é um processo muito mais otimizado que multiplicar estes mesmos dois números.

A operação de logaritmação, e por consequência os logaritmos, foram a resposta para este problema.

A resolução de expressões numéricas muito extensas, com operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, também se beneficiou com o advento dos logaritmos. Seu potencial aritmético era tão grande a ponto de reduzir operações de $3^{\underline{a}}$ espécie em operações de $2^{\underline{a}}$ espécie, e operações de segunda ordem em operações de primeira ordem.

Dois matemáticos trabalharam quase que simultaneamente na criação dos logaritmos a partir de suas tábuas: Jost Bürgi $(1552 - 1632)$ e John Napier $(1550 - 1617)$, ambos na segunda década do século XVII. O maior crédito, no entanto, ficou para o escocês Napier quando, em 1614, publicou a obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, traduzida como *"Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos"*. Mais tarde, Napier passou a trabalhar com o inglês Henry Briggs $(1561 - 1631)$ e, juntos, desenvolveram a tábuas dos logaritmos decimais, que foram e são largamente usados até hoje.

Em contraponto a isto, Silva (2016, p.13) explica que o uso de logaritmos não se deu apenas na Idade Moderna. O autor traz que

> [...] os vestígios do surgimento dos logaritmos estão atrelados aos povos da Antiguidade. Existem indícios de que os babilônios construíram tabelas logarítmicas e que Arquimedes, ao se deparar com números grandes, elaborou citações que tiveram importância na elaboração dos conceitos iniciais sobre logaritmos.

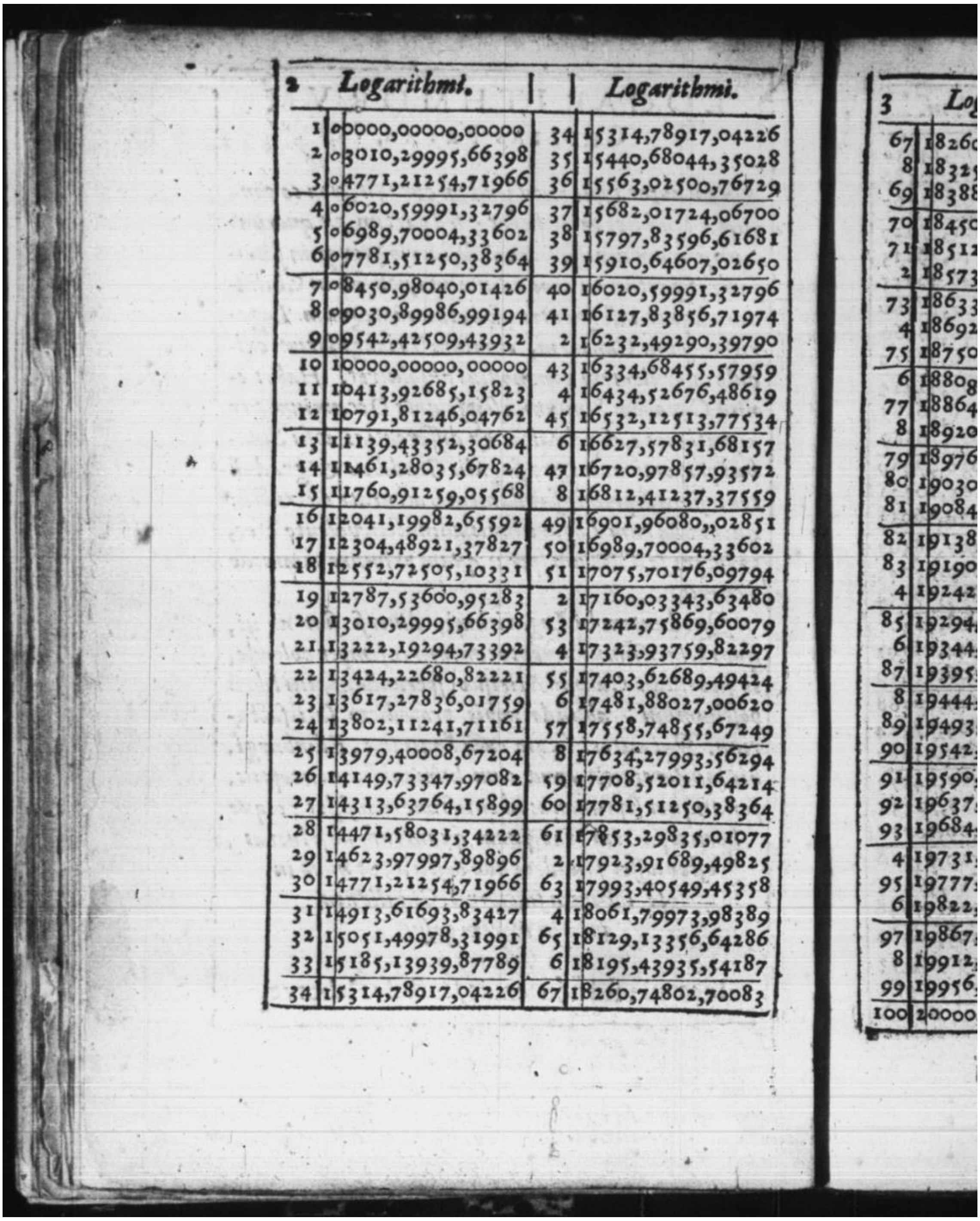
A concepção de logaritmo proposta por Napier diferia da que é utilizada atualmente (Soares, 2012). Napier definia L como o logaritmo decimal de N da seguinte forma:

$$\log N = L \Leftrightarrow N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$$

Atualmente, os livros didáticos trazem a definição de logaritmo de modo mais simples e elegante. Esta notação foi explorada no *Capítulo 02*.

A tábua de logaritmos proposta por Napier, ilustrada no excerto que pode ser visualizada na Figura 5, consistia em uma tabela de cunho prático onde em uma coluna (a da esquerda) constavam um número e na coluna seguinte (da direita) seu logaritmo de base dez.

Figura 5 – Excerto da tábua de logaritmos decimais construída por Briggs



2	Logarithmi.			Logarithmi.	
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959
11	1	0413,92685,15823	4	1	6434,52676,48619
12	1	0791,81246,04762	45	1	6532,12513,77534
13	1	1139,43352,30684	6	1	6627,57831,68157
14	1	1461,28035,67824	47	1	6720,97857,93572
15	1	1760,91259,05568	8	1	6812,41237,37559
16	1	2041,19982,65592	49	1	6901,96080,,02851
17	1	2304,48921,37827	50	1	6989,70004,33602
18	1	2552,72505,10331	51	1	7075,70176,09794
19	1	2787,53600,95283	2	1	7160,03343,63480
20	1	3010,29995,66398	53	1	7242,75869,60079
21	1	3222,19294,73392	4	1	7323,93759,82297
22	1	3424,22680,82221	55	1	7403,62689,49424
23	1	3617,27836,01759	6	1	7481,88027,00620
24	1	3802,11241,71161	57	1	7558,74855,67249
25	1	3979,40008,67204	8	1	7634,27993,56294
26	1	4149,73347,97082	59	1	7708,52011,64214
27	1	4313,63764,15899	60	1	7781,51250,38364
28	1	4471,58031,34222	61	1	7853,29835,01077
29	1	4623,97997,89896	2	1	7923,91689,49825
30	1	4771,21254,71966	63	1	7993,40549,45358
31	1	4913,61693,83427	4	1	8061,79973,98389
32	1	5051,49978,31991	65	1	8129,13356,64286
33	1	5185,13939,87789	6	1	8195,43935,54187
34	1	5314,78917,04226	67	1	8260,74802,70083

Fonte: Wikimedia Commons (2025)

Os logaritmos simplificavam muito os cálculos com números grandes ou astronômicos. De fato, para multiplicar dois números, bastava somar seus logaritmos. Em seguida, procurava-se que número estaria associado a esta soma (o logaritmo) na tábua. A justificativa desta operação se dá pela *Proposição 2.20*, a propriedade fundamental dos logaritmos, explorada no próximo capítulo.

Como um exemplo prático utilizando a tábua de Briggs da Figura 5, supõe-se que se estivesse interessado em determinar o produto $8 \cdot 5$. Neste caso, bastava olhar para seus logaritmos decimais na coluna imediatamente ao lado do número e somá-los. Assim:

$$0{,}90308998699194 + 0{,}69897000433602 = 1{,}60205999132796$$

Em seguida, uma vez encontrada a soma na coluna correspondente aos logaritmos, percebia-se que esta estava associada ao número 40, que de fato é o resultado do produto $8 \cdot 5$.

Com números tão pequenos como estes parece absurdo fazer uso da tabela para encontrar-se o resultado. No entanto, a tábua popularizou-se quando se buscava encontrar produtos astronômicos, como $17179869184 \cdot 140737488355328$.

O logaritmo decimal associado ao 10 é 1, pois 1 é o expoente a que 10 deve ser elevado para se encontrar 10. É possível também visualizar esta propriedade na Figura 5. De modo análogo, o mesmo aconteceria para logaritmos de outras bases. Com efeito, considerando os números citados anteriormente, tem-se $17179869184 = 2^{34}$ e $140737488355328 = 2^{47}$. Tomando uma tábua de base 2, por exemplo, é possível calcular o produto proposto buscando o logaritmo (neste caso de base 2) associado a 2^{34} e 2^{47}, ou seja, 34 e 47, respectivamente, e então somando-os e obtendo $34 + 47 = 81$, que seria o logaritmo associado ao número a seguir:

$$2^{81} = 2417851639229258349412352$$

A partir de então, o uso dos logaritmos provou-se uma ferramenta muito útil para o desenvolvimento das ciências, pois era, por si só, uma evolução tecnológica em um período da história em que otimizar os processos e torná-los mais precisos era fundamental. Com o passar do tempo, as calculadoras foram tomando o espaço das tábuas de logaritmos, substituindo-as naturalmente, mas de modo algum os logaritmos ficaram obsoletos.

1.4. ALGUMAS APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS

Os exemplos citados nessa seção foram retirados, exclusivamente, do livro *Logaritmos* (Lima, 1996), de Elon Lages Lima. O autor buscou, por meio de quatro aplicações diferentes, mostrar como os logaritmos e suas propriedades vão além do uso inicial dado a eles no século XVII, como um simples operador matemático. Muitas das evoluções científicas envolvendo áreas como a economia, a química, a física e a geografia foram beneficiadas pelos logaritmos.

1.4.1. Juros e perdas contínuas

Ao aplicar-se um capital C, ao longo de t períodos de tempo, sob uma taxa de juros i, capitalizada continuamente, ou seja, a cada instante, tem-se que o montante M da aplicação será:

$$\boldsymbol{M = C \cdot e^{i \cdot t}}$$

Demonstração:

Um capital C, aplicado sob uma taxa de juros nominal ao período i, renderá, ao final de um único período de tempo, o equivalente a $C \cdot (1 + i)$. Se este período for dividido em duas partes iguais e o capital capitalizado igualmente em cada uma delas, de tal modo que a taxa de juros seja proporcional também em cada uma delas, tem-se, ao final destes dois períodos, um montante de $C \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2$.

Recursivamente, se este período por dividido em n partes iguais, sendo o capital capitalizado em cada uma delas de modo uniforme e utilizando a taxa de juros proporcional também em cada uma delas, ao final de n períodos o montante final será equivalente a $C \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$.

Assim, se tal divisão em partes iguais se sucede infinitamente, pode-se escrever que o montante M ao final deste único período será:

$$M = \lim_{n \to \infty} C \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = C \cdot \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = C \cdot e^i$$

Portanto, se está-se interessado em determinar o montante de um capital aplicado continuamente ao longo de t períodos de tempo, tem-se:

$$M = \lim_{n \to \infty} C \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n \cdot t} = C \cdot \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n\right]^t =$$

$$= C \cdot \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n\right]^t = C \cdot \left(e^i\right)^t \Rightarrow \boldsymbol{M = C \cdot e^{i \cdot t}}$$

Como queria-se demonstrar.

Como caso particular, por exemplo, se pretende-se determinar em quanto tempo um capital capitalizado continuamente e aplicado sob uma taxa i qualquer triplica de valor, basta encontrarmos t tal que $M = 3 \cdot C$. Tem-se:

$$M = 3 \cdot C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C \cdot e^{i \cdot t} = 3 \cdot C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{i \cdot t} = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i \cdot t = \ln 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \frac{\ln 3}{i}$$

Segue que ao capital triplicaria de valor em um período de tempo igual a $\frac{\ln 3}{i}$, onde $\ln 3$ indica o logaritmo de base e de 3. O logaritmo, portanto, foi essencial para a determinação do tempo. Analogamente, ele seria necessário para se determinar a taxa necessária para que o capital triplicasse sob um período de tempo qualquer, ou seja, $i = \frac{\ln 3}{t}$.

As propriedades utilizadas para resolver a equação acima foram exploradas mais detalhadamente no *Capítulo 02*.

Como um segundo caso, semelhante ao primeiro, trata-se de perdas contínuas.

Seja um produto comprado por um valor P que sofre uma desvalorização contínua sob uma taxa instantânea i ao longo de t períodos de tempo. O valor residual V deste produto ao final deste período será:

$$\boldsymbol{V = P \cdot e^{-i \cdot t}}$$

Demonstração:

De modo análogo ao que foi executado no processo de juros contínuos, tem-se que um produto de valor P, que desvaloriza a uma taxa i após um período de tempo, passa a valer, após este período de tempo, $P \cdot (1 - i)$.

Se o período de tempo em questão for dividido em n partes iguais e a desvalorização acontecer em cada um deles, a uma taxa proporcional à taxa do período inteiro, o valor residual do produto será equivalente a $P \cdot \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n$. Assim, se a divisão for em períodos de tempo tão pequenos a ponto da desvalorização ser instantânea, tem-se que o valor residual V do produto será:

$$V = \lim_{n \to \infty} P \cdot \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n = P \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{-i}{n}\right)^n = P \cdot e^{-i}$$

Portanto, se a desvalorização acontecer continuamente ao longo de t períodos de tempo, analogamente à situação de juros contínuos, o valor residual do produto passa a ser:

$$V = \lim_{n\to\infty} P \cdot \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{n\cdot t} = P \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-i}{n}\right)^{n}\right]^{t} =$$

$$= P \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-i}{n}\right)^{n}\right]^{t} = P \cdot \left(e^{-i}\right)^{t} \Rightarrow \boldsymbol{V = P \cdot e^{-i\cdot t}}$$

Tal qual interessava demonstrar.

Como caso particular, se está-se interessando em determinar após quanto tempo um produto, desvalorizando continuamente, passa a valer um décimo de seu valor inicial, é necessário determinar t tal que $V = \frac{1}{10} \cdot P$. Tem-se:

$$V = \frac{1}{10} \cdot P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \cdot e^{-i\cdot t} = \frac{1}{10} \cdot P \Rightarrow$$

$$e^{-i\cdot t} = \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$-i \cdot t = \ln(10^{-1}) \Rightarrow$$

$$-i \cdot t = -\ln 10 \Rightarrow$$

$$t = \frac{\ln 10}{i}$$

Logo, leva $\frac{\ln 10}{i}$ períodos de tempo para que um produto passe a valer um décimo de seu valor inicial. Mais uma vez o logaritmo mostra-se essencial para se obter tal resultado.

1.4.2. Desintegração radioativa e datação por Carbono 14

Seja uma substância radioativa de massa inicial M_0 cuja taxa de desintegração é de i unidades de massa por período de tempo, considerada ao longo de certo período de tempo. Levando em consideração que *"os átomos de uma substância radioativa possuem uma tendência natural a de desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não-radioativa"*, após t períodos de tempo, a massa M_t da substância remanescente é dada por:

$$\boldsymbol{M_t = M_0 \cdot e^{-i\cdot t}}$$

Demonstração:

Considerando uma massa inicial M_0 da substância que desintegrou-se por um único período de tempo, tem-se que sua nova massa será $M_1 = M_0 - i \cdot M_0 \Rightarrow M_1 = M_0 \cdot (1 - i)$. De modo análogo, após dois períodos de tempo, M_1 passará pelo mesmo processo de desintegração que M_0, de modo que:

$$M_2 = M_1 - i \cdot M_1 \Rightarrow M_2 = M_1(1 - i) \Rightarrow$$
$$M_2 = M_0 \cdot (1 - i) \cdot (1 - i) \Rightarrow M_2 = M_0 \cdot (1 - i)^2$$

Procedendo recursivamente após n períodos de tempo, tem-se que $M_n = M_0 \cdot (1 - i)^n$.

Contudo, a desintegração ocorre de maneira contínua ao longo de todo o processo, ou seja, em períodos infinitesimais. Assim, tomando um único período de tempo e dividindo-o em n partes iguais, a taxa, para cada um dos n períodos de desintegração, passa a ser de $\frac{i}{n}$ e a massa remanescente passa a ser $M = M_0 \cdot \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n$. Como se está interessado em interpretar a desintegração como um processo instantâneo, que ocorre a cada período ínfimo de tempo, tem-se:

$$M = \lim_{n\to\infty} M_0 \cdot \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n = M_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-i}{n}\right)^n = M_0 \cdot e^{-i}$$

Replicando o processo ao longo de t períodos de tempo iguais àquele único que foi partido em n partes iguais, tem-se:

$$M = \lim_{n\to\infty} M_0 \cdot \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{n \cdot t} = M_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-i}{n}\right)^n\right]^t =$$
$$= M_0 \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-i}{n}\right)^n\right]^t = M_0 \cdot \left(e^{-i}\right)^t \Rightarrow \boldsymbol{M = C \cdot e^{-i \cdot t}}$$

Como queria-se demonstrar.

Como exemplo, quando se quer determinar o tempo t necessário para que uma substância radioativa se desintegre à metade da massa original, escreve-se e opera-se:

$$M_t = \frac{1}{2} \cdot M_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_0 \cdot e^{-i \cdot t} = \frac{1}{2} \cdot M_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-i \cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -i \cdot t = \ln(2^{-1}) \Rightarrow$$
$$-i \cdot t = -\ln 2 \Rightarrow$$
$$t = \frac{\ln 2}{i}$$

Logo, demora $\frac{\ln 2}{t}$ períodos de tempo para que a massa de uma substância se desintegre à sua metade, e mais uma vez o logaritmo apresenta-se na solução do problema.

O tempo encontrado no exemplo anterior, suficiente para que a substância se desintegre à metade de sua massa original, é chamada de *meia-vida* de uma substância radioativa. Fica claro, com base nos cálculos, que a meia vida depende, unicamente, da taxa de desintegração da substância. Reciprocamente, conhecida a meia vida da substância, é possível encontrar sua taxa de desintegração. Tem-se:

$$t = \frac{\ln 2}{i} \Leftrightarrow i = \frac{\ln 2}{t}$$

É a partir do conceito de meia vida de uma substância radioativa que se originou a técnica de datação de objetos muito antigos, como fósseis ou artefatos de madeira. A substância mais utilizada para realizar tal processo é o Carbono 14 (C^{14}), abundante na atmosfera. A quantidade de C^{14} presente em cada ser vivo mantem-se constante ao longo de toda a sua vida. No momento de sua morte, tal quantidade de substância presente em seu organismo começa a desintegrar-se continuamente, sem ser mais compensado.

Dado que a meia-vida do Carbono 14 é de 5730 anos (Francisco, Lima e Arçari, 2011), tem-se que a taxa de desintegração da substância é $i = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0{,}000121$.

Assim, supondo um fóssil cuja massa de Carbono 14 remanescente, medida por um contador Geiger, é equivalente a 10% de sua massa original, é possível estimar a data de sua morte, ou o período da história em que esteve vivo, a partir da equação demonstrada anteriormente. Dado $i = \frac{\ln 2}{5730}$ e $M_t = 0{,}1M_0$, tem-se:

$$M_t = 0{,}1M_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_0 \cdot e^{-i \cdot t} = 0{,}1M_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-\frac{\ln 2}{5730} \cdot t} = 0{,}1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{5730}} = 0{,}1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^{-\frac{t}{5730}} = 0{,}1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{5730} = \log_2 0{,}1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -5730 \cdot \log_2 0{,}1 \approx 19035 \text{ anos}$$

Conclui-se, portanto, que este fóssil morreu há, aproximadamente, 19035 anos.

1.4.3. Resfriamento de um corpo

Consideremos um corpo retirado de um meio aquecido e colocado para se resfriar num meio mais frio. A lei de resfriamento de Newton enuncia-se de modo análogo à desintegração radioativa: a temperatura inicial do corpo T_0 decresce a uma taxa constante i, proporcional à temperatura naquele instante. Assim, após t períodos, a temperatura do corpo T_t passa a ser

$$\boldsymbol{T_t = T_0 \cdot e^{-i \cdot t}}$$

Por consequência, se a temperatura do meio mais frio, chamado de temperatura ambiente, for T_A, e T for a temperatura real do corpo, tem-se:

$$\boldsymbol{T = T_A + T_0 \cdot e^{-i \cdot t}}$$

Demonstração:

Procede-se identicamente à demonstração da desintegração radiativa: trata-se a massa inicial da substância M_0 como a temperatura inicial do corpo T_0. Assim, $T_t = T_0 \cdot e^{-i \cdot t}$.

A temperatura do corpo T_t foi considerada supondo uma condição onde ela tende a estabilizar-se em 0°. De fato:

$$\lim_{t \to \infty} T_0 \cdot e^{-i \cdot t} = T_0 \cdot \lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{i \cdot t}} = T_0 \cdot 0 = 0$$

Contudo, a temperatura do corpo T_t, conforme a noção de equilíbrio térmico, estabiliza-se à temperatura ambiente T_A, de modo que, se T for a temperatura real do corpo, tem-se $T = T_t + T_A$, de modo que $T = T_A + T_0 \cdot e^{-i \cdot t}$.

A taxa de resfriamento i depende unicamente do material com o qual o corpo é composto. Assim, suponhamos que, certo dia em que a temperatura ambiente seja de $20°C$, uma bacia com água quente à $70°C$ seja retirada do fogo e deixada para esfriar por 30 minutos, ou seja, meia $(\frac{1}{2})$ hora. Ao final deste período de tempo constatou-se que a temperatura da água passou a $30°C$. A fim de determinar a taxa de resfriamento da água utilizada, tem-se:

$$T = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A + T_0 \cdot e^{-i \cdot t} = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 + 70 \cdot e^{-i \cdot \frac{1}{2}} = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 70 \cdot e^{-\frac{i}{2}} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{i}{2}} = \frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{i}{2} = \ln \frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = -2 \ln \frac{1}{7} \approx 3{,}89$$

Logo, a taxa de resfriamento da água é de aproximadamente $3{,}89\ °C$ por hora.

Todas as situações propostas nessa seção trazem aplicações científicas do uso dos logaritmos. Esteja-se interessado em determinar o tempo ou a taxa de crescimento e decrescimento, variáveis estas que compõe os expoentes das funções analisadas em cada item da seção, há a necessidade de recorrer à operação de logaritmação para resolver as equações encontradas pelo caminho. Percebe-se, portanto, que mesmo que as calculadoras tenham tornado as tábuas de logaritmos obsoletas, os logaritmos ainda são fundamentais para se trabalhar com situações aplicadas, principalmente em casos onde há crescimento ou decrescimento exponencial.

1.5. OS PROBLEMAS E A BUSCA POR ALTERNATIVAS PARA SE ENSINAR LOGARITMOS

O processo de formação docente é dinâmico e constante. Não é suficiente apenas um diploma de licenciado em uma das inúmeras áreas do conhecimento para se colocar em sala de aula. Para o professor, é necessária a atualização contínua para que o ensino se mantenha atual e coerente com as mudanças nos sistemas educacionais e com as realidades de cada estudante. Cergoli (2017, p.8) comenta que “A formação de um professor é complexa. [...] Trata-se de um difícil processo, rodeado de incerteza e decisões a serem tomadas.” Estas incertezas, intrínsecas a qualquer educador, acabam por, muitas vezes, atrapalhar o processo de ensino e, por consequência, também o processo de aprendizagem. No que tange o ensino de logaritmos, as dificuldades parecem intensificar-se, conforme o que já foi exposto previamente na *Introdução* desta dissertação.

Diversas possibilidades descortinam-se para solucionar tal problema. Uma delas é o uso coerente e bem fundamentado da tecnologia em sala de aula. Pereira (2021, p.18) exemplifica um destes usos quando afirma que

> O estudo de funções com o auxílio da tecnologia, em especial de *softwares* que plotam gráficos, pode tornar a aula bem mais dinâmica, o que pode propiciar o despertar do interesse do aluno pelo estudo de Matemática.

Ainda de encontro à busca por soluções, Franchi (2020, p.214) comenta que "[...] ambientes de aprendizagem que privilegiam a investigação, a reflexão, o diálogo e a cooperação devem admitir a possibilidade de o currículo ser, de certa forma, gerido pelos participantes." Isto vai ao encontro da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, quando o autor fala que os conhecimentos prévios dos estudantes devem ser levados em consideração. Caso contrário, a aprendizagem fica debilitada e o ensino torna-se ineficaz.

Segundo Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998, p.10), "[...] numa investigação parte-se de uma situação que é preciso compreender ou de um conjunto de dados que é preciso organizar e interpretar". Uma aula dialogada, que questiona os alunos e os coloca para pensar, ou seja, os posiciona em um local ativo no processo de ensino, como produtores das respostas que estão sendo buscadas, como responsáveis pelo conhecimento que se está sendo aprendido, vai de encontro a esta visão.

No tocando às investigações, Ponte (2010, p.21) explica que elas "[...] têm um grau de complexidade elevado e uma estrutura aberta [...]"; ao passo que "[...] as tarefas de exploração são também abertas mas relativamente pouco complexas. Muitas vezes não se distingue entre tarefas de investigação e de exploração, chamando-se "investigações" a todas elas". Por conta disto, em função do caráter das tarefas propostas ao longo do *Capitulo 04,* associaremos a elas a designação "exploratório-investigativas", como feito por Mescouto, Lucena e Barbosa (2021) em seu artigo *"Tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação para o desenvolvimento do pensamento algébrico"*.

Muitas das tarefas propostas nos sequenciamentos didáticos construídos neste trabalho fazem uso de processos exploratório-investigativos. Algumas baseiam-se na premissa de que, a partir de exemplos específicos, os alunos sejam capazes de perceber padrões para conjecturar generalizações. Indo de encontro a estes desenvolvimentos, Barbosa (2019, p.36) expõe que

> Num ensino-aprendizagem exploratório, a teoria não surge em primeiro lugar, na realidade, numa primeira fase, parte-se de tarefas que envolvam fortemente os alunos na sua realização e, numa segunda fase, há um momento de discussão, reflexão e clarificação dos conteúdos trabalhados.

Tarefas exploratório-investigativas são grandes aliadas à aprendizagem significativa, pois satisfazem as duas condições para sua ocorrência, uma vez que tornam o material potencialmente significativa e colocam o aluno em uma posição de predisposição para aprender. Barbosa (2019, p.35) explica este grande potencial das atividades exploratórias ao afirmar que

“[...] no ensino-aprendizagem exploratório, não cabe ao professor explicar a matéria na íntegra, ou seja, há uma parte significativa do trabalho de construção do conhecimento através da descoberta para os alunos realizarem”.

O ensino de logaritmos e da operação de logaritmação também se beneficia intimamente desta metodologia. Ao vincular a definição, as propriedades, a resolução de equações e a análise e modelagem de funções às aplicações citadas anteriormente e à resolução de problemas reais a partir de tarefas exploratório-investigativas e de uma construção que seja bem ancorada à estrutura cognitiva do indivíduo, tanto o estudante quanto o educador, tanto a aprendizagem quanto o ensino, são favorecidos.

Os logaritmos, como já apresentado anteriormente, surgiram como uma maneira de simplificar cálculos, mas este uso ficou obsoleto com o surgimento das calculadoras. No entanto, sua importância permaneceu atual pois passou a ser utilizado na modelagem e na aplicação em fenômenos em diversas áreas das ciências, como a física, a química e a geografia. Dada sua importância e relevância tanto histórica quando atual, os problemas enfrentados para se ensinar logaritmos em sala de aula são preocupantes.

Galupo (2021, p.18) propõe, em sua dissertação, que pesquisas envolvendo logaritmos tem acontecido sob diferentes abordagens “[...] tais como: propostas de ensino com a criação e desenvolvimento de atividades; abordagem em livros didáticos; situações de aprendizagem nas quais os conceitos foram elaborados pelos estudantes com a construção de materiais e investigações que privilegiaram a História da Matemática”. Nesta mesma linha, a autora também aponta que os livros didáticos estão desatualizados em relação à abordagem dos logaritmos, focando em uma explanação clássica, em exercícios repetitivos e sem significados, quando deveria propor abordagens contextualizadas.

Esta falta de adequação por parte dos materiais didáticos soma-se às falhas nas formações de professores e as dificuldades dos alunos em relação ao pensamento algébrico e cria uma bola de neve cujos maiores prejudicados são os estudantes. Uma criação de uma nova identidade para o processo de ensinar logaritmos pode acontecer de diversas maneiras, contanto que todas elas estejam ancoradas à realidade do uso dos logaritmos, sua aplicabilidade e ao estado da educação brasileira como um todo.

Portanto, esta dissertação, como já exposto, foi concebida dada a necessidade da criação de materiais atualizados e com significado, que atualizem a abordagem clássica, mas, ao mesmo tempo, tragam uma nova visão e uma nova estética, pautada em tecnologias e processos exploratório-investigativos e construída tendo como norte os conceitos da Teoria da Aprendizagem Significativa, sobre o ensino dos logaritmos no Ensino Médio.

CAPÍTULO 02 – A TEORIA MATEMÁTICA DOS LOGARITMOS

Neste capítulo apresenta-se a construção da definição de logaritmo e da operação de logaritmação, prova-se suas propriedades e estabelece-se o conceito de função logarítmica a partir dos livros *Logaritmos* (Lima, 1996) e *Números e Funções Reais* (Lima, 2013), ambos de Elon Lages Lima, *A Matemática do Ensino Médio, volume 1* (Lima et al., 2016), de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado, *Fundamentos da Matemática Elementar, 2: Logaritmos* (Iezzi, Dolce e Murakami, 2013), de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Carlos Murakami, *Conceitos Fundamentais da Matemática* (Caraça, 1951), de Bento Jesus Caraça e *Um Curso de Cálculo, volume 1* (Guidorizzi, 2016), de Hamilton Luiz Guidorizzi. Partiu-se da definição da operação de potenciação e do conceito de potência, que foi expandido até a construção da exponenciação e da função exponencial, tendo como base a mesma bibliografia.

Dentro do ensino básico, tais conceitos devem ser tratados como um *continuum*, como determinado pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). A escolha por trazer para a sala de aula uma visão mais aprofundada de cada estrutura, com demonstrações, fica à cargo do professor. Ao longo do texto, serão estabelecidos paralelos com tal documento, trazendo ao leitor uma visão completa de como os conteúdos se relacionam e passam a compor a estrutura cognitiva propícia para a ancoragem dos conceitos referentes a logaritmos no Ensino Médio.

2.1. DEFINIÇÃO DE POTÊNCIA

Definição 2.1 (definição de potência)*:*

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. A potência de base a e expoente n, denotada por a^n (lê-se "a elevado a n" ou "a elevado à n-ésima potência") é definida a partir da recorrência:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a^1 = a} \\ \boldsymbol{a^n = a \cdot a^{n-1}, \forall n > 1} \end{cases}$$

Assim, $a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$, $a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$ e, por consequência, $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, ou seja, um produto de n fatores a.

A potência é apresentada aos estudantes da Educação Básica brevemente no quinto ano do Ensino Fundamental, mas efetivamente no sexto ano da mesma etapa como o resultado da operação de potenciação. Até então, os alunos tiveram contato apenas com os números naturais e com os números racionais na forma fracionária e decimal, mas sem a definição propriamente dita do conjunto dos números racionais ou a associação de tais representações a partir da operação de divisão. Por conta disso, à operação de potenciação é atribuída a função de sintetizar a operação de multiplicação de números naturais e decimais exatos, e é definida a partir disso.

Proposição 2.2 (propriedade fundamental da potenciação)*:*

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\boldsymbol{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}$$

Demonstração:

Se a^m é o produto de m fatores a e a^n é o produto de n fatores a então $a^m \cdot a^n$ é o produto de $m + n$ fatores a, ou seja, é igual a a^{m+n}.

A *Proposição 2.2* expressa, claramente, que a potenciação é uma operação que transforma uma soma em um produto.

É possível estender a propriedade para k fatores $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.3:

Sejam $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então:

$$\boldsymbol{a^{m_1+m_2+\cdots+m_k} = a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \dots \cdot a^{m_k}}$$

Demonstração:

Utiliza-se o princípio da indução matemática em k. O caso base é verificado, pois se $k = 2$, o resultado segue da *Proposição 2.2*. Desenvolvendo o passo indutivo, assumindo o resultado válido para $k = j$, mostra-se que é valido para $k = j + 1$. Tem-se:

$$a^{m_1+m_2+\cdots+m_j+m_{j+1}} =$$
$$= a^{(m_1+m_2+\cdots+m_j)+m_{j+1}} =$$
$$= a^{m_1+m_2+\cdots+m_j} \cdot a^{m_{j+1}} =$$
$$= a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \dots \cdot a^{m_j} \cdot a^{m_{j+1}}$$

Demonstrou-se o que foi proposto.

Proposição 2.4:

Sejam $m, k \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então:

$$\boldsymbol{(a^m)^k = a^{m \cdot k}}$$

Demonstração:

Utilizando a *Proposição 2.3*, em particular, se $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = m$, segue que $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m \cdot k$ e $a^{m_1+m_2+\cdots+m_k} = a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \ldots \cdot a^{m_k} = a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m = (a^m)^k$, pois $a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m$ é um produto de k fatores a^m.

Na sequência, define-se a potência a^n para $n = 0$ e $a \neq 0$.

Definição 2.5:

Seja $a \in \mathbb{R}^*$. Então:

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

A *Proposição 2.2* já estabelecida segue válida para a *Definição 2.5*. Com efeito, tem-se $a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0 \Rightarrow a^0 = 1$.

A fim de estender a potência a^n, $a \neq 0$, para qualquer expoente n inteiro, utiliza-se a definição que segue.

Definição 2.6:

Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{R}^*$. Então:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Tanto a apresentação das propriedades da potenciação quanto a extensão da operação de potenciação para expoentes inteiros quaisquer acontecem no sétimo e oitavo ano do Ensino Fundamental, respectivamente. É apenas no sétimo ano que os alunos têm contato com números inteiros negativos, ao passo que no oitavo ano é definido o conjunto dos números reais em sua totalidade, a partir da construção da ideia de fração geratriz de uma dízima periódica e da apresentação dos números irracionais como dízimas não-periódicas. Assim, a estrutura cognitiva dos estudantes fica preparada para amparar as noções de expoente negativo e a trabalhar com bases diversas.

Os livros didáticos costumam trazer também três propriedades operatórias complementares da potenciação.

Definição 2.7:

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\boldsymbol{a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}}$$

Proposição 2.8:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

Demonstração:

Utilizando indução, tem-se para $n = 1$, $(a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1$. Supondo a propriedade válida para n, encontra-se $(a \cdot b)^{n+1} = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b) = a^n \cdot b^n \cdot a \cdot b = a^n \cdot a \cdot b^n \cdot b = a^{n+1} \cdot b^{n+1}$, ou seja, a propriedade mantêm-se válida para $n + 1$.

Proposição 2.9:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Demonstração:

Usando indução, para $n = 1$, $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$. Supondo a propriedade válida para n, tem-se $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$, ou seja, a propriedade mantêm-se válida para $n + 1$.

De modo que se possa definir a potência a^n para um expoente $n \in \mathbb{Q}$, é necessário definir a raiz n-ésima de um número real.

Definição 2.10:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. A raiz de índice n do radicando b, denotada por $\sqrt[n]{b}$ (lê-se "raiz n-ésima de b"), é definida através da bimplicação:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b}$$

Esta definição esclarece que determinar a raiz n-ésima de b significa determinar o número real a cujo produto de n fatores iguais a ele é igual a b.

A *Definição 2.10* fica bem definida para qualquer b que seja produto de n fatores a. Para compreendê-la de modo mais completo, recorre-se a uma análise mais aprofundada da natureza de b e do expoente n.

Supondo que $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, ou seja, n é par, tem-se $b = a^n = a^{2k} = (a^k)^2 > 0\ \forall a$, de modo que, quando o índice é um número natural par, $\sqrt[n]{b}$ existe se, e somente se, $b > 0$.

Por outro lado, supondo que $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, ou seja, n é ímpar, tem-se $b = a^n = a^{2k+1} = (a^k)^2 \cdot a$, isto é, o sinal de b é o mesmo de a. Logo, $\sqrt[n]{b}$ existe para todo $b \in \mathbb{R}$, independentemente da natureza de b, pois $a > 0 \Leftrightarrow b > 0$ e $a < 0 \Leftrightarrow b < 0$.

Para não correr o risco de se deparar com situações que não existem ou que não estão bem definidas dentro do conjunto dos números reais, assume-se, a partir de agora, que b é um número real positivo, de modo que a^n também é uma potência de base a real positiva. Assim, $\sqrt[n]{b}$ estará definida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.11:

Sejam $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b}$$

Demonstração:

Da *Definição 2.10*, $\sqrt[n]{b} = a \Rightarrow \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a^n = b$.

No Ensino Fundamental, a raiz n-ésima é apresentada aos estudantes no sexto ano como o resultado da operação de radiciação, a operação inversa da potenciação. Como consequência, no sétimo ano, os alunos são levados a refletir sobre a existência de raízes de índice par de números negativos, para então constatar que elas não existem dentro do conjunto dos números racionais. Esta noção é, no oitavo ano, ampliada aos números reais, e servirá como base para, posteriormente, a definição do conjunto dos números complexos no Ensino Médio.

Por definição, todo $r \in \mathbb{Q}$ pode ser escrito como uma razão, ou divisão, de dois números inteiros e denominador não-nulo, ou seja, $r = \frac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Com isto posto, a seguir define-se potência de expoente fracionário.

Definição 2.12:

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\boldsymbol{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Proposição 2.13:

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $r, s \in \mathbb{Q}$. Então:

$$\boldsymbol{a^r \cdot a^s = a^{r+s}}$$

Demonstração:

Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$, com $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ e $n, q \neq 0$.

Logo, $a^r = a^{\frac{m}{n}} \Rightarrow (a^r)^n = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n \Rightarrow a^{r \cdot n} = a^m$ e, de modo análogo $a^{s \cdot q} = a^p$. Segue que:

$$(a^r \cdot a^s)^{n \cdot q} = (a^r)^{n \cdot q} \cdot (a^s)^{n \cdot q} = a^{r \cdot n \cdot q} \cdot a^{s \cdot n \cdot q} =$$
$$= (a^{r \cdot n})^q \cdot (a^{s \cdot q})^n = (a^m)^q \cdot (a^p)^n = a^{m \cdot q} \cdot a^{p \cdot n} = a^{m \cdot q + p \cdot n}$$

Das *Definições 2.10* e *2.12* vem que:

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[n \cdot q]{a^{m \cdot q + p \cdot n}} = a^{\frac{m \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

Prova-se que a propriedade fundamental da potenciação (*Proposição 2.2*) segue válida para expoentes racionais.

Proposição 2.14:

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$$

Demonstração:

Da *Definição 2.12* e da *Proposição 2.4*, vem que:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a^1}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Proposição 2.15:

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$$

Demonstração:

Da *Definição 2.12* e da *Proposição 2.4*, segue que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

No oitavo ano do Ensino Fundamental, a noção de expoente fracionário é apresentada aos estudantes para que se estabeleça mais uma conexão entre potenciação e radiciação. Tais conceitos são ampliados no nono ano, de modo que habilidades relacionadas à manipulação e simplificação de radicais e à resolução de equações do segundo grau sejam adquiridas e desenvolvidas.

Para que as potências a^x possam ser definidas para todo $x \in \mathbb{R}$, resta ainda definir as potências do tipo a^α, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ou seja, para α irracional. Tal caso é tratado após a definição da função exponencial de base a na *Seção 2.3*. No momento, toma-se como verdadeiro o fato da potência a^α, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ser um número real bem definido. Assim, uma vez convencionado $a \in \mathbb{R}_+^*$ e definida a potência a^x para expoentes x tanto racionais quanto irracionais, assume-se que a^x é um número real bem definido $\forall x \in \mathbb{R}$. Ainda, todas as proposições provadas até o momento para potência de expoentes racionais valem também para expoentes reais.

A construção de tal conceito no ensino básico se dá ao longo dos quatro anos do Ensino Fundamental – Anos Finais, proporcionando aos estudantes a habilidade de "Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações" (BRASIL, 2018, p.317), proposta na BNCC. A ancoragem de todos estes conceitos na estrutura cognitiva do aluno, e sua consequente familiaridade com a manipulação deles, torna a aprendizagem de conceitos como o de função exponencial e da própria definição de logaritmo mais fáceis e intuitivos.

2.2. DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Definição 2.16 (definição de logaritmo)*:*

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$. O logaritmo de base a do logartimando b, notada por $\log_a b$ (lê-se "logaritmo de b na base a" ou "logaritmo de base a de b"), pode ser definido a partir da bimplicação:

$$\boldsymbol{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Determinar o logaritmo de base a de um número real positivo b é equivalente a determinar o expoente x a que a deve ser elevado para se obter b. Se $x \in \mathbb{N}$, x representa quantos fatores iguais a a são necessários para que seu produto resulte no valor de b.

Desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, os estudantes são apresentados às operações básicas e às suas inversas, como uma maneira de obter a "prova real" de seus cálculos. Em função da potenciação não ser uma operação que satisfaz a propriedades comutativa, ela dispõe de duas inversas: a radiciação (que dado o expoente e a potência calcula sua base) e a logaritmação (que dada a base e a potência calcula seu expoente). Contudo, a maioria dos livros didáticos utilizados no Ensino Médio não trata o logaritmo como o resultado de uma operação básica, inversa da potenciação, bem como a própria BNCC, como já comentado no *Capítulo 01*.

A definição de logaritmo tem algumas consequências importantes, que dizem respeito ao expoente nulo, ao logaritmo de base e logartimando iguais e da potência cujo expoente é um logaritmo, de base igual à base da potência.

Proposição 2.17:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Então:

$$\mathbf{\log_a 1 = 0}$$

Demonstração:

Da *Definição 2.16*, $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$.

Proposição 2.18:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Então:

$$\mathbf{\log_a a = 1}$$

Demonstração:

Da *Definição 2.16*, $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$.

Proposição 2.19:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Então:

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$$

Demonstração:

Da *Definição 2.16*, $\log_a b = \log_a b \Leftrightarrow a^{\log_a b} = b$.

Proposição 2.20 (propriedade fundamental da logaritmação)*:*

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Então:

$$\boldsymbol{\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

Demonstração:

Segue da *Definição 2.16* que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ e $\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$. Da *Proposição 2.2*, vem que:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow b \cdot c = a^{\log_a b + \log_a c} \Leftrightarrow \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

O primeiro contato que os estudantes de Ensino Médio têm com logaritmos, de acordo com o que é exposto nos livros didáticos, acontece quando lhes é apresentado sua definição, suas consequências e suas principais propriedades. Tal organização viabiliza que o foco dado ao logaritmo seja operacional, descontextualizando-o de sua aplicabilidade prática, que motivou seu uso e seu estudo séculos atrás, tal qual mostra a propriedade fundamental. A logaritmação tem o potencial para transformar produtos em somas, que é uma operação muito mais democrática e de fácil resolução, indo ao encontro do princípio da economia evidenciado por Caraça (1951).

Proposição 2.21:

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, e uma quantidade natural k de fatores $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R}_+^*$. Então:

$$\boldsymbol{\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_k) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \cdots + \log_a b_k}$$

Demonstração:

Utiliza-se o princípio da indução matemática em k. Ratifica-se o caso base, pois se $k = 2$, o resultado é a *Proposição 2.20*. Desenvolvendo o passo indutivo, assumindo a proposição válida para $k = i$, mostra-se que é valido para $k = i + 1$. Tem-se:

$$\begin{gathered}\log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_i \cdot b_{i+1}) = \\ = \log_a[(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_i) \cdot b_{i+1}] = \\ = \log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_i) + \log_a b_{i+1} = \\ = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \cdots + \log_a b_i + \log_a b_{i+1}\end{gathered}$$

E demonstrou-se o que foi proposto.

Proposição 2.22:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, e $k \in \mathbb{N}$ Então:

$$\boldsymbol{\log_a b^k = k \cdot \log_a b}$$

Demonstração:

Da *Proposição 2.21*, se $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = b$, segue, da *Definição 2.1*, $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_k = b \cdot b \cdot \dots \cdot b = b^k$ e $\log_a b_1 + \log_a b_2 + \cdots + \log_a b_k = \log_a b + \log_a b + \cdots + \log_a b = k \cdot \log_a b$. Por comparação, vem que $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$.

A propriedade acima, apesar de ter sido provada para $k \in \mathbb{N}$, vale também para todo $k \in \mathbb{R}$, como prova-se a seguir.

Proposição 2.23:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, e $k \in \mathbb{R}$. Então:

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k} \cdot \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}$$

Demonstração:

Vamos supor $-k \in \mathbb{N}$ e $\log_a b^k = u$. Da *Definição 2.14*, vem que $a^u = b^k \Rightarrow (a^u)^{\frac{1}{k}} = (b^k)^{\frac{1}{k}} \Rightarrow a^{\frac{1}{k} \cdot u} = b \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{k} \cdot u \Rightarrow u = k \cdot \log_a b$. Por comparação, segue que $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$.

De modo análogo, vamos tomar $r \in \mathbb{Q}$, com $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, e $\log_a b^r = v$. Da *Definição 2.16*, vem que:

$$a^v = b^{\frac{p}{q}} \Rightarrow (a^v)^{\frac{q}{p}} = \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{\frac{q}{p} \cdot v} = b \Rightarrow \log_a b = \frac{q}{p} \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{p}{q} \cdot \log_a b \Rightarrow v = r \cdot \log_a b$$

Por comparação, segue que $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$.

Do mesmo modo que foi executado na seção anterior, supõe-se que a propriedade $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ vale para todo $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Tal resultando foi devidamente provado em momento posterior desta dissertação.

No que segue, assume-se que $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$ é uma propriedade válida para todo $k \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.24:

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, e $k \in \mathbb{R}$ Então:

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}$$

Demonstração:

Das *Proposições 2.18* e *2.23*, segue que, se $a = b$, $\log_a a^k = k \cdot \log_a a = k \cdot 1 = k$.

Além das duas propriedades já tratadas nesta seção, aos estudantes do Ensino Médio costumam ser apresentadas outras duas, ambas consequências da definição de logaritmo e da propriedade fundamental.

Proposição 2.25:

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Então:

$$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$$

Demonstração:

Da *Proposição 2.20*, segue que:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b \cdot c^{-1}) = \log_a b + \log_a c^{-1} =$$
$$= \log_a b + (-1) \cdot \log_a c = \log_a b - \log_a c$$

Proposição 2.26:

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{R}$. Então:

$$\boldsymbol{\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b}$$

Demonstração:

Fazendo $\log_{a^n} b = u$, segue, da *Definição 2.16*, que:

$$(a^n)^u = b \Rightarrow (a^u)^n = b \Rightarrow [(a^u)^n]^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^u = b^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \log_a b^{\frac{1}{n}} = u \Rightarrow \frac{1}{n} \cdot \log_a b = u$$

Por comparação, segue que $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$.

O conjunto de todos os logaritmos escritos sobre uma base $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, é chamado de sistema de logaritmos de base a. Em particular, dois sistemas de logaritmos se destacam: o sistema de logaritmos decimais, cuja base é 10, e o sistema de logaritmos neperianos (ou naturais), de base e.

No primeiro caso, denota-se o logaritmo decimal por $\log_{10} b$, ou apenas $\log b$. A base decimal fica implícita. No segundo caso, é possível escrever o logaritmo neperiano como $\log_e b$, ou simplesmente $\ln b$. A expressão ln é a abreviação de "logaritmo neperiano", ou "logaritmo natural", como também pode ser conhecido. Em ambos as situações, b satisfaz as condições de existência dos logaritmos, ou seja, $b \in \mathbb{R}_+^*$

Para transitar entre um sistema de logaritmos e outro, ou seja, para possibilitar a mudança de base de um logaritmo, é possível utilizar um resultado derivado da definição de logaritmo, denominado de *propriedade da mudança de base* (ver *Proposição 2.27*).

Proposição 2.27:

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $a, c \neq 1$. Então:

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Demonstração:

A partir da *Definição 2.16*, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, $\log_c b = y \Leftrightarrow c^y = b$ e $\log_c a = z \Leftrightarrow c^z = a$.

Logo, $c^z = a \Rightarrow (c^z)^x = a^x = b = c^y$. Segue que $c^{z \cdot x} = c^y \Rightarrow z \cdot x = y \Rightarrow x = \frac{y}{z} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Corolário 2.28:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Então:

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Demonstração:

Utilizando *Proposição 2.27*, fazendo $c = b$, tem-se $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$. Da *Definição 2.16*, $\log_b b = 1$, e segue que $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

As calculadoras substituíram as tabelas de logaritmos. Até então, como já tratado no *Capítulo 01*, calcular expressões com extensas operações de segunda e terceira ordem, como multiplicações, divisões, potenciações e radiciações, chamadas posteriormente de *expressões logarítmicas*, demandava bastante trabalho manual. Com os logaritmos e respeitando as restrições já postas na definição, qualquer uma dessas operações pôde ser transformada em uma de ordem inferior, facilitando e diminuindo o trabalho.

Ao tomar, por exemplo, a expressão logarítmica $A = \frac{x^{\alpha} \cdot \sqrt[n]{y}}{z^{\beta}}$, com $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, aplicar a operação de logaritmação a partir de um logaritmo de uma base qualquer $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, em ambos os lados da igualdade e manipulá-la utilizando as propriedades convenientes (em ordem: *Proposição 2.25* e *Definição 2.12*, *Proposição 2.20* e *Proposição 2.22*) já tratadas nesta seção, obtém-se:

$$\log_a A = \log_a\left(\frac{x^\alpha \cdot \sqrt[n]{y}}{z^\beta}\right) = \log_a\left(x^\alpha \cdot y^{\frac{1}{n}}\right) - \log_a\left(z^\beta\right) =$$

$$= \log_a(x^\alpha) + \log_a\left(y^{\frac{1}{n}}\right) - \log_a\left(z^\beta\right) = \alpha \cdot \log_a x + \frac{1}{n} \cdot \log_a y - \beta \cdot \log_a z$$

Logo, a expressão que consistia de inúmeras potências, raízes, multiplicações e divisões foi transformada em outra equivalente, com multiplicações, divisões, adições e subtrações. Os valores de $\log_a x$, $\log_a y$ e $\log_a z$ podem ser encontrados em uma tabela de logaritmos. No fim, aplicava-se o caminho inverso, procurando na tabela o valor da expressão $\alpha \cdot \log_a x + \frac{1}{n} \cdot \log_a y - \beta \cdot \log_a z$, comparando-o com os valores de $\log_a A$, para então se encontrar o valor de A, inicialmente buscado.

Este processo, apesar de atualmente parecer muito trabalhoso considerando a evolução das tecnologias, poupava muito tempo de quem, antigamente, não tinha tais recursos.

No Ensino Médio, é comumente requisitado que os estudantes manipulem e operem as expressões logarítmicas, para que então os valores aproximados dos logaritmos sejam substituídos. Este tipo de exercícios fica no meio do caminho entre o método antigo, pois não carece mais de tabelas mesmo recorrendo-se ao mesmo processo, e a praticidade atual, pois requisita o uso das propriedades, mesmo com uma calculadora ou tecnologias similares em mãos, o que tornaria o método original ultrapassado.

2.3. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição 2.29 (definição de função exponencial)*:*

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ denotada por $f(x) = a^x$, é definida de modo que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, seja a única função que satisfaça as propriedades:

(i) $\boldsymbol{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$;

(ii) $\boldsymbol{f(1) = a}$;

(iii) $\boldsymbol{a > 1 \Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) < f(y)}$ e

$\boldsymbol{0 < a < 1 \Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) > f(y)}$.

Proposição 2.30:   Seja a função exponencial de base a, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Então, $\forall x \in \mathbb{R}$: $$\boldsymbol{f(x) \neq 0}$$

Demonstração:

Supondo que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, segue, de **(i)**, que $f(x) = f\big((x - x_0) + x_0\big) = f(x - x_0) \cdot f(x_0) = f(x - x_0) \cdot 0 = 0$, de modo que f seria a função identicamente nula, o que, por **(ii)** e **(iii)**, é um absurdo.

Proposição 2.31:   Seja a função exponencial de base a, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Então, $\forall x \in \mathbb{R}$: $$\boldsymbol{f(x) > 0}$$

Demonstração:

Tem-se, de **(i)**, que $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$.

Proposição 2.32:   Seja a função exponencial de base a, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Então: $$\boldsymbol{f(0) = 1}$$

Demonstração:

Tem-se, de **(i)**, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0) = [f(0)]^2$. Segue que $[f(0)]^2 = f(0) \Rightarrow [f(0)]^2 - f(0) = 0 \Rightarrow f(0) \cdot [f(0) - 1] = 0$.

Da *Proposição 2.30*, $f(x) \neq 0$, logo $f(0) - 1 = 0 \Rightarrow f(0) = 1$.

Lema 2.33:   Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Em todo intervalo de $\mathbb{R}_+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ quaisquer. Está-se interessado em determinar algum $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha \leq a^r \leq \beta$, ou seja, que $a^r \in [\alpha, \beta]$.

Toma-se $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha < \beta < a^m$ e $1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^m}\right)^n$. Tem-se, desta última, que:

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^m} \Rightarrow 0 < a^m \cdot \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha$$

Ao escolher $k \leq m \cdot n \Rightarrow \frac{k}{n} \leq m$, tem-se:

$$0 < a^{\frac{k}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha \Rightarrow 0 < a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} < \beta - \alpha$$

Isso significa que as potências $a^0, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \dots, a^{\frac{i-1}{n}}, a^{\frac{i}{n}}, i \in \mathbb{N}$, quando interpretados como extremos de intervalos, tais como $\left(a^0, a^{\frac{1}{n}}\right)$, $\left(a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}\right)$, ..., $\left(a^{\frac{i-1}{n}}, a^{\frac{i}{n}}\right)$, determinam que todos eles possuem comprimentos menores que o comprimento do intervalo $[\alpha, \beta]$, que é $\beta - \alpha$, pois $a^{\frac{i+1}{n}} - a^{\frac{i}{n}} < \beta - \alpha$, $\forall i$. Mas, por hipótese, $[\alpha, \beta] \subset [1, a^m]$, isto é, existe pelo menos um elemento do conjunto $\left\{a^0, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \dots, a^{\frac{i-1}{n}}, a^{\frac{i}{n}}\right\}$ que pertence ao intervalo $[\alpha, \beta]$.

Dado que, como todo racional positivo r pode ser escrito na forma $\frac{i}{n}$, $i, n \in \mathbb{N}$, tem-se que para todo $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, existe algum $r \in \mathbb{Q}_+$tal que $a^r \in [\alpha, \beta]$.

No caso em que $-r \in \mathbb{Q}_-$, toma-se $j = -i$, de tal modo que $\frac{j}{n} = -r < 0$. Assim, dado que $\alpha < a^r < \beta \Rightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{a^r} < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\beta} < a^{-r} < \frac{1}{\alpha}$, e o lema segue válido.

Com o *Lema 2.33* posto, é possível construir a definição da função $f(x) = a^x$ no domínio dos números irracionais, que até então supôs-se ser verdadeira nas primeiras seções desse capítulo. Para isso, utiliza-se a propriedade **(iii)** da *Definição 2.29*, isto é, que f é crescente se $a > 1$ e f é decrescente se $0 < a < 1$.

Sejam $a > 1$, $r, s \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tais que $r < \alpha < s$. Segue que $a^r < a^\alpha < a^s$. Supondo que existam $A, B \in \mathbb{R}$, $A < B$, tais que $a^\alpha = A$ e $a^\alpha = B$, seria possível obter $a^r < A < B < a^s$, de modo que o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, o que é um absurdo pelo *Lema 2.33*.

Portanto, a^α é o único número real cujas aproximações, por falta, são as potências a^r e cujas aproximações, por excesso, são as potências a^s. Assim, as potências de expoente irracional, passam a ser bem definidas e, por consequência, qualquer potência a^x, $x \in \mathbb{R}$, é também um número real.

Uma vez definida a potência a^α para $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tem-se que a demonstração da *Proposição 2.33* também pode ser concluída, uma vez que, dado $\log_a b^\alpha = u$, pela *Definição 2.16*, é possível escrever:

$$a^u = b^\alpha \Rightarrow (a^u)^{\frac{1}{\alpha}} = (b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow a^{u \cdot \frac{1}{\alpha}} = b \Rightarrow u \cdot \frac{1}{\alpha} = \log_a b \Rightarrow u = \alpha \cdot \log_a b$$

Por comparação, $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$.

Proposição 2.34:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, é uma bijeção.

Demonstração:

A fim de mostrar que f é uma bijeção, verifica-se se a função é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 \neq x_2$. De **(iii)**, vem que, $a > 1 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, de modo que $f(x_1) \neq f(x_2)$. De modo análogo, $0 < a < 1 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Segue que f é injetiva.

Para mostrar que f é uma sobrejeção é necessário mostrar que $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y \Rightarrow a^x = y$. Com efeito, da seção anterior, tem-se que $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$, ou seja, f é sobrejetiva.

Portanto, f é uma bijeção.

Para estudar o comportamento do gráfico da função exponencial, são considerados os casos separadamente.

Inicialmente, toma-se $f(x) = a^x$, $a > 1$.

De imediato, $f(0) = a^0 = 1$, e $(0, 1)$ é um ponto do gráfico de f, ou seja, o gráfico cruza o eixo das ordenadas em $y = 1$. Para $f(x) = 0 \Rightarrow a^x = 0$. Pela *Proposição 2.30*, conclui-se que a equação não possui solução para $x \in \mathbb{R}$, de modo que o gráfico de f nunca toca o eixo x. Em outras palavras, a função f não possui raízes reais.

Proposição 2.35:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a > 1$ e a função exponencial de base a $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Então:

(I) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

(II) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Demonstração:

Para **(I)**, dado $M > 0$, toma-se $\delta = \log_a M$. Tem-se, de **(iii)**:

$$x > \delta \Rightarrow f(x) = a^x > a^{\log_a M} = M$$

Para **(II)**, toma-se $t = -x \Rightarrow x = -t$. Segue que $a^x = a^{-t} = \frac{1}{a^t}$ e $x \longrightarrow -\infty \Rightarrow t \longrightarrow +\infty$. Fazendo as substituições necessárias, tem-se:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{a^t} = \frac{1}{\lim\limits_{t \to +\infty} a^t} = 0$$

Ou seja, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal da função $f(x) = a^x$, $a > 1$.

Por fim, analisa-se as funções exponenciais $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$.

Analogamente ao caso anterior, $f(0) = 1$, de modo que $(0,1)$ é um ponto do gráfico de f. Ainda, $f(x) = 0 \Rightarrow a^x = 0$, que não possui soluções reais, de tal forma que a função não possui raízes reais, ou seja, seu gráfico não cruza o eixo x.

Proposição 2.36:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < a < 1$ e a função exponencial de base a $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Então:

(III) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

(IV) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Demonstração:

Para **(III)**, dado $\epsilon > 0$, toma-se $\delta = \log_a \epsilon$. Se $x > \delta$, então por **(iii)**, $f(\delta) > f(x)$ e $f(\delta) = a^\delta = \epsilon$.

Logo, $f(x) = a^x < f(\delta) = \epsilon$.

