

Sérgio Souza de Matos

O Saber Proporcional no Ensino Fundamental:
desafios e possibilidades

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

Fevereiro, 2025

Sérgio Souza de Matos

O Saber Proporcional no Ensino Fundamental: desafios e possibilidades

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Dr. Oscar Alfredo Paz La Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

Fevereiro, 2025

Sérgio Souza de Matos

O Saber Proporcional no Ensino Fundamental: desafios e possibilidades

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Aprovada em 06 de fevereiro de 2025.

Documento assinado digitalmente
 **NANCY BAYGORREA CUSIHUALLPA**
Data: 18/06/2025 13:22:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Nancy Beygorrea Cusihuallpa

Documento assinado digitalmente
 **REBECA COSTA DIAS**
Data: 25/06/2025 17:19:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Rebeca Costa Dias
D.Sc. -Prefeitura de São Fidélis

Documento assinado digitalmente
 **RIGOBERTO GREGORIO SANABRIA CASTRO**
Data: 18/06/2025 09:41:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

D.Sc. -UENF
Documento assinado digitalmente
 **OSCAR ALFREDO PAZ LA TORRE**
Data: 18/06/2025 08:16:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. -UENF (ORIENTADOR)

Este trabalho é dedicado à minha esposa Janike Mendes Louvise Gomes Matos. Também dedico a José Louvise Gomes (in memoriam), inspiração para minha vida; e a minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas Suas infinitas misericórdias e por toda Sua glória.

À minha esposa, Janike, por estar sempre presente e por todos as suas contribuições grandiosas em todos os meus caminhos.

A Jose Louvise Gomes (in memoriam), pelas certezas quando eu tinha dúvidas, por todo seu amor, generosidade e companheirismo. Sempre seguirei seus conselhos.

À minha família e meus amigos pela compreensão nas minhas ausências e por todo suporte dado.

Ao meu orientador, Professor Oscar Alfredo Paz La Torre, pela orientação, apoio e competência. Sua contribuição foi essencial para este trabalho e serei sempre grato pela confiança e dedicação.

Aos membros da banca avaliadora DSc. Nancy Beygorrea Cusihualpa, DSc. Rebeca Costa Dias, DSc. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro que compuseram minha banca de defesa, que com atencioso olhar, apontaram sugestões pertinentes e enriquecedoras a este trabalho.

Ao professores do PROFMAT-UENF, Ausberto Silverio Castro Vera, Elba Orocía Bravo Asenjo, Luiz Henrique Zeferino, Nelson Machado Barbosa, Oscar Alfredo Paz La Torre, Rigoberto Gregorio Sanabria, Rafael Brandão de Rezende Borges Castro e Rita de Cássia Souza Paz por suas dedicações ao ensino e por toda excelência, cujas contribuições são inestimáveis.

À Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Rede Nacional – Matemática – PROFMAT-UENF, primeiramente exercida pelo professor Rigoberto Gregorio Sanabria e, posteriormente, pelo professor Nelson Machado Barbosa, sempre muito solícitos, competentes e incansáveis na coordenação do programa.

Aos colegas de curso Alexandre, Fernanda, Joel, Luísa, Rafael, Sara e Thaís por compartilharmos todas as nossas experiências em sala de aula e aprendizagens até o término do curso. E por todos os companheiros que, por várias razões, não trilharam o caminho até o final. Todos de alguma forma contribuíram em meu caminho. Em especial a Poliane e ao Edielson, que juntos construímos aprendizagens e vivências que possibilitaram

nosso crescimento no conhecimento matemático.

Mais uma vez, meu amigo Edielson, muito obrigado, você é um ser humano muito especial.

A Direção Escolar da Escola Municipal Conselheiro Josino por todo apoio, estrutura e compreensão para a realização da pesquisa e o estudo no Mestrado. Meu muito obrigado a Senhora Fátima Regina Duarte Silva, Diretora da Escola, que tanto me acolheu.

Aos meus queridos alunos do 9º ano de escolaridade da Escola Municipal Conselheiro Josino, que confiaram em meu trabalho e participaram ativamente da pesquisa e se divertiram muito durante a realização das atividades. Vocês proporcionaram alegria e bom humor a todo processo.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que contribuíram para a realização desta dissertação direta ou indiretamente.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) por ter financiado esta pesquisa.

"É necessário dizer que não é a quantidade de informações, nem a sofisticação em Matemática que podem dar sozinhas um conhecimento pertinente, mas sim a capacidade de colocar o conhecimento no contexto."

Edgar Morin

Resumo

A presente pesquisa tem objetivo geral investigar como a Metodologia de Resolução de Problemas, de acordo com [ONUCCHI](#); [ALEVATTO](#); [NOGUTI](#), aplicadas ao Teorema da Proporcionalidade e o conhecimento do Saber Proporcional podem contribuir na construção de aprendizagens matemáticas, para uma maior compreensão da realidade que nos cerca, na capacidade de raciocínio proporcional, no pensamento crítico e no trabalho coletivo para a resolução de problemas. O estudo partiu da seguinte indagação: como a metodologia de resolução de problemas aplicada ao saber proporcional pode contribuir para a construção de aprendizagens matemáticas de forma mais prática e contextualizada, com vistas à melhoria do ensino da Matemática? A pesquisa teve como público-alvo os alunos do 9º ano de escolaridade do Ensino Fundamental da Escola Municipal Conselheiro Josino, localizada no Município de Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro. Os instrumentos de coleta de dados, conforme os objetivos da pesquisa, são o pré-teste; a aplicação da sequência didática e o pós-teste. Justifica-se a escolha do tema pelo interesse em investigar como os objetos de estudo da presente pesquisa podem contribuir para despertar o interesse e a curiosidade do aluno pelo estudo da Matemática. Os resultados da presente pesquisa indicam que o processo de ensino-aprendizagem sobre o conceito do saber proporcional foi positivo, pois a análise dos dados envolvendo o pré-teste e o pós-teste apontam para um aumento considerável do número de acertos entre essas etapas, evidenciando que a metodologia de resolução de problemas aplicada ao saber proporcional colaborou de forma satisfatória na construção de novos conceitos e de novas aprendizagens matemáticas, considerando a Teoria dos Campos Conceituais. Assim, espera-se que este trabalho contribua para o desenvolvimento de novas abordagens didáticas do tema proporcionalidade, oferecendo subsídios para que professores reexaminem suas práticas pedagógicas cotidianas em relação ao ensino da Matemática, proporcionando aos alunos um aprendizado mais efetivo, criativo e prático da Matemática, com vistas à melhoria do ensino.

Palavras-chaves: Saber Proporcional; Teoria dos Campos Conceituais; Metodologia de Resolução de Problemas; Ensino da Matemática; Ensino Fundamental.

Abstract

This research aims to investigate how the Problem-Solving Methodology, according to [ONUCHI](#); [ALEVATTO](#); [NOGUTI](#), applied to the Theorem of Proportionality and the knowledge of Proportional Understanding can contribute to the construction of mathematical learning, for a better understanding of the reality around us, in the capacity for proportional reasoning, in critical thinking, and in collective work for problem-solving. The study started with the following question: how can the problem-solving methodology applied to proportional knowledge contribute to the construction of mathematical learning in a more practical and contextualized way, with a view to improving the teaching of Mathematics? The research targeted 9th-grade students of Elementary School at Escola Municipal Conselheiro Josino, located in the Municipality of Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro. The data collection instruments, according to the research objectives, are the pre-test, the application of the didactic sequence, and the post-test. The choice of the theme is justified by the interest in investigating how the study objects of this research can contribute to arousing students' interest and curiosity in the study of Mathematics. The results of this research indicate that the teaching-learning process on the concept of proportional knowledge was positive, as the data analysis involving the pre-test and post-test points to a considerable increase in the number of correct answers between these stages, showing that the problem-solving methodology applied to proportional knowledge contributed satisfactorily to the construction of new concepts and new mathematical learning, considering the Theory of Conceptual Fields. Thus, it is expected that this work contributes to the development of new didactic approaches to the theme of proportionality, offering subsidies for teachers to reexamine their daily pedagogical practices in relation to the teaching of Mathematics, providing students with more effective, creative, and practical learning in Mathematics, with a view to improving teaching.

Key-words: Proportional Knowledge; Theory of Conceptual Fields; Problem Solving Methodology; Mathematics Teaching; Elementary Education.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Divisão de segmentos na razão áurea.	29
Figura 2 – O Pentagrama pitagórico e a proporção áurea.	30
Figura 3 – Retângulo e espiral de ouro.	31
Figura 4 – Imagem do enorme aglomerado de galáxias Cl 0024+17 (ZwCl 0024+1652)	32
Figura 5 – Sacramento da Última Ceia, Salvador Dali, 1995	34
Figura 6 – A Leda e o Cisne, Leonardo da Vinci	34
Figura 7 – Mona Lisa, Leonardo da Vinci	35
Figura 8 – O Home Vitruviano, Leonardo da Vinci	36
Figura 9 – O Partenon	36
Figura 10 – A Catedral de Notre Dame	37
Figura 11 – Vênus de Milo	38
Figura 12 – Proporções que são utilizadas na análise facial	39
Figura 13 – Forma espiral de algumas galáxias	39
Figura 14 – Forma espiral dos furacões	40
Figura 15 – Forma espiral de algumas plantas	40
Figura 16 – Exemplo do código alfanumérico da BNCC.	45
Figura 17 – Os dez passos da metodologia de resolução de problemas	54
Figura 18 – Problema 1	61
Figura 19 – Problema 2	61
Figura 20 – Problemas 3 e 4	62
Figura 21 – Pesquisa	62
Figura 22 – Problema 5	63
Figura 23 – Problema 6	64
Figura 24 – Problemas 7 e 8	64
Figura 25 – Problema 9	65
Figura 26 – Problema 10	66
Figura 27 – Problema 1	67
Figura 28 – Problemas 2 e 3	67
Figura 29 – Problemas 4 e 5	68
Figura 30 – Problemas 6, 7 e 8	69
Figura 31 – Apresenta um pequeno passeio pela História da Matemática	70

Figura 32 – A razão áurea e o número de ouro	71
Figura 33 – A espiral áurea	72
Figura 34 – O Princípio da Proporcionalidade no Direito	73
Figura 35 – Aplicação do pré-teste.	75
Figura 36 – Aplicação da atividade 1.	78
Figura 37 – Aluno apresentando a resolução	79
Figura 38 – Aplicação da atividade 1.	79
Figura 39 – Aplicação da atividade 2.	80
Figura 40 – Formalização do conteúdo	81
Figura 41 – Realização do trabalho em grupo, grupo A ₃₂	81
Figura 42 – Aplicação do Pós-teste	83
Figura 43 – Análise do pré-teste	84
Figura 44 – Resoluções da questão 1 da turma A, alunos identificados como A ₁₂ e A ₁₀	85
Figura 45 – Resoluções da questão 2 da turma A, identificados por A ₆ e A ₂	85
Figura 46 – Resoluções da questão 3 da turma A, alunos identificados por A ₆ e A ₁ , respectivamente	86
Figura 47 – Resoluções da questão 4 da turma A, alunos identificados por A ₅ e A ₁₁ , respectivamente	86
Figura 48 – Resoluções da questão 5 da turma A, alunos A ₆ e A ₁₀ , respectivamente	87
Figura 49 – Resoluções dos problemas 1, 2 3 e 4, da turma A, aluno A ₅	89
Figura 50 – Resoluções do problema 5, turma A, alunos A ₇ e A ₁ , respectivamente	91
Figura 51 – Resoluções do problemas 6, turma A, aluno A ₁₅	92
Figura 52 – Resolução dos problemas 7 e 8, turma A, aluno A ₁₀	92
Figura 53 – Resolução do problema 9	93
Figura 54 – Resolução do problema 10	94
Figura 55 – Resolução do problema 1.	95
Figura 56 – Resoluções dos problemas 2 e 3	96
Figura 57 – Resolução do problema 4.	97
Figura 58 – Resolução do problema 5, A ₁₃	98
Figura 59 – Resolução do problema 5, A ₆	98
Figura 60 – Resolução dos problemas 6, 7 e 8.	99
Figura 61 – Problema 1, grupo A ₃₃	100
Figura 62 – Problema 2	101
Figura 63 – Resolução do problema 3, Grupo A ₃₅	102
Figura 64 – Problema 4- Considerando a prevalência do crime contra o patrimônio sobre contra a dignidade da pessoa humana	103
Figura 65 – Problema 4- Considerando a prevalência do crime contra o patrimônio sobre contra a dignidade da pessoa humana	103
Figura 66 – Análise do Pós-teste	104

Figura 67 – Resolução do problema 1	105
Figura 68 – Resolução do problema 2	105
Figura 69 – Resolução do aluno A_1	106
Figura 70 – Resolução do problema 4	106
Figura 71 – Resolução do problema 5	107

Lista de tabelas

Tabela 1 – Fonte: Dado da pesquisa elaborado pelo autor. 60

Lista de abreviaturas e siglas

PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
Covid	Doença do coronavírus
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCN	Parâmetros Curriculares Nacional
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
a C.	antes de Cristo
NASA	Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço
STF	Supremo Tribunal Federal
GB	Gigabyte
IFF	Instituto Federal Fluminense

Lista de símbolos

m	metro
cm	centímetro
ϕ	letra grega fi
$\in$	pertence
$\subset$	está contido
$\forall$	para todo
$=$	igual
$\neq$	diferente
$>$	maior
$<$	menor
I	intervalo na reta real aberto
D	domínio
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais positivos

Sumário

Introdução	17
1 REFERENCIAL TEÓRICO	22
1.1 Trabalhos Relacionados ao Estudo da Proporcionalidade	22
1.2 Breves Considerações sobre Teoria dos Campos Conceituais .	23
1.3 O Saber Proporcional	27
1.3.1 Saber Proporcional em Diversas Áreas do Conhecimento	28
1.4 Definições Matemáticas Preliminares	48
1.4.1 Grandezas diretamente proporcionais	48
1.4.2 Grandezas inversamente proporcionais	48
1.4.3 Isomorfismo	48
1.4.4 Função	48
1.4.5 Intervalo I	49
1.4.6 função monótona	49
1.5 O Teorema Fundamental da Proporcionalidade	49
1.6 Fundamento da Metodologia de Resolução de Problemas . . .	52
2 ASPECTOS METODOLÓGICOS	55
2.1 Caracterização da pesquisa	55
2.2 O lócus escolar	56
2.3 Os sujeitos da pesquisa	56
2.4 As etapas da pesquisa	57
2.5 Instrumentos empregados para coleta de dados	58
2.6 A elaboração da sequência didática	59
3 APLICAÇÃO DA METODOLOGIA	74
3.1 Aplicação do Pré-teste	74
3.2 A Sequência Didática	76
3.2.1 Aplicação da atividade 1	77
3.2.2 Aplicação da atividade 2	80
3.3 Aplicação do Trabalho em Grupo	81
3.4 Aplicação do Pós-teste	82
4 ANÁLISE DOS RESULTADOS	84
4.1 Análise do Pré-teste	84
4.2 Análise da Sequência Didática	87

4.2.1	Análise da atividade 1	88
4.2.2	Análise da atividade 2	94
4.3	Análise do Trabalho em Grupo	100
4.4	Análise do Pós-teste	103
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
REFERÊNCIAS		112

APÊNDICES 116

APÊNDICE A	–	DOCUMENTOS DE AUTORIZAÇÃO	117
APÊNDICE B	–	PRÉ-TESTE	120
B.1		Pré-teste	120
APÊNDICE C	–	SEQUÊNCIA DIDÁTICA	123
C.1		Grandezas diretamente proporcionais	123
C.2		Grandezas inversamente proporcionais	128
C.3		Trabalho em grupo	132
APÊNDICE D	–	PÓS-TESTE	137
D.1		Pós-teste	137

Introdução

A ideia do saber proporcional sempre fez parte da existência humana. A essência da relação de proporcionalidade pode ser percebida a partir representação da variação de cada dedo, pedra ou traço em madeiras e osso, que implicava na variação, na mesma proporção, da quantidade de pessoas, animais, objetos, estabelecendo uma relação de bijetividade, ou seja, que associa cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro conjunto e vice-versa. O saber proporcional é multifacetado e vai muito além da proporcionalidade em sentido estrito (Teorema da Proporcionalidade), evidenciando suas múltiplas aplicações em diversas áreas do conhecimento.

O Teorema da Proporcionalidade possibilita conhecer e analisar as diferentes maneiras pelas quais as grandezas se relacionam linearmente, oferecendo uma ampla compreensão dos fenômenos que nos cercam. No contexto atual cada vez mais se faz necessário pensar em estratégias didático-pedagógicas diferenciadas para o ensino da Matemática. Assim, o estudo do referido componente curricular se torna ainda mais desafiador, devido às defasagens nas habilidades matemáticas que não foram desenvolvidas ou consolidadas pelos alunos no decorrer de sua trajetória escolar, o que compromete a capacidade de aplicar os conceitos e procedimentos matemáticos nas diversas situações do cotidiano.

Em 2022, foi divulgado o ranking dos países avaliados no PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), que visa avaliar o desempenho dos estudantes em Leitura, Matemática e Ciências. O Brasil, atualmente, ocupa a posição 65 em Matemática, num total de 81 países avaliados na época. Esses dados evidenciam a distância do país em relação a outras nações no que diz respeito ao conhecimento matemático, pois 73% dos estudantes brasileiros avaliados apresentam baixo desempenho na área, ou seja, estão abaixo do Nível 2¹, considerado pelo PISA como patamar mínimo de proficiência que os estudantes devem alcançar para serem capazes de utilizar a Matemática em situações cotidianas.

Neste cenário desafiador, faz-se necessário repensar, replanejar e reavaliar as estratégias pedagógicas de ensino e aprendizagem, a formação docente e a organização da escola, com vistas a garantir as aprendizagens matemáticas essenciais e suas

¹ Alunos que atingem o nível 2 conseguem interpretar e reconhecer situações matemáticas simples; utilizar fórmulas e procedimentos básicos e tomar decisões baseadas em dados. (OECD, 2023)

aplicabilidades nas diversas situações cotidianas.

Justifica-se a escolha do tema pela motivação em pesquisar como a Metodologia de Resolução de Problemas aplicada ao Saber Proporcional pode contribuir para despertar o interesse e a curiosidade pelo estudo da Matemática, tendo como público-alvo a turma do 9º ano de escolaridade, período de conclusão do Ensino Fundamental, etapa da escolarização obrigatória mais longa da Educação Básica no Brasil. Nesse contexto, o trabalho busca garantir que as competências e habilidade matemáticas sejam adequadamente desenvolvidas sobre as relações de proporcionalidades. Deste modo, o discente terão a possibilidade de ser um cidadão mais crítico, raciocinando sobre fatos da realidade em contextos sociais dinâmicos.

A pesquisa é resultado de profundas inquietações que surgiram no decorrer de minha experiência docente, no sentido de compreender por que os alunos apresentam tanta resistência e desinteresse no estudo da Matemática. A sequência didática proposta, bem como todas as fases que a antecederam buscaram dialogar de forma mais concreta e com atitude de abertura, de forma que os discentes pudessem compreender os conhecimentos matemáticos, demonstrando por meio de atividades contextualizadas suas possibilidades de aplicação em diversas situações e não apenas no ato de fazer provas escolares, tornando mais concreta as aprendizagens matemáticas.

Sendo assim, buscou-se, com esta pesquisa, explorar estratégias de ensino e aprendizagem, utilizando a metodologia de resolução de problemas a partir de temas mais contemporâneas, tais como consumo, meio ambiente, sociedade digital, justiça social com a finalidade de aproximar o ensino da Matemática à realidade sociocultural do aluno, de forma a propiciar o desenvolvimento cognitivo e socioemocional das habilidades matemáticas: a construção criativa e coletiva de conhecimentos, o raciocínio proporcional nas diversas situações cotidianas e a valorização do protagonismo do aluno nas resoluções dos problemas. A metodologia de resolução de problemas possibilita a ampliação do conceito do saber proporcional de forma mais lúdica e concreta, tornando o aprendizado da Matemática menos desafiador. Além disso, permite a construção do saber relacionado à resolução de problemas, alinhando-se a um dos pilares da educação, que é o saber fazer com autonomia, que pode ser aplicada em diversas situações da vida de forma interdisciplinar.

Para a concretização do propósito do trabalho de apresentar a Matemática como uma ciência viva e pulsante, o pesquisador-professor fez uma ampla pesquisa sobre o saber proporcional e suas possibilidades de aplicações. Para isso, temos:

- **Objetivo Geral:** A pesquisa tem como objetivo investigar como a Metodologia de Resolução de Problemas, conforme proposta por [Onucchi, Alevatto e Noguti \(2021\)](#), aplicada ao Teorema da Proporcionalidade e o conhecimento do Saber Proporcional podem contribuir na construção de aprendizagens matemáticas, para uma maior

compreensão da realidade que nos cerca, na capacidade de raciocínio proporcional, na construção do pensamento crítico e no trabalho coletivo para a resolução de problemas tanto no ambiente escolar quanto em situações do cotidiano.

- **Objetivos Específicos** : Para atingir esse objetivo, se estabelece uma sequência de objetivos específicos.
 - Selecionar os referenciais teóricos que serão discutidos no trabalho;
 - Discutir o conceito de proporcionalidade;
 - Elaborar e aplicar uma sequência didática envolvendo proporcionalidade;
 - Propor estratégias didático-pedagógicas que favoreçam o desenvolvimento das habilidades matemáticas envolvendo a proporcionalidade, suas múltiplas implicações e usos;
 - Coletar e sistematizar os dados obtidos no pré-teste e nas atividades da sequência didática, verificando no pós-teste se a metodologia de resolução de problemas contribui para as aprendizagens do saber proporcional dos alunos;
 - Colaborar com a melhoria do Ensino da Matemática a partir de um olhar interdisciplinar que valorize o protagonismo do aluno no processo de aprendizagem.

A pesquisa utilizou a Metodologia de Resolução de Problemas, conforme [Onuch, Alevatto e Noguti \(2021\)](#), pois possibilita a construção de análises e estratégias ao deparamos com um problema específico. Deste modo, esta pesquisa deve proporcionar o desenvolvimento de conceitos e habilidades matemáticas necessários para a resolução de problemas nos contextos diversos da vida.

Em outras palavras, os estudantes devem resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática. Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa ([WALLE, 2009](#), p. 57).

Os dados coletados na pesquisa serão analisados de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, por meio do campo conceitual da estrutura multiplicativa proposto por [Vergnaud \(1982\)](#), que busca entender, de um modo geral, como os alunos constroem seus conhecimentos e habilidades ao longo de sua trajetória de vida, dentro e fora da escola. No contexto das situações de proporcionalidade, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, possibilita analisar as diferentes formas de relação linear entre grandezas em um amplo campo de interpretações de fatos e fenômenos.

Inicialmente, foi realizada uma pesquisa documental nos documentos oficiais sobre o ensino do Saber Proporcional nos anos finais do Ensino Fundamental. Além disso, houve

um diálogo com a Orientadora Pedagógica para apresentar a pesquisa, buscando, assim, informações a respeito dos anos de escolaridades anteriormente cursados pelos alunos com outros professores de Matemática na época, que coincidem com o período do ensino remoto, em virtude do contexto da pandemia. Como os professores que lecionaram para esses alunos anteriormente não faziam mais parte da instituição, a Orientadora me auxiliou com informações pedagógicas importantes, como as dificuldades e habilidade matemáticas ainda não consolidadas, que deveriam ser trabalhadas no presente estudo.

Posteriormente, foi feita a reunião com os responsáveis legais para apresentar a pesquisa e solicitar as autorizações necessárias para o desenvolvimento do estudo. Foram feitas as rodas de conversa para explicar os objetivos da pesquisa para os alunos. Após essa etapa, o estudo seguiu as seguintes fases: aplicação da avaliação diagnóstica (pré-teste), realização das atividades da sequência didática envolvendo a Metodologia de Resolução de Problemas sobre o saber proporcional e o Teorema Fundamental da Proporcionalidade e, por fim, aplicação do pós-teste. A coleta de dados foi realizada no 4º bimestre letivo de 2023, tendo como público-alvo a turma de 9º ano de escolaridade do Ensino Fundamental da Escola Municipal Conselheiro Josino, localizada em Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro.

Na época, foi realizada o pré-teste com função de avaliação diagnóstica para verificação dos saberes prévios dos alunos sobre o tema Proporcionalidade. Com base nos resultados dessa avaliação, foram elaboradas seis atividades que compõem a sequência didática, envolvendo a metodologia de resolução de problemas. Após a aplicação das atividades, os alunos realizaram o pós-teste, buscando verificar se os resultados obtidos contribuíram para a melhoria da qualidade do ensino. Os dados obtidos foram organizados em gráficos e tabelas e analisados de acordo com Teoria dos Campos Conceituais, conforme Vergnaud (2011). O trabalho está organizado em 5 capítulos da seguinte maneira:

No capítulo 1, é apresentado o referencial teórico no qual são discutidos conceitos fundamentais da Teoria dos Campos Conceituais, o saber proporcional e sua aplicabilidade nos Documentos Oficiais, a revisão bibliográfica da metodologia de resolução de problemas bem como a análise de outros trabalhos que trataram dessa metodologia e/ou conceito de proporcionalidade.

No capítulo 2, são apresentados os aspectos metodológicos da pesquisa por meio da caracterização do estudo, a descrição do locus escolar selecionado, o perfil dos sujeitos participantes, as etapas da pesquisa, os instrumentos empregados na coleta de dados e a elaboração da sequência didática.

No capítulo 3, apresentam-se as aplicações da Metodologia de Resolução de Problemas no ensino do saber proporcional, por meio das seções: aplicação do pré-teste (B.1); atividade sobre grandezas diretamente proporcionais (C.1); atividade sobre grandezas inversamente proporcionais (C.2); trabalho em grupo (C.3) e aplicação do pós-teste (D.1).

No capítulo 4, realiza-se a análise dos resultados obtidos, por meio das seguintes seções: análise do pré-teste (B.1) ; análise da atividade sobre grandezas diretamente proporcionais (C.1) ; análise da atividade sobre grandezas inversamente proporcionais (C.2); análise do trabalho em grupo (C.3) e a análise do pós-teste (D.1).

Por fim, no capítulo 5, apresenta-se as considerações finais do trabalho. Espera-se que esta pesquisa contribua para o desenvolvimento de novas abordagens didáticas do tema proporcionalidade, oferecendo subsídios para que professores reexaminem suas práticas pedagógicas cotidianas em relação ao ensino da Matemática, proporcionando aos alunos um aprendizado mais efetivo, criativo e prático da Matemática, visando à melhoria da qualidade de ensino do componente curricular Matemática.

=====

Capítulo 1

Referencial Teórico

No presente capítulo, serão apresentados e discutidos os principais conceitos que são relevantes no trabalho. A subdivisão será em sete seções. A primeira, abordará os trabalhos relacionados ao estudo da Proporcionalidade pertinentes ao estudo da pesquisa. A segunda, abordará breves considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais. A terceira, uma análise do saber proporcional e suas aplicabilidades em diversas áreas do conhecimento. Na quarta parte, exploraremos o saber proporcional nos Documentos Oficiais. Na quinta, os conceitos básicos da proporcionalidade e, na sexta, será apresentada a revisão bibliográfica da metodologia da resolução de problemas. Na última parte, realiza-se uma revisão geral de outros trabalhos que pesquisaram sobre a metodologia de resolução de problemas e/ou conceito de proporcionalidade.

1.1 Trabalhos Relacionados ao Estudo da Proporcionalidade

Pesquisadores têm indicado que os estudantes apresentam diversas dificuldades no que se refere à resolução de problemas que envolvam o saber proporcional. [Oliveira e Santos \(2000\)](#) discute, em seu trabalho, que quando os alunos dominam os algoritmos formais envolvendo a proporcionalidade, há uma maior dificuldade de estabelecer relações significativas no problema. [Silva \(2015\)](#) aponta que o excesso de conteúdo da regra de três trabalhado, faz com que, em determinadas situações, o conceito de proporcionalidade seja tratado superficialmente, sem conexões, eliminando-se etapas essenciais a um claro entendimento da Matemática envolvida no problema.

[NASCIMENTO \(2017\)](#) analisou os erros cometidos por alunos do 3º Ano do Ensino Médio, ao resolverem questões envolvendo proporcionalidade, concluindo que a maioria dos alunos errava as questões por não interpretar corretamente os enunciados. [Corrêa e Barbosa \(2021\)](#) afirma que, embora a proporcionalidade esteja presente em muitas situações, o conceito ainda não é aprendido adequadamente pelos estudantes, ocasionando deficiências matemáticas que se estendem por toda vida escolar do aluno. Diante da múltipla

possibilidade de aplicação, o saber proporcional motiva a busca por novas estratégias com o intuito de melhorar o processo de ensino-aprendizagem.

[Oliveira \(2019\)](#) investigou as dificuldades encontradas pelos alunos ao resolverem problemas sobre grandezas proporcionais a resolução mecânica dos problemas, a ausência de compreensão conceitual sobre os conceitos sobre proporção e a dificuldade de aplicá-lo em diferentes contextos conceituais: Muitos alunos tinham dificuldades em compreender o conceito de proporção e como aplicá-lo em diferentes contextos além da falta de interpretação textual correta dos problemas. [Schmidt \(2011\)](#) destacou a dependência excessiva da regra de três pode levar os alunos a resolverem problemas de forma automática, sem desenvolverem habilidades críticas de análise e raciocínio.

[Tobias \(2018\)](#) ao investigar a aplicação da abordagem de sala de aula invertida no ensino de proporcionalidade para alunos do 9º ano do ensino fundamental destacou que alguns alunos e professores enfrentaram dificuldades para se adaptar à nova dinâmica de ensino, bem como de manter a participação ativa dos alunos durante as aulas invertidas. [Silva et al. \(2024\)](#), em seu trabalho, aborda como a proporcionalidade pode ser aplicada no ensino da economia doméstica para alunos do ensino fundamental aponta a dificuldade integrar conteúdos de economia doméstica com proporcionalidade no currículo, já que requer um planejamento cuidadoso e a criação de materiais didáticos específicos e a necessária contextualização dos problemas, de forma que os alunos percebam a relevância no dia a dia.

[Santos, Gripp e Barreto \(2021\)](#) explora como a robótica educacional pode ser usada para ensinar proporcionalidade de forma lúdica e envolvente e aponta algumas dificuldades de sua pesquisa, tais como manter o engajamento dos alunos, especialmente para aqueles que não têm interesse inicial em tecnologia ou robótica, propondo a necessidade de criar atividades que sejam atrativas e relevantes para todos os alunos. [Silvestre e Ponte \(2005\)](#) ao investigar como a proporcionalidade pode ser ensinada aos alunos do 6º ano, através de atividades contextualizadas e de investigação, apontou as dificuldades dos alunos em entender conceitos matemáticos abstratos, como proporcionalidade, especialmente quando não conseguem relacionar esses conceitos com situações práticas do cotidiano e a falta de habilidades de resolução de problemas, já que a proporcionalidade frequentemente requer a utilização de raciocínio lógico e matemático para encontrar soluções.

1.2 Breves Considerações sobre Teoria dos Campos Conceituais

O marco teórico de aprendizagem discutido neste trabalho foi desenvolvido por Gérard Vergnaud, psicólogo francês, aluno de Piaget e professor emérito da Universidade de Paris 8, que elaborou a Teoria dos Campos Conceituais, uma teoria psicológica cognitivista do desenvolvimento. De acordo com [Moreira \(2002\)](#), Vergnaud amplia e redireciona, em sua

teoria, o foco piagetiano das operações lógicas gerais, das estruturas gerais do pensamento, para o estudo do cognitivo do "sujeito-em-situação".

Em concordância com [Moreira \(2002\)](#), Vergnaud, em sua teoria, agrega as notáveis contribuições de Piaget, tais como: organização, adaptação, assimilação e acomodação, relacionando-as às renomadas ideias de Vygotsky, tais como a importância da interação social, a linguagem e a simbolização para aprendizagem.

A Teoria dos Campos Conceituais é um quadro teórico que busca:

descrever e analisar a complexidade progressiva, numa base de longo e médio prazo, de as competências matemáticas que os alunos desenvolvem dentro e fora da escola, e estabelecer melhores conexões entre o conhecimento operacional, que consiste na ação no mundo físico e social, na forma predicativa do conhecimento, que consistem nas expressões linguísticas e simbólicas deste conhecimento ([VERGNAUD, 2009](#), p. 83).