Para **(IV)**, toma-se $t = -x \Rightarrow x = -t$. Segue que $a^x = a^{-t} = \frac{1}{a^t}$ e $x \longrightarrow -\infty \Rightarrow t \longrightarrow +\infty$. Fazendo as substituições necessárias, tem-se:

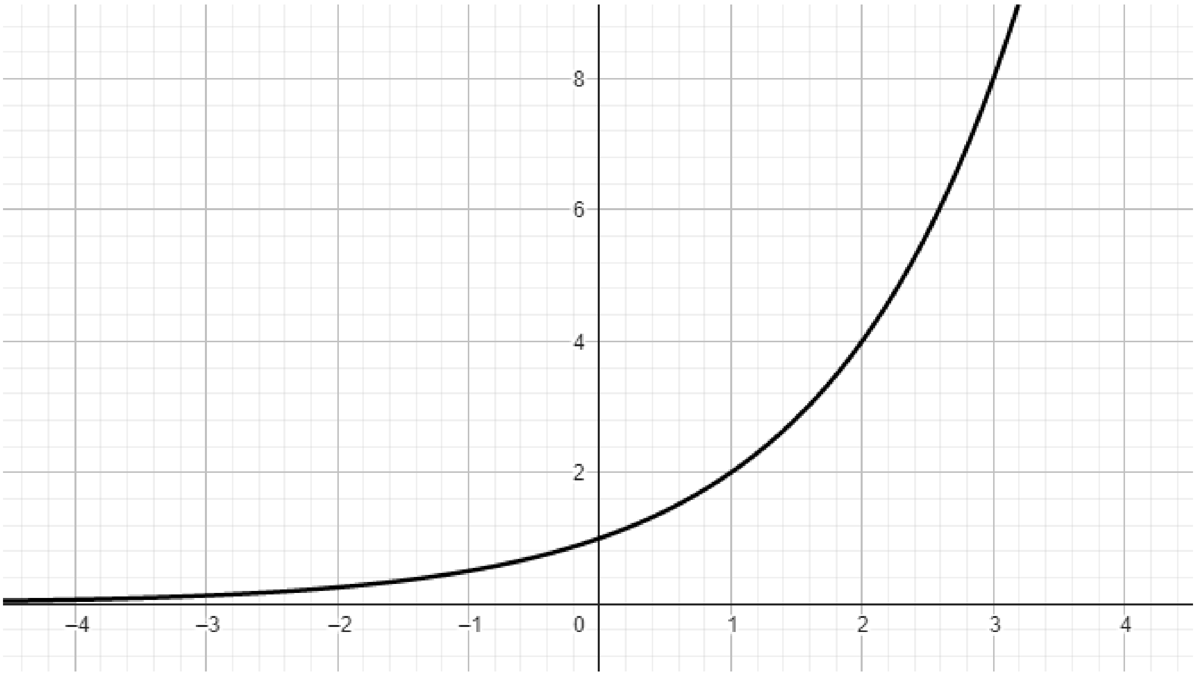
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{a^t} = \frac{1}{\lim\limits_{t \to +\infty} a^t} = +\infty$$

Ou seja, a reta $y = 0$ é também uma assíntota horizontal da função $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$.

Conclui-se, assim, que a função exponencial de base $a > 0$ é estritamente crescente, ao passo que a função exponencial de base $a \in (0, 1)$ é estritamente decrescente.

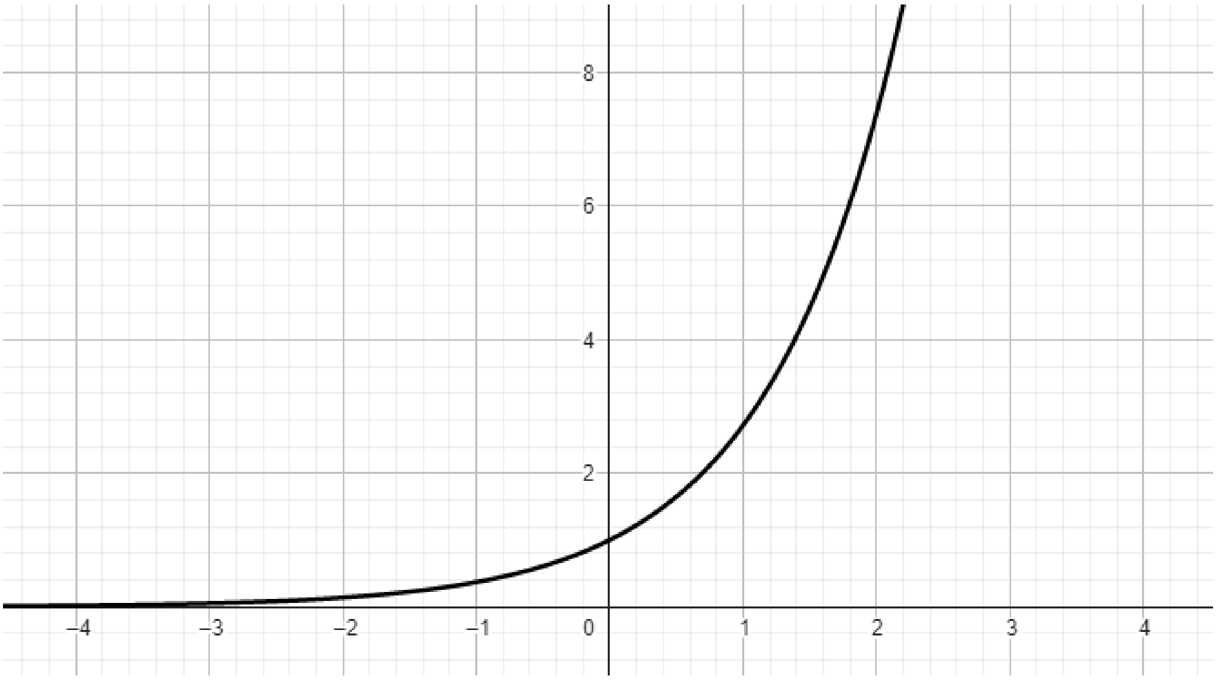
A seguir, apresenta-se os gráficos da função $f(x) = a^x$ para $a = 2$, $a = e$, $a = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{10}$, respectivamente as Figuras 6, 7, 8 e 9.

Figura 6 – Gráfico da função $f(x) = 2^x$



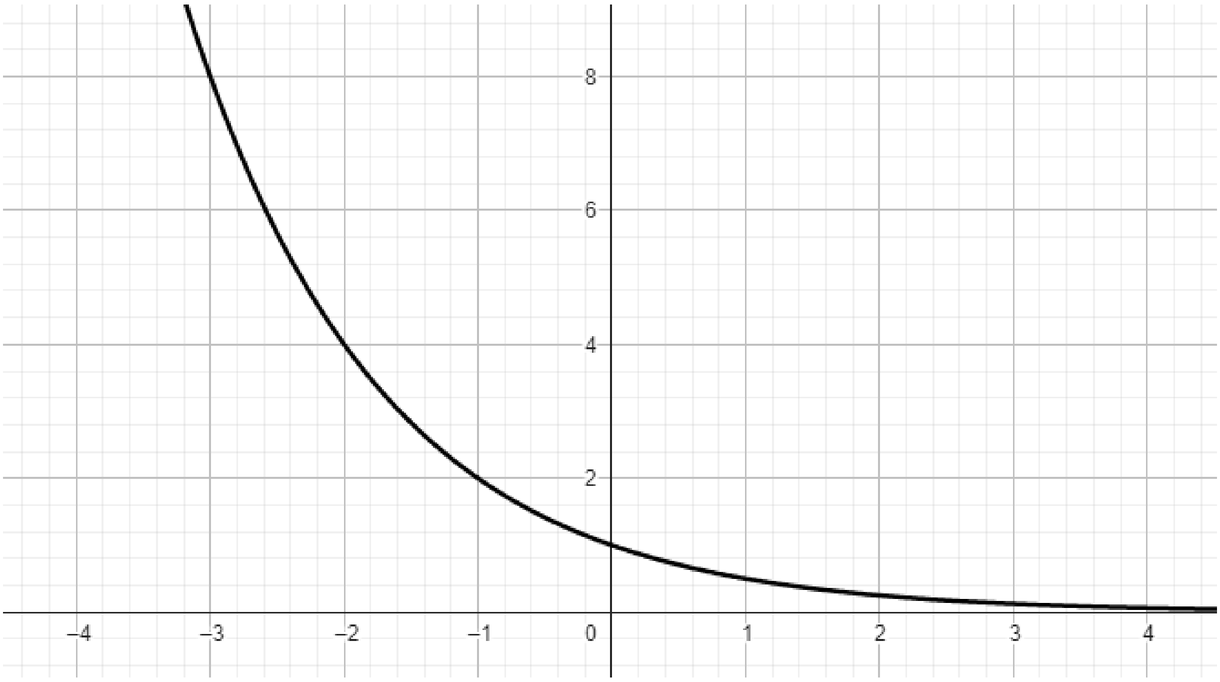
Fonte: O autor

Figura 7 – Gráfico da função $f(x) = e^x$



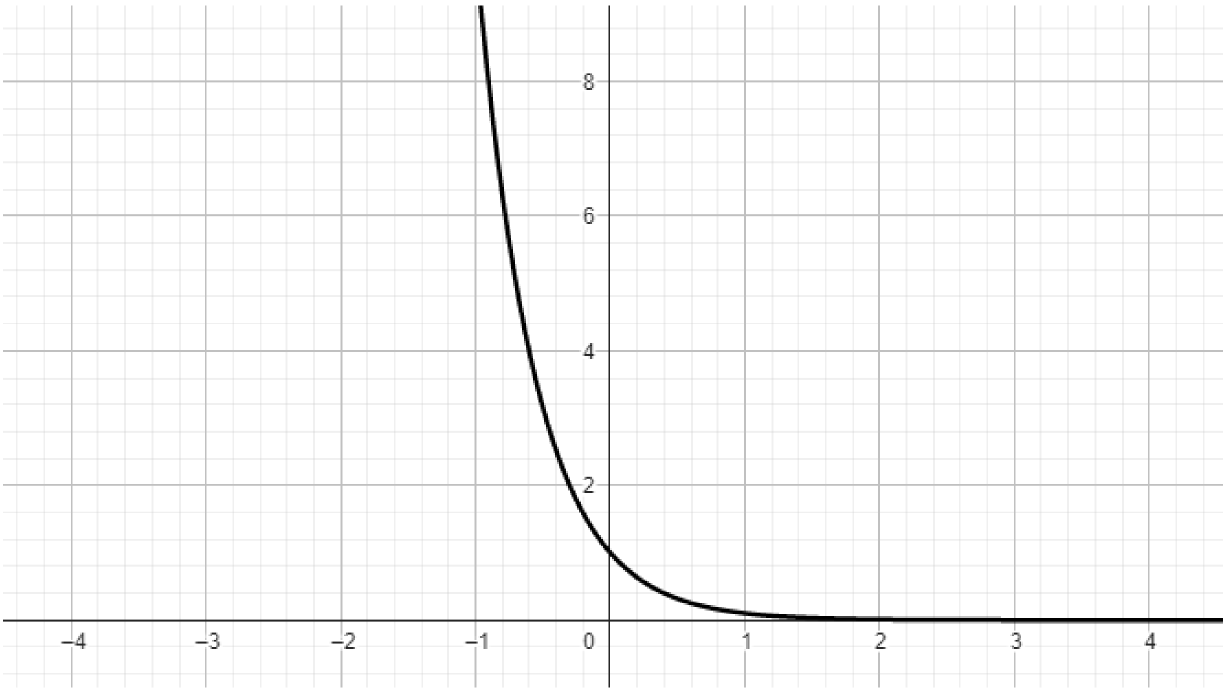
Fonte: O autor

Figura 8 – Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Fonte: O autor

Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$



Fonte: O autor

2.4. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Definição 2.37 (definição de função inversa)*:*

A função $g: Y \longrightarrow X$ é chamada de inversa da função $f: X \longrightarrow Y$, e escreve-se $g = f^{-1}$, quando $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Ou seja, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ e $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.

Proposição 2.38:

Sejam duas funções $f: X \longrightarrow Y$ e $g: Y \longrightarrow X$. Se g é inversa da função f, então f é inversa da função g.

Demonstração:

De imediato, da *Definição 2.37*, a bimplicação garante tal propriedade.

Proposição 2.39:

Uma função $f: X \longrightarrow Y$ é uma bijeção se, e somente se, ela possui uma inversa.

Demonstração:

Inicialmente, supõe-se que f possua uma inversa g. Logo, ao tomar $x_1, x_2 \in X$, tem-se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g\left(f(x_1)\right) = g\left(f(x_2)\right) \Rightarrow x_1 = x_2$, ou seja, f é injetiva. Ainda, a igualdade $f\left(g(y)\right) = y$, por ser válida para todo $y \in Y$, implica que $\exists x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$, ou seja, f é sobrejetiva, de modo que f é uma bijeção.

Reciprocamente, supõe-se que f uma função bijetora. Como f é sobrejetora, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ainda, como f é injetora, tal x é único. É possível colocar, portanto, $x = g(y)$. Logo, $g: Y \longrightarrow X$ é uma função que associa a cada $y \in Y$ um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Pela *Definição 2.37*, g é a inversa de f.

Proposição 2.40 (definição de função logarítmica)*:*

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. A função $g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, denotada por $g(x) = \log_a x$ e chamada de função logarítmica de base a, é a inversa da função exponencial de base a.

Demonstração:

De fato, a função exponencial de base a denotada por $f(x) = a^x$ possui inversa pois, pela *Proposição 2.35*, f é uma bijeção. Seja $g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tal função inversa de f.

Pela *Definição 2.37*, a função g associaria à potência a^x seu expoente x, de modo que $g(a^x) = x$. Mas, como já previamente definido neste capítulo, o logaritmo de base $a \in \mathbb{R}_+^*$ do logartimando $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_a b$, associa à potência $a^x = b$ seu expoente x, de modo que $\log_a b = x$.

Logo, $g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função logarítmica de base a expressa pela lei $g(x) = \log_a x$.

A BNCC (BRASIL, 2018, p.544), no que tange as habilidades propostas para o Ensino Médio, ressalta a importância de relacionar as funções exponencial e logarítmica. O estudante precisa ser capaz de

> Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

Proposição 2.41:

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ e a função logarítmica de base a, $g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Então:

$$\boldsymbol{g(x \cdot y) = g(x) + g(y)}$$

Demonstração:

De fato, $g(x \cdot y) = \log_a(x \cdot y)$. Da *Proposição 2.20*, $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y = g(x) + g(y)$.

Tal qual a função exponencial tinha a utilidade de transformar somas em produtos, a função logarítmica faz o contrário: transforma produtos em somas. Esta propriedade foi o que popularizou o uso dos logaritmos e das funções logarítmicas desde a introdução dos logaritmos, pelo mesmo motivo, no século XVII.

Na BNCC (BRASIL, 2018), o logaritmo e as funções logarítmicas são mencionadas com o intuito de relacioná-las com seu potencial para resolver a elaborar problemas em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros, e de interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas. Ou seja, perde-se o fator praticidade de cálculo, pois as calculadoras agora cumprem tal papel, mas permanece sua importância para a modelagem de fenômenos e aplicações físicas.

As funções logarítmicas mais utilizadas no Ensino Médio são aquelas de base $a = 10$, chamadas de funções logarítmicas decimais, e as de base $a = 2$, ditas funções logarítmicas binárias. Costuma-se também utilizar as funções logarítmicas naturais, ou neperianas, de base $a = e$. Esta última, inclusive, é a mais adequada para modelar situações de cunho científico.

A *Proposição 2.27* permite que se migre para a base que for mais conveniente. Por exemplo, ao tomar $g(x) = \log_a x$ e $h(x) = \log_b x$, tem-se $g(x) = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x$. Do *Corolário 2.28*, segue que $g(x) = \log_a b \cdot \log_b x$. Logo, $g(x) = \log_a b \cdot h(x)$, ou seja, toda função logarítmica de base a é equivalente a uma função logarítmica de base b multiplicada pelo fator $\log_a b$, proveniente da mudança de base.

Proposição 2.42:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. A função logarítmica de base a, $g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, é uma bijeção.

Demonstração:

Segue de imediato das *Proposições 2.39* e *2.40*. De fato, como a função logarítmica de base a, $g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, é a inversa da função exponencial de base a, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, tem-se que f também é inversa de g. E como g possui uma inversa, g é uma bijeção.

Para analisar o comportamento da função logarítmica de base a, $g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, considera-se inicialmente $a > 1$.

De imediato, $g(1) = \log_a 1 = 0$, e conclui-se que $(1, 0)$ é um ponto do gráfico de g, ou seja, o gráfico cruza o eixo das abscissas em $x = 1$. No entanto, $g(0)$ é indeterminado, pois 0 não é um elemento de $\mathbb{R}_+^*$, isto é, do domínio da função. Logo, g não cruza o eixo das ordenadas.

Em seguida, toma-se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $x_1 < x_2$. Tem-se, da *Proposição 2.19*, $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$. Por absurdo, supõe-se que $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Da propriedade **(iii)** da *Definição 2.29*, teria-se $a^{\log_a x_1} > a^{\log_a x_2}$, o que é uma contradição. Segue que $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Logo, para bases $a > 1$, a função logarítmica $g(x) = \log_a x$ é estritamente crescente.

Proposição 2.43:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a > 1$ e a função logarítmica de base a $g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Então:

(I) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$;

(II) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$.

Demonstração:

Para **(I)**, dado $M > 0$, toma-se $\delta = a^M$. Tem-se que:

$$x > \delta \Rightarrow g(x) = \log_a x > \log_a a^M = M$$

Para **(II)**, toma-se $x = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{x} = t$, de modo que $x \to 0^+ \Rightarrow t \longrightarrow +\infty$. Segue que:

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \lim_{t\to +\infty} \log_a \frac{1}{t} = \lim_{t\to +\infty} \log_a t^{-1} =$$
$$= \lim_{t\to +\infty} -\log_a t = -\lim_{t\to +\infty} \log_a t = -(+\infty) = -\infty$$

Ou seja, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical da função $g(x) = \log_a x$, $a > 1$.

Por fim, analisa-se as funções logarítmicas $g(x) = \log_a x$, com $0 < a < 1$.

De modo análogo ao que se sucedeu no caso anterior, $g(1) = \log_a 1 = 0$, ou seja, o gráfico da função cruza o eixo das abscissas em $x = 1$ e $g(0)$ ainda é indeterminado, de modo que o gráfico de g não cruza o eixo das ordenadas.

Tomando novamente $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $x_1 < x_2$, tem-se, da *Proposição 2.19*, que $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$. Mais uma vez, assume-se, por absurdo, que $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Deste modo, pela propriedade **(iii)** da *Definição 2.29*, teria-se $a^{\log_a x_1} > a^{\log_a x_2}$, o que é uma contradição. Assim, $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Prova-se, portanto, que para bases $a \in (0, 1)$ a função logarítmica $g(x) = \log_a x$ é estritamente decrescente.

Proposição 2.44:

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < a < 1$ e a função logarítmica de base a $g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Então:

(III) $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$;

(IV) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.

Demonstração:

Para **(III)**, ao tomar $b > 1$ tal que $b = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{b}$ e aplicando a *Proposição 2.26*, tem-se:

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = \lim_{x\to +\infty} \log_{\frac{1}{b}} x = \lim_{x\to +\infty} \log_{b^{-1}} x =$$
$$\lim_{x\to +\infty} -\log_b x = -\lim_{x\to +\infty} \log_b x = -(+\infty) = -\infty$$

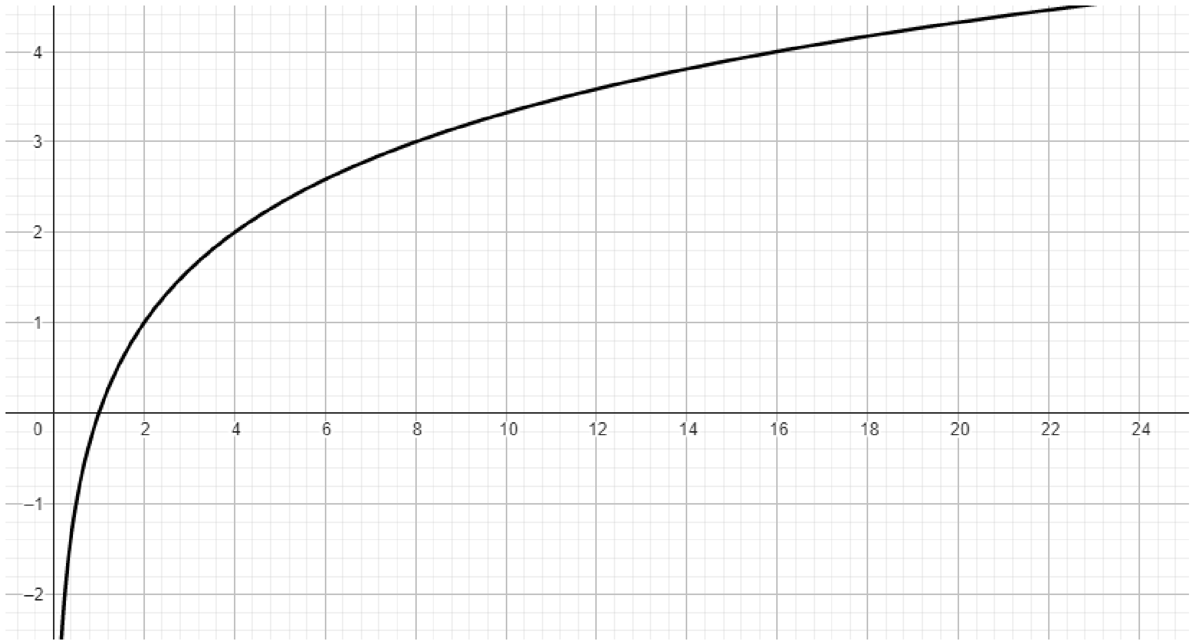
Para **(IV)**, toma-se $x = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{x} = t$, de modo que $x \to 0^+ \Rightarrow t \longrightarrow +\infty$. Segue que:

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \lim_{t\to +\infty} \log_a \frac{1}{t} = \lim_{t\to +\infty} \log_a t^{-1} =$$
$$= \lim_{t\to +\infty} -\log_a t = -\lim_{t\to +\infty} \log_a t = -(-\infty) = +\infty$$

Ou seja, a reta $x = 0$ é também uma assíntota vertical de toda função $g(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$.

As Figuras 10, 11, 12 e 13 abaixo ilustram, respectivamente, os gráficos da função $g(x) = \log_a x$ para $a = 2$, $a = e$, $a = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{10}$

Figura 10 – Gráfico da função $g(x) = \log_2 x$

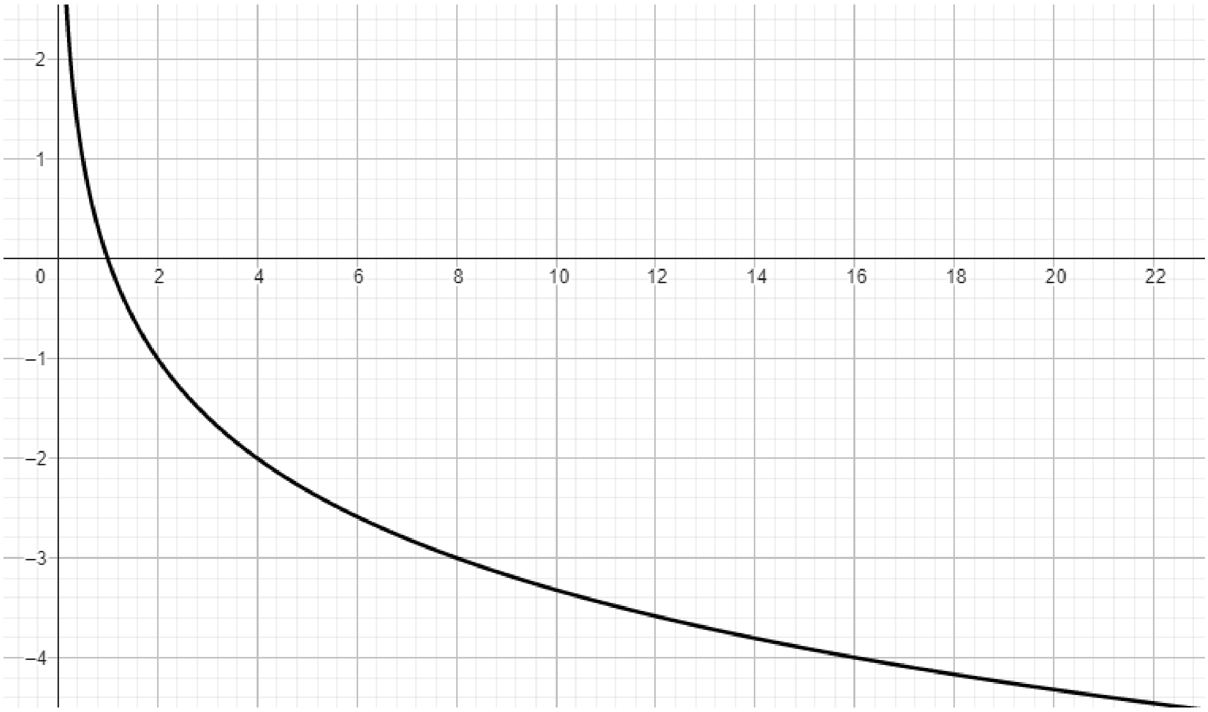


Fonte: O autor

Figura 11 – Gráfico da função $g(x) = \ln x$

Fonte: O autor

Figura 12 – Gráfico da função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



Fonte: O autor

Figura 13 – Gráfico da função $g(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

Fonte: O autor

CAPÍTULO 03 – SELEÇÃO E ANÁLISE DAS QUESTÕES DO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, apresenta-se os critérios de seleção e da classificação das questões do ENEM que foram analisadas e serviram como base para a construção das estratégias para o ensino de logaritmos, produto final desta dissertação. Ademais, apresenta-se também uma resolução detalhada de cada uma delas, com comentários que as relacionam entre si e com conteúdos do Ensino Fundamental e Médio. Tais questões foram retiradas diretamente dos cadernos de questões disponibilizados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) em sua plataforma digital. As resoluções propostas para cada questão selecionada foram construídas a partir das definições e proposições previamente expostos no *Capítulo 02*.

3.1. SELEÇÃO DAS QUESTÕES

Para que a seleção contemplasse os objetivos principais deste trabalho, optou-se por analisar as provas do Exame Nacional do Ensino Médio a partir de 2009, data que marcou sua reformulação a partir da nova Matriz de Referência (BRASIL, 2025c) proposta pelo Ministério da Educação com o intuito de "ser utilizado como mecanismo de acesso à educação superior" (BRASIL, 2025a), até 2023, o ano em que este trabalho começou a ser desenvolvido.

De 2009 a 2023 foram aplicadas, ao todo, 31 provas do ENEM, sendo 15 aplicações regulares, 15 reaplicações (a chamada aplicação PPL – para pessoas privadas de liberdade – a cada ano a partir de 2010 e uma segunda reaplicação em 2014) e o ENEM digital de 2020, cuja prova foi diferente da aplicação regular, apesar de ter sido realizada no mesmo dia.

As 45 questões de cada uma das 31 provas de Matemática e suas Tecnologias foram analisadas na íntegra. Para a seleção das questões que foram analisadas e resolvidas neste capítulo e usadas como base para a proposta desta dissertação, utilizou-se os critérios de inclusão que constam na Tabela 1. Tais critérios contemplam uma característica da Teoria da Aprendizagem Significativa que já foi abordada anteriormente no texto deste trabalho: os conhecimentos prévios, aqueles que os estudantes já supostamente possuem, e como eles estão organizados em suas estruturas cognitivas devem ser levados em consideração.

Isso significa que, para que um estudante manipule expressões ou resolva equações logarítmicas, ele precisa ter um considerável domínio de tópicos relacionados a expressões e equações exponenciais, que por sua vez demandam conhecimento das propriedades da potenciação e da radiciação. Estas, por sua vez, dependem do conhecimento dito "básico" de operar números reais utilizando as quatro operações básicas: adição, subtração multiplicação e divisão. Ou seja, toda a proposta deste trabalho demanda uma extensa lista de conhecimentos prévios.

Tabela 1 – Critérios para inclusão de questões

Ordem	**Critério**
1°	A questão envolvia conhecimentos de potenciação, logaritmação, logaritmos, função exponencial, função logarítmica e suas aplicações.
2°a	A questão envolvia a resolução de equações ou inequações exponenciais como forma de manipular uma função logarítmica.
2°b	A questão envolvia a resolução de equações ou inequações logarítmicas ou a aplicação de propriedades dos logaritmos como forma de manipular uma função ou expressão exponencial ou logarítmica.

Fonte: O autor

Deve ficar claro que questões que demandavam ao estudante apenas conhecimentos relativos à potenciação ou às funções ou resolução de equações ou inequações exponencias que não necessitavam de logaritmos diretamente não foram selecionadas. As análises a serem feitas nesta dissertação terão como foco os logaritmos, a operação de logaritmação, as propriedades dos logaritmos, as funções logarítmicas e as aplicações de todos os tópicos anteriormente citados na resolução de equações e inequações ou na interpretação de funções exponenciais, quando necessário.

Com base nestes critérios, foram encontradas 18 questões dentre as 1395 analisadas, o que representa uma frequência relativa de aproximadamente 1,29% e uma média de 0,58 questão por prova.

Ainda observando os dados quantitativos obtidos, é possível perceber que, de 2009 a 2015, apenas três questões envolvendo logaritmos ou a operação de logaritmação haviam figurado nas provas (em 2011, 2013 e 2015). Este número muda significativamente a partir de 2016: deste ano até 2020 houve pelo menos uma questão por ano, seja na aplicação regular ou na reaplicação. De 2017 a 2019, inclusive, a incidência foi a mais substancial: os três anos registraram, ao todo, dez questões de logaritmos, mais da metade do total absoluto. A partir de 2021, a quantidade voltou a oscilar. Em 2022, por exemplo, nenhuma questão figurou em nenhuma das duas provas (regular ou reaplicação).

A análise destes dados permite que se tire algumas conclusões prévias. Apesar do ENEM ser uma prova cujas questões seguem um padrão, seja no estilo dos enunciados ou das resoluções, não há como prever, com precisão, a quantidade de questões de logaritmos ou que utilizem a operação de logaritmação que estarão presentes em cada ano. O conteúdo não é popular, vide a baixa frequência relativa de incidência nos últimos 15 anos, mas ainda assim dispõe de uma gama de questões com vários níveis de dificuldades, que demandam do estudante, principalmente, o domínio das propriedades dos logaritmos e da definição a fim de resolver equações tanto logarítmicas quanto exponenciais e analisar funções.

3.2. RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES

A partir deste ponto, busca-se analisar as 18 questões selecionadas e esmiuçar suas resoluções. Todas elas podem ser encontradas nos cadernos de questões de cor amarela, disponibilizados pelo INEP em sua página digital[1]. O número e ano da questão original foram informados, bem como o tipo de aplicação em que ela figurou. Contudo, para uso exclusivo neste e no *Capítulo 04* desta dissertação, as questões foram enumeradas de 1 a 18, em ordem cronológica de aparecimento nas provas, objetivando facilitar suas identificações.

QUESTÃO 01. (questão 139, ENEM 2011, aplicação regular)

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim com a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmica (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

[1] https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. **USGS Earthquake Magnitude Policy**.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina·cm)?

(a) $10^{-5,10}$

(b) $10^{-0,73}$

(c) $10^{12,00}$

(d) $10^{21,65}$

(e) $10^{27,00}$

Esta é uma questão clássica de função, onde o enunciado deixa bastante claro o que se precisa fazer: encontrar M_0 dado M_w a partir da fórmula. Ela não demanda do estudante extensas manipulações algébricas ou o uso de muitas propriedades.

Resolução:

Utilizando os princípios da igualdade e a *Definição 2.16*, obtém-se:

$$M_w = 7{,}3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0) = 7{,}3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(M_0) = 18 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_{10}(M_0) = 27 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_0 = 10^{27}$$

Logo, o momento sísmico do terremoto foi de 10^{27} dina·cm.

QUESTÃO 02. (questão 162, ENEM 2013, aplicação regular)

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

(a) 27

(b) 36

(c) 50

(d) 54

(e) 100

Apesar de ser uma questão que possui como objeto inicial de estudo uma função exponencial, há a necessidade de utilizar a definição e as propriedades dos logaritmos. A função apresenta dois parâmetros desconhecidos (A e k), mas o valor de apenas um deles é necessário para concluir a questão. Este é um dos motivos de sua resolução demandar muito mais manipulação algébrica, o que a torna mais complexa que a *Questão 01*.

Resolução:

Utilizando as propriedades da igualdade, a *Definição 2.16*, a *Proposição 2.23*, a *Proposição 2.27*, o *Corolário 2.28* e a substituição proposta no enunciado, tem-se:

$$M(30) = \frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot (2{,}7)^{30k} = \frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2{,}7)^{30k} = 2^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30k = \log_{2,7}(2^{-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30k = \frac{\log_{10}(2^{-1})}{\log_{10}(2{,}7)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30k = \frac{-\log_{10} 2}{\log_{10}(2{,}7)}$$

$$\Rightarrow 30k = \frac{-0{,}3}{\log_{10}(2{,}7)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{\log_{10}(2{,}7)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{100} \log_{2,7} 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \log_{2,7} 10^{-\frac{1}{100}}$$

Segue que a função assume a forma $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{t \cdot \log_{2,7} 10^{-\frac{1}{100}}}$. Utilizando a *Proposição 2.4*, a *Proposição 2.23* e a *Proposição 2.24*, pode-se simplificar a expressão de M em função de t e encontrar:

$$t \cdot \log_{2,7} 10^{-\frac{1}{100}} = \log_{2,7} \left[10^{-\frac{1}{100}}\right]^t = \log_{2,7} 10^{-\frac{1}{100}t}$$

Assim sendo:

$$\Rightarrow M(t) = A \cdot (2{,}7)^{t \cdot \log_{2,7} 10^{-\frac{1}{100}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(t) = A \cdot (2{,}7)^{\log_{2,7} 10^{-\frac{1}{100}t}} \Rightarrow$$

$$M(t) = A \cdot 10^{-\frac{1}{100}t}$$

Por fim, a questão pede o tempo necessário para que a quantidade de massa se reduza à 10% da quantidade inicial. Ou seja, deseja-se saber t tal que $M(t) = 0{,}1 \cdot A$. Utilizando os princípios da igualdade e a *Proposição 2.34*, tem-se:

$$M(t) = 0{,}1 \cdot A \Rightarrow$$

$$A \cdot 10^{-\frac{1}{100}t} = 0{,}1 \cdot A \Rightarrow$$

$$10^{-\frac{1}{100}t} = 10^{-1} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{100}t = -1 \Rightarrow$$

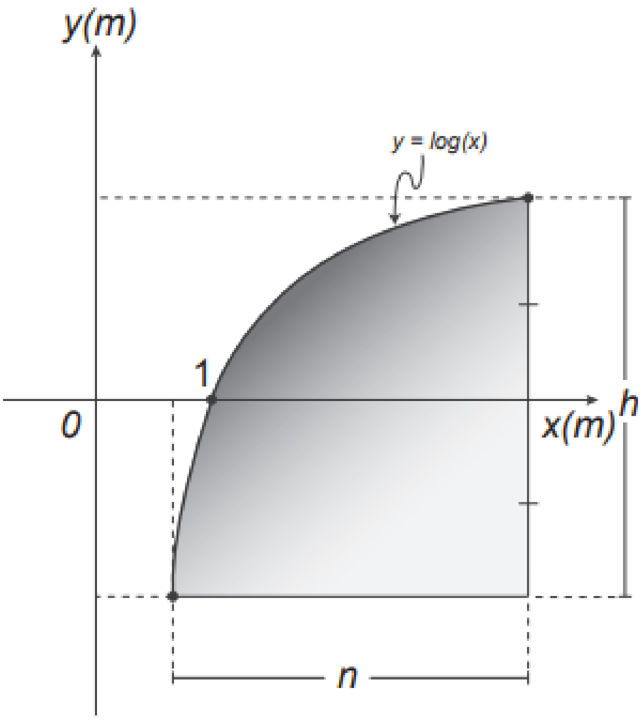
$$t = 100$$

Logo, são necessários exatamente 100 anos para a quantidade de césio-137 reduzir-se a 10% de sua quantidade inicial.

É inevitável um adendo. A sequência de passos utilizada para resolver esta questão parece extensa, complexa e potencialmente cheia de armadilhas para que os alunos errem manipulações ou sinais. No entanto, um aluno com domínio das propriedades e de posse de uma estrutura cognitiva onde as etapas lógicas do processo de resolver equações fazem sentido consegue desenvolver tal resolução muito mais rapidamente, omitindo passos que aqui foram considerados em sua totalidade.

QUESTÃO 03. (questão 165, ENEM 2015, aplicação regular)

Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva da equação $y = \log x$, conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão que determina a altura do vidro é

(a) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

(b) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) - \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

(c) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) + \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

(d) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

(e) $2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

Uma questão deste porte demanda cálculos e manipulações muito mais complexas que as utilizadas nas *Questões 01* e *02*. É necessário introduzir um terceiro parâmetro, não apresentada no enunciado, para logo em seguida eliminá-lo e deparar-se com uma equação fracionária exponencial literal quadrática, que demanda substituições para que seja resolvida.

Resolução:

Sejam os pontos A e B que indicam o início e o fim da curva que delimita o vidro, respectivamente. Se o ponto A possui abcissa k, então sua ordenada é $f(k) = \log k$. De modo análogo, o ponto B terá abcissa $k + n$ e ordenada $f(k + n) = \log(k + n)$. Contudo, como o eixo x divide a altura h do vidro em duas partes iguais, tem-se:

$$\begin{cases} \log k = -\dfrac{h}{2} \\ \log(k + n) = \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

Aplicando a *Definição 2.16*, segue que:

$$\begin{cases} k = 10^{-\frac{h}{2}} \\ k + n = 10^{\frac{h}{2}} \end{cases}$$

Chama-se a equação $k = 10^{-\frac{h}{2}}$ de **(I)** e a equação $k + n = 10^{\frac{h}{2}}$ de **(II)**. Assim, substituindo **(I)** em **(II)**, aplicando os princípios da igualdade, a *Definição 2.6* e fazendo a substituição $10^{\frac{h}{2}} = a$, obtém-se:

$$10^{-\frac{h}{2}} + n = 10^{\frac{h}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10^{\frac{h}{2}}} + n = 10^{\frac{h}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + n = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + na = a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - na - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 4}}{2} \Rightarrow a = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

O último passo da resolução proposta se justifica pelo fato de $a = 10^{\frac{h}{2}} > 0$ e $\sqrt{n^2 + 4} > n \Rightarrow n - \sqrt{n^2 + 4} < 0 \Rightarrow \frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2} < 0$, o que é uma contradição. Permanece apenas $\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$, que é positivo.

Por fim, utilizando mais uma vez a *Definição 2.16* e os princípios da igualdade, segue que:

$$10^{\frac{h}{2}} = \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{h}{2} = \log\left(\frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = 2\log\left(\frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}\right)$$

Logo, a expressão, em função de n, que determina a altura do vidro é $2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$.

QUESTÃO 04. (questão 145, ENEM 2016, aplicação regular)

Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de $3000°C$ e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 minutos.

Use $0{,}477$ como aproximação para $\log_{10}(3)$ e $1{,}041$ como aproximação para $\log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja $30°C$ é mais próximo de

(a) 22
(b) 50
(c) 100
(d) 200
(e) 400

Esta questão, apesar de a partir de certo ponto ter a resolução semelhante à da *Questão 02*, não dá ao estudante a expressão da função que relaciona o tempo e a temperatura. Por isso, o estudante precisa determinar tal lei de formação a partir de experiências prévias e processos indutivos, além de resolver uma equação exponencial que demanda manipulações utilizando algumas das propriedades dos logaritmos.

Resolução:

O resfriamento de uma liga metálica com o passar do tempo pode ser modelado por uma função do tipo exponencial $T(t) = T_0 \cdot a^{kt}$, onde T é a temperatura da liga após t horas, T_0 é a temperatura inicial da liga, k é uma constante negativa que ajusta a variável tempo e a é uma constante que se relaciona com taxa de diminuição da temperatura, conforme a *Seção 1.4.3*.

Como a temperatura diminui 1% a cada 30 minutos, tem-se que, a cada meia hora, a temperatura é multiplicada pelo fator de desconto $1 - 0{,}01 = 0{,}99$, ou seja, $a = 0{,}99$. Ainda, como a redução ocorre a cada meia hora, em uma hora ela sofre duas reduções de 1%, de modo que $k = 2$. Assim, $T(t) = 3000 \cdot 0{,}99^{2t}$.

A partir de então, basta determinar t tal que $T(t) = 30°C$. Aplicando os princípios da igualdade, a *Definição 2.16*, a *Proposição 2.20*, a *Proposição 2.22*, a *Proposição 2.24*, a *Proposição 2.25* e a *Proposição 2.27* e substituindo as aproximações dadas no enunciado, tem-se:

$$T(t) = 30 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3000 \cdot 0{,}99^{2t} = 30 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}99^{2t} = \frac{1}{100} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}99^{2t} = \frac{1}{100} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2t = \log_{0{,}99}\left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2t = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right)}{\log_{10}(0{,}99)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2t = \frac{\log_{10}(10^{-2})}{\log_{10}\left(\frac{3^2 \cdot 11}{10^2}\right)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2t = \frac{-2}{\log_{10}(3^2) + \log_{10}(11) - \log_{10}(10^2)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2t = \frac{-2}{2 \cdot \log_{10} 3 + 1{,}041 - 2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2t = \frac{-2}{2 \cdot 0{,}477 - 0{,}959} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2t = \frac{-2}{-0{,}005} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2t = 400 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = 200$$

Logo, são necessárias, aproximadamente, 200 horas para que a liga atinja a temperatura de $30°C$.

QUESTÃO 05. (questão 174, ENEM 2016, aplicação regular)

Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual é a relação entre E_1 e E_2?

(a) $E_1 = E_2 + 2$

(b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$

(c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$

(d) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$

(e) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

A questão não demanda tantas manipulações ou o uso de propriedades não convencionais como as questões anteriores, mas exige que o estudante, além de conhecimentos sobre potências e logaritmos, também saiba trabalhar com a ideia de comparar duas grandezas a partir da razão entre elas. Tanto esta questão quanto a *Questão 04*, as duas de níveis de dificuldade bastante diferentes, figuraram juntas na aplicação regular de 2016.

Resolução:

Seja a situação do Japão. Tem-se $M_1 = 9$. Substituindo tal informação na expressão dada no enunciado e aplicando os princípios da igualdade e a *Definição 2.16*, tem-se:

$$M_1 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) = \frac{27}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_0} = 10^{\frac{27}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 = 10^{\frac{27}{2}} \cdot E_0$$

Trabalhando de modo análogo com a situação da China, com $M_2 = 7$. tem-se:

$$M_2 = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \log \left(\frac{E_2}{E_0} \right) = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{E_2}{E_0} \right) = \frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_0} = 10^{\frac{21}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_2 = 10^{\frac{21}{2}} \cdot E_0$$

De modo a comparar E_1 e E_2, calcula-se a razão entre os dois valores. Aplicando os princípios da igualdade e a *Proposição 2.7*, encontra-se:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{\frac{27}{2}} \cdot E_0}{10^{\frac{21}{2}} \cdot E_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^3 \Rightarrow E_1 = 10^3 \cdot E_2$$

Logo, a relação entre E_1 e E_2 é tal que $E_1 = 10^3 \cdot E_2$.

QUESTÃO 06. (questão 145, ENEM 2017, aplicação regular)

Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de $R\$5000{,}00$. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, $R\$400{,}00$ mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize $0{,}005$ como aproximação para $\log 1{,}013$; $2{,}602$ como aproximação para $\log 400$; $2{,}525$ como aproximação para $\log 335$.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

(a) 12

(b) 14
(c) 15
(d) 16
(e) 17

Esta é mais uma questão que, apesar do enunciado parecer confuso, possui uma resolução que não demanda manipulações extensas ou o uso de propriedades pouco comuns. O que há de diferente, no entanto, é a possibilidade de interpretar o problema como uma inequação, o que implica tomar cuidado redobrado com sinais, que são, na maioria das vezes, motivo dos equívocos cometidos pelos estudantes.

Resolução:

De acordo com o enunciado, está-se interessado em determinar n tal que $P \leq 400$. Segue que, aplicando os princípios das desigualdades, a *Definição 2.16*, a *Proposição 2.25* e a *Proposição 2.27*, usando as aproximações dadas e sabendo que $1{,}013^n > 1 \Rightarrow 1{,}013^n - 1 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$P \leq 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5000 \cdot 1{,}013^n \cdot 0{,}013}{1{,}013^n - 1} \leq 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{65 \cdot 1{,}013^n}{1{,}013^n - 1} \leq 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 65 \cdot 1{,}013^n \leq 400 \cdot 1{,}013^n - 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -335 \cdot 1{,}013^n \leq -400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}013^n \geq \frac{400}{335} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \log_{1{,}013}\left(\frac{400}{335}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log\left(\frac{400}{335}\right)}{\log 1{,}013} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log 400 - \log 335}{0{,}005} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{2{,}602 - 2{,}525}{0{,}005} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{0{,}077}{0{,}005} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq 15{,}4$$

Logo, o número mínimo de parcelas necessárias para que seu valor seja inferior a $R\$400{,}00$ é 16.

QUESTÃO 07. (questão 159, ENEM 2017, reaplicação)

Nas informações veiculadas nos órgãos de comunicação quando da ocorrência de um terremoto, faz-se referência à Magnitude (M), que se refere a quantos graus o fenômeno atingiu na escala Richter. Essa medida quantifica a energia liberada no epicentro do terremoto, e em seu cálculo utilizam-se como parâmetros as medidas da amplitude sísmica (A), em micrômetro, e da frequência (f), em hertz. Esses parâmetros são medidos por aparelhos especiais chamados sismógrafos, e relacionam-se segundo a função $M = \log(A \times f) + 3{,}3$. Pela magnitude do terremoto na escala Richter, pode-se estimar seus efeitos de acordo com o quadro, onde não estão considerados terremotos de magnitudes superiores a 7,9.

Magnitude (Grau)	Efeitos do terremoto segundo a escala Richter
M ≤ 3,5	Registrado (pelos aparelhos), mas não perceptível pelas pessoas.
3,5 < M ≤ 5,4	Percebido, com pequenos tremores notados pelas pessoas.
5,4 < M ≤ 6,0	Destrutivo, com consequências significativas em edificações pouco estruturadas.
6,0 < M ≤ 6,9	Destrutivo, com consequências significativas para todo tipo de edificação.
6,9 < M ≤ 7,9	Destrutivo, retiram os edifícios de suas fundações, causam fendas no solo e danificam as tubulações contidas no subsolo.

Um terremoto teve sua amplitude e frequências medidas o obteve-se $A = 1000$ micrômetros e $f = 0{,}2$ hertz.

Use $-0{,}7$ como aproximação para $\log(0{,}2)$.

Disponível em: www.mundoeducação.com.br. Acesso em: 11 jul. 2012 (adaptado).

Considerando o quadro apresentado, e analisando o resultado da expressão que fornece a magnitude desse terremoto, conclui-se que ele foi

(a) registrado, mas não percebido pelas pessoas.

(b) percebido, com pequenos tremores notados pelas pessoas.

(c) destrutivo, com consequências significativas em edificações pouco estruturadas.

(d) destrutivo, com consequências significativas para todo tipo de edificação.
(e) destrutivo, com consequências nas fundações dos edifícios, fendas no solo e tubulações no subsolo.

Pela primeira vez após sete anos desde a reformulação, esta é a primeira questão que carece de logaritmos para ser resolvida figurando em uma reaplicação do ENEM. Não apenas isso, mas ela é relativamente mais fácil que qualquer uma das outras seis que haviam sido cobradas até então. É uma das clássicas questões de função, onde dados os valores de suas variáveis independentes (neste caso duas, amplitude e frequência, mas a função de duas variáveis pouco impacta na dificuldade da questão), objetiva-se descobrir o valor da variável dependente (magnitude).

Resolução:

Seja a função $M(A, f) = \log(A \cdot f) + 3{,}3$, dada no enunciado. Aplicando a *Proposição 2.20* e a *Proposição 2.24* e a aproximação dada, tem-se:

$$\begin{gathered} M(1000; 0{,}2) = \log(1000 \cdot 0{,}2) + 3{,}3 = \\ = \log 1000 + \log 0{,}2 + 3{,}3 = \\ = \log 10^3 + (-0{,}7) + 3{,}3 = \\ = 3 - 0{,}7 + 3{,}3 = \\ = 5{,}6 \end{gathered}$$

Logo, como $5{,}4 < M \leq 6{,}0$, o terremoto pode ser classificado como destrutivo, com consequências significativas em edificações pouco estruturadas.

QUESTÃO 08. (questão 165, ENEM 2018, aplicação regular)

Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1 + i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de $R\$820{,}00$, a uma taxa de juros de $1{,}32\%$ ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize $0{,}2877$ como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e $0{,}0131$ como aproximação para $\ln(1{,}0132)$.

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a $30^{\underline{a}}$ é a

(a) $56^{\underline{a}}$

(b) $55^{\underline{a}}$

(c) $52^{\underline{a}}$

(d) $51^{\underline{a}}$

(e) $45^{\underline{a}}$

Esta é uma questão de dificuldade análoga às *Questões 02* e *03*. Sua dificuldade não se dá por conta da resolução, que repete o passo-a-passo da resolução de uma equação exponencial onde é necessário aplicar a definição de logaritmo, mas no fato do enunciado trazer informações que podem gerar equívocos na montagem.

Resolução:

Em resumo, o enunciado pede para se determinar n tal $P = 0{,}75 \cdot V \Rightarrow P = \frac{3}{4} \cdot V$, dado $i = 1{,}32\%$ ao mês, ou seja, $i = 0{,}0132$, onde $0{,}75$ é o fator de desconto correspondente a um desconto de 25%, pois $1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Como a parcela atual a ser paga é a $30^{\underline{a}}$, encontrando-se n, basta calcular $30 + n$ para encontrar a $(30 + n)^{\underline{a}}$ parcela a ser paga junto com a $30^{\underline{a}}$. Assim:

$$\begin{cases} V = P \cdot (1 + 0{,}0132)^n \\ P = 0{,}75 \cdot V \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V = P \cdot 1{,}0132^n \\ P = \dfrac{3}{4} \cdot V \end{cases}$$

Chama-se a equação $V = P \cdot 1{,}0132^n$ de **(i)** e a equação $P = \frac{3}{4} \cdot V$ de **(ii)**. Assim, substituindo **(ii)** em **(i)** e aplicando os princípios da igualdade, a *Definição 2.16*, a *Proposição 2.27* e as aproximações dadas no enunciado, tem-se:

$$V = \frac{3}{4} \cdot V \cdot 1{,}0132^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}0132^n = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \log_{1{,}0132}\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln(1{,}0132)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{0{,}2877}{0{,}0131} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 21{,}96\ldots \approx 22$$

Logo, a parcela a ser paga com a $30^{\underline{a}}$ para que o desconto fosse superior a 25% é a $(30 + 22)^{\underline{a}} = 52^{\underline{a}}$.

QUESTÃO 09. (questão 171, ENEM 2018, aplicação regular)

Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.

Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100000 transistores distribuídos em $0{,}25$ cm^2 de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponível em: www.pocket-lint.com. Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado)

Considere $0{,}30$ como aproximação para $\log_{10} 2$.

Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

(a) 1999
(b) 2002
(c) 2022
(d) 2026
(e) 2146

A segunda questão do ENEM de 2018 envolvendo resolução de equações exponenciais ou logarítmas a partir de funções é bastante similar à *Questão 04*. Ela possui o mesmo grau dificuldade e demanda ao estudante escrever uma expressão que represente a densidade de transistores com o passar dos anos, para então manipulá-la utilizando propriedades.

Resolução:

O crescimento de uma quantidade de elementos cuja variação é proporcional a quantidade de elementos em cada instante pode ser modelada por uma função do tipo exponencial $D(t) = D_0 \cdot a^{kt}$. Como no caso desta questão a densidade dobra a cada dois anos, podemos escrever $D(t) = D_0 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$, onde $k = \frac{1}{2}$ justifica-se a partir da informação que são necessários dois anos para que a densidade dobre uma única vez.

Sobre D_0, o enunciado informa que em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100000 transistores distribuídos em $0{,}25$ cm^2 de área, ou seja, considerando 1986 como $t = 0$, tem-se $D_0 = \frac{100000}{0{,}25} = 400000 = 4 \cdot 10^5$ transistores por cm^2. Logo, a função toma a forma $D(t) = 4 \cdot 10^5 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

Quer-se descobrir t tal que $D(t) = 100$ bilhões, ou seja, $D(t) = 100 \cdot 10^9 = 10^{11}$ transistores por cm^2. Assim, ao final da resolução, basta determinar o ano $1986 + t$. Aplicando as propriedades da igualdade, a *Definição 2.16*, a *Proposição 2.23*, a *Proposição 2.24*, a *Proposição 2.25*, o *Corolário 2.28* e a aproximação dada no enunciado, tem-se:

$$D(t) = 10^{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 10^5 \cdot 2^{\frac{t}{2}} = 10^{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = \frac{10^6}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} = \log_2\left(\frac{10^6}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} = \log_2(10^6) - \log_2 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} = 6\log_2 10 - \log_2 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} = 6 \cdot \frac{1}{\log_{10} 2} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} = 6 \cdot \frac{1}{0{,}3} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} = 20 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 36$$

Logo, a empresa atingiria a densidade de 100 bilhões de transistores em $1986 + 36 = 2022$.

QUESTÃO 10. (questão 149, ENEM 2018, reaplicação)

A água comercializada em garrafões pode ser classificada como muito ácida, ácida, neutra, alcalina ou muito alcalina, dependendo de seu pH, dado pela expressão

$$pH = \log_{10} \frac{1}{H}$$

em que H é a concentração de íons de hidrogênio, em mol por decímetro cúbico. A classificação da água de acordo com seu pH é mostrada no quadro.

pH	Classificação
$pH \geq 9$	Muito alcalina
$7,5 \leq pH < 9$	Alcalina
$6 \leq pH < 7,5$	Neutra
$3,5 \leq pH < 6$	Ácida
$pH < 3,5$	Muito ácida

Para o cálculo da concentração H, uma distribuidora mede dois parâmetros A e B, em cada fonte, e adota H como sendo o quociente de A e B. Em análise realizada em uma fonte, obteve $A = 10^{-7}$ e a água dessa fonte foi classificada como neutra.

O parâmetro B, então, encontrava-se no intervalo

(a) $(-10^{14,5}, -10^{13}]$

(b) $\left[10^{-\frac{6}{7}}, 10^{-1}\right)$

(c) $\left[10^{-1}, 10^{\frac{1}{2}}\right)$

(d) $[10^{13}, 10^{14,5})$

(e) $\left[10^{6\times10^7}, 10^{7,5\times10^7}\right)$

Esta é mais uma questão que demanda que o estudante escreva e resolva uma inequação logarítmica utilizando propriedades. Por mais que a montagem da expressão assuste, a resolução por si só é rápida e sem grandes manipulações.

Resolução:

Do enunciado, tem-se que $H = \frac{A}{B} \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{B}{A}$, de modo que a expressão dada assume a forma $pH = \log_{10} \frac{B}{A}$. Como a substância em questão foi classificada como neutra e $A = 10^{-7}$, tem-se:

$$6 \leq pH < 7,5 \Rightarrow$$

$$6 \leq \log_{10}\left(\frac{B}{10^{-7}}\right) < 7,5$$

A fim de facilitar a resolução e evitar equívocos, separa-se a resolução da inequação em duas partes.

Tomando a desigualdade à esquerda e aplicando os princípios das desigualdades e a *Definição 2.16*, tem-se:

$$6 \leq \log_{10}\left(\frac{B}{10^{-7}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10^6 \leq \frac{B}{10^{-7}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10^{-1} \leq B$$

Procedendo de maneira análoga com a desigualdade à direita, tem-se:

$$\log_{10}\left(\frac{B}{10^{-7}}\right) < 7{,}5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{B}{10^{-7}} < 10^{7{,}5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B < 10^{0{,}5} = 10^{\frac{1}{2}}$$

Logo, o parâmetro B é tal que $10^{-1} \leq B < 10^{\frac{1}{2}}$, ou seja, encontra-se no intervalo $\left[10^{-1}, 10^{\frac{1}{2}}\right)$.

QUESTÃO 11. (questão 169, ENEM 2018, reaplicação)

Em março de 2011, um terremoto de 9,0 graus de magnitude na escala Richter atingiu o Japão matando milhares de pessoas e causando grande destruição. Em janeiro daquele ano, um terremoto de 7,0 graus na escala Richter atingiu a cidade de Santiago Del Estero, na Argentina. A magnitude de um terremoto, medida pela escala Richter, é $R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, em que A é a amplitude do movimento vertical do solo, informado em um sismógrafo, A_0 é uma amplitude de referência e $\log$ representa o logaritmo na base 10.

Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

A razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é

(a) $1{,}28$

(b) $2{,}0$

(c) $10^{\frac{9}{7}}$

(d) 100

(e) $10^9 - 10^7$

Há uma semelhança clara entre esta questão e a *Questão 05*. As motivações de ambas são quase idênticas e o mesmo pode-se dizer das resoluções: nas duas é necessário manipular as funções logarítmicas dadas e calcular a razão entre as amplitudes dos terremotos.

Resolução:

Seja $R_1 = 9$ a magnitude no terremoto do Japão, associado a uma amplitude A_1, e $R_2 = 7$ a magnitude do terremoto da Argentina, associado a uma amplitude A_2. Assim, aplicando os princípios da igualdade e a *Definição 2.16*, tem-se, para o primeiro terremoto:

$$R_1 = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log\left(\frac{A_1}{A_0}\right) = 9$$
$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_0} = 10^9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1 = 10^9 \cdot A_0$$

De modo análogo, para o segundo terremoto, tem-se:

$$R_2 = 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log\left(\frac{A_2}{A_0}\right) = 7$$
$$\Rightarrow \frac{A_2}{A_0} = 10^7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_2 = 10^7 \cdot A_0$$

Por fim, escrevendo a razão $\frac{A_1}{A_2}$, aplicando os princípios da igualdade e a *Proposição 2.7*, encontra-se:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{10^9 \cdot A_0}{10^7 \cdot A_0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{10^9}{10^7} = 10^2 = 100$$

Logo, a razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é de 100.

QUESTÃO 12. (questão 140, ENEM 2019, aplicação regular)

A *Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com $pH < 7$) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com $pH > 7$) a flor é rosa. Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que $pH = -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H^+).

Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparam o solo de modo que x assuma

(a) qualquer valor acima de 10^{-8}.
(b) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.
(c) valores maiores que 7 e menores que 8.
(d) valores maiores que 70 e menores que 80.
(e) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

Mais uma vez, depara-se com uma questão que se assemelha muito a outra já cobrada em alguma das provas anteriores, ambas tratando do mesmo assunto e cuja resolução demanda os mesmos processos operatórios. De modo quase análogo à *Questão 10*, é necessário ao estudante que escreva uma inequação e a resolva usando propriedades dos logaritmos, encontrando como resposta um intervalo para a quantidade de íons de hidrogênio.

Resolução:

Com base nas informações do enunciado, tem-se como objetivo determinar a quantidade de íons de hidrogênio tal que o solo seja alcalino, mas com pH menor que 8. Assim:

$$7 < pH < 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7 < -\log_{10} x < 8$$

Para facilitar a resolução e evitar equívocos com sinais ou sentidos da desigualdade, sugere-se separar a inequação em duas partes. Trabalhando com a desigualdade à esquerda, aplicando os princípios das desigualdades e a *Definição 2.16*, tem-se:

$$7 < -\log_{10} x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -7 > \log_{10} x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10^{-7} > x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < 10^{-7}$$

Procedendo de maneira análoga com a desigualdade à direta, tem-se:

$$-\log_{10} x < 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_{10} x > -8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x > 10^{-8} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10^{-8} < x$$

Logo, a quantidade de íons de hidrogênio x deve ser tal que $10^{-8} < x < 10^{-7}$, ou seja, deve assumir valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

QUESTÃO 13. (questão 158, ENEM 2019, aplicação regular)

Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) (μm · Hz)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3{,}9$
Ligeiro	$4{,}0 \leq M_s \leq 4{,}9$
Moderado	$5{,}0 \leq M_s \leq 5{,}9$
Grande	$6{,}0 \leq M_s \leq 9{,}9$
Extremo	$M_s \geq 10{,}0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3{,}30 + \log(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto de amplitude máxima de 2000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Utilize 0,3 como aproximação para $\log 2$.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

(a) Pequeno.

(b) Ligeiro.

(c) Moderado.

(d) Grande.

(e) Extremo.

Esta não é a primeira vez desde a reformulação do ENEM que uma questão repete a temática de outra já abordada em anos anteriores, mas é a primeira vez que as equações dadas no enunciado e a resolução são praticamente idênticas, em específico à *Questão 07*. A resolução abaixo utiliza as mesmas proposições para operar com os logaritmos que a utilizada na *Questão 07*, mas opta por um caminho diferente no que tange a aproximação dada no problema.

Resolução:

Seja a função $M(A,f) = 3{,}30 + \log(A \cdot f)$, dada no enunciado. Utilizando a *Proposição 2.20*, a *Proposição 2.23* e a *Proposição 2.24* e a aproximação dada, tem-se:

$$M(2000; 0{,}2) = 3{,}30 + \log(2000 \cdot 0{,}2) =$$
$$= 3{,}3 + \log(400) =$$
$$= 3{,}3 + \log(4 \cdot 100) =$$
$$= 3{,}3 + \log 4 + \log 100 =$$
$$= 3{,}3 + \log 2^2 + \log 10^2 =$$
$$= 3{,}3 + 2 \cdot \log 2 + 2 = 3{,}3 + 2 \cdot 0{,}3 + 2 =$$
$$= 3{,}3 + 0{,}6 + 2 = 5{,}9$$

Logo, o terremoto pode ser calculado como moderado, pois $5{,}0 \leq 5{,}9 \leq 5{,}9$.

QUESTÃO 14. (questão 153, ENEM 2019, reaplicação)

Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h = 5 \cdot \log_2(t+1)$, em que t é o tempo contado em dia e h, a altura da planta em centímetro.

A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dia, ela alcançará sua altura máxima?

(a) 63

(b) 96

(c) 128

(d) 192

(e) 255

Pelo terceiro ano consecutivo, encontramos, na reaplicação do ENEM, questões que envolvem a manipulação de expressões com logaritmos ou a resolução de equações logarítmicas a partir das definições e proposições. Apesar da quantidade de questões envolvendo tais tópicos continuar mínima em relação a outros assuntos, ainda assim houve, comparado aos primeiros anos após a reformulação, uma hipervalorizarão do conteúdo.

Resolução:

Com base no enunciado, é necessário determinar a diferença entre o tempo que a planta completa 30 centímetros e 40 centímetros de altura. Ao chamar de t_1 o tempo decorrido para que a planta seja colocada à venda (ou seja, atinja 30 centímetros) e t_2 o tempo necessário para que a ela atinja sua altura máxima (de 40 centímetros) e aplicar os princípios da igualdade e a *Definição 2.16*, tem-se, na primeira situação:

$$h_1 = 30 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5 \cdot \log_2(t_1 + 1) = 30 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_2(t_1 + 1) = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 + 1 = 64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 = 63$$

Procedendo de modo análogo com a segunda situação, encontra-se:

$$h_2 = 40 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5 \cdot \log_2(t_2 + 1) = 40 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_2(t_2 + 1) = 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_2 + 1 = 256 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_2 = 255$$

Logo, a diferença entre o tempo em que a planta é colocada à venda e o tempo que demora para atingir a altura máxima é de $t_2 - t_1 = 255 - 63 = 192$ dias.

QUESTÃO 15. (questão 157, ENEM 2019, reaplicação)

Uma pessoa fez um depósito inicial de $R\$200{,}00$ em um Fundo de Investimentos que possui rendimento constante sob juros compostos de 5% ao mês. Esse Fundo possui cinco planos de carência (tempo mínimo necessário de rendimento do Fundo sem movimentação do cliente). Os planos são:

- Plano A: carência de 10 meses;

- Plano B: carência de 15 meses;
- Plano C: carência de 20 meses;
- Plano D: carência de 28 meses;
- Plano E: carência de 40 meses.

O objetivo dessa pessoa é deixar essa aplicação rendendo até que o valor inicialmente aplicado duplique, quando somado aos juros do Fundo. Considere as aproximações: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 1{,}05 = 0{,}02$.

Para que essa pessoa atinja seu objetivo apenas no período de carência, mas com a menor carência possível, deverá optar pelo plano

(a) A
(b) B
(c) C
(d) D
(e) E

Tal qual às *Questões 04* e *09*, que tratavam respectivamente de resfriamento e de crescimento exponencial e demandavam que o estudante escrevesse uma equação ou uma função a partir das informações dadas no enunciado, esta questão traz consigo a mesma proposta. Para tal, é necessário que o estudante resgate as noções de capital, juro e montante diretamente da Matemática Financeira, e resolva uma equação exponencial utilizando propriedades.

Resolução:

Um capital C, aplicado sob uma taxa de juros i e ao longo de períodos iguais de tempo t, gera um montante M tal que $M = C \cdot (1 + i)^t$. Com base nas informações do enunciado, são dados $i = 5\% = 0{,}05$ e $C = R\$200{,}00$. Interessa-se em descobrir t tal que $M = R\$400{,}00$. Aplicando os princípios da igualdade, a *Definição 2.16*, a *Proposição 2.27* e as aproximações dadas, tem-se:

$$M = 400 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 200 \cdot (1 + 0{,}05)^t = 400 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1{,}05^t = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \log_{1{,}05} 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{0,30}{0,02} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 15$$

Logo, para a atingir o seu objetivo a pessoal precisa optar pelo plano B, com 15 meses de carência.

QUESTÃO 16. (questão 156, ENEM 2020, aplicação regular)

A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (r). Ela é dada por

$$f = \frac{A}{r^B}$$

O ranking da palavra é sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, $r = 1$ para a palavra mais frequente, $r = 2$ para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente. A e B são constantes positivas.

Disponível em: http://klein.sbm.org.br. Acesso em: 12 ago. 2020 (adaptado).

Com base nos valores de $X = \log(r)$ e $Y = \log(f)$, é possível estimar valores para A e B.

No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é

(a) $Y = \log(A) - B \cdot X$

(b) $Y = \frac{\log(A)}{X + \log(B)}$

(c) $Y = \frac{\log(A)}{B} - X$

(d) $Y = \frac{\log(A)}{B \cdot X}$

(e) $Y = \frac{\log(A)}{X^B}$

Diferente das questões envolvendo manipulação de expressões com logaritmos e resolução de equações, esta não demanda que o estudante chegue a um resultado numérico, mas sim que se utilize as propriedades apenas para manipular e reescrever a Lei de Zipf, dada no enunciado. É uma questão incomum, considerando o padrão das questões analisadas até aqui.

Resolução:

Aplicando a *Proposição 2.42*, a *Proposição 2.22*, a *Proposição 2.25* e fazendo as substituições dadas no enunciado, tem-se:

$$f = \frac{A}{r^B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(f) = \log\left(\frac{A}{r^B}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \log(A) - \log(r^B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \log(A) - B \cdot \log(r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \log(A) - B \cdot X$$

Logo, a relação entre X e Y é $Y = \log(A) - B \cdot X$.

QUESTÃO 17. (questão 165, ENEM 2021, reaplicação)

Um casal decidiu aplicar em um fundo de investimentos que tem uma taxa de rendimento de 0,8% ao mês, num regime de capitalização composta.

O valor final F a ser resgatado, depois de n meses, a uma taxa de rendimento mensal x, é dado pela expressão algébrica $F = C(1 + x)^n$, em que C representa o capital inicial aplicado.

O casal planeja manter a aplicação pelo tempo necessário para que o capital inicial de $R\$100000{,}00$ duplique, sem outros depósitos ou retiradas.

Fazendo uso da tabela o casal pode determinar esse número de meses.

Y	Log Y
1,008	0,003
1,08	0,03
1,8	0,20
2	0,30
3	0,47

Para atender ao seu planejamento, o número de meses determinado pelo casal é

(a) 156

(b) 125

(c) 100

(d) 10

(e) 1,5

Esta é mais uma questão que mostra a reincidência de tópicos de Matemática Financeira em questões de logaritmos no ENEM, tal qual aconteceu com as *Questões 07* e *13*. Para resolvê-la, é necessário aplicar as propriedades dos logaritmos ao manipular uma equação exponencial, de modo bastante análogo à *Questão 15*.

Resolução:

Considerando a equação $F = C(1 + x)^n$ e a taxa mensal $x = 0{,}8\% = 0{,}008$ dadas no enunciado, objetiva-se encontrar o tempo n, em meses, tal que o capital inicial de $R\$100000{,}00$ duplique, ou seja, de modo que encontramos $F = R\$200000{,}00$. Aplicando os princípios da igualdade, a *Definição 2.16*, a *Proposição 2.27* e as aproximações convenientes dadas, tem-se:

$$F = 200000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100000 \cdot (1 + 0{,}008)^n = 200000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1{,}008^n = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = \log_{1{,}008} 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1{,}008} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = \frac{0{,}30}{0{,}003} = 100$$

Logo, são necessários 100 meses para que o capital inicial duplique.

QUESTÃO 18. (questão 163, ENEM 2023, aplicação regular)

A exposição a alguns níveis sonoros pode causar lesões auditivas. Por isso, em uma indústria, são adotadas medidas preventivas de acordo com a máquina que o funcionário opera e o nível N de intensidade do som, medido em decibel (dB), a que o operário é exposto, sendo $N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10}$, I, a intensidade do som e $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

Disponível em: www.sofisica.com.br. Acesso em: 8 jul. 2015 (adaptado)

Quando o som é considerado baixo, ou seja, $N = 48$ dB ou menos, deve ser utilizada a medida preventiva I. No caso de o som ser moderado, quando N está no intervalo (48 dB, 55 dB), deve ser utilizada a medida preventiva II. Quando o som é moderado alto, que equivale a N no intervalo (55 dB, 80 dB), a medida preventiva a ser usada é a III. Se N estiver no intervalo (80 dB, 115 dB), quando o som é considerado alto, deve ser utilizada a medida preventiva IV. E se o som é considerado muito alto, com N maior que 115 dB, deve-se utilizar a medida preventiva V.

Uma nova máquina, com $I = 8 \times 10^{-8}$ W/m^2, foi adquirida e será classificada de acordo com o nível de ruído que produz.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

O funcionário que operará a nova máquina deverá adotar a medida preventiva.

(a) I

(b) II

(c) III

(d) IV

(e) V

A última das dezoito questões que abordam tópicos de logaritmos em sua resolução, cobradas no ENEM após a reformulação de 2009 até a prova de 2023, trouxe consigo uma aplicação ainda não vista nas provas até então: uma função logarítmica para calcular a intensidade sonora. Apesar da interpretação da questão e de sua resolução ser parecida com outras já cobradas anteriormente, os caminhos que o estudante pode escolher seguir diferem entre si, mas ambos levam ao mesmo lugar e se utilizam das mesmas propriedades.

Resolução:

A função dada no enunciado $N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10}$ pode ser reescrita utilizando a *Proposição 2.25*, a *Proposição 2.9* e a *Proposição 2.*23 de tal forma que:

$$N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = \log_{10}\left(\frac{I^{10}}{I_0^{10}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)^{10} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Escrita dessa forma, a resolução, ao substituir-se os valores $I_0 = 10^{-12}$ e $I = 8 \cdot 10^{-8}$ dados no enunciado, torna-se mais rápida e as possibilidades de equívocos operacionais diminuem. Aplicando a *Proposição 2.7*, a *Proposição 2.23*, a *Proposição 2.24* a *Proposição 2.20* e fazendo a substituição proposta no enunciado, tem-se:

$$N = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{8 \cdot 10^{-8}}{10^{-12}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = 10 \cdot \log_{10}(2^3 \cdot 10^4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = 10 \cdot (\log_{10} 2^3 + \log_{10} 10^4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = 10 \cdot (3 \cdot \log_{10} 2 + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 10 \cdot (3 \cdot 0{,}3 + 4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = 10 \cdot 4{,}9 = 49$$

Logo, deve ser adotada a medida preventiva II, pois $49 \in (48 \text{ dB}, 55 \text{ dB})$.

3.3. UM APANHADO GERAL SOBRE AS QUESTÕES

Observando em retrospecto, as questões do ENEM que envolvem a operação de logaritmação, a manipulação de expressões com logaritmos ou a resolução de equações ou inequações por meio das propriedades seguem uma lógica bastante clara: a maioria delas traz consigo alguma aplicação da operação.

Olhando para dentro da própria Matemática, depara-se com questões de Matemática Financeira, como as *Questões 06*, *08, 15* e *17*, envolvendo ou montante gerado por um capital ou séries de pagamentos, modeladas sempre por funções exponenciais.

Há também abordagens geográficas, quando se fala de crescimento populacional exponencial, no caso da *Questão 9*, ou da magnitude de terremotos, relacionada sempre a uma função logarítmica, que foi cobrada em cinco das 18 questões, especificamente as *Questões 01*, *05*, *07*, *11* e *13*.

Duas das questões (*Questões 3* e *16*), inclusive, trazem abordagem bastante teóricas, envolvendo a manipulação de expressões algébricas mais complexas utilizando propriedades e a resolução de equações não tão convencionais, como as fracionárias e as literais. Em específico, a *Questão 03* configura-se, talvez, como uma das mais difíceis dentre todas as cobradas na prova de Matemática ao longo dos últimos quinze anos de ENEM.

Em específico, as *Questões 04*, *09* e *15*, demandam que o estudante escreva funções e resolva equações exponenciais que modelem, respectivamente, o resfriamento de uma liga metálica, o crescimento de uma população de transistores e o montante de uma aplicação financeira. Elas dão foco não apenas à resolução e à manipulação, mas também à necessidade do aluno saber, à fundo, o que caracteriza expressões de cunho exponencial, para ser capaz de escrevê-las e modelá-las de acordo com os elementos disponíveis no enunciado. Nenhuma delas, no entanto, pede que os alunos escrevam funções logarítmicas.

Quanto à física, a química e a biologia, ou seja, as ciências ditas naturais, verifica-se a importância da interdisciplinaridade da Matemática com outras disciplinas. Para se estudar a meia-vida de um elemento (*Questão 02*), o resfriamento de um material (*Questão 04*), o pH de uma substância (*Questões 10* e *12*), a altura de plantas (*Questão 14*) e a intensidade sonora de máquinas (*Questão 18*) é de extrema importância que o estudante domine a base do conhecimento matemático no que tange a manipulação de equações e de expressões exponencias e logarítmicas, a partir das propriedades da potenciação e dos logaritmos.

Em função disso, verifica-se a necessidade de desenvolver no estudante a autonomia necessária não apenas para manipular uma expressão com logaritmos usando a propriedade do produto, do quociente ou da potência (que é como comumente refere-se a *Proposição 2.20*, a *Proposição 2.25* e a *Proposição 2.23*, respectivamente), mas também para aplicar tais propriedades na resolução de problemas aplicados. Dito isto, as estratégias traçadas no *Capítulo 04* têm como foco, também, a aplicabilidade do conhecimento operacional dos estudantes, indo além do simples domínio teórico de tais propriedades.

CAPÍTULO 04 – TRAÇANDO ESTRATÉGIAS PARA SE ENSINAR LOGARITMOS

Neste capítulo, apresenta-se as estratégias traçadas e que poderão ser utilizadas por professores para se ensinar logaritmos, ou seja, atinge-se o objetivo deste trabalho. Para tal, utiliza-se de todas as informações construídas, coletadas e expostas até aqui. A intenção deste capítulo, contudo, não é, de modo algum, servir como um plano de aula, ou um itinerário pronto e imutável para se ensinar logaritmos. Muito pelo contrário. A ideia é que ele desempenhe um papel de guia; que aponte possibilidades e mostre como utilizá-las, que apresente modos diferentes de abordar tópicos referentes aos logaritmos, às propriedades, às equações e inequações e às funções logarítmicas, a fim de que o professor, conhecendo sua turma, possa fazer o uso necessário deles, sempre visando a aprendizagem significativa.

4.1. A ABORDAGEM CLÁSSICA (OU RECONCILIANDO INTEGRATIVAMENTE)

Quando faz-se referência à abordagem clássica, tem-se como foco a trajetória proposta na maioria dos livros didáticos, como *Matemática: Contexto e Aplicações* (Dante, 2016), *Matemática: Paiva* (Paiva, 2010), *Conexões com a Matemática* (Barroso, 2016) organizado pela Editora Moderna (Barroso, 2016) e o *Matemática: volume único* (Iezzi et al., 2019). Neles, inicialmente é apresentado aos estudantes a definição dos logaritmos, em seguida suas propriedades, para então introduzir funções logarítmicas e tratar de suas aplicações e concluir com a resolução de equações (tanto logarítmicas quanto exponenciais).

Não há motivos para que este tipo de sequência didática passe a ser desconsiderada. As diversas aplicações das funções logarítmicas e exponenciais, tais como o sistema de capitalização composto, a desintegração radioativa, o resfriamento de um corpo, a magnitude de um terremoto, a intensidade sonoro e a concentração de uma solução, exemplos clássicos, já aprofundados nos *Capítulos 01* e *03*, demandam que os estudantes resolvam equações onde as propriedades das potências e dos logaritmos são necessárias para manipulação algébrica.

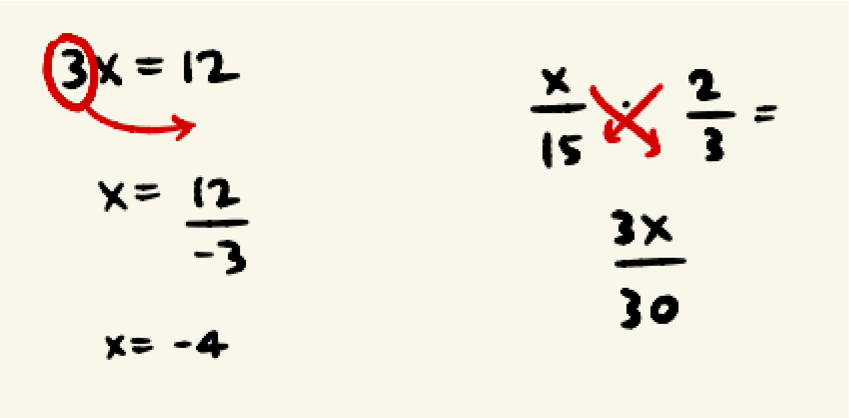
Logo, independente do foco prático dado pela BNCC ao ensino de logaritmos e, subsequentemente, cobrado pelo ENEM em suas questões, é importante que toda a base esteja bem fixada. E por base entende-se a definição, suas consequências e as propriedades operatórias. De nada adianta trabalhar com afinco e excelência as funções exponenciais e logarítmicas se os estudantes não possuem as habilidades necessárias para resolver equações e manipular potências e logaritmos.

Ao se tratar de estratégias de ensino inovadoras ou disruptivas, muitas vezes cai-se em armadilhas. A principal delas é esquecer-se de que, independentemente do nível de ensino e do foco dado à disciplina, a Matemática necessita de rigor, que se ampara em uma construção lógica e coerente de seus elementos. Caso contrário, muitas informações e relações importantes se perdem no processo. A principal consequência disso é a manifestação de obstáculos epistemológicos (erros de pensamento). Brousseau (1983) define obstáculo epistemológico como todo conhecimento que se adapta, modifica-se e acomoda-se em um indivíduo, ou seja, é um impedimento à aprendizagem, pois potencializa os erros na hora de entender um novo conteúdo.

Obstáculos epistemológicos são muito comuns na Matemática, e precisam ser evitados a todo custo. Muitos deles são corriqueiros e podem ser visualizados diariamente em sala de aula, o que é preocupante. Como quando se resolve uma equação e, ao aplicar o princípio da igualdade relativo à divisão, que propõe que se divida ambos os membros da igualdade por um mesmo número não nulo, o aluno troca o sinal, pois ouviu que *"o número troca de sinal quando muda de lado"*. A frase está incorreta em todos os sentidos possíveis, afinal de contas, não há mudança de sinal, e sim de operação.

O mesmo pode ser observado quando o aluno *"multiplica cruzado"* ao resolver uma multiplicação de frações, quando na verdade ele está associando a multiplicação de frações à propriedade fundamental das proporções, pois a falta de igualdade aparentemente não lhe faz diferença nenhuma na interpretação do problema.

Figura 14 – Exemplos de obstáculos epistemológicos cometidos por alunos



Fonte: O autor

Remover um obstáculo epistemológico é muito mais complexo e demorado do que tomar o devido cuidado para não o cometer previamente. Alegoricamente, é muito mais difícil reescrever sobre uma folha rasurada do que em uma folha em branco, afinal de contas, a folha já escrita mantém parte dos traços originais, mesmo quando apagados. Indo de encontro a este pensamento , Lopes (1993) traz que ao se aprender novos conceitos faz-se necessário superar os obstáculos epistemológicos que já existem ancorados à estrutura cognitiva do estudante, ao passo que Melo e Libâneo (2017, p.54) reiteram isso, ao explicarem a complexidade deste processo. Para os autores,

> [...] o professor pode levar o aluno de um conhecimento empírico, superficial, substancialista, fruto de um conhecimento oriundo de uma experiência primeira, a um conhecimento científico por meio da reflexão, em um processo de abstração. Nesse sentido, o estudante por meio de uma relação interpessoal, passa de um pensamento concreto a um pensamento abstrato, indo do inter para o intrapessoal, atingindo um segundo estágio de pensamento, que agora se torna mais uma vez em um pensamento concreto, mas em uma zona diferente de pensamento, a zona de pensamento real, onde agora, o estudante passa a desenvolver as atividades sozinho. Forma-se aí o conceito. Podemos perceber aí, uma ruptura entre um conhecimento de uma experiência primeira, superficial, e um novo modo de pensar internalizado.

Desta forma, ao estruturar as estratégias que estão presentes neste texto, buscou-se por tarefas pragmáticas e que levem em consideração a realidade do sistema de ensino brasileiro, muitas vezes precário, além de diferente em cada região do país, e a aplicabilidade das tarefas propostas nos ambientes escolares. A intenção é que elas sejam adaptáveis a cada aluno, professor e escola, e ainda assim que se mantenha o compromisso com o rigor e a tenacidade da Matemática a partir do cuidado primordial com a linguagem.

4.1.1. Definindo a logaritmação e o logaritmo

Para construir de modo significativo a operação de logaritmação, considera-se a existência um conhecimento prévio do próprio estudante: a resolução de uma equação exponencial simples. Fica implícito que o processo de aprendizagem de potenciação, suas propriedades, técnicas de resolução de equações exponenciais e compressão de funções exponenciais tenha ocorrido de modo pregresso e tenha sido significativo. O professor, portanto, vale-se de seu conhecimento sobre a turma ou de avaliações diagnósticas que possam mapear tais conhecimentos.

A ideia é apresentar aos estudantes, na forma de desafio, as três equações ilustradas na Tabela 2.

Tabela 2 – Equações exponenciais

$2^x = 32$
$3^x = 81$
$10^x = 1000$

Fonte: O autor

É fácil de constatar que, respectivamente, as equações têm por solução $x = 5$, $x = 4$ e $x = 3$. É possível, inclusive, fazer testes para verificar quantas vezes é necessário multiplicar cada número com ele mesmo para se chegar no resultado esperado, revisando, assim, a operação de potenciação. Ao fazer isso, o professor deve questionar os alunos qual elemento da operação de potenciação estamos buscando ao resolver tais equações. Espera-se que a resposta seja o expoente.

É importante frisar que as estratégias que foram construídas pressupõem que o professor conduza sua aula como se estivesse contando uma história. Sob esta ótica, o processo de *storytelling*[2] permite que os alunos se sintam imersos na explicação o tempo todo a partir de questionamentos que conduzam o ensino a fim de que nada seja perdido ao longo do processo. Segundo Valença e Tostes (2019, p.224), "[...] o *storytelling* pressupõe que a audiência reaja à narrativa, participando ativa e conjuntamente da construção da aprendizagem [...]", ou seja, "[...] surge [...] como uma estratégia versátil e complementar a outras estratégias de aprendizado". Assim, uma das condições para a aprendizagem significativa – a predisposição do aluno para aprender – é respaldada por sua curiosidade. E mesmo que as respostas obtidas ao longo das aulas não sejam esperadas ou se desviem do caminho objetivado, o professor vale-se de sua formação para conseguir guiar a aula e o processo de aprendizagem para o fim esperado.

Dando continuidade, é necessário retomar com a turma o conceito de operação inversa. Para isso, torna-se interessante fazer uma retomada a partir das operações de adição e subtração, passando pela multiplicação e divisão até chegar na potenciação e radiciação, fazendo sempre referência à comutatividade presente na adição e multiplicação e na consequência desta propriedade para as inversas.

Pode-se usar como exemplo a igualdade $2 + 3 = 5$. Independente de qual parcela da adição escolhemos, podemos encontrar a outra aplicando a operação de subtração sobre a soma 5, ou seja, $2 = 5 - 3$ ou $3 = 5 - 2$. Isso ocorre por dois motivos: o primeiro é o fator da subtração ser a operação inversa da adição; o segundo se justificava pela adição gozar da propriedade comutativa, ou seja, $2 + 3 = 3 + 2$, de modo que a ordem das parcelas não altera a soma.

O mesmo ocorre com a multiplicação e a divisão, e pelas mesmas justificativas. Tomando $2 \cdot 3 = 6$ como exemplo, tem-se que a operação de multiplicação é comutativa ($2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$), e, de fato, a divisão é a sua operação inversa, pois $6 \div 2 = 3$ e $6 \div 3 = 2$.

[2] Em tradução livre para o português: "contação de histórias".

No entanto, com a potenciação o cenário muda, e este é o objetivo desta retomada com os alunos. Ao escrever a igualdade $2^3 = 8$, é fácil perceber que $2^3 \neq 3^2$, ou seja, a base e o expoente da operação de potenciação, seus dois termos, não são comutativos. Isso tem uma implicação direta em sua operação inversa. De fato, supõe-se que seja conhecimento prévio dos alunos o fato de que a radiciação é dita operação inversa da potenciação, pois $\sqrt[3]{8} = 2$. Ou seja, a partir da potência e do expoente, encontra-se a base. Contudo, $\sqrt{8} = 3$ é uma igualdade falsa, de modo que não é possível, a partir da radiciação, encontrar o expoente da potenciação utilizando a potência e a base. Este impedimento decorre, diretamente, do fato da potenciação não gozar da comutatividade.

E, com isso, chega-se ao *clímax* da história que se está contando. Tanto a adição quanto a multiplicação demandavam de apenas uma operação inversa cada por conta da comutatividade, propriedade esta que a potenciação não possui. Logo, urge a necessidade da operação de potenciação possuir outra operação inversa, uma que permita, a partir da potência e da base da potenciação, determinar seu expoente.

Neste momento, retoma-se as três equações da Tabela 2, pois se tal operação existisse, ela resolveria de modo direto $2^x = 32$, por exemplo. Ou seja, ao operarmos 32 e 2 com esta suposta segunda operação inversa da potenciação, encontraríamos 5 como resposta, pois 5 é o expoente da operação $2^5 = 32$.

E, de fato, tal operação existe, e é chamada logaritmação. Do ponto de vista da Teoria da Aprendizagem Significativa, ao partir de um conhecimento específico e ampliá-lo, o ensino alia-se a um processo de reconciliação integrativa. A Figura 15 ilustra as sete operações básicas e suas respectivamente inversas e pode ser construído com os alunos conforme a explicação é conduzida.

Figura 15 – Esquema gráfico das sete operações básicas

Fonte: O autor

Ao introduzir a operação de logaritmação aos alunos, é importante comentar que, assim como as demais operações, ela também necessita de um símbolo para representá-lo. Por isso, escrevemos $\log_2 32 = 5$ para dizer que o expoente necessário para que a base 2 resulte na potência 32 é 5. De modo análogo, escrevemos $\log_3 81 = 4$ e $\log_{10} 1000 = 3$. Para sistematizar, podemos apontar que, genericamente, $\log_b x = a \Leftrightarrow b^a = x$, onde $b > 0$, $b \neq 1$ e $x > 0$ são as condições de existência do logaritmo. Isso significa que a partir da logaritmação encontra-se o expoente a de uma operação de potenciação onde a base é b e a potência é x.

As condições de existência da operação, por sua vez, devem ser comentadas mediante os conhecimentos prévios provenientes do trabalho com potências e funções exponenciais. Da notação de potência $b^a = x$, é convencionado que a base deve ser sempre positiva e diferente de 1 a fim de evitar indeterminações ou descontinuidades em gráficos, implicando que a potência (o resultado) assume apenas valores positivos. Quando a notação de potência é reorganizada como a notação de logaritmo a partir da bimplicação, as condições de existência permanecem associadas aos termos análogos.

Aponta-se aos alunos que cada elemento da operação de logaritmação possui uma nomenclatura própria, e antes de seguir é necessário nomeá-los. Assim, ao escrevemos $\log_b x = a$, temos que b é chamado de base (e cumpre o mesmo papel que na potenciação), x é o logartimando e a, o resultado da operação, é chamado de logaritmo. Ou seja, logaritmo, este suposto termo tão assustador, nada mais é que o resultado da operação de logaritmação. Em outras palavras, *o logaritmo é um expoente*.

A leitura de tal operação também deve ser trabalhada. Lê-se "logaritmo de x na base b é a" quando a é o expoente da potência x quando a base for b.

Atenta-se, neste ponto, à importância do registro e da sistematização para o processo de ensino da Matemática. Lorenzato (2008, p.43) traz que "a matemática também possui uma linguagem própria que se apresenta com seus termos, símbolos, tabelas, gráficos, entre outros". Contudo, muitas vezes este rigor é deixado de lado em prol de uma "simplificação" que atraia mais o aluno e deixe a disciplina mais acessível. No entanto, a acessibilidade da Matemática se dá, exatamente, quando o contrário ocorre. Quanto mais familiar o aluno estiver à simbologia, mais íntimo ele se sentirá da disciplina, e mais habilidades relacionadas à autonomia de aprendizagem ele desenvolverá, aperfeiçoando o letramento matemático.

Sem contar o compromisso do ensino com a universalização das ciências. Indo ao encontro a disto, Albuquerque e Junior (2021, p.7) afirmam que "a linguagem matemática, assim como a música e a arte, apresenta uma universalidade, exigindo conhecimento bem sedimentado e alicerces rígidos por ser uma ciência exata, exigindo um rigor matemático em sua aplicação". Figurativamente, a Matemática e suas simbologias funcionam como uma linguagem universal, de tal modo que, alegoricamente, um brasileiro e um russo conseguem compreender um ao outro sem, necessariamente, saber russo ou português.

Para consolidar o conceito de logaritmo e a operação de logaritmação, faz-se necessário trazer aos alunos mais exemplos, de modo que eles se apropriem do cálculo. Sugere-se aqui uma sequência de exemplos em ordem crescente tanto de dificuldade quanto de propriedades necessárias para resolvê-lo. De momento, também é importante apresentar a justificativa do resultado, que nada mais é do que a operação de potenciação que utiliza o logaritmo como expoente. Assim:

- $\log_7 49 = 2$, pois $7^2 = 49$
- $\log_3 1 = 0$, pois $3^0 = 1$
- $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, pois $2^{-3} = \frac{1}{8}$
- $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, pois $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Os dois últimos exemplos trazem consigo as ideias de expoente negativo e fracionário, e não devem ser resolvidas de modo direto, ou seja, sem questionar os alunos. A condução do exemplo conta mais para a aprendizagem que o próprio exemplo em si, pois é a partir dele que o professor facilitará a ancoragem dos novos conceitos ou, neste caso, organizar ou restaurar um conceito que pode estar parcialmente obliterado. Assim, as respostas devem vir diretamente dos estudantes para que, assim, eles se sintam parte do processo. O aluno, deste modo, fica predisposto a aprender.

Muitas vezes, a resposta esperada pode demorar a vir, pois tudo depende dos conhecimentos prévios que os alunos possuem. Caso seja necessário, revise, ou seja, recapitule conhecimentos prévios para verificar até que pontos os subsunçores estão bem ancorados à estrutura cognitiva do indivíduo. Vale mais a pena "perder tempo" no momento em que a estrutura cognitiva está pronta para receber subsunçores novos do que quando eles já foram estabelecidos e modificados e precisam sofrer adaptações, obrigando o professor a ultrapassar um obstáculo epistemológico.

Dois resultados importantes que podem ser trabalhados na sequência são as consequências da definição para o logartimando igual à base e o logartimando igual a 1.

Para isso, pede-se aos alunos que, por exemplo, interpretem $\log_4 4$, ou seja, a que expoente devemos elevar 4 para encontrar 4. É claro que tal expoente deve ser 1, pois $4^1 = 4$.

Logo, $\log_4 4 = 1$. De modo análogo, ao questionar aos alunos qual o valor de $\log_6 1$, devemos refletir a qual expoente 6 deve ser elevado para se obter 1. Com os conhecimentos prévios bem estabelecidos, os alunos devem lembrar que tal expoente é 0, pois $6^0 = 1$, de modo que $\log_6 1 = 0$.

Assim, generaliza-se esta observação a partir do raciocínio indutivo, e representa-se simbolicamente:

$$\log_b b = 1 \text{ e } \log_b 1 = 0$$

Para se discutir mais uma vez a condição de existência dos logaritmos, propõe-se que os alunos analisem, por exemplo, o significado dos logaritmos $\log_{-2} 8$, $\log_1 5$ e $\log_3 -9$. A ideia é perceber que nenhum deles faz sentido. De fato, não existe expoente real a que possamos elevar -2 pra se obter 8, do mesmo modo que não há como elevar 1 a qualquer expoente para se obter 5 ou elevar 3, um número positivo, a um expoente para torná-lo -9, um número negativo.

Com base, nestes exemplos, é possível justificar que, na operação de logaritmação $\log_b x$, a base b não pode ser um número nem negativo nem a unidade ($b > 0$, $b \neq 1$), ao mesmo tempo que o logartimando x não pode ser negativo ($x > 0$).

Vale, neste momento, pedir aos alunos para explorarem, por exemplo, o logaritmo $\log_2 6$. Do ponto de vista teórico, conforme o que foi definido, ele representa o expoente a qual 2 deve ser elevado para se encontrar 6. A ideia é que isso cause confusão nos alunos, afinal de contas, eles acabaram de conhecer casos onde o logaritmo, de fato, não existe. E é a partir destas observações que o professor deve trabalhar.

Sabe-se que $\log_2 4 = 2$, pois $2^2 = 4$, e $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$. No entanto, pouco se discute sobre o que acontece se elevarmos o dois a um expoente compreendido entre 2 e 3. Para mostrar aos alunos tais situações, sugere-se fazer uso de uma calculadora científica e da Tabela 3, que segue. Os valores calculados para 2^a na Tabela 3 foram aproximados para a primeira casa decimal.

Tabela 3 – Algumas potências não convencionais de 2

$\boldsymbol{a}$	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
$\boldsymbol{2^a}$	4	4,3	4,6	4,9	5,3	5,7	6,1	6,5	7,0	7,5	8

Fonte: O autor

Assim, os alunos, com a ajuda do professor e uma calculadora científica, constroem a tabela calculando as potências decimais de 2 a fim de que percebam que, de fato, pode existir um expoente a qual podemos elevar 2 para obter 6, e este número se aproxima muito de 2,6. Caso o professor tenha mais tempo disponível em sala de aula, ele pode dar um passo além e levar os alunos a construir uma tabela com potências de 2 com expoente compreendido entre 2,5 e 2,6, tal qual a Tabela 4. Desta vez, os valores calculados foram aproximados para a segunda casa decimal.

Tabela 4 – Outras potências não convencionais de 2

$\boldsymbol{a}$	2,50	2,51	2,52	2,53	2,54	2,55	2,56	2,57	2,58	2,59	2,60
$\boldsymbol{2^a}$	5,66	5,70	5,74	5,87	5,82	5,86	5,90	5,94	5,98	6,02	6,06

Fonte: O autor

A partir desta segunda análise, é possível concluir que o expoente a qual elevamos 2 para se obter 6 está compreendido entre $2{,}58$ e $2{,}59$. O processo realizado até aqui pode sofrer mais iterações, mas supõe-se que os alunos já tenham captado a ideia principal: $\log_2 6$, de fato, existe, mas não é um número a qual estamos acostumados a trabalhar

Neste ponto da explicação, esclarece-se que tal número é irracional, ou seja, um decimal sem expansão periódica, da mesma família do π e das raízes não exatas, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ ou $\sqrt[3]{15}$. Uma estrutura cognitiva bem organizada demanda pouco esforço do aluno para compreender e reter tais conceitos.

Por fim, com o uso de uma calculadora científica, mostra-se aos alunos que $\log_2 6 = 2{,}5849625$ ..., ou seja, muito próximo do resultado encontrado com as iterações feitas. Para enfatizar tal resposta, pede-se que os alunos reflitam sobre os seguintes logaritmos:

- $\log_2 40$
- $\log_3 5$
- $\log_5 2$
- $\log 15$
- $\ln 10$

A intenção é que eles repitam a pergunta *"qual é o expoente a qual devemos elevar a base para se obter o logartimando?"* para todos os casos e, a partir de uma análise rápida, concluam que $\log_2 40$, $\log_3 5$, $\log_5 2$ e $\log 15$ estão compreendidos, respectivamente, entre 5 e 6; 1 e 2; 0 e 1 e, por fim, 1 e 2. De fato, com o uso da calculadora científica, é fácil encontrar os valores dos logaritmos: $\log_2 40 = 5{,}321928\ldots$, $\log_3 5 = 1{,}464973\ldots$, $\log_5 2 = 0{,}430676\ldots$ e $\log 15 = 1{,}176091\ldots$.

Neste momento, sugere-se também explicar que $\log x$ indica o logaritmo de x (sempre positivo) na base 10, ou seja, $\log_{10} x$, ao passo que $\ln x$ indica o logaritmo natural, de base e, de x, notado de outra maneira como $\log_e x$.

Nenhuma das questões do ENEM que passaram pela seleção estabelecida no *Capítulo 03* tratam diretamente da definição de logaritmo, suas consequências e da operação de logaritmação. De fato, o foco é dado às aplicações, uso de propriedades e resolução de equações e inequações, tópicos que serão abordados adiante. Em função disso, para embasar o que foi trabalhado até então, opta-se por utilizar a História da Matemática como tendência de ensino e aprendizagem da Matemática, como forma de aproximar o aluno da realidade em que os logaritmos foram inicialmente inseridos: a otimização de cálculos extensos.

Para tal, será utilizada a história de Arquimedes e seu tratado nomeado “O Contador de Areia”. Caetano e Marques (2023, p.2) trazem que

> Nesse trabalho Arquimedes se propôs a determinar um limite superior para o número de grãos de areia que caberiam no Universo de sua época. Para isso, ele teve que estimar o tamanho do Universo e, literalmente, inventar uma maneira de representar números extremamente grandes.

A ideia não é se deter no desenvolvimento do trabalho de Arquimedes, mas sim à ideia de representar tais números extremamente grandes. Uma das soluções que podem ser criadas para reduzir multiplicações de números muito grandes é associar tais números a potências de mesma base e passar a utilizar seus expoentes. É possível exemplificar a técnica utilizando potências de 2, conforme a Tabela 5.

Tabela 5 – Potências naturais de 2

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{8}$	$\mathbf{9}$	$\ldots$
$\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	$\ldots$

Fonte: O autor

De fato, ao pedir que os alunos operem $16 \cdot 32$ para encontrarem como produto 512, é possível observar que 16 e 32 são, respectivamente, as potências de 2 correspondentes aos expoentes 4 e 5, ao passo que 512 corresponde a 9, que é equivalente a $4 + 5$. Todas estas informações podem ser facilmente observadas na Tabela 5 com a intenção de que o aluno conclua que uma operação de multiplicação é reduzida a uma operação de adição, que de fato é mais simples. E tudo isso é possível graças ao expoente das potências, que nada mais é que o logaritmo da potência em suas respectivas bases.

É viável também ir além, e trazer aos alunos o exemplo citado no *Capítulo 01* desta dissertação. Ao causar espanto pedindo que operem $17179869184 \cdot 140737488355328$, o professor tem em mãos um grande poder pedagógico e didático ao mostrar, com uma calculadora, que $17179869184 = 2^{34}$ e $140737488355328 = 2^{47}$. Assim, repetindo o que foi feito na tabela, mas em larga escala, encontra-se que o produto requisitado deve ser equivalente a $2^{81} = 2417851639229258349412352$, pois $34 + 47 = 81$. Esta afirmação pode ser verificada rapidamente também com o uso de uma calculadora.

Por fim, basta ao professor concluir que, historicamente, o uso dos logaritmos tornou-se popular pois transformava produtos em somas, o que era um passo enorme em uma época onde não havia calculadoras. Tal resultado pode vir acompanhado de outra reflexão: esta otimização de cálculos, atualmente, dado o acesso que temos a calculadoras e equipamentos digitais, tornou-se obsoleta.

4.1.2. A necessidade das propriedades dos logaritmos

A propriedade discutida na *Seção 4.1.1* e historicamente contextualizada promove uma reflexão inerente à praticidade dos logaritmos para operar números muito grandes, principalmente aqueles que são representados como potências de mesma base. Na *Seção 4.2.3*, trabalham-se as propriedades dos logaritmos a partir da análise de gráficos de funções logarítmicas, pois segue-se um processo inverso do que se está fazendo aqui. Para os fins da sequência didática proposta nessa seção, as propriedades decorrem diretamente do uso prático dos logaritmos: transformar produtos em somas.

Infelizmente, considerando a educação brasileira como um todo, são poucas as turmas de Ensino Médio onde os estudantes têm condições de acompanhar uma demonstração matemática. Osório (2002) explica que demonstrações matemáticas são vistas pelos professores como algo rigoroso demais, sendo, na maioria das vezes, substituídas por propostas mais acessível. Por isso, escolheu-se que as tarefas exploratório-investigativas e construções executadas nesta seção fossem, em sua maioria, numéricas, para que, em sequência, associe-se às relações percebidas as propriedades generalizadas para quaisquer números reais dentro das condições de existência do logaritmo por meio de pensamentos indutivos.

Do ponto de vista do rigor matemático, o pensamento indutivo não exclui a necessidade do pensamento dedutivo, que segundo Oliveira (2008, p.7), é “[...] o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático [...]”, ou seja, a utilização de uma condução de aula que privilegie o método indutivo, como será proposto, não exclui a necessidade do método dedutivo. No entanto, é utópico pensar que uma proposta embasada apenas dedutivamente, seguindo a mesma lógica apresentada no *Capítulo 02* desta dissertação, possa ser aplicada em qualquer turma de Ensino Médio. Por isso, vale-se do conhecimento do professor ao considerar a realidade em que os alunos estão inseridos atualmente e que estratégias indutivas são eficazes e suficientes para o ensino e a aprendizagem da Matemática neste escopo. Esta postura vai ao encontro da TAS de Ausubel no que diz respeito à busca por conhecimentos prévios.

Diniz (2008, p.3) trata da importância do pensamento indutivo para a “[...] construção de generalizações, a partir dos resultados experimentados e testados, servindo como explicação para outros estudos que apresentem casos similares [...]”. Silva (2015, p.30) defende que “[...] o raciocínio indutivo pode dar significado à álgebra na sala de aula, já que a álgebra generaliza resultados particulares e permite manipular estas generalizações mantendo a veracidade dos resultados [...]”. Assim, ao retomar-se os resultados obtidos anteriormente, leva-se os alunos a recordar que, para se resolver $16 \cdot 32$, ou seja, $2^4 \cdot 2^5$, basta encontrar o novo expoente aplicando a propriedade fundamental da potenciação, a fim de obter $2^9 = 512$.

Logo, o expoente de 512 é igual a soma dos expoentes de 16 e 32. Mas, como o expoente de uma potenciação pode ser interpretado como o logaritmo da potência sobre a mesma base, pode-se concluir que o logaritmo de 512 na base 2 é igual ao logaritmo de 16 na base 2 somado ao logaritmo de 32 na base 2. De modo simbólico:

$$\log_2 512 = \log_2 16 + \log_2 32$$

É possível, portanto, chegar à conclusão indutiva de que o logaritmo de um número sobre certa base é equivalente à soma dos logaritmos de mesma base de quaisquer dois números cujo produto é igual àquele número. Se um número c é tal que $c = x \cdot y$, onde $x, y > 0$, pode-se escrever:

$$\log_b c = \log_b x + \log_b y$$

Ou ainda:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

Para de fato chegar a tal conclusão, sugere-se pedir aos alunos para verificar, com o uso de uma calculadora científica, se esta propriedade é válida para escolhas particulares de números. Alguns exemplos que podem ser usados seguem a seguir:

- $\log_3 243 = \log_3 27 + \log_3 9$, pois $5 = 3 + 2$;

- $\log_5 625 = \log_5 5 + \log_5 125$, pois $4 = 1 + 3$;
- $\log 100000000 = \log 10000 + \log 10000$, pois $8 = 4 + 4$;

Tais testes, ao serem executados pelos próprios alunos, remetem a um processo exploratório-investigativo inerente à matemática. Tal processo proposto nesta seção não é complexo e cheio de etapas, mas um artifício simples para que os alunos percebam padrões e proponham generalizações de uma propriedade importante, desenvolvendo assim seu raciocínio indutivo e a criticidade diante da Matemática.

A propriedade intuída pode ser elucidada como “o logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos”. É importante que haja essa transição entre as várias representações do objeto matemático, tanto simbólica quanto verbal, a fim de que todos os alunos, independentemente de sua familiaridade com a simbologia, possam compreender o resultado a que se chegou.

Das questões selecionadas e analisadas no capítulo anterior, apenas uma diz respeito, especificamente, ao uso de propriedades dos logaritmos. A *Questão 16* trata da lei de Zipf e pede que se manipule uma expressão aplicando logaritmos em ambos os lados de uma igualdade. Para que o aluno seja capaz de desenvolvê-la, ele precisa estar mais familiarizado com os conceitos vistos até este ponto, bem como de algumas das propriedades que decorrem diretamente da principal.

Por isso, dá-se continuidade propondo que os alunos, sem fazer uso de uma calculadora, explorem a expressão $\log_5 8$, tentando, de alguma maneira, reescrevê-la utilizando a propriedade conquistada. A ideia é que, baseado no que foi feito até então, eles percebam que 8 pode ser escrito como $2 \cdot 4$, ou então $2 \cdot 2 \cdot 2$, de modo que $\log_5 8 = \log_5 2 + \log_5 4$ ou $\log_5 8 = \log_5 2 + \log_5 2 + \log_5 2$. Ao chegar nesta última expressão, pode-se agrupar os termos semelhantes e chegar à igualdade $\log_5 8 = 3 \cdot \log_5 2$.

Feito isso, lembra-se os alunos que 8 também pode ser escrito como 2^3, ou seja, a igualdade encontrada anteriormente pode ser reescrita como $\log_5(2^3) = 3 \cdot \log_5 2$. E este é o momento decisivo do processo exploratório-investigativo: perceber que “o logaritmo da potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base”. Simbolicamente:

$$\log_b(x^a) = a \cdot \log_b x$$

Caso a propriedade não fique clara, vale-se de alguns outros exemplos para que os alunos, novamente, percebam padrões e possam generalizar. Segue a seguir algumas sugestões:

- $\log_2 81 = \log_2 3^4 = 4 \cdot \log_3 2$;
- $\log 25 = \log 5^2 = 2 \cdot \log 5$;
- $\log_7 1000000 = \log_7 10^6 = 6 \cdot \log_7 10$

Ao explorar estes exemplos, é sempre válido pedir que os alunos usem calculadoras científicas para confirmar as relações de igualdade estabelecidas. Tomando um exemplo já familiar, é fácil verificar que $3 \cdot \log_5 2 = 3 \cdot 0{,}430676 \ldots = 1{,}292029 \ldots = \log_5 8$.

A necessidade dessa conclusão pode ainda ser explorada por meio de um exemplo clássico:

Calcule $\log_2 6$ e $\log_2 9$, sabendo que $\log_2 3 \approx 1{,}58$.

É importante salientar, mais uma vez, que o uso da propriedade, hoje em dia, tornou-se muito obsoleto com o advento de calculadora. Exatamente por isso, o aluno precisa ser alertado e tomar consciência que as manipulações executadas em aula, utilizando as propriedades, são importantes para o desenvolvimento de seu raciocínio lógico-matemático. E a calculadora, neste processo, funciona como uma ferramenta que potencializa tal apropriação.

Apesar de seu uso em sala de aula ser polêmico, Pavanelo e Barbosa (2014, p.7), defendem que

> o uso da calculadora não pode servir de empecilho para a proposição de estratégias de trabalho com os conteúdos matemáticos, na medida em que se trata de adequar a escola à realidade vivenciada pelos alunos, na qual este tipo de tecnologia está presente de forma continuada.

Assim, excluir a calculadora do processo de ensino tira do aluno uma grande âncora com a realidade. A calculadora existe e é geralmente utilizada no cotidiano, sendo uma grande aliada ao otimizar processos e facilitar cálculos extensos. Na BNCC (BRASIL, 2018), o termo calculadora é mencionado apenas no Ensino Fundamental. No Ensino Médio, ele sequer é mencionado, mas utiliza-se muito a expressão "tecnologias digitais", grupo no qual a calculadora se inclui. Ao longo deste texto, muitas das estratégias propostas fazem uso de tais tecnologias.

Dando segmento à tarefa, a ideia é que, como já feito anteriormente, os alunos escrevam 6 como $2 \cdot 3$ e reescrevam $\log_2 6$ utilizando a propriedade como $\log_2 2 + \log_2 3$. A partir daí, tem-se duas substituições a fazer. A primeira diz respeito a logaritmo $\log_2 2$, ou seja, o expoente que ao elevar-se dois encontra-se como resultado 2. É trivial que $\log_2 2 = 1$, como já exposto. O segundo é o valor dado no enunciado, que diz que $\log_2 3 \approx 1{,}58$. Assim, obtém-se:

$$\log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 3 \approx 1 + 1{,}58 = 2{,}58$$

Com uma calculadora científica, valida-se rapidamente o resultado.

De modo quase análogo, pode-se escrever 9 como 3^2, e assim reescrever $\log_2 9$ como $\log_2 3^2$. Subsequentemente, aplica-se a propriedade, substitui-se a aproximação dada no enunciado e encontra-se:

$$\log_2 9 = \log_2 3^2 = 2 \cdot \log_2 3 \approx 2 \cdot 1{,}58 = 3{,}16$$

Mais uma vez, verifica-se a veracidade do resultado com uma calculadora científica.

Com estes dois exemplos, o aluno já possui elementos suficientes para perceber como os logaritmos são importantes para se manipular expressões e se chegar ao resultado que se deseja. É possível, ainda, trazer mais exemplos como o trabalhado acima. Seguem algumas sugestões:

- Dado que $\log_3 2 \approx 0{,}63$ e $\log_3 5 \approx 1{,}46$, calcula-se $\log_3 10 = \log_3(2 \cdot 5) = \log_3 2 + \log_3 5 \approx 0{,}63 + 1{,}46 = 2{,}09$;
- Dado que $\log 5 \approx 0{,}70$, calcule $\log 125 = \log 5^3 = 3 \cdot \log 5 \approx 3 \cdot 0{,}70 = 2{,}10$;
- Dado que $\log_5 2 \approx 0{,}43$ e $\log_5 3 \approx 0{,}68$, calcula-se $\log_5 12 = \log_5(2^2 \cdot 3) = \log_5 2^2 + \log_5 3 = 2 \cdot \log_5 2 + \log_5 3 \approx 2 \cdot 0{,}43 + 0{,}68 = 0{,}86 + 0{,}68 = 1{,}54$.

Dando sequência, ainda é necessário trabalhar a propriedade do logaritmo da divisão. Por isso, explora-se $\log_3 27$ que, por definição, é igual a 3 (o expoente a qual se deve elevar 3 para se obter 27). Questiona-se os alunos se, ao extrapolar-se um pouco, é possível escrever 27 como 243 dividido por 9, ou seja, $27 = \frac{243}{9}$. De fato, é possível. Mas 243 é equivalente a 3^5, ou seja, $\log_3 243 = 5$ e, de modo análogo, $\log_3 9 = 2$ pois $3^2 = 9$. Assim, escreve-se que $\log_3 27 = 3 = 5 - 2 = \log_3 243 - \log_3 9$, o que remete diretamente à propriedade do logaritmo do produto (dado que a divisão é operação inversa da multiplicação, a subtração é a operação inversa da adição).

Neste caso, o objetivo é que os alunos concluam que "o logaritmo do quociente é igual à diferença dos logaritmos", respeitadas as condições de existência. Simbolicamente:

$$\log_{\mathrm{b}}\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Para exemplificar, sugere-se exemplos para que os alunos possam realizar explorações com o objetivo de perceber a propriedade com outras bases, mas ainda com logaritmos racionais, como segue:

- $\log_2 16 = \log_2 128 - \log_2 8$, pois $4 = 7 - 3$;
- $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5 - \log_5 125$, pois $-2 = 1 - 3$;
- $\log 10 = \log 100000 - \log 10000$, pois $1 = 5 - 4$;
- $\log_7 \sqrt{7} = \log_7 49 - \log_7 \sqrt{343}$, pois $\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$.

Note como a complexidade dos exemplos aumenta conforme os alunos, idealmente, ficam mais habituados com os conceitos e manipulação. Esta evolução é necessária e inerente à construção do conhecimento. Caso contrário, não há progressão na aprendizagem.

Mais uma vez, é necessário que se explore logaritmos irracionais e suas aproximações. Para isso, vale-se do seguinte enunciado:

Calcule $\log_2 5$, dado que $\log_2 10 \approx 3{,}32$.

A parte mais difícil, neste caso, é o aluno perceber que se pode escrever $5 = \frac{10}{2}$, para, a partir disso, reescrever $\log_2 5$ como $\log_2 \left(\frac{10}{2}\right)$. Consequentemente, aplica-se a propriedade e faz-se as substituições necessárias, encontrando:

$$\log_2 5 = \log_2 \left(\frac{10}{2}\right) = \log_2 10 - \log_2 2 \approx 3{,}32 - 1 = 2{,}32$$

Para aprofundar, sugere-se mais exemplos onde os alunos sejam compelidos a escrever números como quocientes para aplicar as propriedades, tais como:

- Dado que $\log_5 6 \approx 1{,}11$ e $\log_5 2 \approx 0{,}43$, calcula-se $\log_5 3 = \log_5 \left(\frac{6}{2}\right) = \log_5 6 - \log_5 2 \approx 1{,}11 - 0{,}43 = 0{,}68$;
- Dado que $\log 5 \approx 0{,}70$, calcula-se $\log 20 = \log \left(\frac{100}{5}\right) = \log 100 - \log 5 \approx 2 - 0{,}70 = 1{,}30$;
- Dado que $\log_3 2 \approx 0{,}63$, calcula-se $\log_3 10{,}125 = \log_3 \left(\frac{81}{8}\right) = \log_3 81 - \log_3 8 = 4 - \log_3 2^3 = 4 - 3 \cdot \log_3 2 \approx 4 - 3 \cdot 0{,}63 = 2{,}11$.

Em todos os casos, vale-se de uma calculadora científica para comprovar os resultados e perceber como ela facilita e otimiza os cálculos. Mais uma vez, é interessante e importante levar os alunos a refletirem que, antes do advento de tecnologias como esta, as propriedades eram extremamente válidas para calcular logaritmos, pois utilizava valores já possivelmente tabelados para gerar outros.

Neste momento, com as três principais propriedades dos logaritmos já ancoradas às estruturas cognitivas dos estudantes, vale propor a eles a *Questão 16* selecionada do ENEM. É importante frisar que a questão possui um grau de dificuldade moderado, considerando que o contato dos alunos com os logaritmos e com a propriedade ainda é recente. Por isso, vale-se, novamente, de um processo de exploração-investigativa mediado pelo professor. Pode-se dividir a turma em duplas ou trios para que a discussão seja potencializada.

Para o primeiro passo ser dado, o aluno precisa perceber que ele deve, de alguma maneira, manipular a equação $f = \frac{A}{r^B}$, de modo a fazer aparecer $\log(f)$ e $\log(r)$. Como tem-se uma igualdade e $f, A, r > 0$, é possível aplicar o logaritmo de base 10 em ambos os membros, de modo a obter a igualdade $\log(f) = \log\left(\frac{A}{r^B}\right)$. A partir daí, instiga-se o aluno a visualizar que no segundo membro existe uma expressão que se utiliza de divisão e potenciação como logartimando do logaritmo, uma situação onde pode-se aplicar duas das propriedades já trabalhadas.

Assim, obtém-se $\log\left(\frac{A}{r^B}\right) = \log(A) - \log(r^B) = \log(A) - B \cdot \log(r)$, uma manipulação simples que os estudantes já tem condições de operar sozinhos. Por fim, a igualdade fica reescrita como $\log(f) = \log(A) - B \cdot \log(r)$. Segue, então, a substituição das expressões encontradas pelas dadas no enunciado, obtendo $Y = \log(A) - B \cdot X$.

O fato de os alunos conseguirem resolver esta questão, mesmo que leve mais tempo do que o planejado, demonstra que já possuem uma familiaridade com a manipulação e utilização de propriedades. Este momento, portanto, possui grande potencial avaliativo para o professor, que poderá conseguir, com base na reação dos alunos, sondar se, de fato, a aprendizagem foi significativa ou se os estudantes estão caminhando em direção a ela, inseridos no processo. Mais do que isso, é possível também verificar em que passo está a autonomia dos alunos frente a resolução de problema como este. Caso se verifique um *déficit*, reforça-se o que foi trabalho até então com outros exemplos que tenham como foco os problemas detectados.

Outra propriedade interessante que pode ser trabalhada, mas muitas vezes é deixada de lado, é aquela onde a base do logaritmo é uma potência. Em símbolos e respeitando as condições de existência de um logaritmo, tem-se:

$$\log_{b^a} x = \frac{1}{a} \cdot \log_b x$$

O processo para trabalhar com ela pode ser semelhante ao que foi feito com o caso onde o logartimando era uma potência, recorrendo a processos exploratório-investigativos e ao raciocínio indutivo. Assim, coloca-se os alunos para explorar casos utilizando a definição de logaritmo e uma calculadora científica a fim de procurar uma generalização da propriedade. Sugere-se comparar, por exemplo $\log_9 27$ e $\log_3 27$, de modo a perceber que $\log_3 27 = 3$ e $\log_9 27 = \frac{3}{2}$, ou seja $\log_9 27 = \log_{3^2} 27 = \frac{1}{2} \cdot \log_3 27$.

Um caminho alternativo é perscrutar à aprendizagem mecânica. Até este momento, os alunos já entenderam que existem propriedades para se trabalhar com logaritmos e que estas propriedades facilitavam muito os cálculos caso não houvesse uma calculadora para se usar. Assim, considerando o tempo curto que normalmente os professores têm para trabalhar conteúdos de um currículo extenso, supõe-se que pouco se perderá se a propriedade for apenas enunciada e alguns exemplos forem feitos para fixá-la. O aluno, após vivenciar diversas experiências exploratório-investigativas, já possui autonomia suficiente para que possa assimilar um conceito novo relacionado às propriedades e alocá-lo à sua estrutura cognitiva de modo a conectar-se com os subsunçores já adquiridos e aos modificados.

Assim, se pode apenas exemplificar a propriedade, tal como:

- $\log_8 5 = \log_{2^3} 5 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 5$;
- $\log_{81} 49 = \log_{3^4} 7^2 = \frac{1}{4} \cdot \log_3 7^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \log_3 7 = \frac{1}{2} \cdot \log_3 7$;
- $\log_{100} 1000 = \log_{10^2} 1000 = \frac{1}{2} \cdot \log_{10} 1000 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$;
- $\log_{\sqrt{5}} 125 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 125 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \log_5 125 = 2 \cdot 3 = 6$;
- $\log_{32} \left(\frac{1}{4}\right) = \log_{2^5} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5} \cdot (-2) = -\frac{2}{5}$.

Por fim, chega-se à propriedade de mudança de base. E, para isso, propõe-se aos alunos o seguinte problema:

Calcule $\log_2 5$, sabendo que $\log 2 \approx 0{,}30$ e $\log 5 \approx 0{,}70$.

O problema, por si só, é muito interessante, pois pede para que se determine um logaritmo de um número x sobre uma base b onde só se pode utilizar o logaritmo tanto de x quanto de b sobre uma outra base. Para esta exploração-investigativa, faz-se uso de calculadora científica para calcular uma aproximação de $\log_2 5$, obtendo 2,3, com o objetivo de, após testes, perceber que $2{,}3 \approx \frac{0{,}70}{0{,}30}$, ou seja, $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$.