Inicialmente, o próprio autor considerava que sua teoria não era, por si só, uma teoria didática. No entanto, vamos analisar a possibilidade de utilizarmos a Teoria dos Campos Conceituais com uma abordagem didática. Primeiramente, devemos compreender que:

a Didática da Matemática é uma das tendências da grande área de Educação Matemática, cujo objetivo de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental pedagógica, como no território da pesquisa acadêmica. ([PAIS, 2016](#), p. 8)

Conforme [Libâneo \(2017\)](#), a didática deve possuir três elementos fundamentais, que se relacionam diretamente com os fundamentos da Teoria dos Campos Conceituais: os conteúdos (**conceitos**), os métodos (que envolvem a **psicologia da aprendizagem**) e as estratégias de ensino (que envolvem a atuação do **professor**). Desta forma, podemos considerar a Teoria dos Campos Conceituais uma teoria didática, pois a didática, em um entendimento abrangente, está ligada às teorias e fundamentos do processo de ensino e aprendizagem. Portanto,

a Teoria dos Campos Conceituais dedica-se aos estudos da formação do conceito pela criança em diferentes domínios do pensamento racional, o que possibilita ao professor estimular e valorizar esta atividade dos alunos, (...), o que possibilita compreender como estes aprendem os conceitos, em especial, os conceitos relacionados à Matemática. ([ZANELLA; BARROS, 2014](#), p. 11)

A Teoria dos Campos Conceituais tem como cerne a formação e o desenvolvimento de conceitos diante de situações de aprendizagem, ou seja, a conceituação do real, permitindo, assim, novas operações mentais sobre os conceitos desenvolvidos pelos sujeitos e

de que forma são organizados independentemente da fase da vida. Para síntese, podemos explicitar as ideais fundamentais da Teoria dos Campos conceituais que são:

Em síntese, podemos explicitar conceitos fundamentais da Teoria dos Campos Conceituais que são:

- **Conceito:** de acordo com [Zanella e Barros \(2014\)](#), é definido por uma terna, que é composta por um conjunto de **situações** que dão sentido ao conceito; **invariantes operatórios**, que estruturam as forma de organização das atividades e, finalmente, as **representações** linguísticas e simbólicas, que permitem representar os conceitos. De uma forma geral, o conceito é abstração que determinado indivíduo estabelece com o mundo circundante, mediante as diversas situações de aprendizagem.

De uma forma geral, o conceito é abstração que determinado indivíduo cria com o mundo que o cerca, mediante situações de aprendizagem.

As situações, os invariantes e as representações são conjuntos indissociáveis para a Teoria dos Campos Conceituais. Para estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito durante os processos de ensino e aprendizagem é necessário considerar que estes três conjuntos ocorram simultaneamente nas práticas escolares. Entretanto, não podemos afirmar que haja uma bijeção entre tais conjuntos, ou seja, não se pode reduzir o significado ao significante e, vice-versa. ([ZANELLA; BARROS, 2014](#), p. 17)

- **Campo Conceitual**, conforme [Muniz \(2009\)](#),

(...) é ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representação simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem para o domínio da situação. ([MUNIZ, 2009](#), p. 29)

Assim, um campo conceitual é um conjunto de conceitos, modos de fazer e situações relacionados a um tema específico, por exemplo, em Matemática, as operações numéricas.

- **Invariantes Operatórios**, conforme [Vergnaud \(2013\)](#), são os conhecimentos em ação e permitem a identificação de objetos materiais e as relações intrínsecas de suas percepções, análise de informações das situações que podem gerar incertezas, as hipóteses relativas ao objeto e os saberes sobre estes objetos elaborados culturalmente. Eles são os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação e dão significado aos conceito.

¹ Os conhecimentos são conhecimentos em ação, designados aqui pelo termo de "invariantes operatórios" para indicar que esses conhecimentos não são explícitos nem explicitáveis, nem mesmo conscientes para alguns deles ([MUNIZ, 2009](#), p. 23).

Os conceitos em ação são as escolhas que o sujeito utiliza para embasar as suas ações e, também, para inferir, a partir de seu entendimento do mundo e dos objetivos a alcançar, as regras de ação mais eficazes. O teorema-em-ação são as sentenças, consideradas como verdadeiras, determinadas pelo sujeito que está atuando em uma situação.

- **O Campo Conceitual da Estrutura Multiplicativa** com base na Teoria dos Campos Conceituais, apresentaremos o Saber Proporcional e suas aplicabilidades, utilizando o Campo Conceitual da Estrutura Multiplicativa que é, segundo [Zanella e Barros \(2014\)](#), o conjunto de situações cujo domínio requer uma ou várias multiplicações e divisões, junto com os conceitos envolvidos e os teoremas. O campo conceitual da Estrutura Multiplicativa, permite, de acordo com ([VERGNAUD, 1989](#) apud [BRUN et al., 2000](#)), analisar algumas situações envolvendo proporção simples e múltiplas, função linear, relação escalar direta e inversa, entre outras situações possíveis.

Dentre os teoremas que podemos atribuir os conceitos de estrutura multiplicativa na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de acordo com o objetivo da pesquisa, são, segundo [Vergnaud \(2009\)](#), os teoremas associados a propriedade de isomorfismo da função linear;

$$f(ax) = af(x), \text{ com coeficiente constante } k, f(x) = kx$$

e

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Como também, segundo ([VERGNAUD, 1989](#) apud [BRUN et al., 2000](#)), as propriedades relativas ao coeficiente constante entre duas variáveis linearmente ligadas,

$$f(x) = ax, x = \frac{1}{a}f(x).$$

Este teorema da função linear representa o Teorema Fundamental da Proporcionalidade analisado neste trabalho.

Nas estruturas relações que representam multiplicações e divisões, [Vergnaud \(2009\)](#), aponta duas categorias principais: o isomorfismo das medidas e o produto das medidas.

- **O isomorfismo de medidas:** conforme apresenta [Vergnaud \(2011\)](#), a primeira grande forma de relação multiplicativa é uma relação quaternária entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de certo tipo e as duas outras medidas, de outro tipo. Podemos exemplificar, conforme a obra citada acima, as relações multiplicativas tais como, de acordo com [Zanella e Barros \(2014\)](#) os

problemas multiplicativos conhecido o valor unitário e outras duas quantidades; problemas que envolve a divisão em busca do valor unitário, problemas que envolvem a busca por quantidades de unidades.

- **O produto das medidas:** recorrendo mais uma vez a [Vergnaud \(2011\)](#), o produto de medidas é forma de relação consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico (compreensão e manipulação de números, operações aritméticas e relações entre quantidades) e no plano dimensional (refere-se à compreensão de conceitos geométricos, relações espaciais e propriedades de formas e figuras).

As relações com o Teorema da Proporcionalidade são operações envolvendo o isomorfismo e produto de medidas, sendo uma das bases conceituais de nosso trabalho.

1.3 O Saber Proporcional

Há sempre um eco do passado. Nos primórdios da civilização, o dia e a noite, o ciclo das estações do ano, a necessidade de encontrar alimentos, a busca por proteção e preservação da vida, por meio da união e a perpetuação da espécie trouxeram imensos desafios para a existência humana. Para resolver tais desafios, algumas ideias podem ter surgido por meio das percepções: a diferença entre tamanhos e a agressividade entre os animais, dentre outras. As diferenças de tamanhos, por exemplo, são algumas situações possíveis desencadeadoras de processos cognitivos que, mais tarde, resultarão na necessidade de contar:

É improvável que isso tenha sido descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo; é mais provável que a percepção tenha sido gradual, desenvolvida tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300.000 anos ([BOYER; MERZBACH, 2019](#), p.24).

Surgindo um pequeno lampejo da noção do que, nos dias atuais, se denomina propriedade, provavelmente, emerge, também, a necessidade de contar. De acordo com [Boyer e Merzbach \(2019\)](#), os dedos humanos podem ter sido utilizados nas primeiras contagens, realizadas pelo homem: pessoas, objetos ou animais. Quando a quantidade a ser contada e registrada era maior (extrapolando a capacidade de contar nos dedos), os humanos primitivos utilizavam de amontoados de pedras. Quando os dedos humanos se tornaram insuficientes para contar e o amontoado de pedras passa a ser uma representação instável, eles representavam as quantidades por meio de marcações em madeiras e ossos.

Poucos destes registros existem hoje, mas na Morávia foi achado um osso de lobo jovem com profundas incisões, em número de cinquenta

e cinco; estavam dispostos em duas séries, com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os entalhes em cada série dispostos em grupos de cinco. Foi determinado que ele tem aproximadamente 30.000 anos (BOYER; MERZBACH, 2019, p. 24).

O modo de representar marcações para registro em madeiras e ossos deu origem, bem mais tarde, aos números. Assim, o Saber Proporcional está presente na história humana, desde muito remotamente. O cerne da relação de proporcionalidade na variação de uma pedra ou traço, implicando na variação, na mesma proporção direta daquilo que se deseja contar, ou seja, por meio da relação de bijetividade, a relação que associa cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro conjunto e vice-versa.

1.3.1 Saber Proporcional em Diversas Áreas do Conhecimento

O saber proporcional é multifacetado e vai muito além da Proporcionalidade em sentido estrito (Teorema Fundamental da Proporcionalidade), demonstrando, assim, ser um saber fundamental que se manifesta em diversas formas. Vamos explicitar algumas de suas aplicações:

1. O Saber Proporcional na Matemática

O saber proporcional se manifesta na Matemática por meio das relações de proporcionalidade, que será mais detalhada posteriormente no texto. Seguem algumas grandes obras na História da Matemática:

- **Papiro de Rhind**

Primeiro registro do saber proporcional na Matemática remonta ao Papiro de Rhind que, segundo Boyer e Merzbach (2019), foi comprado por Henry Rhind, em 1858, na cidade de Luxor, Egito. O material comprado é composto por um rolo de papiro com cerca de 0,30m de altura a 5m de comprimento. Esse papiro ficou conhecido como Papiro de Rhind, cujo escriba foi Ahmes, por volta de 1650 a. C., sendo a principal fonte da Matemática do antigo Egito. Alguns problemas contidos no Papiro de Rhind remetem ao saber proporcional na forma do algoritmo da regra de três. Mais uma vez recorrendo a obra de Boyer e Merzbach (2019), o Problema 72 (Qual é o número de pães “de força” 45 que são equivalentes a 100 pães “de força” 10?) e o Problema 63 (que repartam 700 pães entre 4 pessoas sendo que as quantidades recebidas devem estar em determinadas na proporção prolongada $2/3: 1/2: 1/3: 1/4$) são exemplos de problemas envolvendo proporções.

- **Os Elementos**

“Os Elementos” foi escrito por Euclides, que pertencia ao quadro de pesquisadores da mítica Biblioteca de Alexandria, por volta de 300 a C., conforme Aaboe

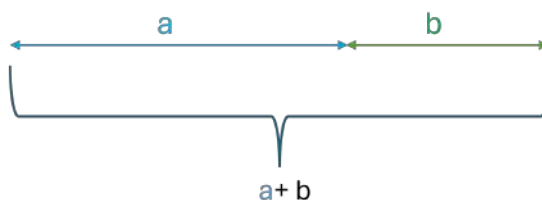
(2013). Neste livro, ele aborda o conhecimento matemático acumulado pelas gerações de matemáticos anteriores, tornando-se a obra mais conhecida e importante na história da Matemática, com a abordagem sistemática e rigorosa da geometria e da teoria das proporções. A teoria das proporções, é uma parte importante dos “Os Elementos”, foi uma grande descoberta do seu tempo. Esta teoria foi baseada em alguns trabalhos de Eudoxo, conforme Boyer e Merzbach (2019), e foi incorporada por Euclides em sua obra, sendo apresentada no capítulo V com as demonstrações de alguns teoremas de razão e proporção feitas no capítulo VI, aplicados ao estudo da geometria.

Tendo desenvolvido a teoria das proporções no livro V, Euclides explorou-a no livro VI demonstrando teoremas relativos a razões e proporções que aparecem em triângulos, paralelogramos e outros polígonos que são semelhantes (BOYER; MERZBACH, 2019, p. 95).

No capítulo V temos, por exemplo, a definição 5 que, segundo Euclides (2009), expressa que “Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta”, demonstrando, assim, a relação matemática da proporcionalidade, com a quarta proporcional. No capítulo VI, os problemas 11 (Dadas duas retas, achar uma terceira em proporção), 12 (Dadas duas retas, achar uma terceira em proporção) e 13 (Achar uma média em proporção entre duas retas dadas) encontrados no livro de Euclides (2009) são mais alguns exemplos de aplicação do saber proporcional como cálculo de proporções.

Em especial, a divisão dos segmentos em média e extrema razão que consta na definição 3 do Livro VI da obra “Os elementos” de Euclides (2009) dá origem a uma importante e belíssima razão cujo nome é Razão Áurea e sua aplicação se demonstra em diversas situações da natureza. Para obtermos a razão áurea, tomemos um segmento em dois segmentos de tamanhos a e b , conforme a Figura 1.

Figura 1 – Divisão de segmentos na razão áurea.



Fonte: Dado da pesquisa adaptado pelo autor.

Vamos recorrer a Euclides (2009) e dividir o segmento em média e extrema razão, isto é, a razão entre o maior e o menor dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo. Para isso, tomemos dois segmentos de módulos a e b , com $a > b$, sem perda de generalidade, conforme a figura 1.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Substituindo $\frac{a}{b} = \phi$ denominado número de ouro e fazendo manipulações algébricas simples (sabendo que a , como medida um segmento, é diferente de zero), chegamos a equação de segundo grau em ϕ .

$$\phi^2 = 1 + \phi$$

A equação acima é a equação algébrica da razão áurea, cuja raiz positiva é o número de ouro ϕ .

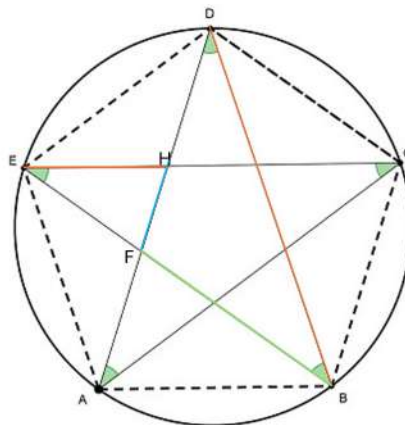
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \phi \approx 1,681.$$

Portanto, ϕ é um número *irracional*, pois $\sqrt{5}$ é irracional ($\sqrt{\text{primo}}$ é número irracional), transmitindo sua "irracionalidade" a toda fração e *algébrico*, pois é raiz do polinômio $x^2 - x - 1 \in \mathbb{Z}(x)$, de acordo com [Endler \(1986\)](#).

O número de ouro é encantador, pois está presente na natureza e em algumas situações que consideramos mais belas. A tradição atribui a Pitágoras o estudo das propriedades do pentagrama.

A estrela de cinco pontas (formada traçando as cinco diagonais de uma face pentagonal de um dodecaedro regular) era, ao que se diz, o símbolo especial da escola pitagórica. O pentágono estrelado tinha aparecido antes na arte babilônica, e é possível que aqui também tenhamos um elo de ligação entre a matemática pré-helênica e a pitagórica ([BOYER; MERZBACH, 2019](#), p. 57).

Figura 2 – O Pentagrama pitagórico e a proporção áurea.



Fonte: Fonte: Dado da pesquisa adaptado pelo autor.

Deste modo, conforme a Figura 2, Pitágoras demonstrou que $\overline{FH} + \overline{HE} = \overline{BF}$ e $\overline{FH} + \overline{BF} = \overline{BD}$ e que esses segmentos constituem a proporção áurea. Mais ainda, dentro do pentagrama existem várias relações que determinam o retângulo de ouro, tais como $\overline{EH} + \overline{FH}$ e $\overline{FH}$, dentre outras.

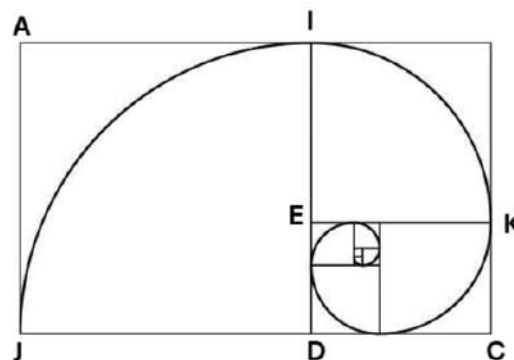
Vamos seguir o procedimento descrito por Contador (2015) para a construção do retângulo áureo:

- O primeiro passo para a construção de um retângulo de lados AB e BC é tomarmos um ponto D que divida o segmento JC em média e extrema razão;
- A partir de D, tracemos o segmento perpendicular em D que vai interceptar AB em I, para formarmos um quadrado AIDJ;
- Agora, formamos o retângulo de lados BC e CD;
- De mesmo modo, construímos o retângulo de lados CD e DE, com o ponto E dividindo o segmento ID em média e extrema razão;
- E assim, faremos infinitos retângulos áureos.

Para construirmos a espiral de ouro ,mais uma vez recorrendo ao Boyer e Merzbach (2019), basta traçarmos arcos de circunferências de modo a:

- Tomarmos o ponto D como centro do primeiro quadrado e com raio DJ determinado o arco JI;
- Tomamos o ponto E como centro com raio EI, basta traçarmos o arco IK;
- Assim, infinitamente.

Figura 3 – Retângulo e espiral de ouro.



Fonte: Fonte: Dado da pesquisa adaptado pelo autor.

Na Figura 3, temos as duas situações de construções representadas. Como um todo, a figura é simplesmente fantástica e belíssima.

2. O Saber Proporcional na Astronomia

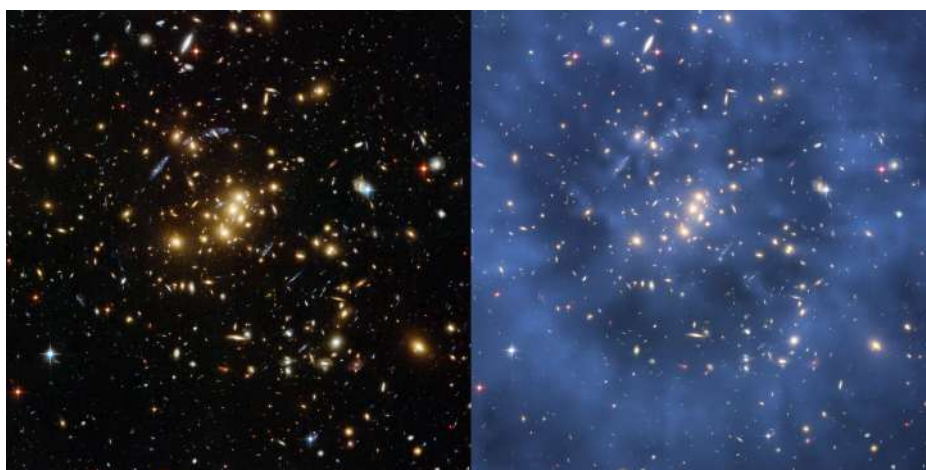
Em sua obra-prima "Cosmos", [Sagan \(2017\)](#) aborda implicitamente o saber proporcional por meio das complexas inter-relações e proporções que existem em nosso Universo, entre as partículas mais diminutas, como também a imensidão das galáxias, pois a cada dia, novas descobertas astronômicas, utilizando escalas, comprovam que a cada nova proporção desvendada do universo, são feitas novas descobertas.

Em uma outra situação, o saber proporcional se manifesta na forma de porcentagem, com a razão entre duas grandezas. A matéria escura, por exemplo, é responsável por manter as estrelas unidas nas galáxias e não emite radiação do espectro magnético e, por isso, não pode ser observada nos telescópios. Sua composição é, atualmente, um dos maiores mistérios da Física.

De acordo com [Montes e Trujillo \(2019\)](#), temos a possibilidade de explorar a distribuição da matéria escura em aglomerados de galáxias distantes em detalhes, usando apenas observações de imagem profunda. A presença da matéria escura é detectada através da atração gravitacional, causando assim distorções nas fotos e representa, segundo [Souza e Teixeira \(2021\)](#), aproximadamente, 23% de matéria no Universo.

Em uma outra situação, o saber proporcional se manifesta na forma de porcentagem, com a razão entre duas grandezas. A matéria escura, por exemplo, é responsável por manter as estrelas unidas nas galáxias e não emite radiação do espectro magnético e, por isso, não pode ser observada nos telescópios. Sua composição é, atualmente, um dos maiores mistérios da Física, conforme Figura 4.

Figura 4 – Imagem do enorme aglomerado de galáxias CI 0024+17 (ZwCl 0024+1652)



Fonte: NASA, ESA, M.J. Jee, e H. Ford (Universidade de Johns Hopkins)

3. O Saber Proporcional no Direito

No Neoconstitucionalismo, o saber proporcional se materializa no Direito como o princípio da proporcionalidade, o qual exige que as medidas adotadas por autoridades públicas não sejam excessivas em relação aos objetivos pretendidos. Conforme afirma [Filho e Caye \(2022\)](#), desde 1951, o Supremo Tribunal Federal (STF) tem aplicado o princípio da proporcionalidade. Nesse ano, O STF teria aplicado o referido princípio ao examinar o aumento dos tributos imposto à obtenção de licença para o funcionamento de cabines de banho na praia da Cidade de Santos, São Paulo.

Atualmente, o princípio da proporcionalidade, embora implícito no texto constitucional, de acordo o STF, funciona como parâmetro de medição da constitucionalidade nas intervenções de normas relativas aos direitos fundamentais e tem dois desdobramentos muito importantes: como proibição de excessos e a vedação à proteção insuficiente, tais quais são exemplos recentes de decisões do STF, respectivamente, [FACHIN \(2024\)](#) e [BARROSO \(2024\)](#).

4. O Saber Proporcional na Arte

A Arte e a Matemática são fundamentais para a existência humana. O saber proporcional, através das proporções, se refere à relação entre as diferentes partes de uma obra, de modo a proporcionar mais equilíbrio, beleza e harmonia. As flautas de Hohle Fels, na Alemanha, são os instrumentos musicais mais antigos e datam entre 35000 a 42000 anos, segundo [Conard, Malina e Münzel \(2009\)](#). No caso de pinturas, [Lattao et al. \(2023\)](#) afirma que as pinturas rupestres encontradas na Gruta de Maltravieso, na cidade de Cárceres na Espanha datam, aproximadamente, de 67000 anos. Com esses casos, demonstram-se que as primeiras populações utilizavam as artes como manifestações de seus cotidianos. A proporção na arte está baseada em princípios matemáticos como a razão áurea e a regra dos terços, por exemplo. Esses princípios são utilizados para criar proporções equilibradas e harmônicas, sendo aplicados em diversas áreas da arte, tais como pintura, arquitetura e escultura.

Na pintura, temos várias obras inspiradas na proporção áurea. Com o Renascentismo, os pintores utilizaram a proporção de ouro para retratar ideais de beleza. Nesse período, surge a necessidade de representar os tamanhos das pessoas e, por isso, a proporcionalidade passou a ser usada para representar as distâncias entre elas ou sua posição nas telas, conforme [Contador \(2015\)](#). Vários pintores de diferentes tempos, provavelmente, utilizaram a proporção áurea para a construção de seu quadros.

A pintura da Figura 5, do mestre da vanguarda do Surrealismo Salvador Dalí representa o "Sacramento da Última Ceia" cujas dimensões são, aproximadamente 270 cm x 167 cm, estão entre si, na razão áurea, conforme [Livio \(2021\)](#).

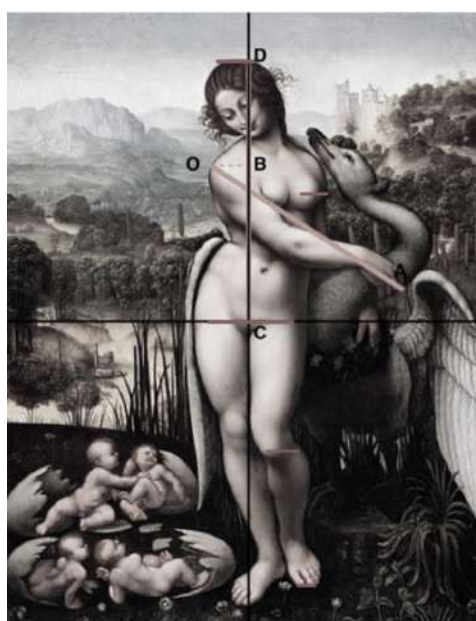
Figura 5 – Sacramento da Última Ceia, Salvador Dali, 1995



Fonte: National Gallery, Washington D. C.

Na Figura 6, está a pintura elaborada com técnica desenho em papel, intitulada “Leda e o Cisne”. Conforme Contador (2015), o gênio Leonardo Da Vinci, com precisão incrível, expressou a proporção áurea, considerando a inclinação do corpo e o comprimento do braço.

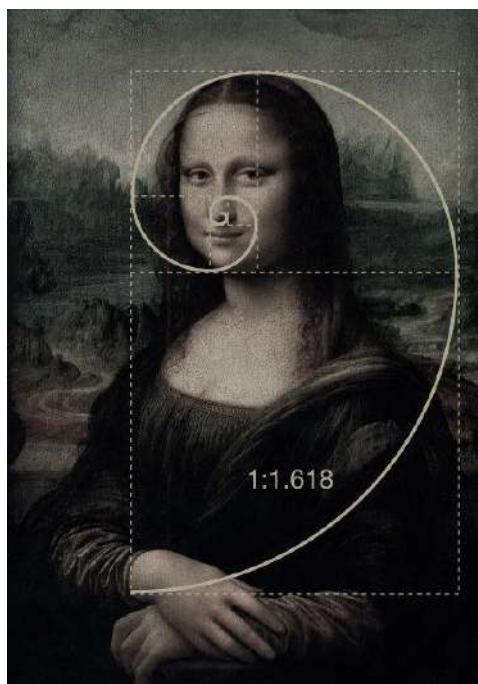
Figura 6 – A Leda e o Cisne, Leonardo da Vinci



Fonte: <https://pt.italiani.it/leda-e-il-cigno-lopera-ritrovata-di-leonardo-da-vinci/>

De acordo com [Contador \(2015\)](#), temos o quadro “Monalisa”, de Leonardo da Vinci, o retrato mais famoso do mundo. Na construção, há o emprego do retângulo áureo, conforma a Figura 7.

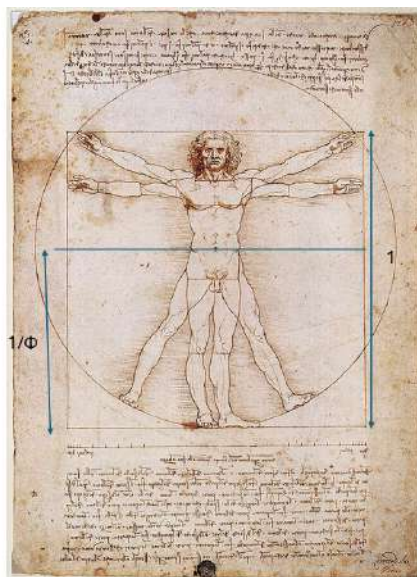
Figura 7 – Mona Lisa, Leonardo da Vinci



Fonte: Museu do Louvre

A obra “Homem vitruviano” é um das mais famosas concebidas por Leonardo da Vinci. A figura composta por tinta sobre papel, foi feita, provavelmente por volta de 1490. Ele teve como inspiração os conceitos do arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio que relacionava as medidas do corpo à arquitetura. Leonardo da Vinci, de forma brilhante, colocou o homem no centro do quadrado e no centro do círculo, ao mesmo tempo. Nesta pintura, há várias medidas envolvendo a número de ouro, uma das quais foi destacada na Figura 8.

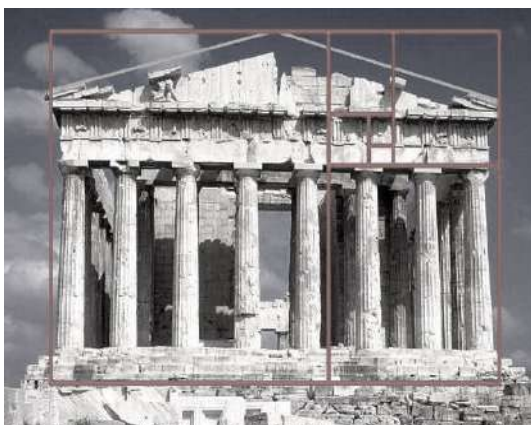
Figura 8 – O Home Vitruviano, Leonardo da Vinci



Fonte: Gallerie dell'Accademia di Venezia

Na Arquitetura, podemos destacar o escultor e arquiteto Phidias, responsável do projeto do Partenon, construído com proporções harmônicas, conforme Figura 9. Quando sua fachada principal ainda existia intacta, a razão entre a sua largura e sua altura era, aproximadamente, o número que, mais tarde, recebeu as iniciais de seu nome ϕ (letra grega phi). Sobre a construção do Partenon, apesar dos questionamentos, veicula-se a possibilidade da razão áurea ter sido utilizada para a realização de seu projeto.

Figura 9 – O Partenon

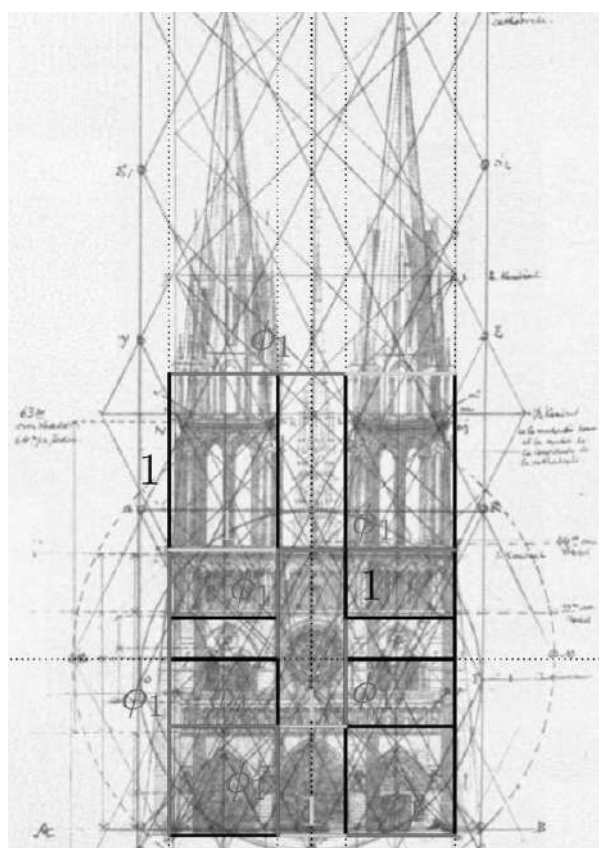


Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Partenon-448-442-aC_fig1_347495911

Então, será que a Razão Áurea foi usada no projeto do Partenon? É difícil dizer com certeza. Embora a maioria dos teoremas matemáticos referentes à Razão Áurea (ou "razão extrema e média") pareça ter sido formulada depois da construção do Partenon, existia um conhecimento considerável entre os pitagóricos antes disso. Assim, os arquitetos do Partenon podem ter decidido basear seu projeto em alguma noção predominante de padrão estético. No entanto, isto é bem menos certo do que muitos livros querem nos fazer crer, e não é uma teoria particularmente sustentada pelas dimensões reais do Partenon (LIVIO, 2021, p. 92).

Provavelmente, os arquitetos da Catedral de Notre Dame projetaram-na com sequências de retângulos áureos. Na figura abaixo, temos a lustração da catedral de Notre Dame, de acordo com a Figura 10. De acordo com (LUND, 1921), as linhas reguladoras sobrepostas mostram que a catedral tem proporções de ouro.

Figura 10 – A Catedral de Notre Dame



Fonte: A obra Ad quadratum

As arquiteturas exemplificadas acima demonstram como a proporção áurea pode trazer mais beleza nas construções. Na escultura, por exemplo, temos a Vênus de Milo, conforme Figura 11, uma notável obra da Grécia antiga que está na Galeria de Antiguidades do Museu do Louvre, na França, que, segundo Reale (1997), tem

relações com a proporção áurea. Essas são algumas aplicações do saber proporcional nas Artes.

Figura 11 – Vênus de Milo



Fonte: Museu do Louvre

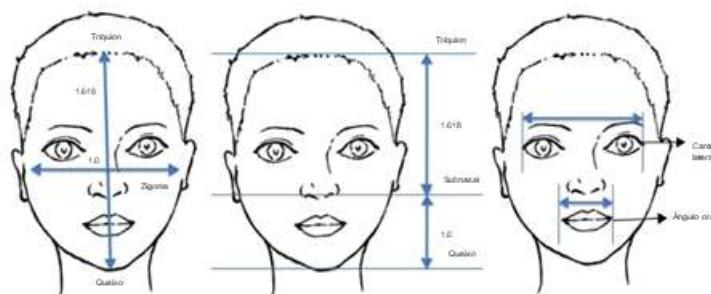
Essas são algumas aplicações do saber proporcional nas Artes utilizando a proporção áurea e, conseqüentemente, o número de ouro.

5. O Saber Proporcional na Estética

Neste tempo, temos que considerar o valor da imagem na sociedade. Por isso, o saber proporcional na forma de proporcionalidade é fundamental para a Estética. A ideia de proporção, na beleza, remete ao número de ouro, utilizado para esse fim desde a Grécia antiga. A Harmonização Facial é um conjunto de procedimentos estéticos que visa proporcionar mais harmonia, equilíbrio e simetria ao rosto. A proporção áurea é usada para medir e analisar as qualidades estéticas da face na população. De acordo com [Kaya et al. \(2019\)](#), a proporção áurea tem sido sugerida como uma maneira matemática para o desenvolvimento das relações entre a forma e tamanho ideais dos dentes superiores. Esta proporção é apenas um dos muitos fatores envolvidos no desenho do sorriso, de acordo com a Figura 12. O valor da mesma é considerado como uma ferramenta de diagnóstico na avaliação de um sorriso.