A condução da tarefa varia de turma para turma, conforme os conhecimentos prévios existentes e a motivação de cada estudante. Contudo, o objetivo final é o mesmo: uma vez respeitadas as condições de existência dos logaritmos, concluir, algebricamente, que:

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

Para aprofundar o processo de exploração, utiliza-se mais vezes a calculadora (ou a definição, no caso do segundo item) para verificar outros exemplos numéricos, tais como:

- $\log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} \approx 1{,}77$, dado que $\log_2 3 \approx 1{,}58$ e $\log_2 7 \approx 2{,}81$;
- $\log_{25} 125 = \frac{\log_5 25}{\log_5 125} = \frac{2}{3}$, dado que $\log_5 25 = 3$ e $\log_5 125 = 3$;
- $\log 6 = \frac{\log_6 6}{\log_6 10} = \frac{1}{\log_6 10} \approx 1{,}79$, dado que $\log_6 10 \approx 0{,}56$.

Um caso particular que é interessante destacar é o que se observa no exemplo apresentado no terceiro item. É possível enunciar que "o logaritmo de 6 na base 10 é equivalente ao inverso do logaritmo de 10 na base 6". Se o professor se sente à vontade com o entendimento da turma frente a demonstrações algébricas mais simples, prova-se esta proposição. Tem-se, conforme previamente discutido no *Corolário 2.28* do *Capítulo 02*:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

Para trabalhar de modo ainda mais aprofundado a propriedade da mudança de base, pede-se que os alunos pensem em estratégias para resolver o seguinte problema:

Determine o valor numérico mais simplificado possível de $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$.

A expressão "mais simplificada possível" no enunciado se faz necessária pois $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$ já é um valor numérico, do mesmo modo que $2^{\frac{4}{3}}$ ou $\sqrt{45}$ também o é. A intenção, neste caso, é reduzir a expressão ao máximo, encontrando, se possível, um número real sem a necessidade da notação de logaritmo para representá-lo, ou então apenas uma expressão com a notação de logaritmo, e não duas.

A estratégia clássica em problemas como esse é perceber que é possível transformar qualquer base em logartimando, e cada logaritmo em uma fração de logaritmos de mesma base. Assim, $\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3}$ e $\log_{25} 27 = \frac{\log 27}{\log 25}$. Ainda, a partir da propriedade dos logaritmos das potências, podemos escrever $\log 27 = \log 3^3 = 3 \cdot \log 3$ e $\log 25 = \log 5^2 = 2 \cdot \log 5$.

Mas, como se está lidando com uma multiplicação, é possível simplificar denominadores com numeradores caso eles sejam múltiplos um do outro. Logo, a expressão toma a forma:

$$\log_3 5 \cdot \log_{25} 27 = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{\log 27}{\log 25} = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{3 \cdot \log 3}{2 \cdot \log 5} = \frac{3}{2}$$

Ou seja, o valor numérico mais simplificado da expressão é $\frac{3}{2}$.

Por fim, sugere-se tratar da propriedade que afirma que, para todo $b, c \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, vale a igualdade $b^{\log_b c} = c$. Nesta seção, tal propriedade será trabalhada como consequência da propriedade de mudança de base, ao passo que na *Seção 4.2.3*, idealiza-se a propriedade de mudança de base como decorrência direta dela. Outra nota importante é que, em ambos os casos, a introdução de tal propriedade se dará de maneira bastante algébrica. É inegável que os alunos podem sentir dificuldades para acompanhar o desenvolvimento da proposta, mas é muito importante que eles se habituem aos processos lógicos e às manipulações, mesmo vistos como um desafio. Para se trabalhar com logaritmos, é fundamental que a habilidade de manipular expressões algébricas e numéricas esteja em desenvolvimento, e o Ensino Médio é o momento propício para isso.

Tomando como ponto de partida um dos exemplos trabalhados anteriormente, tem-se que $\log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3}$. Aplicando os princípios da igualdade e multiplicando ambos os membros por $\log_2 3$, obtém-se $\log_2 3 \cdot \log_3 7 = \log_2 7$. Mas, como já visto anteriormente, $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$, de modo que a igualdade toma a forma $\frac{1}{\log_3 2} \cdot \log_3 7 = \log_2 7$. Com base na propriedade da potência na base do logaritmo ($\frac{1}{k} \cdot \log_b x = \log_{b^k} x$) e tomando $k = \log_3 2$, pode-se reescrever a igualdade como:

$$\log_{3^{\log_3 2}} 7 = \log_2 7$$

Por comparação, constata-se que $3^{\log_3 2} = 2$.

Uma vez executado o processo com um exemplo numérico, realiza-o algebricamente através da igualdade $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$, que é a generalização da propriedade de mudança de base. Sugere-se que tal execução generalizada seja feita lado-a-lado com a numérica, para que os alunos vejam as recorrências e semelhanças entre um e outro. Assim:

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \Rightarrow \log_c b \cdot \log_b x = \log_c x \Rightarrow \frac{1}{\log_b c} \cdot \log_b x = \log_c x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_{b^{\log_b c}} x = \log_c x \Rightarrow b^{\log_b c} = c$$

E demonstra-se a propriedade. Apesar de interessante, tal relação não parece ter tanta aplicação nas manipulações que os alunos se defrontarão ao longo das aulas. Contudo, pode ser um atalho interessante para se usar em casos particulares.

É possível também partir da própria definição de logaritmo para se encontrar a propriedade. Independente de qual estratégia escolher usar, faz-se necessário o uso de manipulações algébricas, como se observa a seguir.

Partindo de um exemplo numérico, pode-se escrever que $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$. Mas, do antecedente, $3 = \log_2 8$. Substituindo esta equivalência no consequente, obtém-se $2^{\log_2 8} = 8$, que é um caso específico válido da propriedade, determinado por meio de uma sequência lógica de passos.

Partindo para a generalização, tem-se, de maneira análoga, que se $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$, então $b^{\log_b a} = x$.

Começar por exemplos numéricos a fim de desenvolver no aluno um senso de localização e percepção algébrica não intencional, para só então generalizar, é um caminho interessante a se seguir. Tais exemplos específicos, de certa forma, justificam os processos exploratório-investigativos e de pensamento indutivo que permeiam em boa parte das tarefas propostas em ambas as sequências didáticas desenvolvidas neste capítulo.

A partir das construções apresentadas nesta seção, o professor também tem autonomia para trazer mais exemplos que ele julgue necessário de modo a fixar as propriedades, seja a partir da resolução de exercícios simples, onde o aluno precisará calcular ou simplificar logaritmos para habituar-se à manipulação dessas propriedades, seja por meio da resolução de questões mais aplicadas, retiradas de concursos ou vestibulares, visando o aprofundamento do conhecimento e permitindo o engajamento do estudante em uma gama mais variada de problemas e aplicações, onde as propriedades dos logaritmos são necessárias.

4.1.3. Recorrendo aos logaritmos para resolver equações exponenciais

A definição de logaritmo possibilita solucionar um problema até então típico da resolução de equações exponenciais: quando não é possível igualar as bases para simplificá-las. Como exemplo motivador, sugere-se propor aos alunos que resolvam as equações exponenciais da Tabela 6.

Tabela 6 – Outras equações exponenciais

$2^x = 6$
$3^x = 100$
$10^x = 47$

Fonte: O autor

É possível interpretar a equação $2^x = 6$ a partir da pergunta *"a qual expoente devemos elevar* 2 *para obter* 6*?"*. Por definição, tal expoente é o logaritmo de 6 na base 2, de modo que $2^x = 6 \Rightarrow x = \log_2 6$, que é a solução da equação. Tal expressão foi discutida previamente, onde concluiu-se que $\log_2 6$ equivale, a aproximadamente, 2,58, e é um número irracional.

Os alunos, a partir da condução desta explicação, podem concluir também que $3^x = 100 \Rightarrow x = \log_3 100 \approx 4{,}19$ e $10^x = 47 \Rightarrow x = \log 47 \approx 1{,}67$ são soluções das demais equações propostas. Vale utilizar uma calculadora científica para confirmar tais respostas.

O professor, neste ponto, pode introduzir aos estudantes outras equações exponenciais com expressões mais complexas, que até então eles não eram capazes de resolver pois envolviam a manipulação de logaritmos por meio das propriedades. Seguem alguns exemplos:

- $6^{2x} = 7$

Utilizando a definição, obtém-se $6^{2x} = 7 \Rightarrow 2x = \log_6 7 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \log_6 7 \Rightarrow x = \log_6 7^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \log_6 \sqrt{7} \approx 0{,}54$.

- $3^x = \frac{1}{2}$

De modo análogo, desenvolve-se $3^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \log_3 \frac{1}{2} \Rightarrow x = \log_3(2^{-1}) \Rightarrow x = -\log_3 2 \approx -0{,}63$.

- $5^{2x-3} = 3$

Novamente, utilizando a definição, encontra-se $5^{2x-3} = 3 \Rightarrow 2x - 3 = \log_5 3 \Rightarrow 2x = \log_5 3 + 3 \Rightarrow x = \frac{\log_5 3+3}{2}$, que já é uma solução válida. No entanto, vale levar os alunos a utilizar as propriedades de modo a escrever a expressão como um único logaritmo, como um exercício prático para treinar a manipulação.

Assim, é possível escrever 3 como $\log_5 125$, pois 3 é o expoente a que elevamos 5 para obter 125. Segue que $\log_5 3 + \log_5 125$, por ser uma soma de logaritmos, pode ser reescrito como o logaritmo do produto: $\log_5 3 + \log_5 125 = \log_5(3 \cdot 125) = \log_5 375$ (a propriedade vale em ambas as direções). Por fim, basta ajustar a expressão resultante utilizando a propriedade do logaritmo da potência $\frac{\log_5 3+3}{2} = \frac{\log_5 375}{2} = \frac{1}{2} \cdot \log_5 375 = \log_5 375^{\frac{1}{2}} = \log_5 \sqrt{375}$. Assim $x = \log_5 \sqrt{375} \approx 1{,}84$ é outro modo de escrever a solução da equação utilizando um único logaritmo.

- $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$

Para resolver este caso, é necessário recorrer a uma estratégia mais complexa. Neste ponto, supõe-se que os alunos estejam familiarizados à resolução de equações do primeiro grau e, por consequência, aos princípios da igualdade. Assim, o professor deve explicar que, do mesmo modo que é possível adicionar ou subtrair um número real a ambos os membros da igualdade e não alterá-la ou multiplicar e dividir ambos os membros da igualdade por um número real não nulo e mantê-la verdadeira, também é válido aplicar o logaritmo de uma mesma base em ambos os membros da igualdade, contanto que a base arbitrária escolhida para o logaritmo e o "novo" logartimando satisfaçam as condições de existência dos logaritmos.

Assim, aplica-se um logaritmo de base 10 em ambos os membros da igualdade e obtém-se $2^{3x-2} = 3^{2x+1} \Rightarrow \log(2^{3x-2}) = \log(3^{2x+1})$. Utilizando a propriedade do logaritmo da potência, reescreve-se a equação como $(3x - 2)\log 2 = (2x + 1)\log 3$, de modo que a base da potência da equação exponencial é transformada no logartimando de um logaritmo e a própria equação exponencial transforma-se em uma equação do primeiro grau.

Operando o membro esquerdo, obtém-se $(3 \cdot \log 2)x - 2\log 2$. Aplicando a propriedade do logaritmo da potência, segue que $(\log 2^3) \cdot x - \log 2^2 = (\log 8) \cdot x - \log 4$.

Fazendo o mesmo com o membro direito, encontra-se:

$$(2 \cdot \log 3)x + \log 3 = (\log 3^2) \cdot x + \log 3 = (\log 9) \cdot x + \log 3$$

Escrevendo novamente a igualdade e aplicando os princípios da igualdade necessários, chega-se a:

$$(\log 8)\cdot x - \log 4 = (\log 9)\cdot x + \log 3 \Rightarrow (\log 8)\cdot x - (\log 9)\cdot x = \log 4 + \log 3$$

Ao colocar x em evidência no primeiro membro e aplicar a propriedade do logaritmo do quociente em ambos, obtém-se:

$$x\cdot(\log 8 - \log 9) = \log 4 + \log 3 \Rightarrow x\cdot\log\left(\frac{8}{9}\right) = \log(12)$$

Daí, vem que $x = \frac{\log 12}{\log\left(\frac{8}{9}\right)}$, que é a solução do problema. É possível também aplicar a propriedade de mudança de base de modo a reescrever a solução como $\frac{\log 12}{\log\left(\frac{8}{9}\right)} = \log_{\frac{8}{9}} 12 \approx -21{,}10$. O importante é compreender que ambas as expressões são equivalentes.

Destaca-se que existem várias soluções alternativas para esta equação. Dentre ela, são apresentadas na sequência outras duas.

Aplicando a definição de logaritmo, é possível escrever que:

$$2^{3x-2} = 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3x - 2 = \log_2(3^{2x+1})$$

A resolução segue ao aplicar a propriedade do logaritmo da potência, trabalhando assim com um logaritmo de base 2 ao invés do logaritmo decimal. Manipulando convenientemente a equação, chega-se a $x = \frac{\log_2 12}{\log_2\left(\frac{8}{9}\right)}$. Ao aplicar a propriedade de mudança de base, encontra-se a mesma solução da primeira resolução proposta. Ressalta-se que é possível conduzir uma resolução análoga escrevendo:

$$2^{3x-2} = 3^{2x+1} \Leftrightarrow \log_3(2^{3x-2}) = 2x + 1$$

A terceira resolução é a mais simples de todas. Partindo de $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$, é possível recorrer às propriedades da potenciação, e reescrever a equação como:

$$\frac{2^{3x}}{2^2} = 3^{2x}\cdot 3^1 \Rightarrow \frac{(2^3)^x}{4} = (3^2)^x\cdot 3 \Rightarrow \frac{8^x}{4} = 9^x\cdot 3$$

Aplicando os princípios da igualdade, obtém-se $\frac{8^x}{9^x} = 12$ e, consequentemente, a partir das propriedades da potência e da definição de logaritmo, $\left(\frac{8}{9}\right)^x = 12 \Rightarrow x = \log_{\frac{8}{9}} 12$.

A intenção desta sequência didática, em específico, é mostrar aos estudantes que utilizar propriedades da potenciação e da logaritmação permite uma gama enorme de caminhos a seguir. Contudo, nota-se que o uso da definição de logaritmo em algum momento do processo faz-se necessário, pois é a partir dela que torna-se possível transformar expoentes em termos "lineares".

A escolha de qual caminho seguir depende das características da turma e de cada estudante, do tipo de abordagem que o professor está interessado em considerar ao trabalhar com logaritmos e, também, dos objetivos e da profundidade que se pretende dar ao conteúdo abordado.

A próxima equação compreende o caso clássico de substituição de variável, que se supõe ter sido trabalhada dentro do campo das equações exponenciais já vistas. Aqui, ela exemplifica o que acontece quando o resultado obtido antes da substituição final não é uma potência de base conveniente e não pode ser "igualada".

- $9^x - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$

Ao tomar-se uma incógnita auxiliar, por exemplo $3^x = y$, $y > 0$, e escrever $9^x = (3^x)^2$, obtém-se, ao substituir uma igualdade na outra, a equação equivalente $y^2 - 5y + 4 = 0$. Esta equação é resolvida facilmente utilizando a fórmula resolutiva (popularmente conhecida como Fórmula de Bháskara), o método de completar quadrados ou a técnica de soma e produto (um caso particular das relações de Girard). Tudo depende de como os alunos estão acostumados a operar uma equação do segundo grau completa. Ao fim, encontra-se como raízes $y = 1$ ou $y = 4$.

Voltando à incógnita original, chega-se a dois casos:

(i) $y = 1 \Rightarrow 3^x = 1$. Utilizando a definição de logaritmo, tem-se que $x = \log_3 1$, ou seja, $x = 0$. Aqui, a manipulação clássica de igualar as bases das potências também é valido: $3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$;

(ii) $y = 4 \Rightarrow 3^x = 4$. Mais uma vez aplicando a definição de logaritmo, chega-se a $x = \log_3 4 \approx 1{,}26$;

Nota-se, novamente, que uma equação exponencial foi facilmente resolvida aplicando-se a definição de logaritmo e suas consequências.

Para finalizar, apresenta-se um último exemplo de equação exponencial, mais complexo que os anteriores. Ele não se apresenta de modo claro, tal como os quatro primeiros exemplos resolvidos nesta seção, bem como não recai em um caso clássico de uso excessivo de propriedades. As estratégias utilizadas para resolvê-lo demandam que os alunos percebam relações entre os números que o compõe para manipulá-lo e, só então, aplicar uma substituição.

- $4^x + 6^x = 9^x$

Neste caso, diferentemente do que se observou nos anteriores, tem-se dois números que podem ser escritos como potência, mas de bases diferentes ($4 = 2^2$ e $9 = 3^2$), além de um terceiro número que não pode ser escrito como uma potência de base inteira, mas sim como um produto ($6 = 3 \cdot 2$). Ou seja, todas as técnicas usadas até então parecem inúteis, a não ser que seja possível, de alguma maneira, escrever todas as parcelas como potências de mesma base.

Para executar o artifício, vale-se do fato de estar-se trabalhando com números escritos ou como potências ou como produto dos inteiros 2 e 3.

Desse modo, se ambos os membros da igualdade forem divididos por 9^x, modificações interessantes acontecem. Da primeira parcela, obtém-se $\frac{4^x}{9^x} = \left(\frac{4}{9}\right)^x = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2$. Da segunda parcela, encontra-se $\frac{6^x}{9^x} = \left(\frac{6}{9}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Da terceira parcela, fica-se apenas com a unidade, pois $\frac{9^x}{9^x} = 1$. Assim, a equação pode ser reescrita como:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

Deste modo, depara-se com uma equação como a do exemplo anterior, onde tem-se uma mesma base que pode ser substituída por uma variável auxiliar. Ao tomar $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Segue que:

$$y^2 + y = 1 \Rightarrow y^2 + y - 1 = 0$$

Donde, a partir da técnica de resolução à escolha do estudante, obtém-se $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. É fácil verificar (sugere-se utilizar a calculadora científica, ou até mesmo argumentação lógica por conta da operação de subtração) que $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$, de modo que não pode ser utilizada pois $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Logo:

$$y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

A parte final da resolução vem diretamente da definição de logaritmo. Tem-se $x = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 1{,}19$, que é a solução da equação.

É importante frisar que dividir a equação original por 4^x levaria ao mesmo resultado, com apenas algumas diferenças. Neste caso, a equação tomaria e forma $1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2$, e fazendo a substituição $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, encontraria-se $1 + y = y^2 \Rightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, donde apenas $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Logo, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 1{,}19$.

Caso este segundo caminho seja trabalhado, vale questionar os alunos porque, apesar de escritos de formatos diferentes, $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e $\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ são equivalentes. É um bom exercício para discutir como a manipulação de logaritmos e o uso de propriedades podem possibilitar escrever um mesmo logaritmo de diversas formas.

De fato:

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \log_{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{-1}\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= -\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)$$

Racionalizando $\frac{2}{-1+\sqrt{5}}$, obtém-se:

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = \frac{-2\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)}{1-5} = \frac{-2\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

O logaritmo toma a forma $\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, como queria-se mostrar.

É possível inclusive, dividir a equação por 6^x, obtendo $\frac{4^x}{6^x} + 1 = \frac{9^x}{6^x} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^{-1}$ ou $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^{-1} + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, e procede-se de maneira análoga, encontrando uma equação fracionária para resolver, mas que resultam em uma equação do 2° grau análoga às resolvidas anteriormente.

Dentre as questões selecionadas do Exame Nacional do Ensino Médio e analisadas com profundidade no *Capítulo 03* desta dissertação, é possível perceber um grande foco em resolver equações exponenciais, obtidas a partir da análise de funções exponenciais, utilizando a definição de logaritmo. Chamam atenção as *Questões 02, 04, 06, 08, 09, 15* e *17*.

As *Questões 06, 08, 15* e *17*, especialmente, utilizam conceitos de Matemática Financeira em seu enunciado.

A *Questão 15*, bem como as *Questões 04* e *09*, demandam que o estudante escreva, com base nas informações disponíveis, a lei de formação da função exponencial a ser manipulada.

Além disso, a *Questão 08* exige o uso de logaritmo de base *e* em sua resolução.

De modo geral, todas as questões são trabalhosas à sua maneira. Por isso, é necessário conhecimento do professor sobre sua turma e sobre os conhecimentos prévios dos estudantes, já supostamente organizados em suas estruturas cognitivas ao se trabalhar a potenciação, a resolução de equações exponenciais e a análise de funções exponenciais anteriormente. É possível, inclusive, utilizar tais questões como organizadores prévios, ou seja, como pontes cognitivas, para que os alunos acessem novamente tais conhecimentos e se preparem para o que vem na sequência: equações e funções logarítmicas.

Por isso, o que se apresenta a seguir é uma sugestão de sequência do uso destas questões e que pode ser adaptada por cada professor em cada turma onde seja aplicada. A ideia é que, após ser trabalhada a resolução de equações exponenciais a partir da definição de logaritmo, os alunos utilizem seus subsunçores recém-modificados e apliquem seus novos conhecimentos em situações-problemas, onde nem sempre a equação estará pronta para ser resolvida. Espera-se que os métodos para as resolver já estejam ancorados na estrutura cognitiva do estudante. O papel do indivíduo, portanto, será tomar governo de suas escolhas e da autonomia que o conhecimento matemático lhe proporciona.

Começa-se pela *Questão 17*, que trata de Matemática Financeira, mas não exige que os alunos saibam fórmulas para se calcular juros ou montantes. Todas as leis são dadas no enunciado, e o papel do estudante é montar a equação e resolvê-la aplicando a definição de logaritmo, a propriedade da mudança de base e fazendo as substituições necessárias. A questão é um bom "aquecimento" para que sejam percebidas as manipulações que estarão presentes em quase todas as questões apresentadas.

Na sequência, propõe-se que os alunos resolvam a *Questão 08*. Ela utiliza os mesmos conceitos e a mesma construção da *Questão 17*, com a diferença de que há nela um artifício algébrico que a torna relativamente mais complexa. Mesmo assim, torna-se um objeto de aprendizagem muito válido para que os alunos desenvolvam autonomia e desenvoltura frente a manipulações e a transitividade de equações.

Neste momento do processo é provável que os alunos já estejam preparados para fazer a *Questão 15*. De modo análogo às anteriores, ela demanda conhecimentos sobre Matemática Financeira. Mas diferente do que já foi proposto até então, nesta é necessário que se obtenha a lei para encontrar o montante, a partir do capital, da taxa de juros e do tempo de aplicação. Dado que os estudantes já tiveram contato com a mesma equação nas duas questões anteriores, este obstáculo subpõe-se facilmente ultrapassável.

A estrutura necessária para resolver as *Questões 17*, *08* e *15* é muito semelhante e se baseia em uma equação exponencial da forma $b \cdot a^x = c$. Para resolvê-la, aplica-se o princípio multiplicativo da igualdade para obter $a^x = \frac{c}{b}$, e, feito isso, utiliza-se a definição de logaritmo, escrevendo que $x = \log_a \left(\frac{c}{b}\right)$, sempre considerando que $a > 0$, $a \neq 1$ e $\frac{c}{b} > 0$. Por fim, de modo a utilizar alguma informação dada no enunciado, ou seja, para aplicar uma substituição na busca pela solução, ajusta-se o logaritmo a partir da propriedade de mudança de base. Assim, encontra-se $x = \frac{\log_d\left(\frac{c}{b}\right)}{\log_d a}$, $d > 0$, $d \neq 1$. Na maioria das vezes, esta base d é 10 ou e.

É claro, portanto, que a manipulação de uma equação exponencial do tipo $b \cdot a^x = c$, e consequente aplicação da definição e propriedade dos logaritmos, é uma habilidade intrínseca à resolução do Exame Nacional do Ensino Médio, e que pode ser considerada essencial para a solução de muitas de suas questões.

É importante relembrar que, dentro dos critérios definidos na seleção das questões discutidas no capítulo anterior, todas aquelas que demandavam a resolução de equações exponenciais, mas que não se fazia necessário aplicar a definição de logaritmo, foram desconsideradas. Ou seja, por mais que a Matriz de Referência do ENEM (BRASIL, 2025c) refira-se a “conhecimentos algébricos” e trate de equações exponenciais (e logarítmicas) de modo genérico e sem especificações, dando a entender que elas podem ser pouco cobradas, dar um maior foco a elas é necessário para que propicie uma compressão mais ampla de conceitos, nos quais se engloba a definição de logaritmo e suas principais aplicações. Dentre estas aplicações, destaca-se a resolução das equações exponenciais.

Tendo trabalhado a resolução de três equações exponenciais muito parecidas, é válido que se proponha a resolução da *Questão 06*. Tal questão segue a mesma temática: Matemática Financeira, mas desta vez trata-se do valor da parcela, e não do montante, o que implica numa equação diferente, mais complexa. No capítulo anterior, escolheu-se resolver esta questão a partir de uma inequação exponencial, por conta do contexto dado no enunciado, mas isso não exclui a possibilidade de tratar o problema como uma equação e, no final, dar uma interpretação coerente ao que o enunciado pede.

Apesar do início mais complexo, a partir de certo ponto a resolução toma a forma já conhecida, e o aluno precisa, novamente, aplicar a definição de logaritmo e a mudança de base, bem como a propriedade do logaritmo do quociente.

Deliberadamente, optou-se por suprimir neste texto a resolução de inequações exponenciais cuja solução demanda da definição de logaritmo. Supõe-se que o raciocínio já esteja ancorado na estrutura cognitiva dos alunos, e precise apenas ser retomado, combinado ao que foi visto nesta seção.

As *Questões 09* e *04*, por sua vez, apresentam problemas provenientes de outras aplicações da exponenciação e da logaritmação. A primeira trata de crescimento exponencial, ao passo que a segunda se baseia na lei de resfriamento de Newton. Ambas não trazem em seu enunciado uma lei ou fórmula pronta para se usar como ponto de partida, demandando que o aluno escreva a equação que deverá ser usada para resolver o problema.

Como a construção de função exponencial já se deu em algum momento anterior, supõe-se que os alunos já saibam identificar os casos em que a função exponencial é crescente ou decrescente, e o impacto deste fato em sua lei. Caso contrário, estas duas questões podem servir como organizadores prévios, objetivando revisar tais conceitos, uma vez que eles devem estar ancoradas na estrutura cognitiva do indivíduo e precisam apenas ser trazidos à tona, favorecendo a ocorrência da aprendizagem significativa.

Para se escrever a lei de formação das funções, é sempre válido montar uma tabela que induza os alunos ao raciocínio indutivo. As Tabelas 7 e 8 a seguir são exemplos que podem ser construídos com os alunos em sala de aula como pontapé inicial para a resolução destas duas questões.

Tabela 7 – Construção da lei de formação de crescimento exponencial da *Questão 09*

Tempo t (em anos)	**Densidade (em transistores por cm^2)**	**Exponente da potência escrito em função do tempo t**
0	$\frac{100000}{0,25} = 400000 = 400000 \cdot 2^0$	$\frac{0}{2}$
2	$400000 \cdot 2 = 400000 \cdot 2^1 = 800000$	$\frac{2}{2}$
4	$800000 \cdot 2 = 400000 \cdot 2 \cdot 2 = 400000 \cdot 2^2 = 1600000$	$\frac{4}{2}$

6	$1600000 \cdot 2 = 400000 \cdot 2^2 \cdot 2 = 400000 \cdot 2^3 = 3200000$	$\frac{6}{2}$
8	$3200000 \cdot 2 = 400000 \cdot 2^3 \cdot 2 = 400000 \cdot 2^4 = 6400000$	$\frac{8}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$400000 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$	$\frac{t}{2}$

Fonte: O autor

Tabela 8 – Construção da lei de formação de resfriamento (decaimento exponencial) da *Questão 04*

Tempo t (em horas)	**Temperatura (em °C)**	**Exponente da potência escrito em função do tempo t**
0	$3000 = 3000 \cdot 0{,}99^0$	$2 \cdot 0$
$0{,}5 = \frac{1}{2}$	$3000 \cdot 0{,}99 = 3000 \cdot 0{,}99^1$	$2 \cdot \frac{1}{2}$
1	$3000 \cdot 0{,}99^1 \cdot 0{,}99 = 3000 \cdot 0{,}99^2$	$2 \cdot 1$
$1{,}5 = \frac{3}{2}$	$3000 \cdot 0{,}99^2 \cdot 0{,}99 = 3000 \cdot 0{,}99^3$	$2 \cdot \frac{3}{2}$
2	$3000 \cdot 0{,}99^3 \cdot 0{,}99 = 3000 \cdot 0{,}99^4$	$2 \cdot 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$3000 \cdot 0{,}99^{2t}$	$2 \cdot t$

Fonte: O autor

Uma vez escritas as leis de formação das funções exponenciais que modelam cada problema, a resolução da equação necessária para solucioná-los tem o mesmo formato das já executadas nas questões anteriores. Acrescentar graus de dificuldade nos exercícios propostos vai ao encontro da Teoria da Aprendizagem Significativa. Os indivíduos envolvidos no processo conseguem assim, assimilar conceitos cada vez mais complexos e organizá-los em sua estrutura cognitiva de modo ordenado, facilitando a ancoragem.

Por fim, utiliza-se a *Questão 02*. Por mais que se tenha parte da lei de formação da função exponencial que modela o problema, a resolução da questão demanda dois processos: o primeiro diz respeito a encontrar a constante k, dada a informação que a meia-vida da substância é de 30 anos; o segundo consiste na busca da solução de fato, que é determinar o tempo necessário para que reste apenas 10% da massa da substância.

A BNCC (BRASIL, 2018, p.269), no que tange a área da Matemática, fala do "[...] estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos [...]" a partir de "[...] um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro." Ou seja, coloca a interdisciplinaridade como possível metodologia a ser utilizada em sala de aula. Apesar do foco dado aqui à interdisciplinaridade aliada à Matemática Financeira, a Base (BRASIL, 2018, p.16) também trata deste tema de modo geral, ao citar ações possíveis de serem executadas entre as áreas do conhecimento, tal como:

> [...] decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;

A aplicação da função exponencial no cálculo da massa restante da substância pode ser relacionada diretamente com tópicos trabalhados em disciplinas da área das Ciências da Natureza, tais como química ou biologia. Esta relação permite que os professores das disciplinas conversem e busquem maneiras de integrar-se em atividades interdisciplinares, de modo a utilizar a Matemática aprendida em uma aula para modelar situações reais propostas em outras. O aluno, ao compreender este significado prático no tratamento do problema e, consecutivamente, para os cálculos, consegue analisar e executar situações análogas com mais propriedade pois, de fato, aprendeu significativamente.

Na *Questão 02*, em específico, os alunos precisarão resolver, mais uma vez, equações do tipo $b \cdot a^x = c$, aplicando a definição de logaritmo, manipulando expressões com logaritmos utilizando quase todas as propriedades aprendidas, incluindo a mudança de base, para tentar, ao máximo, simplificar a lei de formação da função que modela o problema. Ao obter uma lei simplificada, baseado no que foi feito com a tabela nas *Questões 09* e *04*, o estudante também pode tirar conclusões quando à expressão encontrada e qual o significo prático dela.

Aprofundando este último comentário, é possível detalhar a lei de formação da função $M(t) = A \cdot 10^{-\frac{1}{100}t}$. De imediato, ela implica que há um decrescimento exponencial (verificado pelo sinal de "negativo" no expoente, análogo à *Questão 04*), que tal decaimento é de 90% (ou então que resta 10% do valor original, em função da base 10, que ao ser elevada no expoente negativo, é equivalente a $\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\% = 100\% - 90\%$, análogo também à *Questão 04*) a cada 100 anos (o fator que acompanha o expoente transforma-se na unidade quando $t = 100$, e em múltiplos da unidade quando é multiplicado por um múltiplo de 100, análogo a ambas as *Questões 09* e *04*). Perceba que este raciocínio é o suficiente para resolver a questão, pois, afinal de contas, quer-se saber em quanto tempo a massa da substância reduz-se a 10% da quantidade inicial, que é 100 anos.

O aluno que consegue perceber este fato sem a necessidade de equacionar o problema novamente gera evidências suficientes de que a sua aprendizagem foi significativa, ou seja, de que sua estrutura cognitiva assimilou o conceito, modificou-o e ancorou-o a ela. Não apenas isso, mas demonstra que, além dos processos algébricos, ele compreendeu também como a função exponencial se constrói. Alegoricamente, é como se, além de ter entendido como uma máquina funciona, ele também tenha aprendido a programação feita para ela operar daquela maneira, o que é um passo grande e extremamente ambicioso.

A escolha sequencial das questões apresentada nesta seção propõe a oportunidade de revisar conceitos já aprendidos anteriormente (funções e equações exponenciais), ao passo que possibilita a adição de novos casos àqueles já estudados (a utilização da definição de logaritmo). Destaca-se que o planejamento proposto favorece a ocorrência de uma diferenciação progressiva na estrutura cognitiva do estudante, pois possibilita que um novo conceito seja ancorado e modificado por um conceito mais amplo e já existente, potencializando a aprendizagem significativa.

4.1.4. Resolvendo equações e inequações logarítmicas

É chegada a hora dos alunos resolverem equações logarítmicas, ou seja, equações que apresentam um logaritmo de uma incógnita, de uma expressão com incógnita ou então com uma incógnita na própria base do operador. Até então, é esperado que os estudantes tenham interagido com equações do 1° e do 2° grau e exponenciais. Com sorte, eles também têm noção de como resolver equações biquadradas, irracionais, fracionárias e modulares, dependendo do contato que eles tiveram com tais conteúdos ao longo dos seus processos de aprendizagem, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

O fato é que a resolução de equações logarítmicas se baseia em processos já conhecidos: a estratégia de “igualar as bases” utilizada nas equações exponenciais, o uso da definição de logaritmo e a substituição por variáveis auxiliares. Com isso em mente, os alunos tendem a estar mais predispostos a compreender os algebrismos inerentes à resolução de equações logarítmicas, sejam elas simples ou mais complexas.

Por isso, sugere-se que se proponha aos alunos resolverem equações logarítmicas com grau crescente de dificuldade, a fim de “preparar o terreno”, de modo similar ao que foi feito com as equações exponenciais na seção anterior. Ao fazer isso, o professor conduz a turma como um todo ao longo dos processos, sempre dialogando e propondo aos estudantes que definam qual é o próximo passo a ser seguido.

Apesar da estratégia parecer tradicional e pouco atraente a uma sala de aula onde se busca a ocorrência da aprendizagem significativa, vale a pena lembrar que a Matemática demanda rigor, e os alunos precisam se acostumar a isso. Não se pode ignorar o fato de que Matemática se faz com registros precisos, raciocínio lógico e processos que precisam ser seguidos. Alegoricamente, só é possível “jogar” Matemática se forem conhecidas as “regras do jogo”. Caso contrário, os conceitos podem até ser aprendidos significativamente, mas os cálculos mais complexos, necessários para suas aplicações, ficam em segundo plano e são ignorados, o que compromete todo o processo de aprendizagem.

4.1.4.1. Resolvendo equações logarítmicas

Com base na experiência que os alunos já tiveram ao resolverem equações exponenciais, a condução para se ensinar a resolver equações logarítmicas começa com o caso onde em ambos os membros da igualdade há logaritmos de mesma base. Nestes casos, é possível simplificar o logaritmo, ou seja, ignorar a operação e trabalhar exclusivamente com os logartimandos, tomando cuidado para que ambos cumpram as condições de existência dos logaritmos, isto é, serem positivos. Isso se justifica pelo fato do logaritmo de base b de um número real positivo a ser único, ou seja, existir um, e apenas um, expoente que transforma a base b na potência a. Esta proposição vem diretamente da unicidade da função exponencial, explorada na *Seção 2.3*. A seguir, são apresentados alguns exemplos sequenciais que podem ser utilizados em sala de aula.

- $\log_2(3x-5) = \log_2 7$

Simplificando-se os logaritmos em ambos os membros, obtém-se $3x - 5 = 7$, e a partir deste ponto, aplicam-se os princípios clássicos da igualdade até chegar na solução $x = 4$.

- $\log_5(x^2 - 3x - 10) = \log_5(2 - 2x)$

De modo análogo ao que foi feito no item anterior, simplifica-se os logaritmos, aplicam-se os princípios e encontra-se a equação do segundo grau completa $x^2 - x - 12 = 0$, cujas raízes são $x = -3$ e $x = 4$.

Neste caso, no entanto, vale uma atenção especial à análise das raízes. Como os logaritmos em ambos os membros da equação são expressões algébricas escritas na incógnita x, é preciso garantir que eles satisfaçam às condições de existência dos logaritmos, ou seja, que a base seja positiva e diferente de 1 (de fato) e que os logartimandos sejam positivos.

Se $x = -3$, $(-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 10 = 9 + 9 - 10 = 8 > 0$ e $2 - 2 \cdot (-3) = 2 + 6 = 8 > 0$.

Assim, se $x = 4$, $4^2 - 3 \cdot 4 - 10 = 16 - 12 - 10 = -6 < 0$ e $2 - 2 \cdot 4 = 2 - 8 = -6 < 0$, e a condição de existência não é satisfeita.

Logo, a equação possui uma única raiz $x = -3$.

- $\log_2(x-2) + \log_2(3x-2) = \log_2 7$

Para conseguir simplificar os logaritmos nesta equação, antes se faz necessário utilizar a propriedade do logaritmo do produto, e escrever a soma de logaritmos no membro esquerdo como $\log_2(x-2) + \log_2(3x-2) = \log_2(x-2)(3x-2)$, obtendo-se $(x-2)(3x-2) = 7 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 3$.

Fazendo a análise das raízes, tem-se $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x - 2 = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3} < 0$, violando a condição de existência, e $x = 3 \Rightarrow 3 - 2 = 1 > 0$, $3 \cdot 3 - 2 = 7 > 0$, o que satisfaz a condição de existência. Logo, $x = 3$ é a única raiz da equação.

Nestes três casos, a resolução é muito semelhante à de equações exponenciais quando a definição de logaritmo não era estritamente necessária. Por isso, assume-se que os estudantes, já com os conhecimentos prévios bem organizados em sua estrutura cognitiva, tenham facilidade tanto na compreensão quanto na manipulação das expressões.

Na sequência, considera-se o caso onde há uma expressão com logaritmos em apenas um dos membros da igualdade. Neste caso, recorre-se prontamente à definição de logaritmo.

- $\log_3(x^2 + 3x - 1) = 2$

Aplicando a definição de logaritmo, é possível reescrever a igualdade como $x^2 + 3x - 1 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$, cujas raízes são $x = -5$ e $x = 2$.

Testando, obtém-se $(-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 1 = 25 - 15 - 1 = 9 > 0$ e $2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 4 + 6 - 1 = 9 > 0$, ou seja, ambas as raízes são solução de equação.

Nessa última situação, especificamente, o teste das raízes não se faria estritamente necessário, pois a equação pode ser reescrita como $\log_3(x^2 + 3x - 1) = \log_3 9$, semelhante ao primeiro exemplo feito.

- $\log_x(3x-2)=2$

Aqui, depara-se com uma incógnita na base do logaritmo. Tal incógnita (ou expressão, se fosse o caso) precisa ser positiva e diferente de 1, de modo que também satisfaça as condições de existência dos logaritmos. Após tantos exemplos onde algumas raízes foram desconsideras, é importante que a necessidade de garantir as condições de existência satisfeitas seja clara ao aluno, de modo que ele torne o teste sempre parte do processo.

Neste caso, aplicando a definição e fazendo os ajustes necessários por meio dos princípios da igualdade, obtém-se a equação do segundo grau $3x-2=x^2 \Rightarrow x^2-3x+2=0$, cujas raízes são $x=1$ e $x=2$. De imediato, já se descarta a raiz $x=1$, pois 1 não pode ser base do logaritmo. Testando $x=2$, encontra-se $\log_2(3\cdot 2-2)=2 \Rightarrow \log_2 4=2$, o que é verdadeiro, de modo que a única solução da equação é $x=2$.

- $\log_2[1+\log_3(1-2x)]=2$

Nesta equação, o cuidado tem que ser redobrado na hora do teste. Não apenas $1-2x>0$, como também $1+\log_3(1-2x)>0$, a fim de que as condições de existência sejam satisfeitas.

Aplicando a definição no primeiro logaritmo, obtém-se $1+\log_3(1-2x)=4 \Rightarrow \log_3(1-2x)=3$. Fazendo o mesmo processo mais uma vez, encontra-se $1-2x=27 \Rightarrow 2x=-26 \Rightarrow x=-13$, que satisfaz tanto a primeira condição $(1-2\cdot(-13)=1+26=27>0)$ quanto a segunda $(1+\log_3 27=1+3=4>0)$.

Os exemplos apresentados aqui norteiam o caminho que o professor deve seguir para que a ancoragem da resolução das equações logarítmicas na estrutura cognitiva do aluno se dê de modo orgânico, a fim de que todos os conceitos sejam estabelecidos formalmente. O uso de outros exemplos com o intuito de facilitar a fixação e aprofundar a manipulação algébrica é sempre bem-vindo, contanto que sejam coerentes e desafiem os alunos à altura de seus conhecimentos prévios ou aos conquistados até então.

A partir de agora, as resoluções das equações tomam um rumo diferente, exigindo dos estudantes um passo além da simples aplicação da definição para eliminar o logaritmo.

- $(\log_2 x)^2-\log_2 x=2$

De imediato, percebe-se que, diferente do que estávamos trabalhando até então, há um logaritmo elevado ao quadrado. Os alunos podem até sugerir utilizar as propriedades operatórias, dado que há uma subtração de logaritmos, a fim de escrevê-los como o logaritmo do quociente, ou então propor utilizar a propriedade do logaritmo da potência, escrevendo $(\log_2 x)^2$ como $2 \cdot \log_2 x$.

Estas ideias, no entanto, estão incorretas, pois a propriedade do logaritmo da potência só pode ser aplicada se a potência em si estiver no logartimando, e não em todo o logaritmo. Isto é, $(\log_2 x)^2 \neq \log_2(x^2)$ O mesmo pode-se justificar sobre a propriedade do logaritmo do quociente. A expressão $(\log_2 x)^2$ torna falha todas as possibilidades de aplicar as propriedades operatórias, levando os alunos a um beco sem saída.

A solução, neste caso, é recorrer a uma variável auxiliar, que provavelmente já é um conhecimento prévio dos alunos. O professor, neste momento, faz-se valer de questionamentos, retomando as equações exponenciais que foram resolvidas por meio desta mesma técnica, de modo que a ideia de usar uma variável auxiliar venha dos próprios estudantes.

Um modo de identificar a necessidade da substituição é, tendo o quadrado aplicado em um logaritmo, perceber que o outro logaritmo, o termo "linear" da equação, é idêntico. Assim, ao escrever $\log_2 x = y$, a equação toma a forma $y^2 - y = 2$, e consequentemente $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -1$.

Fazendo a "volta", ou seja, reescrevendo a equação com a incógnita original, encontra-se $y = 2 \Rightarrow \log_2 x = 2$ que, por definição, implica em $x = 4$. De modo análogo, tem-se $y = -1 \Rightarrow \log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Portanto, a equação possui duas soluções reais: $x = 4$ e $x = \frac{1}{2}$.

Este caso não carece de "testes" pois os logaritmos em momento algum foram simplificados, nem houve manipulação de logartimandos.

De modo a desafiar os alunos e, ao mesmo tempo, revisar a resolução de equações fracionárias (caso este conteúdo tenha sido ancorado em sua estrutura cognitiva no Ensino Fundamental), também sugere-se trabalhar com a equação abaixo.

- $\frac{2+\log_3 x}{\log_3 x} + \frac{\log_3 x}{1+\log_3 x} = 2$

Com o excesso de logaritmos e a necessidade de trabalhar com denominadores, fazer uma substituição é aconselhável, nem que seja apenas para organizar a equação, sem correr o risco de se perder em meio a tantas notações.

Assim, fazendo $\log_3 x = y$, pode-se reescrever a equação de modo a obter $\frac{2+y}{y} + \frac{y}{1+y} = 2$. Reduzindo os denominadores e utilizando os princípios da igualdade para eliminá-los, encontra-se a equação equivalente $(2 + y)(1 + y) + y^2 = 2y(1 + y) \Rightarrow 2 + 2y + y + y^2 + y^2 = 2y + 2y^2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \log_3 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$.

É importante atentar aos alunos que, como os denominadores não podem ser nulos, y não pode assumir nem 0 nem -1, caso contrário $y = 0$ ou $1 + y = 0$ e as frações não fariam sentido, ou se tornariam indeterminadas. Como isso não acontece, a equação fracionária possui solução, e a equação logarítmica pode ser finalizada.

Chama-se atenção também o fato de que, caso não tivesse sido executada a substituição, a resolução da equação teria sido “bagunçada”, e a probabilidade de erro potencializada. Assim, mesmo que não se tenha caído, ao final, numa equação de segundo grau, a substituição foi necessária para organizar o cálculo e facilitar a subsequente manipulação da equação.

- $\log_3 x + \log_9 x = 1$

Por fim, propõe-se o estudo um caso específico, no qual estão presentes na equação dois logaritmos de bases diferentes. Especialmente neste caso, recorre-se à propriedade onde a base é uma potência, de modo que, ao escreve-se $9 = 3^2$, tem-se:

$$\log_9 x = \log_{3^2} x = \frac{1}{2}\log_3 x$$

Na sequência, utilizando a propriedade do logaritmo da potência, é possível escrever:

$$\frac{1}{2}\log_3 x = \log_3 x^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{x}$$

Retornando à equação, obtém-se $\log_3 x + \log_9 x = 1 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 \sqrt{x} = 1$, que reduz-se ao caso onde é necessário utilizar a propriedade do logaritmo do produto, reescrevendo a equação como $\log_3\left(x\sqrt{x}\right) = 1$. A partir daí, faz-se uso da definição e resolve-se a equação aplicando os princípios da igualdade. Tem-se $x\sqrt{x} = 3 \Rightarrow \left(x\sqrt{x}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 \cdot x = 9 \Rightarrow x^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$, que é a solução da equação, dado que $\sqrt[3]{9} > 0$.

Não se dará foco, neste texto, em equações logarítmicas com logaritmos de bases diferentes que não podem ser escritas como potências uma da outra.

4.1.4.2. Resolvendo inequações logarítmicas

Antes de dar início ao ensino da resolução de inequações logarítmicas, é necessário levar os estudantes a refletirem sobre como a base impacta a relação de ordem dos logaritmos. Para isso, faz-se novamente uso de um processo exploratório-investigativo.

Pede-se que, utilizando a calculadora científica, os alunos busquem os valores numéricos aproximados de $\log_2 12$ e $\log_2 25$. Os logartimandos foram escolhidos ao acaso, por isso podem ser alterados se for do desejo do professor. Apenas deve-se tomar cuidado para que a base seja maior que 1. Quando responderem que $\log_2 12 \approx 3{,}58$ e $\log_2 25 \approx 4{,}64$, pede-se que comparem estes números e, feito isso, faz-se o seguinte registro no quadro.

$$\log_2 12 < \log_2 25 \Leftrightarrow 12 < 25$$

Analogamente, procede-se com outros dois logaritmos de base superior a 1, por exemplo, $\log 50$ e $\log 121$. Tem-se $\log 50 \approx 1{,}70$ e $\log 121 \approx 2{,}08$. Portanto:

$$\log 50 < \log 121 \Leftrightarrow 50 < 121$$

Pede-se, então, que os alunos utilizem suas calculadoras científicas para encontrar $\log_{\frac{1}{2}} 12$ e $\log_{\frac{1}{2}} 25$. Perceba que, agora, mantiveram-se os logartimandos originais e mudou-se a base, desta vez para um número compreendido entre 0 e 1. Eles encontrarão $\log_{\frac{1}{2}} 12 \approx -3{,}58$ e $\log_{\frac{1}{2}} 25 \approx -4{,}64$.

É muito provável que eles percebam que encontraram valores opostos aos calculados anteriormente. De fato, $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x$. Caso esta observação seja trazida à tona, justifica-se de maneira análoga. Mas o mais importante neste caso é o registro:

$$\log_{\frac{1}{2}} 12 > \log_{\frac{1}{2}} 25 \Leftrightarrow 12 < 25$$

O mesmo servirá para o segundo caso. Ao tomar $\log_{\frac{1}{10}} 50$ e $\log_{\frac{1}{10}} 121$, encontra-se $\log_{\frac{1}{10}} 50 \approx -1{,}70$ e $\log_{\frac{1}{10}} 121 \approx -2{,}08$, o que leva a escrever:

$$\log_{\frac{1}{10}} 50 > \log_{\frac{1}{10}} 121 \Leftrightarrow 50 < 121$$

Há, nestas notações, a chave para a resolução das inequações logarítmicas. O intuito deste processo exploratório-investigativo é fazer com que os alunos percebam que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}_+, a \neq b$, tem-se duas possibilidades:

i. Se $c > 1$, então $\log_c a > \log_c b \Leftrightarrow a > b$

ii. Se $0 < c < 1$, então $\log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a > b$

Ou seja, se a base foi maior que 1, a relação de ordem dos logaritmos é a mesma que a dos logartimandos. Caso contrário, a relação de ordem se inverte. Em outras palavras, troca-se o sentido da desigualdade, do mesmo modo que acontece quando dividimos ou multiplicamos ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo. Este resultado também é muito parecido com a relação de ordem das potências, que já deve ter sido debatida anteriormente ao tratar de inequações exponenciais.

Esta conclusão é essencial para se trabalhar a resolução de uma inequação logarítmica. Novamente, convém trazer aos alunos alguns exemplos estratégicos, para que o conhecimento deste conteúdo específico seja construído de maneira clara e organizada, potencializando a ancoragem dos conceitos novos.

- $\log_2(2x-1) < \log_2 5$

Perceba que, como $2 > 1$, pode-se escrever $\log_2(2x-1) < \log_2 5 \Leftrightarrow 2x - 1 < 5$, com base no que foi discutido e concluído anteriormente. O processo de resolução de uma inequação logarítmica como essa, ou seja, com um logaritmo em cada membro da desigualdade, é facilitado pois recai em uma inequação de primeiro grau (ou semelhante). Segue que $x < 3$.

Contudo, como se está trabalhando com intervalos numéricos, tem-se que garantir que as condições de existência dos logaritmos sejam satisfeitas. Neste caso, é necessário que $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$. Logo, o intervalo de x que satisfaz com totalidade esta inequação é $\frac{1}{2} < x < 3$.

A solução final depende do conjunto universo U em que se está resolvendo a inequação. Se $U = \mathbb{N}$, então pode-se apenas citar seus elementos escrevendo $S = \{1, 2\}$. De modo análogo, se $U = \mathbb{Z}$, então $S = \{1, 2\}$ também. Se $U = \mathbb{Q}$, escreve-se $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| \frac{1}{2} < x < 3\right\}$. Para qualquer outro conjunto U, procede-se da mesma maneira.

- $\log_5(2x^2 - 5x) > \log_5 3$

Novamente, como $5 > 1$, obtém-se $\log_5(2x^2 - 5x) > \log_5 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x > 3 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 > 0$, e recai-se sobre uma inequação do segundo grau. Supõe-se que os alunos já tenham passado por este momento de aprendizado, e vale-se deste exemplo como organizador prévio, a fim de revisar a resolução deste tipo de inequação.

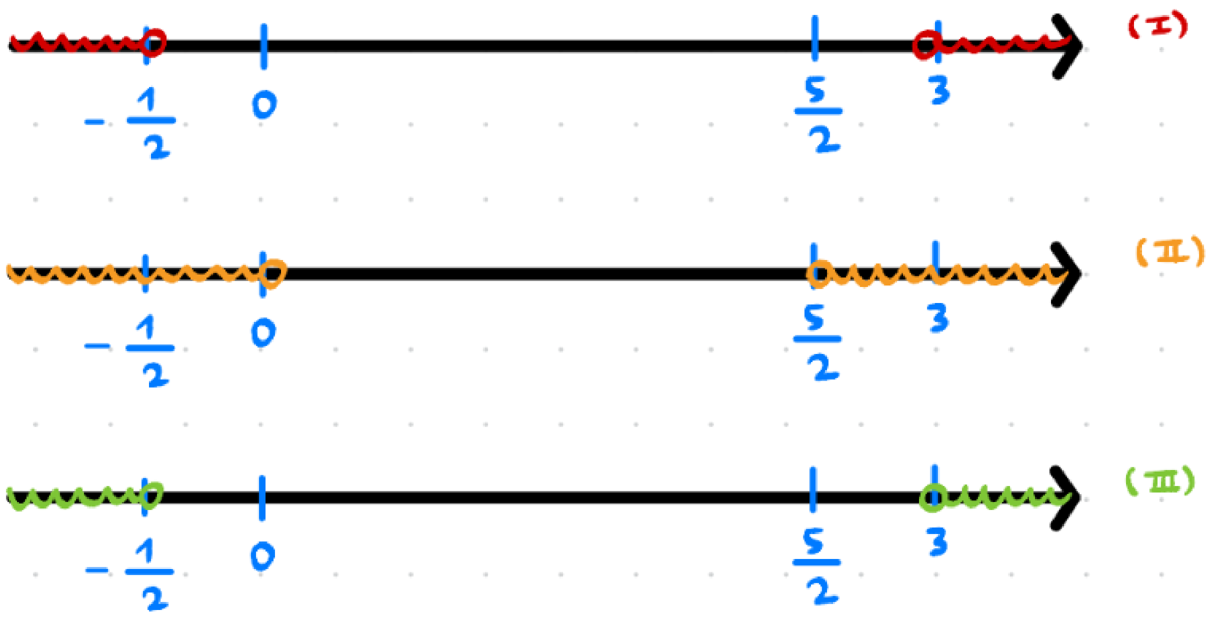
Assim, calculando as raízes de $2x^2 - 5x - 3 = 0$, encontra-se $x = 3$ ou $x = -\frac{1}{2}$. Construindo uma função quadrática auxiliar $q(x) = 2x^2 - 5x - 3$ e estudando seu sinal, obtém-se $q > 0 \ \forall\, x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 3$ e $q < 0 \ \forall -\frac{1}{2} < x < 3$, de modo que $2x^2 - 5x - 3 > 0$ recai no primeiro caso, ou seja, $x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 3$.

No entanto, não basta resolver esta inequação. É necessário verificar se as condições de existência dos logaritmos são satisfeitas. Este é um processo que demanda muito cuidado, pois muitas vezes é desconsiderado, gerando erros graves nos conjuntos soluções. Neste caso, precisa-se que $2x^2 - 5x > 0$. Surge uma bela oportunidade para que os alunos pratiquem o que foi revisado anteriormente: eles precisam resolver mais uma inequação quadrática, a fim de obter $2x^2 - 5x > 0 \Rightarrow x < 0$ ou $x > \frac{5}{2}$.

Chega-se ao momento crucial da resolução: comparar intervalos. Mais uma vez, supõe-se que os alunos já tenham tido contato com este tópico ao estudarem conjuntos numéricos, intervalos reais e operações entre intervalos. Os professores sempre devem se valer destes momentos para revisar e retomar o conceito já ancorado na estrutura cognitiva do estudante. Estas ocasiões são valiosas para refrear a assimilação obliteradora, discutida no *Capítulo 01*.

A solução da inequação, portanto, é o intervalo real (supondo estarmos resolvendo-a em $\mathbb{R}$) que é resultado da operação $\left[\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)\right] \cap \left[(-\infty, 0) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)\right]$. Para operar, sugere-se utilizar uma representação geométrica dos intervalos, conforme a Figura 16. Caso a técnica ensinada previamente para se resolver operações com intervalos tenha sido outra, adapta-se a proposta livremente.

Figura 16 – Operação de intersecção entre intervalos reais



Fonte: O autor

Na Figura 16, tem-se representado em **(I)** o intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$, em **(II)** o intervalo $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ e em **(III)** o intervalo $\left[\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)\right] \cap \left[(-\infty, 0) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)\right]$. Como $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty) \subset (-\infty, 0) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$, encontra-se:

$$\left[\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty)\right]\cap\left[(-\infty,0)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)\right]=$$
$$=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty)\subset(-\infty,0)$$

Ou seja, a solução da inequação logarítmica é o conjunto $S=\left\{x\in U\middle|x<-\frac{1}{2}\text{ ou }x>3\right\}$, onde U é o universo considerado, que respeita integralmente as condições de existência dos logaritmos.

Uma vez trabalhada a resolução de inequações logarítmicas com base maior que 1, além de revisar a resolução de inequações do segundo grau, tão mais trabalhosas que as do primeiro grau, propõe-se um exemplo onde a base dos logaritmos está compreendida entre 0 e 1.

- $\log_{\frac{1}{5}}(3x-1)\geq\log_{\frac{1}{5}}(2x+3)$

Inicialmente, é necessário garantir que as condições de existências dos logaritmos sejam satisfeitas, ou seja, que $3x-1>0$ e $2x+3>0$. Da primeira, $x>\frac{1}{3}$. Da segunda, $x>-\frac{3}{2}$. Logo, é suficiente que $x>\frac{1}{3}$.

Procedendo para a resolução em si, tem-se que, como $0<\frac{1}{5}<1$, então $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)\geq\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)\Leftrightarrow 3x-1\leq 2x+3\Rightarrow x\leq 4$.

Assim, a solução da inequação são os valores de x que são, ao mesmo tempo, maiores que $\frac{1}{3}$ e menores ou iguais a 4. Escreve-se $S=\left\{x\in U\middle|\frac{1}{3}<x\leq 4\right\}$, onde U é o universo em que se está resolvendo a inequação.

Com os alunos já apropriados das técnicas de resolução, o próximo exemplo os leva a utilizar todos os processos vistos ou revistos até então.

- $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-4x)>\log_{\frac{2}{3}}5$

Inicialmente, garante-se que as condições de existência dos logaritmos sejam satisfeitas. Para isso, $x^2-4x>0\Rightarrow x<0$ ou $x>4$.

Feito isso, como $0<\frac{2}{3}<1$, pode-se escrever $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-4x)>\log_{\frac{2}{3}}5\Leftrightarrow x^2-4x<5\Rightarrow x^2-4x-5<0\Rightarrow -1<x<5$.

Logo, a solução de inequação recai na intersecção dos intervalos $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ e $(-1,5)$, ou seja, no intervalo $(-1,0)\cup(4,5)$. Portanto, para qualquer universo U, o conjunto solução da inequação é $S=\{x\in U|-1<x<0\text{ ou }4<x<5\}$.

Para se trabalhar com o segundo caso de inequação logarítmica, aquele em que só há uma expressão com logaritmo em um membro da desigualdade, sugere-se utilizar a ideia de que, dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$, $b \neq 1$, tem-se:

$$a = \log_b b^a$$

De fato, $\log_b b^a = a \cdot \log_b b = a \cdot 1 = a$.

- $\log_3(5x - 1) < 2$

Diferente do que foi visto até então, não se tem logaritmos em ambos os membros da desigualdade para aplicar a bimplicação já definida. Por isso, vale-se da propriedade para escrever o segundo membro como $2 = \log_3 3^2$, utilizando a mesma base do logaritmo do primeiro membro.

Assim, $\log_3(5x - 4) < \log_3 3^2$ e, como $3 > 1$, $\log_3(5x - 1) < \log_3 3^2 \Leftrightarrow 5x - 1 < 3^2 \Rightarrow 5x - 1 < 9 \Rightarrow x < 2$, que é o intervalo solução da equação. As condições de existência exigiam $5x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{5}$, o que é contemplado.

Em resumo, para resolver inequações deste tipo, basta reescrever o membro sem logaritmo utilizando a propriedade, e seguir do mesmo modo como vinha sendo executado até então. Depois do novo conhecimento já ancorado, vale-se de artifícios que tornem o processo de resolução mais econômico, suplantando, por exemplo, a reescrita de 2 como $\log_3 3^2$ e partindo diretamente para o passo seguinte. Estratégias de resolução como esta potencializam o desenvolvimento da autonomia no aluno, que precisa tomar decisões assertivas para desenvolvê-las.

- $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x) > -1$

Escrevendo -1 como um logaritmo de base $\frac{1}{2}$, obtém-se $-1 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, e a inequação assume a forma $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$. Como $0 < \frac{1}{2} < 1$, tem-se a bimplicação $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow 2x^2 - 3x < 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 2$. O passo-a-passo da resolução da inequação do segundo grau foi omitido para fins de simplificação, mas assemelha-se ao que já foi feito anteriormente.

Para satisfazer as condições de existência dos logaritmos, é obrigatório que $2x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x < 0$ ou $x > \frac{3}{2}$.

Logo, o intervalo que soluciona integralmente a inequação é a intersecção dos intervalos $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ e $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, que resulta em $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, ou seja, $S = \left\{x \in U \middle| -\frac{1}{2} < x < 0 \text{ ou } \frac{3}{2} < x < 2\right\}$, onde U é o universo escolhido para resolver a inequação.

É interessante levar os alunos a refletir o impacto da escolha do universo para a solução final. No caso deste último exemplo, caso $U = \mathbb{N}$ ou $U = \mathbb{Z}$, percebe-se que não existe nenhum natural ou inteiro no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Desse modo, $S = \emptyset$ em ambas as situações. Para qualquer outro universo, a perspectiva muda.

Por fim, vale a pena discutir um caso onde é necessário fazer uso de uma incógnita auxiliar.

- $\log_3^2 x - 3 \cdot \log_3 x + 2 > 0$

Antes de tudo, é importante observar aos alunos que as notações $\log_3^2 x$ e $(\log_3 x)^2$ são equivalentes.

Como é comum em casos como este, executa-se uma substituição de incógnita, como $\log_3 x = y$, e resolve-se a inequação resultante $y^2 - 3y + 2 > 0$, obtendo $y < 1$ ou $y > 2$.

Da primeira desigualdade, $\log_3 x < 1 \Rightarrow \log_3 x < \log_3 3^1 \Leftrightarrow x < 3$. Da segunda desigualdade, $\log_3 x > 2 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 3^2 \Leftrightarrow x > 9$. Logo, $x \in (-\infty, 3) \cup (9, +\infty)$.

Mas, das condições de existência dos logaritmos, $x > 0$. Logo, a solução da inequação recai na intersecção dos intervalos $(-\infty, 3) \cup (9, +\infty)$ e $(0, +\infty)$, que é o intervalo $(0, 3) \cup (9, +\infty)$, ou seja, a solução de inequação num dado universo U é o conjunto $S = \{x \in U | 0 < x < 3 \text{ ou } x > 9\}$.

Das 18 questões do ENEM selecionadas, nenhum traz como parte principal apenas a resolução de uma equação ou inequação logarítmica. Tais resoluções estão associadas a problemas envolvendo funções logarítmicas, como a *Questão 14*. Aprender a resolver equações e inequações logarítmicas é, portanto, essencial para que os alunos consigam interpretar as funções logarítmicas, conteúdo que, nesta proposta de sequência didática, será abordado na próxima seção.

A fixação e a apropriação das técnicas de resolução por parte dos alunos devem vir do estudo constante e da resolução de exercícios que objetive a prática. O professor, que se supõe conhecer sua turma, precisa direcioná-los a estes exercícios. Por mais maçante e repetitivo que possa ser, a prática é necessária. Por isso, sugere-se a seleção de equações com grau de dificuldade crescente, que coloquem o estudante em uma posição ativa, levando-o a refletir sobre qual das propriedades dos logaritmos ou estratégia resolutiva, como a substituição, devem ser usadas para se encontrar a solução.

4.1.5. Estudando uma função logarítmica

Uma vez trabalhada a definição de logaritmo, suas propriedades operatórias e como resolver equações e inequações logarítmicas, passa-se para a parte final do processo: o estudo de funções logarítmicas. Nesta seção específica, trata-se primeiramente da lei de formação de funções logarítmicas, ou seja, uma análise algébrica, que fará uso constante das propriedades e se valerá das equações logarítmicas para se resolver problemas, para em seguida introduzir o gráfico de uma função logarítmica, a composição de funções e a relação entre o gráfico de uma função e sua lei de formação, vinculando tal tópico a algumas atividades com enunciados clássicos, através de processos exploratório-investigativos e do Geogebra, *software* de geometria dinâmica.

4.1.5.1. Explorando leis de formação de funções logarítmicas

O estudo das funções logarítmicas parte da *Questão 14*, selecionada do Exame Nacional do Ensino Médio. Para isso, fez-se necessário fazer algumas adaptações, de modo que a condução da aula seja norteada por uma trilha coerente com o processo de construção do conhecimento baseado na Teoria da Aprendizagem Significativa.

A partir do enunciado original, construiu-se o seguinte exercício:

> Um jardineiro cultiva uma variedade de plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h(t) = 5 \cdot \log_2(t+1)$, em que t é o tempo contado em dia e h, a altura da planta em centímetro.
>
> **a.** É possível colocar a planta à venda 15 dias após o brotamento?
>
> **b.** E após 31 dias?
>
> **c.** Após quantos dias é possível colocar a planta à venda?
>
> **d.** Após quantos dias a planta atinge a altura máxima?
>
> **e.** A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dia, ela alcançará sua altura máxima?

Aos alunos, aponta-se na questão a presença de uma função onde a variável independente é o logartimando de um logaritmo. Exatamente por isso, ela é chamada de função logarítmica.

Com conhecimentos prévios sobre funções bem estabelecidos, o estudante que lê a primeira pergunta deve perceber que, no item **a.**, ao fornecer o tempo ($t = 15$ dias), pede que se calcule a altura $h(15)$. Fazendo isso, ou seja, substituindo 15 na função, encontra-se $h(15) = 5 \cdot \log_2(15+1) = 5 \cdot \log_2 16 = 5 \cdot 4 = 20$ centímetros. Com base no enunciado, infere-se que ainda não é possível colocar a planta à venda 15 dias após o brotamento, pois ela não teria a altura mínima de 30 centímetros.

O item **b.** envolve uma repetição dos processos utilizados no item **a.**, como se ele servisse como organizador prévio e, ao passo que este funcionasse como exercício de fixação, proposto com a finalidade dos alunos aplicarem o processo independentemente. Assim, quer-se descobrir a altura quando $t = 31$, de modo que calcula-se $h(31) = 5 \cdot \log_2(31+1) = 5 \cdot \log_2 32 = 5 \cdot 5 = 25$ centímetros, e conclui-se novamente que com 25 centímetros a planta não está pronta para ser colocada à venda.

Por sua vez, no item **c.** propõe-se que os alunos determinem com quantos dias a planta pode ser colocar à venda. Para isso, é necessário determinar x tal que $h(x) = 30$, ou seja, o processo inverso do que se fez anteriormente (quando tínhamos x, a variável independente, e queríamos determinar h, a variável dependente). Novamente, utiliza-se este exercício como organizador prévio, ao lembrar os alunos que, para fazer tal caminho inverso, equaciona-se o problema a partir da função, ou seja, escreve-se $5 \cdot \log_2(t+1) = 30$, obtendo-se uma equação logarítmica para resolver. Aplicando-se as técnicas aprendidas até então, encontra-se $\log_2(t+1) = 6 \Rightarrow t+1 = 2^6 \Rightarrow t+1 = 64 \Rightarrow t = 63$ dias.

Procede-se da mesma maneira para o item **d.**, que pede para se determinar depois de quanto tempo a planta atinge a altura máxima, que segundo o enunciado é de 40 centímetros. Assim, procura-se x tal que $h(x) = 40$. Tem-se $5 \cdot \log_2(t+1) = 40 \Rightarrow \log_2(t+1) = 8 \Rightarrow t+1 = 2^8 \Rightarrow t+1 = 256 \Rightarrow t = 255$ dias.

Por fim, o item **e.**, este trazido diretamente da questão original, faz uso dos resultados obtidos em **c.** e **d.**, ao pedir a diferença entre os tempos encontrados, ou seja, $255 - 63 = 192$ dias.

Posto desta maneira, esta questão adaptada conduz os alunos por um caminho onde eles conseguem revisar e aplicar os conceitos já conhecidos de funções, desta vez direcionados ao trabalho com uma função logarítmica. Frisa-se mais uma vez a importância do domínio dos princípios da igualdade para resolver equações, da definição, das propriedades dos logaritmos e das regras que regem as manipulações algébricas. Tais conceitos são pré-requisitos para que se possa, de fato, aprender funções logarítmicas significativamente.

Para que os estudantes possam apropriar-se destes processos sugestiona-se utilizar as *Questões 07, 13* e *01*. As duas primeiras são muito parecidas, e propõem que se substitua valores dados no enunciado na função para encontrar um certo valor numérico para a variável dependentes. Em ambas, também se faz necessário manipular logartimandos para que seja possível aplicar propriedades a fim de separar os logaritmos, ou então simplificá-los, visando substituir valores dados no enunciado. No caso da *Questão 01*, propõe-se o oposto. O aluno precisa equacionar o problema para, a partir da variável dependente dada, descobrir o valor numérico da variável independente.

Sobre estas questões, dois adendos são importantes de serem comentados. O primeiro é o alto foco dado à aplicação de logaritmos para se calcular e classificar a magnitude de terremotos. Destaca-se, inclusive, que duas das questões selecionadas são praticamente idênticas. O segundo é que, mesmo com um conhecimento superficial sobre manipulação de logaritmos, o aluno consegue se virar muito bem nas resoluções, pois são utilizadas as propriedades mais convencionais.

Por outro lado, convém propor também aos alunos que resolvam as *Questões 05* e *11*. Mais duas questões cujo tema é a magnitude de terremotos, mas que englobam mais manipulações algébricas, além de trazer consigo, explícita ou implicitamente, a ideia de razão. Sugere-se utilizar uma delas como exemplo, construindo a resolução junto dos alunos, e propor que eles resolvam a outra sozinhos, a fim de observar até que ponto eles já têm autonomia ao operar as expressões e tomar decisões que impactam na resolução dos problemas.

Por fim, traz-se a *Questão 18,* a mais recente dentre as aplicações do ENEM. Com um enunciado extenso e enrolado e uma expressão, à princípio, confusa, verifica-se que sua resolução torna-se mais fácil quando se percebe que é necessário apenas substituir os valores dados para I_0 e I e aplicar as propriedades convenientes para se chegar aos valores chave para se utilizar as equivalências apresentadas no enunciado.

Esta última é um exemplo de questão cuja resolução, apesar de simples, pode trazer à tona dúvidas pontuais, relacionadas às propriedades da potenciação e às operações com números negativos, além de lapsos causados pelo trabalho recente com as propriedades dos logaritmos, que podem não ter sido ainda totalmente ancorados às estruturas cognitivas dos alunos. O professor, ao considerar tais aspectos, deve separar um tempo para retomar e revisar tais conceitos, de modo a reestabelecer o processo rumo à Aprendizagem Significativa.

Por fim, sugere-se trabalhar com as *Questões 10* e *12*, ambas relacionadas à aplicação dos logaritmos no cálculo do pH de uma substância, e ambas também envolvendo a resolução de inequações logarítmicas. Nenhuma delas traz desenvolvimentos complexos, mas deve-se tomar cuidado com os sinais (positivo ou negativo), a natureza das bases (maior que 1 ou compreendida entre 0 e 1), para evitar dificuldade com o sentido da desigualdade, e com as inequações simultâneas, sempre atentando aos alunos a importância de separá-las para resolvê-las adequadamente.

4.1.5.2. Explorando gráficos de funções logarítmicas

No que tange aos gráficos de funções logarítmicas, o ENEM, ao longo dos 14 anos desde a sua reformulação, trouxe apenas uma questão que se relaciona diretamente à análise gráfica de uma função logarítmica: a *Questão 03*, que aborda a modelagem do vidro de um automóvel e possui um nível alto de complexidade e elegância. Para resolvê-la, o aluno precisa articular conhecimentos que vão além da compreensão da curva logarítmica, englobando também a resolução de uma equação fracionária, exponencial e literal por substituição, recaindo em uma equação do 2° grau. Para atingir tal objetivo, propõe-se seguir por outro caminho.

Para aprender gráficos de funções logarítmicas, assume-se que os alunos já tenham tido contato com gráficos de funções afim, quadrática e exponencial, pelo menos, e saibam relacionar pontos (x, y) do gráfico de uma função f com pares ordenados gerados pelos valores $y = f(x)$ da imagem de uma função assumidos para cada valor de x do seu domínio.

Com isso em mente, apresenta-se um grande aliado do professor de Matemática no processo de ensinar sobre gráficos de qualquer tipo de função: o Geogebra[3], que trata de um *software* de geometria dinâmica gratuito, disponível *offline*. Foi criado em 2001, pelo americano Markus Hohenwarter, e é de grande utilidade no meio educacional, principalmente nas áreas de ciências, tecnologia, engenharia e matemática. O aplicativo utiliza, em primeiro plano, uma interface geométrica e outra algébrica, e é bastante útil como ferramenta de ensino e de aprendizagem quando se trabalha com conteúdos que envolvem funções ou construções geométricas (GEOGEBRA.ORG, 2025).

Levando em consideração tais potencialidades do aplicativo, o Geogebra torna-se um grande aliado ao professor para potencializar a ocorrência da aprendizagem significativa de conteúdos, pois possibilita ao estudante atuar como sujeito ativo do processo de aprendizagem, ao tornar potencialmente significativo o objeto criado por ele no *software*.

[3] https://www.geogebra.org/

Para fazer uso do Geogebra em sala de aula, deve-se considerar algumas possibilidades:

- os alunos possuem aparelhos digitais (celulares, tablets, notebooks, ...) à disposição e podem usá-los em sala com finalidade pedagógica;
- os alunos não possuem aparelhos digitais à disposição, mas a escola possui um laboratório de informática para uso didático;
- os alunos não possuem aparelhos digitais e a escola não possui um laboratório de informática à disposição, mas é possível utilizar um projetor *datashow* para as aulas;
- nenhuma das três opções acima é viável.

Neste último caso, as tarefas devem ser adaptadas utilizando a tela de um computador, ou então a partir de material impresso preparado com antecedência. De qualquer maneira, a sequência didática descrita a seguir pode ser adaptada facilmente a partir das necessidades da turma e do professor.

Para começar, propõe-se que os alunos construam manualmente a função $f(x) = \log_2 x$, como forma de organizador prévio, com o objetivo de retomar a relação estabelecida entre lei de formação, par ordenado e representação gráfica. Assim, associa-se valores específicos a x e calcula-se $f(x)$, relacionando-os aos pares ordenados $(x, f(x))$. Uma estratégia de mediação é fazer os alunos refletirem que valores específicos da variável independente gerariam valores inteiros da função, de modo a facilitar a construção da curva. A Tabela 9 mostra um exemplo de construção dos pares ordenados referentes ao gráfico da função.

Tabela 9 – Cálculo de alguns pontos do gráfico da função $f(x) = \log_2 x$

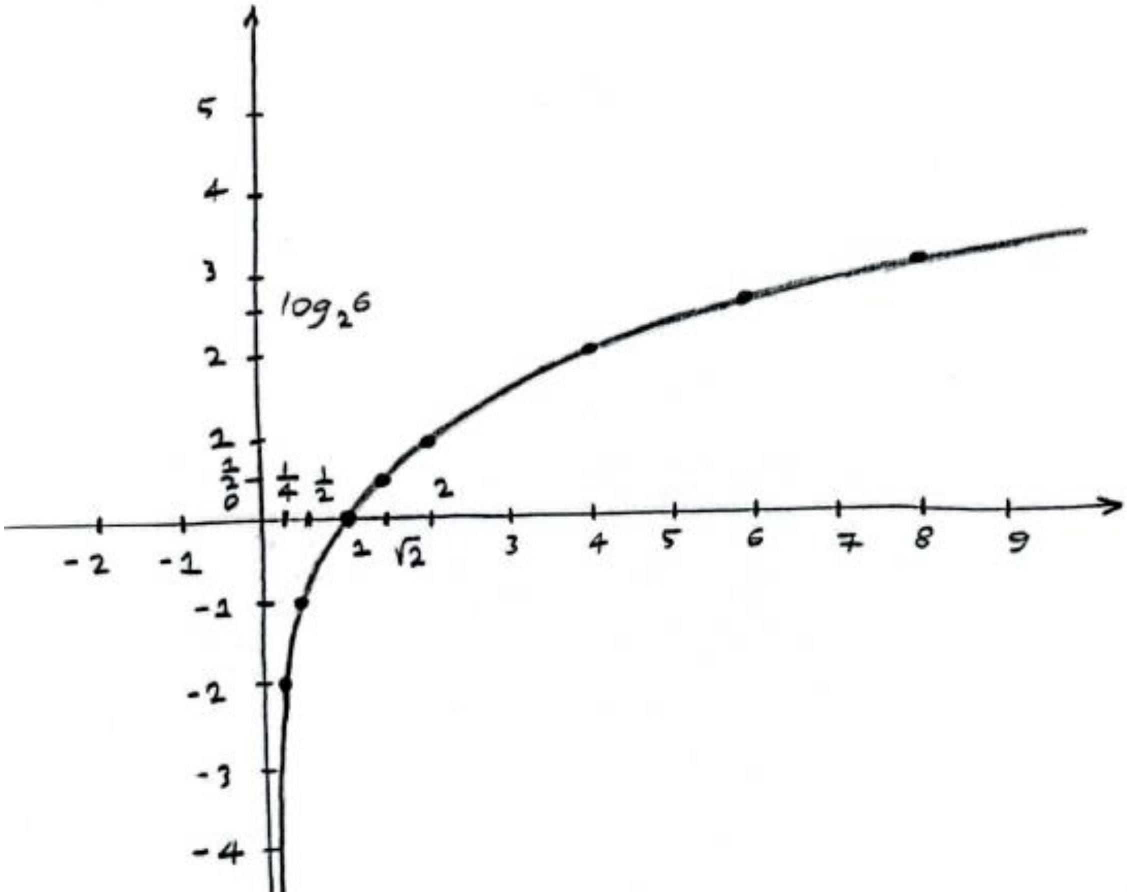
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = f(x)}$	$\boldsymbol{(x, f(x))}$
$\mathbf{1}$	$f(1) = \log_2 1 = 0$	$(1, 0)$
$\mathbf{2}$	$f(2) = \log_2 2 = 1$	$(2,1)$
$\mathbf{4}$	$f(4) = \log_2 4 = 2$	$(4,2)$
$\mathbf{8}$	$f(8) = \log_2 8 = 3$	$(8, 3)$
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -1$	$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) = -2$	$\left(\frac{1}{4}, -1\right)$

$\sqrt{2}$	$f(\sqrt{2}) = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$	$\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$
6	$f(6) = \log_2 6 \approx 2{,}58$	$(6, 2{,}58)$

Fonte: O autor

O próximo passo é associar a cada par ordenado encontrado um ponto no plano cartesiano. Ao fazer isso, o aluno costuma perceber um padrão na localização destes pontos que, quando unidos, formam o gráfico da função logarítmica, conforme pode ser observado na Figura 17.

Figura 17 – Gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ construído manualmente

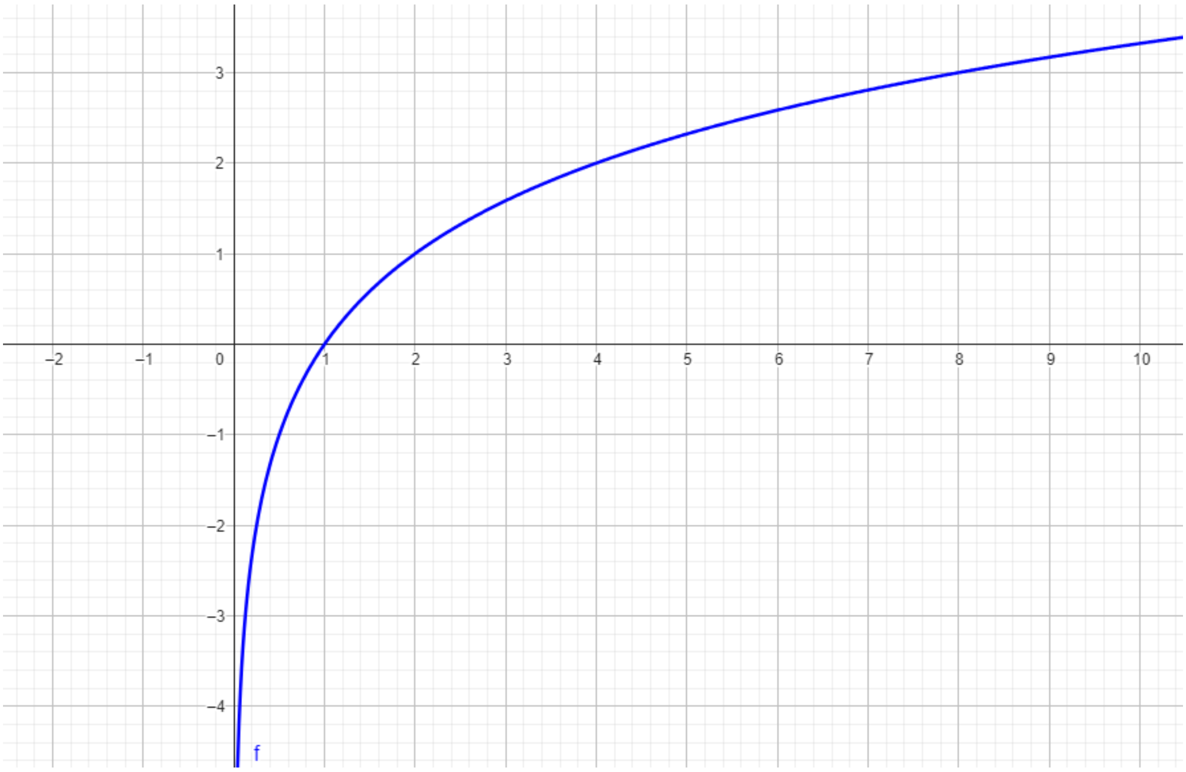


Fonte: O autor

Ao traçar um gráfico manualmente sempre se corre o risco de, mesmo que involuntariamente, não respeitar o domínio, a imagem, possíveis descontinuidades ou assíntotas da função. Por isso, é importante também tratar disso neste momento, retomando as condições de existência dos logaritmos. Assim, $\log_b a$ só existe se $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Além disso, o logaritmo pode assumir qualquer valor real (tanto positivo quando negativo). Em comparação, no caso da função $f(x) = \log_2 x$, por exemplo, x é o logartimando, ou seja, $x > 0$, e o logaritmo, que neste caso é a própria função, assumiria qualquer valor real. Logo, o domínio da função f são todos os reais positivos ($D(f) = \mathbb{R}_+^*$), ao passo que sua imagem são todos os reais ($Im(f) = \mathbb{R}$).

Assim, para verificar se os gráficos construídos manualmente pelos alunos respeitam tais condições, vale-se do Geogebra como meio de confirmação dos resultados (ver Figura 18).

Figura 18 – Gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ construído no Geogebra



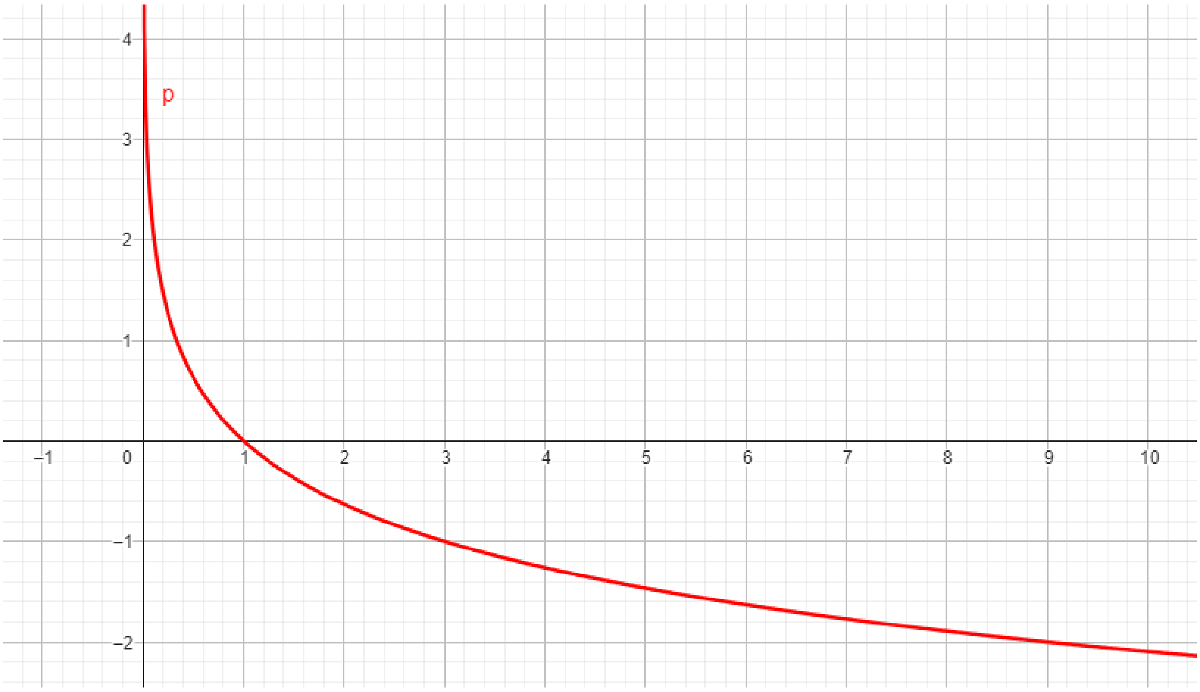
Fonte: O autor

Com o gráfico gerado pelo Geogebra, os alunos conseguem perceber, com mais detalhes, que f assume qualquer valor real (do eixo y), tanto que é contínua e estritamente crescente. Também é possível identificar a raiz da função: $x = 1$, pois $f(1) = 0$. Ainda, fica claro que conforme os valores de x se aproximam de 0, os valores de f ficam cada vez menores, mas o eixo y nunca é cruzado. É possível utilizar o recurso *zoom* do Geogebra e aproximar o gráfico da função conforme ele se aproxima do eixo y, concretizando a ideia de assíntota vertical.

Supõe-se, neste momento, que os alunos já tiveram contato com o conceito de assíntota horizontal ao estudarem os gráficos da função exponencial. Deste modo, com o conceito já ancorado à estrutura cognitiva dos estudantes, torna-se mais fácil modificá-lo, ampliando-o às funções logarítmicas.

Utilizando o Geogebra mais uma vez, sugere-se traçar os gráficos das funções $g(x) = \log x$, $h(x) = \ln x$, $p(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ e $q(x) = \log_{\frac{3}{5}} x$. A ideia é levar os alunos a analisar o comportamento destas funções e tentar relacioná-lo a algum de seus elementos. Para fins de exemplificação, o gráfico da função $p(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ foi representado na Figura 19.

Figura 19 – Gráfico da função $p(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



Fonte: O autor

Novamente por observação e através de um raciocínio indutivo, leva-se os alunos a perceber que as funções onde as bases dos logaritmos são valores maiores que 1 (no caso f, g e h) são estritamente crescentes, ao passo que as demais (p e q), cujas bases são menores que 1, mas maiores que 0 (afinal de contas não se pode violar as condições de existência dos logaritmos), são estritamente decrescentes. Além disso, todos os gráficos das funções cruzam o eixo x em $x = 1$ e tem a mesma assíntota vertical (o eixo y).

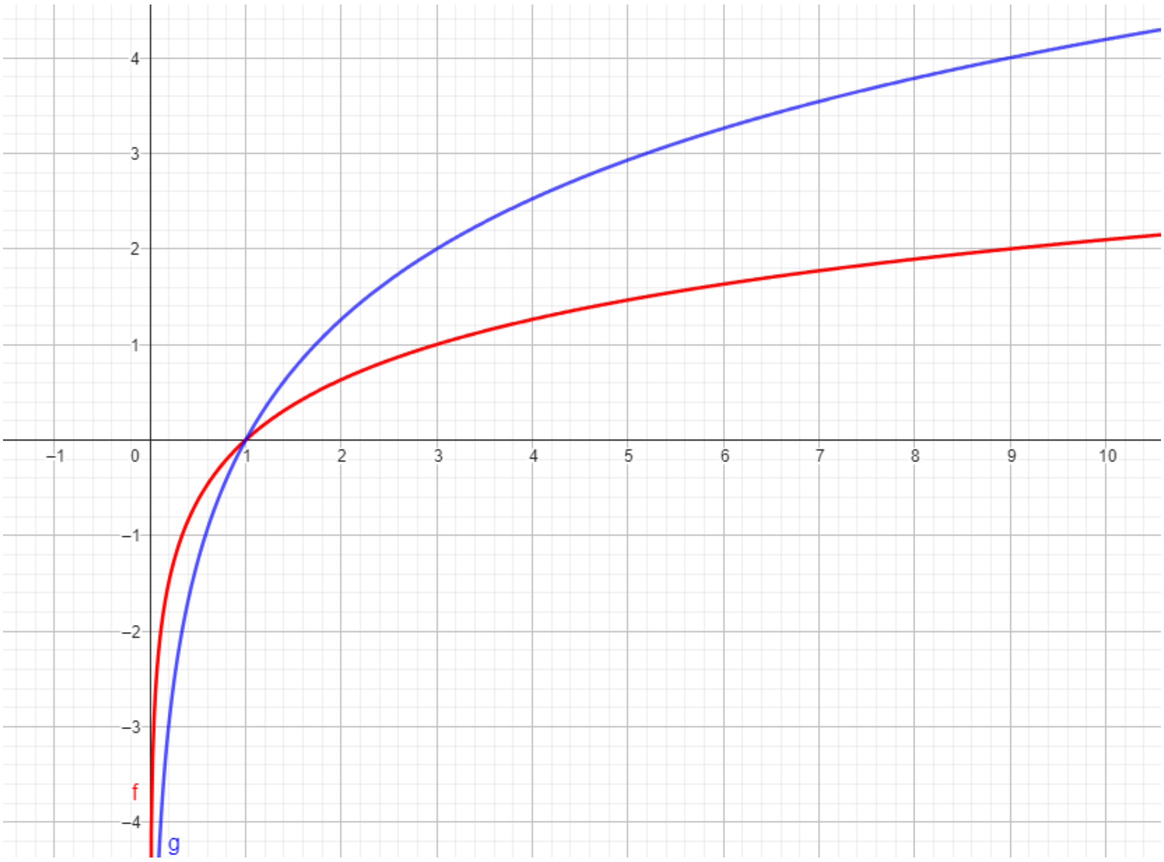
Estas três características são essenciais para compreender como funciona o gráfico de uma função logarítmica, pois são de grande ajuda para o próximo passo a ser dado: a composição de funções logarítmicas. É a partir delas que se pode verificar que movimentos tais composições implicam nos gráficos das funções, como translações, reflexões, ampliações e reduções.

Para isso, vale-se de alguns exemplos e do Geogebra, com a finalidade de comparar a função logarítmica original, neste caso $f(x) = \log_3 x$, e suas composições.

- $g(x) = 2 \cdot \log_3 x$

Primeiramente, é importante que os alunos visualizem os gráficos de g e f simultaneamente no plano cartesiano, conforme ilustrado na Figura 20.

Figura 20 – Gráficos das funções $g(x) = 2 \cdot \log_3 x$ e $f(x) = \log_3 x$



Fonte: O autor

Ao trazer questionamentos coerentes relacionados ao comportamento da nova função, a ideia é conduzir os alunos a perceberem que todos os valores da função dobraram, ou seja, cada valor de x levado a um valor de y na f passa a ser associado a um valor $2y$ na g. Algebricamente, escreve-se $g(x) = 2 \cdot f(x)$, ou seja, cada ponto (x, y) pertencente ao gráfico de f é associado ao ponto $(x, 2y)$ do gráfico da g.

Munido do gráfico, é fácil citar alguns exemplos. Os pontos $(3, 1)$, $(9, 2)$ e $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$ da f se transformam nos pontos $(3, 2)$, $(9, 4)$ e $\left(\frac{1}{3}, -2\right)$ da g, respectivamente. A raiz permanece a mesma: $(1, 0)$, afinal de contas $g(1) = 0 = 2 \cdot 0 = 2 \cdot f(1)$.

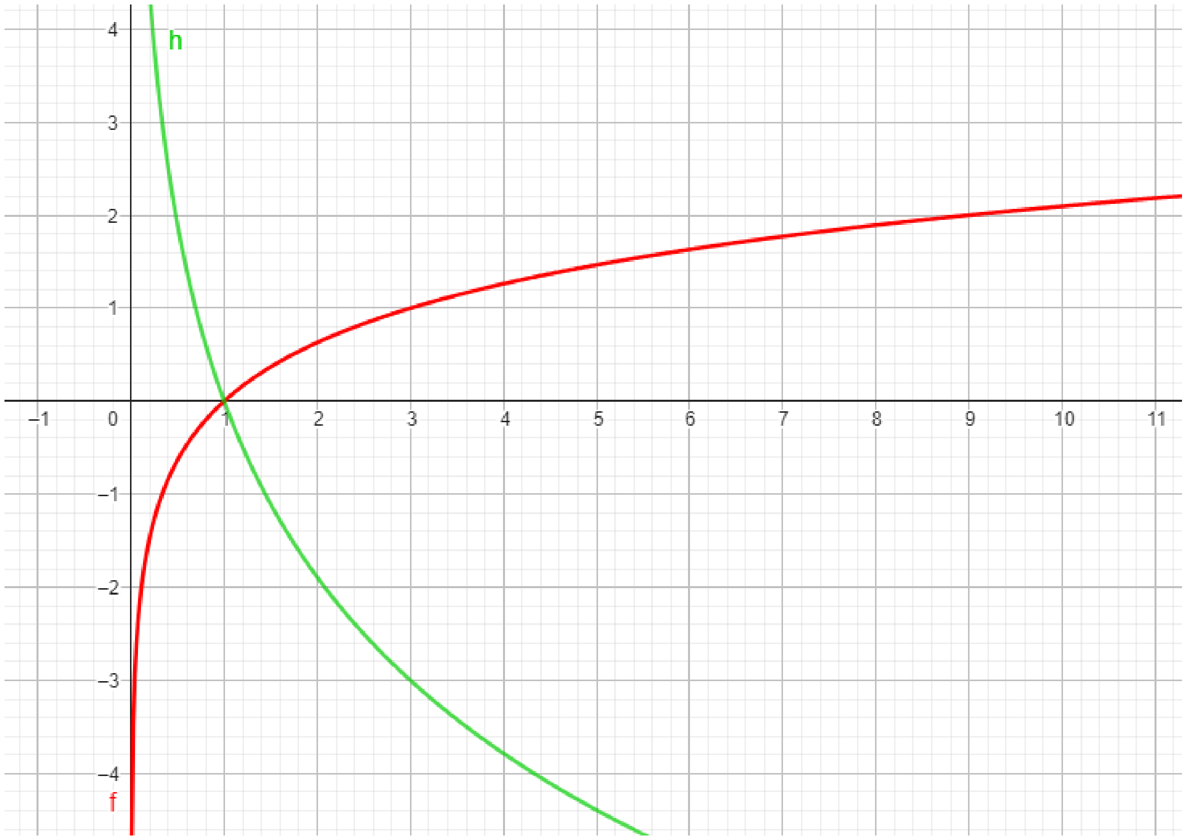
Do ponto de vista prático, é como se o gráfico da função f fosse "espichado" verticalmente. Ainda, vale ressaltar que, como a função não teve movimentação horizontal, sua assíntota permanece a mesma.

Indo ao encontro deste primeiro exemplo, propõe-se um segundo, diretamente relacionado a ele e apresentado a seguir.

- $h(x) = -3 \cdot \log_3 x$

Novamente, com base nas representações gráficas visíveis no Geogebra, é possível perceber que, ao ser multiplicada por um fator negativo, a função f passa a ser estritamente decrescente, mesmo a base da função sendo $3 > 1$, conforme pode ser observado na Figura 21.

Figura 21 – Gráficos das funções $h(x) = -3 \cdot \log_3 x$ e $f(x) = \log_3 x$



Fonte: O autor

Propõe-se que os alunos, neste momento, criem hipóteses do porquê isto acontece. Isto é, argumentem logicamente o que faz com que a função mude seu comportamento tão drasticamente. A resposta é simples: do mesmo modo que a função $g = 2f$ tinha seus valores dobrados, $h = -3f$ tem seus valores triplicados, além de ter o sinal trocado, ou seja, o que antes era positivo, torna-se negativo, e vice-versa.

Dessa maneira, pontos como $(3, 1)$, $(9, 2)$ e $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$ do gráfico da f transformam-se, respectivamente, nos pontos $(3, -3)$, $(9, -6)$ e $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ do gráfico da g. Geometricamente, além da ampliação vertical – o "esticamento" causado pelo fator 3 – a função também é refletida em torno do eixo x, motivado pelo fator negativo.

Também, mais uma vez, percebe-se que tanto a raiz quanto a assíntota vertical da função não se alteram.

Uma informação interessante de ser construída juntos dos alunos neste momento é a demonstração do que motiva a mudança de comportamento (crescimento e decrescimento) de uma função $f(x) = \log_b x$ depender de b. É claro que, como já citado inicialmente neste capítulo, a escolha de aprofundar alguns tópicos depende do professor e do conhecimento que ele tem sobre os limites e as potencialidades da própria turma.

Assim, supondo $b > 1$ e dividindo ambos os membros da desigualdade por b (o sentido da desigualdade não é alterado pois b é positivo), tem-se que $1 > \frac{1}{b} \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < 1$. Logo, se $f(x) = \log_{\frac{1}{b}} x$ for uma função logarítmica de base $0 < \frac{1}{b} < 1$, então, a partir de propriedade da potência na base do logaritmo, pode-se escrever:

$$\log_{\frac{1}{b}} x = \log_{b^{-1}} x = -1 \cdot \log_b x = -\log_b x$$

Ou seja, $f(x) = -\log_b x$.

Supondo $g(x) = \log_b x$, com $b > 1$, tem-se que g é estritamente crescente. Assim, o gráfico de f, ao ser composta pela g multiplicada pelo coeficiente -1, é refletido em torno do eixo x, causando a mudança de comportamento no gráfico da função, de estritamente crescente para estritamente decrescente.

Caso o professor não queira aventurar sua turma por uma explicação tão teórica e generalizada, pode optar-se por utilizar o exemplo numérico tratado anteriormente. Isto é, dado que $h(x) = -3 \cdot \log_3 x$, pode-se manipular a expressão do membro esquerdo com a finalidade de obter:

$$-3 \cdot \log_3 x = 3 \cdot (-1) \cdot \log_3 x = 3 \cdot \log_{3^{\left(\frac{1}{-1}\right)}} x = 3 \cdot \log_{3^{-1}} x = 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x$$

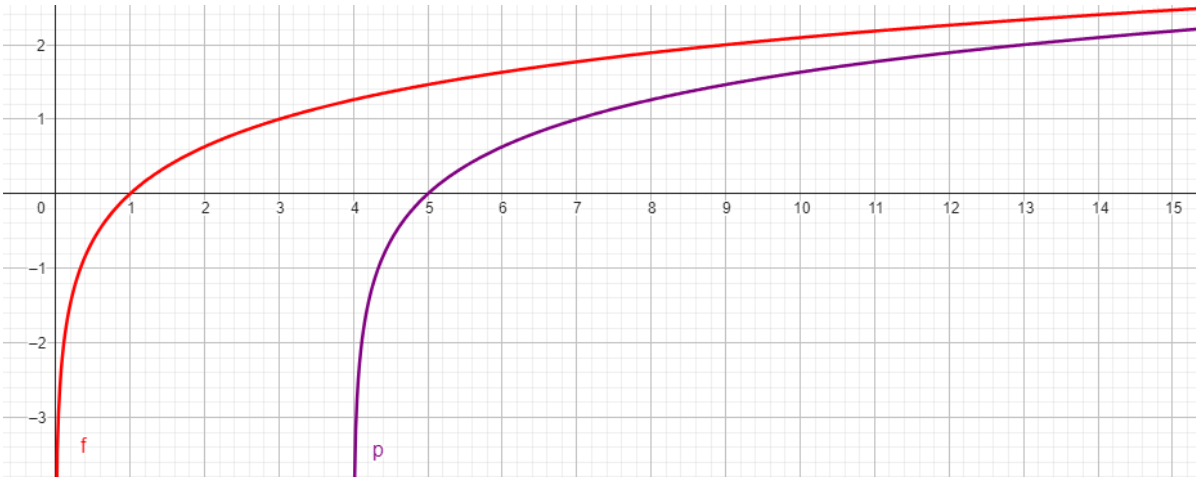
Ou seja, h é equivalente à função logarítmica de base $\frac{1}{3}$ (que é estritamente decrescente, pois $0 < \frac{1}{3} < 1$), triplicada, isto é, "espichada" verticalmente.

- $p(x) = \log_3(x-4)$

Completamente diferente do que aconteceu nos dois primeiros exemplos, aqui houve uma mudança no argumento da função, ou seja, as mudanças estão diretamente relacionadas à variável dependente, de tal forma que $p(x) = f(x-4)$.

Caso o professor já tenha trabalhado previamente translação, reflexão, ampliação e redução de funções, utiliza-se este exemplo como organizador prévio, tal qual os dois primeiros. Caso contrário, propõe aos alunos um processo explorativo-investigativo que começa com a análise dos gráficos das funções p e f no mesmo plano cartesiano, como na Figura 22.

Figura 22 – Gráficos das funções $p(x) = \log_3(x-4)$ e $f(x) = \log_3 x$



Fonte: O autor

Fica claro, ao comparar-se as funções visualmente, que seus gráficos tem o mesmo formato, mas o gráfico de p está deslocado do gráfico de f especificamente 4 unidades para a direita. Ao questionar os alunos o motivo de tal translação, espera-se que eles percebam que o 4 deslocado está relacionado ao 4 presente no argumento da função, de tal forma que, como a operação "subtrair 4" atua diretamente sobre o x, é necessário que à abscissa de todos os pontos da função sejam adicionadas 4 unidades, a fim de que, quando operado o cálculo no argumento, a função retorne à sua posição original e seja associada à mesma ordenada de f, que não se alterou no processo.

Genericamente, o formato do gráfico de qualquer função $p(x) = f(x-a)$, $a > 0$, é congruente à curva logarítmica definida por f deslocada a unidades para a direita de f no plano cartesiano.

Também, é muito importante questionar aos alunos sobre o que acontece com a assíntota da função neste processo. Deve-se destacar que, com base nos exemplos anteriores, ela não havia sido modificada. Contudo, com a translação horizontal, todos os elementos verticais associados à função também se modificam (pois estão associados a valores do eixo x pela própria função), de modo que a assíntota de f (que era a reta $x = 0$, ou o próprio eixo y) se desloca 4 unidades para a direita e se torna a reta $x = 4$, tornando-se a assíntota de g.

Tomando como base a condição de existência dos logaritmos e vinculando a análise a uma argumentação mais algébrica, tem-se que, como o argumento da função é o logartimando da operação de logaritmação, e sabendo que tal elemento precisa ser positivo, $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$ e verifica-se tal conclusão de outro modo.

O mesmo acontece com raiz da função. Como à abscissa de cada ponto da função original somou-se 4, a raiz, que antes originava o ponto $(1, 0)$, passa a ser o ponto $(5, 0)$, sendo também modificada.

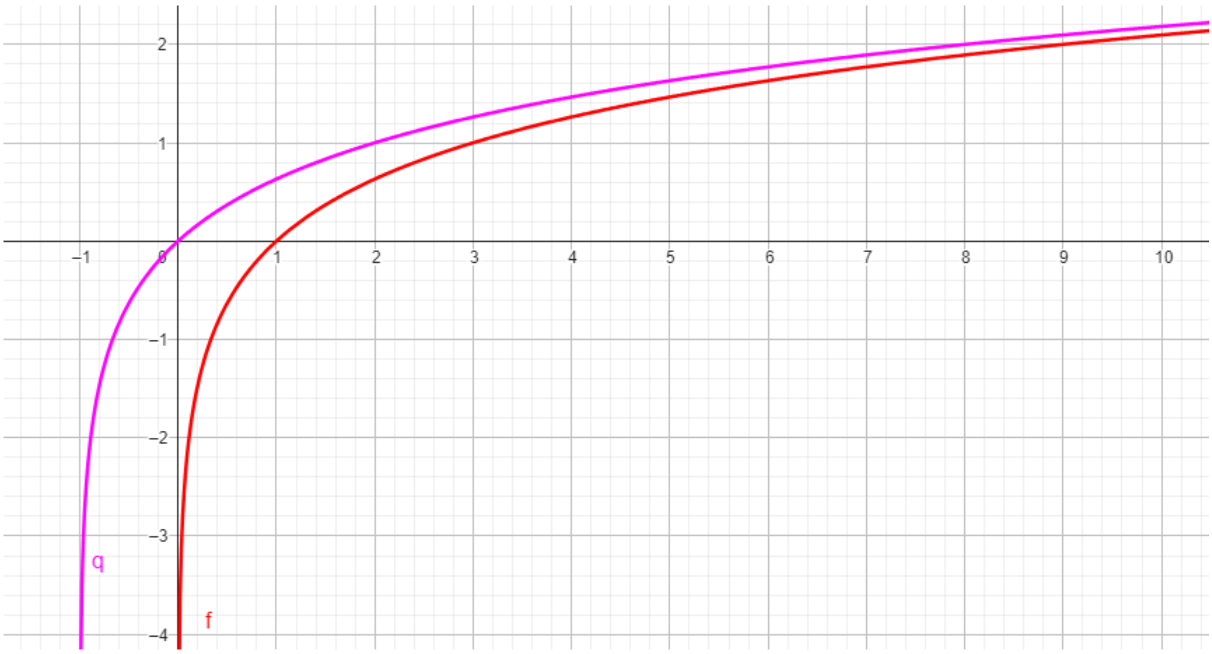
Dando continuidade, apresenta-se aos alunos um caso semelhante a este, onde estamos adicionando um número real ao argumento, conforme o exemplo a seguir

- $q(x) = \log_3(x + 1)$

Antes de observar e comparar os gráficos no Geogebra, é válido pedir aos estudantes que criem hipóteses do que eles acham que acontece ao adicionarmos uma unidade no argumento da função.

Com base no exemplo anterior e fazendo uso de raciocínio lógico intuitivo, não é difícil chegar à conclusão de que a função teoricamente deveria ser transladada para a esquerda. Confirma-se a hipótese a partir dos gráficos, como apresenta-se na Figura 23.

Figura 23 – Gráficos das funções $q(x) = \log_3(x + 1)$ e $f(x) = \log_3 x$



Fonte: O autor

De fato, conforme suposto, o gráfico da função $q(x) = f(x+1)$ desloca-se uma unidade para a esquerda (em relação a f), de modo de que a abscissa no gráfico compense a operação aplicada no argumento para que a ordenada continue a mesma da função f original.

Quanto à assíntota, o mesmo ocorre. Ela passa a ser a reta $x = -1$, ou seja, a reta $x = 0$ (o próprio eixo y) transladado 1 unidade para a esquerda. A raiz, agora $x = 0$, comporta-se de modo equivalente.

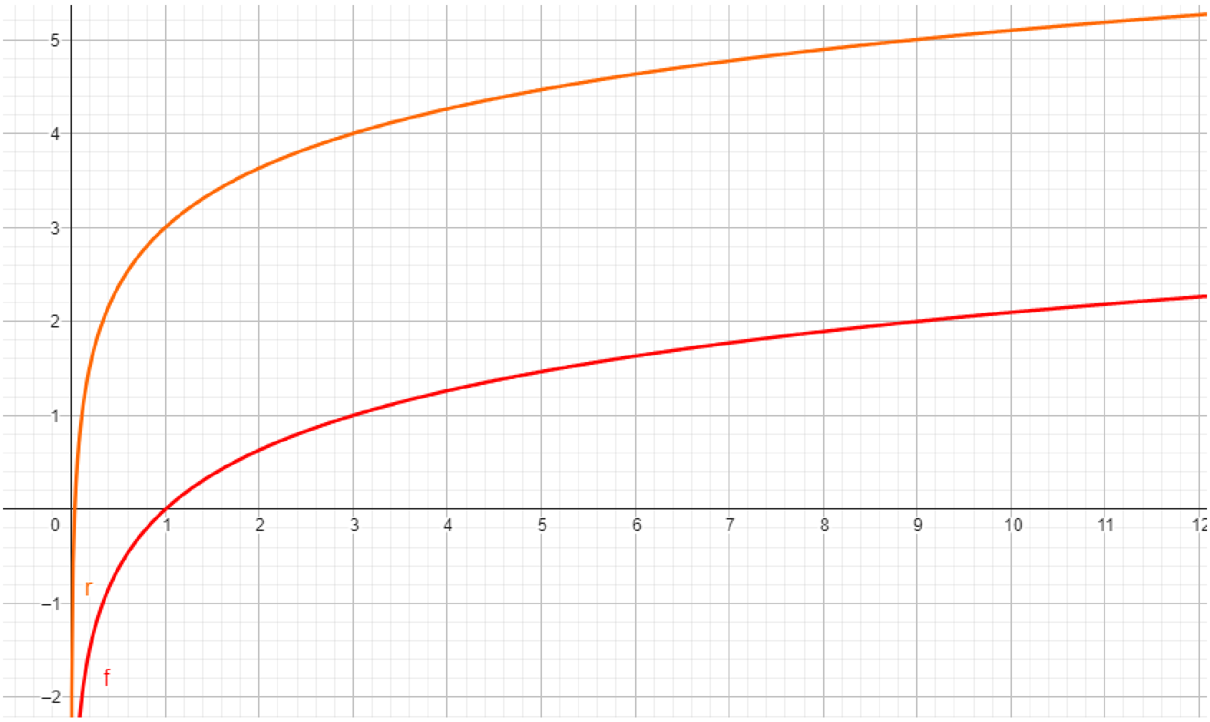
Logo, é possível concluir com os alunos, para fins de generalização, que adicionar ou subtrair um número real no argumento da função logarítmica implica em uma translação horizontal em seu gráfico, ou seja, a curva se desloca para a esquerda ou para a direita, respectivamente.

Na sequência, apresenta-se novos exemplos, com o intuito de trabalhar as translações verticais dos gráficos das funções.

- $r(x) = \log_3 x + 3$

Depara-se, neste exemplo, com um caso novo. Não estamos mais mexendo no argumento da função logarítmica, mas na própria função, pois $r(x) = f(x) + 3$. Sem olhar para o gráfico da função, e com base no que já foi visto até então, é possível antecipar que haverá alguma mudança relacionada à ordenada dos pontos do gráfico de f. Com os gráficos obtidos no Geogebra, como os ilustrados na Figura 24, esta mudança fica visível.

Figura 24 – Gráficos das funções $r(x) = \log_3 x + 3$ e $f(x) = \log_3 x$



Fonte: O autor

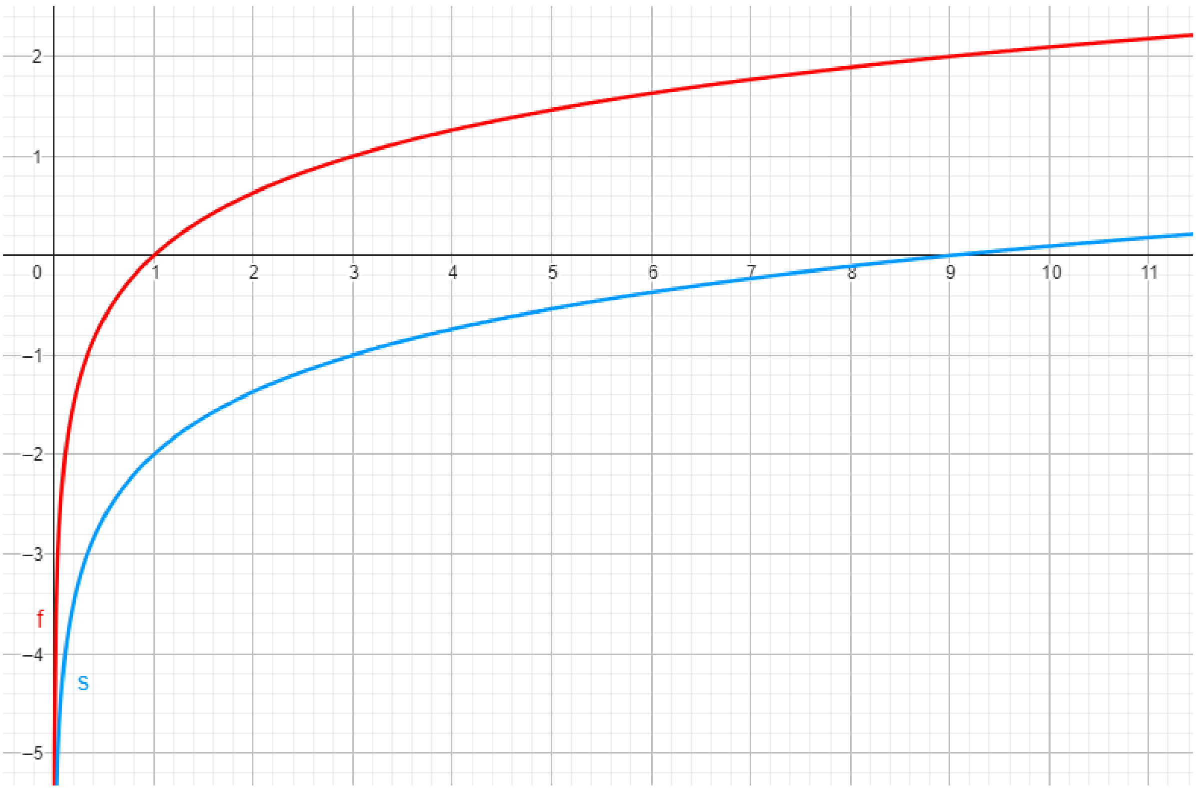
Mais uma vez, o formato da curva logarítmica é mantido, mas ao invés do gráfico sofrer uma translação horizontal, como no caso onde era adicionado ou subtraído números reais no argumento da função, ele é transladado verticalmente 3 unidades para cima. Obviamente que este 3 está relacionado ao 3 somado à f para obter a r. Cada abscissa x que leva a y de f passa a levar a $y + 3$ de g, de modo que todos os pontos sobem 3 unidades.

De modo análogo, apresenta-se o próximo e último exemplo, muito semelhante ao anterior.

- $s(x) = \log_3 x - 2$

Neste ponto do percurso, os alunos já têm conhecimentos adquiridos, conceitos modificados e ancorados e, por consequência, habilidades suficientes para concluir que, de modo análogo ao que aconteceu no exemplo anterior, para se construir o gráfico de s, o gráfico da função f deverá sofrer uma translação vertical, neste caso de 2 unidades para baixo, motivado pelo 2 que está sendo subtraído de f para gerar a s. A Figura 25 confirma tal hipótese.

Figura 25 – Gráficos das funções $s(x) = \log_3 x - 2$ e $f(x) = \log_3 x$



Fonte: O autor

Assim, é possível concluir que adicionar ou subtrair um número real a uma função logarítmica atua diretamente na localização vertical desta função no plano cartesiano. Ou seja, tal função será transladada para cima ou para baixo, respectivamente.

Nestes últimos dois exemplos, verifica-se visualmente e sem grandes dificuldades que a assíntota da função permanece a mesma da função original: o eixo y (ou a reta $x = 0$).

Quanto à raiz, ela é modificada, pois qualquer translação da curva altera a posição do ponto $(1, 0)$ do gráfico da função $f(x) = \log_3 x$. Algebricamente, neste último exemplo queremos que $s(x) = 0 \Rightarrow \log_3 x - 2 = 0 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$, informação que é facilmente identificada no gráfico da Figura 25.

Como modo de fixar e concluir a explicação pertinente, sugere-se propor aos alunos que argumentem que movimentações as leis de formação a seguir implicariam nos gráficos de suas funções logarítmicas originais.

- $f(x) = 3 \cdot \log_2 x - 4$
- $g(x) = \log(x - 2) + 1$
- $h(x) = -\ln(x + 5)$
- $p(x) = 2 \cdot \log_3(x + 1) - 3$
- $q(x) = -4 \cdot \log_5(x - 4) + 2$

Em seguida, é importante que se coloque em prática tais conclusões, esboçando os gráficos das funções, tendo em mente sempre a comportamento da curva (crescente ou decrescente), a localização da raiz e da assíntota vertical. Os esboços podem, finalmente, ser comparados com os gráficos obtidos no Geogebra, como forma de confirmar o trabalho feito.

Outros exemplos e funções podem ser propostas, mas o importante é que possuam um grau crescente de dificuldade e que incluam cada vez mais elementos que impliquem em movimentos diferentes, de modo que o aluno desenvolva estratégias para diferenciar a ordem de influência dos parâmetros nas leis de formação e a organização lógica das curvas no plano cartesiano.

Destaca-se que funções mais complexas, tais como $f(x) = \log_b(x^2)$, $g(x) = (\log_b x)^2$ ou $h(x) = \log_b(ax)$, $a \neq 1$, com $b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ foram deixadas propositalmente de fora destas listas. Elas fogem da abordagem necessária a ser dada às funções logarítmicas no Ensino Médio. No caso de f e h, a presença de operações de segunda e terceira espécie no argumento das funções vai além do uso das propriedades do produto ou da potência, impactando diretamente na condição de existência do logartimando.

Como forma de finalizar o estudo de gráfico de funções e, ao mesmo tempo, unificar as representações algébricas e gráficas, propõe-se o seguinte enunciado:

O ponto $(9, 2)$ faz parte do gráfico da função $h(x) = \log_a x$. Determine a.

A ideia é simples: levar o aluno a associar o ponto $(9, 2)$ à notação $f(9) = 2$, ou seja, que 2 é o valor assumido pela função f quando x vale 9. Ao fazerem isso, passa-se para o equacionamento, ou seja, escreve-se que $\log_a 9 = 2$, que é uma equação logarítmica semelhante às já trabalhadas. Resolvendo-a a partir da definição, obtém-se $a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$. Como, das condições de existência dos logaritmos, sua base precisa ser positiva e diferente de 1, tem-se $a = 3$.

Um outro exemplo, semelhante a este, parte do seguinte enunciado:

Os pontos $(1, -3)$ e $(8, 0)$ fazem parte do gráfico da função $p(x) = \log_m x + n$. Determine m e n.

De modo análogo ao que foi feito no exemplo anterior, ao associa-se os pontos $(1, -3)$ e $(8, 0)$ às notações $p(1) = -3$ e $p(8) = 0$, respectivamente, pode-se escrever as equações $\log_m 1 + n = -3$ e $\log_m 8 + n = 0$.

Da primeira, por definição $\log_m 1 = 0$, de modo que $n = -3$. Substituindo o valor de n encontrado na segunda equação, obtém-se $\log_m 8 - 3 = 0 \Rightarrow \log_m 8 = 3 \Rightarrow m^3 = 8 \Rightarrow m = 2$, como almejava-se obter.

Existem inúmeras questões de vestibulares e concursos que trazem aos estudantes problemas envolvendo as representações geométrica e algébrica de funções logarítmicas e modos de relacioná-las. Trazer tais questões para os alunos como forma de exercitar o que foi aprendido, fixar os conceitos, aprimorá-los e desenvolver habilidades de autonomia de cálculo e de manipulações algébrica é, como sempre, um caminho para fortalecer a ocorrência da aprendizagem significativa da Matemática e mitigar a assimilação obliteradora.

No tocante ao ENEM, ao longo das 31 aplicações da prova desde a sua reformulação, apenas uma abordou, diretamente, o gráfico de uma função logarítmica: a *Questão 03*.

Conforme já discutido no *Capítulo 03*, a *Questão 03* envolve, além da análise do gráfico de uma função logarítmica e subsequente manipulação de sua forma algébrica, a resolução de um sistema de equações exponenciais. Ainda, ao longo do processo, depara-se com uma equação exponencial que, ao aplicar-se a técnica de substituição de variável para resolvê-la, reduz-se a uma equação fracionária literal, que por sua vez pode ser simplificada a uma equação do 2° grau literal. Ou seja, possui um nível de dificuldade alto.

A questão não demanda dos estudantes apenas conhecimentos sobre como resolver tais equações, mas também exige certa organização e uma visão clara do caminho a ser seguido, algo difícil para um estudante do Ensino Médio. Tal questão, portanto, pode ser tratada como um desafio, e sua resolução posteriormente deve ser executada junto da turma. Caso algum aluno consiga resolver a questão sozinho, vale a pena pedir que compartilhe os raciocínios e o processo desenvolvido com os colegas e com o professor. Tal condução deve ser sempre mediada pelo educador, a partir de comentários e questionamentos que facilitem o entendimento da turma a partir da explicação do estudante.