Então, a proporção é um conceito fundamental na Estética e na Arte. Desde os tempos do Renascimento, entendemos a importância da proporção áurea para a beleza.

Figura 12 – Proporções que são utilizadas na análise facial



Fonte: Assessment of facial analysis measurements by golden proportion,pg 467.

6. O Saber Proporcional na Natureza

A proporção áurea foi denominada de “divina proporção” no livro escrito por Luca Pacioli (“Divina proportione”). A espiral contida no retângulo áureo está presente em várias formas na natureza. Vamos apresentar algumas imagens da presença da espiral áurea na natureza.

• O Formato Espiral de Algumas Galáxias

As galáxias, devido às suas formas, são classificadas em elíptica, espiral ou irregular. Vamos particularizar a forma espiral das galáxias, conforme a Figura 13.

Figura 13 – Forma espiral de algumas galáxias



M51 [S. Beckwith (STScI), Hubble Heritage Team, ESA, NASA, R. Gendler]



Modelo da Via Láctea [R. Hurt (SSC), JPL-Caltech, NASA]

Fonte: Assessment of facial analysis measurements by golden proportion,pg 467.

- **A Espiral na Forma dos Furacões**

De acordo com Gulev et al. (2021), com o aumento da temperatura dos oceanos, provavelmente aumentará a frequência e a potência de tempestades, ciclones e furacões, intensificando os efeitos como do fenômeno El Niño. Com base neste estudo, há sérias previsões de mais tragédias em nosso futuro. O formato espiral dos furacões está representado na Figura 14.

Figura 14 – Forma espiral dos furacões



Furacão Ian, 2022



Furacão Idália, 2023

Crédito das imagens: NASA

- **A Espiral Áurea na Botânica**

Surpreendente como a espiral áurea se apresenta na Botânica. Essas são algumas aplicações da espiral áurea na natureza, de acordo com Figura 15.

Figura 15 – Forma espiral de algumas plantas



Babosa-espiral (*Aloe polyphylla*)

Fonte: <https://www.jardineiro.net/plantas/babosa-espiral-aloe-polyphylla.html>



Albuca spiralis (suculenta-espiral)

Fonte: <https://donozen.com.br/suculenta-espiral-dicas-simples-de-como-cultivar-essa-suculenta/>

7. O Saber Proporcional nos Documentos Oficiais

Um dos objetivos deste trabalho é identificar as habilidades desenvolvidas pelos alunos, do 9º ano do Ensino Fundamental, que é o ano conclusivo dessa etapa escolar em relação ao Saber Proporcional e suas aplicabilidades na Matemática e em outras áreas do conhecimento. Durante sua escolarização, os alunos, público-alvo da pesquisa, vivenciaram dois marcos legais determinantes na organização dos currículos escolares. O primeiro, publicado em 1997, foram os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), vigoraram por vinte anos, abrangendo o período desde a Educação Infantil (primeira etapa da Educação Básica), até o início do 5º ano de escolaridade. Em 2017, é publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que exigiu que cada Estado e Município realizasse as adaptações curriculares e didáticas adequadas às etapas da escolarização, com prazo máximo de integral implementação do documento até o ano de 2020.

a) O Saber Proporcional nos Parâmetros Curriculares Nacionais(PCNs)

Os PCNs (Brasil (1997a)) foram referências nacionais no que se refere à organização dos currículos, sendo fruto, na época de sua elaboração e implementação, de lutas históricas nas definições dos conteúdos, habilidades e questões relacionadas ao processo de ensino. O documento teve, dentre seus objetivos principais, definir conhecimentos mínimos, com padrão de qualidade, extensivo a todos os alunos, constituindo, assim, um guia curricular importante, mas não obrigatório ao trabalho docente. O processo de sua construção ocorreu considerando as discussões e sugestões das propostas curriculares elaboradas no âmbito de Estados e Municípios, demandando amplos debates até a sua versão final. Os PCNs estão divididos em seis Áreas de Conhecimentos, sendo uma delas a Matemática.

Sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual (BRASIL, 1997a, p.13).

Os objetivos gerais do PCNs, em sentido amplo, buscam desenvolver saberes que possibilitem aos alunos a construção da cidadania, o aprimoramento de atitudes solidárias e democráticas.

Objetivos Gerais do Ensino Fundamental

Segundo os PCNs (Brasil (1997a)), os objetivos do Ensino Fundamental são:

posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas; perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente,

identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente; desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas proporcionalidade inversa afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania; utilizar as diferentes linguagens — verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal — como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação; saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos; questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade.

Na contemporaneidade, a educação deve promover, em nossos estudantes, o desenvolvimento emocional e cognitivo para que possam interpretar informações de forma ampla e tomar decisões que afetam sua vida e de toda a existência planetária. Portanto, a escola deve buscar a construção de conhecimentos e habilidades para tempos de incertezas. Os alunos devem estabelecer conexões entre ideias matemáticas, reconhecendo princípios gerais, como proporcionalidade, criando relações que permitam a exploração dos saberes matemáticos em diversos contextos.

Na organização curricular, o saber proporcional é abordado como um conhecimento fundamental, que segundo os PCN's ([Brasil \(1997a\)](#)), levando em conta sua potencialidade para instrumentação do raciocínio. Devido a sua importância, esse saber é distribuído em conteúdos ao longo do todo Ensino Fundamental, devendo ser aplicado em diversas exigências da vida social. Para construir os saberes matemáticos necessários à construção da cidadania, temos os objetivos gerais de Matemática para o Ensino Fundamental:

identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas; fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente; resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis; comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da

linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas; estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares; sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções; interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 1997b, p. 47-48).

As recomendações dos PCN's - Matemática (Brasil (1997b)) apontam para o desenvolvimento do saber proporcional, na forma de raciocínio proporcional, nos diversos pontos de vista, desenvolvendo suas potencialidades para a instrumentalização de sua vida e para o desenvolvimento do raciocínio. Os PCNs foram organizados em ciclos de 2 anos cada.

No segundo ciclo do Ensino Fundamental (correspondente ao 4º e 5º anos), o processo de ensino e aprendizagem deve ser proposto de acordo com a realidade dos alunos, com o objetivo de formular conceitos, desde que não sejam abstratos. Nos problemas associados à multiplicação e à divisão, por meio de comparações entre razões de mesma grandeza, bem como na identificação das características de figuras geométricas, por meio da percepção de ampliação e redução, surge o saber proporcional na forma da proporcionalidade estrita, ou seja, a partir da aplicação matemática do Teorema da Proporcionalidade.

O desenvolvimento da competência métrica, no terceiro ciclo (equivalendo sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental), de acordo com Os PCN's-Matemática (Brasil (1997b)), deve levar ao aluno ao desenvolvimento que envolva o saber proporcional na forma de exploração de situações de aprendizagem, isso inclui o estabelecimento de relações entre grandezas para a construção de estratégias que envolvam situações de proporcionalidade. Diversos outros fenômenos neste ciclo são regidos por modelos matemáticos de proporcionalidade (porcentagens, ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão são alguns exemplos possíveis) e a compressão de tais modelos permitem a interpretações de fatos do mundo real.

O quarto ciclo, etapa final do ensino Fundamental, o saber proporcional é ampliado em mais situações de aprendizagem. Segundo PCN's - Matemática (Brasil (1997b)), o raciocínio proporcional tem enfoque nas relações de proporcionalidade direta, inversa e de não proporcionalidade. O documento sugere diversas situação de aprendizagem do saber proporcional, por meio:

Do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação

em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional e em resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três (BRASIL, 1997b, p. 82).

Assim, o saber proporcional se concretiza com o estudo de problemas multiplicativos, porcentagem, semelhanças de figuras, análise de gráficos, nos estudos de funções lineares, bem como as relações que não são descritas pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, ou seja, não proporcionais. No tema Grandezas e Medidas, tem-se a possibilidade de integrar o saber proporcional em outras áreas do conhecimento. Medidas quantificam grandezas que possuem existência física e a aplicação da proporcionalidade pode ser concretizada, por exemplo, em: velocidade, energia em Ciências Naturais; densidade em Geografia (densidade demográfica); densidade em Ciências Naturais; escalas e coordenadas em Geografia; medidas de memórias dos dispositivos móveis ou computadores. Assim, temos um amplo campo de aplicação do saber proporcional.

b) **O saber Proporcional na Base Nacional Comum Curricular**

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil (2018a)) foi publicada no dia 22 de dezembro de 2017. O documento, de caráter normativo, define conhecimentos e habilidades fundamentais que devem ser desenvolvidas pelos alunos em toda a sua escolaridade obrigatória, na Educação Básica e suas modalidades. A base curricular

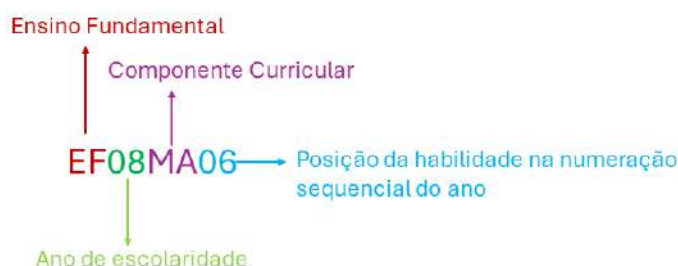
é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano de Educação (PNE) (...) está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva (...) (BRASIL, 2018a, p. 7).

Competência, segundo a BNCC (Brasil (2018a)), é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socio-emocionais), atitudes e valores para responder às situações da vida cotidiana, exercitando as capacidades de autonomia e autoria, bem como a vinculação indissociável da educação escolar com a prática social e o mundo do trabalho. Durante a Educação Básica, a escolarização obrigatória encontra-se dividida em: Educação Infantil (primeira etapa da Educação Básica), Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Anos Finais) e Ensino Médio. As aprendizagens essenciais devem possibilitar aos discentes o desenvolvimento das dez competências gerais estabelecidas, resguardando o direito ao aprender a aprender. A seguir, são citadas as competências que estão diretamente relacionadas à realização da pesquisa e que serão relevantes no processo de análise dos dados.

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, os outros e do planeta. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários (BRASIL, 2018a, p. 9).

As habilidades são descritas, no documento, em códigos alfanuméricos e expressam as aprendizagens essenciais asseguradas aos alunos, por exemplo, na Figura 16 temos o código **EF08MA06** que, desmembrado representa, respectivamente: a etapa do Ensino Fundamental (**EF**), 8º ano de escolaridade (**08**), o componente curricular, ou seja, Matemática **MA** e tem como objeto de conhecimento **06t** o valor numérico de expressões algébricas e a habilidade requerida é resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Figura 16 – Exemplo do código alfanumérico da BNCC.



Fonte: Dado da pesquisa elaborado pelo autor.

A etapa mais longa da educação básica é o Ensino Fundamental, com duração de nove anos. Nos anos iniciais, a BNCC tem como proposta a valorização de situações lúdicas de aprendizagem em um atitude ativa na construção de conhecimentos. Sobre os anos finais, contemplado na pesquisa, tem-se

ao longo do Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudantes se deparam com desafios de maior complexidade, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de

organização dos conhecimentos relacionados às áreas. Tendo em vista essa maior especialização, é importante, nos vários componentes curriculares, retomar e ressignificar as aprendizagens do Ensino Fundamental – Anos Iniciais no contexto das diferentes áreas, visando ao aprofundamento e à ampliação de repertórios dos estudantes (BRASIL, 2018a, p. 58).

A Matemática na BNCC, constitui-se em uma Área de Conhecimento. O Ensino Fundamental, segundo a BNCC (Brasil (2018a)), deve promover o desenvolvimento do letramento matemático, isto é, competências e habilidades matemáticas que favoreçam o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. A Matemática deve desenvolver nos educandos as seguintes competências específicas, priorizando aquelas relativas ao Saber Proporcional.

Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho; desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo; compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções; fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes; utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados; enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados), desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza, interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2018a, p. 265).

A unidade Temáticas *Números* deve desenvolver o saber proporcional na forma

da ideia fundamental de proporcionalidade pode meio de situações significativas. A unidade temática *Álgebra* possibilita o desenvolvimento do pensamento algébrico que permite construir modelos matemáticos utilizando letras e outros símbolos. O saber proporcional correspondente a esta unidade, é uma das ideias matemáticas fundamentais a ser desenvolvido, pois se vincula à proporcionalidade.

A *Geometria* envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos para a representação plana e espacial do mundo físico. O saber proporcional atua como ideia matemática fundamental, nas construções de figuras geométricas envolvendo sua ampliação ou redução. As grandezas do mundo físico são fundamentais para a compreensão da realidade. Deste modo, a unidade temática *Grandezas e medidas*, ao propor o estudo das medidas e suas relações métricas, possibilita a aplicação do saber proporcional na Matemática e em outras áreas do conhecimento tais como: Ciências (densidade, grandezas e escalas), Geografia (a construção e estudos de escalas mapas e densidade demográfica), as relações dados nos dispositivos que envolvem a informação digital, dentre outros. *Probabilidade e estatística* estuda as incertezas e o tratamento de dados, o saber proporcional se aplica no estudo dos fenômenos que são regidos pela probabilidade de eventos equiprováveis, isto é, eventos que têm a mesma probabilidade de ocorrer.

A *Geometria* envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos para a representação plana e espacial do mundo físico. O saber proporcional atua, como ideia matemática fundamental, nas construções de figuras geométricas envolvendo sua ampliação ou redução.

As grandezas do mundo físico são fundamentais para a compreensão da realidade. Deste modo, a unidade temática *Grandezas e medidas* ao propor o estudo das medidas e suas relações métricas possibilita a aplicação do saber proporcional na Matemática e em outras áreas do conhecimento tais como: em Ciências (densidade, grandezas e escalas), em Geografia (a construção e estudos de escalas mapas e densidade demográfica), as relações dados nos dispositivos que envolvem a informação digital, dentre outros.

O saber Proporcional, na BNCC, tem início no 5º ano de escolaridade do Ensino Fundamental e perpassa todos os anos de escolaridade seguintes, até o 9º ano, pois a proporcionalidade contribui para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e a pensar criticamente, preparando os estudantes para os desafios apresentados nos percursos de suas vidas, considerando o ensino Fundamental.

1.4 Definições Matemáticas Preliminares

Com o intuito de apresentar algumas definições preliminares sobre conceitos matemáticos, que serão discutidos na sequência do trabalho, foi elaborado um mini glossário para facilitar a leitura. As definições utilizadas nesta seção foram extraídas do livro de [LIMA et al.](#).

1.4.1 Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor de x de uma delas um valor de y bem definido da outra, de tal modo que seja cumpridas as seguintes condições:

1. Quando maior for x , maior será y . Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica em $y < y'$.
2. Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x , então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado etc. Na linguagem matemática: $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.4.2 Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor de x de uma delas um valor de y bem definido da outra, de tal modo que seja cumpridas as seguintes condições:

1. Quando maior for x , menor será y . Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica em $y' < y$.
2. Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x , então o valor correspondente de y será dividido por dois, por três etc. Na linguagem matemática: $x \mapsto y$ então $nx \mapsto \frac{y}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.4.3 Isomorfismo

De um modo geral, dois objetos são isomórficos quando ocorre a correspondência um-a-um entre os objetos matemáticos, preservando as propriedades relevantes e as operações.

1.4.4 Função

Uma função $f : A \rightarrow B$ consta de três partes: um conjunto A , chamado *o domínio da função* (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B , chamado *o contradomínio*

da função (ou o conjunto onde a função toma valores) e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado a valor que a função assume em x (ou no ponto x).

1.4.5 Intervalo I

Um intervalo é um conjunto de números reais que contém todos os números entre dois extremos, que podem ser incluídos ou não. Existem diferentes tipos de intervalos, cada um com características específicas. De acordo com os objetivos da pesquisa, temos:

Seja (a, b) um intervalo aberto qualquer em $\mathbb{R}$, isto é um intervalo onde os pontos a e b extremos não são incluídos no intervalo. Então existe um número $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$ com $b > a$.

1.4.6 função monótona

Uma função entre dois conjuntos ordenados é dita monótona quando preserva (ou inverte) a relação de ordem. Vamos descrever abaixo os casos em que uma função é dita monótona.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. De acordo com NETO (2013), uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita:

1. **crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I , tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.
2. **decrescente** se para todos $x_1 < x_2$ em I , tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.
3. **não decrescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I , tivermos $(f(x_1) \leq f(x_2))$.
4. **não crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em I , tivermos $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Em qualquer dos casos acima, a função f é **monótona** em I .

1.5 O Teorema Fundamental da Proporcionalidade

De um modo geral, duas grandezas são proporcionais quando há a relação de correspondência, de modo que, ao multiplicarmos uma delas por um número real, a outra grandeza também fica multiplicada (**proporcionalidade direta**) ou dividida (**proporcionalidade inversa**) pelo mesmo número real. Alguns fenômenos importantes são regidos por essa relação de correspondência. O **saber proporcional na Matemática** corresponde a relação de proporcionalidade direta ou inversa envolvendo grandezas que são expressas com números positivos. O Teorema Fundamental da Proporcionalidade descreve situações que podem ser modeladas pela proporcionalidade direta.

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. Segundo Lima et al. (1997), as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Devemos provar as seguintes implicações: (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2): $f(n) = f(n.1)$. De acordo com a propriedade (1), temos $f(n) = f(n.1) = nf(1)$. Como $f(1) = a$, temos que:

$$f(n) = an, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Agora, faremos a prova que a propriedade (1) vale para todo número racional.

Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$. Seja $r \in \mathbb{Q}$, tal que $r = \frac{p}{q}$. Temos que, devido à propriedade (1), $q.f(r) = f(q.r) = f(p) = f(p.1) = p.f(1) = ap \Rightarrow f(r) = a.r$

Tomaremos agora um número x irracional qualquer. Recorrendo a propriedade (1), $f(0) = 0.f(0) = 0 \therefore f(0) = 0$, , devido à função f ser monótona, $f(0) = 0 \Rightarrow f(1) > f(0) \Rightarrow a > 0$.

Dado $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Vamos supor, por absurdo, que $f(x) \neq ax$. Logo, temos apenas duas possibilidades: $f(x) < ax$ ou $f(x) > ax$. Já provamos que $a > 0$.

Se $f(x) < ax \Rightarrow \frac{f(x)}{a} < x$. Como existe um número racional em qualquer intervalo real dado, $\exists r \in \mathbb{Q}; \frac{f(x)}{a} < r < x \Rightarrow f(x) < ar < ax \Rightarrow f(x) < f(r)$. Absurdo, pois a função é crescente e $r < x \Rightarrow f(x) < f(r)$ Logo $f(x) < a$ é falso.

Se $f(x) > ax$, por construção idêntica à prova acima, temos que $f(x) > ax \Rightarrow \frac{f(x)}{a} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{f(x)}{a} > ar > ax \Rightarrow f(x) > ar \Rightarrow f(x) > f(r)$. Absurdo,

pois como $r > x \Rightarrow f(r) > f(x)$, já que a função é crescente. Logo, $f(x) > ax$ é falso.

Como ambas suposições são falsas. temos:

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Pelas definições em (1) e (2), temos que $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay \Rightarrow$

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(3)⇒(1): Supondo $x > 0$ e aplicando propriedade de função linear ($f(x+y) = f(x) + f(y)$), $f(nx) = \underbrace{f(x+x+\cdots+x)}_{n \text{ termos}} = f(x) + \underbrace{f(x+x+\cdots+x)}_{n-1 \text{ termos}}$, aplicando sucessivamente a propriedade da função linear n vezes, $f(nx) = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n \text{ termos}}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$f(nx) = nf(x), \forall n \neq 0$$

Para $x < 0$, utilizando a propriedade da função linear descrita acima, $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$, com $n > 0$. Como queríamos demonstrar.

De modo análogo, para representar a *proporcionalidade inversa*, tomando f uma função decrescente. Deste modo, ao multiplicarmos uma grandeza x por n , $f(x) = y$, fica dividida por n . então, $f(nx) = \frac{f(x)}{n}$, $\forall x, n \in \mathbb{R}^+$ quaisquer. Assim, se é uma proporcionalidade inversa, então, pela propriedade (1), $f(x) = f(1.x) = \frac{f(1)}{x}$. Fazendo $b = f(1)$, a constate da proporcionalidade inversa, temos que:

$$f(x) = \frac{b}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Para fenômenos com grandezas envolvendo a **proporcionalidade composta**, isto é, grandezas que são proporcionais a várias outras grandezas. Tomemos a grandeza z proporcional a três ou mais grandezas x, y, r etc, ou seja, $z = f(x, y, r, \dots)$. Sem perda de generalidade, segundo Lima et al. (1997), seja $k = f(1, 1, 1)$ a *constante de proporcionalidade*. Para constatar se z é diretamente ou inversamente proporcional a x , por exemplo, basta verificar que, substituindo x por $n.x$ ($n \in \mathbb{N}$), z fica substituído por $n.z$ ou $\frac{z}{n}$, respectivamente, mantendo as outras grandezas constantes.

Teorema 1.2 (Teorema da Proporcionalidade Composta). *Se uma grandeza $z = f(x, y, r)$ é diretamente proporcional a x e y e inversamente proporcional a r , então existe uma constante k tal que $z = k \cdot \frac{xy}{r}$, sendo a constante k a constante de proporcionalidade, para quaisquer valores de k, z, x, y e r , positivos.*

Demonstração:

Seja $k = f(1, 1, 1)$, o valor assumido por f , quando $x = y = r = 1$, sem perda de generalidade para mais grandezas.

$$x = 1.x, y = 1.y, r = 1.x$$

Aplicando as definições de grandezas direta e inversamente proporcionais seguindo o Teorema Fundamental da Proporcionalidade de modo sucessivo, temos:

$$z = f(x, y, r) = f(x.1, y.1, r.1) = x.f(1, y, r) = xyf(1, 1, r) = \frac{xy}{r}f(1, 1, 1) = k.\frac{xy}{r}$$

A recíproca do teorema é trivial, pois se existe uma constante k de tal forma que $z = k.\frac{xy}{r}$, é imediato, pelas definições de grandezas direta e inversamente proporcionais, que z é diretamente proporcional a x e a y e inversamente proporcional a r .

1.6 Fundamento da Metodologia de Resolução de Problemas

A resolução de problemas é um dos cerne da atividade humana. Na Matemática, como metodologia, proporciona a construção de novos conhecimentos, desenvolve o espírito crítico e o trabalho coletivo. De acordo com [Polya \(1978\)](#), um dos matemáticos mais notáveis do século XX, em seu célebre livro “A arte de resolver problemas”, a metodologia de resolução de problemas tem quatro passos básicos: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e a examinação da solução obtida. Ao longo de décadas, sua teoria influenciou diversos pesquisadores. Para [Onucchi, Alevatto e Noguti \(2021\)](#):

Considerando o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem matemática, tal Metodologia tem mostrado que a Resolução de Problemas se constitui em um contexto bastante propício à construção de conhecimento, colocando o aluno no centro das atividades de sala de aula, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor como organizador e mediador no decurso dessas atividades ([ONUCCHI; ALEVATTO; NOGUTI, 2021](#), p. 57).

A habilidade de resolução de problemas está descrita nos documentos oficiais (PCN's e BNCC). Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, a resolução de problemas deve ser o ponto de partida para o desenvolvimento das atividades matemáticas.

Os parâmetros destacam que a Matemática está presente na vida de todas as pessoas, em situações em que é preciso, por exemplo, quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões. Mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula ([BRASIL, 1997b](#)).

A BNCC enfatiza a resolução de problemas como uma habilidade fundamental a ser desenvolvida em toda escolarização básica.

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas ([BRASIL, 2018a](#), p. 264).

A metodologia de resolução de problemas pressupõe o professor como mediador do conhecimento e coloca o aluno no centro da atividade, priorizando ao desenvolvimento de conceitos e habilidades matemáticas.

Walle (2009) afirma a importância da resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática. Pare ele.

é importante compreender que a matemática deve ser ensinada por meio da Resolução de Problemas. Quer dizer, tarefas ou atividades baseadas em resolução de problemas são o veículo pelo qual se pode desenvolver o currículo desejado. A aprendizagem é um resultado do processo de Resolução de Problemas (WALLE, 2009, p. 58).

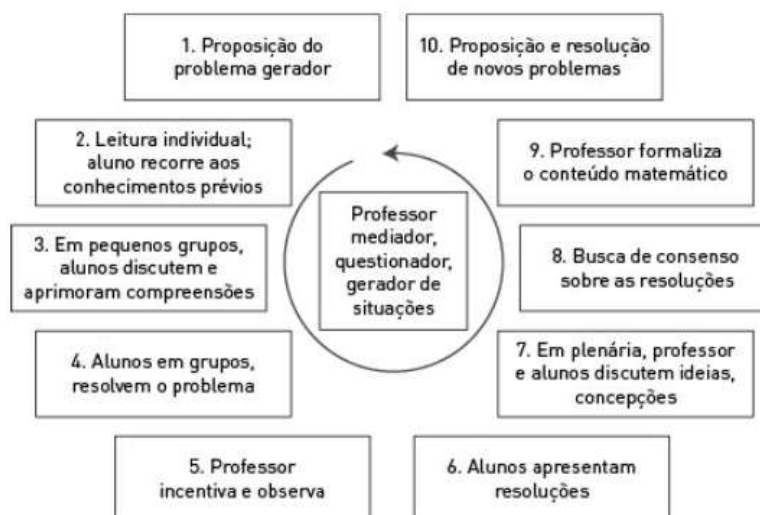
Onucchi, Alevatto e Noguti (2021), em seu livro, apresenta sugestão mais atual para a aplicação da metodologia de resolução de problemas em sala de aula, indicando as 10 (dez) etapas para a resolução de problemas: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas.

De acordo com essa sugestão e seguindo as orientações de Onucchi, Alevatto e Noguti (2021), no início, o professor constrói um problema e trabalha com os alunos, ou, em uma construção democrática, aceita um problema proposto pelos próprios alunos. Este é o problema gerador da construção e discussão dos saberes. Ao receber o problema impresso, cada aluno faz a leitura individual para a compreensão do problema proposto. Em seguida, então, os alunos reúnem-se em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão, recorrendo aos conhecimentos prévios sobre o tema e resolvem o problema. O professor deve fazer a mediação de forma a contribuir para percepção e o aprofundamento conceitual do problema pelos alunos. Nessa fase, a mediação deve proporcionar o aprimoramento da linguagem para maior expressão com clareza e coerência.

Na sexta etapa, inicia-se com os alunos apresentando as soluções para a turma. Cada grupo, apresentará suas resoluções, demonstrando habilidades necessárias na resolução do problema. Na sétima etapa, o professor e os alunos discutem as ideias e concepções independente dos resultados alcançados, cada grupo justificando suas soluções e defendendo seus posicionamentos. Na aula, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado apresentado. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas relevante à construção de conhecimento. Na nona fase, o professor formaliza o conhecimento, destacando ideias conceituais, técnicas operatórias e demonstrações matemáticas. Na última etapa, ocorre a proposição de novos problemas.

Nas situações de resolução de problemas particulares, a representação põe em funcionamento os conhecimentos que estão relacionados com uma situação precisa; ela serve para escolher e evocar esquemas úteis para alcançar objetivo fixado e iniciar procedimentos a levar a cabo; funciona então como intermediariamente entre os esquemas e a situação, a fim de precisar as suas significações (BRUN et al., 2000, p. 25).

Figura 17 – Os dez passos da metodologia de resolução de problemas



Fonte: (ONUCCHI; ALEVATTO; NOGUTI, 2021, p. 54).

A Figura 41 apresenta um resumo dos 10 passos da metodologia de resolução de problema. Neste trabalho, utilizando a Teoria dos Campos Conceituais como teoria didática e a base metodológica da pesquisa é Metodologia de Resolução de Problemas, segundo Onucchi, Alevatto e Noguti (2021).

Capítulo 2

Aspectos metodológicos

Para [Gerhardt e Souza \(2009\)](#), o termo método (do grego *methodos* significa, literalmente, “caminho para chegar a um fim”) é, portanto, o caminho em direção a um objetivo. A metodologia, por sua vez, é o estudo do método, ou seja, é o corpo de regras e procedimentos estabelecidos para realizar uma pesquisa. De um modo amplo, a metodologia corresponde ao estudo do percurso trilhado que leva à realização da pesquisa científica. Neste capítulo, são apresentados os procedimentos metodológicos presentes na construção e realização da pesquisa, descrevendo em suas seções: a caracterização da pesquisa (2.1), o lócus escolar (2.2), os sujeitos da pesquisa (2.3), as etapas da pesquisa (2.4), os instrumentos empregados para obtenção de dados (2.5) e a elaboração da sequência didática (2.6).

2.1 Caracterização da pesquisa

A pesquisa adota uma abordagem de natureza quali-quantitativa, pois busca investigar o nível de conhecimento do saber proporcional dos alunos, a partir de um estudo de caso, próprio da pesquisa qualitativa. Os aspectos quantitativos do trabalho consideram a análise numérica envolvendo conceitos estatísticos para interpretação dos dados obtidos ([GERHARDT; SOUZA, 2009](#)).

Conhecimento é um processo dinâmico e inacabado, serve como referencial para a pesquisa tanto qualitativa como quantitativa das relações sociais, como forma de busca de conhecimentos próprios das ciências exatas e experimentais. ([GERHARDT; SOUZA, 2009](#), p. 17)

De acordo com os objetivos gerais do trabalho que tem natureza descritiva, pois busca, com a metodologia de resolução de problemas, aprofundar e descrever o saber proporcional dos sujeitos da pesquisa ([GIL, 2002](#)).

Quanto aos procedimentos, foram realizadas uma pesquisa bibliográfica, por meio do estudo de livros e artigos relacionados à base conceitual do trabalho e a pesquisa

documental, que envolveu a análise do relatório do Pisa e dos Documentos oficiais PCN's, PCN's-Matemática e Base Nacional Comum Curricular ([Brasil \(1997a\)](#), [Brasil \(1997b\)](#) e [Brasil \(2018a\)](#)), ambos constam no referencial teórico da pesquisa. Podemos caracterizar o trabalho como um estudo de caso, pois envolve os alunos da Escola Municipal Conselheiro Josino visando estudar o saber proporcional na turma de 9º ano de escolarização do Ensino Fundamental ([GERHARDT; SOUZA, 2009](#)).

2.2 O lócus escolar

A palavra “lócus” deriva do latim e significa literalmente “lugar”, “posição” ou “local”. O lócus escolar é o espaço de produção e circulação dos saberes e conhecimentos acumulados historicamente. A presente pesquisa foi desenvolvida na Escola Municipal Conselheiro Josino, localizada na rua Porfírio Mothe, sem número, em Conselheiro Josino, distrito do Município de Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro. O pesquisador é servidor público, exercendo a função de Professor de Matemática, desde o ano de 2008, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, na referida escola. No ano da pesquisa, desempenha a função de professor regente de Matemática das turmas analisadas.

A Escola Municipal Conselheiro Josino, fundada em 20 de maio de 1990, oferece as seguintes etapas de ensino: Educação Infantil, Ensino Fundamental (Anos iniciais e Anos Finais), funcionando em dois turnos, manhã e tarde, apresentando um total 489 alunos matriculados, conforme dados coletados no ano de 2023, distribuídos em 14 turmas. A estrutura física da escola é composta de salas de aula equipadas com quadro branco, cadeiras universitárias de estudantes, mesa e cadeira do professor e ventiladores. A escola possui 3 banheiros, sendo um banheiro com acessibilidade, 14 salas de aula, uma quadra esportiva não coberta, uma sala de laboratório de Ciências; sala de professor; Sala da Direção Escolar; Sala da Secretaria; Sala de Recursos; Sala de Informática e Sala de Orientação Pedagógica.

2.3 Os sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi realizada na turma de 9º ano do Ensino fundamental denominadas neste estudo de turma A, num total de 16 alunos frequentando, no turno vespertino, com faixa etária de 14 a 16 anos. Os alunos participantes serão denominados de $A_1, A_2, \dots, A_{16}$, respectivamente, em ordem numérica. Todos os alunos participaram com grande alegria e entusiasmo, mesmo em momentos de picos de elevadas temperaturas nas salas de aula em dezembro de 2023, devido à onda de calor.

Os responsáveis legais dos estudantes permitiram a participação de todos os alunos da turma. Tal fato contribui imensamente para a realização da pesquisa. A dedicação dos

estudantes às atividades da sequência didática proposta foi exemplar, munidos do espírito criativo e comprometimento com as tarefas, o que possibilitou uma cooperação ampla, por meio da inteligência emocional dos sujeitos da pesquisa. A composição das turmas é bastante heterogênea, como alunos do meio rural e urbano em Conselheiro Josino. Os estudantes são filhos e filhas de comerciantes locais, trabalhadores rurais, funcionários públicos, trabalhadores da construção civil e outras atividades de serviço.