Ao final da sequência proposta nesta seção, supõe-se que os alunos tenham se apropriado dos conteúdos relacionados a logaritmos e funções logarítmicas que compõe a base necessária proposta tanto na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) quanto na Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (BRASIL, 2025c). A condução dos conteúdos deu-se de maneira lógica e mais tradicional, propondo tarefas que corroborassem e potencializassem a aprendizagem significativa com base em suas duas condições: a pré-disposição do aluno para aprender, a partir de sua participação nos processos exploratório-investigativos propostos; e a existência de um material potencialmente significativo, com aplicações coerentes de cada conteúdo trabalhado e uso de tecnologias na forma de *softwares* e calculadoras.

4.2. UMA NOVA ABORDAGEM (OU DIFERENCIANDO PROGRESSIVAMENTE)

É arriscado, e muitas vezes foge do controle que se pretende ter sobre uma turma, seguir um caminho de ensino que opte por uma sequência didática não convencional, diferentemente da descrita na *Seção 4.1*. Porém, a busca por abordagens novas (ou mesmo inovadoras) é importante para atualizar os processos, os diálogos e as estratégias de ensino em sala de aula. Afinal de contas, os alunos atualizam-se, na maioria das vezes, muito mais rápido que os professores e que a própria educação como um todo.

Werneck (1999, p.58) trata disso ao afirmar que “Os professores precisam acompanhar essa velocidade [...]”. Assim, ao propor uma sequência didática nova e diferente do que os livros didáticos costumam trazer, as estratégias para o ensino de logaritmo a serem abordadas nesta seção começam pelo fim. Isto é, tem início na construção do gráfico da função logarítmica, e a partir dele pavimenta-se o caminho na direção da definição de logaritmo e suas propriedades para, só então, chegar na manipulação de expressões e resolução de equações logarítmicas. De acordo com a Teoria da Aprendizagem Significativa, opta-se por um processo de diferenciação progressiva.

Para isso, sugere-se o uso de recursos tecnológicos digitais, mais uma vez através do *software* Geogebra. Por essa razão, é importante que os alunos tenham acesso a equipamentos que permitam a interação com o *software*. Alterações podem ser feitas, para o caso de escolas onde celulares ou computadores não sejam comuns, ou em que seu uso não seja viável, como já apontado anteriormente. Contudo, a manipulação dos elementos da plataforma Geogebra pelos próprios estudantes, neste caso, faz-se ainda mais importante que a visualização, vide o caso onde explorou-se os movimentos dos gráficos das funções logarítmicas.

4.2.1. O caminho inverso

Começar pelo fim implica em trabalhar com os alunos a definição de função inversa. E, para isso, recorre-se, neste momento do processo, à aprendizagem mecânica, que será, posteriormente, transformada em aprendizagem significativa, *continuum* tratado no *Capítulo 01* desta dissertação.

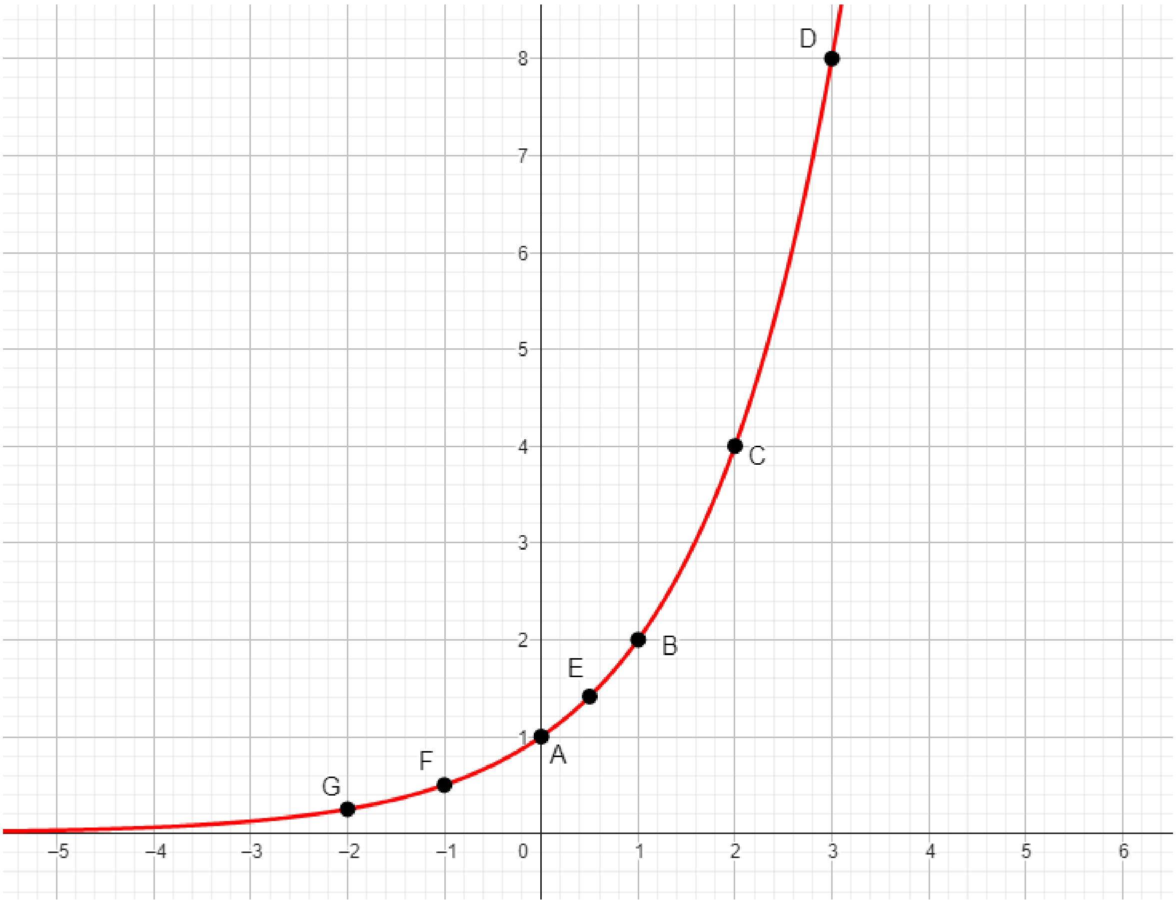
Para isso, parte-se do pressuposto que os alunos já tiveram contato com funções exponenciais, tanto a abordagem algébrica quando a gráfica. Por isso, a primeira tarefa servirá como um organizador prévio, com o objetivo de revisar os conceitos relativos ao gráfico de uma função exponencial para, na sequência, introduzir a definição de função inversa e desenvolver a ideia de função logarítmica

Propõe-se o seguinte enunciado:

No Geogebra, construa o gráfico da função $f(x) = 2^x$ e selecione cinco de seus pontos.

A manipulação do *software* e consequente seleção dos pontos fica por conta de cada aluno. A ideia é que escolham os pontos que quiserem, a fim de que a posterior discussão seja mais rica e diversa. A Figura 26 traz a representação gráfica da função f com alguns pontos estratégicos destacados. Tais pontos serão utilizados ao longo deste texto com a finalidade de exemplificar a tarefa.

Figura 26 – Gráfico da função $f(x) = 2^x$ com pontos destacados

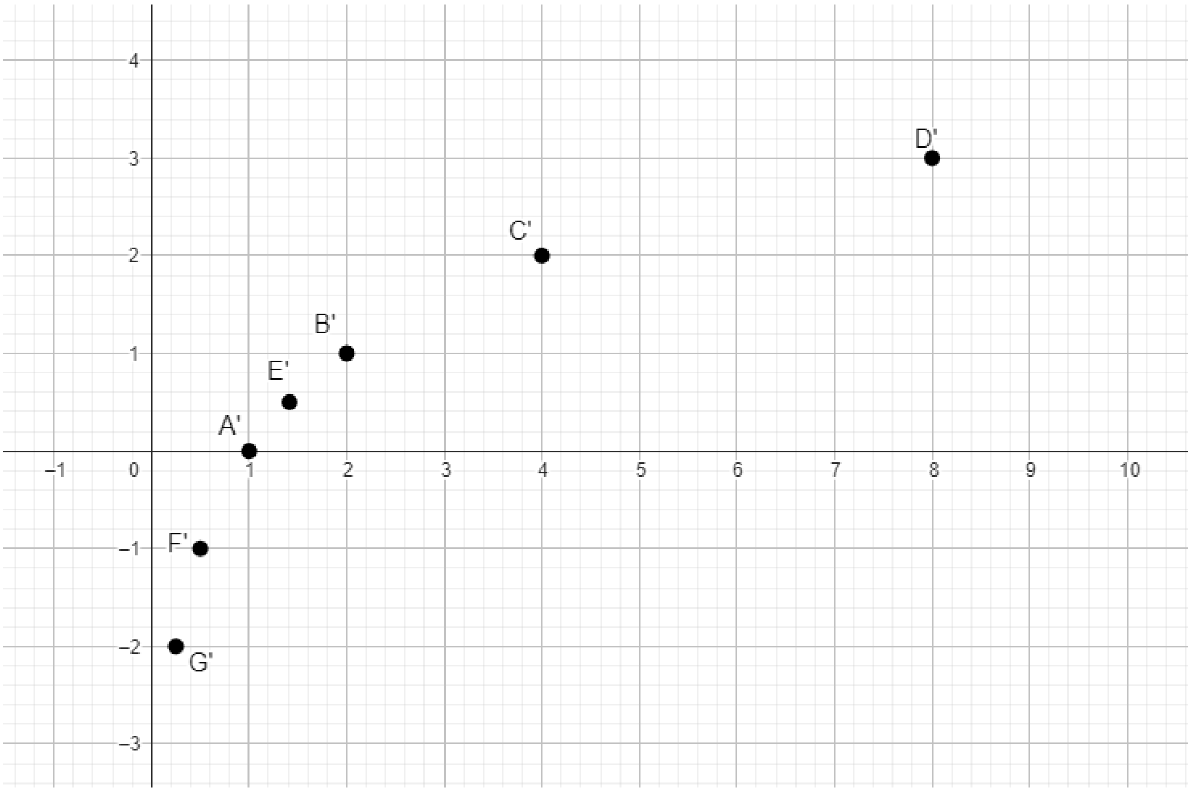


Fonte: O autor

O professor, então, propõe uma segunda tarefa: trocar as coordenadas dos pares ordenados escolhidos e representá-los novamente no Geogebra, ou seja, escrever o ponto com a abscissa no lugar da ordenada, e vice-versa.

Com base nos pares ordenados destacados na Figura 26, o ponto $A = (0,1)$ se transformaria no ponto $A' = (1,0)$, o ponto $B = (1, 2)$ se tornaria $B' = (2,1)$, ao passo que o ponto $C = (2,4)$ se converteria em $C' = (4,2)$, e assim sucessivamente. Feitas as modificações em todos os pontos, cada aluno teria em mãos um plano cartesiano com cinco novos pontos representados, todos relacionados diretamente à função exponencial $f(x) = 2^x$. A Figura 27 ilustra um exemplo de como os pontos destacados anteriormente na Figura 26 ficariam espaçados pelo plano.

Figura 27 – Localização dos pontos com as coordenadas trocadas



Fonte: O autor

O próximo passo é questionar os alunos sobre sua percepção quanto à localização destes pontos. É possível também, neste momento, propor uma troca de informações entre os alunos, de modo que todos tenham em seus planos cartesianos mais pontos localizados, facilitando a observação e consequente inferência.

O objetivo desta discussão é levá-los a perceber que os pontos, ao serem reescritos, continuam seguindo o formato de uma curva. Não apenas isso, mas esta suposta curva preserva as duas condições que a caracterizariam como uma função.

Considerando duas variáveis x e y pertencente a algum conjunto numérico não vazio, Caraça (1951, p.129) define função y de x, escrevendo $y = f(x)$, “[...] se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \longrightarrow y$ [...]”. Tal menção a correspondência unívoca entre x e y pode ser interpretada como o fato de que. a todo x do conjunto “de partida”, chamado de domínio, se correspondente um, e somente um, y do conjunto “de chegada”, denominado contradomínio.

Obviamente, pressupõe-se que a definição de função já tenha sido trabalhada de acordo no princípio dos estudos dos alunos sobre o tema. Mas vale, novamente, que ela seja retomada a fim de situá-los e também para servir como um resgate de conhecimentos prévios.

Quando aplica-se a definição de função ao seu gráfico, fica determinado que cada ponto no gráfico só pode estar relacionado a um único valor de x, ou seja, dois pontos diferentes de um mesmo gráfico não podem corresponder à mesma abscissa. Caso contrário, não teríamos o gráfico de uma função pois se violaria a condição da unicidade da correspondência.

Visualmente, por meio da Figura 27, é possível constatar tal fato intuitivamente. Ou seja, de algum modo, os pontos representados, se conectados, poderiam determinar uma função, diferente da exponencial, mas diretamente relacionada a ela. Isto é, supostamente seguem uma regra, e podem vir a ter uma lei de formação que os define algebricamente. Aos alunos, explica-se que, a partir deste momento, entender o comportamento desta nova função e tentar encontrar uma lei que a reja é o objetivo principal da tarefa.

Dando sequência, define-se função inversa para os alunos por meio da *Definição 2.37*, abordada no *Capítulo 02* e retomada a seguir.

Definição 2.37:

A função $g: Y \longrightarrow X$ é chamada de inversa da função $f: X \longrightarrow Y$, e escreve-se $g = f^{-1}$, quando $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Ou seja, $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ e $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.

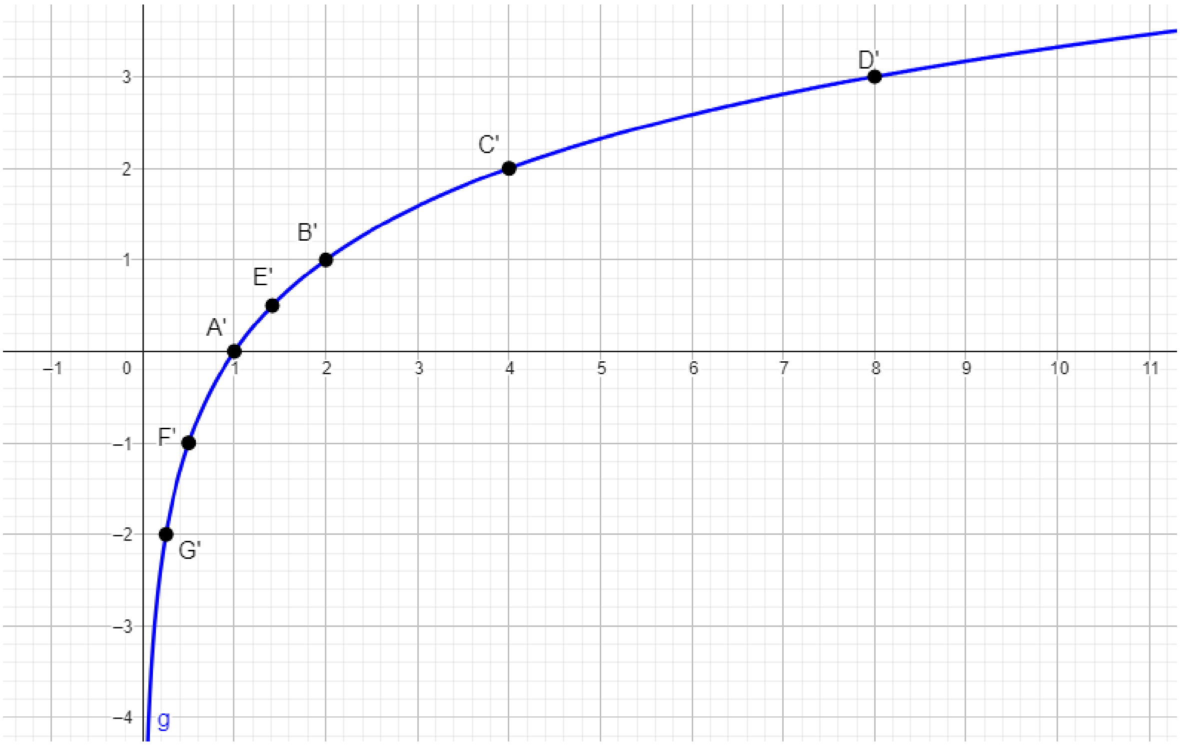
Com base nesta definição, é possível concluir que a função que estamos buscando é a função inversa da função exponencial, pois cada ponto $(x, 2^x)$ da função f transforma-se no ponto $(2^x, x)$ da função $g = f^{-1}$. Isso significa que, ao passo que a função exponencial associa ao expoente da operação de potenciação à sua potência, ou seja, o resultado desta mesma operação, a função $g = f^{-1}$, que se busca determinar, leva a própria potência ao expoente que a gerou, fazendo o caminho inverso.

Está-se interessado em descrever uma função que, dada uma base fixa e a potência obtida pela operação de potenciação, resulte no expoente de tal operação. E, desta maneira, introduz-se aos estudantes o logaritmo, mas ainda não como operação.

A construção da ideia, neste caso, não parte mais da resolução de equações exponenciais, mas sim da própria função exponencial e sua inversa. Explica-se, assim, que tal função que se está buscando existe, de fato, e é chamada "função logarítmica de base 2", definida como $g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \mid g(x) = \log_2 x$. Destaca-se que tal função faz o caminho inverso da função exponencial, isto é, dada uma base (2 neste caso), leva uma potência qualquer desta mesma base ao expoente que a gerou.

Ao digitarmos a função logarítmica $g(x) = \log_2 x$ no Geogebra, ela conecta todos os pontos destacados inicialmente pelos alunos, como ilustra a Figura 28. Isso conclui a tarefa inicial da aula, tendo os alunos descoberto uma nova função.

Figura 28 – Gráfico da função logarítmica $g(x) = \log_2 x$ com pontos destacados



Fonte: O autor

O próximo passo é pedir que os alunos, utilizando o mesmo *modus operandi* executado com a função $f(x) = 2^x$, encontrem as funções inversas de outras funções exponenciais, tais como:

- $h(x) = 3^x$
- $p(x) = 10^x$
- $q(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $r(x) = e^x$
- $s(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$

Ao fazerem isso, objetiva-se que desenvolvam a habilidade de associar os elementos da função exponencial à sua função logarítmica (inversa) correspondente. Por exemplo, a função $h(x) = 3^x$ possui base 3, de modo que h^{-1} é uma função logarítmica de base 3 e pode ser escrita como $h^{-1}(x) = \log_3 x$.

No caso da função $q(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e sua inversa $q^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, bem como $s(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x \Rightarrow s^{-1}(x) = \log_{\frac{4}{5}} x$, ambas estritamente decrescentes, também vale levar os alunos a discutir quais mudanças ocorreram nas funções que motivaram esta mudança de comportamento em seus gráficos.

No caso das funções p e r, também aproveita-se o momento para explicar que as notações $\log_{10} x$ e $\log_e x$ podem ser reduzidas a $\log x$ e $\ln x$, respectivamente. O primeiro caso é denominado logaritmo decimal, ao passo que o segundo é chamado logaritmo natural (ou neperiano).

Tais discussões seguem os mesmos padrões daquelas propostas na *Seção 4.1.5*, onde tratou-se de função logarítmica e seu gráfico da forma “tradicional”.

4.2.2. Os logaritmos como imagens de funções

Dando sequência, chega-se o momento de explicar aos estudantes a relação entre o que se descobriu sobre a função logarítmica e o logaritmo como resultado da operação de logaritmação. Faz-se isso a partir do que já foi previamente comentado em relação a esta função: ela leva a potência, dada uma base fixa, a seu expoente, o que a torna muito parecida com a operação de radiciação, que nos dá como resultado a base da potenciação dada a potência e o expoente.

Destaca-se também que tal qual a operação de radiciação, esta operação, vinda diretamente da função logarítmica, leva o nome de logaritmação, e é uma segunda operação inversa da potenciação, pois faz-se o caminho inverso da operação original. A definição formal de logaritmo pode ser encaixada na condução da aula neste momento. Supõe-se que, neste ponto do percurso, os alunos já tenham compreendido a relação entre a base da potência e a base do logaritmo, e que, assim, possam compreender a bimplicação da definição, tornando-a mais natural.

Ainda, é importante trabalhar os termos da operação (base, logartimando e logaritmo), bem como as condições de existência dos logaritmos. Este último tópico pode ser executado a partir de uma análise do gráfico de alguma função logarítmica. Por exemplo, tem-se que seu domínio compreende apenas os reais positivos, de modo que o logartimando só pode assumir os valores deste conjunto. Quanto à condição de existência da base, procede-se da mesma maneira feita na *Seção 4.1.1*.

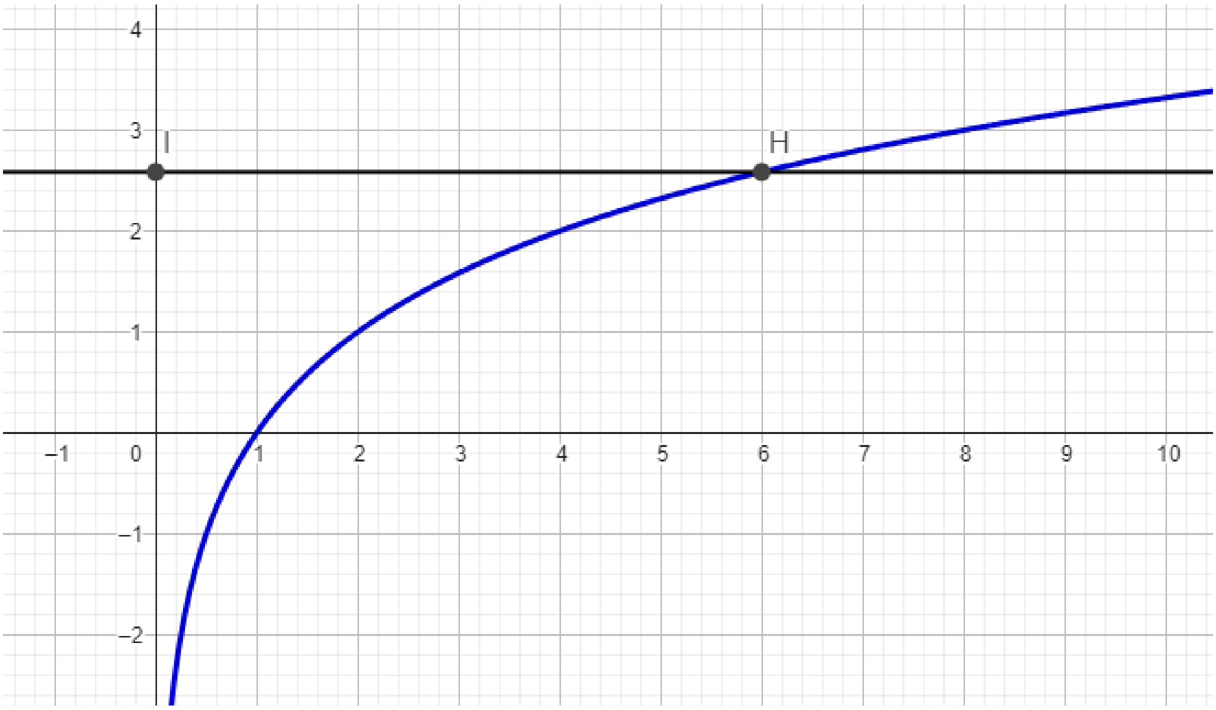
Para fixar a definição, sugere-se utilizar também os mesmos exemplos da *Seção 4.1.1*. As discussões referentes ao logartimando igual a base e ao logartimando igual a 1, consequências diretas da definição, podem ser desenvolvidas de modo análogo.

Urge, ainda, a necessidade de que os estudantes compreendam, por exemplo, que $\log_2 6$, ou seja, um expoente que transforme a base 2 em 6, existe, apesar de não se trabalhar recorrentemente com números assim. Anteriormente, isto foi feito através de métodos numéricos, a partir de iterações sucessivas entre decimais consecutivos, conforme as Tabelas 3 e 4. Nesta nova sequência, contudo, trabalha-se tais números a partir do potencial contido no gráfico de uma função logarítmica. Para isso, propõe-se aos estudantes o seguinte enunciado:

Estime o valor de $\log_2 6$ a partir do gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_2 x$.

De modo geral, o interesse é que a tarefa possibilita aos alunos fazer explorações-investigativas a fim de determinar $f(6)$. O Geogebra calcula isso rapidamente, tal qual uma calculadora científica. Contudo, a ideia é propor que os alunos visualizem tal informação utilizando o próprio gráfico da função, conforme ilustrado na Figura 29.

Figura 29 – Encontrando o ponto $H = (6, f(6))$ no Geogebra

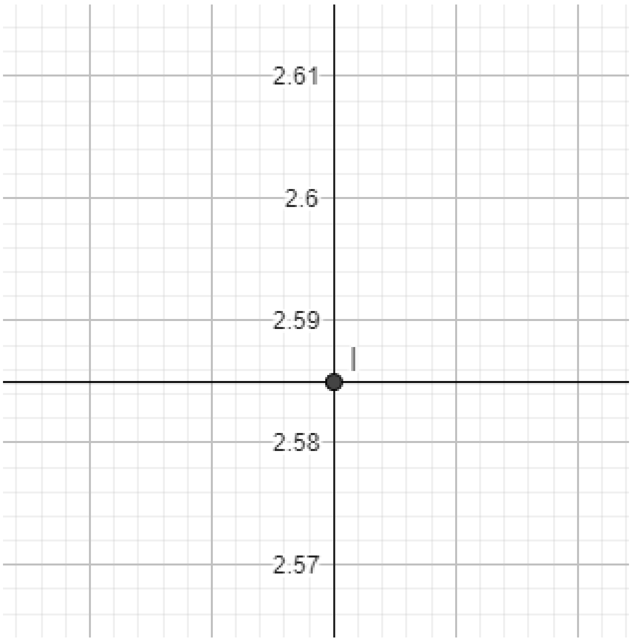


Fonte: O autor

Assim, uma vez digitada a função $f(x) = \log_2 x$, basta pedir que o Geogebra nos forneça o ponto $(6, f(6))$, representado na Figura 29 como o ponto H. Uma vez feito isso, traça-se uma reta perpendicular ao eixo y (ou paralela ao eixo x) que passe pelo ponto H. A intersecção desta reta com o eixo y dará a ordenada exata do ponto H, ou seja, a $f(6)$ que se está interessado em encontrar.

Usando o comando *zoom*, fica visualmente claro que $f(6)$ está compreendida entre 2,58 e 2,59, ou seja, a mesma conclusão que se obteve a partir das iterações feitas na Tabela 4. A Figura 30 mostra como tal conclusão pode ser visualizada pelos alunos no *software*.

Figura 30 – Ordenada no ponto H representada pelo ponto I

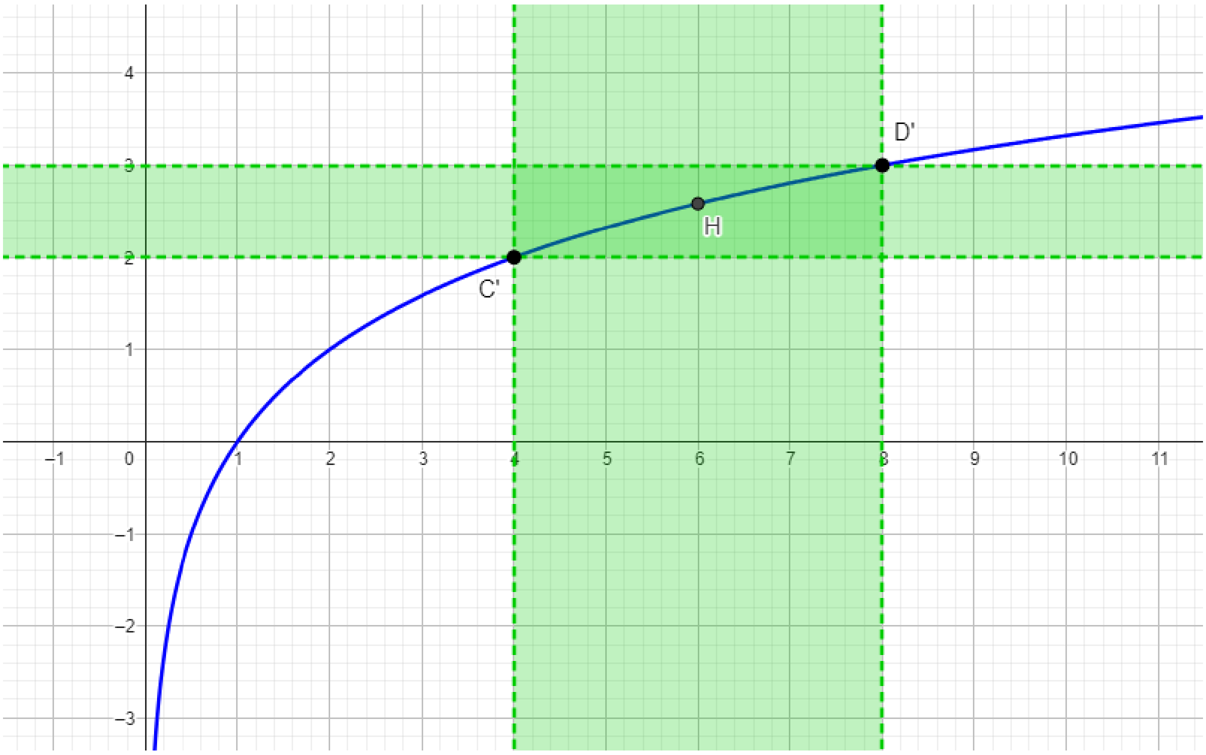


Fonte: O autor

Neste momento, vale também tratar com os alunos sobre o fato de $\log_2 6$ estar compreendido entre 2 e 3 pois 6 está compreendido entre 4 e 8, conforme já discutido na *Seção 4.1.1*. Faz-se isso com o Geogebra. No *software*, é possível visualizar este intervalo visualmente (ver Figura 31). Ao digitar-se os intervalos $4 < x < 8$ e $\log_2 4 = 2 < y < 3 = \log_2 8$, eles determinarão no plano cartesiano regiões em cuja intersecção o ponto H pertencerá e poderão verificar que $6 \in (4, 8)$. A partir disto, conclui-se que $\log_2 6 \in (2, 3)$.

É possível diminuir ainda mais o intervalo no eixo das abcissas, tomando, por exemplo, $5 < x < 7$, a fim de comprimir também o intervalo no eixo das ordenadas. Contudo, para isso, seria necessário que $\log_2 5 < y < \log_2 7$, o que recai no mesmo problema de determinar $\log_2 6$, pois nem 5 nem 7 podem ser escritos na forma de potência de 2. Exatamente por isso, os extremos dos intervalos de análise deste e de qualquer exemplo similar devem ser números inteiros.

Figura 31 – Intervalo em que $\log_2 6$ está compreendido



Fonte: O autor

A partir disso, a ideia é seguir uma condução similar ao que foi feito na *Seção 4.1.1*, propondo que, a partir dos gráficos de funções logarítmicas convenientes, os alunos estimem os valores numéricos de alguns logaritmos, tais como:

- $\log_2 40$
- $\log_3 5$
- $\log_5 2$
- $\log 15$
- $\ln 10$

A apropriação do uso da calculadora científica para se calcular logaritmos e a discussão sobre logaritmos não exatos serem irracionais desenvolve-se de maneira também análoga ao que foi feito na primeira proposta de ensino. Sobre o primeiro tópico, vale lembrar que a propriedade da mudança de base ainda não foi discutida, o que impede o cálculo de logaritmos não decimais por algumas calculadoras. Vale se utilizar de tal impedimento para deixar os alunos na expectativa pelo que vem na sequência, tanto nesse caso quanto no sequenciamento apresentado na *Seção 4.1*.

4.2.3. Visualizando propriedades geometricamente

Uma vez trabalhada a definição de logaritmo e o entendimento de logaritmo como resultado de uma operação inversa da potenciação, a ideia é partir para o trabalho com suas propriedades operatórias. Aproveitando a abordagem gráfica já dada à função logarítmica, vale-se do gráfico desta função para se visualizar tais propriedades na prática, interpretando os logaritmos como comprimentos de segmentos de reta no plano cartesiano. A inspiração inicial para a construção desta seção partiu da dissertação *"O Geogebra como ferramenta de auxílio no Ensino de Logaritmo"*, de Emanuel Gomes Lourenço (Lourenço, 2013). Todas as construções abordadas neste texto, contudo, e as extensões delas para as demais propriedades são autorais.

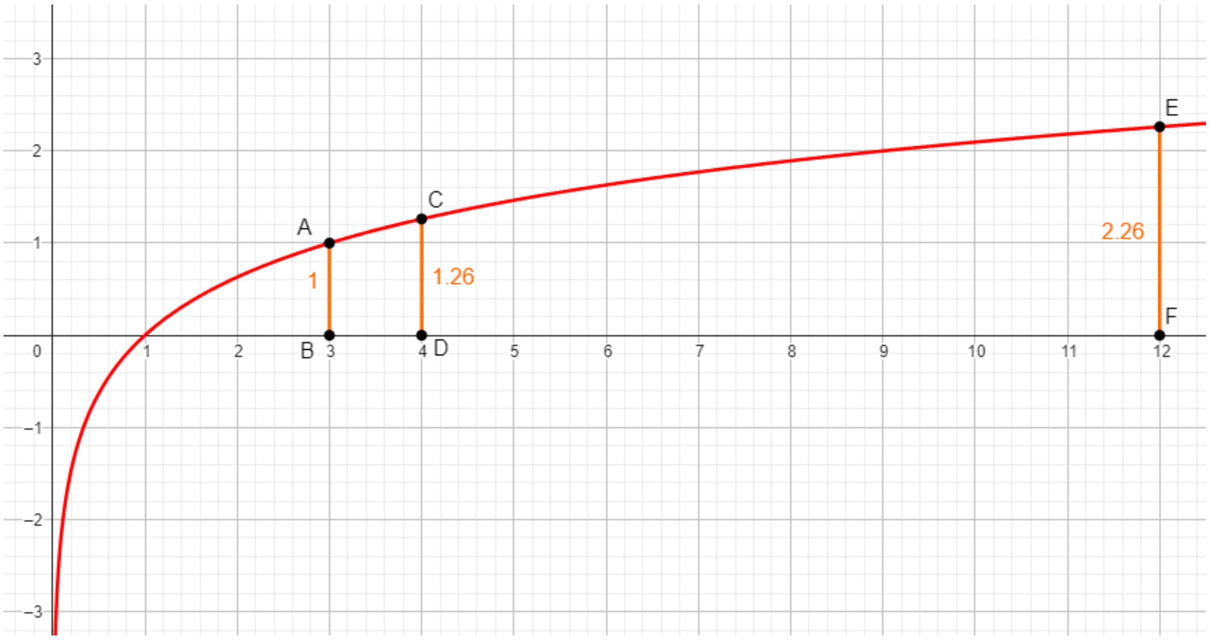
Começa-se pedindo para que os alunos construam, no Geogebra, a função $f(x) = \log_3 x$. A escolha pela base 3 para o exemplo inicial foi proposital, pois facilita a visualização de vários elementos em um mesmo quadro do Geogebra, sem a necessidade de *zoom*. Outras bases serão usadas em exemplos posteriores. Em seguida, de modo análogo ao que foi feito para se determinar o valor de $\log_2 6$, pede-se que encontrem os pontos do gráfico da função que tenham como ordenada $\log_3 3$, $\log_3 4$ e $\log_3 12$, ou seja, $\big(3, f(3)\big)$, $\big(4, f(4)\big)$ e $\big(12, f(12)\big)$. A partir destes pontos, traça-se um segmento de reta perpendicular ao eixo x (ou parelelo ao eixo y), de modo que a outra extremidade do segmento seja um ponto no próprio eixo x.

O traçado dos segmentos pode ser feito, primeiramente, construindo retas suportes que passem pelo ponto em questão e sejam perpendiculares ao eixo das abscissas (ou paralelas ao eixo das ordenadas). Em seguida, marcam-se os pontos de intersecção destas retas com o eixo x. Com os dois pontos extremos de cada segmento almejado, traça-os sem mais dificuldades.

Por fim, utilizando a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* do Geogebra, encontra-se o comprimento de cada segmento traçado. A Figura 32 ilustra tal construção, onde os pontos $\big(3, f(3)\big)$, $\big(4, f(4)\big)$ e $\big(12, f(12)\big)$ foram representados, respectivamente, pelos pontos A, C e E.

Feito isso, questiona-se os alunos que relação eles são capazes de visualizar entre os comprimentos dos três segmentos. Espera-se que eles percebam, rapidamente, que $2{,}26 = 1 + 1{,}26$, ou seja, $\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

Figura 32 – Comparação entre os valores de $\log_3 3$, $\log_3 4$ e $\log_3 12$ no plano cartesiano



Fonte: O autor

Contudo, conforme já estabelecido, o comprimento de cada segmento é equivalente à imagem da função naquele ponto, ou seja, sua ordenada, que por sua vez, é igual ao logaritmo de base igual a base da função do valor da abscissa associada. Tomando o ponto A, por exemplo, cuja ordenada é $f(3) = \log_3 3$, tem-se, por definição, que $\log_3 3 = 1$. O mesmo se aplica aos pontos C e E: tem-se $f(4) = \log_3 4 \approx 1{,}26$ e $f(12) = \log_3 12 \approx 2{,}26$.

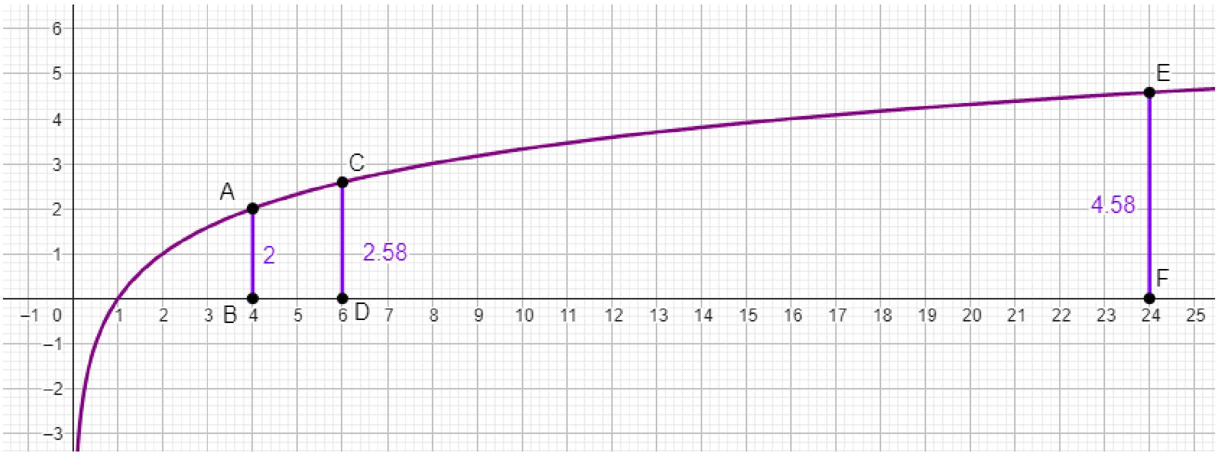
Logo, com base na relação de igualdade identificada entre os comprimentos dos segmentos, pode-se reescrever a expressão como:

$$\log_3 12 = \log_3 3 + \log_3 4$$

Antes que os estudantes tirem qualquer conclusão quanto à relação entre os números 12, 3 e 4, solicita-se que executem mais alguns exemplos no Geogebra.

Desta vez, seguindo os mesmos passos já executados para o caso anterior, sugere-se propor que, a partir da função $g(x) = \log_2 x$, os estudantes encontrem os pontos e os segmentos associados aos logaritmos $\log_2 4 = 2$, $\log_2 6 \approx 2{,}58$ e $\log_2 24 \approx 4{,}58$. Ao executar os procedimentos, mais uma vez será possível escrever uma igualdade entre os logaritmos a partir de seus valores aproximados, como $\log_2 24 = \log_2 4 + \log_2 6$, dado que $4{,}58 = 2 + 2{,}58$. A Figura 33 ilustra a construção.

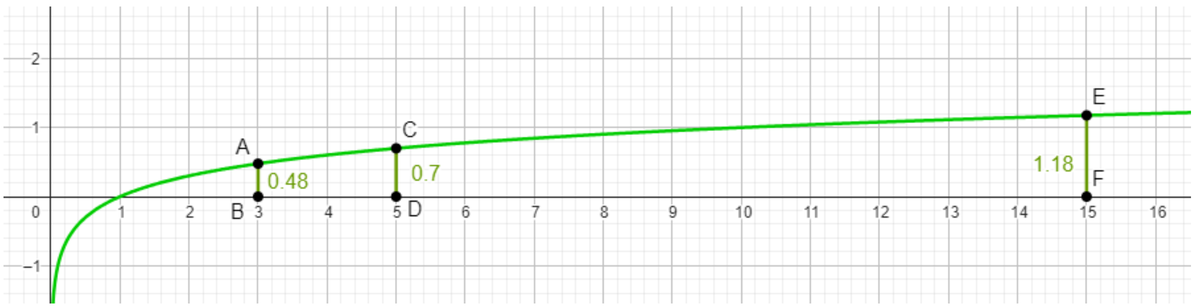
Figura 33 – Comparação entre os valores de $\log_2 4$, $\log_2 6$ e $\log_2 24$ no plano cartesiano



Fonte: O autor

Para explorar o processo uma última vez, sugere-se pedir aos estudantes que, utilizando a função $h(x) = \log x$, encontrem os pontos e os segmentos correspondentes às imagens $\log 3 \approx 0{,}48$, $\log 5 \approx 0{,}70$ e $\log 15 \approx 1{,}18$. Mais uma vez, por meio de um processo exploratório-investigativo baseado na análise gráfica (ver Figura 34), contata-se que $\log 15 = \log 3 + \log 5$, pois $1{,}18 = 0{,}48 + 0{,}7$.

Figura 34 – Comparação entre os valores de $\log 3$, $\log 5$ e $\log 15$ no plano cartesiano



Fonte: O autor

É muito importante frisar que, como já discutido anteriormente, logaritmos como $\log_3 4$, $\log_2 24$ e $\log 15$ são números irracionais, de modo que os valores dados pelo Geogebra como os comprimentos dos segmentos obtidos nos planos cartesianos (mas equivalentes aos valores dos próprios logaritmos) são aproximações. Tais aproximações, todavia, cumprem seu papel na tarefa. É possível também usar uma calculadora científica para verificar com mais precisão a validade das igualdades obtidas nos três exemplos.

Perceba que se tomou o cuidado, ao selecionar os exemplos, de escolher logaritmos exatos (cujos resultados são valores inteiros) e também irracionais, de modo que os estudantes se acostumem com eles. A fim de sistematizar todas essas observações e percepções tidas ao longo do processo, sugestiona-se que os alunos, com a ajuda do professor, as organizem em uma tabela.

Com as três construções executadas pelos alunos, parte-se para a parte final do processo exploratório-investigativo onde, com as três igualdades estabelecidas, torna-se necessário raciocínio indutivo para se chegar à conclusão sobre a validade da propriedade fundamental dos logaritmos.

De fato, no exemplo que partiu da função $f(x) = \log_3 x$, tem-se que $\log_3 12 = \log_3 3 + \log_3 4$, de onde $12 = 3 \cdot 4$. O mesmo ocorre com casos escolhidos das funções $g(x) = \log_2 x$ e $h(x) = \log x$: $\log_2 24 = \log_2 4 + \log_2 6$ e $24 = 4 \cdot 6$; $\log 15 = \log 3 + \log 5$ e $15 = 3 \cdot 5$, respectivamente. Ou seja, existe uma relação estabelecida entre os números no logartimando de tal modo que o logaritmo de um número escrito como um produto pode ser reescrito como a soma dos logaritmos (de mesma base) dos fatores deste produto.

Ao chegar nesse ponto, basta ao professor generalizar a propriedade, escrevendo que, para $b, x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$, tem-se:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

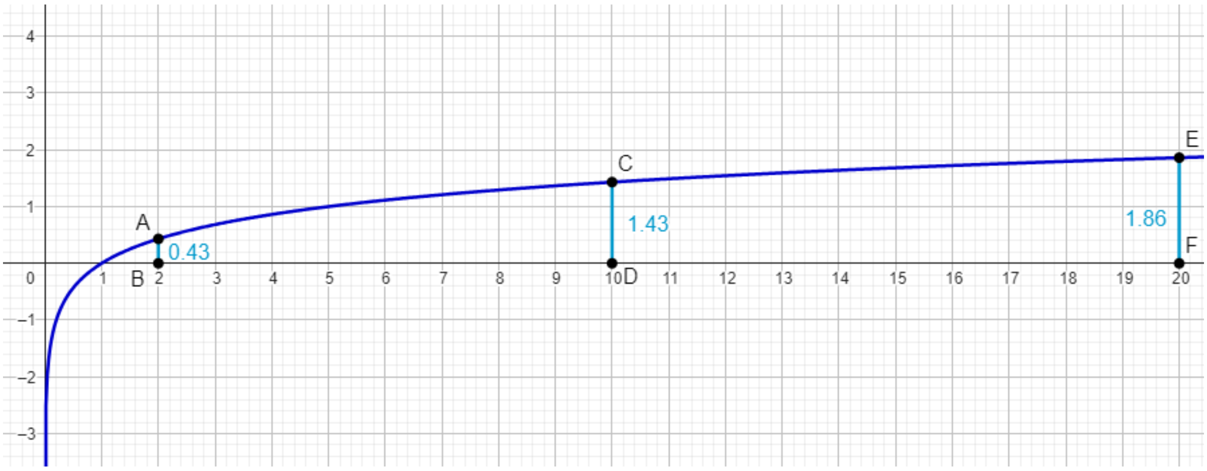
Em suma, as estratégias utilizadas para conduzir o raciocínio indutivo dos alunos não difere muito da tratada na *Seção 4.1.2*, sendo ambas válidas para garantir a ocorrência da aprendizagem significativa (considerando os pré-requisitos já discutidos no *Capítulo 01*). Contudo, a abordagem gráfica é muito interessante, pois dá uma visão mais ampla da percepção da propriedade, associando-a a comprimentos de segmentos de reta, conectando-a diretamente aos gráficos das funções logarítmicas, algo que na primeira sequência didática não poderia ser feito, pois tratou-se de funções logarítmicas e seus gráficos em momento posterior.

Para se trabalhar a propriedade do logaritmo do quociente, recorre-se ao mesmo processo. Neste texto, apresenta-se um exemplo, que pode ser replicado e adaptado para diversos outros casos, com bases e logartimandos diferentes.

Ao pedir que os alunos repitam o procedimento realizado com as funções $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_2 x$ e $h(x) = \log x$, mas desta vez com a função $p(x) = \log_5 x$ e localizem os pontos cujas ordenadas equivalem a $\log_5 2$, $\log_5 10$ e $\log_5 20$ e os segmentos de reta perpendiculares ao eixo x correspondentes, espera-se que obtenham uma representação com a da Figura 35.

Ao contrário do que foi feito anteriormente, onde constatou-se relações análogas a de que $1{,}86 = 0{,}43 + 1{,}43$, desta vez solicita-se que os estudantes se utilizem da operação de subtração para escrever igualdades. Existem duas opções: ou $1{,}43 = 1{,}86 - 0{,}43$ ou $0{,}43 = 1{,}86 - 1{,}43$, que podem ser ambas reescritas como $\log_5 10 = \log_5 20 - \log_5 2$ e $\log_5 2 = \log_5 20 - \log_5 10$.

Figura 35 –Comparação entre os valores de $\log_5 2$, $\log_5 10$ e $\log_5 20$ no plano cartesiano



Fonte: O autor

Como parte do processo exploratório-investigativo, pede-se aos estudantes, mais uma vez, que identifiquem qual relação eles observam entre os logartimandos, e espera-se que não demorem a responder que $10 = 20 \div 2$ ou $2 = 20 \div 10$.

Ainda, é possível recorrer aos mesmos exemplos representados pelas Figuras 32, 33 e 34, mas tomando o caminho inverso. Por exemplo, ao invés de escrever que $\log_3 12 = \log_3 3 + \log_3 4$, pode-se representar a igualdade como $\log_3 3 = \log_3 12 - \log_3 4$ ou $\log_3 4 = \log_3 12 - \log_3 3$, pois $3 = 12 \div 4$ e $4 = 12 \div 3$.

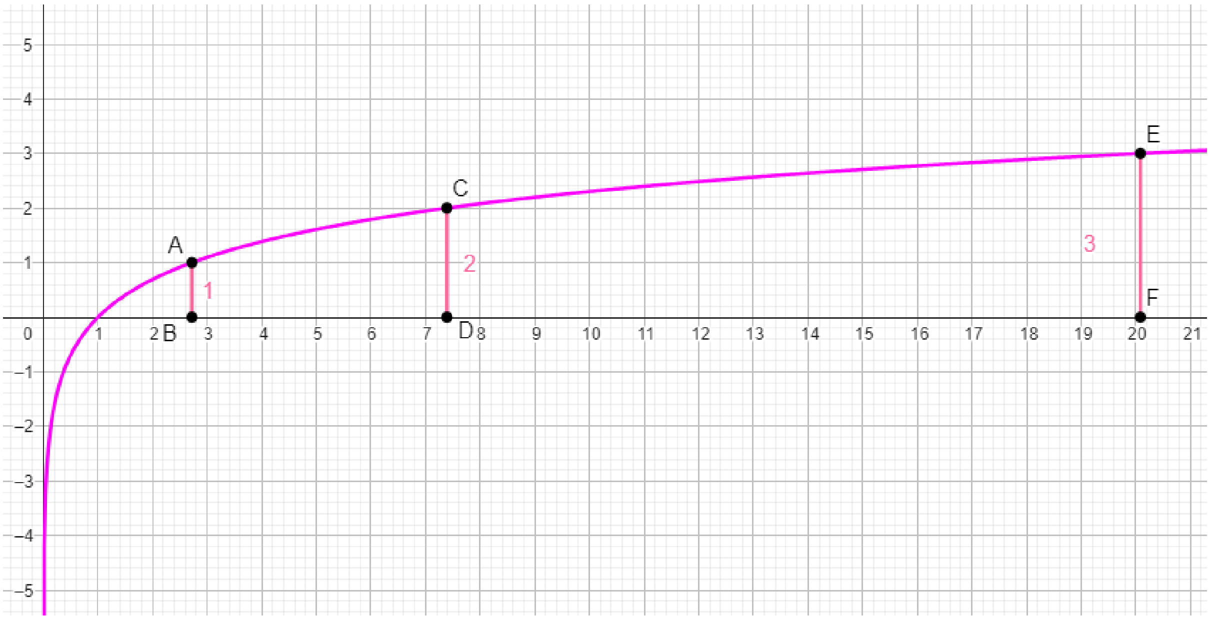
Indutivamente, conclui-se que é possível reescrever o logaritmo de um número escrito como quociente como a subtração dos logaritmos do dividendo e do divisor (todos de mesma base). É sempre importante lembrar que a conclusão destes processos de exploração consiste na escrita generalizada da propriedade, de modo a propiciar que o aluno se habitue à simbologia e à escrita matemática. Assim, finaliza-se com o enunciado formal da propriedade: dados $x, y, b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$, tem-se:

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Para se trabalhar a propriedade do logaritmo da potência, por sua vez, recorre-se à função logaritmo natural $q(x) = \ln x$, que foi pouco explorada até então em ambas as sequências. Deste modo, pede-se que os estudantes encontrem pontos cujas ordenadas são $\ln e$,

$\ln e^2$ e $\ln e^3$ e tracem segmentos de reta cujos comprimentos sejam numericamente iguais a estas ordenadas, análogo ao que foi feito em todos os exemplos desta seção. A Figura 36 abaixo ilustra a construção.

Figura 36 – Comparação entre os valores de $\ln e$, $\ln e^2$ e $\ln e^3$ no plano cartesiano



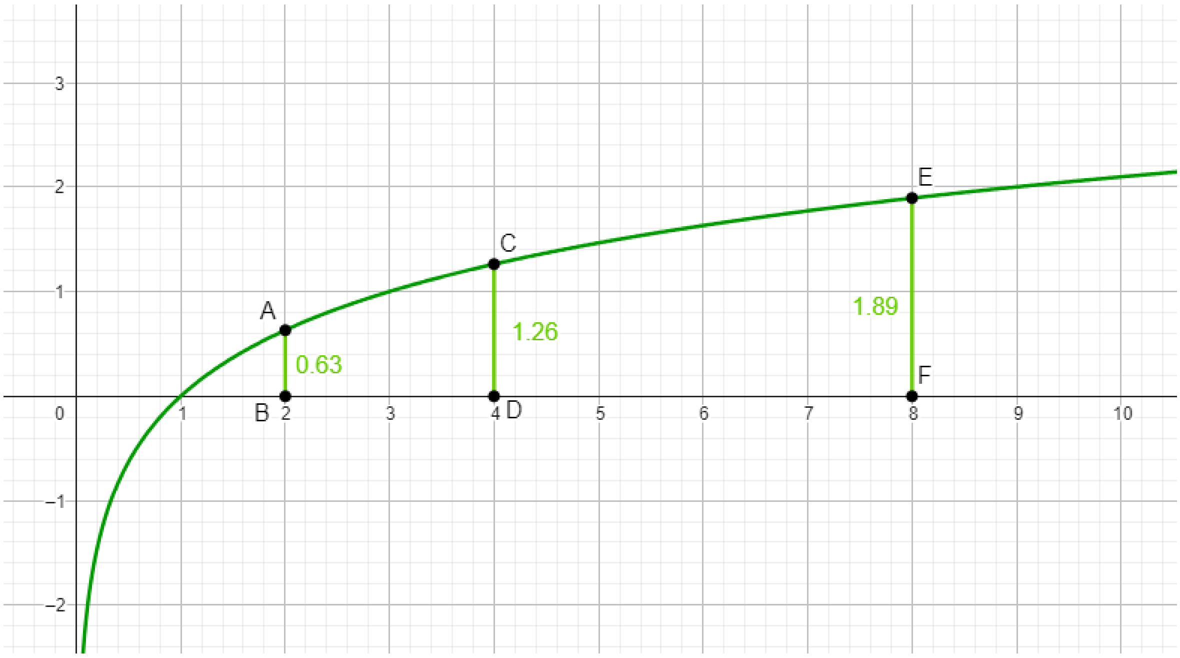
Fonte: O autor

Desta vez, a ideia não é levar os alunos a perceber que $\ln e^3 = \ln e + \ln e^2$, pois $e^3 = e \cdot e^2$ – conclusão que pode partir de algum deles, evidenciando que houve aprendizagem significativa do que foi tratado anteriormente, pois fica claro que propriedade fundamental dos logaritmos foi devidamente compreendida e ancorada na estrutura cognitiva. Neste caso, entende-se que o indivíduo foi capaz de relacionar a multiplicação de potências de mesma base com a ideia de logaritmo do produto. No entanto, o objetivo ao explorar as características da propriedade do logaritmo da potência é que os alunos visualizem duas relações análogas: $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{AB}$ e $\overline{EF} = 3 \cdot \overline{AB}$. Caso eles não percebam de imediato a relação, vale do professor explicitar a primeira e pedir que os alunos a relacionam com a segunda de forma semelhante.

Substituindo os comprimentos dos seus segmentos pelos seus valores numéricos equivalentes, obtém-se $\ln e^2 = 2 \cdot \ln e$ e $\ln e^3 = 3 \cdot \ln e$. Com estas duas igualdades, visa-se que os alunos percebam que o expoente do logartimando no primeiro membro de ambas as igualdades é igual ao fator que multiplica o logaritmo no segundo membro.

Recorre-se a um segundo exemplo para intensificar a análise da propriedade. Retoma-se a função $f(x) = \log_3 x$ e pede-se que sejam encontrados os segmentos de reta paralelos ao eixo y e com pé no eixo x associados aos pontos de ordenadas $\log_3 2$, $\log_3 4$ e $\log_3 8$, conforme apresentado na Figura 37.

Figura 37 –Comparação entre os valores de $\log_3 2$, $\log_3 4$ e $\log_3 8$ no plano cartesiano



Fonte: O autor

Mais uma vez, é possível visualizar e escrever que $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{AB}$ e $\overline{EF} = 3 \cdot \overline{AB}$, ou seja, $\log_3 4 = 2 \cdot \log_3 2$ e $\log_3 8 = 3 \cdot \log_3 2$. Mas, como $4 = 2^2$ e $8 = 2^3$, as expressões tomam a forma $\log_3 2^2 = 2 \cdot \log_3 2$ e $\log_3 2^3 = 3 \cdot \log_3 2$, respectivamente.

A propriedade, neste último exemplo, fica ainda mais evidente. Verbalmente, destaca-se que o logaritmo da potência é equivalente ao produto do expoente da potência pelo logaritmo de sua base (sempre supondo que ambos os logartimandos satisfazem as condições de existência dos logaritmos e que os dois logaritmos possuem a mesma base). Assim, sendo $x, b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}$, tem-se simbolicamente que:

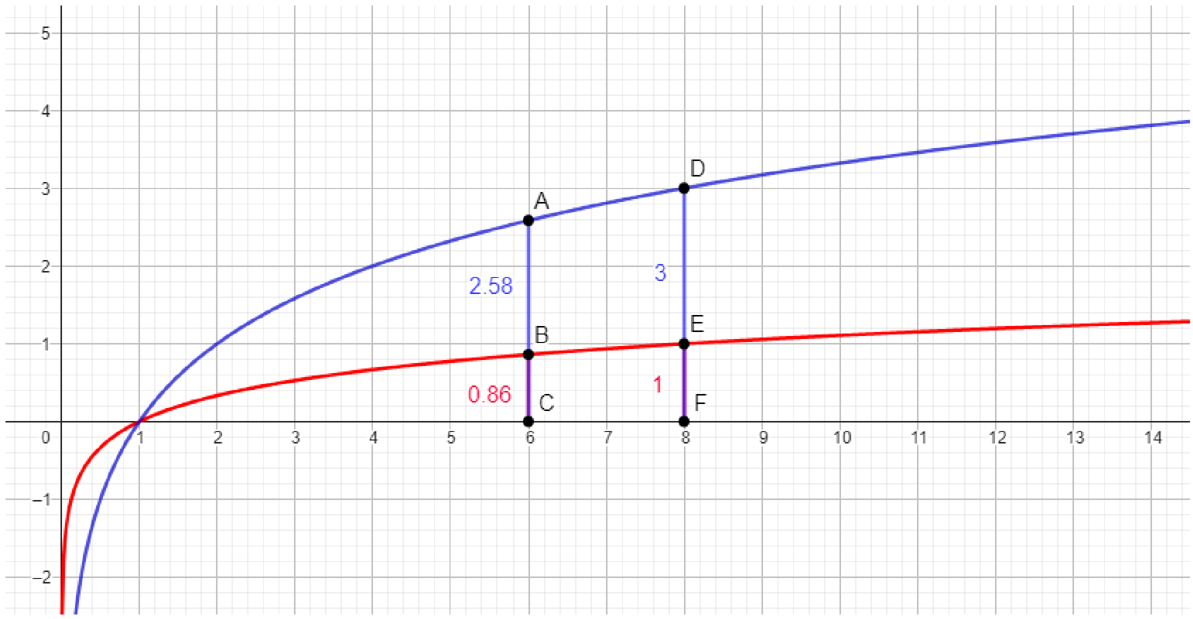
$$\log_b(x^k) = k \cdot \log_b x$$

Neste ponto da sequência, é válido trazer os exemplos idealizados na *Seção 4.1.2*, como "calcule $\log_2 6$ e $\log_2 9$, sabendo que $\log_2 3 \approx 1{,}58$" ou "calcule $\log_2 5$, dado que $\log_2 10 \approx 3{,}32$", dentre outros, objetivando que os alunos desenvolvam habilidades de manipulação de logaritmos, tanto numericamente como algebricamente. Também sugere-se utilizar a *Questão 16*, que trata da Lei de Zipf, dentre as selecionadas do Exame Nacional do Ensino Médio. Seu uso se dá com o objetivo de mostrar aos alunos como manipular igualdades através das propriedades de logaritmos sem, necessariamente, estar interessado em resolver equações ou estabelecer funções diretamente.

A seguir, propõe-se trabalhar com a propriedade do logaritmo cuja base é uma potência. Para isso, utiliza-se a representação de dois gráficos de funções, gerados simultaneamente no Geogebra.

Pede-se que os alunos digitem as funções $g(x) = \log_2 x$ e $r(x) = \log_8 x$. Em seguida, utilizando o mesmo procedimento de traçar segmentos de reta, requisita-se que encontrem, nas duas funções, os pontos do gráfico cujas abscissas dos pontos extremos sejam 6 e 8, representados por meio de segmentos de reta paralelos ao eixo das ordenadas. Na Figura 38, temos g em azul, r em vermelho e os pontos $A = (6, \log_2 6)$, $B = (6, \log_8 6)$, $D = (8, \log_2 8)$ e $E = (8, \log_8 8)$.

Figura 38 – Comparação entre os valores de $\log_2 6$, $\log_8 6$, $\log_2 8$ e $\log_8 8$ no plano cartesiano



Fonte: O autor

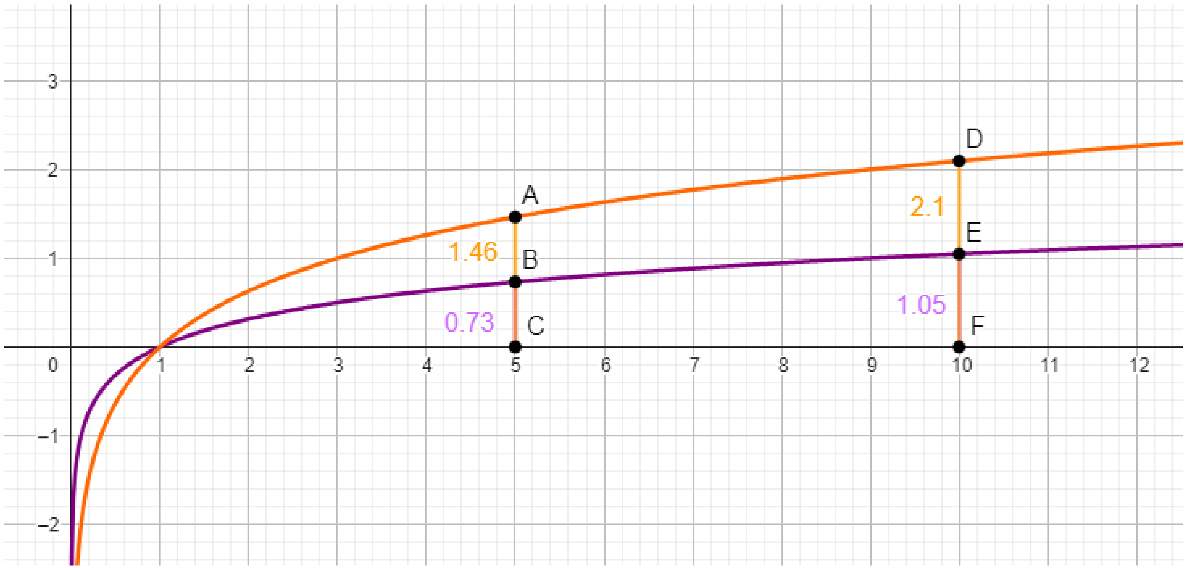
Deseja-se, neste caso, que os alunos percebam a relação existente entre segmentos determinados pela mesma abscissa compreendidos entre cada uma das funções. Tem-se $\overline{AC} = 3 \cdot \overline{BC}$ e $\overline{DF} = 3 \cdot \overline{EF}$. Neste último é mais fácil de se visualizar a relação matemática, pois os logaritmos vêm diretamente da definição, sem necessidade de recorrer a aproximações de irracionais. Considerando que a medida do segmento é equivalente à ordenada do extremo superior de cada um, as igualdades tomam a forma $\log_2 6 = 3 \cdot \log_8 6$ e $\log_2 8 = 3 \cdot \log_8 8$.

Neste momento, é válido que o professor argumente que estas igualdades são, respectivamente, equivalentes a $\log_8 6 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 6$ e $\log_8 8 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 8$. Isso acontece por conta dos princípios da igualdade: dividir ambos os seus membros por 3 ainda mantém o veracidade da sentença.

De modo análogo ao que foi feito na propriedade anterior, onde reescreveu-se números como potências, neste caso também é possível escrever 8 como 2^3, de modo que as igualdades tomam a forma $\log_{2^3} 6 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 6$ e $\log_{2^3} 8 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 6$.

Como sempre, é válido recorrer a mais de um exemplo, com uma função diferente, com a intenção de mostrar aos alunos diferentes possibilidade de uma mesma construção, dando mais "pistas" para a elaboração de inferências decorrentes do processo exploratório-investigativo, objetivando a conclusão final. A Figura 39 ilustra uma construção semelhante à executada anteriormente, mas desta vez com as funções $f(x) = \log_3 x$ (em laranja), $s(x) = \log_9 x$ (em roxo) e os segmentos de reta AC, BC, DF e EF orientados pelas abcissas 5 e 10, de medidas respectivamente iguais a $\log_3 5$, $\log_9 5$, $\log_3 10$ e $\log_9 10$.

Figura 39 – Comparação entre os valores de $\log_3 5$, $\log_9 5$, $\log_3 10$ e $\log_9 10$ no plano cartesiano



Fonte: O autor

Mais uma vez, é possível constatar que $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{BC} \Rightarrow \log_3 5 = 2 \cdot \log_9 5 \Rightarrow \log_9 5 = \frac{1}{2} \cdot \log_3 5$ e $\overline{DF} = 2 \cdot \overline{EF} \Rightarrow \log_3 10 = 2 \cdot \log_9 10 \Rightarrow \log_9 10 = \frac{1}{2} \cdot \log_3 10$. Mas $9 = 3^2$, de modo que as igualdades tomam as formas $\log_{3^2} 5 = \frac{1}{2} \cdot \log_3 5$ e $\log_{3^2} 10 = \frac{1}{2} \cdot \log_3 10$.

Em ambos os exemplos, é possível observar que existe uma relação direta entre a base do logaritmo escrita na forma de potência e o fator multiplicando o logaritmo no outro membro da igualdade (logaritmo este que possui base equivalente à base da potência considerada): um é o inverso do outro. Encerra-se, deste modo, o processo exploratório-investigativo, ao constatar que, para $x, b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$, $k \in \mathbb{R}^*$, tem-se:

$$\log_{b^k} x = \frac{1}{k} \cdot \log_b x$$

A condição do expoente/denominador k ser diferente de zero pode ser discutida como observação complementar com os alunos. Caso k fosse igual a 0, teríamos, no primeiro membro $b^k = 1$, o que é impossível, pois a base não pode ser igual a 1, e no segundo membro $\frac{1}{0}$, que também é impossível, conforme as propriedades da divisão de números reais (Caraça, 1951).

Dando sequência, retoma-se com os alunos a definição de função inversa, trabalhada previamente na *Seção 4.2.1*, para desenvolver um exemplo específico e que levará à propriedade que diz que, dados $a, x \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, tem-se $a^{\log_a x} = x$.

Assim, apresenta-se aos estudantes a função $g(x) = 2^x$ e se pede que encontrem sua inversa. De imediato, espera-se que eles lembrem que $g^{-1}(x) = \log_2 x$. Mas, como já trabalhado anteriormente, sejam f e f^{-1} duas funções, uma inversa da outra, tem-se $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$. Logo, ao aplicar-se a composição de funções para g e sua inversa g^{-1}, obtêm-se $g\left(g^{-1}(x)\right) = x \Rightarrow 2^{\log_2 x} = x$.

Generalizando este procedimento, lado-a-lado com o exemplo numérico, para qualquer função exponencial $h(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, tem-se $h^{-1}(x) = \log_a x$ e segue que $h\left(h^{-1}(x)\right) = a^{\log_a x} = x$. Assim, mostra-se aos alunos a validade desta propriedade a partir da definição de função inversa.

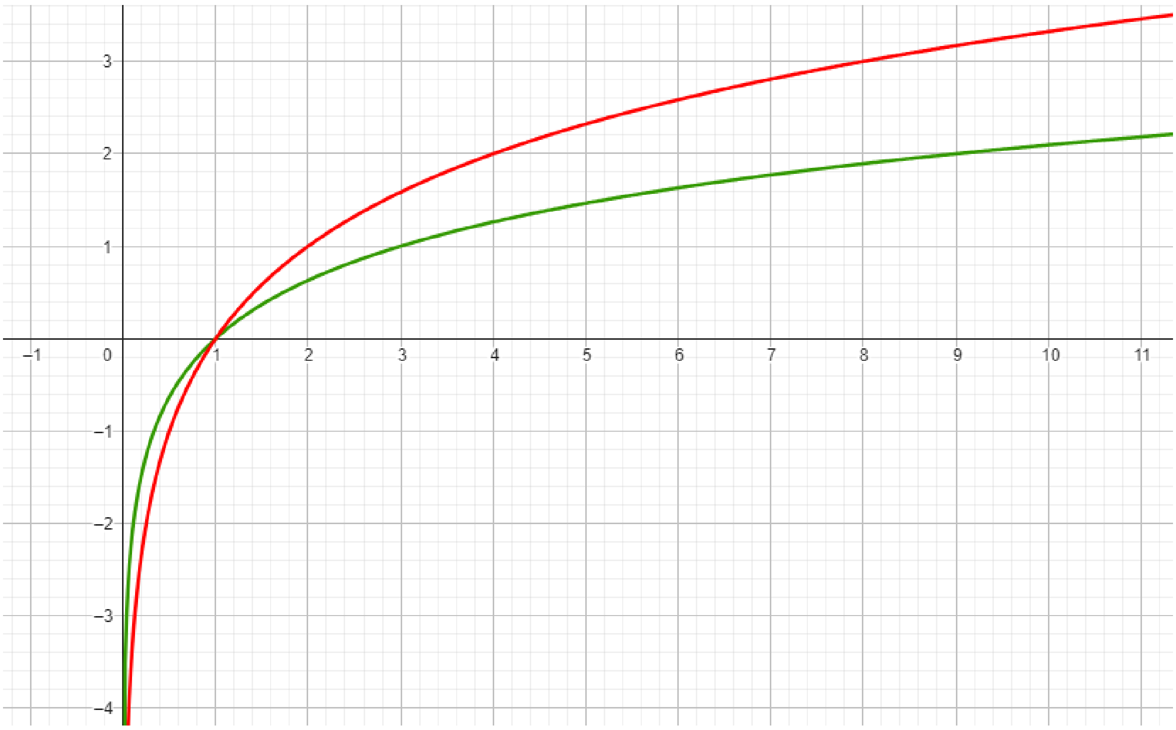
Mais uma vez, tal estratégia não seria possível de ser executada na sequência proposta na *Seção 4.1*, pois a ideia de função logarítmica seria trabalhada apenas posteriormente. Contudo, também é possível explicar a propriedade tratada nestes últimos parágrafos utilizando a própria definição de logaritmo, exatamente como foi feita na *Seção 4.1*.2.

Por fim, trabalha-se a propriedade de mudança de base, que é muito importante para se manipular logaritmos ou para se usar a calculadora para calculá-los. Mais uma vez, faz-se uso dos gráficos das funções logarítmicas. Para este exemplo, todavia, é necessário que os alunos compreendam como se comportam as funções logarítmicas compostas, como $f(x) = 4 \cdot \log x$, $g(x) = \log_2 x - 3$ ou $h(x) = \ln(x + 1)$. Para isso, recomenda-se usar a mesma sequência didática proposta na *Seção 4.1.5*, evidenciando os movimentos (translação vertical e horizontal, ampliação, redução e reflexão em torno dos eixos) do gráfico com base nos parâmetros empregados, mas deixando de lado os exemplos finais, quando se fez necessário trabalhar com equações logarítmicas (eles foram tratados na *Seção 4.2.4*).

Feito isso, parte-se para a tarefa exploratório-investigativa que motivará a ideia da propriedade de mudança de base. Inicia-se o processo com a construção dos gráficos das funções $p(x) = \log_2 x$ e $q(x) = \log_3 x$ no Geogebra. Com ambos visíveis, retoma-se a discussão sobre o formato do gráfico da função logarítmica, iniciada no início da seção e aprofundada no passo anterior, lembrando que as curvas logarítmicas, apesar de diferentes uma da outra, possuem formato semelhante e podem ser obtidas por meio de ampliações ou reduções ("esticamentos" ou "achatamentos" verticais) de uma mesma curva a partir de um parâmetro, como foi o caso da funções $g(x) = 2 \cdot \log_3 x$ e $h(x) = -3 \cdot \log_3 x$.

Ou seja, as funções p e q, apesar de possuírem bases diferentes, possuem o mesmo formato de gráfico: a curva logarítmica. De fato, é possível confirmar isso visualmente, conforme a Figura 40.

Figura 40 – Comparação dos gráficos das funções $p(x) = \log_2 x$ (em vermelho) e $q(x) = \log_3 x$ (em verde)



Fonte: O autor

Indo ao encontro das noções de isometrias e homotetias de gráficos de funções, como se propõe ser visto imediatamente antes deste exemplo, é como se a função p tivesse sido reduzida, ou "achatada", para se transformar na função q (ou então q foi ampliada, "esticada", para gerar p). Logo, existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $q(x) = a \cdot p(x) \Rightarrow \log_3 x = a \cdot \log_2 x$. O objetivo desta tarefa é, portanto, determinar tal a. Inclusive, já é possível inferir que $a \in (0, 1)$.

Para isso, vale-se da propriedade que diz que, dados $a, x \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, tem-se $a^{\log_a x} = x$. Deste modo, escreve-se 3 como $2^{\log_2 3}$. Deve ficar claro aos alunos que a escolha do 2 como base foi influenciada pela base da função p, a qual se está interessado em manipular. Logo, $\log_3 x$ pode ser reescrito como:

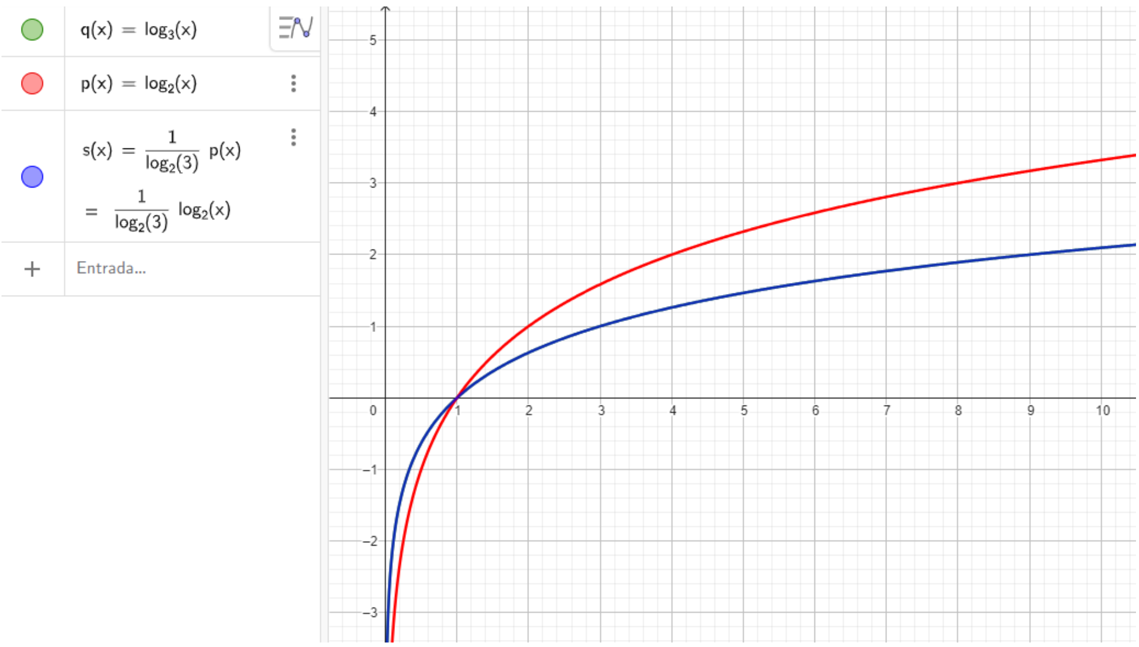
$$\log_3 x = \log_{(2^{\log_2 3})} x$$

Mas a propriedade da potência na base do logaritmo permite executar:

$$\log_{(2^{\log_2 3})} x = \frac{1}{\log_2 3} \cdot \log_2 x$$

Finalmente depara-se com a igualdade $\log_3 x = \frac{1}{\log_2 3} \cdot \log_2 x$, de tal modo que se encontra $a = \frac{1}{\log_2 3} < 1$, o fator a que se deve multiplicar a função p para gerar q. É possível utilizar o próprio Geogebra para mostrar que as funções $q(x) = \log_3 x$ e $s(x) = a \cdot p(x) = \frac{1}{\log_2 3} \cdot \log_2 x$ possuem o mesmo gráfico (ou seja, sobrepõe-se), conforme a Figura 41.

Figura 41 – Visualização final da tarefa (os gráficos das funções q e s se sobrepõe)



Fonte: O autor

Com todo este processo, obtém-se a igualdade reescrita como $\log_3 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 3}$. Pede-se aos alunos que a analisem, observando que padrão eles percebem entre o primeiro e o segundo membro. É válido realizar o mesmo processo para encontrar o fator a com outras funções, de modo que eles percebam alguma recorrência, tais como:

- $p(x) = \log_5 x$ e $q(x) = \log_2 x$
- $p(x) = \log_3 x$ e $q(x) = \log x$
- $p(x) = \log_2 x$ e $q(x) = \log_3 x$

No último item, especificamente, pede-se que se encontre $a > 1$ que amplia q para gerar p, ou seja, o processo inverso do que foi feito anteriormente.

De modo geral, a ideia desta tarefa é que os alunos percebam que, independentemente da escolha das bases b e c, respectivamente das funções p e q, a relação de igualdade final entre estas duas funções sempre leva em consideração b e c escolhidos. De fato, se $p(x) = \log_b x$ e $q(x) = \log_c x$ são tais que $q(x) = a \cdot p(x)$, seguindo o mesmo passo a passo desenvolvido no exemplo numérico, tem-se:

$$q(x) = \log_c x = \log_{(b^{\log_b c})} x = \frac{1}{\log_b c} \cdot \log_b x = \frac{1}{\log_b c} \cdot p(x)$$

Ou seja, $a = \frac{1}{\log_b c}$ e $\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$. Esta condução pode ser feita com os alunos lado-a-lado com a construção numérica já executada, a fim de que relacionem a generalização com o caso específico, facilitando a compreensão.

Neste momento, recorre-se mais uma vez ao pensamento indutivo dos alunos, com a intenção que percebam como $\log_c x$ pode ser reescrito como o quociente $\frac{\log_b x}{\log_b c}$, ou seja, uma divisão entre os logaritmos de uma base nova ($b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$) do logartimando e da base, respectivamente, do logaritmo original.

A partir deste ponto, sugere-se utilizar os enunciados já descritos e esmiuçados na *Seção 4.1.2* para aprofundar e ampliar os tópicos referentes à mudança de base.

É importante notar que a escolha de utilizar gráficos de funções logarítmicas e o resultado $a^{\log_a x} = x$ para se trabalhar a propriedade da mudança de base funciona como um contraponto ao que foi feito na sequência didática proposta na *Seção 4.1*, onde tal propriedade foi construída a partir de análises numéricas e raciocínios puramente indutivos.

A escolha sobre qual estratégia utilizar depende do professor, do conhecimento que ele possui sobre sua turma, do tempo disponível para se trabalhar com o conteúdo de logaritmos em sala de aula e com a estrutura física disponível para ser utilizada na escola. Como já dito, as tarefas propostas ao longo deste texto são maleáveis, contanto que não deixem de lado o rigor inerente ao trabalho com logaritmos e a possibilidade de tornar os alunos protagonistas do processo de ensino, objetivando potencializar sua aprendizagem e torná-la significativa.

4.2.4. Estudando equações, inequações e leis de formação de funções logarítmicas a partir de gráficos

Na última seção desta dissertação, objetiva-se apresentar a proposta de trabalhar com os alunos as técnicas de resolução de equações exponenciais (recorrendo à definição de logaritmo) e de equações e inequações logarítmicas, além da abordagem algébrica de função logarítmica, vinculando-as, também, a uma perspectiva gráfica. Decidiu-se, inclusive, apresentar uma sequência de exemplos onde algumas das questões selecionadas do Exame Nacional do Ensino Médio discutidas no *Capítulo 03* e que tratam diretamente de funções logarítmicas são embasadas pelos gráficos das respectivas funções abordadas, com o objetivo de possibilizar ao estudante que observe o resultado obtido indo além de sua resolução algébrica, e poderão ser alocados onde o professor achar mais conveniente ao longo do andamento das tarefas. O mesmo pode ser executado com questões relativas a outros tipos de funções, como afim, quadrática ou exponencial, por exemplo, em outros momentos de aprendizagem.

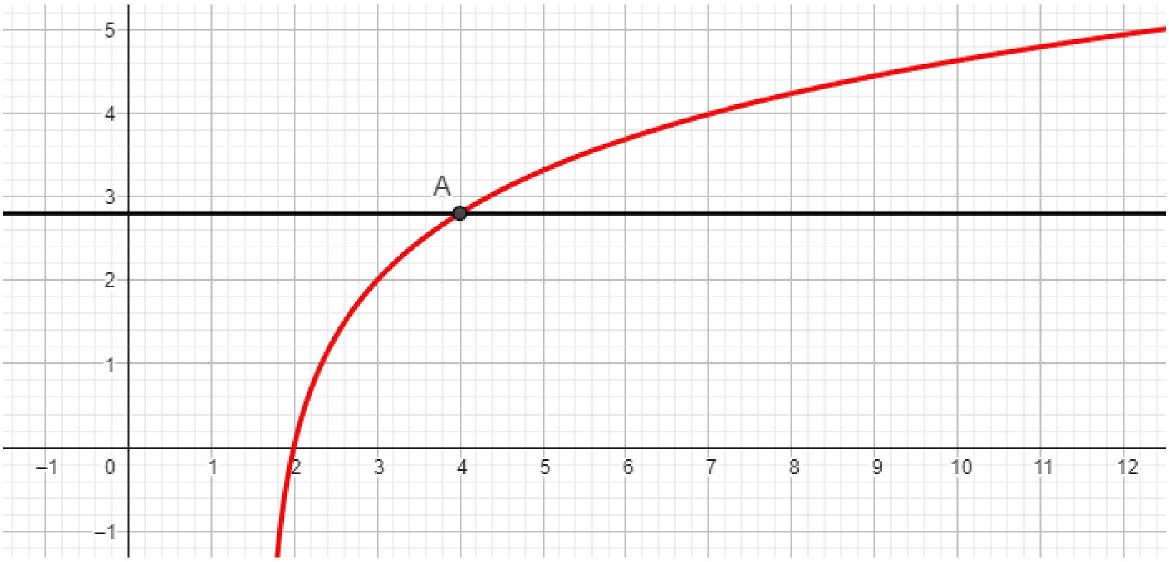
Inicialmente, para se trabalhar a resolução de equações tanto exponenciais quanto logarítmicas e de inequações logarítmicas de forma algébrica, sugere-se fazer uso da sequência de exemplos e tarefas descritas nas *Seções 4.1.3* e *4.1.4*. Como forma de consolidar esta proposta, sugere-se o uso do Geogebra como ferramenta para justificar as soluções das equações e das inequações. Neste texto, optou-se por detalhar e ilustrar alguns dos exemplos de equações e inequações já resolvidas anteriormente. Deve levar-se em consideração que a sequência desenvolvida vale para todas elas, inclusive para as exponenciais (que não serão abordadas diretamente nesta seção).

- $\log_2(3x-5) = \log_2 7$

É possível interpretar esta equação como uma igualdade entre duas funções: $f(x) = \log_2(3x-5)$ e a função constante cujo gráfico é a reta $y = \log_2 7$. Ao representar ambas no Geogebra, percebe-se que elas se interseccionam no ponto A, conforme ilustrado na Figura 42.

Tal ponto, conforme pode ser visualizado tanto na janela algébrica do *software* quanto no plano cartesiano, possui abscissa $x = 4$, que é a solução encontrada para a equação quando resolvida algebricamente.

Figura 42 – Representação gráfica da função $f(x) = \log_2(3x - 5)$ e da reta $y = \log_2 7$

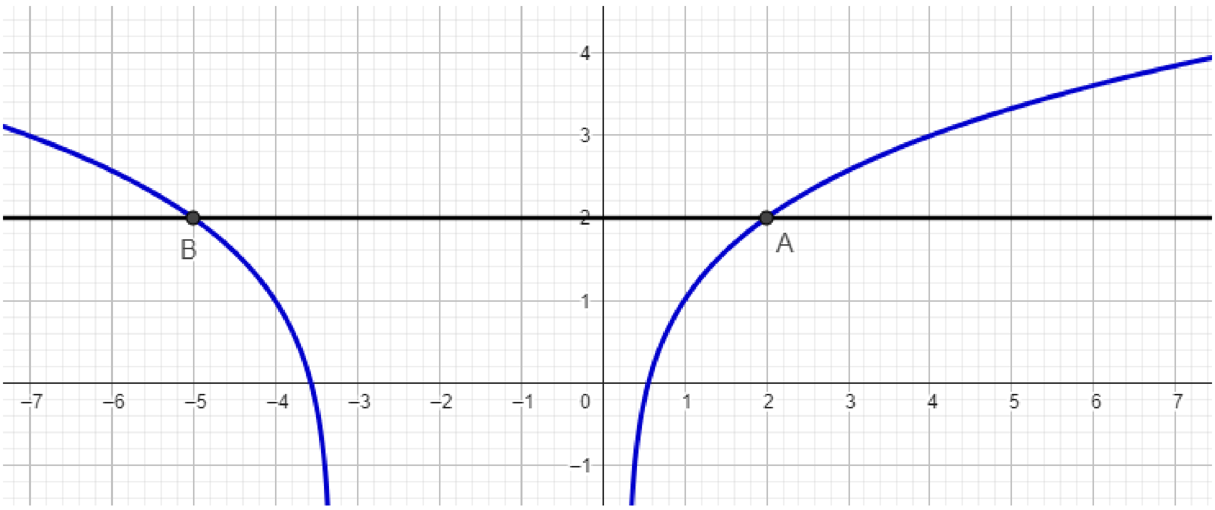


Fonte: O autor

- $\log_3(x^2 + 3x - 1) = 2$

Mais uma vez, interpreta-se a equação como uma igualdade entre as funções $g(x) = \log_3(x^2 + 3x - 1)$ e a função constante representada pela reta $y = 2$. No Geogebra, elas se interseccionam nos pontos A e B (ver Figura 43). Tais pares ordenados possuem abscissas, respectivamente, iguais a 2 e -5, o que corrobora com a conclusão chegada algebricamente de que a equação possui duas soluções reais.

Figura 43 – Representação gráfica da função $g(x) = \log_3(x^2 + 3x - 1)$ (em azul) e da reta $y = 2$



Fonte: O autor

As demais equações podem ser visualizadas de maneira análoga. Esta estratégia é interessante pois explora com os alunos a existência de raízes, bem como a quantidade delas, algo que algebricamente é verificado a partir de substituições dos valores encontrados como potenciais soluções na própria equação, a fim de verificar a validade da igualdade e o cumprimento das condições de existência. Com os gráficos, à verificação numérica é atribuído outro significado, que é muito eficaz e potencialmente significativo para a aprendizagem do aluno.

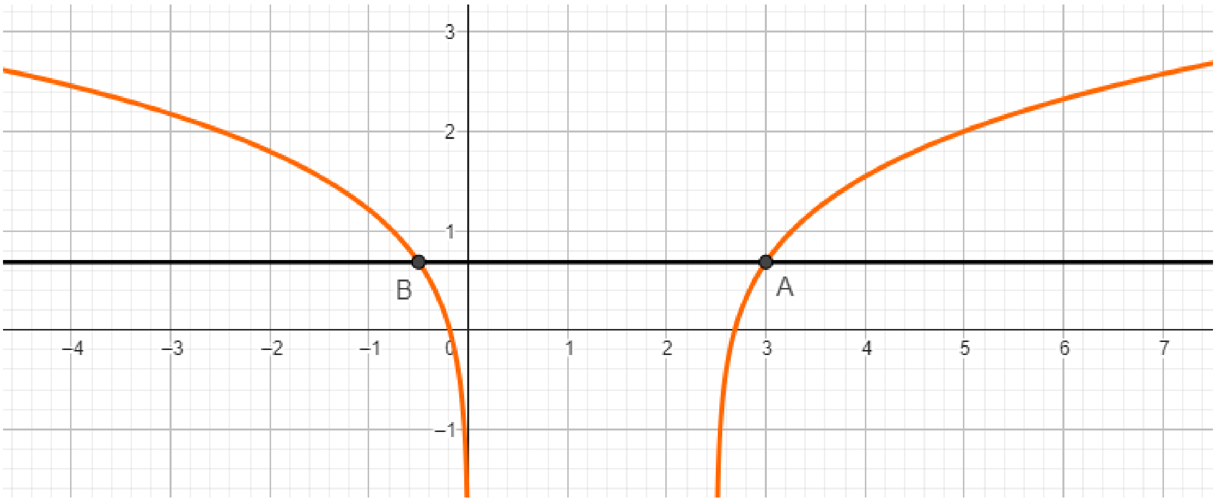
No caso das inequações, procede-se do mesmo modo. Abaixo, deixa-se dois exemplos comentados dentre os resolvidos algebricamente na *Seção 4.1.4.2*.

- $\log_5(2x^2 - 5x) > \log_5 3$

Diferente do que aconteceu com as equações, desta vez o interesse está em visualizar uma desigualdade entre funções no plano cartesiano. Como é comum na resolução de inequações, a solução de tal desigualdade será representada por intervalos reais.

Neste caso, representando a função $h(x) = \log_5(2x^2 - 5x)$ e a reta $y = \log_5 3$ no Geogebra, obtém-se os gráficos conforme a Figura 44.

Figura 44 – Representação gráfica da função $h(x) = \log_5(2x^2 - 5x)$ (em laranja) e da reta $y = \log_5 3$

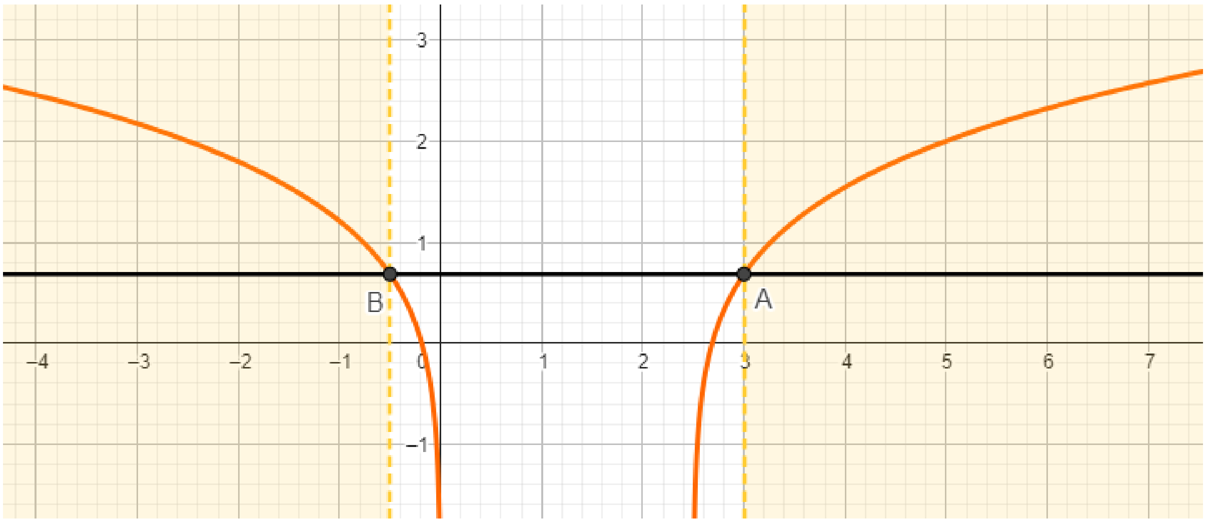


Fonte: O autor

Novamente, obtém-se dois pontos de intersecção A e B, de abscissas respectivamente 3 e $-\frac{1}{2}$, que seriam soluções da equação $\log_5(2x^2 - 5x) = \log_5 3$. Contudo, neste caso está-se interessado em determinar quando a função h é maior que a reta $y = \log_5 3$. Visualmente, isso acontece quando o gráfico de h posiciona-se acima da reta $y = \log_5 3$. Isso ocorre para valores maiores que 3 e menores que $-\frac{1}{2}$, que são as abscissas dos pontos A e B, respectivamente.

Logo, o intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$ é a solução da inequação, como já determinado algebricamente. A Figura 45 ilustra tal conclusão.

Figura 45 – Representação gráfica do intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$, solução da inequação $\log_5(2x^2 - 5x) > \log_5 3$, no eixo x



Fonte: O autor

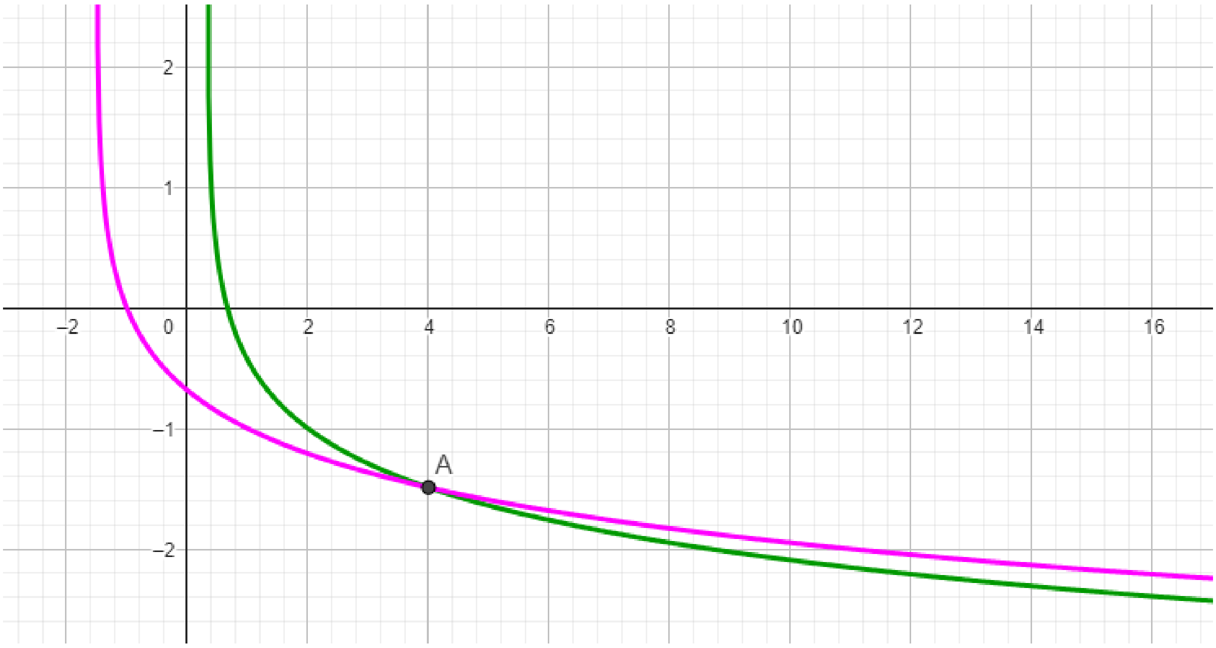
Estes últimos gráficos, em específico, talvez causem estranheza aos alunos, por não serem as convencionais curvas logarítmicas vistas até então. Vale comentar, então, que existem inúmeras maneiras que compor uma função logarítmica, e muitas delas foram deixadas de lado dos exemplos trabalhados em aula por conta de sua complexidade extrínseca ao Ensino Médio. Nestes casos, em específico, foram usadas expressões algébricas na forma de polinômios de grau 2 no logartimando, o que justifica esta aparência “duplicada” ou “espelhada” da curva.

- $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(2x + 3)$

Este último exemplo pode ser interpretado como duas funções logarítmicas em cada membros da desigualdade. Assim, tomando $p(x) = \log_{\frac{1}{5}}(3x - 1)$ e $q(x) = \log_{\frac{1}{5}}(2x + 3)$ e representando-as no Geogebra, obtém-se os gráficos ilustrados na Figura 46. A intersecção das curvas se dá no ponto A, de abscissa $x = 4$.

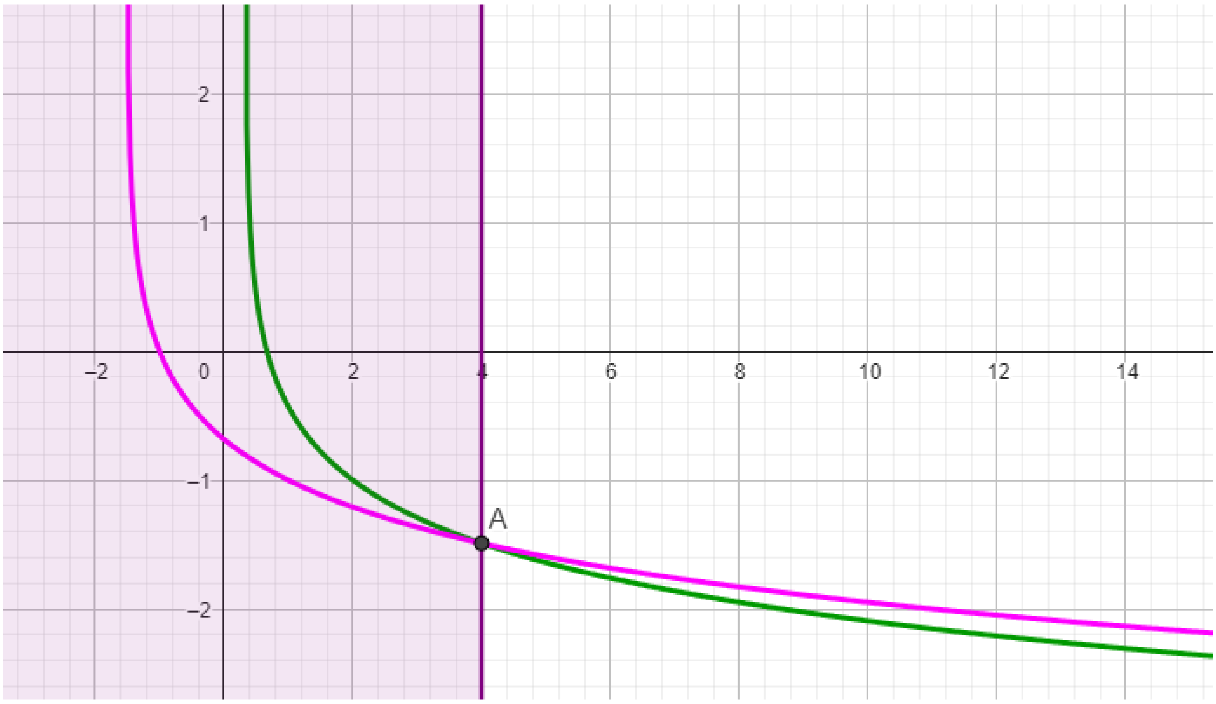
Apenas a igualdade, ou seja, a solução da equação $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 1) = \log_{\frac{1}{5}}(2x + 3)$ não basta. Neste caso, o interesse está em determinar o intervalo do domínio das funções que fazem $p(x) \geq q(x)$. Isto é, visualmente, objetiva-se que o gráfico de p fique acima ou sobreposto ao gráfico da q. E isto acontece no intervalo $(-\infty, 4]$. Ou seja, os valores de x que satisfazem a inequação são todos aqueles reais menores que 4 (supondo estar-se trabalhando com o conjunto dos números reais como universo). A solução interpretada de forma geométrica pode ser visualizada na Figura 47.

Figura 46 – Representação dos gráficos das funções $p(x) = \log_{\frac{1}{5}}(3x - 1)$ (em verde) e $q(x) = \log_{\frac{1}{5}}(2x + 3)$ (em rosa) (em escala $2:1$)



Fonte: O autor

Figura 47 – Representação gráfica do intervalo $(-\infty, 4]$, solução da inequação $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(2x + 3)$, no eixo x (em escala $2:1$)

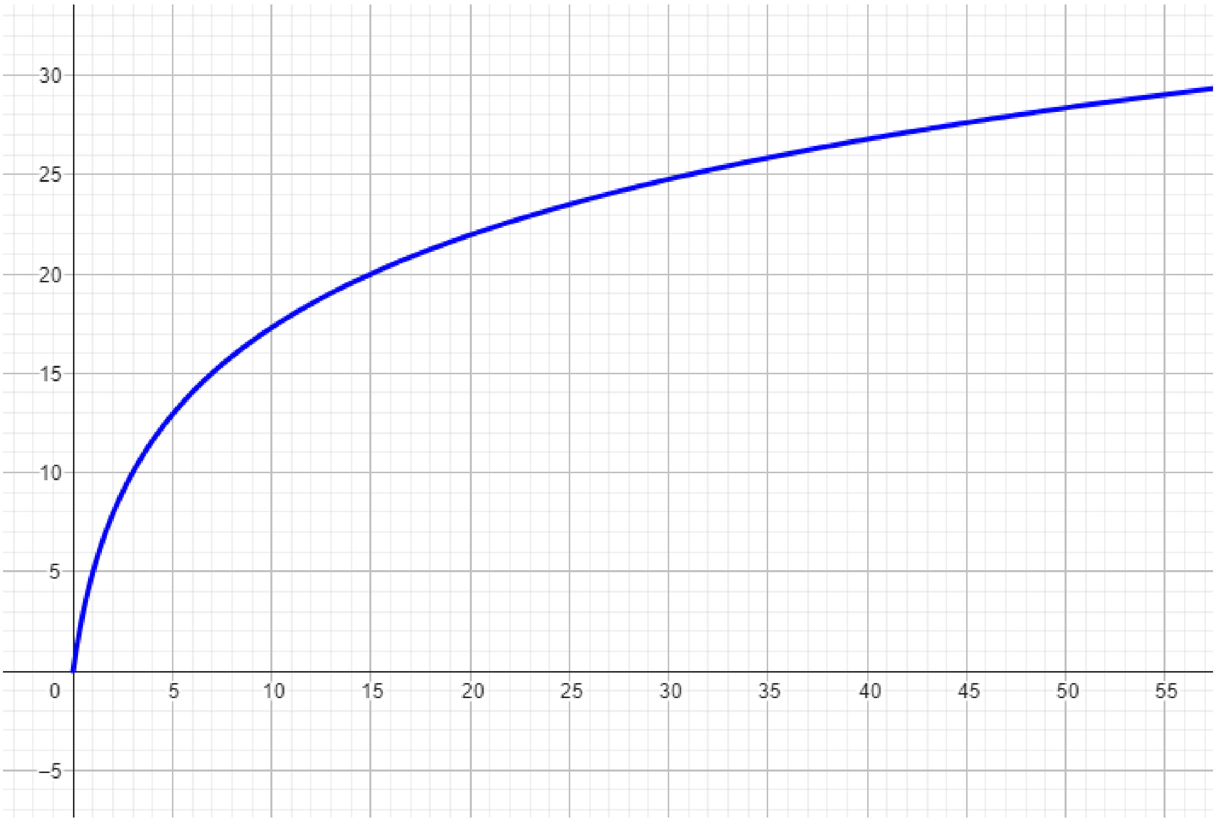


Fonte: O autor

O mesmo processo se aplica à introdução da noção algébrica de função logarítmica. Recomenda-se utilizar a mesma sequência proposta no início da *Seção 4.1.5*, onde adaptou-se a *Questão 14*, sobre o crescimento logarítmico de uma planta, mas dando a ela um amparo algébrico. O uso da ferramenta gráfica para encontrar os resultados não exclui, de modo algum, a resolução aritmética ou algébrica, a partir da resolução de expressões numéricas ou equacionamentos.

Ao se representar o gráfico da função $h(x) = 5 \cdot \log_2(x + 1)$ (assumindo $t = x > 0$) no Geogebra, obtém-se a curva que pode ser visualizada na Figura 48.

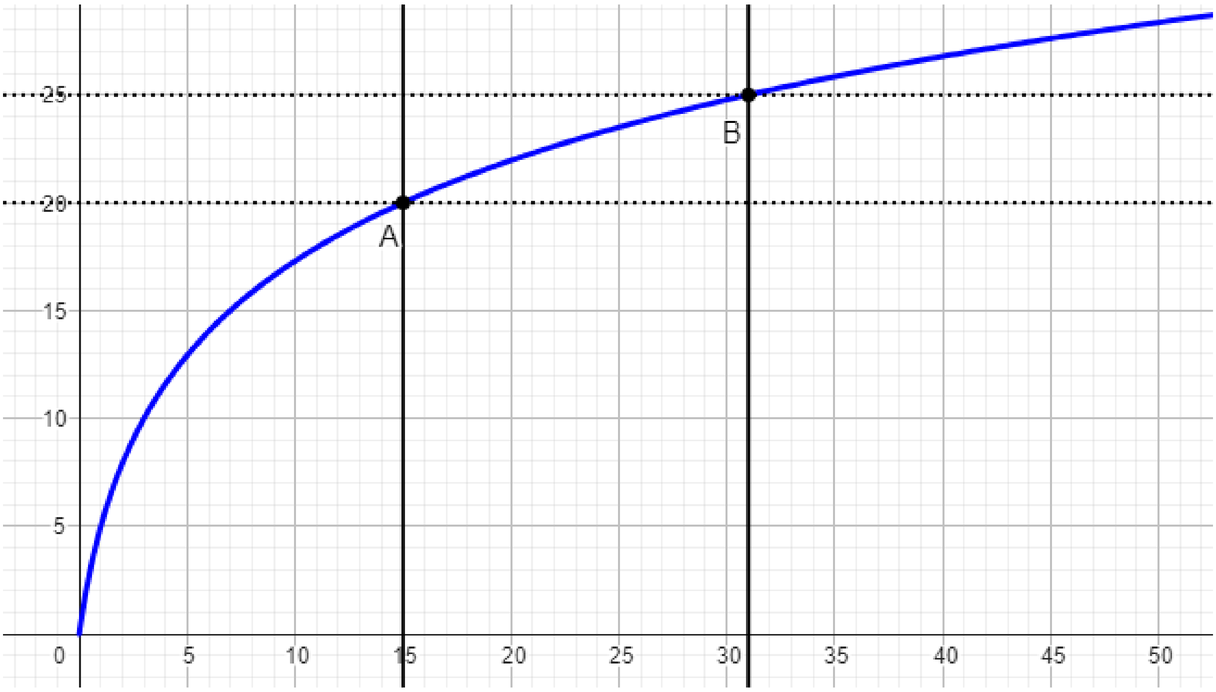
Figura 48 – Representação do gráfico da função $h(x) = 5 \cdot \log_2(x + 1)$



Fonte: O autor

Para resolver os itens **a.** e **b.** algebricamente, foi necessário calcular $h(15)$ e $h(31)$, respectivamente, ou seja, substituir $x = 15$ e $x = 31$ na lei de formação da função. Por outro lado, quando as retas $x = 15$ e $x = 31$ são traçadas no Geogebra e verifica-se a ordenada do ponto onde elas interseccionam a curva logarítmica de h, isto é, a imagem da função para estes valores do domínio, é possível encontrar os mesmos resultados do cálculo aritmético: $h(15) = 20$ e $h(31) = 25$. Tal construção está representada na Figura 49.

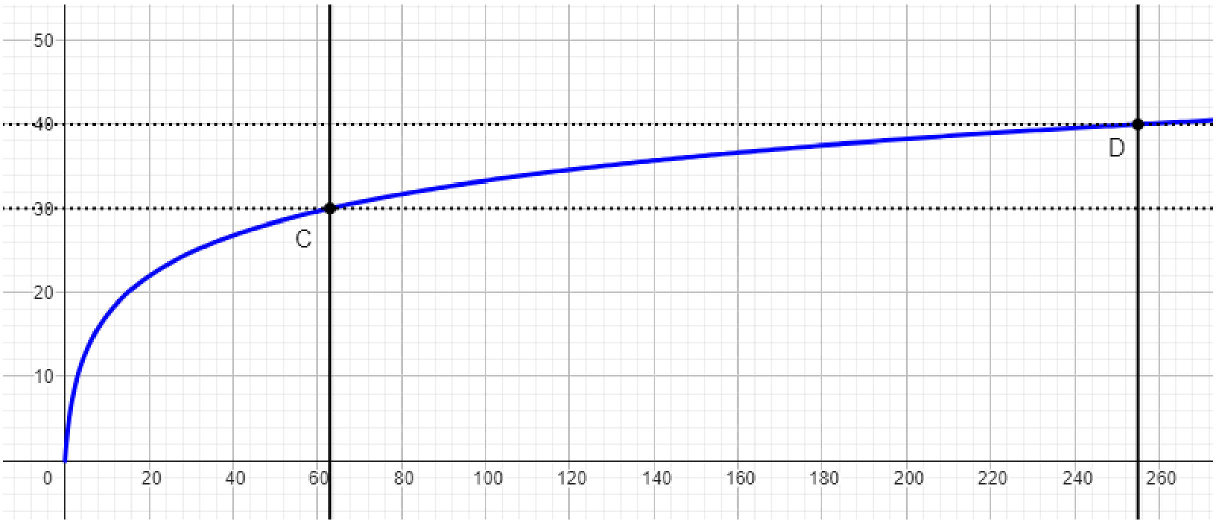
Figura 49 – Construção das imagens $h(15)$ e $h(31)$



Fonte: O autor

Para visualizar os itens **c.** e **d.**, executa-se o processo contrário. O interesse, neste caso, consiste em buscar os valores de x tal que $h(x) = 30$, no caso de **c.**, e $h(x) = 40$, no caso de **d.**. Para isso, no Geogebra, constrói-se as retas $y = 30$ e $y = 40$, correspondentes às imagens dadas, e observa-se as abscissas dos pontos C e D, resultantes das intersecções destas duas retas com a curva logarítmica da função h (ver Figura 50). Tais abscissas representam as soluções destas equações, respectivamente.

Figura 50 – Construção das soluções das equações $h(x) = 30$ e $h(x) = 40$ (em escala $2:1$)



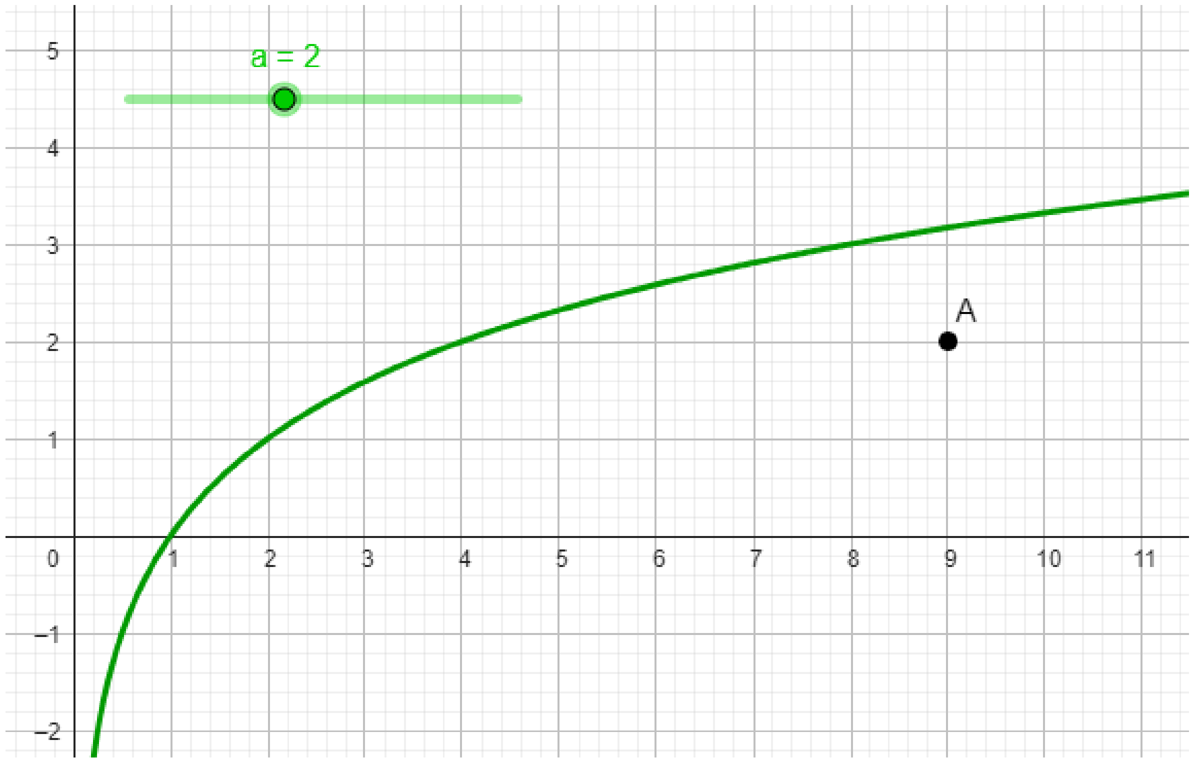
Fonte: O autor

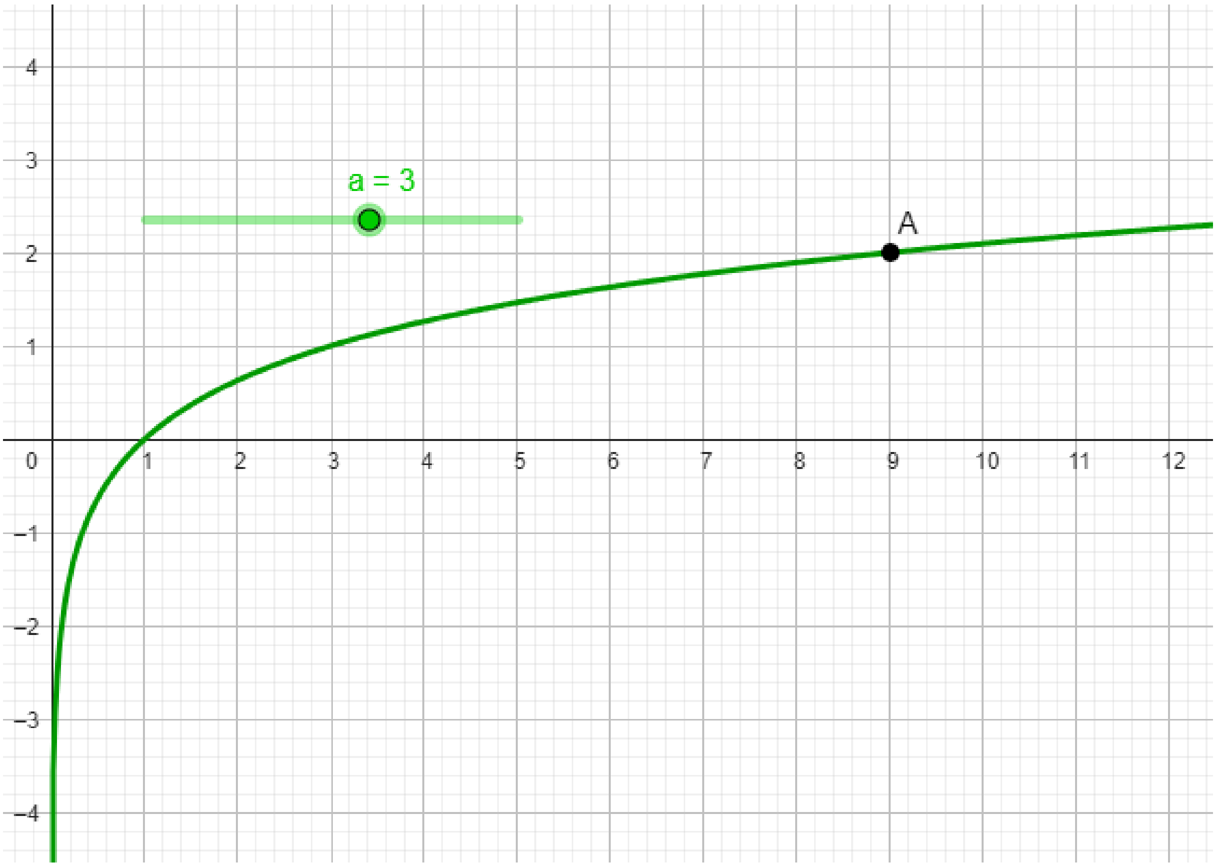
Neste momento, sugere-se trabalhar também os exemplos trazidos no final da *Seção 4.1.5.2*, que fazem uso de pares ordenados pertencentes aos gráficos de funções logarítmicas para se determinar suas leis de formação através da resolução de equações. Para isso, uma ideia para conduzir a tarefa é utilizar a ferramenta *Controle Deslizante* no Geogebra, que torna possível fazer um parâmetro variar, potencializando a observação de sua interferência nos gráficos das funções.

O ponto $(9, 2)$ faz parte do gráfico da função $h(x) = \log_a x$. Determine a.

Para este primeiro exemplo, constrói-se o *Controle Deslizante* a no Geogebra para representar a base do logaritmo, o qual é programado para assumir valores maiores que 0 (consideradas as condições de existência dos logaritmos). Em seguida, constrói-se a função $h(x) = \log_a x$ e o ponto $A = (9, 2)$. É válido mostrar aos alunos que, quando $a = 1$, a função também não está definida (de fato, ela desaparece da janela de visualização), pois a base de um logaritmo não pode ser 1. Com estas três construções, orienta-se os alunos a movimentar o *Controle Deslizante* e encontrar o valor de a tal que o ponto A faça parte do gráfico da função h. Isso ocorre quando $a = 3$, que foi a solução encontrada para o problema quando equacionado. A Figura 51 ilustra duas situações desta tarefa: quando $a = 2$, e perceba que o ponto A não pertence ao gráfico de h, e quando $a = 3$, a opção correta.

Figura 51 – Representações gráficas da função $h(x) = \log_a x$ quando $a = 2$ e $a = 3$, respectivamente





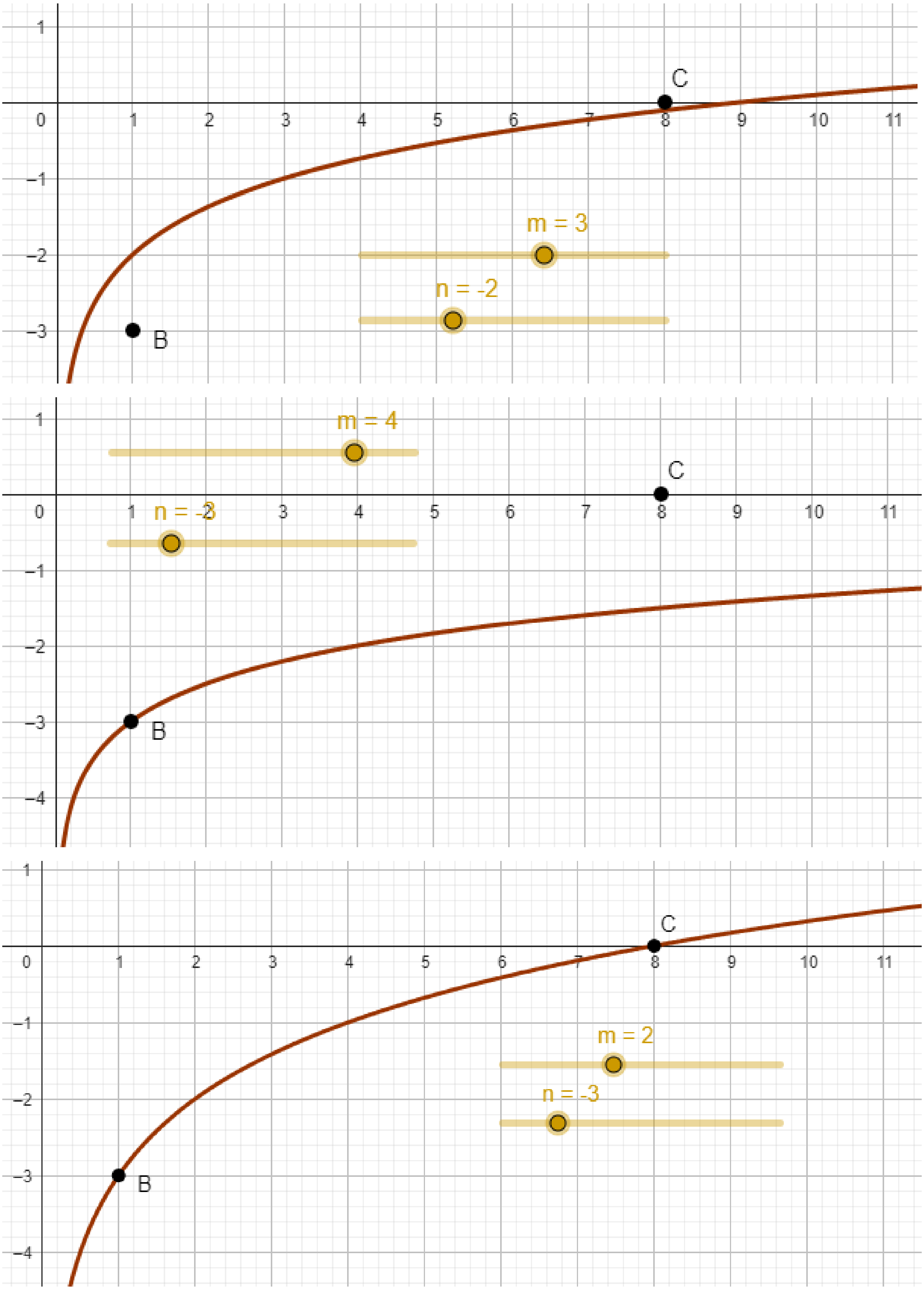
Fonte: O autor

Os pontos $(1, -3)$ e $(8, 0)$ fazem parte do gráfico da função $p(x) = \log_m x + n$. Determine m e n.