É importante destacar que a aplicação da pesquisa teve início em novembro de 2023, em um cenário de pós-pandemia, sendo este ano o primeiro ano com ensino presencial ao término da Pandemia de COVID-19. Os alunos estavam sem aulas presenciais desde a decretação da pandemia, em 2020. O resultado do afastamento presencial da escola ocasionou defasagens consideráveis nas competências e habilidades matemáticas.

2.4 As etapas da pesquisa

Com vistas à concretização do objetivo geral da pesquisa, na primeira fase da pesquisa, destacam-se:

- Seleção bibliográfica (artigos, livros, legislações, orientações curriculares, documentos, estatísticas) sobre a Metodologia de Resolução de Problemas, o Teorema da Proporcionalidade e o saber proporcional;
- Organização dos conceitos para análise dos dados;
- Realização da pesquisa exploratória (ambientação com a escola, pesquisa e seleção da amostra: alunos da turma do 9º ano do Ensino Fundamental e aplicação do pré-teste para identificar os conhecimentos do saber proporcional);

Para a segunda fase, buscou-se o cumprimento das seguintes etapas:

- Elaboração da sequência didática sobre a Metodologia de Resolução de Problemas aplicada ao Teorema da Proporcionalidade e ao Saber Proporcional;
- Aplicação das atividades da sequência didática;
- Sistematização dos dados e redação acadêmica.

A terceira e última fase do projeto concentra-se em:

- Discussão dos conceitos selecionados e que dão sustentação às reflexões, orientando teórica e empiricamente a pesquisa;
- Apresentação da dissertação;

- Retorno à comunidade escolar dos resultados e colaborações da pesquisa para o aprimoramento do papel social da escola e para o processo e ensino-aprendizagem da Matemática.

2.5 Instrumentos empregados para coleta de dados

A coleta de dados é a etapa fundamental da pesquisa, portanto o pesquisador deverá coletar dados com objetividade para descrever a realidade qual se deseja compreendê-la. De acordo com [GERHARDT; SOUZA](#), a coleta de dados é o instrumental técnico elaborado pelo pesquisador com os requisitos de validade, confiabilidade e precisão.

Em conformidade dos objetos propostos neste trabalho,

os recursos de coleta de dados sobre o desempenho do estudante devem permitir a possibilidade de conhecer seu desempenho em torno dos variados conteúdos com os quais se está trabalhando, assim como das variadas habilidades construídas através de cuidados com o educando ao ensinar-aprender. ([LUCKESI, 2022](#), p. 143)

Os instrumentos de coleta de dados, conforme os objetivos da pesquisa são o pré-teste, a aplicação da sequência didática e o pós-teste. Esses instrumentos visam otimizar a coleta de dados e, com isso, acredita-se, aumentar a validade dos resultados obtidos. Na sequência são descritos teoricamente os instrumentos de coleta de dados utilizados na pesquisa, que estão expressos no apêndice deste trabalho.

Durante toda a etapa da pesquisa relacionada ao pré-teste, a aplicação da sequência didática e o pós-teste foi utilizada a observação participante do pesquisador junto aos estudantes, pois segundo [LUCKESI](#), a participação participante permite, durante a mediação do conhecimento do saber proporcional, o pesquisador ficou muito próximo aos alunos.

Desse modo, na realização das propostas pedagógicas, nas discussões dos conceitos na resolução das atividades, a observação participante do pesquisador-professor possibilitou uma maior compreensão das dificuldades enfrentadas pelos educandos.

Inicialmente, a partir da pesquisa documental realizada nos Documentos Oficiais sobre o Saber Proporcional nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Posteriormente, conversei com a Orientadora Pedagógica para apresentar a pesquisa, buscando, assim, informações a respeito dos anos de escolaridades anteriormente cursados pelos alunos. Como os antigos professores não lecionavam mais na escola, a Orientadora me auxiliou com informações pedagógicas importantes, como habilidades matemáticas não alcançadas pelos alunos e que deveriam ser trabalhadas por mim, o professor-pesquisador.

- **Pré-teste:** Foi formulado um Pré-teste ([B.1](#)) com 5 questões discursivas, elaboradas pelo autor, com função diagnóstica dos conhecimentos prévios envolvendo o saber

proporcional dos sujeitos da pesquisa adquiridos ao longo da sua trajetória escolar, pois desde o 5º ano do Ensino Fundamental, o estudo da proporcionalidade está presente, conforme BRASIL.

A função diagnóstica permite identificar progressos e dificuldades dos alunos e a atuação do professor que, por sua determinam modificações o ensino para melhor cumprir as exigências dos objetos.(...)No início verificam-se as condições prévias dos alunos de modo a prepará-los para o estudo da matéria nova (LIBÂNEO, 2017, p. 197).

Com a análise do Pré-teste, foi construída a sequência didática por meio, conforme ZANELLA; BARROS, do planejamento de situações problemas considerando o conhecimento prévio dos alunos.

- **Sequência Didática:** A sequência didática (2.6) elaborada tem como proposta utilizar a Metodologia de Resolução de Problemas aplicada ao Saber Proporcional com o objetivo de concretizar o raciocínio proporcional em diversas situações do cotidiano dos alunos.

Com a proposta elaborada pelo autor na sequência didática busca-se superar a visão abstrata da Matemática, ressignificando os conceitos do saber proporcional, de acordo com o Campo Conceitual da Estrutura Multiplicativa proposto por VERGNAUD. Cumpre destacar que o pesquisador-professor interveio em diversas ocasiões sempre que foi solicitado pelos estudantes.

- **Pós-teste:** Após a aplicação da sequência didática, foi elaborado o Pós-teste (D.1) contendo 5 questões discursivas, buscando avaliar o aprendizado dos objetos de conhecimento propostos na sequência didática e verificar os avanços alcançados. Nesta última etapa da coleta de dados, por ter uma função de controle, não houve interferência do pesquisador-professor. Conforme LIBÂNEO, a função de controle possibilita o diagnóstico da sequência didática.

Na tabela (2.5) são apresentadas as datas de aplicações dos instrumentos de coleta de dados, bem como o número de participantes na pesquisa.

2.6 A elaboração da sequência didática

Na busca de contribuir para a melhora do ensino de Matemática, a sequência didática foi elaborada pelo pesquisador-professor, com o intuito de investigar a Metodologia de Resolução de Problemas aplicada ao Saber proporcional, um dos principais conceitos da Matemática no Ensino Fundamental. A sequência foi planejada para apresentar uma progressiva complexidade nos problemas propostos, visando ao desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas.

Cronograma de atividades		
Atividades	Números de alunos	Data de aplicação
Pré-teste	28	09/11/2023
Sequência didática	28	16/11/2023 a 17/11/2023 23/11/2023 a 24/11/2023 01/12/2023
Pós-Teste	28	07/12/2023

Tabela 1 – Fonte: Dado da pesquisa elaborado pelo autor.

Nas atividades, foram revisados os conceitos matemáticos de razão, proporção, grandezas diretamente e inversamente proporcionais, bem como casos de não proporcionalidade, por meio de situações concretas do cotidiano. Dessa forma, buscou-se possibilitar a internalização dos conceitos de proporcionalidade para a tomada de decisões nas situações reais, possibilitando superar a visão abstrata da Matemática. A sequência didática proposta inclui problemas envolvendo as relações diretamente proporcionais, inversamente proporcionais, além das atividades em grupo para discutir a aplicação desses conceitos.

A sequência didática foi aplicada na turma do 9º ano do Ensino Fundamental. De acordo com a matriz curricular do Município de Campos dos Goytacazes, cada turma possuía cinco horas-aula por semana da área de conhecimento Matemática com duração de 1h para cada hora-aula, sendo duas na quinta-feira e três na sexta-feira. Durante toda a sequência didática, foi incentivada a pesquisa dos temas propostos em cada atividade, bem como a troca de conhecimentos e experiências entre os estudantes.

Os anos de escolaridade, unidades temáticas, objetos de conhecimentos e habilidades que serão mencionados nas atividades a seguir constam na BNCC ([BRASIL](#)).

• Atividades sobre grandezas diretamente proporcionais C.1

Atividade 1
Título: Situações-problemas: grandezas diretamente proporcionais
Duração da atividade: 5h

O **problema 1** foi composto por dois itens com o objetivo de verificar o conceito de razão por meio da observação e contagem de alunos na turma, assim desde o início, os alunos assumiram uma postura ativa diante dos problemas propostos, pois o conceito de razão é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

A situação descrita no problema envolve saberes do 6º ano do Ensino Fundamental, da unidade temática *Álgebra* que tem como objeto de conhecimento os problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo. As habilidades incluem resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Figura 18 – Problema 1

Para desenvolver o raciocínio proporcional, é fundamental entender o conceito de **razão** como uma comparação multiplicativa entre duas grandezas.

- 1) Vamos discutir a razão por meio de algumas situações:
 - a) Qual a razão entre o número de meninas e o número total de estudantes presentes em sua turma?
 - b) Qual a razão entre o número de meninas e meninos na sua turma?

Fonte: Dados da pesquisa elaborados pelo autor.

O **problema 2** envolve o mesmo objeto de conhecimento e habilidade abordados anteriormente, mas com o objetivo de desenvolver a capacidade de representar escalas no papel milimétrico. Tal habilidade será necessária para a representação gráfica das relações direta e inversamente proporcionais.

Figura 19 – Problema 2

- 2) Aproveite o papel milimetrado e desenhe um segmento $AB=4\text{cm}$ e um outro segmento $CD=9\text{cm}$. Qual a razão entre:
 - a) AB e CD :
 - b) CD e AB :

Fonte: Dados da pesquisa elaborados pelo autor.

Tal habilidade será necessária para a representação gráfica das relações direta e inversamente proporcionais.

Os **problemas 3 e 4** foram propostos com o objetivo de ampliar o conceito de razão por meio dos conhecimentos do 6º ano nas unidades temáticas *Probabilidade e Estatística* com o cálculo de probabilidades, como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Também foram abordados os conteúdos de *Números*, com o cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”, desenvolvendo as habilidades de calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por números racionais (EF06MA30), como também a habilidade de expressar um resultado como porcentagem (EF06MA13), respectivamente.

Figura 20 – Problemas 3 e 4

Podemos expressar o conceito de probabilidade e porcentagem como razão por exemplo.

Atenção: *As probabilidades são razões entre um espaço de amostra específica e o espaço total da amostra, para eventos equiprováveis .*

3) Agora, calcule a probabilidade de uma menina ser sorteada na turma.

Porcentagem é a razão entre a parte e o todo.

4) Calcule a porcentagem entre o número de meninas e meninos na turma.

Fonte: Dados da pesquisa elaborados pelo autor.

Com o conceito ampliado de razão, foi solicitado aos alunos que formassem grupos de trabalho e fizessem uma pesquisa com seus celulares sobre a razão áurea, de acordo com a Figura 21. Após cada descoberta individual, que eles deveriam compartilhar as informações e refletissem criticamente sobre suas resultados.

Figura 21 – Pesquisa

- Faça uma pesquisa sobre a razão áurea (**aproveite a dica**) e discuta com os colegas de grupo as informações mais interessantes.

Fonte: Dado da pesquisa elaborado pelo autor.

O **problema 5** envolve os saberes do 9º ano de escolaridade sobre *Grandezas e Medidas* por meio do objeto de conhecimento das unidades de medidas utilizadas na informática, abordando a habilidade de compreender a capacidade de armazenamento digital (EF09MA18). Após a primeira análise dos alunos sobre o problema, é proposta a construção gráfica que relaciona duas grandezas. A partir da construção gráfica no papel milimetrado, o professor-pesquisados apresenta uma definição de grandezas diretamente proporcionais e mostra a linearidade gráfica representante deste tipo de problema que são modelados pela relação diretamente proporcional.

Figura 22 – Problema 5

Você vai viajar nas suas férias de verão e vai tirar muitas fotos com seu celular. Quantas fotos a memória do seu aparelho celular é capaz de armazenar?

Dados do aparelho (em Gigabytes):

- Memória total: **64GB**
- Memória ocupada pelos aplicativos e dados do sistema: **62,2GB**

5) Com a calculadora do celular, calcule quantos GB você tem disponível para armazenamento de fotografias

Vamos construir uma tabela para organização de dados. Você deve utilizar a seguinte informação: uma fotografia tem, em média, **2,6MB (Megabytes)**. Complete a tabela abaixo e, com o papel milimetrado, desenhe o gráfico que relaciona o número de fotografias com o total de MB disponíveis.

Número de fotografias	1	2	3	4	5	6	7
MB	2,6						

Anote: Analisando os dados, podemos definir que *duas grandezas são diretamente proporcionais quando, ao multiplicar uma delas por um determinado número, a outra também fica multiplicada pelo mesmo número.*

Fonte: Dados da pesquisa elaborados pelo autor.

Na análise final do problema, foram envolvidos os saberes do 8º ano de escolaridade presentes em *Álgebra* que tem como objeto de conhecimento a variação diretamente proporcional e a habilidade de identificar a natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcional e sua representação no plano cartesiano (EF08MA12).

No **problema 6**, foram enfatizados os saberes que envolvem os casos de proporcionalidade direta e não proporcionalidade por meio de representações geométricas elaboradas pelos alunos, no papel milimetrado, com as representações de retângulos envolvendo os conceitos de lados e áreas.

Figura 23 – Problema 6

6) Para melhor compreensão sobre a **proporcionalidade direta**, desenhe na malha quadriculada um retângulo cujos lados têm medida da base igual a 5cm e medida da altura igual a 8cm. Novamente, desenhe um retângulo, no qual cada lado tenha a medida do dobro do lado anterior. Os lados são proporcionais? E suas áreas?

Fonte: Dado da pesquisa elaborado pelo autor.

No problema acima, envolve o saber proporcional do 6º ano de escolaridade em *Grandezas e Medidas* com o objeto de conhecimento, o perímetro do retângulo como grandeza proporcional à medida do lado. A habilidade abordada é a de analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um retângulo ao se ampliarem ou reduzirem, de forma proporcional, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, enquanto a área não segue a mesma relação (EF06MA29).

Os **problemas 7 e 8** são propostos com o objetivo de aplicar o saber proporcional, nas relações diretamente proporcionais em situações cotidianas, como a compra de mercadorias e as promoções do comércio.

Figura 24 – Problemas 7 e 8

7) Além de suas fotos, você também comprará alguns itens. Suponha que você comprou 4 itens por R\$ 15,00. Se você quiser comprar 20 itens, quanto pagará por eles? Depois, escreva como você pensou na resolução dessa questão.

8) Está chegando a *Black Friday* e você vai aproveitar para fazer mais uma compra. Quanto você vai gastar comprando cinco camisas? Observe as informações e explique como você a resolveu.

Duas camisas	5 camisas
R\$ 100,00	n reais

Fonte: Dados da pesquisa elaborados pelo autor.

Esses problemas envolvem a Matriz Curricular do 9º ano de escolaridade em *Álgebra* com o objeto de conhecimento grandezas diretamente proporcionais com a habilidade de resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas (EF09MA08-adaptada).

O **problema 9** retorna os saberes iniciais construídos pelos educandos na resolução de problemas nesta atividade.

Figura 25 – Problema 9

9) Você seria capaz de responder, neste momento, a indagação inicial de seu problema: quantas fotos novas cabem em seu celular sabendo que 1024 MB equivalem a 1 GB?

Fonte: Fonte: Dado da pesquisa adaptado pelo autor.

São requisitados os conhecimentos do 7º ano de escolaridade em *Álgebra* com o objeto de conhecimento que envolvem problemas com grandezas diretamente proporcionais e com a habilidade de resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta (EF07MA17-adaptada).

O **problema 10** propõe as discussões envolvendo o conceito de nuvem e as capacidades de armazenamento de informações digitais além de refletir sobre a operação gigantesca das empresas para o armazenamento da informação digital produzida. A unidade temática do problema encontra-se em *Grandezas e Medidas*, no 9º ano de escolaridade, com o objeto de conhecimento unidades relacionado às medida utilizadas na informática com a habilidade de reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes, como a capacidade de armazenamento de computadores, entre outros (EF09MA18-adaptada).

Propõe, ainda, uma análise de comportamentos na sociedade atual, despertando o pensamento crítico que envolve os custos e benefícios desta era digital. O objeto de conhecimento é *Grandezas e Medidas* e a habilidade: reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes, como a capacidade de armazenamento de computadores, entre outros (EF09MA18-adaptada).

Figura 26 – Problema 10

Claro que você vai argumentar que pode salvar as fotos na “nuvem”. Para o ano de 2025, alguns estudos indicam que a quantidade total de dados criados, capturados, copiados e consumidos no mundo cheguem a chegar a 175ZB.

- 1 byte (B) = 8 bits
- 1 kilobyte (KB) = 1.024 bytes
- 1 megabyte (MB) = 1.024 kilobytes
- 1 gigabyte (GB) = 1.024 megabytes
- 1 terabyte (TB) = 1.024 gigabytes
- 1 petabyte (PB) = 1.024 terabytes
- 1 exabyte (EB) = 1.024 petabytes
- 1 zettabyte (ZB) = 1.024 exabytes
- 1 yottabyte (YB) = 1.024 zettabytes

10) De acordo com algumas fontes, a capacidade de armazenamento do Google é de 100 de gigabytes. Para armazenar todas as informações, quantos HDs, com 1 terabytes, são necessários aproximadamente?

Pense nisso: Se todas as informações contidas nos data center do mundo inteiro fossem impressas em papel, seriam necessárias 14 trilhões de árvores. A quantidade de papel produzido daria para embrulhar a Terra 7 vezes.

Fonte: Fonte: Dado da pesquisa adaptado pelo autor.

• **Atividades sobre grandezas inversamente proporcionais C.2**

Atividade 2

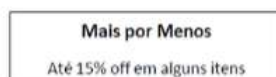
Titulo: **Situações-problemas: descontos e grandezas inversamente proporcionais**

Duração da atividade: 5h

Os **problemas 1, 2 e 3** apresentam uma realidade comum de pagamento à vista envolvendo desconto. Assim, valorizando a resolução deste problema ativamente pelos alunos, busca-se, com base nos conhecimentos prévios, demonstrar as relações que envolvem a proporcionalidade inversa, pois com o aumento da taxa de desconto, ocorre a diminuição do valor a pagar.

Figura 27 – Problema 1

Uma grande loja de varejo faz a seguinte promoção:



- a) Um produto A tem um preço total de R\$ 23,50. Sabendo que este produto terá um desconto de 10%, calcule quanto custará na promoção.
- b) Nesta mesma loja, um celular de Modelo B tem preço de mercado igual a R\$ 1099,00. Com do desconto de 14%, quanto você pagará pelo produto na promoção?

Agora, refaça os itens acima com o valor de desconto máximo permitido de 15%. Observe as modificações no valor a pagar. Reflita sobre essa nova situação.

Fonte: Fonte: Dado da pesquisa adaptado pelo autor.

Figura 28 – Problemas 2 e 3

2) O novo celular de José custou R\$ 830,00. Ele deu um sinal de R\$ 250,00.

Determine a porcentagem do valor de venda que foi o sinal de Jose.

3) Em 1950, a população rural brasileira era de 33.161.506 habitantes. Vinte anos depois, houve uma redução de 44% de habitantes. Quantas habitantes viviam em áreas rurais em 1970?

Fonte: Fonte: Dados da pesquisa adaptados pelo autor.

Os problemas envolvem o 7º ano de escolaridade do Ensino Fundamental, cujo objeto de conhecimento é o cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer o uso da “regra de três” e a habilidade de resolver problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos como educação financeira, entre outros

(EF06MA13).

Os **problema 4 e 5** abordam o padrão de uma variação inversamente proporcional. Desse modo, requerem do estudante a análise desse comportamento entre as grandezas. Após a compreensão dessa regularidade na variação, é solicitado o cálculo de um valor específico de uma determinada grandeza e a construção gráfica entre as grandezas, utilizando o papel milimetrado.

Figura 29 – Problemas 4 e 5

4) Observe a tabela abaixo:

x	1	2	3	4	5	6
y	200	100	50	25	12,50	6,25

a) Você observa algum padrão (regularidade) entre as variações das grandezas?
Se sim, como elas evoluem?

b) Se $x = 7$, qual valor o valor do y ?

Atenção: *Dois grandezas x e y são inversamente proporcionais quando ao multiplicar uma delas por um número qualquer, a outra fica dividida por esse mesmo número.*

5) Com o papel milimetrado, tente fazer um esboço do gráfico com os valores da questão acima.

Fonte: Fonte: Dados da pesquisa adaptados pelo autor.

Assim, após a discussão e a realização da atividade, o professor-pesquisador conceitua, por meio de uma exposição teórica, a relação entre grandezas inversamente proporcionais. O saber proporcional presente na Matriz Curricular do 8º ano de escolaridade, tem como objeto de conhecimento a variação entre as grandezas inversamente proporcionais com a habilidade de identificar a natureza dessa variação expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano (EF08MA12).

Os **problemas 6, 7 e 8** propostos consideram situações clássicas sobre as aplicações das relações inversamente proporcionais: o problema das torneiras, o problema da velocidade média e o tempo necessário para realizar o mesmo percurso, além do caso de mais trabalhadores para executar uma determinada tarefa mais rapidamente. Esses problemas têm como objetivo permitir que os alunos compreendam a relação inversamente proporcional por parte dos alunos.

O objeto de conhecimento dos problemas são as grandezas inversamente proporcionais, relativos ao 9º ano do Ensino Fundamental, com a habilidade de resolver problemas que envolvem as relações de proporcionalidade inversamente proporcionais (EF09MA08- adaptada).

Figura 30 – Problemas 6, 7 e 8

- 6) Um exemplo clássico da relação inversamente proporcional é o “problema das torneiras”. Imagine que você tem um tanque com duas torneiras. Com uma só torneira, você enche o tanque em 10 minutos, a uma vazão baixa. Se você abrir as duas torneiras com a mesma vazão, quanto tempo levará para encher o tanque? Imagine a situação antes de escrever qualquer estratégia de resolução.
- 7) Para realizar determinado percurso, você dirige a uma velocidade média de 60 km/h, gastando 6 horas para chegar ao seu destino. Caso a velocidade média seja alterada para 90 km/h, quanto tempo você gastaria para chegar ao mesmo destino?
- 8) *Juntos somos mais fortes!!!!* Em uma editora de livros, com colaboradores igualmente produtivos, constatou-se que 10 digitadores demorariam 30 dias para terminar a digitação de uma grande coleção de livros. Caso a editora precise reduzir o tempo para 2 semanas, quantos digitadores deverão fazer parte da equipe?

Fonte: Fonte: Dados da pesquisa adaptados pelo autor.

• Trabalho em Grupo C.3

Atividade 3

Título: **Trabalho em Grupo**

Duração da aula: 3h

O trabalho em grupo visa o aprofundamento das discussões teóricas sobre o Saber Proporcional por meio da participação efetiva dos alunos na resolução dos problemas, possibilitando o desenvolvimento das habilidades do trabalho coletivo. As múltiplas visões do conhecimento de cada membro do grupo, próprias de cada subjetividade e a capacidade de lidar com opiniões divergentes contribuem para a resolução coletiva dos problemas propostos e para a progressividade dos conceitos que discorrem sobre a proporcionalidade. O **problema 1** apresentou um pequeno passeio pela História da Matemática, por meio de

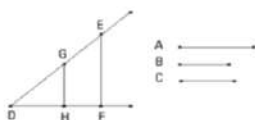
um breve relato sobre a grande importância da Biblioteca de Alexandria.

Um passeio pela história

A Biblioteca de Alexandria foi uma das maiores e mais importantes do mundo antigo e, anexo a ela, havia um Centro de Pesquisa. Nela, existiam obras espetaculares, que deram início a fabulosos estudos. Alguns nomes que pesquisaram nessa biblioteca foram Arquimedes (ali ele criou o “Parafuso de Arquimedes”), Eratóstenes de Cirene (provou que a Terra não era plana e calculou com grande precisão a circunferência da Terra), Euclides (concluiu sua obra mais importante), Aristarco de Samos (concluiu que os corpos orbitavam em torno do Sol, propondo o modelo heliocêntrico), dentre muito outros. Quando a Biblioteca de Alexandria foi destruída, imagine quanto conhecimento foi perdido.

Euclides (300 anos a. C), em sua obra “Os elementos”, no livro VI, apresentou a Proposição XII.

Sejam as três retas dadas A, B, C; é preciso, então, achar uma quarta em proporção com as A, B, C. Fiquem postas as duas retas DE, DF, contendo um ângulo [ao acaso], o sob EDF; e fiquem postas, por um lado, a DG igual à A, e, por outro lado, a GE igual à B, e, ainda, a DH igual à C; e, tendo sido ligada a HG, fique traçada pelo E a EF paralela a ela. Como, de fato, a GH foi traçada paralela a um lado, o EF, do triângulo DEF, portanto, como a DG está para a GE, assim a DH para a HF. Mas, por um lado, a DG é igual à A, e, por outro lado, a GE, à B, e a DH, à C; portanto, como a A está para a B, assim a C para a HF. Portanto, dadas as três retas A, B, C, foi achada uma quarta, a HF, em proporção; o que era preciso fazer (Fragmento da obra “Os Elementos” de Euclides, tradução, 2009).



Ou seja,

$$\frac{DG}{GE} = \frac{DH}{HF}$$

1) Usando a relação proporcional acima, determine a quarta proporcional (HF, em centímetros), sabendo que DG= 6cm, GE= 3cm e DH=4cm.

Figura 31 – Apresenta um pequeno passeio pela História da Matemática

Fonte: Dado da pesquisa adaptado pelo autor.

Assim, foi elaborado um problema baseado na obra de EUCLIDES, em “Os elementos”, no livro VI, que apresenta a Proposição XII na qual é proposto o cálculo da quarta proporcional. Essa proposição permite aos alunos reconhecerem a História da Matemática e contribui para ressignificar o conceito da aplicação do saber proporcional.

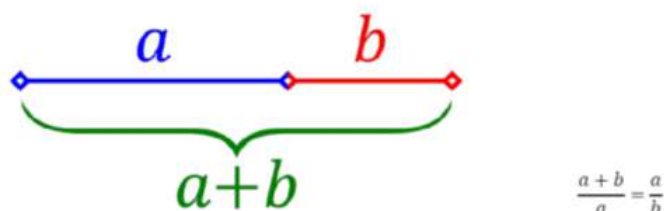
O **problema 2** apresentou o conceito da razão áurea, tão especial na Matemática quanto a natureza. O problema relacionou o conceito de razão com a resolução de equação de 2º grau que modela a situação, para determinar o número de ouro, demonstrando como os saberes podem se relacionar na construção do conhecimento humano.

Figura 32 – A razão áurea e o número de ouro

2) **A razão Áurea:** o notável escultor grego de nome Fídias usou o número áureo para esculpir suas esculturas de Zeus de Olímpia e de Atenas Partenos. Ele também colaborou na construção e decoração do Parthenon. A Razão Áurea tem vários nomes: *número de ouro*, *proporção divina*, são alguns deles.

- a) Uma das formas mais comuns de apresentar a Razão Áurea é pela divisão de uma linha em dois segmentos, em que a razão entre o comprimento total da linha e o comprimento do maior segmento seja igual à razão entre o comprimento do maior segmento e o comprimento do menor segmento.

Para realizar este cálculo, a figura abaixo nos auxiliará.



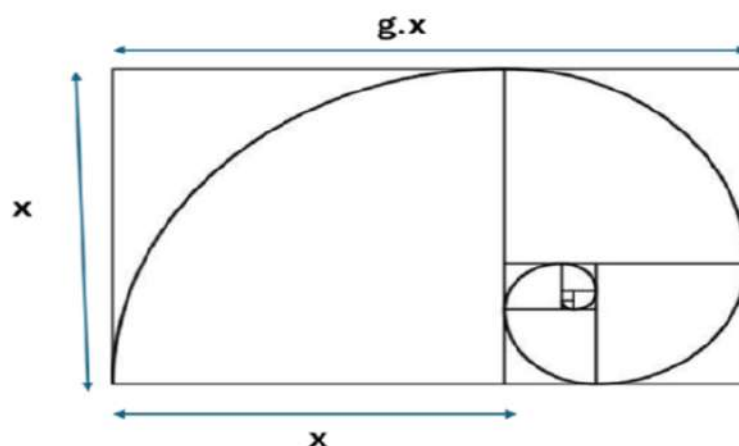
Chamando $\frac{a}{b} = \phi$, determine o valor de ϕ (número de ouro). Para isso, faça: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ e calcule a raiz positiva da equação do 2º grau. O número de ouro ϕ é irracional.

Fonte: Fonte: Dado da pesquisa adaptado pelo autor.

Na resolução do **problema 3** foram orientadas pesquisas sobre a razão áurea na arquitetura, bem como em alguns fenômenos da natureza, com o objetivo de relacionar padrões e suscitar a curiosidade para o estudo da Matemática de forma mais concreta.

Figura 33 – A espiral áurea

3) Espiral Áurea



O retângulo da figura acima tem lados $g \cdot x$ e x e é denominado retângulo de ouro, pois ao montar o quadrado de lado x , o retângulo restante terá a forma do primeiro e o processo poderá se repetir infinitas vezes. Assim, podemos construir a seguinte relação de semelhança:

$$\frac{x}{g \cdot x} = \frac{g \cdot x - x}{x} \Rightarrow \frac{1}{g} = g - 1$$

A curva é conhecida como espiral áurea. Responda:

- O retângulo áureo se ajusta as fachadas de diversas construções e pinturas antigas. Cite algumas destas construções.
- Também, na natureza, encontramos a espiral áurea. Cite em quais fenômenos podemos encontrar o padrão da espiral áurea.

Fonte: Fonte: Dados da pesquisa adaptados pelo autor.

O **problema 4** busca ampliar o conceito do saber proporcional com a sua aplicação na teoria do Direito.

Figura 34 – O Princípio da Proporcionalidade no Direito

4) No Direito, o **Princípio da Proporcionalidade** determina que a pena não pode ser superior ao grau de responsabilidade pela prática do fato. Como podemos notar, o Supremo Tribunal Federal (STF), fundamenta alguns julgados por meio desse princípio. Suponha que o Princípio da Proporcionalidade seja adotado em um país hipotético. Avalie, com seu saber proporcional, se são justas as seguintes penas. Se não, refaça a penalidade de acordo com o seu parecer.

LESÃO CORPORAL GRAVÍSSIMA Se resulta: - I – Incapacidade permanente para o trabalho; - II – enfermidade incurável; - III perda ou inutilização do membro, sentido ou função; - IV – deformidade permanente; - V – aborto; Pena – reclusão, de dois a oito anos.	ROUBO Subtrair coisa móvel alheia, para si ou para outrem, mediante grave ameaça ou violência a pessoa, ou depois de havê-la, por qualquer meio, reduzido à impossibilidade de resistência: Pena - reclusão, de quatro a dez anos, e multa.
--	--

Fonte: Fonte: Dado da pesquisa elaborado pelo autor.

O problema propôs um debate sobre proporcionalidade das penas, buscando a aplicação do saber proporcional na busca pela justiça. Nele, foi apresentada a possibilidade da discussão, envolvendo a proporcionalidade, a respeito dos valores envolvidos na construção de uma sociedade mais justa, ao comparar as penas aplicadas aos crimes sobre a propriedade e aos crimes quanto a integridade humana.

As atividades propostas na sequência didática visaram conceituar o saber proporcional, considerando sua aplicabilidade nas diversas situações cotidianas.

Capítulo 3

Aplicação da Metodologia

Neste capítulo, são apresentadas as aplicações da Metodologia de Resolução de Problemas, de acordo com as seguintes seções: aplicação do pré-teste (B.1); aplicação da atividade sobre grandezas diretamente proporcionais (C.1); aplicação da atividade sobre grandezas inversamente proporcionais (C.2); aplicação do trabalho em grupo (C.3) e a aplicação do pós-teste (D.1).

3.1 Aplicação do Pré-teste

A aplicação do pré-teste (avaliação diagnóstica) (B.1) buscou analisar, de acordo com a Metodologia de Resolução de Problemas, o saber proporcional que os alunos do 9º ano de escolaridade do Ensino Fundamental, sujeitos da pesquisa, desenvolveram no decorrer de sua escolarização, identificando os teoremas em ação construídos pelos discentes, isto é, os teoremas que, de fato, norteiam e estruturam as ações e resoluções de problemas que os alunos aplicam, de acordo com Vergnaud (1982).

Os conhecimentos prévios dos alunos (aqueles que os estudantes trazem consigo antes do professor explorar formalmente um determinado conceito na sala de aula), aparecem durante a resolução de problemas, ou seja, têm relação com os conhecimentos implícitos sobre determinado conceito ou objeto matemático, pois significa que podem resolver um problema proposto, sem, entretanto, saber explicar como se obteve tal resultado (ZANELLA; BARROS, 2014, p. 14).