No caso deste segundo exemplo, procede-se de maneira análoga, com a diferença de que agora é preciso criar dois *Controles Deslizantes* (m e n) e dois pontos que devem ser encaixados na função p: $B = (1, -3)$ e $C = (8, 0)$. Isto posto, m, que representa a base, continua podendo assumir apenas valores positivos e diferentes de 1, mas n, por não ser nem base nem logartimando do logaritmo, pode assumir qualquer valor real. Como já visto e explorado anteriormente, n está associado a uma translação vertical do gráfico da função.

Mais uma vez, os alunos são convidados a movimentarem os *Controles Deslizantes* com o objetivo de tornarem os pontos B e C, de alguma maneira, pertencentes à função p. Isso ocorre quando $m = 2$ e $n = -3$. A Figura 52 apresenta três possibilidades de combinar os parâmetros. Apenas um, todavia, garante que os dois pontos encontrem o gráfico da função simultaneamente.

Figura 52 - Representações gráficas da função $p(x) = \log_m x + n$ quando $m = 2$ e $n = -2$, $m = 4$ e $n = -3$ e $m = 2$ e $n = -3$, respectivamente



Fonte: O autor

Após apresentadas estratégias que aprofundam e diversificam o olhar dos alunos sobre a solução de equações e inequações logarítmicas e sobre a análise de funções logarítmicas, descreve-se detalhadamente, a partir daqui, como os gráficos de funções logarítmicas podem ser utilizados para embasar a resolução das *Questões 01, 05, 07, 10, 11, 12, 13* e *18* do ENEM. São as questões que trazem, diretamente, leis de formação de funções logarítmicas e foram, inicialmente, solucionadas utilizando técnicas de resolução de equações. Mais uma vez, ressalta-se que tais procedimentos algébricos não devem ser deixados de lados. A ideia é dar outro foco à questão, de modo a servir de apoio ao professor para ajudar os alunos a visualizarem como as respostas obtidas são, de fato, válidas para as situações propostas a partir de um olhar geométrico e mais "palpável".

A *Questão 03*, da modelagem do vidro do carro, foi deixada de lado pois já apresenta o gráfico da função logarítmica em seu enunciado, ou seja, não há a necessidade de retomá-la pois a conexão entre a representação algébrica e a gráfica da função já foi feita.

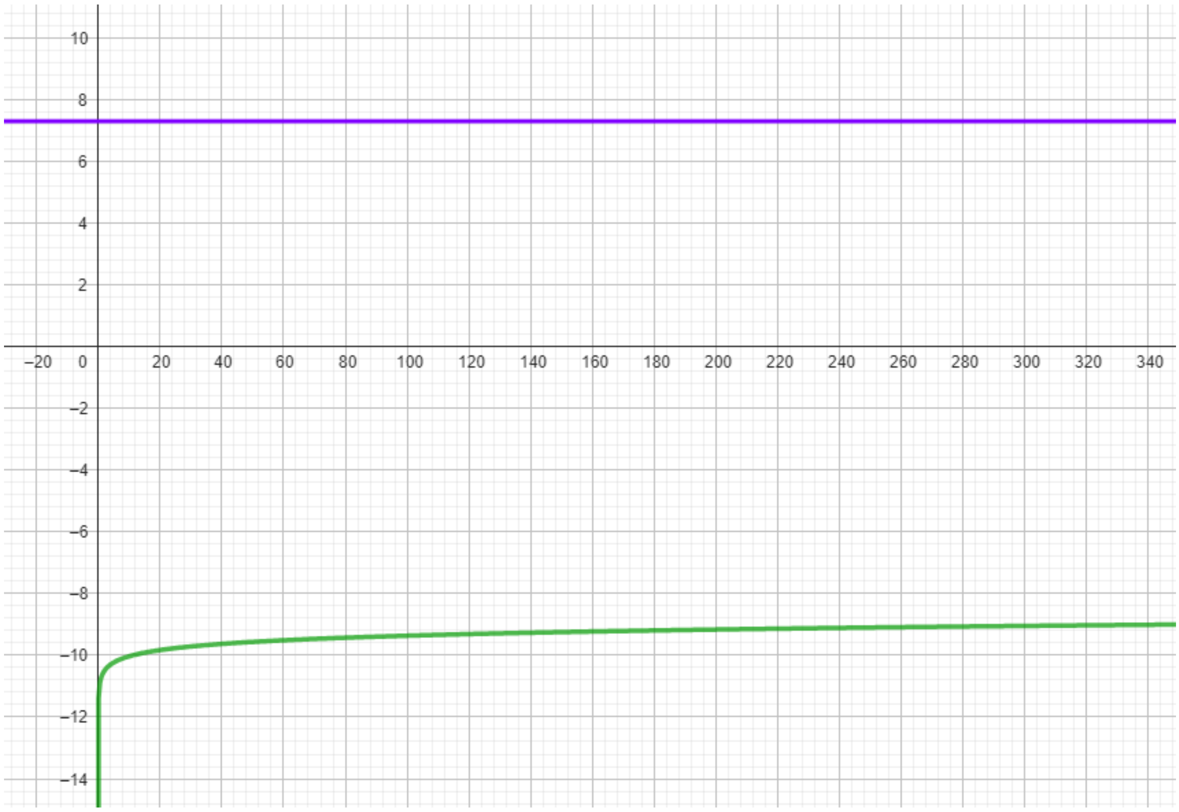
Iniciando pela *Questão 01*, que trata da Escala de Magnitude de Momento ao relacionar o momento sísmico M_0 com a magnitude do terremoto M_w através da lei $M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$, quer-se determinar M_0 dado que $M_w = 7{,}3$. A resolução da equação associada ao problema nos dá que $M_0 = 10^{27}$, um número muito grande. A fim de visualizar o tamanho absoluto da solução, recorre-se à representação gráfica da função $f(x) = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log x$, onde x equivale a M_0 e $f(x)$ a M_w.

A Figura 53 ilustra tal gráfico, além da reta $y = 7{,}3$. A intersecção do gráfico de f com a reta traduz graficamente a equação $7{,}3 = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log x$, cuja abscissa deve ser 10^{27}, conforme a equação já resolvida.

É perceptível que tal intersecção não está visível no gráfico. E é este o objetivo da tarefa: fazer os alunos perceberem que, por 10^{27} ser um número extremamente grande, a intersecção das duas linhas se dá mais à direita no plano, o que inviabiliza sua localização por conta da distância a ser percorrida ao longo do eixo x. Ainda assim, é possível fazer uso do botão *Intersecção de Dois Objetos*, disponível no *software*. Ao selecionar a curva e a reta, o ponto $A = (1000000000000000000000000000; 7{,}3)$ é gerado, onde a abscissa é equivalente a 10^{27}, corroborando com a solução encontrada na resolução algébrica da equação (ver Figura 54).

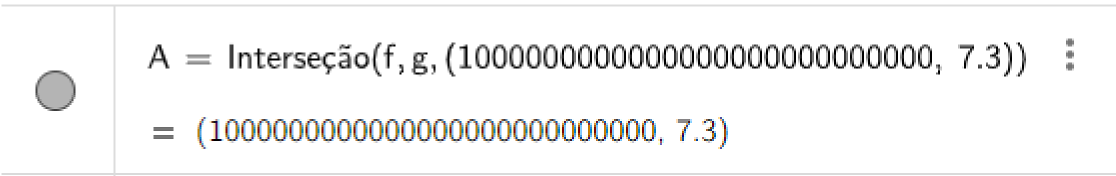
Também é possível perceber que o gráfico da função f sofreu duas movimentações a partir dos parâmetros a que foi condicionado. Primeiro, a lei foi multiplicada por $\frac{2}{3} < 1$, o que "encolheu" o gráfico, deixando-o mais "achatado". Depois, foi-se subtraído 10,7 da função, o que gerou uma translação vertical de 10,7 unidades para baixo.

Figura 53 – Representação gráfica da função $f(x) = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log x$ e da reta $y = 7{,}3$ (na escala 10: 1)



Fonte: O autor

Figura 54 – Ponto de intersecção entre a função $f(x) = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log x$ e a reta $y = 7{,}3$



Fonte: O autor

A *Questão 05* também trata de magnitude de terremoto, tendo uma lei muito parecida com a da *Questão 01*: $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, onde M é a magnitude do terremoto na escala Richter, E é a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Neste caso, por E_0 ser uma constante, pode-se usar um *Controle Deslizante* no Geogebra pra representá-lo. Escrevendo no *software* a função $f(x) = \frac{2}{3}\log\left(\frac{x}{E_0}\right)$ e movimentando o *Controle Deslizante*, é possível verificar que a função sobre um deslocamento vertical para baixo quanto maior for E_0. De fato, por meio da propriedade do logaritmo da divisão, é possível reescrever a função como:

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{2}{3}(\log E - \log E_0) = \frac{2}{3}\log E - \frac{2}{3}\log E_0$$

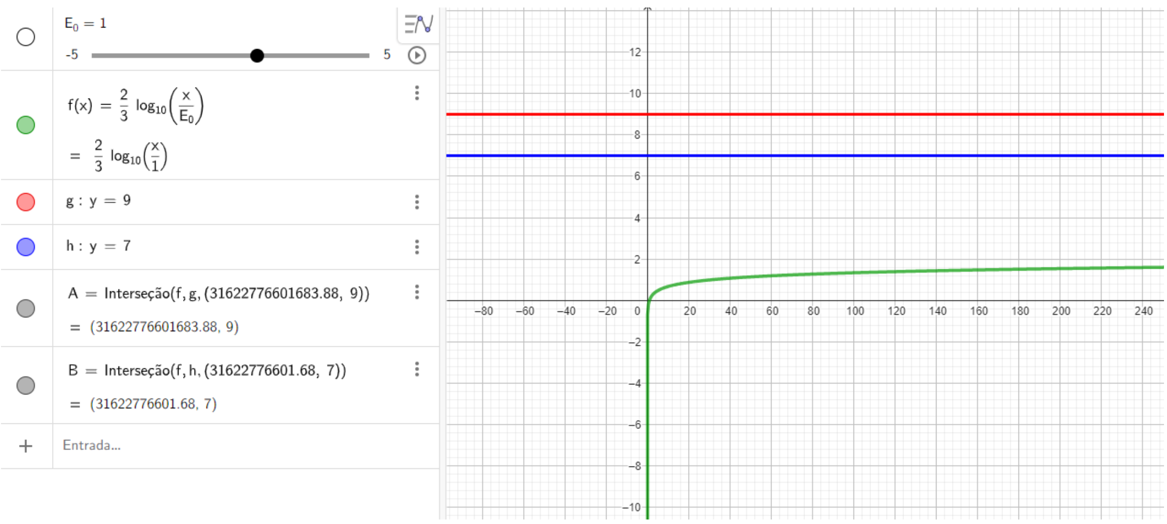
O subtraendo $\frac{2}{3}\log E_0$, por ser constante, determina uma translação vertical para baixo no gráfico da função, pois $\frac{2}{3}\log E_0 > 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}\log E_0 < 0\ \forall E_0 \in \mathbb{R}_+^*, E_0 > 1$.

Essa constatação é importante de nota pois permite que os alunos percebam a influência que cada elementos da lei de formação tem no gráfico da função, impactando no entendimento de como aquela função específica se comporta.

Procedendo de modo análogo ao que foi executado na *Questão 01*, cria-se duas retas $y = 9$ e $y = 7$, pois se está interessado em analisar as energias x_J e x_C liberadas pelos terremotos no Japão e na China, respectivamente. A intersecção das retas $y = 9$ e $y = 7$ com o gráfico de f se dá nos pontos A e B, também distantes da visualização padrão no *software* (ver Figura 55).

Novamente, com base nos pontos de intersecção encontrados e visíveis na janela algébrica, é possível constatar que, se $E_0 = 1$, tem-se $x_J \approx 31622776601684$ e $x_C = 31622776601{,}684$. Como busca-se determinar a relação numérica entre as energias liberadas pelos terremotos do Japão e da China, analisam-se os valores obtidos para x_J e x_C. É fácil, por observação, visualizar que $x_J = 1000 \cdot x_C$, ou ainda, $x_J = 10^3 \cdot x_C$, que é a resposta da questão.

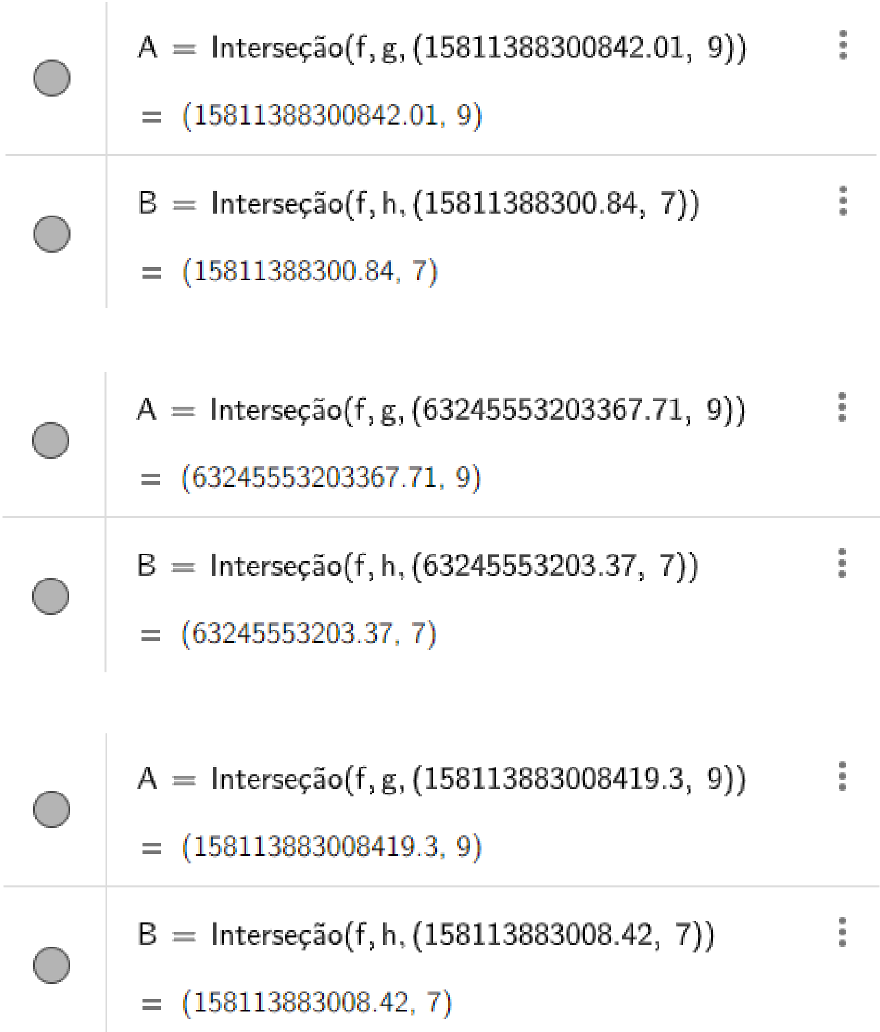
Figura 55 –Elementos da construção da representação gráfica e das intersecções da função $f(x) = \frac{2}{3}\log\left(\frac{x}{E_0}\right)$ com as retas $y = 9$ (ponto A) e $y = 7$ (ponto B) para $E_0 = 1$



Fonte: O autor

Contudo, ainda é possível se deter na análise do impacto que a variação de E_0 tem nos valores obtidos. Quando se resolve a questão equacionando as leis de formação e manipulando-as, há um momento em que E_0 é simplificado e desaparece da expressão. Isto é, a relação entre as energias independe da constante E_0. E tal resultado pode ser percebido também no gráfico. Ao mover o *Controle Deslizante* para números diferentes de 1, encontra-se novamente que $x_J = 10^3 \cdot x_C$, mesmo com x_J e x_C assumindo outros valores. A Figura 56 ilustra tais pontos para $E_0 = 0{,}5$, $E_0 = 2$ e $E_0 = 5$, respectivamente.

Figura 56 – Intersecção da função f com as retas $y = 9$ (ponto A) e $y = 7$ (ponto B) para $E_0 = 0{,}5$, $E_0 = 2$ e $E_0 = 5$, respectivamente

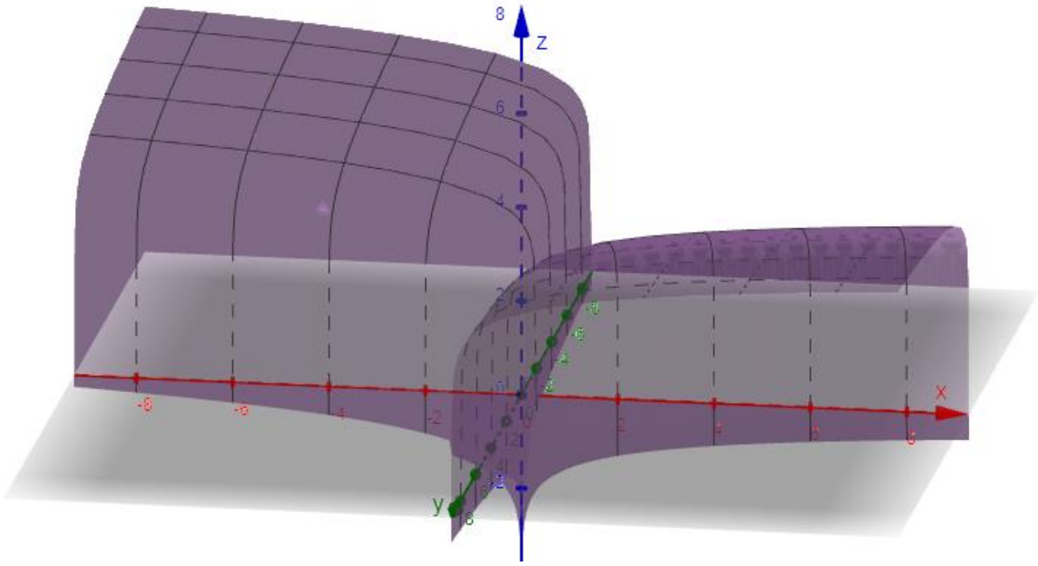


Fonte: O autor

A *Questão 07* traz, mais uma vez, uma função logarítmica modelando a magnitude de terremotos. Desta vez, a magnitude M de um terremoto é calculada em função de duas variáveis: a amplitude sísmica (A), dada em micrômetro, e a frequência (f), dada em Hertz, através da lei de formação $M = \log(A \times f) + 3{,}3$. O interesse entá em determinar a magnitude do terremoto (e depois sua classificação) para $A = 1000\ \mu m$ e $f = 0{,}2\ Hz$.

É fácil resolver tal questão algebricamente através da manipulação da expressão utilizando as propriedades dos logaritmos. Todavia, ao recorrer à representação de tal função graficamente no Geogebra, por conta de tanto A quanto f serem variáveis, teria-se que recorrer a uma função de duas variáveis: $g(x, y) = \log(x \cdot y) + 3{,}3$, onde x representa a amplitude sísmica (A) e y representa a frequência (f). Neste caso, o uso do plano tridimensional é imprescindível para representar seu gráfico, tal qual ilustra a Figura 57.

Figura 57 – Representação gráfica da função $g(x, y) = \log(x \cdot y) + 3{,}3$ no plano tridimensional



Fonte: O autor

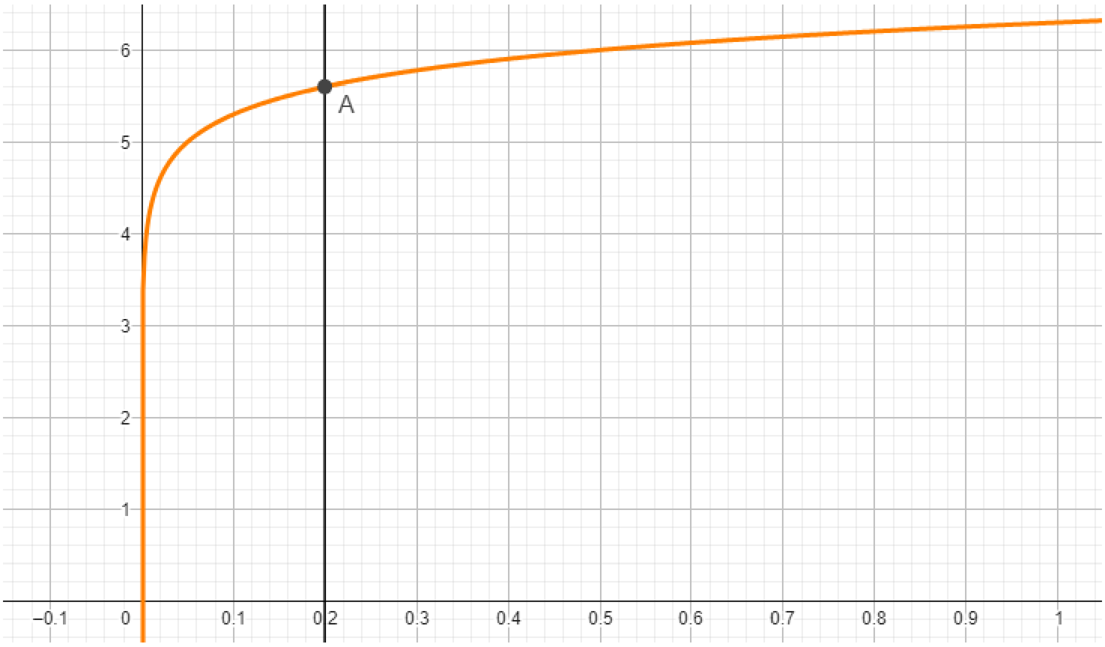
O trabalho com funções de mais de uma variável no Ensino Médio torna-se inviável, ainda mais considerando o fato de que, baseado nos conteúdos vistos até então, os alunos tiveram pouco ou nenhum contato com o plano tridimensional, conteúdo este que possivelmente será aprofundado no futuro.

Uma solução para contornar este empecilho e tornar possível utilizar a representação gráfica da função ao se resolver ou analisar esta questão, é tratar ou x (A) ou y (f) como constantes, e transformar a função de duas variáveis em uma função de uma única variável.

Assim, tomando $A = 1000$ como constante, pode-se reescrever a função como $h(x) = \log(1000x) + 3{,}3$, onde x é a frequência. Como o interesse está em determinar $h(0{,}2)$, constrói-se a reta $x = 0{,}2$ no plano e encontra-se sua intersecção com o gráfico da função. A Figura 58 ilustra tal construção.

A ordenada $h(0{,}2)$ do ponto A é a resposta do problema, isto é, o terremoto teve magnitude de 5,6, o que o classifica como destrutivo, com consequências significativas em edificações pouco estruturadas.

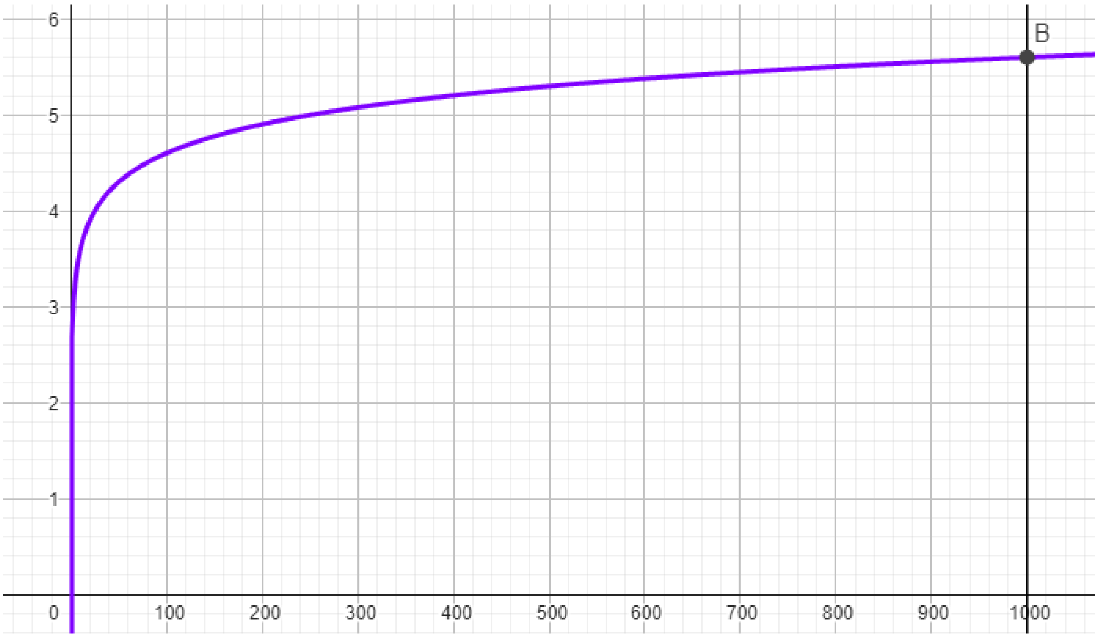
Figura 58 – Construção da intersecção (ponto A) do gráfico da função $h(x) = \log(1000x) + 3{,}3$ e da reta $x = 0{,}2$ (em escala $1: 10$)



Fonte: O autor

Deste modo, é possível recorrer ao mesmo processo, mas utilizando a função $p(x) = \log(0{,}2x) + 3{,}3$ onde a frequência foi considerada constante e amplitude sísmica é variável, representa por x. Neste caso, o ponto B representa a intersecção do gráfico com a reta $x = 1000$, cuja ordenada é a solução do problema, pois é equivalente a determinar $p(1000)$ (ver Figura 59).

Figura 59 – Construção da intersecção (ponto B) do gráfico da função $p(x) = \log(0{,}2x) + 3{,}3$ e da reta $x = 1000$ (em escala $100: 1$)



Fonte: O autor

A *Questão 10*, por sua vez, quando resolvida algebricamente, recai em um par de inequações logarítmicas. No plano cartesiano, sugere-se trabalhar a partir da ideia de regiões, análogo ao que foi feito para se aproximar o valor de $\log_2 6$ ou para resolver as inequações destacadas no início desta seção.

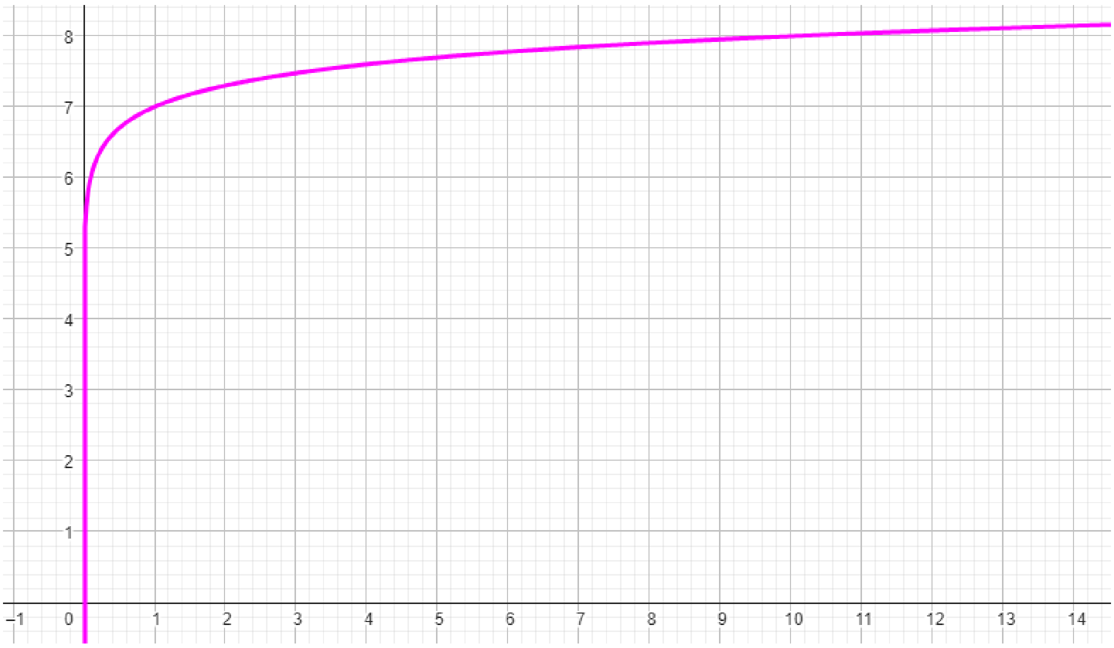
É dado no enunciado que o pH de uma substância pode ser calculada por meio da relação $pH = \log_{10} \frac{1}{H}$, onde H é a concentração de íons de hidrogênio, em mol por decímetro cúbico e pode ser escrita como o quociente de A por B, dois parâmetros. Considerando $A = 10^{-7}$, a questão pede que se determine o intervalo de B de modo que o pH da substância seja neutro. Logo, trata-se tal parâmetro como variável, reescrevendo a função tal qual foi feito quando se resolveu a questão algebricamente. Assim:

$$pH = \log\left(\frac{1}{H}\right) \Rightarrow ph = \log\left(\frac{1}{\frac{A}{B}}\right) \Rightarrow pH = \log\left(\frac{B}{A}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pH = \log\left(\frac{B}{10^{-7}}\right) \Rightarrow pH = \log(10^7 \cdot B)$$

Escrevendo a função em termos de x e $f(x)$ para que possa ser plotada no Geogebra, onde x equivale a B e $f(x)$ ao pH, tem-se $f(x) = \log(10^7 \cdot x)$. Mais uma vez, aplicando propriedades e a definição de logaritmo, pode-se reescrever a função como $f(x) = \log 10^7 + \log x \Rightarrow f(x) = 7 + \log x$, que é o gráfico da função logarítmica decimal transladado 7 unidades verticalmente para cima, conforme mostra a Figura 60.

Figura 60 – Gráfico da função $f(x) = \log(10^7 \cdot x)$

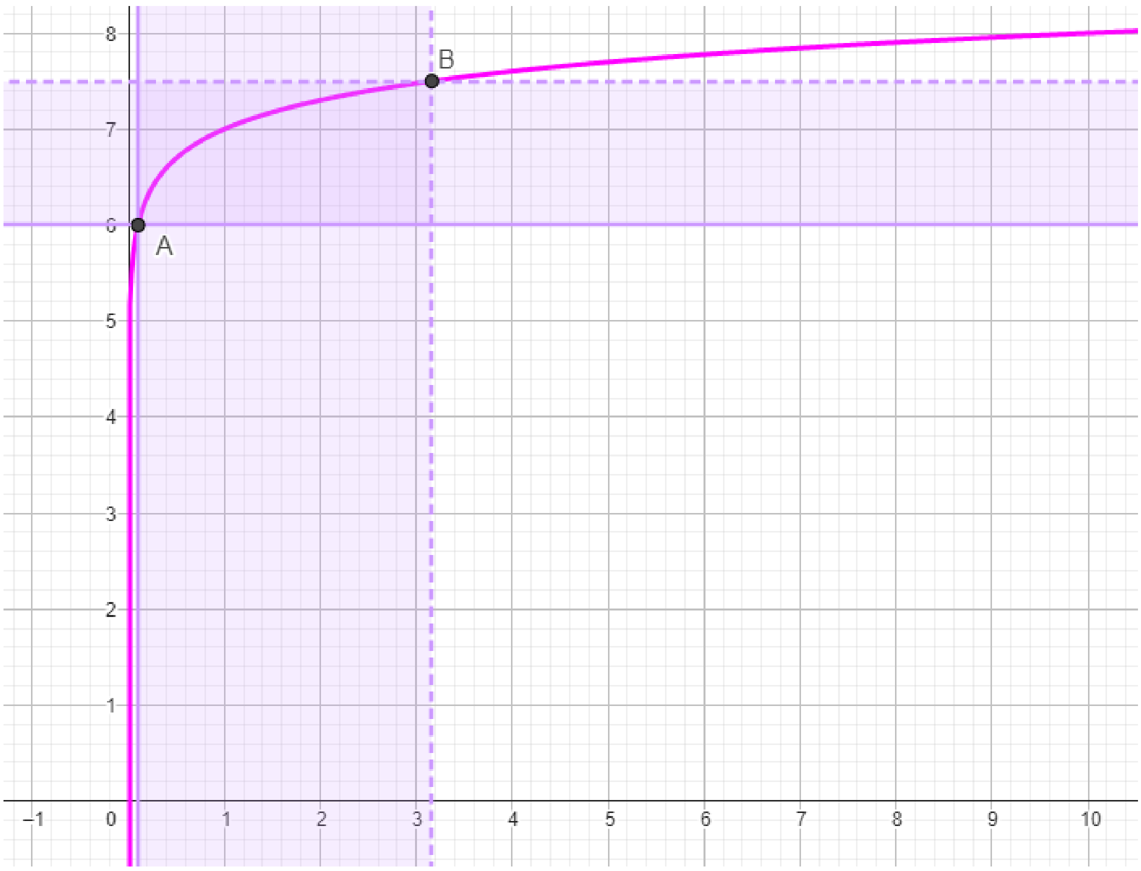


Fonte: O autor

O interesse está em determinar o intervalo de x tal que $6 \leq f(x) < 7{,}5$. Representando tal intervalo no *software*, a partir da notação $6 \leq y < 7{,}5$, encontra-se os pontos A e B, onde as retas $y = 6$ e $y = 7{,}5$ (limitantes da região representada) interseccionam o gráfico de f. As ordenadas de tais pontos são 6 e 7,5, e suas abscissas corresponderão aos extremos do intervalo de x que se está interessado em determinar, intervalo este que limita a função f entre 6 e 7,5.

Ao se digitar no Geogebra o intervalo $10^{-1} \leq x < 10^{\frac{1}{2}}$, que é a solução da inequação ao ser resolvida algebricamente, percebe-se claramente que tal intervalo coincide com o delimitado pelas abscissas dos pontos A e B (que claramente são 10^{-1} e $10^{\frac{1}{2}}$ escritos em suas formas decimais e, no caso de $10^{\frac{1}{2}}$, aproximado, pois é um número irracional). Ainda, é possível visualizar com mais precisão como os sinais $>$ e $\geq$ ou $<$ e $\leq$ permeiam o equacionamento, através da maneira como o Geogebra representa tais desigualdades. A Figura 61 mostra a construção final da tarefa.

Figura 61 – Intervalo da função f onde o pH da substância é neutro



Fonte: O autor

As *Questões 11*, *12* e *13* são bastante semelhantes às *Questões 05*, *10* e *07*, respectivamente, e podem ser usadas como tarefas extras, propondo que os alunos as resolvam algebricamente e confiram os resultados no Geogebra, ou então que as representem graficamente no *software* para, em seguida, confirmarem os resultados encontrados a partir da resolução das equações ou inequações logarítmicas. As três, quando observados juntas, trabalham com diferentes habilidades.

As *Questões 11* e *05*, bem como a *Questão 01*, fornecem o valor da função e pedem que sejam determinados (mesmo que com outro objetivo final) os valores da variável independente. Para isso, recorre-se à resolução de equações. Nos gráficos, retas paralelas ao eixo x, no formato $y = a$, $a \in \mathbb{R}$, auxiliam a visualizar as soluções.

As *Questões 13* e *07*, por sua vez, possibilitam trabalhar diretamente a ideia de, a partir de valor de x, determinar $f(x)$, ou seja, o processo de substituir valores na função e resolver a expressão numérica obtida (mesmo que se utilize funções de duas variáveis). Em todos os casos, propriedades dos logaritmos são necessárias para simplificar as expressões e tornar possível fazer as substituições dadas no enunciado. Graficamente, retas paralelas ao eixo y, escritas na forma $x = a$, $a \in \mathbb{R}$, podem ser utilizadas para confirmar os resultados das expressões.

No caso das *Questões 12* e *10*, depara-se com inequações logarítmicas. Para resolvê-las algebricamente, deve-se tomar muito cuidado com a base do logaritmo, pois pode fazer-se necessário, no processo, inverter o sentido da desigualdade. Nos casos observados, os logaritmos são decimais, e este procedimento não se faz necessário. No Geogebra, a visualização de inequações por meio de intervalos é riquíssima do ponto de vista da Teoria da Aprendizagem Significativa, pois a representação gráfica dos conceitos trabalhados permite atribuir outros significados tanto à inequação quanto à sua solução, o que possibilita aos estudantes fazer conexões que até então podem não tem sido feitas pois não foram devidamente observadas por um diferente ponto de vista.

Por fim, a *Questão 18* se assemelha muitos às *Questões 13* e *17*, onde deve-se substituir um valor específico da variável independente na função e aplicar propriedades para se determinar o valor numérico das expressões.

Na questão é dado que o nível N de intensidade do som, medido em decibel (dB) é dado pela função $N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10}$, onde I representa a intensidade do som e $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 é uma constante. Por meio de propriedades, é possível reescrever tal expressão como $N = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$, tal qual foi feito no *Capítulo 03*, e, substituindo o valor de I_0, obter:

$$N = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow N = 10 \cdot \log_{10}(10^{12} \cdot I)$$

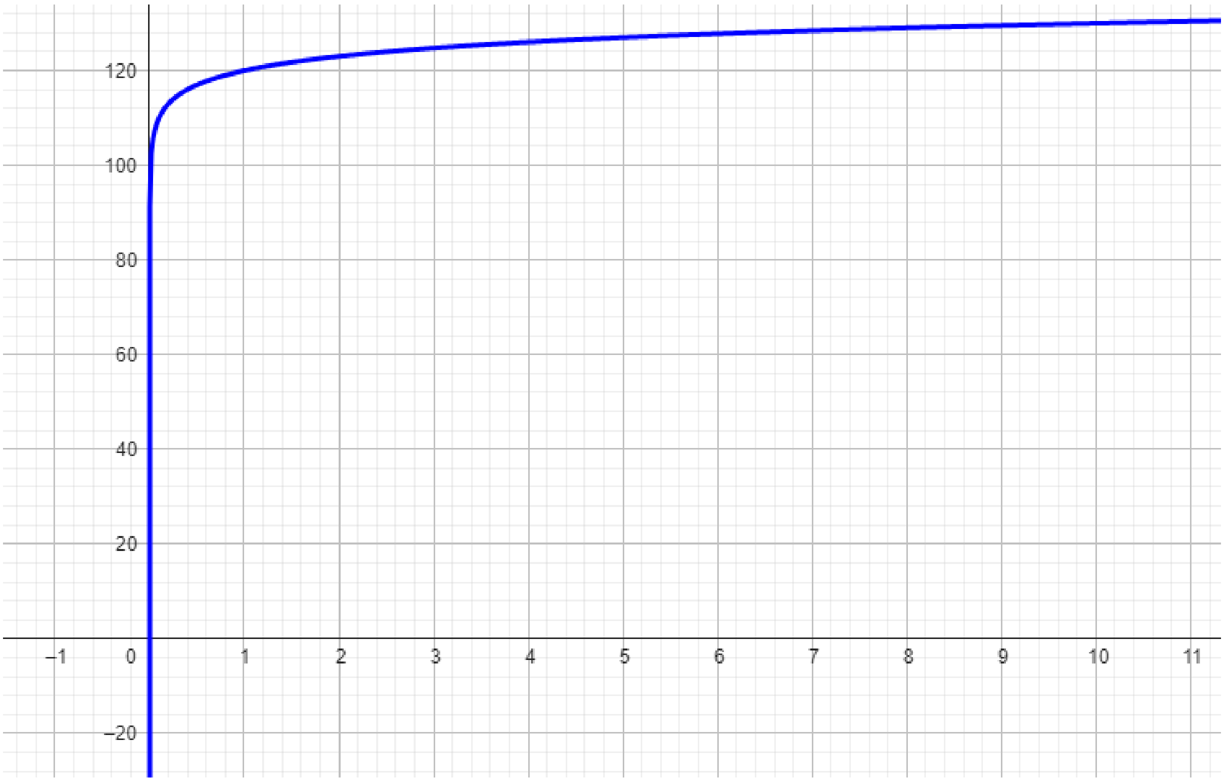
Escrita desta maneira, torna-se fácil resolver o problema numericamente, substituindo o valor de I dado.

Contudo, com o objetivo de analisar o gráfico a partir de isometrias e homotetias, é mais válido fazer outras mudanças na lei de formação de função original, substituindo o I_0 dado antes de manipular, para então aplicar a propriedade do logaritmo da potência e a definição de logaritmo. Assim:

$$N = \log I^{10} - \log I_0^{10} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = 10 \cdot \log I - 10 \cdot \log 10^{-12} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = 10 \cdot \log I - 10 \cdot (-12) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = 10 \cdot \log I + 120$$

Ou seja, o gráfico de N é equivalente ao gráfico do logaritmo de base 10 "espichado" verticalmente 10 vezes e transladado 120 unidades para cima. A Figura 62 ilustra tal gráfico no Geogebra escrito a partir da lei $f(x) = 10 \cdot \log x + 120$, onde x equivale a I e $f(x)$ a N.

Figura 62 – Gráfico da função $f(x) = 10 \cdot \log x + 120$ (representado na escala $1:20$)



Fonte: O autor

A questão pede que seja determinado N dado $I = 8 \cdot 10^{-8}$, que é um número pequeno. De fato, o Geogebra o aproxima para 0. Neste caso, sugere-se utilizar o gráfico para mostrar que a função f e a retas $x = 8 \cdot 10^{-8}$ interseccionam-se em um ponto muito próximo de 49, que é o valor aproximado que soluciona o problema. Ou seja, neste caso, por conta dos valores muito pequenos dados no enunciado, é mais válido usar o *software* para confirmar (ou verificar) a resposta obtida algebricamente, e não como primeira opção para encontrá-la.

Esta sequência didática chega ao fim tendo cumprido a proposta de se construir uma nova abordagem para se ensinar logaritmos, com os conteúdos reordenados não convencionalmente. Mesmo com um arranjo diferente, ainda manteve-se a lógica dentro da continuidade de tais conteúdos, que se construíram de maneira coerente, seguindo os pressupostos que norteiam o ensino almejando a ocorrência da Aprendizagem Significativa, tais como a participação dos alunos, o uso de técnicas que os colocam em uma posição de predisposição para aprender e a construção de um material e de tarefas potencialmente significativas, que abordaram ainda mais aspectos visuais dos logaritmos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os logaritmos, em sua essência, foram "descobertos" diante da necessidade de se otimizar cálculos. Esta busca tornou-se obsoleta com o advento dos computadores e das calculadoras. Contudo, as inúmeras aplicações dos logaritmos em campos como geografia, química, física, biologia e linguística, seja na determinação da magnitude de terremotos, no cálculo do pH de uma substância, na intensidade sonora de certo som emitido, na modelagem da altura de uma planta ou até mesmo na estimativa de frequências de palavras em textos, além de seu uso ao tratar da modelagem de fenômenos que crescem (ou decrescem) exponencialmente, como na Matemática Financeira, em casos de desintegração radioativa e no resfriamento de um corpo, tornam os logaritmos imprescindíveis na contemporaneidade.

Os diversos problemas encontrados em sala de aula para ensinar e aprender logaritmos motivaram uma reflexão acerca de como se aprender e como aperfeiçoar as técnicas que tornam a aprendizagem possível, ou seja, o ensino. Por isso, buscou-se, neste trabalho, utilizar a Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Paul Ausubel, como base para se construir propostas de sequências didática que atualizassem as convencionais sequências presentes na grande maioria dos livros didáticos, ao mesmo tempo que apresentassem inovações, majoritariamente vinculadas ao uso de tecnologias, que estão presentes a todo instante na vida dos estudantes, e de tarefas exploratório-investigativas, a fim de dar ao aluno o poder de descobrir informações, conjecturar e tirar conclusões a partir de raciocínios indutivos e, em casos específicos, dedutivos.

A ideia de fazer uma seleção dentre as questões do Exame Nacional do Ensino Médio após sua reformulação em 2009 surgiu devido ao fato desta prova ter se tornado uma referência em âmbito nacional para a educação brasileira. Contudo, questões envolvendo logaritmos e sua definição, manipulação de expressões a partir de suas propriedades, resolução de equações e inequações exponenciais e logarítmicas e análise de funções logarítmicas (tanto algébrica quanto graficamente) são cobradas das mais diversas maneiras em vários concursos vestibulares, tanto no Brasil como no exterior.

Existem inúmeras possibilidades de adaptar as sequências didáticas e as tarefas propostas no *Capítulo 04* desta dissertação, utilizando outras questões com abordagens diferentes, envolvendo situações que vão além das propostas nas questões do ENEM, que como pôde-se perceber não varia muito do prisma que gira em torno de magnitude de terremotos e pH de substâncias, no que tange às funções logarítmicas. O mais importante, independentemente da escolha feita pelo professor para conduzir suas aulas, é visar a ocorrência da aprendizagem significativa do estudante.

As sequências propostas no *Capítulo 04* levam em consideração dois processos destacados por Ausubel na sua teoria. A primeira tem como base a reconciliação integrativa, onde parte-se de um conceito mais específico até chegar em sua generalização. O modo como as propriedades dos logaritmos são trabalhadas nesta sequência são um exemplo disso. Por sua vez, a segunda proposta de sequenciamento faz uso da diferenciação progressiva, onde, de um conceito mais abrangente, chega-se a um mais específico. Definir o conceito de logaritmo a partir da ideia de função logarítmica vista como inversa da função exponencial vai de encontro a esta condução. Utilizar tarefas que potencializem a exploração-investigativa e o pensamento indutivo são grandes aliados do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, independentemente da maneira como escolheu-se trabalhar cada conceito e suas consequências.

A teoria matemática que embasa logaritmos, apresentada detalhadamente no *Capítulo 02*, demandou que se construísse também a operação de potenciação, de radiciação, bem como a função exponencial antes de se definir a função logarítmica. Esta idealização mostra, mais uma vez, como os conteúdos dentro da Matemática estão relacionado e não devem (nem podem) ser tratados separadamente, pois muito do sentido de causa e consequência se perde no processo, perda essa extremamente nociva ao aprendizado, pois ignora o processo de subsunção, tão evidenciado na Teoria da Aprendizagem Significativa.

Os conhecimentos prévios para se trabalhar logaritmos, a resolução de equações e inequações e as funções logarítmicas dependem do trabalho executado com estes alunos ao longo do ano letivo e pregressamente, nos níveis anteriores. Por isso, sempre deve-se levar em consideração que a continuidade no processo de ensino da Matemática é essencial para garantir a ocorrência de uma aprendizagem, de fato, significativa. Não é possível trabalhar com a definição de logaritmo sem que o aluno conheça a operação de potenciação, ao passo que trabalhar funções logarítmicas sem que o aluno tenha uma base sólida de função de modo geral é inviável.

A sequência em que os conteúdos são apresentados também devem ser coerentes, para que o objeto de estudo seja potencialmente significativo aos estudantes. É necessário que eles percebam como cada tópico motiva a necessidade do que vem na sequência, como uma queda de dominós. Propor tarefas que sejam coerentes com o potencial da turma também é relevante ao processo. Caso contrário, os alunos terão dificuldade em conectar conceitos em sua estrutura cognitiva, forçando tanto eles quanto o professor a recorrer apenas à Aprendizagem Mecânica, tornando a assimilação obliteradora mais efetiva e cada vez mais difícil de ser neutralizada.

Como estudos futuros, propõe-se aplicar as tarefas propostas ao longo dos sequenciamentos em turmas de estados e escolas diversas, com o objetivo de verificar se elas viabilizam que a aprendizagem seja, de fato, significativa, independente do meio em que o aluno esteja inserido. Posteriormente, de posse das análises críticas e contribuições acadêmicas provenientes destas aplicações, recomenda-se verificar se existem pré-requisitos que podem ser necessários para que as estratégias descritas funcionem como catalisadores de uma aprendizagem significativa. Ainda, sugere-se que, com base nas experiências práticas de professores dentro do ambiente de sala de aula, proponha-se adaptações, refinamentos e a expansão deste material, para que fique cada vez mais completo e denso, motivando um ensino completo e de qualidade.

Esta dissertação atua, portanto, como um manual para guiar o docente ao planejar, imaginar, executar e avaliar aulas no Ensino Médio, bem como um texto para atualizá-lo em processos de formação continuada. Reuniu-se estratégias que lidam com logaritmos, propriedades, equações, inequações e leis de formação de funções e seus gráficos de maneiras diferentes, mas também interligadas, e que dão ao professor flexibilidade para adaptá-las, reorganizá-las, conectá-las, reduzi-las ou incrementá-las, com a única condição que seja constante a estrutura seguindo a lógica interna (e externa, dado o comportamento da Matemática como um todo) que os conteúdos estabelecem entre si para garantir a ocorrência da aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, A. de S.; JUNIOR, H.G.L. *Linguagem Matemática: conhecimentos e usos de simbologia na interpretação de problemas*. In: Revista Científica Multidisciplinar, v.2, n.9, p.1-24, 2021.

ARAGÃO, R.M.R. *Teoria da aprendizagem significativa de David P. Ausubel: sistematização dos aspectos teóricos fundamentais*. 1976. 109f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Educação de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 1976.

AUSUBEL, D.P. *The Psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune and Stratton, 1963.

_______________; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H. *Psicologia educacional.* Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARBOSA, E. *Práticas de um professor, participação dos alunos e pensamento algébrico numa turma de 7º ano de escolaridade*. 2019. 312f. Tese (Doutorado) – Universidade de Évora, Instituto de Investigação e Formação Avançada, Évora, 2019.

BARROSO, J.M. *Conexões com a Matemática: volume 1*. Obra coletiva, concebida e desenvolvida pela Editora Moderna. São Paulo: Moderna, 2010.

BIASOTTO, L.C., FIM, C.F., KRIPKA, R.M.L. *A Teoria da Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel: uma alternativa didática para a educação matemática.* In: VII Jornada Nacional de Educação Matemática e XX Jornada Regional de Educação Matemática, 2018, Passo Fundo. Anais. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2018.

BORDIN, F. *Sequência didática para o ensino de funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.* 2016. 114 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC/CNE, 2018.

_______________. *Exame Nacional do Ensino Médio 2011*. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: agosto de 2023.

_______________. *Exame Nacional do Ensino Médio 2013*. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: agosto de 2023.

_______________. *Exame Nacional do Ensino Médio 2015*. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: agosto de 2023.

_______________. *Exame Nacional do Ensino Médio 2016*. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: agosto de 2023.

_______________. *Exame Nacional do Ensino Médio 2017*. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: agosto de 2023.

_______________. *Exame Nacional do Ensino Médio 2018*. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: agosto de 2023.

_______________. *Exame Nacional do Ensino Médio 2019*. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: agosto de 2023.

_______________. *Exame Nacional do Ensino Médio 2020*. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: agosto de 2023.

_______________. *Exame Nacional do Ensino Médio 2021*. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: agosto de 2023.

_______________. *Exame Nacional do Ensino Médio 2023*. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: dezembro de 2023.

_______________. Ministério da Educação. Brasília: Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem. Acesso em: fevereiro de 2025a.

_______________. Ministério da Educação. Brasília: Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos. Acesso em: fevereiro de 2025b.

_______________. *Matriz de Referência ENEM.* Ministério da Educação. Brasília. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: fevereiro de 2025c.

BROUSSEAU, G.; *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathématíques*. RDM, v.4, n.2, p.165-198, Grenoble, 1983.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: 1951.

CATANEO, D.M., MARQUES, I. de A.; *Arquimedes: O Contador de Areia.* Sitientibus Série Ciências Físicas, v.18, p.1–14, 2023.

CERGOLI, D. *Ensino de logaritmos por meio de investigações matemáticas em sala de aula.* Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, São Paulo, 2017.

DANTE, L.R. *Matemática: contexto & aplicações: 1º ano.* 1ª ed. São Paulo: Ática, 2011.

DINIZ, C.R.; SILVA, I.B. *Metodologia científica*. Natal: UEPB/UFRN - EDUEP, 2008.

DUVAL, R. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.* Traduzido por: Méricles Thadeu Moretti. In: Revemat: Revista Eletônica de Educação Matemática, Florianópolis, v.7, n.2, p.266-297, 2012.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Editora Unicamp, 2004.

FERNANDES, E. *David Ausubel e a aprendizagem significativa.* Nova Escola, 2011. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/262/david-ausubel-e-a-aprendizagemsignificativa.> Acesso em: junho de 2024.

FERREIRA, R.L.; BISOGNIN, E. *O estudo de logaritmos por meio de uma sequência de Ensino: A engenharia didática como apoio metodológico.* Rio Grande do Sul: UNIFRA, 2007.

FRANCHI, R.H. de O.L. *A abordagem de conteúdos de Matemática em Práticas de Modelagem e as implicações para o currículo.* In: Revista Com a Palavra, O Professor, Bahia, v.5, n.11, p.199-219, 2020.

FRANCISCO, J.A.S.; LIMA, A.A.; ARÇARI, D.P. *Datação por Carbono 14/ The Carbon-14 Dating*. 2011. Disponível em: <http://portal.unisepe.com.br/unifia/wpcontent/uploads/sites/10001/2018/06/1gestao_foco_Carbono14.pdf>. Acesso em: janeiro de 2025.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 7ª ed. São Paulo: Paz e Terra, 1998.

GEOGEBRA.ORG. *O que é o Geogebra?* Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: fevereiro de 2025.

GALUPO, A.S. *A construção do conceito de logaritmo.* 2021. 101f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2021.

GOWIN, D.B. *Educating*. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1981.

GROENWALD, C.L.O.; SILVA, C.K.; MORA, C.D. *Perspectivas em Educação Matemática*. In: Acta Scientiae, Canoas, v.6, n.1, p.37–55, Editora Ulbra, jan./jun. 2004.

GUIDORIZZI, H.L. *Um curso de cálculo, volume 1*. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. *Matemática: volume único.* 5ª ed. São Paulo: Atual, 2011.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da matemática elementos, 2: logaritmos* – 10ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

KRIPKA, R.M.L. *Uso de tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear na perspectiva das teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica*. 2018. 591f. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

LIMA, E.L. *Logaritmos.* Rio de Janeiro: SBM, 1996.

________________. *Números e Funções Reais.* Rio de Janeiro: SBM, 2013.

________________; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. *A Matemática do Ensino Médio, volume 1*. 8ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LOPES, A.R.C. *Livros didáticos: obstáculos verbalistas e substancialistas ao aprendizado da ciência química.* In: Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos. v.74, n.177, p. 309-334. Brasília, 1993.

LORENZATO, S. *Educação Infantil e percepção matemática.* 2ª ed. Campinas: Editora Autores Associados, 2008.

LOURENÇO, E.G. *O GeoGebra como ferramenta de auxílio no ensino de logaritmo*. 2013. 60f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural Do Semi-Árido, Mossoró, 2013.

MATOS, F.C.C.; SANTOS, M.J.C.; SILVA, W.H.; SANTOS, V.C.; *O letramento matemático e o conceito de número: algumas reflexões.* In: IV CONEDU, 2017, João Pessoa. Anais. Joao Pessoa: Realize, 2017. v.1.

MELO, P.S.; LIBÂNEO, J.C. *Obstáculos Epistemológicos e a Formação de Conceitos.* In: Revista Vida de Ensino (Online), v.3, n.1, p. 45-56, Iporá, set./dez. 2017.

MESCOUTO, J.B.; LUCENA, I.C.R. de; BARBOSA, E. *Tarefas exploratório-investigativas de ensino-aprendizagem-avaliação para o desenvolvimento do pensamento algébrico.* In: Educação Matemática Debate, v.5, n.11, p. 1-22, 2021.

MOREIRA, M.A.; MASINI, E. *Aprendizagem significativa – A teoria de David Ausubel*. São Paulo: Editora Moraes, 1982.

MOREIRA, M.A. *O que é afinal aprendizagem significativa?* In: Qurriculum: revista de teoría, investigación y práctica educativa, La Laguna, Espanha, n.25, p. 29-56, mar. 2012.

_______________. *Mapas Conceituais e Aprendizagem significativa.* 2012b. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/ >. Acesso em: junho de 2024.

MÜLLER, I. *Tendências atuais de Educação Matemática.* In: UNOPAR Cient., Ciênc. Hum. Educ., Londrina, v.1, n.1, p. 133-144, jun. 2000.

NOVAK, J.D. *Uma teoria de educação.* São Paulo, Pioneira. Tradução de Marco Antônio. Moreira. Ithaca, N.Y.: Cornell University, 1977.

OLIVEIRA, B.A. *A Socialização do Saber Escolar.* Coleção Polêmicas do nosso tempo. São Paulo: Autores Associados, 1985.

OLIVEIRA, P. *O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia.* In: Educação e Matemática, Lisboa, n.100, p. 3-9, 2008.

OSÓRIO, V. L. *Demostraciones y conjeturas en la escuela media.* In: Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas, n.3, jan. 2002.

PAIVA, M.R. *Matemática: Paiva.* 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.

PAVANELO, A.M., BARBOSA, S.M.; *A utilização de calculadora como recurso de investigação matemática e resolução de problemas no 6° ano do ensino fundamental.* In: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor 2014: Artigos, Paraná, 2014.

PEDROSA, R.E.M.; ADAMES, M.R. *Logaritmos e a régua de cálculo: uma proposta de ensino.* Curitiba: Edição do autor, 2018.

PEREIRA, P.R.G. *Ensino de funções a partir das competências e habilidades propostas na Base Nacional Comum Curricular: uma aplicação para a resolução de problemas do ENEM e diversos*. 2021. 127f. Dissertação (Mestrado) – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Redenção, 2021.

PONTE, J.P. *Explorar e investigar em Matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem*. In: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, v.6, n.21, p. 13-30, mar. 2010.

PONTE, J.P., OLIVEIRA, H., CUNHA, H., & SEGURADO, I. *Histórias de investigações matemáticas.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. 1998.

SILVA, B.A. da; *A Noção do Raciocínio Indutivo em Construções Matemáticas*. 2015. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SILVA, V.V. da. *A história dos logaritmos e suas aplicações no dia-a-dia.* 2016. Monografia (Especialização). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, 2016.

SOARES, D.O. *Logaritmos: Napier versus Dante.* 2012. 69f. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2012.

SOARES, E.C. *Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.* 2011. 142f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

VALENÇA, M.M., TOSTES, A.P.B.; *O Storytelling como ferramenta de aprendizado ativo.* In: Carta Internacional, v.14, n.2, p. 221-243, 2019.

VERGNAUD, G. *La théorie des champs conceptuels.* In: Recherches en Didactique des Mathématiques, v.10, n. 2J, p.133-170, 1990.

VIANA, M. *As guerras da equação cúbica.* Marcelo Viana, 2024. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=bP9jyCaKYcc>. Acesso em: janeiro de 2025.

WERNECK, Hamilton. *Se a boa escola é a que reprova, o bom hospital é o que mata.* 8ª ed, Rio de Janeiro: Editora DP & A., 2002.

Wikimedia Commons. *Logarithmorum Chilias Prima page 0-67.* Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Logarithmorum_Chilias_Prima_page_0-67.jpg. Acesso em: fevereiro de 2025.