Antes da aplicação do pré-teste, o professor-pesquisador recolheu algumas autorizações dos responsáveis legais que não puderam comparecer à reunião em que foi explicada a intenção da pesquisa, que teria como público-alvo os alunos matriculados no 9º de escolaridade do Ensino Fundamental. Ao entrar na sala de aula para a realização do pré-teste, foi observado pelo professor-pesquisador uma grande curiosidade dos alunos, devido à importância de sua participação efetiva na pesquisa. Houve, inicialmente, uma

certa inquietação por parte da maioria dos alunos das duas turmas, pois foi a primeira experiência deles na participação de uma pesquisa acadêmica.

Figura 35 – Aplicação do pré-teste.



Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

No início da aplicação do pré-teste, após a observação inicial do professor-pesquisador, foi feita uma conversa com a turma, de forma a tranquilizar os alunos na realização do pré-teste. O professor-pesquisador, em uma conversa descontraída com a turma, enfatizou que o pré-teste não tinha a intenção de atribuir uma nota e que deveria ser realizado de forma bem harmoniosa, tranquila e, ao mesmo tempo, séria, de forma que os próprios alunos pudessem perceber seus conhecimentos sobre o tema proporcionalidade construído durante suas jornadas escolares. Os alunos afirmaram que iriam participar da pesquisa com muita responsabilidade, se dedicando na realização das tarefas, o que deixou o professor-pesquisador muito satisfeito com a promessa de comprometimento no desenvolvimento dessas etapas tão importantes da pesquisa.

A partir da aprendizagens conceituais verificadas no pré-teste, realizado no dia 09 de novembro de 2023, com a participação de 16 alunos da *turma A*, foi possível identificar os invariantes operatórios do campo conceitual da estrutura multiplicativa, de acordo com Vergnaud (2013), em que está inserida a proporcionalidade. Isso possibilitou a explicitação das dificuldades apresentadas pelos alunos, com o objetivo de ressignificar o conceito de proporcionalidade em sentido amplo e aplicado a situações concretas do cotidiano. O pré-teste foi elaborado contendo 5 questões discursivas, priorizando situações que fazem parte do cotidiano dos alunos, o que possibilitou identificar os teoremas em ação construídos na resolução de cada questão. O tempo total combinado entre o professor e os alunos para a realização dessa atividade foi de 2 horas. O pesquisador aplicou o pré-teste e, na ocasião, não interferiu no desenvolvimento da atividade, respeitando os conhecimentos prévios que os alunos já tinham sobre o assunto.

3.2 A Sequência Didática

A sequência didática construída após a avaliação do pré-teste está centrada no planejamento e na organização de atividades pedagógicas para o aprimoramento da relação de ensino-aprendizagem de Matemática de forma estruturada e progressiva, visando promover um aprendizado mais eficaz e significativo para os alunos.

Para produzir melhorias no processo de ensino-aprendizagem de Matemática

não basta apenas inserir novidades para que elas tenham valor no processo de aprendizagem; torna-se essencial que tenham relação com os objetivos de aprendizagens propostos para os estudante em questão. Sendo assim, não se trata, apenas, de caracterizar a prática educativa como nova no contexto em que ela se realiza, para que tenha valor, é preciso que haja relação com o que se deseja que os alunos aprendam. Isso envolve tanto os objetivos de aprendizagens específicos para cada um deles, como os objetivos mais amplos do processo de ensino (ARRUDA, 2015, p. 79-80).

A sequência didática envolve o processo de ensino-aprendizagem. Para Libâneo (2017),

devemos entender o processo de ensino como um conjunto de atividades organizadas do professor e dos alunos, visando alcançar determinados resultados (domínio de conhecimentos e desenvolvimento das capacidades cognitivas), tendo como partida o nível atual de conhecimentos, experiências e de desenvolvimento mental dos alunos (LIBÂNEO, 2017, p. 79).

A sequência didática objetivou ativamente a construção de aprendizagens sobre a aplicação do conceito do saber proporcional em seus múltiplos usos nas diversas situações da vida cotidiana na resolução de problemas e casos de não proporcionalidade.. A aplicação da sequência didática possibilita construções de conceitos e habilidades matemáticas, como também reforça vínculos de solidariedade no resolução de trabalhos coletivos. Portanto, a construção da sequência didática é uma atividade que possibilita a aprendizagem organizada de conceitos e habilidades.

A aprendizagem organizada é aquela que tem como finalidade específica aprender determinados conhecimentos, habilidades, normas de convivência social. Embora isso possa ocorrer em vários lugares, é na escola que são organizadas as condições específicas para a transmissão e assimilação de conhecimentos e habilidades. Esta organização intencional, planejada e sistemática das finalidades e condições de aprendizagem escolar é tarefa específica do ensino (LIBÂNEO, 2017, p. 82).

A sequência didática elaborada, segundo os dez passos da Metodologia de Resolução de problemas de ONUCCHI; ALEVATTO; NOGUTI, propôs os *problemas geradores* para construção e discussão dos saberes envolvendo os conceitos de proporcionalidade.

Em sua aplicação, em cada novo problema, os alunos realizaram a *leitura individual recorrendo aos seus conhecimentos prévios*, e em seguida, *participaram de discussões em grupo para o compartilhamento dos saberes prévios e resolveram os problemas* utilizando os conhecimentos compartilhadas em suas discussões. O *professor-pesquisador incentivou e observou* as propostas de resoluções dos problemas em cada atividade. Os alunos *apresentavam suas soluções ao professor-pesquisador* e, sempre que solicitado, dialogava com eles, esclarecendo dúvidas, na busca da resolução correta de cada problema. Após o término de cada atividade, o professor-pesquisador confrontava os teoremas-em-ação falsos sobre os conceitos da proporcionalidade apresentados pelos alunos, de acordo uso dos campos conceituais, que se manifestavam utilizando os registros escritos e as justificativas dadas oralmente para a resolução dos problemas elaborados.

Depois de lidos os registros e acolhidas as justificativas, em sala de aula *plenária*) o professor-pesquisador *discutiu as ideias e concepções sobre o saber proporcional* apresentados pelos alunos. Na aula, professor e alunos chegaram a um *consenso sobre os resultados apresentados*. O professor-pesquisador utilizou o recurso didático da lousa para explicar o conceito matemático sobre as relações direta e inversamente proporcional, *formalizando os conceitos do saber proporcional*. Assim, foi feita sucessivamente a *proposição de novos problema* até o termino de cada atividade. A metodologia de resolução de problemas foi aplicada ao saber proporcional por meio da construção e resolução das questões da sequência didática, sendo a base metodológica desta pesquisa, conforme [Onucchi, Alevatto e Noguti \(2021\)](#).

A sequência didática foi aplicada com participação dos 16 alunos da *turma A*, com duração correspondente a 13 tempos de aula (13 horas) e todos os encontros foram realizados em sala de aula. A seguir, serão apresentadas as atividades e os problemas que constam na sequência didática.

3.2.1 Aplicação da atividade 1

A Atividade 1 ([C.1](#)) foi desenvolvida em sala de aula, ao longo de 5 tempos de aula (5 horas no total), nos dia 16 e 17 de novembro de 2023, propondo as seguintes situações-problemas: a construção dos significados do conceito de razão, suas aplicações em probabilidade e porcentagem; construção e a análise gráfica sobre grandezas diretamente proporcionais, bem como casos de não proporcionalidade; situações de proporcionalidade usuais da vida cotidiana e a discussão sobre o armazenamento de informações digitais, com a participação efetiva dos alunos na construção progressiva desses conceitos.

Figura 36 – Aplicação da atividade 1.

(a) Leitura individual dos alunos



(b) Discussão, compreensão e resolução dos problemas.



Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Durante a aplicação da atividade 1, mais uma vez, observou-se por parte dos alunos uma atitude bastante insegura no início da resolução dos problemas. O professor-pesquisador, com sua intervenção didática, conseguiu tranquilizá-los, embora com condições climáticas bastante desfavoráveis, devido à intensa onda de calor daquela semana. Embora tenha sido sugerido aos alunos que fizessem as atividades no pátio da escola, alguns preferiram permanecer em sala de aula, em ambas as turmas, por estarem cientes que o professor-pesquisador deveria registrar a participação deles em fotografia, afirmaram que não haveria problemas em suportar a temperatura e a sensação térmica em sala de aula, mostrando assim todo o compromisso na participação da pesquisa.

Os alunos da *turma A* perguntaram se poderiam ocupar livremente os espaços da sala de aula, o que foi prontamente atendido pelo professor-pesquisador. Depois da resposta do professor, a maioria deles permaneceram com cadeiras em fila, provavelmente por estarem mais habituados com essa disposição. Depois de alguns minutos, os alunos demonstraram mais confiança para a resolução dos problemas propostos. O professor-pesquisador, após a leitura individual dos alunos, leu em voz alta o enunciado de cada problema, pelo menos, duas vezes, de modo a construir uma maior sintonia com os alunos e dirimir qualquer dúvida na interpretação textual. Agindo assim, os estudantes ficaram ainda mais tranquilos nas resoluções dos problemas propostos.

Deste modo, para valorizar o esforço dos alunos, o professor-pesquisador respeitou as individualidades, escutando os alunos e individualizando o atendimento, sempre que solicitado, criando um clima de leveza nas realização da atividade.

Figura 37 – Aluno apresentando a resolução



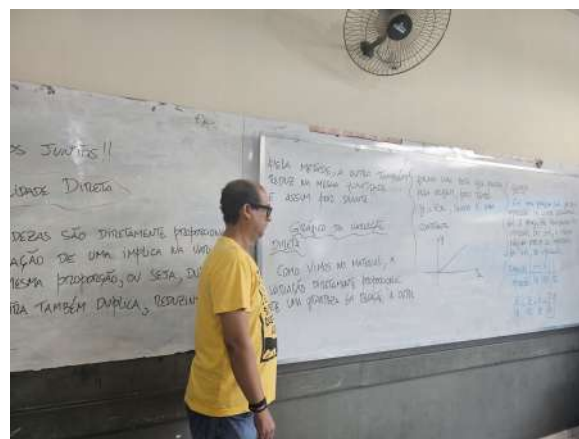
Fonte: Dado da pesquisa coletado pelo autor.

Figura 38 – Aplicação da atividade 1.

(a) Professor discutindo as ideias e formalizando o conteúdo



(b) Formalização dos conteúdos.



Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

A atividade apresentou dez problemas, abordando o conceito razão e proporcionalidade direta, realizada individualmente pelos 16 alunos presentes no dia da aplicação denominados $A_1, A_2, \dots, A_{16}$ da *Turma A* que serão analisados na 4. As imagens apresentadas no trabalho fazem alusão ao passos da Metodologia de Resolução de Problemas conforme [ONUCCI](#); [ALEVATTO](#); [NOGUTI](#).

3.2.2 Aplicação da atividade 2

A atividade 2 (C.2) foi desenvolvida em sala de aula, ao longo de 5 tempos de aula (5 horas no total), nos dias 23 e 24 de novembro de 2023, composta por oito problemas, que abordaram o conceito de proporcionalidade indireta, realizada individualmente por 16 alunos da *Turma A*, denominados de $A_1, A_2, \dots, A_{16}$ presentes na semana da aplicação.

Para a construção do saber proporcional, envolvendo o teorema em ação da proporcionalidade inversa, com a finalidade de efetivar esse conhecimento, foram propostos problemas que descrevessem o cerne da relação de proporcionalidade inversa. Para isso, os objetivos da atividade foram: calcular o valor a pagar, após a compra de uma mercadoria com desconto; observar a regularidade sobre a variação inversamente proporcional entre duas grandezas; construir gráfico da relação inversamente proporcional entre duas grandezas e calcular a quarta proporcional envolvendo a proporcionalidade inversa entre duas grandezas, por meio de problemas com aplicações práticas no cotidiano, com a participação dos alunos na construção desses saberes.

Figura 39 – Aplicação da atividade 2.

(a) Leitura individual



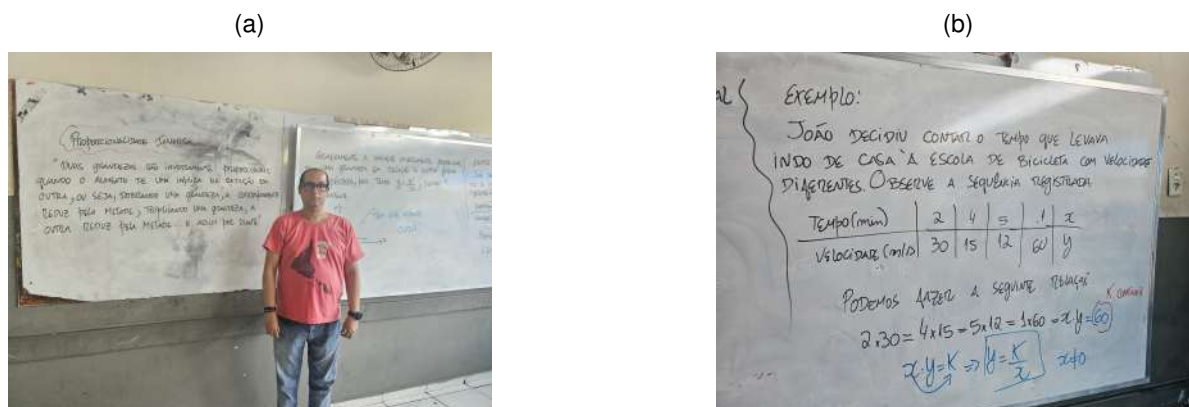
(b) Professor incentivando e observando a resolução de problemas



Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Durante a aplicação da atividade 2, foi possível perceber uma maior insegurança na resolução de cada problema por parte dos alunos. Apesar da maior confiança dos alunos, adquirida com a experiência da Atividade 1, foi nítida uma maior apreensão nas resoluções dos problemas envolvendo a proporcionalidade inversa. Mesmo o professor-pesquisador, após a leitura individual dos alunos, ler cada problema em voz alta solicitando aos alunos que expusessem suas dúvidas, a Atividade 2 foi muita mais silenciosa por parte dos alunos. De acordo com Miranda (2020), a subjetividade individual reflete a experiência do sujeito histórico e, nesse caso, fica bastante perceptível a dificuldade na resolução de problemas envolvendo grandezas inversamente proporcionais, mesmo com a atividade iniciando com problemas simples de descontos.

Figura 40 – Formalização do conteúdo



Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Mesmo com a dificuldade inicial dos alunos, eles se mantiveram perseverantes em aprender os conceitos da relação inversamente proporcional e, com o passar dos problemas introdutórios, demonstraram mais confiança e segurança na resolução dos problemas.

3.3 Aplicação do Trabalho em Grupo

Os problemas propostos no trabalho em grupo (C.3) englobaram as aplicações do saber proporcional em diversas áreas do saber humano, buscando, assim, aplicações concretas do saber matemático. O trabalho coletivo foi desenvolvido em sala de aula com duração de 3 tempos de aula, num total de 3 horas em cada turma, realizado no dia 01 de dezembro, composto de 4 problemas. No dia, participaram 16 alunos da *turma A*.

Figura 41 – Realização do trabalho em grupo, grupo A₃₂

Fonte: Dado da pesquisa coletado pelo autor.

Os grupos foram organizados pelos próprios alunos, com o limite acordado de, no

máximo, 5 participantes. A organização dos grupos foi previamente combinada com as turmas, de modo a valorizar as afinidades entre os alunos, buscando incentivar e facilitar, portanto, as trocas e colaborações acerca dos saberes proporcionais já construídos por eles. Infelizmente, por meio da observação do professor-pesquisador, nem todos os componentes dos grupos participaram ativamente na resolução dos problemas. O professor-pesquisador fez uma leitura prévia em voz alta e logo em seguida, fez uma resumo na lousa sobre as relações direta e inversamente proporcionais.

A circulação dos saberes foi amplamente incentivada pelo professor-pesquisador que, a todo instante, solicitava que os alunos mais comunicativos compartilhassem seus conhecimentos com outros grupos. Alguns alunos, em ambas as turmas, realizaram a tarefa com presteza e alegria. No entanto, o único problema proposto nessa atividade, que o professor-pesquisador não permitiu o compartilhamento de saberes entre os grupos, foi a questão 4, cujo objetivo foi verificar o posicionamento individual de cada participante sobre a aplicação do Saber Proporcional no Direito Penal.

Em relação à divisão dos grupos, a organização ficou da seguinte forma: 3 grupos com 5 integrantes, mais um grupo com 6 componentes, denominados de A_{31} , A_{32} , ...e A_{36} , livremente distribuídos em sala de aula.

3.4 Aplicação do Pós-teste

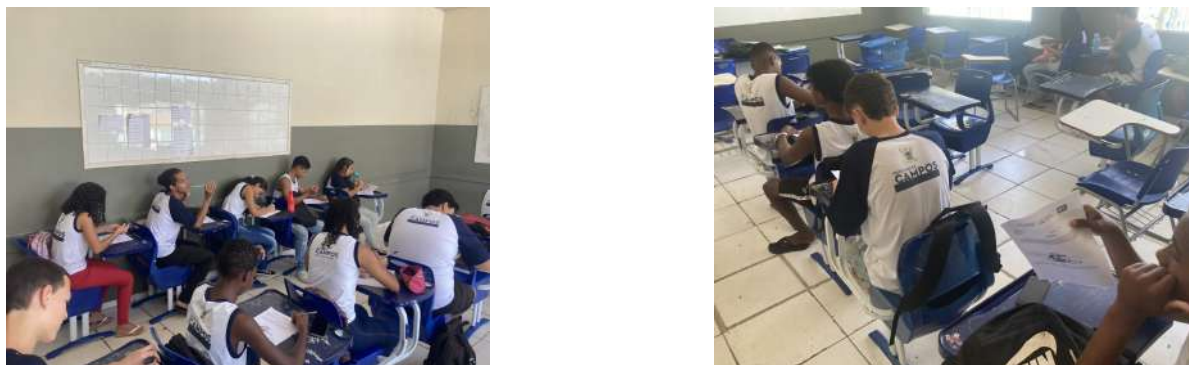
O tempo total combinado com os alunos foi de 2 horas para a realização dos problemas do pós-teste, aplicado no dia 07 de dezembro de 2023. Participaram da atividade 16 alunos da *turma A*, conforme a Figura acima.

O pós-teste (D.1) foi construído pelo professor-pesquisador com problemas semelhantes ao pré-teste, para um maior controle nos resultados obtido após a aplicação da sequência didática. Durante a aplicação do pós-teste, foi pedido pelo professor-pesquisador que não houvesse qualquer troca de saberes ou interferências na resolução dos problemas. Os alunos, mais uma vez, participaram ativamente.

A aplicação do pós-teste buscou analisar, de acordo com a metodologia de resolução de problemas, os invariantes operatórios sobre o saber proporcional, após a aplicação da sequência didática. O pós-teste constou de 5 questões discursivas que apresentavam problemas passíveis de aplicação em situações concretas do cotidiano, para identificar os possíveis teoremas em ação construídos pelos alunos para a resolução de cada problema, semelhantes aos que foram propostos no pré-teste.

Antes da aplicação do pós-teste, o professor-pesquisador leu cada problema em voz alta, garantindo que os alunos compreendessem plenamente as questões. Foi incentivado também que propusessem soluções mais inovadoras na resolução dos problemas.

Figura 42 – Aplicação do Pós-teste



Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor

Após a aplicação do pós-teste, em cada turma, o professor-pesquisador agradeceu bastante emocionado a participação dos alunos e foi aplaudido por seus alunos. Os estudantes também agradeceram por participar da pesquisa e relataram que houve uma melhoria na relação de ensino-aprendizagem do saber proporcional. Cabe ressaltar que no ano seguinte à aplicação da pesquisa, durante o desfile cívico em Conselheiro Josino, o professor-pesquisador foi aplaudido pelos alunos partícipes da pesquisa, que já se encontravam em outra escola, cursando o Ensino Médio. Os resultados da pesquisa serão apresentados no próximo capítulo.

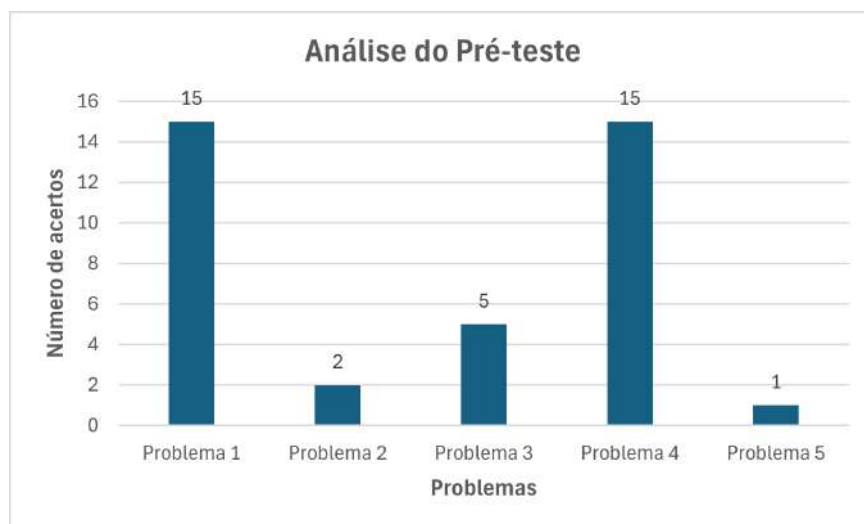
Capítulo 4

Análise dos Resultados

4.1 Análise do Pré-teste

Neste capítulo, são apresentadas as análise dos resultados obtidos, nas seguintes seções: análise do pré-teste (B.1); análise da atividade sobre grandezas diretamente proporcionais (C.1); análise da atividade sobre grandezas inversamente proporcionais (C.2); análise do trabalho em grupo (C.3) e a análise do pós-teste (D.1).

Figura 43 – Análise do pré-teste



Fonte: Dado da pesquisa coletados pelo autor.

De acordo com Muniz (2009), analisou-se cada resolução do pré-teste elaborado em duas vertentes: a escolha da operação efetuada e a realização dessa operação. Para a realização desses problemas, os alunos utilizaram seus conhecimentos implícitos sobre proporcionalidade, isto é, os invariantes operatórios, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais.

O **problema 1** abordou conhecimentos culinários, utilizando uma receita básica e bastante conhecida para a produção do 1 litro de café contido em uma garrafa. Na *turma A*, 8 alunos fizeram a resolução do problema com a soma de três parcelas iguais, sendo assim, não utilizaram o campo conceitual da estrutura multiplicativa; 7 alunos utilizaram o operador multiplicativo escalar do produto das medidas, ou seja, o fator de proporcionalidade, 1 aluno com o algoritmo conhecido como regra de três e 1 aluno não conseguiu apresentar nenhuma proposta de resolução do problema.

Figura 44 – Resoluções da questão 1 da turma A, alunos identificados como A₁₂ e A₁₀

1) Imagine que você e toda a sua família apreciam o famoso cafezinho. Para cada garrafa de café, você vai utilizar 2,5 colheres de café torrado e moído. De repente, você recebe a notícia de que chegarão parentes. Mantendo as mesmas proporções, se você tivesse que fazer 3 garrafas de café, qual a quantidade de colheres de café você utilizaria?

12,5
2,5
2,5
7,5

1) Imagine que você e toda a sua família apreciam o famoso cafezinho. Para cada garrafa de café, você vai utilizar 2,5 colheres de café torrado e moído. De repente, você recebe a notícia de que chegarão parentes. Mantendo as mesmas proporções, se você tivesse que fazer 3 garrafas de café, qual a quantidade de colheres de café você utilizaria?

$1 \times 2,5 = x$
 $3 \times x = 7,5$
 $x = 2,5 \cdot 3$
 $x = 7,5$
 $x = f \cdot s$

r= Utilizaria 7,5 colheres de café (7 colheres e meia).

Fonte: Dado da pesquisa adaptado pelo autor.

O **problema 2** envolveu a ampliação das medidas lineares de um quadro de fotografia. *turma A*, 2 alunos utilizaram a constante de proporcionalidade, ou seja, o produto de medidas por meio do operador escalar para a resolução do problema, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais. Os outros 14 alunos utilizaram a estrutura aditiva, acrescentando 2 m às medidas originais do quadro, demonstrando erro na resolução do problema.

Figura 45 – Resoluções da questão 2 da turma A, identificados por A₆ e A₂

2) Depois de apreciar o cafezinho com os parentes, você vai decorar sua parede da sala com uma moldura que, em breve, receberá uma fotografia. Inicialmente, conforme figura à esquerda, você coloca em sua parede um quadro com 1,0m de altura e 1,5m de comprimento. Vendo que ficaria mais estético um quadro maior, você aumenta em 2,0m de altura sua moldura, resultando em uma nova altura de 3,0m. Mantidas as mesmas proporções, qual será o valor do comprimento(x)?

1,0m
1,5m
3,0m
x
1,5
x 3
4,5m

Figura 1: Retângulos semelhantes

2) Depois de apreciar o cafezinho com os parentes, você vai decorar sua parede da sala com uma moldura que, em breve, receberá uma fotografia. Inicialmente, conforme figura à esquerda, você coloca em sua parede um quadro com 1,0m de altura e 1,5m de comprimento. Vendo que ficaria mais estético um quadro maior, você aumenta em 2,0m de altura sua moldura, resultando em uma nova altura de 3,0m. Mantidas as mesmas proporções, qual será o valor do comprimento(x)?

1,0m
1,5m
3,0m
x
1,5
x 3
4,5m

Figura 1: Retângulos semelhantes

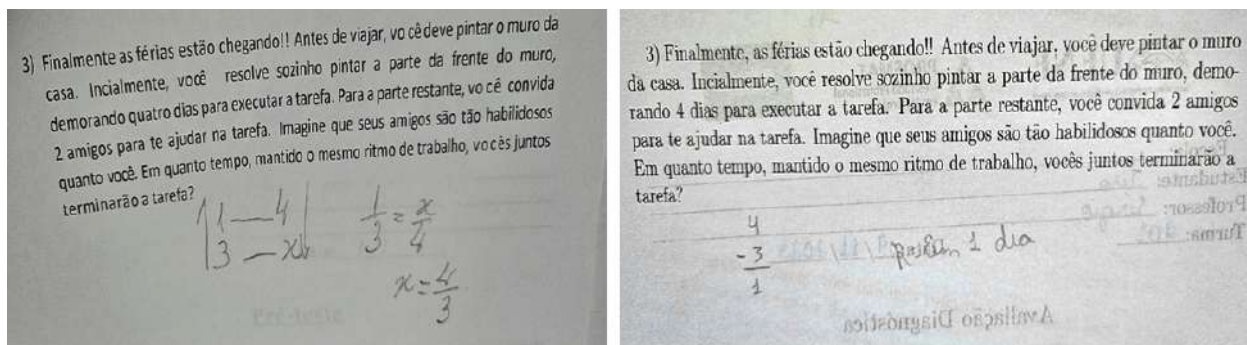
R: Valor de x = 3,5

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

O **problema 3** destacou a problemática da proporção indireta, somente 5 alunos da *turma A*, como por exemplo A₆ e A₃ aplicaram o algoritmo da regra de três para a solução do problema. Os alunos restantes, como por exemplo A₁, abordaram em suas resoluções, a

estrutura aditiva, aplicando a subtração de dois números com dimensões diferentes (dias e trabalhadores), demonstrando, assim, o invariante operatório da proporção indireta aplicado de maneira errada.

Figura 46 – Resoluções da questão 3 da turma A, alunos identificados por A₆ e A₁, respectivamente

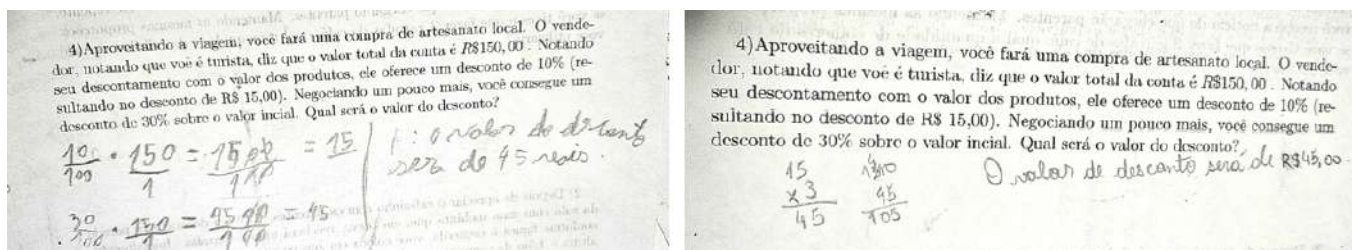


Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Mais um vez, o invariante operatório da proporcionalidade inversa não foi construído pela maioria dos alunos, como evidenciado na resolução do problema.

O **problema 4** envolveu a situação de desconto simples, retornando ao teorema em ação da proporção direta. Na *turma A*, os 15 alunos aplicaram o coeficiente de proporcionalidade, ou seja, o conceito da estrutura multiplicativa por meio da resolução do problema, sendo 14 deles por meio do cálculo do fator de desconto sobre o preço de venda e 1 deles, por meio do operador escalar representado o triplo do valor sobre o desconto inicial. Somente um aluno não apresentou qualquer proposta de solução.

Figura 47 – Resoluções da questão 4 da turma A, alunos identificados por A₅ e A₁₁, respectivamente

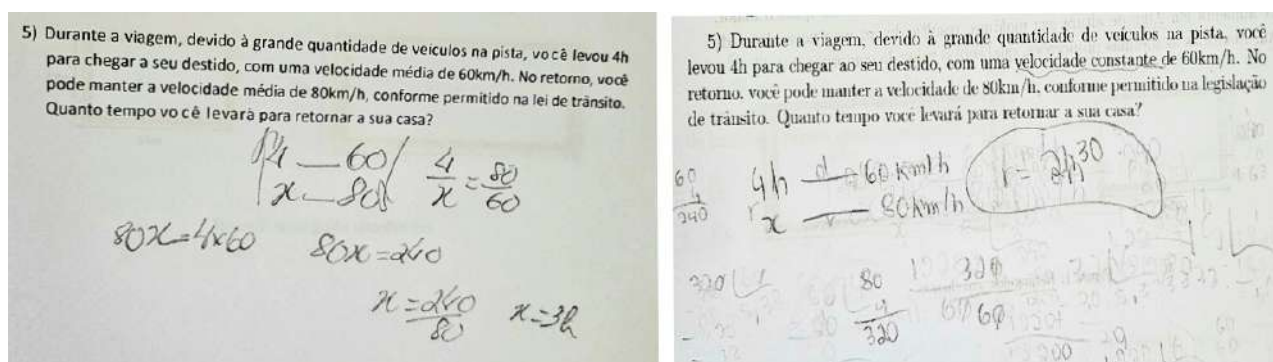


Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

O **problema 5** destacou o clássico problema que relaciona duas diferentes velocidades médias com os respectivos tempos de percurso, considerando a mesma distância percorrida. Dessa forma, é representada a situação que envolve o teorema em ação sobre a proporcionalidade inversa. Na turma, 13 alunos atribuíram valores aleatórios sem quaisquer

justificativas, cometendo erros, 2 alunos apresentaram o cálculo relacional envolvendo o isomorfismo de medidas, por exemplo, a aluna A₁₀, mas de forma a não considerar a relação inversa entre as grandezas e 1 aluno utilizou o cálculo relacional da estrutura multiplicativa de forma correta.

Figura 48 – Resoluções da questão 5 da turma A, alunos A₆ e A₁₀, respectivamente



Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

4.2 Análise da Sequência Didática

Durante a resolução dos problemas da sequência didática, em cada uma das atividades propostas e em cada problema, foi seguindo os seguintes passos propostos por Onucchi, Alevatto e Noguti (2021):

1. O problema gerador

O problema gerador está explícito textualmente em cada um dos problemas contidos nas atividades, sendo esse o primeiro passo na Metodologia de Resolução de Problemas, conforme Onucchi, Alevatto e Noguti (2021);

2. A leitura individual

A leitura individual foi realizada pelos alunos. Após essa etapa, o professor-pesquisador leu todos os problemas e perguntou aos alunos se eles tinham plenamente compreendido as situações explícitas e/ou implícitas contidas nos problemas, de forma a possibilitar a plena compreensão textual; persistindo dúvidas, cada aluno foi atendido individualmente.

Depois da leitura, o professor-pesquisador incentivou que cada aluno refletisse sobre os problemas, de modo a despertar seus *conhecimentos prévios*, pois de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, os conceitos são formados por uma tessitura que envolve a reorganização dos conceitos preexistentes com novas adaptações conceituais;

3. Os alunos discutem o problema e aprimoram suas compreensões

A circulação de saberes foi incentivada para que os alunos compartilhassem seus conhecimentos, a fim de melhorarem suas compreensões, pois segundo [Zanella e Barros \(2014\)](#), a compreensão de um conceito por parte do aluno não se dá quando este é confrontado com uma única situação. Assim, o compartilhamento de saberes possibilita múltiplos olhares, tornando mais concreta cada situação de aprendizagem;

4. Os alunos resolvem os problemas;

5. O professor observa e incentiva as resoluções;

6. Os alunos apresentam as soluções encontradas;

Os passos 4, 5 e 6 da Metodologia de Resolução de Problemas foram realizados, respectivamente, pelo professor-pesquisador que incentivou aos alunos a proporem resoluções livres e criativas, de modo a verificar os saberes proporcionais de cada indivíduo e, em seguida, o professor observava cada resolução dos problemas apresentadas pelos alunos;

7. Em Plenária (sala de aula), há as discussões de ideias;

8. Busca de consensos;

Os passos 7 e 8 foram realizados após a apresentação das resoluções dos problemas elaboradas pelos alunos. O professor-pesquisador fez uma análise geral das resoluções apresentadas e promoveu um debate com as principais ideias apresentadas. Após o debate, o professor-pesquisador, mediando didaticamente os conceitos apresentados pelos estudantes, conduz a discussão para o próximo passo;

9. Formalização do conteúdo;

O professor-pesquisador formaliza conteúdos (objetos de conhecimento), enfatizando os conceitos sobre o saber proporcional e suas múltiplas aplicações;

10. Proposição e resoluções de novos problemas

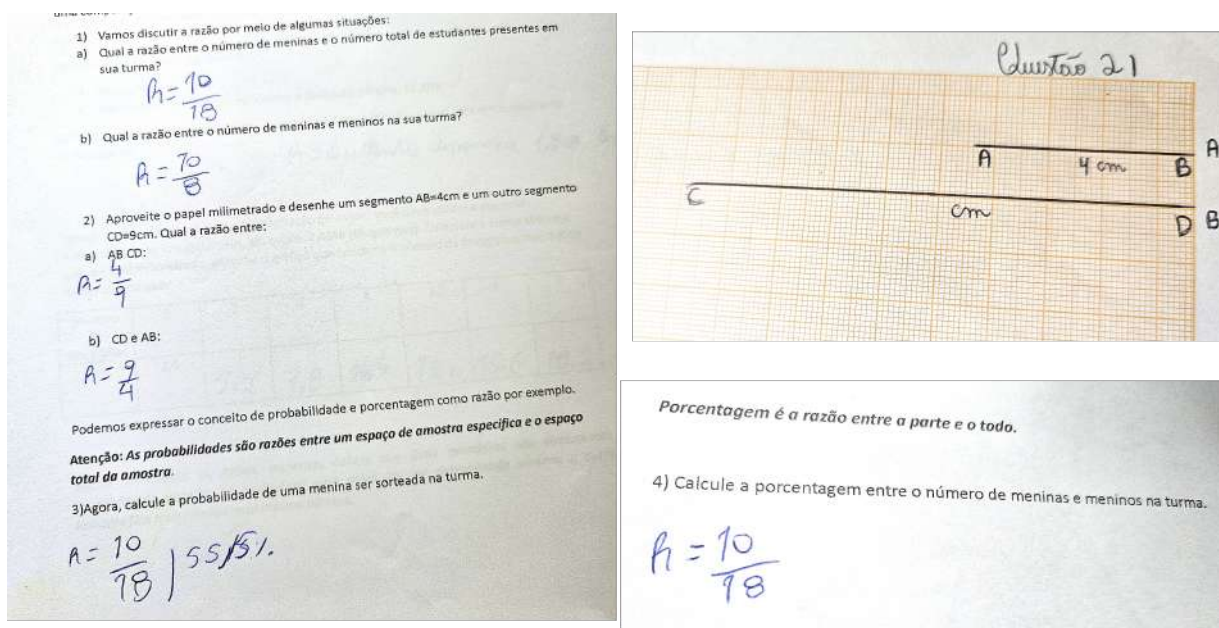
Ao término da sequência didática, espera-se que os alunos sejam capazes de aplicar o saber proporcional nas diversas situações do cotidiano para a resolução de problemas concretos em suas vidas diárias. As demais observações encontram-se nas análises das atividades que compõe a sequência didática.

4.2.1 Análise da atividade 1

Na primeira etapa da atividade, envolvendo os **problemas de número 1, 2, 3 e 4**, em ambas as turmas, o pesquisador definiu o conceito de razão matemática como uma comparação entre duas grandezas e solicitou aos alunos que lessem os problemas com

bastante atenção e se dedicassem à resolução das questões propostas. Quando algum aluno tinha dúvidas, o pesquisador buscava discutir e explicar os significados dos conceitos, valorizando todas as propostas de resolução apresentada, buscando a construção dos conceitos de modo progressivo.

Figura 49 – Resoluções dos problemas 1, 2 3 e 4, da turma A, aluno A₅.



Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Na turma, o problema de número 1 tem como *problema gerador* o cálculo do conceito de razão entre duas grandezas. Após a leitura individual dos alunos, o professor-pesquisador leu novamente o problema em voz alta e, em sequência, incentivou as trocas de ideias e o compartilhamento dos conhecimentos prévios entre os alunos. Para iniciar a resolução do problema, todos os alunos contaram a quantidade total de alunos presentes e calcularam as razões de modo correto. Embora as razões do problema de número 2, cujo *problema gerador* é o cálculo da razão entre dois segmentos representados graficamente fossem expressas de modo exato, 50% dos alunos não tiveram a habilidade de construir as medidas com precisão, utilizando as subdivisões do papel milimetrado, demonstrando dificuldade de utilizá-lo para a construção dos segmentos de reta.

O problema de número 3 tem como *problema gerador* o cálculo da probabilidade de um evento equiprovável, por meio de uma razão expressa matematicamente, sendo realizado de modo correto pelos alunos. O problema de número 4 tem como *problema gerador* o cálculo da porcentagem como razão entre duas grandezas, 14 estudantes elaboraram a resolução do problema envolvendo o valor da razão ou transformando, conforme exigido na questão, a razão efetivamente para forma de porcentagem, 4 alunos, por uma interpretação equivocada, apresentaram a razão entre número de meninas e o total de alunos. A figura

abaixo representa as resoluções dos problemas de números 1, 2, 3 e 4 do aluno A₅, da turma, com os equívocos do problema 4 relatados e da falta de habilidade motora para representar os segmentos no papel milimetrado do problema 2.

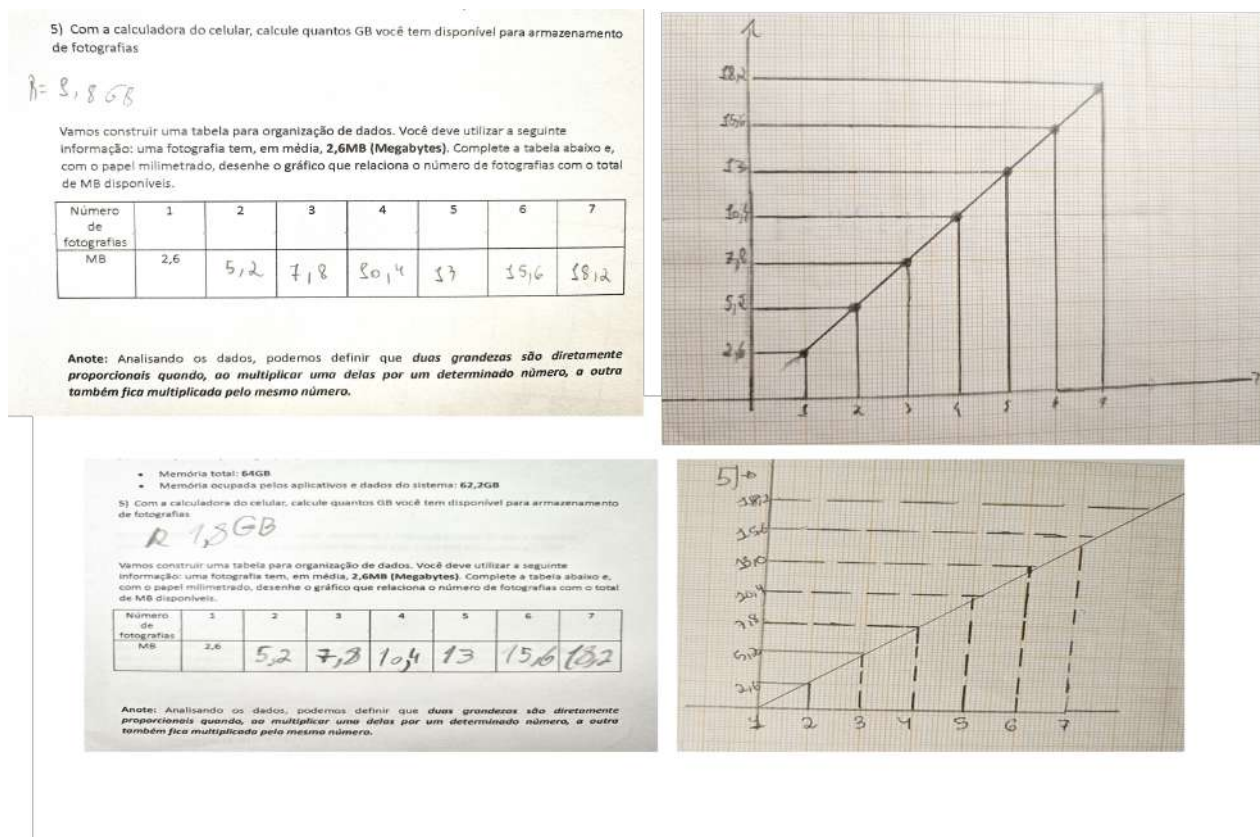
Na questão 3, houve o cálculo da probabilidade corretamente efetuado por todos os alunos presentes. Na questão 4, apenas 4 alunos propuseram uma solução para o problema, mas com equívoco na interpretação do enunciado relacionando, como na *turma A*, o número de meninas com o número total de alunos presentes.

O procedimento que gerou o erro dos alunos no problema 4 pode ser explicado em duas situações: a primeira, a falta de concentração para a leitura atenta e compreensão do problema; a segunda, devido à dificuldade de expressar a razão na forma de porcentagem, pois o conceito da divisão entre dois números ainda não está plenamente válido.

No segundo dia da aplicação da atividade 1, os alunos A₅, A₈, A₁₀ e A₁₅ discutiram suas descobertas sobre a razão áurea. Inicialmente, foi solicitado aos alunos pelo professor-pesquisador que fizessem uma pesquisa prévia. Após a discussão sobre as descobertas, o pesquisador sugeriu à turma que assistissem ao filme “Donald no País da Matemática”, um curta-metragem de 27 minutos lançado nos Estados Unidos da América, em 26 de junho de 1959, dirigido por Hamilton Luske, disponível em diversas plataformas de vídeo. Na semana seguinte, a grande maioria dos alunos ficaram encantados com o desenho sugerido. Cabe ressaltar que a Direção da Unidade Escolar, a pedido do professor-pesquisador, disponibilizou a Sala de Vídeo, em dia e horário previamente agendados, para que os alunos pudessem assistir ao filme.

O **problema 5** tem como *problema gerador* o cálculo dos dados para a construção de uma tabela envolvendo duas grandezas diretamente proporcionais. Desta forma, destacou as unidades de medidas em informática, envolvendo o armazenamento digital de fotos, imprescindível nesta geração. De acordo [Han \(2019\)](#), as relações têm sido substituídas pelo número de conexões. Um dos pilares do atual contexto é exposição. Neste problema, foi solicitado que o aluno completasse a tabela e, depois, construísse o gráfico, em papel milimetrado, relacionando o número de fotografias digitais e o quantidade de MB disponíveis para armazenamento. Diante da situação, o pesquisador relacionou o problema definindo, então, a relação de proporcionalidade direta.

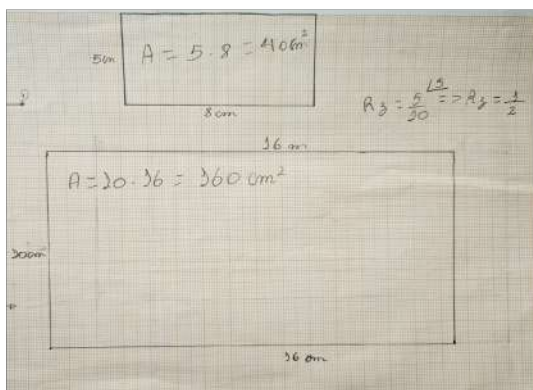
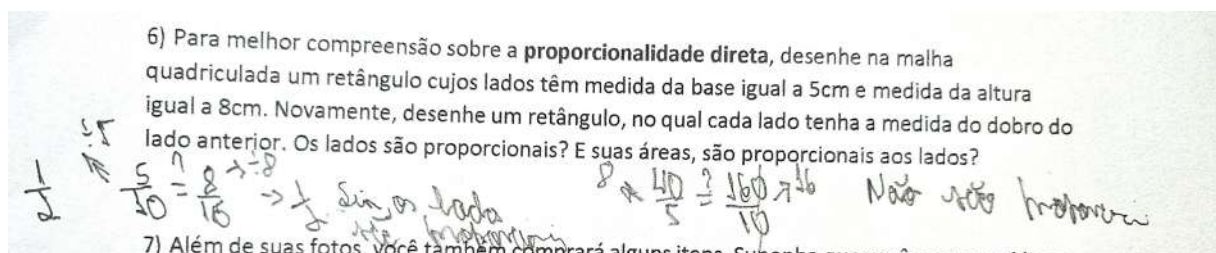
Todos os alunos completaram a tabela e construíram o gráfico no papel milimetrado e observaram, após pedido do pesquisador, que o gráfico é uma reta. Sobre a construção gráfica, metade dos alunos não incluiu o ponto da origem do plano cartesiano, por não considerarem a situação não “tirar nenhuma foto”, conforme justificado pelo aluno A₇.

Figura 50 – Resoluções do problema 5, turma A, alunos A₇ e A₁, respectivamente

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

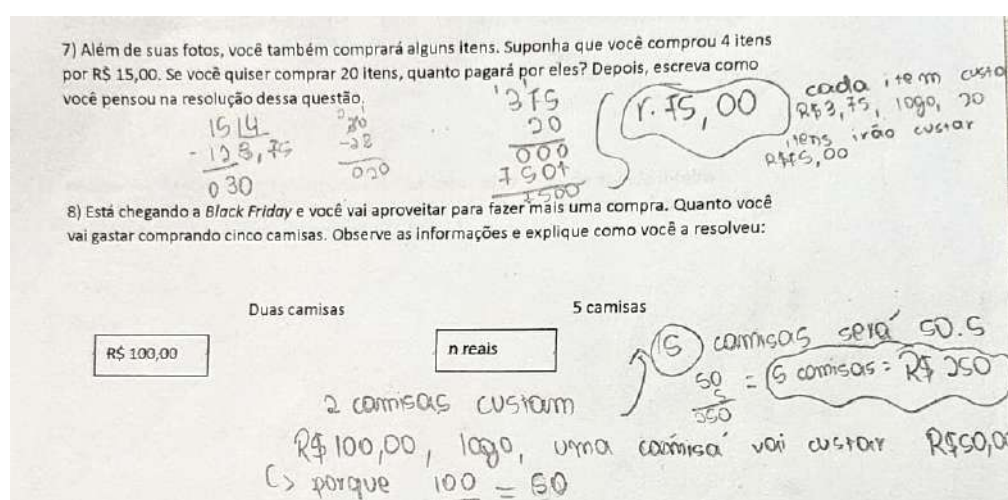
Na realização do problema 5, o pesquisador questionou as duas turmas sobre como foi construído o gráfico ao término da aplicação da atividade. Alguns alunos da *turma A*, observaram que o a variação de números nos eixos era constante. Segundo A₁₀, "um eixo variava de 1 em 1 e, o outro de 2,6 em 2.6". O pesquisador, mais uma vez, discutiu o conceito de proporcionalidade direta com os alunos, de forma a possibilitar o entendimento progressivo do conceito da proporcionalidade, com o objetivo de ampliar o entendimento sobre essa situação.

O **problema 6** tem como *problema gerador* a construção de dois retângulos para a análise dos casos de proporcionalidade e não proporcionalidade. Assim, enfatizou a construção de dois retângulos no papel milimetrado, um com o dobro das medidas lineares do outro, objetivando analisar conjuntamente com os alunos os casos de proporcionalidade e não proporcionalidade. Somente o aluno A₁₅ transcreveu a resposta na folha da atividade.

Figura 51 – Resoluções do problemas 6, turma A, aluno A₁₅

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Os **problemas 7 e 8**, com *problemas geradores*, respectivamente, o cálculo de números de itens dado o valor de alguns itens e o cálculo de 2 camisas dado o valor de 5 unidades dessa grandeza. Em ambas as turmas, reduziram o valor das peças à unidade e utilizaram o operador escalar na estrutura multiplicativa para a determinação do valor total a pagar, ou seja o coeficiente de proporcionalidade.

Figura 52 – Resolução dos problemas 7 e 8, turma A, aluno A₁₀

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

O **problema 9**, que tem como *problema gerador* o cálculo do número de fotos que podem ser armazenadas em um dispositivo dado a quantidade de armazenamento digital de uma foto e capacidade de armazenamento digital livre do dispositivo. Para a realização do cálculo, o problema retornou à situação do armazenamento de fotos do problema 5, com o enfoque para o armazenamento total de fotos. Os alunos recorreram ao algoritmo da regra de três, para determinar a quantidade requerida. O pesquisador perguntou, em cada turma, por qual razão adotaram o procedimento da regra de três, diferente das soluções anteriores. Inicialmente ficaram em silêncio, mas o pesquisador insistiu no questionamento e, dentre os alunos, aqueles com maior habilidade de comunicação, o A₁₀ da *turma A* respondeu à pergunta. Ele justificou dizendo: "os números eram muito grandes".

Figura 53 – Resolução do problema 9

9) Você seria capaz de responder, neste momento, a indagação inicial de seu problema: quantas fotos novas cabem em seu celular sabendo que 1024 MB equivalem a 1 GB?

Handwritten calculations:

$$1,8 \text{ GB} = 1,8 \cdot 1024 \text{ MB} = 1843,2 \text{ MB}$$

A diagram showing a proportion with some terms crossed out:

$$\begin{array}{r} 18 \\ 1 \text{ GB} \\ \times 16 \\ \hline 1843,2 \end{array}$$

Other calculations:

$$2,6x = 1843,2 \times 1$$

$$x = \frac{1843,2}{2,6}$$

$$2,6x = 1843,2$$

$$x = 708,9230...$$

Claro que você vai argumentar que pode salvar as fotos na "nuvem".

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

O **problema 10** foi proposto com dois objetivos: analisar o invariante operatório da proporção direta ao término da atividade 1 e incentivar o pensamento crítico dos alunos sobre o volume de informações digitais produzidos em nossa sociedade e os custos ao meio ambiente, bem como toda grande estrutura tecnológica envolvida. Para possibilitar a realização desses objetivos, o *problema gerador* envolve o cálculo da quantidade de Hd's necessários para armazenar, supostamente, as mesmas quantidade de informações disponível nos "Datacenters" do Google.

O pesquisador fez uma breve discussão sobre o funcionamento de um data center e os alunos A₁₀ e A₁₅, da *turma A*, ficaram animados e curiosos com as informações, o que os incentivou a realizar a prova do Instituto Federal Fluminense (IFF), para o Curso Técnico de Meio Ambiente, no Campus de Guarus, Campos dos Goytacazes, para o qual os dois alunos citados foram aprovados. O pesquisador avisou as duas turmas para efetuarem a correção do valor de armazenamento de 100 GB para 100.000.000 GB por meio da anotação na lousa.

Figura 54 – Resolução do problema 10

10) De acordo com algumas fontes, a capacidade de armazenamento do Google é de 100 de gigabytes. Para armazenar todas a informações, quantos HDs, com 1 terabytes, são necessários aproximadamente?

Google: 100 000 000 GB

Pense nisso: Se todas as informações contidas nos data center do mundo inteiro fossem impressas em papel, seriam necessárias 14 trilhões de árvores. A quantidade de papel produzido daria para embrulhar a Terra 7 vezes.

1 HD — 1024 GB

x — 100 000 000 GB

$\frac{1}{x} = \frac{1024}{100\,000\,000}$

$1024 x = 100\,000\,000$

$x = \frac{100\,000\,000}{1024}$

$x = 97652,25 \text{ HD}$

Fonte: Dado da pesquisa coletados pelo autor.

Na *turma A*, somente um aluno deixou o problema em branco, pois, por motivos de ordem pessoal, foi dispensado da aula antes do término da atividade 1. Os outros alunos da turma utilizaram o algoritmo da regra de três e calcularam a quantidade necessária. O único erro, na resolução de todos os alunos da turma, foi a representação decimal do número de HD's.

Nos problemas geradores contidos na atividade 1, de uma forma geral, abordam, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, o isomorfismo de medidas na razão de muitos para muitos de modo a possibilitar a aplicação do teorema em ação da proporcionalidade direta.

4.2.2 Análise da atividade 2

Na resolução do **problema 1** da atividade 2, realizado pela *turma A*, o *problema gerador* envolvia o cálculo do valor de uma mercadoria após o desconto comercial simples.

Ao apresentar suas resolução para o professor-pesquisador, praticamente todos os alunos, como por exemplo o aluno A_{10} , utilizaram o produto de medidas para calcular o valor a pagar. Somente uma aluna, A_4 , aplicou a estratégia de regra de três para a resolução do problema.

Figura 55 – Resolução do problema 1.

(a) Resolução do aluno A_4 .

1) Uma grande loja de varejo faz a seguinte promoção:

Mais por Menos
 Até 15% off em alguns itens

a) Um produto A tem um preço total de R\$ 23,50. Sabendo que este produto terá um desconto de 10%, calcule quanto custará na promoção.

$$\frac{N}{23,50} = \frac{90}{100}$$

$$N = \frac{23,50 \times 90}{100}$$

$$N = 21,15$$

b) Nesta mesma loja, um celular de Modelo B tem preço de mercado igual a R\$ 1099,00. Com do desconto de 14%, quanto você pagará pelo produto na promoção?

$$\frac{N}{1099} = \frac{86}{100}$$

$$100N = 1099 \times 86$$

$$100N = 94514 \Rightarrow N = \frac{94514}{100} = 945,14$$

(b) Resolução do aluno A_{10} .

1) Uma grande loja de varejo faz a seguinte promoção:

Mais por Menos
 Até 15% off em alguns itens

a) Um produto A tem um preço total de R\$ 23,50. Sabendo que este produto terá um desconto de 10%, calcule quanto custará na promoção.

$$23,50 \times \frac{90}{100} \Rightarrow R\$ 21,15$$

b) Nesta mesma loja, um celular de Modelo B tem preço de mercado igual a R\$ 1099,00. Com do desconto de 14%, quanto você pagará pelo produto na promoção?

$$100 - 14 = 86$$

$$1099 \times \frac{86}{100} = R\$ 945,14$$

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Os **problemas 2 e 3** têm como *problemas geradores* o cálculo da porcentagem do valor de venda de um produto e o cálculo de uma população após a redução da amostra inicial. Ambos os problemas enfatizaram as relações de cálculo de porcentagem aplicadas à redução sobre valores iniciais. Somente dois alunos da turma aplicaram o produto de medidas para desenvolver a resolução do problema. Os demais alunos da *turma A* adotaram os procedimentos já desenvolvidos em esquemas mais complexos, pois abordaram a identificação das grandezas proporcionais e a aplicação do algoritmo da regra de três para o cálculo da quarta proporcional.

Ao término da resolução dos problemas de número 2 e 3 sobre cálculo de porcentagem envolvendo reduções, o professor-pesquisador promoveu debate sobre como o aumento do valor da porcentagem de reduções reflete nos valores finais, após a redução.

O pesquisador, após acolher as percepções dos alunos a respeito do efeito das reduções sobre o valor inicial, ampliou o debate trazendo situações de desconto para pagamentos à vista, tão comuns no dia a dia. Com a problemática da relação entre o aumento da porcentagem sobre o desconto e o valor a pagar, os alunos das duas turmas explicitaram que o aumento da porcentagem do desconto resulta em um valor a pagar menor. Após esse entendimento, o professor-pesquisador discutiu a vantagem financeira do pagamento à vista, destacando o benefício do desconto, para um maior ganho econômico dos consumidores, buscando, assim, a aplicação prática do conhecimento matemático.

Por meio do conhecimento conceitual desenvolvido pelos alunos nos três primeiros

Figura 56 – Resoluções dos problemas 2 e 3

2) Em 1950, a população rural brasileira era de 33.161.506 habitantes. Vinte anos depois, houve uma redução de 44% de habitantes. Quantas habitantes viviam em áreas rurais em 1970?

$$33\ 161\ 506 = 100$$

$$P = P \times 56$$

$$100P = 33\ 161\ 506 \times 56$$

$$P = \frac{33\ 161\ 506 \times 56}{100}$$

$$P = 18570\ 4434\ \text{HAB}$$

$$P = 18570\ 444\ \text{HAB}$$

3) O novo celular de José custou R\$ 830,00. Ele deu um sinal de R\$ 250,00. Determine a porcentagem do preço de venda que foi o sinal de José?

$$\frac{250}{830} = \frac{P}{100}$$

$$830P = 250 \times 100$$

$$8300P = 25000$$

$$P = \frac{25000}{830} \Rightarrow P = 30,12\%$$

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

problemas, o pesquisador apresentou o conceito matemático complexo sobre as relações envolvendo situações em que o aumento de uma determinada grandeza ocasiona a redução de outra.

O **problema 4** tem como *problema gerador* o estudo da regularidade de uma relação inversamente proporcional. Deste modo, trouxe aos alunos a observação do padrão entre grandezas que variam conforme a tabela que consta no problema. Além disso, solicitou que cada aluno descrevesse como essas grandezas variavam e calculassem um valor específico que não consta na tabela. Com isso, houve uma maior compreensão dos alunos sobre relações inversas na matemática. Os alunos demonstraram compreender o conceito de modo válido na resolução do problema.

Após a resolução do problema, o professor-pesquisador definiu na lousa a relação inversamente proporcional, com o objetivo de desenvolver a compreensão dos alunos para o reconhecimento do seguinte teorema em ação: se duas grandezas são inversamente proporcionais, o aumento de uma leva à redução proporcional da outra, sendo o produto delas uma constante. Também descreveu como a relação inversamente proporcional é representada graficamente por uma curva geométrica plana denominada de hipérbole equilátera.

Figura 57 – Resolução do problema 4.

(a) Resolução do aluno A₁₀.

4) Observe a tabela abaixo:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	200	100	50	25	12,50	6,25	3,125

a) Você observa algum padrão (regularidade) entre as variações das grandezas?
Se sim, como elas evoluem?

Sim. x = aumenta
 y = diminui pela metade do anterior.

b) Se $x = 7$, qual valor o valor do y ?

$x = 7$. $y = \frac{6,25}{2} = 3,125$

Atenção: Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais quando ao multiplicar uma delas por um número qualquer, a outra fica dividida por esse mesmo número.

(b) Resolução do aluno A₁₆.

4) Observe a tabela abaixo:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	200	100	50	25	12,50	6,25	3,125

a) Você observa algum padrão (regularidade) entre as variações das grandezas?
Se sim, como elas evoluem?

x aumenta com 1 com 1 e y diminui com 2 com 2

b) Se $x = 7$, qual valor o valor do y ?

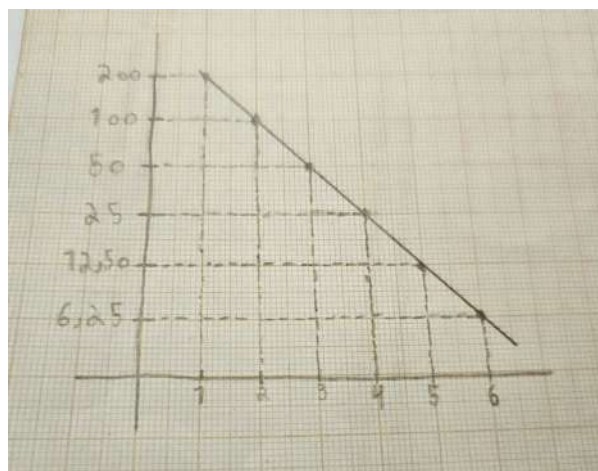
3,125

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

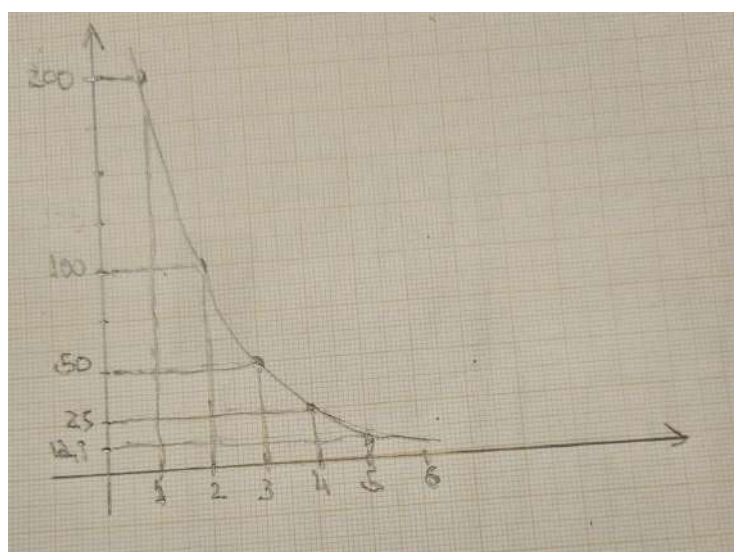
O **problema 5** tem como *problema gerador* a construção gráfica de uma relação entre duas grandezas inversamente proporcionais e requereu a habilidade e os conhecimentos necessários para a representação gráfica da situação descrita no problema 4. No primeiro momento, o pesquisador permitiu que os alunos construíssem o gráfico sem interferência, para diagnosticar as dificuldades específicas na realização do problema, permitindo assim a resolução do problema de forma intuitiva.

O pesquisador analisou o equívoco inicial na resolução do problema, tendo como base a falta de compreensão dos alunos ao realizar as escalas para a construção numérica dos eixos, principalmente, neste caso, o eixo y , devido aos espaçamentos iguais entre os números.

Após a mediação do professor-pesquisador, os alunos adotaram uma atitude diferente para a resolução do problema: ajustaram as escalas e perceberam, com o auxílio de uma régua, que o gráfico não representava uma reta. O professor-pesquisador, novamente, pediu que construíssem a curva sem retirar o lápis do papel milimetrado e observassem a forma do gráfico.

Figura 58 – Resolução do problema 5, A₁₃

Fonte: Dado da pesquisa coletados pelo autor.

Figura 59 – Resolução do problema 5, A₆.

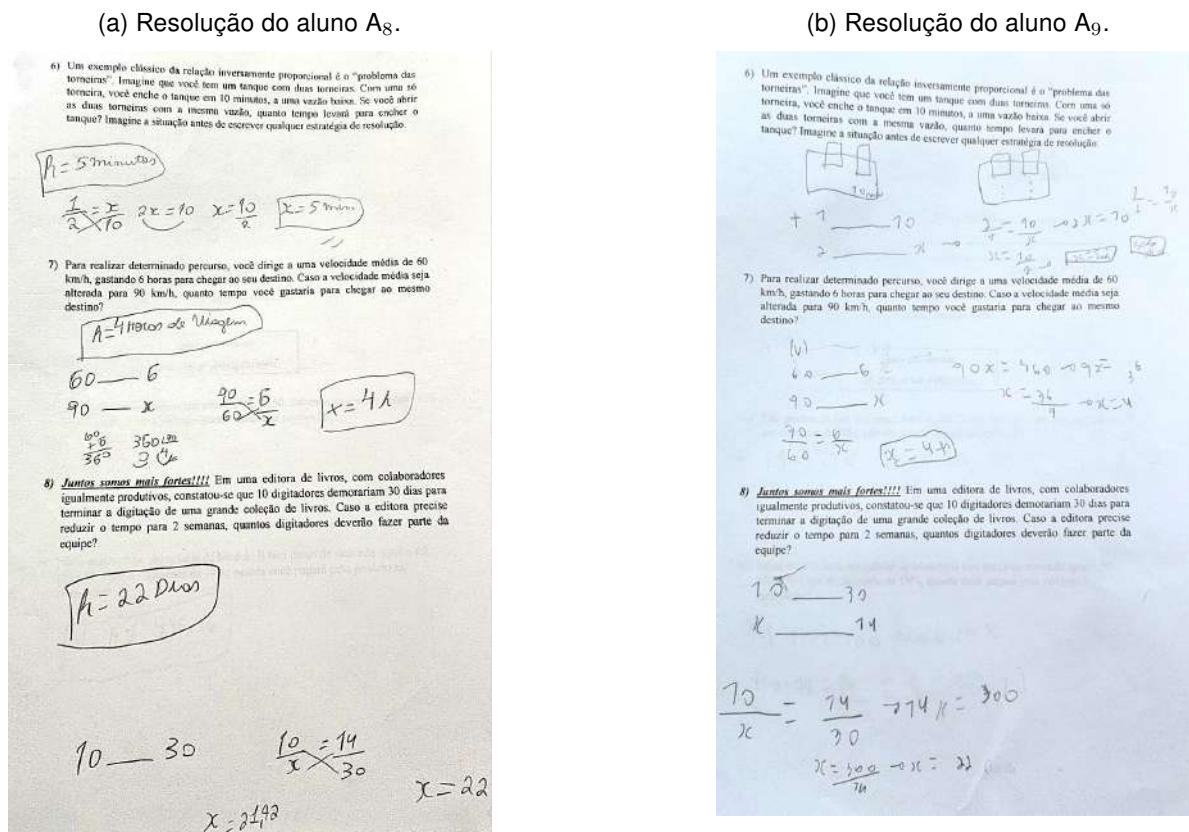
Fonte: Dado da pesquisa coletados pelo autor.

Dessa forma, o pesquisador-professor comparou o gráfico construído pelos alunos e o gráfico que constava na lousa que representava a relação inversamente proporcional. Assim, os alunos puderam compreender as diferenças entre a relação inversa não proporcional e a relação inversamente proporcional.

Os **problemas 6, 7 e 8** tiveram como *problema gerador*, respectivamente, o cálculo do clássico "problema das torneiras", envolvendo o número de torneiras e o tempo necessário para encher um tanque; o problema sobre velocidade média, com ida e volta na mesma distância com velocidades médias diferentes e, consequentemente, tempos diferentes e

o número de trabalhadores com os dias necessários para a conclusão do trabalho, todos caracterizados pela relação inversamente proporcional.

Figura 60 – Resolução dos problemas 6, 7 e 8.



Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Todos alunos utilizaram esquemas que envolvem os conceitos e os teoremas em ação da relação inversamente proporcional utilizando o algoritmo da regra de três.

Assim, pudemos perceber, ao término dos problemas 6, 7 e 8, que a tomada de decisão dos alunos para resolução dos problemas sobre a relação inversamente proporcional estava baseada nas ações, mesmo que implicitamente, do algoritmo da regra de três desenvolvido ao longo dos anos de escolarização. Não houve sequer alguma estratégia de resolução dos problemas que abordasse algum procedimento matemático que não utilizasse o algoritmo da regra de três.

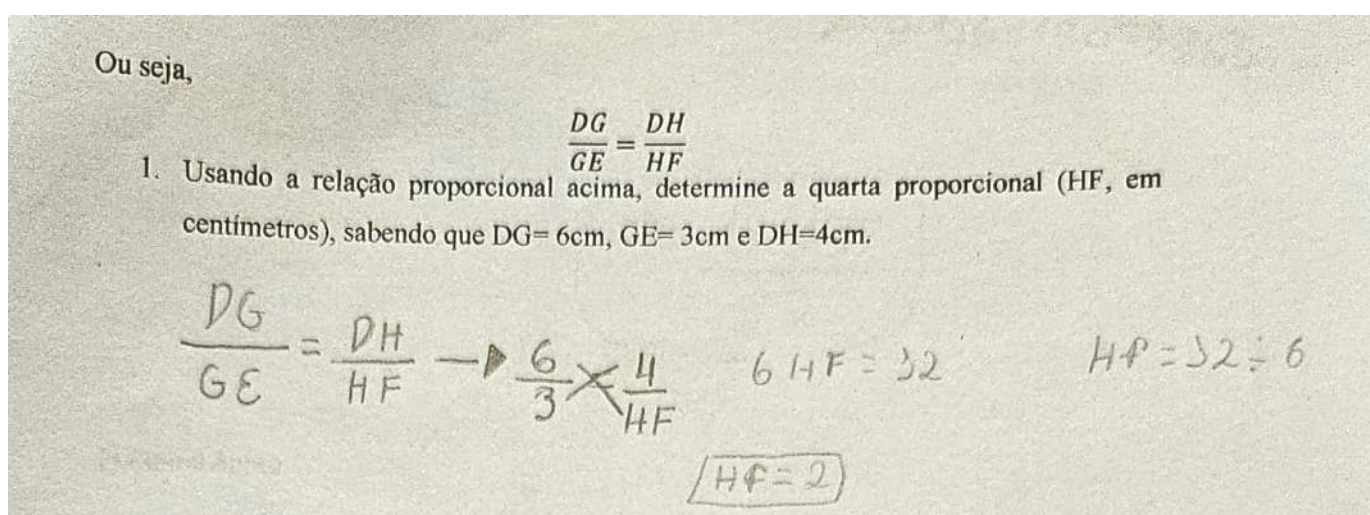
Nos problemas geradores contidos na atividade 2, de uma forma geral, abordam, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, o isomorfismo de medidas na razão de muitos para muitos, isto é, a relação entre as quatro grandezas envolvidos no problema por meio da igualdade entre as duas razões estabelecidas, de modo a possibilitar a aplicação do teorema em ação da proporcionalidade indireta, por meio do algoritmo da regra de três.

4.3 Análise do Trabalho em Grupo

O **problema 1** tem como *problema gerador* o cálculo da quarta proporcional. Para contextualizar, o pesquisador destacou uma viagem na história, mencionando a Biblioteca de Alexandria e a resolução de um problema contido na obra "Os elementos" de [Euclides \(2009\)](#), no livro VI. Após a leitura do problema, o pesquisador fez uma breve explicação sobre os temas abordados no problema.

Na *Turma A*, alguns alunos dos grupos, A_{33} e A_{34} , demonstraram uma grande curiosidade pelo assunto, pois já haviam assistido ao filme "Pato Donald e o país da Matemágica", que havia sido indicado anteriormente. O professor-pesquisador compartilhou o seu celular e permitiu aos alunos fazer uma breve leitura do livro "Os elementos", disponível em seu aplicativo Kindle.

Figura 61 – Problema 1, grupo A_{33}



Fonte: Dado da pesquisa coletados pelo autor.

Todos os grupos da turma propuseram a resolução de forma correta, demonstrando habilidades e competências necessárias para resolução do problema contendo a relação as proporções, embora tenham explicitado, em seus resultados, o valor adimensional.

O **problema 2** tem como *problema gerador* o cálculo do número de ouro. Desta forma, remeteu à divisão do segmento na razão áurea as esculturas do notável escultor grego Fídias, que a utilizou essa proporção em algumas de suas obras. O texto apresenta o número de ouro conhecido por suas aplicações na arte, na arquitetura e na natureza, bem como suas propriedades matemáticas. Após a divisão do segmento na divina proporção, o problema propõe o cálculo numérico do número de ouro, por meio da resolução de equação de 2º grau associada.

Novamente, todos os grupos das duas turmas, trocando conhecimentos e informa-

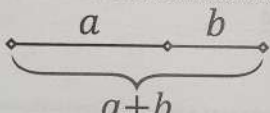
Figura 62 – Problema 2

(a) Grupo A₃₁

2) A razão Áurea: o notável escultor grego de nome Fídias usou o número áureo para esculpir suas esculturas de Zeus de Olímpia e de Atenas Partenon. Ele também colaborou na construção e decoração do Partenon. A Razão Áurea tem vários nomes: *número de ouro*, *proporção divina*, são alguns deles.

a) Uma das formas mais comuns de apresentar a Razão Áurea é pela divisão de uma linha em dois segmentos, em que a razão entre o comprimento total da linha e o comprimento do maior segmento seja igual à razão entre o comprimento do maior segmento e o comprimento do menor segmento.

Para realizar este cálculo, a figura abaixo nos auxiliará.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Chamando $\frac{a}{b} = \phi$, de termine o valor de ϕ (número de ouro). Para isso faça: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a}$ e calcule a raiz positiva da equação de 2º grau. O número de ouro ϕ é irracional.

$\phi + \frac{a}{\phi} = \phi + 1 = \phi^2$ | $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ | $\phi = 1,618 \dots$

$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{1}{\phi}$ | $\frac{a}{a} = 1$ | $\phi = \phi$

$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ | $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ | $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$

$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ | $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ | $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$

$\Delta = b^2 - 4ac$
 $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1)$
 $\Delta = 1 + 4$
 $\Delta = 5$

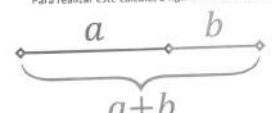
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
 $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2(1)}$
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
 $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(b) Grupo A₃₄

2) A razão Áurea: o notável escultor grego de nome Fídias usou o número áureo para esculpir suas esculturas de Zeus de Olímpia e de Atenas Partenon. Ele também colaborou na construção e decoração do Partenon. A Razão Áurea tem vários nomes: *número de ouro*, *proporção divina*, são alguns deles.

a) Uma das formas mais comuns de apresentar a Razão Áurea é pela divisão de uma linha em dois segmentos, em que a razão entre o comprimento total da linha e o comprimento do maior segmento seja igual à razão entre o comprimento do maior segmento e o comprimento do menor segmento.

Para realizar este cálculo, a figura abaixo nos auxiliará.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Chamando $\frac{a}{b} = \phi$, de termine o valor de ϕ (número de ouro). Para isso faça: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a}$ e calcule a raiz positiva da equação de 2º grau. O número de ouro ϕ é irracional.

$\phi + \frac{a}{\phi} = \phi + 1 = \phi^2$ | $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ | $\phi = 1,618 \dots$

$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{1}{\phi}$ | $\frac{a}{a} = 1$ | $\phi = \phi$

$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ | $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ | $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$

$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ | $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ | $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$

$\Delta = b^2 - 4ac$
 $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1)$
 $\Delta = 1 + 4$
 $\Delta = 5$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
 $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2(1)}$
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
 $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

ções, realizaram o cálculo da raiz positiva da equação de 2º grau característica e determinaram o número de ouro. A única observação do professor-pesquisador foi a justificativa de não considerar a raiz negativa para a determinação do número áureo.

O **problema 3** tem com *problema gerador* o incentivo à pesquisa sobre a espiral áurea e o retângulo áureo. Então, foi requerido aos alunos que realizassem uma pesquisa sobre as aplicações do retângulo e da espiral áureos, sendo disponibilizado o roteamento da internet do professor-pesquisador. Todos os grupos das turmas realizaram a pesquisa e ex-

puseram suas descobertas em texto escrito. Por mais que tenham se dedicado na pesquisa e compartilhamento das descobertas com outros grupos, identificou-se uma dificuldade considerável na organização das ideias, elaboração do texto escrito e na caligrafia.

Figura 63 – Resolução do problema 3, Grupo A₃₅.

3) Espiral Áurea

O retângulo da figura acima tem lados $g \cdot x$ e x e é denominado retângulo de ouro, pois ao montar o quadrado de lado x , o retângulo restante terá a forma do primeiro e o processo poderá se repetir infinitas vezes. Assim, podemos construir a seguinte relação de semelhança:

$$\frac{x}{g \cdot x} = \frac{g \cdot x - x}{x} \rightarrow \frac{1}{g} = g - 1$$

A curva é conhecida como espiral áurea. Responda:

a) O retângulo áureo se ajusta às fachadas de diversas construções e pinturas antigas. Cite algumas destas construções.

R: a fachada da Catedral de Notre Dame.

b) Também, na natureza, encontramos a espiral áurea. Cite em quais fenômenos podemos encontrar o padrão da espiral áurea.

R: desde galhos de árvores, flores e frutos, ossos, animais, galáxias e moléculas de DNA etc.

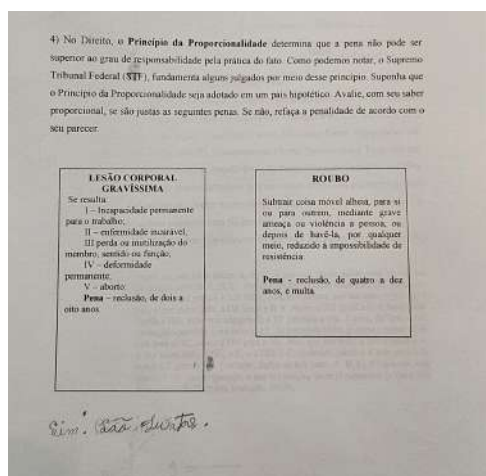
Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

O **problema 4** aborda, como *problema gerador* a aplicação do saber proporcional para o cálculo da pena em um determinado país. Assim, envolveu a discussão do saber proporcional aplicado ao Direito, na teoria da proporcionalidade, na aplicação da lei penal. Nesse problema, o professor-pesquisador suscitou debates em cada grupo individualmente, para avaliarem a aplicação da pena e, conseqüentemente, seus valores sociais. Aproximadamente, 50% dos grupos constantes nas duas turmas, propuseram penas distintas, valorizando o aspecto da dignidade da pessoa humana.

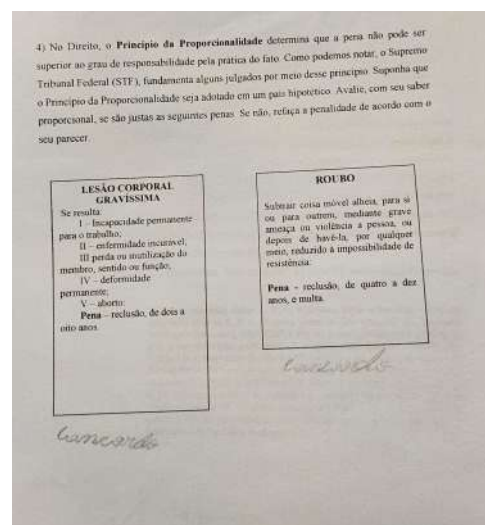
Embora as respostas sejam extremamente sucintas, elas demonstram o quadro atual de nossa sociedade, pois a mercadoria, isto é, os crimes contra patrimônio, têm pena maior do que os crimes contra a dignidade da pessoa humana.

Figura 64 – Problema 4- Considerando a prevalência do crime contra o patrimônio sobre contra a dignidade da pessoa humana

(a) Grupo A₃₂



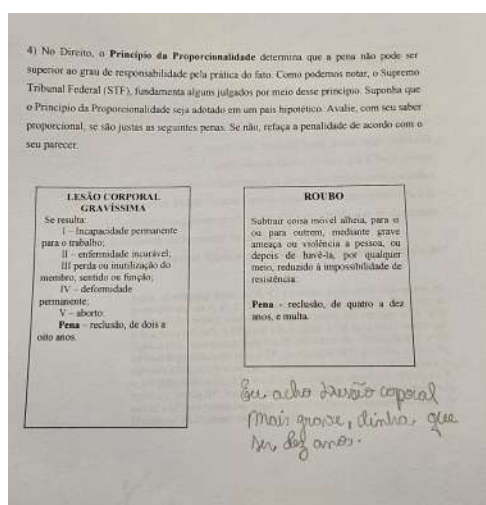
(b) Grupo A₃₃



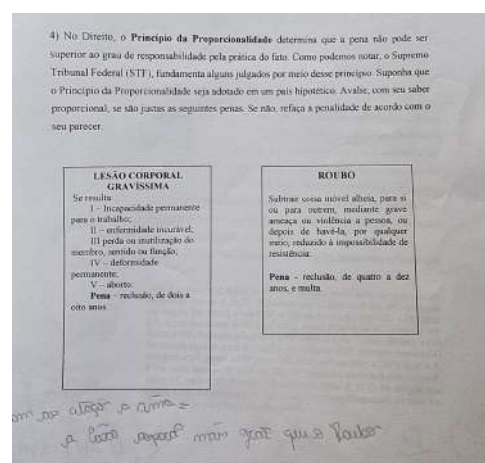
Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Figura 65 – Problema 4- Considerando a prevalência do crime contra o patrimônio sobre contra a dignidade da pessoa humana

(a) Grupo A₃₁



(b) Grupo A₃₄



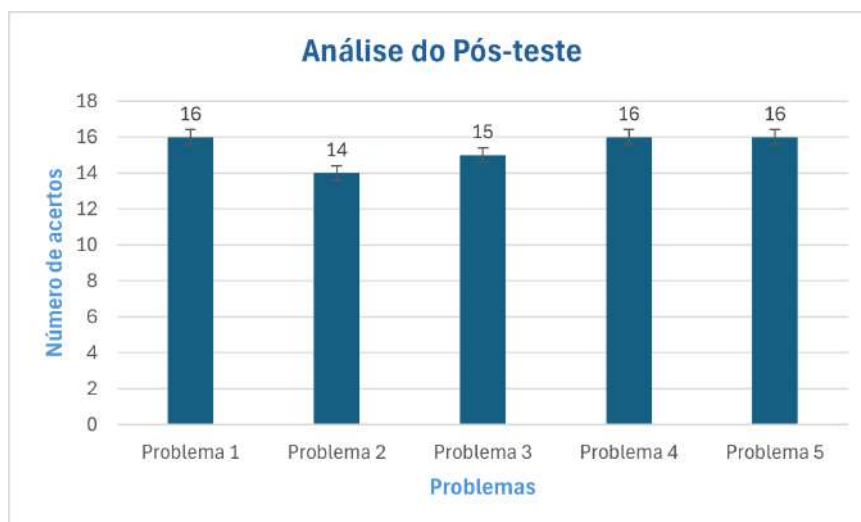
Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

4.4 Análise do Pós-teste

Ao se examinar os resultados obtidos, após a aplicação das atividades da sequência didática, podemos considerá-los bastante positivos, pois mesmo algumas resoluções apresentando erros, possibilitaram demonstrar que os alunos têm conhecimento do saber proporcional, para aplicá-lo em diversas situações da vida.

Percebe-se que, em cada situação proposta, os alunos mobilizaram seus conhecimentos prévios para a resolução dos problemas. A mecanização do algoritmo da regra de

Figura 66 – Análise do Pós-teste

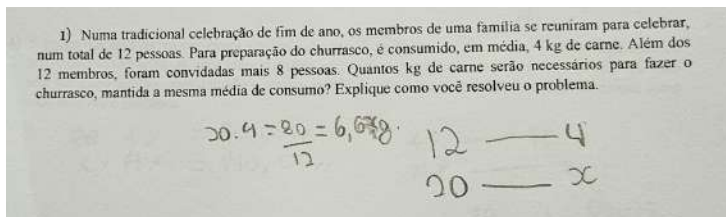
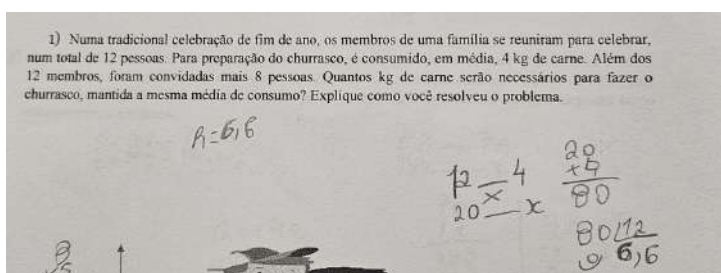


Fonte: Dado da pesquisa coletados pelo autor.

três foi bem constante na tomada de decisão para a resolução dos problemas na sequência didática.

O **problema 1** remeteu a uma situação de aplicação do saber proporcional no cálculo do quantidade de carne para a realização de um churrasco. Todos os alunos utilizaram o algoritmo da regra de três para resolução do problema. Somente um aluno, A_{10} , fez a aproximação para a resposta com duas casas decimais. Os outros alunos, inclusive o aluno A_{10} , com o auxílio da calculadora, utilizaram dois algarismos significativos para expressar a resposta, sem a devida aproximação correta, como a análise do trabalho é sobre o saber proporcional, as questões foram consideradas corretas.

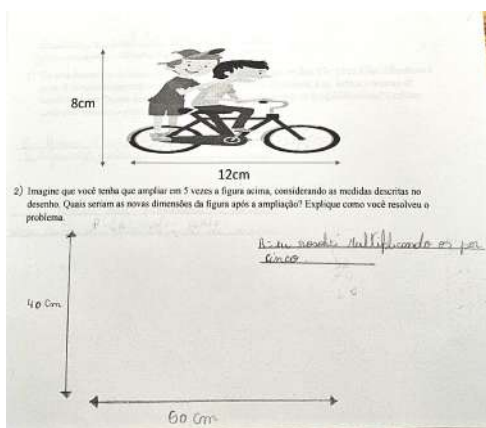
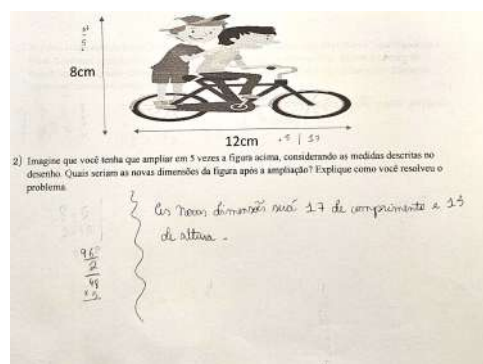
Figura 67 – Resolução do problema 1

(a) Resposta do aluno A₁₀(b) Resposta do aluno A₄.

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelos autor.

No **problema 2**, foi abordado o saber proporcional por meio da resolução de problema envolvendo ampliação de figura geométrica. Na turma, 14 alunos adotaram o produto do fator de ampliação sobre as dimensões constantes no desenho. 2 alunos aplicaram a estrutura aditiva, por meio da soma do fator de ampliação e o valor inicial, errando a resolução do problema. Na figura abaixo, temos um exemplo de cada modelo de resolução da aluna A₇, que aplicou o produto de modo correto, e da aluna A₁₁, que efetuou a soma, errando a resolução da questão.

Figura 68 – Resolução do problema 2

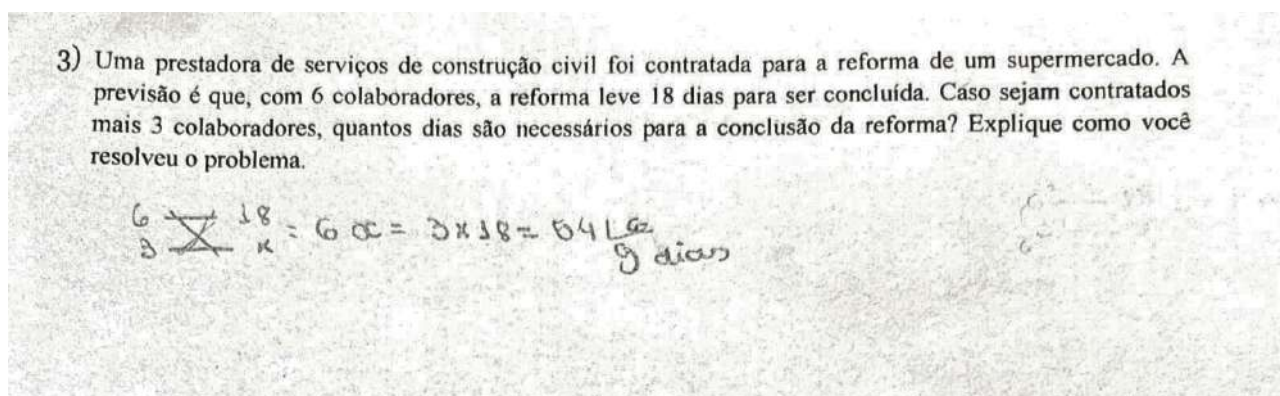
(a) Resposta do aluno A₇(b) Resposta do aluno A₁₁.

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Com o **problema 3**, esperava-se que os alunos tivessem ampliado seus conhecimentos sobre a relação inversamente proporcional, pois foi o invariante operatório que mais demonstrou no pré-teste, os teoremas em ação de modo não válido. Nas duas turmas, houve

uma melhora bastante significativa em relação ao resultado anterior. Os 15 alunos da *turma* Ademostraram, em suas resoluções, que houve uma organização progressiva do invariante operatório da relação inversamente proporcional, resultando no cálculo correto e um aluno cometeu equívoco na resolução do problema.

Figura 69 – Resolução do aluno A₁

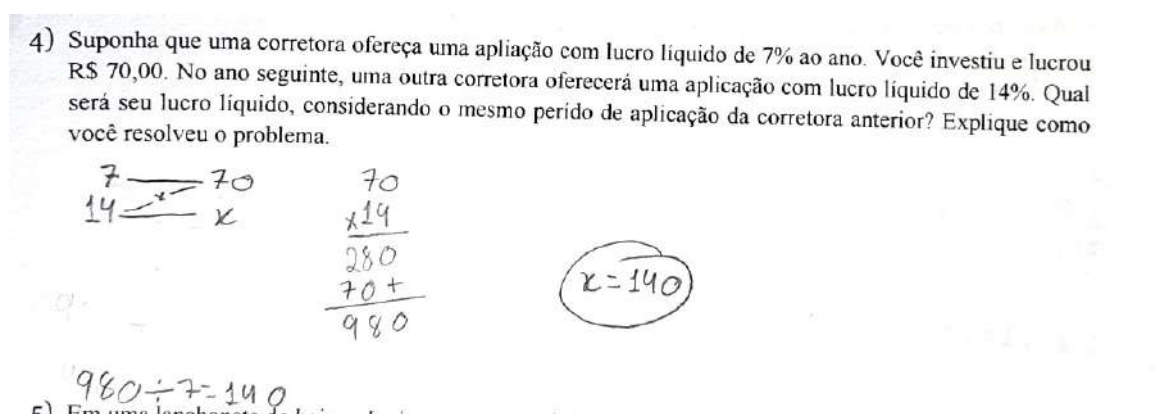


Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Na figura acima, temos resoluções do problema 3, considerando, primeiramente, a relação inversamente proporcional e efetuando os cálculos de modo correto, como por exemplo A₁, e a resolução errada considerando a relação entre as grandezas diretamente proporcionais e não adicionando 3 ao número de colaboradores iniciais, A₂.

No **problema 4**, o saber proporcional é aplicado ao calcular o lucro líquido de uma corretora. Todos os alunos aplicaram o algoritmo da regra de três para o cálculo correto do problema, demonstrando que o invariante operatório da relação diretamente proporcional entre duas grandezas está plenamente válido.

Figura 70 – Resolução do problema 4



Fonte: Dado da pesquisa coletados pelo autor.

O **problema 5** apresentou a situação que envolve o conceito sobre a relação inversamente proporcional. Todos os alunos esquematizaram a relação inversamente proporcional e calcularam o valor correto. Dois alunos argumentaram, dissertativamente, a resolução da questão, conforme a aluna A₁₅, na figura abaixo.

Figura 71 – Resolução do problema 5

(a) Resposta do aluno A₆

5) Em uma lanchonete do bairro, José prepara suco de laranja todos os dias. Ele utiliza 4 liquidificadores e gasta 6 minutos preparando os sucos. Para diminuir o tempo de preparo, José dobrou o número de liquidificadores. Quanto tempo levará para preparar os sucos, usando os 8 liquidificadores? Explique como você resolveu o problema.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow 4 & -6 & \uparrow \\ & 8 & -x \end{array}$$

$$8x = 4 \cdot 6$$

$$8x = 24$$

$$x = \frac{24}{8}$$

$$x = 3 \text{ liquidificadores}$$

Utilizei razão e proporção, infelizmente tenho mais liquidificadores vai demorar menos tempo.

(b) Resposta da aluna A₁₅.

5) Em uma lanchonete do bairro, José prepara suco de laranja todos os dias. Ele utiliza 4 liquidificadores e gasta 6 minutos preparando os sucos. Para diminuir o tempo de preparo, José dobrou o número de liquidificadores. Quanto tempo levará para preparar os sucos, usando os 8 liquidificadores? Explique como você resolveu o problema.

Se com 4 liquidificadores ele gasta 6 minutos, então com 8 liquidificadores ele gastará metade do tempo, ou seja, 3 minutos, portanto, levará 3 minutos para preparar os sucos usando os 8 liquidificadores.

Fonte: Dados da pesquisa coletados pelo autor.

Como observado, houve um aumento do número de acertos quando comparasse pré-teste e pós-teste, demonstrando que a sequência didática contribuiu efetivamente para que os alunos dominassem conceitos relacionados ao estudo de proporcionalidade e do saber proporcional, que antes eles não dominavam, principalmente sobre a relação inversamente proporcional. Após a análise dos resultados, é possível constatar que:

- Alguns erros cometidos pelos alunos na resolução de problemas não estavam relacionados diretamente à aplicação do saber proporcional, mas, por exemplo, a erros aritméticos;
- O compartilhamento de saberes e informações entre os alunos nos debates promovidos, os momentos de intervenção do professor-pesquisador durante as atividades propostas na sequência didática e a realização da atividade em grupo favoreceram a aprendizagem de conceitos matemáticos;

- Após o desenvolvimento da sequência didática, o número de acertos na resolução dos problemas aumentou em comparação aos dados obtidos no pré-teste, demonstrando que a metodologia de resolução de problemas, aplicada por meio da sequência didática proposta, contribuiu para a melhoria do saber proporcional dos alunos.

A aplicação da sequência didática proposta neste trabalho partiu de algumas inquietações que permeiam a minha trajetória profissional docente. Uma delas considera comentários comuns aos professores de Matemática, que constantemente deparam com a frase que “é difícil aprender Matemática”. Outra refere-se à utilidade dos conhecimentos matemáticos na vida, ou seja, a famosa pergunta “serve para quê?”.

Diante do exposto, as atividades aplicadas, desde a construção do pré-teste até o pós-teste, exigiram bastantes pesquisas, que possibilitaram novos olhares sobre as estratégias pedagógicas e a relação do ensino-aprendizagem da Matemática. Buscou, assim, a aproximação do currículo oficial de Matemática à realidade atual dos alunos, a partir de temas contemporâneos, de grande impacto social e potencialmente engajadores, que despertaram diversas curiosidades por parte dos alunos, promovendo maiores interesses pelo estudo da Matemática e suas aplicabilidades na concretude da vida. Portanto, a metodologia de resolução de problemas aplicado ao saber proporcional não se restringe a uma estratégia pedagógica do ensino da Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Com as devidas adequações curriculares e metodológicas, ela pode ser aplicada aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e nas modalidades de ensino.

Assim, os resultados da pesquisa sobre aplicação da metodologia de resolução de problemas sobre o saber proporcional propiciaram a construção de saberes dos alunos, tornando-os protagonistas na resolução de problemas, bem como possibilitaram a relação dialógica, permitindo assim, o desenvolvimento da autonomia, do pensamento crítico e colaborando com as construções de habilidades e competências matemáticas, pois, ao final da pesquisa, os alunos demonstraram uma evolução na resolução de problemas envolvendo o saber proporcional e sua aplicação em diversas situações da vida cotidiana.

Capítulo 5

Considerações Finais

A avaliação internacional PISA tem evidenciado, nos últimos anos, que ao final do Ensino Fundamental, etapa de ensino mais longa da escolarização obrigatória no Brasil, os alunos não desenvolveram ou consolidaram as habilidades matemáticas básicas exigidas no decorrer de suas trajetórias escolares. A presente pesquisa partiu de muitas inquietações do professor-pesquisador em relação ao ensino da Matemática no atual contexto, caracterizado pelo uso das tecnologias digitais em um mundo cada vez mais conectado e, também, da percepção, em sua experiência docente, do desinteresse dos alunos pelo estudo da Matemática, considerando suas aplicabilidades na concretude das situações cotidianas.

A pesquisa traçou como objetivo principal investigar como a metodologia de resolução de problemas aplicada ao Teorema da Proporcionalidade e o conhecimento do Saber Proporcional podem contribuir na construção de aprendizagens matemáticas, para uma maior compreensão da realidade circundante, apresentando a Matemática de forma mais concreta, dinâmica e acessível aos alunos. Para a concretização do propósito do trabalho de apresentar a Matemática como uma ciência viva, pulsante, o pesquisador-professor fez uma ampla pesquisa sobre o saber proporcional e suas possibilidades de aplicações em diversas áreas do conhecimento humano, com vistas à elaboração das atividades que constam na sequência didática.

Cada escolha individual dos alunos para as resoluções dos problemas propostos possibilitou identificar os conhecimentos prévios, assim como suas inseguranças e dificuldades diante da atividade. De acordo com os resultados alcançados, percebeu-se um ressignificar do conceito do saber proporcional, independentemente dos acertos e erros registrados na pesquisa, pois o caminho do aprendizado é uma atividade intensa e desafiadora na produção de novos conceitos. Os alunos participaram ativamente na construção dos conceitos, bem como nas atividades propostas e no trabalho em grupo. Por isso, as dificuldades em manter a participação ativa dos alunos, conforme relatadas por [TOBIAS e SANTOS; GRIPP; BARRETO](#) não foi observada neste trabalho.

O afastamento das aulas presenciais, devido à pandemia da Covid-19 marcou signi-

ficativamente suas trajetórias escolares, além das consequências devastadoras em âmbito pessoal e familiar, conforme relatado por eles em diversos momentos da pesquisa; seja durante a realização das atividades ou em conversas informais, foi possível identificar dificuldades matemáticas básicas e de Língua Portuguesa, sobretudo relativas à organização do texto escrito, corroborando com as análises de [NASCIMENTO](#) e [CORRÊA; BARBOSA](#). Na pesquisa, foi observada uma certa impaciência dos alunos nas resoluções de alguns problemas, principalmente os problemas que abordavam a relação inversamente proporcional. Diante dessas situações, o professor-pesquisador solicitou aos alunos que respirassem pausada e profundamente, trazendo a atenção para a atividade proposta e prosseguindo na resolução dos problemas.

A participação efetiva da Direção Escolar, em todo o processo de autorização e aplicação das atividades, bem como dos responsáveis legais dos alunos foram fundamentais na realização do trabalho. O incentivo e entusiasmo da Direção Escolar e dos responsáveis possibilitaram o desenvolvimento da pesquisa de forma mais acolhedora.

As obras indicadas como referencial teórico da pesquisa sobre a aplicação do saber proporcional materializado sobre as relações direta e indiretamente proporcionais, bem como os casos de não proporcionalidade, embora tenham múltiplas visões sobre o tema são unânimes em afirmar que o estudo da proporcionalidade abarca conceitos que são complexos, havendo um uso excessivo da aplicação do algoritmo da regra de três sem que os conceitos das relações proporcionais estejam plenamente apropriados pelos alunos, conforme autores [OLIVEIRA; SANTOS, SILVA](#) e [SCHMIDT](#). Os resultados da pesquisa confirmam o uso excessivo do algoritmo da regra de três. Porém, um dado que a presente pesquisa revela que, por mais excessivo que seja o emprego do algoritmo da regra de três, o conceito do saber proporcional envolvendo a relação inversamente proporcional tem maiores índices de apropriação conceitual que a relação diretamente proporcional. Possivelmente, deve-se ao fato da relação direta ser uma memória da espécie, vindo desde o início da civilização, conforme consta no referencial teórico do trabalho.

Deste modo, neste trabalho, a aplicação da metodologia de resolução de problemas por meio da sequência didática proposta, possibilitou a construção de debates sobre o saber proporcional e, com isso, a relação desse saber com outras áreas do conhecimento. Durante as mediações promovidas pelo professor-pesquisador, vários temas foram discutidos, com vistas à compreensão do saber proporcional de maneira mais concreta, por exemplo, os problemas envolvendo o cálculo de desconto, no início da apresentação do conceito da relação inversa, ocasionaram conversas descontraídas sobre as promoções na semana da “black friday”, principalmente o interesse nos “novos preços” dos celulares, objeto de desejo da maior parte dos alunos. As discussões envolvendo o saber proporcional e suas aplicações despertaram novos olhares a respeito das aprendizagens matemáticas e como essas se relacionam com a vida, ampliando a visão de mundo dos alunos, confirmando as

análise de [SILVA et al.](#) e [SILVESTRE; PONTE](#).

O tempo empregado para o desenvolvimento da sequência didática foi suficiente para a total execução dos objetivos traçados, conforme previsto. Em relação à prática docente do pesquisador-professor, a pesquisa possibilitou a concretização e aplicação de parte dos conhecimentos desenvolvidos durante o curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), aumentando significativamente seu conhecimento matemático.

Os resultados da presente pesquisa indicam que o processo de ensino-aprendizagem sobre o conceito do saber proporcional foi positivo, pois a análise dos dados envolvendo o pré-teste e o pós-teste apontam para um aumento considerável do número de acertos entre essas etapas, evidenciando que a Metodologia de Resolução de Problemas aplicada ao Saber Proporcional colaborou de forma satisfatória na construção de novos conceitos e de novas aprendizagens matemáticas, respondendo a questão-problema que norteia a pesquisa. Assim, espera-se que este trabalho contribua para o desenvolvimento de novas abordagens didáticas do tema proporcionalidade, oferecendo subsídios para que professores reexaminem suas práticas pedagógicas cotidianas em relação ao ensino da Matemática, proporcionando aos alunos um aprendizado mais efetivo, criativo e prático da Matemática, com vistas à melhoria do ensino.

Referências

- AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. 3. ed. [S.l.: s.n.], 2013. Citado na página 29.
- ARRUDA, T. S. *A criatividade no trabalho pedagógico do professor e o movimento em sua objetividade*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2015. Citado na página 76.
- BARROSO, M. L. R. *ADI/6421 - Ação Direta de Inconstitucionalidade*. 2024. ADI 6421. Disponível em: <https://jurisprudencia.stf.jus.br/pages/search/sjur500494/false>. Citado na página 33.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. ISBN 9788521206415. Citado 5 vezes nas páginas 27, 28, 29, 30 e 31.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: Ministério da Educação, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 56.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 43, 44, 52 e 56.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 44, 45, 46, 52, 56 e 60.
- BRASIL. *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Brasília, DF: Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, 2018. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Citado na página 59.
- BRUN, J. et al. *Didática das matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 54.
- CONARD, N. J.; MALINA, M.; MÜNZEL, S. C. New flutes document the earliest musical tradition in southwestern Germany. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 460, n. 7256, p. 737–740, 2009. Citado na página 33.
- CONTADOR, P. R. M. *A matemática na arte e na vida*. 3. ed. São Paulo: [s.n.], 2015. Citado 4 vezes nas páginas 31, 33, 34 e 35.
- CORRÊA, S.; BARBOSA, N. M. Sequência didática com recursos tecnológicos integrados visando o ensino e aprendizagem de proporcionalidade: uma experimentação com atividades investigativas inspirada em uma pesquisa docente. *EM TEIA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, Universidade Federal de Pernambuco, v. 12, n. 1, p. 1–25, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 110.

- ENDLER, O. *Teoria dos números algébricos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1986. v. 15. Citado na página 30.
- EUCLIDES. *Os elementos*. 1. [S.l.]: UNESP, 2009. ISBN 9788571399358. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 100.
- FACHIN, M. I. N. E. D. S. O. N. *HC 226653 AGR / DF - DISTRITO FEDERAL*. 2024. HC 226653. Disponível em: <https://jurisprudencia.stf.jus.br/pages/search/sjur500399/false>. Citado na página 33.
- FILHO, A. P. G.; CAYE, A. A. B. S. Proporcionalidade em ação nos tribunais: o tribunal constitucional alemão e o Supremo Tribunal Federal brasileiro. *Direito Público*, v. 19, n. 103, 2022. Citado na página 33.
- GERHARDT, T. E.; SOUZA, A. C. d. Aspectos teóricos e conceituais. *Métodos de pesquisa*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. p. 13-31, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 58.
- GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. [S.l.]: Editora Atlas SA, 2002. Citado na página 55.
- GULEV, S. K. et al. Changing state of the climate system. Cambridge University Press, 2021. Citado na página 40.
- HAN, B.-C. *Sociedade da transparência*. 4. reimpr.. ed. Petr polis: Vozes, 2019. ISBN 9788532654717. Citado na página 90.
- KAYA, K. S. et al. Assessment of facial analysis measurements by golden proportion. *Brazilian journal of otorhinolaryngology*, v. 85, n. 4, p. 494–501, 2019. Citado na página 38.
- LATTAO, V. et al. O projeto FIRST-ART: documentação, conservação e gestão das primeiras manifestações da arte rupestre no sudoeste da Península Ibérica: As Grutas de Escoural e Maltravieso. *Boletim do Centro Português de Geo-História e Pré-História*, v. 5, p. 2, 2023. Citado na página 33.
- LIBÂNIO, J. C. *Didática*. 2. ed. [S.l.]: Cortez Editora, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 24, 59 e 76.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 9. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas*. 3. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2018. Citado na página 48.
- LIVIO, M. *Razão áurea*. [S.l.]: Editora Record, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 37.
- LUCKESI, C. C. *Avaliação em educação: questões epistemológicas e práticas*. [S.l.]: Cortez Editora, 2022. Citado na página 58.
- LUND, F. M. *Ad quadratum: a study of the geometrical bases of classic & medieval religious architecture, with special reference to their application in the restoration of the Cathedral of Nidaros (Thronhjelm) Norway*. [S.l.]: BT Batsford, 1921. v. 2. Citado na página 37.

- MIRANDA, S. de. *Estratégias didáticas para aulas criativas*. [S.l.]: Papyrus Editora, 2020. Citado na página 80.
- MONTES, M.; TRUJILLO, I. Intracluster light: a luminous tracer for dark matter in clusters of galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 482, n. 2, p. 2838–2851, 2019. Citado na página 32.
- MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em ensino de ciências. Porto Alegre. Vol. 7, n. 1 (jan./mar. 2002), p. 7-29*, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- MUNIZ, M. Bitar & Cristiano Alberto. *Aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais*. 1. ed. Curitiba: Editora CRV, 2009. ISBN 978-8562480287. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 84.
- NASCIMENTO, R. F. D. S. *ANÁLISE DE ERROS NO PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDADE*. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ, Santarém, Pará, set. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 110.
- NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar-Volume 3 Introdução à Análise*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado na página 49.
- OECD. *PISA 2022 Results (Volume I)*. [s.n.], 2023. 491 p. Disponível em: <https://www.oecd-ilibrary.org/content/publication/53f23881-en>. Citado na página 17.
- OLIVEIRA, I.; SANTOS, M. C. O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples: uma análise das estratégias. *23ª RA da ANPEd. Anais. Caxambu, MG*, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 110.
- OLIVEIRA, N. d. C. N. d. Dificuldades na resolução de problemas sobre proporcionalidade na 2ª série do ensino médio: estudo de caso. Universidade Federal da Paraíba, 2019. Citado na página 23.
- ONUCCHI, L. de la Rosa; ALEVATTO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H. *Resolução de Problemas: Teoria e Prática*. 2. ed. Jundia SP: [s.n.], 2021. Citado 11 vezes nas páginas 7, 8, 18, 19, 52, 53, 54, 76, 77, 79 e 87.
- PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. [S.l.]: Autêntica, 2016. Citado na página 24.
- POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. [S.l.]: Interciência, 1978. ISBN 9788571931367. Citado na página 52.
- REALE, G. *Para uma nova interpretação de Platão*. [S.l.]: Edicoes Loyola, 1997. Citado na página 37.
- SAGAN, C. *Cosmos*. 1. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2017. ISBN 9788535929881. Citado na página 32.
- SANTOS, R. A. dos; GRIPP, L. R.; BARRETO, T. C. C. O ensino de proporcionalidade com uma abordagem lúdica por meio da robótica educacional. *Educação Matemática em Revista*, v. 26, n. 73, p. 170–181, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 109.

- SCHMIDT, D. F. G. S. Pensando perspectivas para o ensino da proporcionalidade: uma crítica à regra de três. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 110.
- SILVA, A. C. d. O. et al. Vivenciando a economia doméstica por meio da proporcionalidade no ensino fundamental. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 111.
- SILVA, D. M. L. Uma análise do ensino de proporcionalidade no ensino fundamental: realidade e perspectivas. Universidade Federal de São Carlos, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 110.
- SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. da. Uma experiência de ensino da proporcionalidade no 2º ciclo do ensino básico. *Atas do Encontro*, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 111.
- SOUZA, D. C. P. de; TEIXEIRA, R. R. P. *Matéria escura e energia escura em atividades de divulgação científica*. [S.l.: s.n.], 2021. v. 11. Citado na página 32.
- TOBIAS, P. R. N. A. Sala de aula invertida na educação matemática: uma experiência com alunos do 9º ano no ensino de proporcionalidade. Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 109.
- VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*, Lawrence Erlbaum Associate, p. 39–59, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 74.
- VERGNAUD, G. The theory of conceptual fields. *Human development*, S. Karger AG Basel, Switzerland, v. 52, n. 2, p. 83–94, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.
- VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Paraná: URPR, 2011. Tradução de Maria Lucia Faria Moro;. Citado 3 vezes nas páginas 20, 26 e 27.
- VERGNAUD, G. Qu est-ce que la pense? *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, Cairn, n. 3, p. 277–299, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 25, 59 e 75.
- WALLE, J. A. Van de. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. [S.l.]: Penso Editora, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 53.
- ZANELLA, M. Schmitt; BARROS Rui Marcos de Oliceira. Teoria dos campos conceituais: situações problemas da estrutura aditiva e multiplicativa de naturais. *Curitiba: CRV*, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 24, 25, 26, 59, 74 e 88.

Apêndices

APÊNDICE A

Documentos de Autorização

De: Oscar Alfredo Paz La Torre
(Professor Associado do Laboratório de Ciências Matemáticas – CCT/UENF)

Para: Direção da Escola Municipal Conselheiro Josino

AUTORIZAÇÃO DA DIREÇÃO DA UNIDADE ESCOLAR

Prezada Diretora,
Pelo presente, cumprimento, atenciosamente, Vossa Senhoria, **Fatima Regina Duarte Silva** e solicito a autorização para que **Sérgio Souza de Matos**, discente regularmente matriculado no curso de Mestrado Profissional em Matemática, em Rede Nacional (PROFMAT), pela Universidade Estadual do Norte Fluminense, possa realizar suas atividades de Pesquisa de Campo, nas turmas do 9º ano de escolaridade do Ensino Fundamental, nesta Unidade Escolar, durante os meses de outubro, novembro e dezembro, referentes ao 4º bimestre do ano letivo em curso.

Na oportunidade, ressaltamos a importância da pesquisa científica, que busca articular a instituição de ensino superior e a escola pública, com o intuito de aperfeiçoar a formação docente no âmbito da Educação Básica. Agradecemos, antecipadamente, pela atenção e nos colocamos à disposição para o permanente diálogo.
Atenciosamente,

Campos dos Goytacazes - RJ, 15 de outubro de 2023

Oscar Alfredo de La Paz
Matrícula:

Eu, _____, Diretora da Escola Municipal Conselheiro Josino, autorizo a participação das turmas de 9º ano de escolaridade do Ensino Fundamental na pesquisa de campo, desenvolvida pelo professor Sérgio Souza de Matos.

Trabalho de Pesquisa Científica

Autorização

Prezados Pais e/ou Responsáveis,

Os discentes do 9º ano de escolaridade do Ensino Fundamental da Escola Municipal Conselheiro Josino estão sendo convidados a participar da pesquisa de campo do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), realizado pelo Mestrando e servidor da instituição, Professor Sérgio Souza de Matos. A pesquisa será realizada na própria Escola, em dias e horários combinados, por meio de atividades de Matemática e aplicação de questionários, buscando estratégias pedagógicas que auxiliem no processo de ensino e aprendizagem de Proporcionalidade. Assim, pedimos, gentilmente, sua autorização para que ele (a) possa participar da pesquisa.

Pedimos, ainda, que seja autorizado o registro de imagem dele (dela) realizando as atividades da pesquisa e respondendo aos questionários. Aproveitamos para informar que nomes e imagens não serão identificados.

Desde já, agradeço a colaboração.

Eu, _____, autorizo a participação
de meu filho(a) _____ na pesquisa
desenvolvida pelo Mestrando Sérgio Souza de Matos.

APÊNDICE B

Pré-teste

B.1 Pré-teste

Escola: _____

Estudante: _____

Professor: _____

Turma: _____ **Data:** ____/____/____

Pré-teste

- 1) Imagine que você e toda a sua família aprecie o famoso cafezinho. Para cada garrafa de café, você vai utilizar 2,5 colheres de café torrado e moído. De repente, você recebe a notícia de que chegarão parentes. Mantendo as mesmas proporções, se você tivesse que fazer 3 garrafas de café, qual a quantidade de colheres de café você utilizaria?
- 2) Depois de apreciar o cafezinho com os parentes, você vai decorar sua parede da sala com uma moldura que, em breve, receberá uma fotografia. Inicialmente, conforme figura à esquerda, você coloca em sua parede um quadro com 1,0 m de altura e 1,5 m de comprimento. Vendo que ficaria mais estético um quadro maior, você aumenta em 2,0 m de altura sua moldura, resultando em uma nova altura de 3,0 m. Mantidas as mesmas proporções, qual será o novo valor (x) do comprimento?

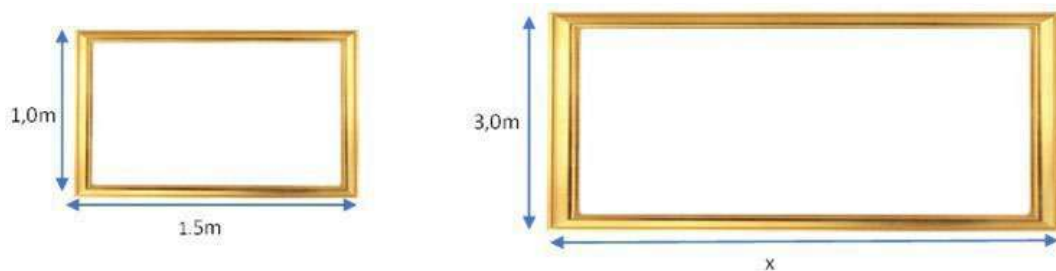


Figura 1: retângulos semelhantes

- 3) Finalmente as férias estão chegando!! Antes de viajar, você deve pintar o muro da casa. Inicialmente, você resolve sozinho pintar a parte da frente do muro, demorando quatro dias para executar a tarefa. Para a parte restante, você convida 2 amigos para te ajudar na tarefa. Imagine que seus amigos são tão habilidosos quanto você. Em quanto tempo, mantido o mesmo ritmo de trabalho, vocês juntos terminarão a tarefa?
- 4) Aproveitando a viagem, você far uma comprinha de artesanato local. O vendedor, notando que você é um turista, diz que o valor total da conta é R\$ 150,00. Notando seu descontamento com o valor dos produtos, oferece um desconto de 10% (resultando no desconto de R\$ 15,00). Negociando um pouco mais, você consegue um desconto de 30% sobre o valor inicial. Qual será o valor do desconto?
- 5) Durante a viagem, devido à grande quantidade de veículos na pista, você levou 4h para chegar a seu destino, com uma velocidade média de 60km/h. No retorno, você pode manter a velocidade média de 80km/h, conforme permitido na lei de trânsito. Quanto tempo você levará para retornar a sua casa?

APÊNDICE C

Sequência Didática

C.1 Grandezas diretamente proporcionais

Escola: _____

Estudante: _____

Professor: _____

Turma: _____ Data: ____/____/____

Situações-problemas: grandezas diretamente proporcionais

Para desenvolver o raciocínio proporcional, é fundamental entender o conceito de **razão** como uma comparação multiplicativa entre duas grandezas.

- 1) Vamos discutir a razão por meio de algumas situações:
 - a) Qual a razão entre o número de meninas e o número total de estudantes presentes em sua turma?

 - b) Qual a razão entre o número de meninas e meninos na sua turma?

- 2) Aproveite o papel milimetrado e desenhe um segmento $AB=4\text{cm}$ e um outro segmento $CD=9\text{cm}$. Qual a razão entre:
 - a) AB e CD :

 - b) CD e AB :

Podemos expressar o conceito de probabilidade e porcentagem como razão por exemplo.

Atenção: As probabilidades são razões entre um espaço de amostra específica e o espaço total da amostra, para eventos equiprováveis .

- 3) Agora, calcule a probabilidade de uma menina ser sorteada na turma.

Porcentagem é a razão entre a parte e o todo.

4) Calcule a porcentagem entre o número de meninas e meninos na turma.

- Faça uma pesquisa sobre a razão áurea (**aproveite a dica**) e discuta com os colegas de grupo as informações mais interessantes.

Você vai viajar nas suas férias de verão e vai tirar muitas fotos com seu celular. Quantas fotos a memória do seu aparelho celular é capaz de armazenar?

Dados do aparelho (em Gigabytes):

- Memória total: **64GB**
- Memória ocupada pelos aplicativos e dados do sistema: **62,2GB**

5) Com a calculadora do celular, calcule quantos GB você tem disponível para armazenamento de fotografias

Vamos construir uma tabela para organização de dados. Você deve utilizar a seguinte informação: uma fotografia tem, em média, **2,6MB (Megabytes)**. Complete a tabela abaixo e, com o papel milimetrado, desenhe o gráfico que relaciona o número de fotografias com o total de MB disponíveis.

Número de fotografias	1	2	3	4	5	6	7
MB	2,6						

Anote: Analisando os dados, podemos definir que **duas grandezas são diretamente proporcionais quando, ao multiplicar uma delas por um determinado número, a outra também fica multiplicada pelo mesmo número.**

6) Para melhor compreensão sobre a **proporcionalidade direta**, desenhe na malha quadriculada um retângulo cujos lados têm medida da base igual a 5cm e medida da altura igual a 8cm. Desenhe um segundo retângulo, no qual cada lado tenha o dobro das medidas do retângulo anterior. Os lados são proporcionais? E suas áreas, são proporcionais aos lados?

7) Além de suas fotos, você também comprará alguns itens. Suponha que você comprou 4 itens por R\$ 15,00. Se você quiser comprar 20 itens, quanto pagará por eles? Depois, escreva como você pensou na resolução dessa questão.

8) Está chegando a *Black Friday* e você vai aproveitar para fazer mais uma compra. Quanto você vai gastar comprando cinco camisas? Observe as informações e explique como você a resolveu.

Duas camisas

R\$ 100,00

5 camisas

n reais

9) Você seria capaz de responder, neste momento, a indagação inicial de seu problema: quantas fotos novas cabem em seu celular sabendo que 1024 MB equivalem a 1 GB?

Claro que você vai argumentar que pode salvar as fotos na “nuvem”. Para o ano de 2025, alguns estudos indicam que a quantidade total de dados criados, capturados, copiados e consumidos no mundo cheguem a chegue a 175ZB.

- 1 byte (B) = 8 bits
- 1 kilobyte (KB) = 1.024 bytes
- 1 megabyte (MB) = 1.024 kilobytes
- 1 gigabyte (GB) = 1.024 megabytes
- 1 terabyte (TB) = 1.024 gigabytes
- 1 petabyte (PB) = 1.024 terabytes

- **1 exabyte (EB)** = 1.024 petabytes
- **1 zettabyte (ZB)** = 1.024 exabytes
- **1 yottabyte (YB)** = 1.024 zettabytes

10) De acordo com algumas fontes, a capacidade de armazenamento do Google é de 100 de gigabytes. Para armazenar todas as informações, quantos HDs, com 1 terabytes, são necessários aproximadamente?

Pense nisso: Se todas as informações contidas nos data center do mundo inteiro fossem impressas em papel, seriam necessárias 14 trilhões de árvores. A quantidade de papel produzido daria para embrulhar a Terra 7 vezes.

C.2 Grandezas inversamente proporcionais

Escola: _____

Estudante: _____

Professor: _____

Turma: _____

Data: ____/____/____

Situações-problemas: descontos e grandezas inversamente proporcionais

Uma grande loja de varejo faz a seguinte promoção:

Mais por Menos

Até 15% off em alguns itens

- a) Um produto A tem um preço total de R\$ 23,50. Sabendo que este produto terá um desconto de 10%, calcule quanto custará na promoção.
- b) Nesta mesma loja, um celular de Modelo B tem preço de mercado igual a R\$ 1099,00. Com do desconto de 14%, quanto você pagará pelo produto na promoção?

Agora, refaça os itens acima com o valor de desconto máximo permitido de 15%. Observe as modificações no valor a pagar. Reflita sobre essa nova situação.

2) O novo celular de José custou R\$ 830,00. Ele deu um sinal de R\$ 250,00.

Determine a porcentagem do valor de venda que foi o sinal de Jose.

3) Em 1950, a população rural brasileira era de 33.161.506 habitantes. Vinte anos depois, houve uma redução de 44% de habitantes. Quantas habitantes viviam em áreas rurais em 1970?

4) Observe a tabela abaixo:

x	1	2	3	4	5	6
y	200	100	50	25	12,50	6,25

a) Você observa algum padrão (regularidade) entre as varrições das grandezas?
Se sim, como elas evoluem?

b) Se $x = 7$, qual valor o valor do y?

Atenção: *Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais quando ao multiplicar uma delas por um número qualquer, a outra fica dividida por esse mesmo número.*

- 5) Com o papel milimetrado, tente fazer um esboço do gráfico com os valores da questão acima.
- 6) Um exemplo clássico da relação inversamente proporcional é o “problema das torneiras”. Imagine que você tem um tanque com duas torneiras. Com uma só torneira, você enche o tanque em 10 minutos, a uma vazão baixa. Se você abrir as duas torneiras com a mesma vazão, quanto tempo levará para encher o tanque? Imagine a situação antes de escrever qualquer estratégia de resolução.
- 7) Para realizar determinado percurso, você dirige a uma velocidade média de 60 km/h, gastando 6 horas para chegar ao seu destino. Caso a velocidade média seja alterada para 90 km/h, quanto tempo você gastaria para chegar ao mesmo destino?
- 8) **Juntos somos mais fortes!!!!** Em uma editora de livros, com colaboradores igualmente produtivos, constatou-se que 10 digitadores demorariam 30 dias para terminar a digitação de uma grande coleção de livros. Caso a editora precise reduzir o tempo para 2 semanas, quantos digitadores deverão fazer parte da equipe?

C.3 Trabalho em grupo

Escola: _____

Estudantes: _____

Professor: _____

Turma: _____

Data: ____/____/____

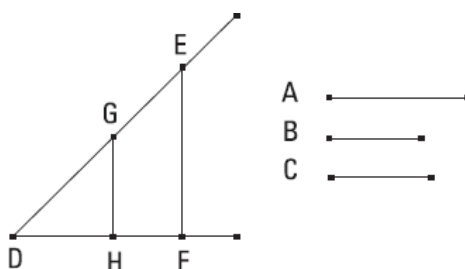
Trabalho em Grupo

Um passeio pela história

A Biblioteca de Alexandria foi uma das maiores e mais importantes do mundo antigo e, anexo a ela, havia um Centro de Pesquisa. Nela, existiam obras espetaculares, que deram início a fabulosos estudos. Alguns nomes que pesquisaram nessa biblioteca foram Arquimedes (ali ele criou o “Parafuso de Arquimedes”), Eratóstenes de Cirene (provou que a Terra não era plana e calculou com grande precisão a circunferência da Terra), Euclides (concluiu sua obra mais importante), Aristarco de Samos (concluiu que os corpos orbitavam em torno do Sol, propondo o modelo heliocêntrico), dentre muito outros. Quando a Biblioteca de Alexandria foi destruída, imagine quanto conhecimento foi perdido.

Euclides (300 anos a. C), em sua obra “Os elementos”, no livro VI, apresentou a Proposição XII.

Sejam as três retas dadas A, B, C; é preciso, então achar uma quarta em proporção com as A, B, C. Fiquem postas as duas retas DE, DF, contendo um ângulo [ao acaso], o sob EDF; e fiquem postas, por um lado, a DG igual à A, e, por outro lado, a GE igual à B, e, ainda, a DH igual à C; e, tendo sido ligada a HG, fique traçada pelo E a EF paralela a ela. Como, de fato, a GH foi traçada paralela a um lado, o EF, do triângulo DEF, portanto, como a DG está para a GE, assim a DH para a HF. Mas, por um lado, a DG é igual à A, e, por outro lado, a GE, à B, e a DH, à C; portanto, como a A está para a B, assim a C para a HF. Portanto, dadas as três retas A, B, C, foi achada uma quarta, a HF, em proporção; o que era preciso fazer (Fragmento da obra “Os Elementos” de Euclides, tradução, 2009).



Ou seja,

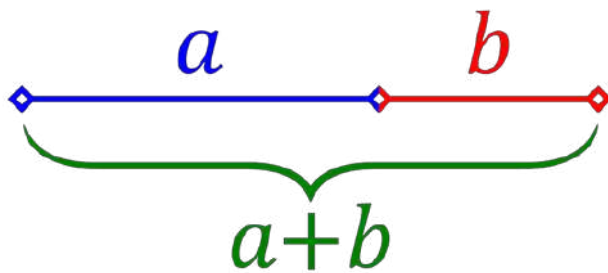
$$\frac{DG}{GE} = \frac{DH}{HF}$$

1) Usando a relação proporcional acima, determine a quarta proporcional (HF, em centímetros), sabendo que DG= 6cm, GE= 3cm e DH=4cm.

2) **A razão Áurea:** o notável escultor grego de nome Fídias usou o número áureo para esculpir suas esculturas de Zeus de Olímpia e de Atenas Partenos. Ele também colaborou na construção e decoração do Parthenon. A Razão Áurea tem vários nomes: *número de ouro*, *proporção divina*, são alguns deles.

- a) Uma das formas mais comuns de apresentar a Razão Áurea é pela divisão de uma linha em dois segmentos, em que a razão entre o comprimento total da linha e o comprimento do maior segmento seja igual à razão entre o comprimento do maior segmento e o comprimento do menor segmento.

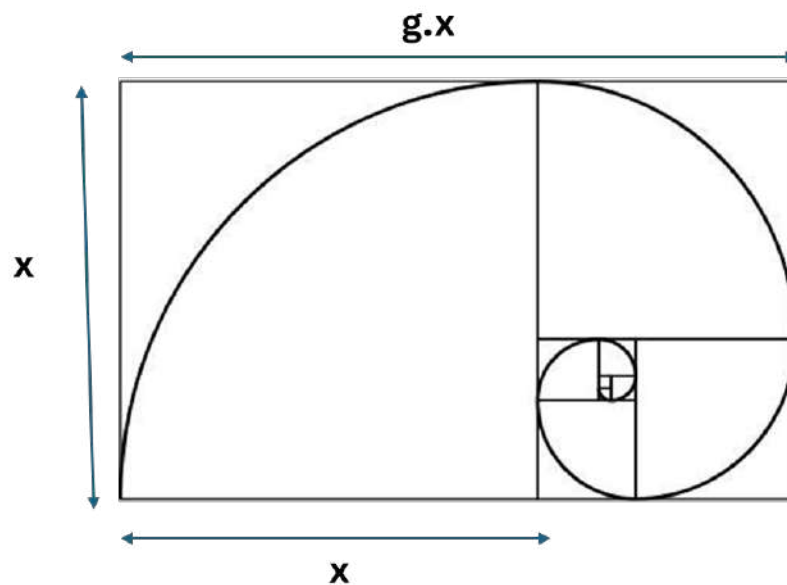
Para realizar este cálculo, a figura abaixo nos auxiliará.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Chamando $\frac{a}{b} = \phi$, determine o valor de ϕ (número de ouro). Para isso, faça: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a}$ e calcule a raiz positiva da equação do 2º grau. O número de ouro ϕ é irracional.

3) Espiral Áurea



O retângulo da figura acima tem lados $g \cdot x$ e x e é denominado retângulo de ouro, pois ao montar o quadrado de lado x , o retângulo restante terá a forma do primeiro e o processo poderá se repetir infinitas vezes. Assim, podemos construir a seguinte relação de semelhança:

$$\frac{x}{g \cdot x} = \frac{g \cdot x - x}{x} \Rightarrow \frac{1}{g} = g - 1$$

A curva é conhecida como espiral áurea. Responda:

a) O retângulo áureo se ajusta as fachadas de diversas construções e pinturas antigas. Cite algumas destas construções.

b) Também, na natureza, encontramos a espiral áurea. Cite em quais fenômenos podemos encontrar o padrão da espiral áurea.

4) No Direito, o **Princípio da Proporcionalidade** determina que a pena não pode ser superior ao grau de responsabilidade pela prática do fato. Como podemos notar, o Supremo Tribunal Federal (STF), fundamenta alguns julgados por meio desse princípio. Suponha que o Princípio da Proporcionalidade seja adotado em um país hipotético. Avalie, com seu saber proporcional, se são justas as seguintes penas. Se não, refaça a penalidade de acordo com o seu parecer.

**LESÃO CORPORAL
GRAVÍSSIMA**

Se resulta:

I – Incapacidade permanente para o trabalho;

II – enfermidade incurável;

III perda ou inutilização do membro, sentido ou função;

IV – deformidade permanente;

V – aborto:

Pena – reclusão, de dois a oito anos.

ROUBO

Subtrair coisa móvel alheia, para si ou para outrem, mediante grave ameaça ou violência a pessoa, ou depois de havê-la, por qualquer meio, reduzido à impossibilidade de resistência:

Pena - reclusão, de quatro a dez anos, e multa.

APÊNDICE D

Pós-teste

D.1 Pós-teste

Escola: _____

Estudante: _____

Professor: _____

Turma: _____

Data: __/__/____

Avaliação Formativa(Pós-teste)

Atividades sobre grandezas diretas e inversas

1) Numa tradicional celebração de fim de ano, os membros de uma família se reuniram para celebrar, num total de 12 pessoas. Para a preparação de um churrasco é consumido, em média, 4kg de carne. Além dos 12 membros, foram convidados mais 8 pessoas. Quantos kg de carne serão necessários para fazer o churrasco, mantida a mesma média de consumo? Explique como você resolveu o problema?



- 2) Imagine que você tenha que ampliar em 5 vezes a figura acima, considerando as medidas descritas no desenho. Quais seriam as novas dimensões da figura após a ampliação? Explique como você resolveu o problema?
- 3) Uma prestadora de serviços de construção civil foi contratada para a reforma de um supermercado. A previsão é que, com 6 colaboradores, a reforma leve 18 dias para ser concluída. Caso sejam contratados mais 3 colaboradores, quantos dias são necessários para a conclusão da reforma? Explique como você resolveu o problema.

- 4) Suponha que uma corretora ofereça uma aplicação com lucro líquido de 7% ao ano. Você investiu e lucrou R\$ 70,00. No ano seguinte, uma outra corretora oferecerá uma aplicação com lucro líquido de 14%. Qual será seu lucro líquido, considerando o mesmo período de aplicação da corretora anterior? Explique como você resolveu o problema.
- 5) Em uma lanchonete do bairro, José prepara suco de laranja todos os dias. Ele utiliza 4 liquidificadores e gasta 6 minutos preparando os sucos. Para diminuir o tempo de preparo, José dobrou o número de liquidificadores. Quanto tempo levará para preparar os sucos, usando os 8 liquidificadores? Explique como você resolveu o problema.