UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DANIELE ALVES SOUZA

QUADRADOS MÁGICOS GEOMÉTRICOS

JUAZEIRO DO NORTE
2024

DANIELE ALVES SOUZA

QUADRADOS MÁGICOS GEOMÉTRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadores: Valdinês Leite de Sousa Júnior
Erica Boizan Batista

JUAZEIRO DO NORTE
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S729q Souza, Daniele Alves.
Quadrados mágicos geométricos / Daniele Alves Souza. - 2024.
60 f. il. color.; 30 cm.
(Inclui bibliografia, p. 38-40).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2024.

Orientador: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Junior.
Co-orientador: Erica Boizan Batista.

1. Quadrados mágicos geométricos. 2. Áreas. 3. Ensino de Matemática. 4. Jogos. I. Sousa Júnior, Valdinês Leite de - orientador. II. Batista, Erica Boizan - co- orientador. III. Título.

CDD 510

Bibliotecária: Maria Eliziana Pereira de Sousa – CRB 15/564

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS ETECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

QUADRADOS MÁGICOS GEOMÉTRICOS

Daniele Alves Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em 07 de junho de 2024.

Banca Examinadora

gov.br Documento assinado digitalmente
VALDINES LEITE DE SOUSA JUNIOR
Data: 29/07/2024 16:06:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
Orientador - UFCA

gov.br Documento assinado digitalmente
PAULO CESAR CAVALCANTE DE OLIVEIRA
Data: 29/07/2024 16:26:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira
Examinador externo - URCA

gov.br Documento assinado digitalmente
ALEX SANDRO LOPES SANTOS
Data: 30/07/2024 21:43:20-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alex Sandro Lopes Santos
Examinador externo - UFPI

gov.br Documento assinado digitalmente
STEVE DA SILVA VICENTIM
Data: 31/07/2024 13:37:39-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Steve da Silva Vicentim
Examinador interno - UFCA

Com muita gratidão dedido este trabalho à minha mãe, que não mediu esforços para proporcionar a mim e as minhas irmãs, a melhor educação possível, com muita fé e amor.

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, por não me desamparar em nenhum momento, permitindo vencer todos os obtásculos. Sem Ele nada seria possível.

À minha mãe Nazelis por sempre acreditar em mim e servir de alicerce para as minhas realizações. E às minhas irmãs Valéria e Andresa por estarem sempre ao meu lado, me apoiando. Ao meu cunhado Bebeto por toda sua generosidade e paciência. E ao meu pai (*in memoriam*), embora não esteja presente fisicamente, guardarei para sempre as poucas lembranças que tive ao seu lado.

Aos meus sobrinhos Ana Lívia e Saulo por toda sua alegria, e por deixar os dias mais leves até nos momentos mais difícies. Eu amo vocês.

Agradeço a todos meus colegas do PROFMAT por tornarem o ambiente da sala de aula agradável e descontraído e em especial a: Felipe, Erivan, Melque, Auxiliadora e Márcio pelo companheirismo nas horas de estudo pelo Meet e por todo apoio.

Quero agradecer meus orientadores Valdinês e Érica pela disponibilidade, pelas correções, dicas e por confiarem em mim. Em especial a Valdinês, por toda paciência e apoio emocional e por não deixar desistir. Agradeço a Deus por ter colocado pessoas como vocês na minha vida, me sinto muito abençoada.

Além disso, quero agradecer a todos os meus professores da Universidade Regional do Cariri (URCA) pelo apoio e orientação ao longo da minha graduação. Em especial, o Professor Paulo César Cavalcante de Oliveira e à Professora Luciana Maria de Souza Macêdo por sua dedicação e incentivo. E aos professores da Universidade Federal do Cariri (UFCA), que desde o ínicio nos apoioram e nos motivaram perante os desafios.

Parafraseando Isaac Newton, "Se pude enxergar mais longe, foi porque me apoiei em ombros de gigantes". A todos os meus professores, muito obrigada!

Aos meus colegas de trabalho da EREM Carlos Pena Filho, no nome do gestor Jackson Gomes David, por todo apoio e compreensão nesse período.

Aos meus amigos de longas datas e aos que cruzaram meu caminho nesse período, meu muito obrigada! De alguma forma vocês contribuiram me dando forças e com palavras de incentivo para não ter surtado de vez e para conclusão dessa etapa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

RESUMO

Este trabalho é baseado integralmente em um artigo científico com o mesmo título, escrito pelos autores Daniele Alves Souza, Valdinês Leite de Sousa Júnior e Erica Boizan Batista. Nele apresentamos uma abordagem na utilização dos quadrados mágicos geométricos como uma ferramenta pedagógica inovadora no ensino de matemática. O objetivo é explorar as características dos quadrados mágicos geométricos de ordem 3, investigando sua história, propriedades e, principalmente, como esses quadrados podem ser introduzidos nas salas de aula do ensino básico para promover o aprendizado de conceitos matemáticos de forma significativa e envolvente. Ao substituir os números tradicionais por formas geométricas, os quadrados mágicos geométricos oferecem uma oportunidade única para os alunos explorarem padrões visuais e desenvolverem habilidades matemáticas enquanto se divertem. Além disso, propõe-se uma prática pedagógica que inclui a construção, análise e resolução de problemas relacionados aos quadrados mágicos geométricos, estimulando o pensamento crítico e o trabalho em equipe. Essa abordagem interdisciplinar permite a integração de conceitos de geometria, álgebra e aritmética, proporcionando uma experiência de aprendizado holística e prazerosa para os alunos.

Palavras-chave: Quadrados mágicos geométricos. Áreas. Jogos.

ABSTRACT

This work is based entirely on a scientific article with the same title, written by the authors Daniele Alves Souza, Valdinês Leite de Sousa Júnior and Erica Boizan Batista. In it, we present an approach to using geometric magic squares as an innovative pedagogical tool in mathematics education. The aim is to explore the characteristics of geometric magic squares of order 3, investigating their history, properties, and, most importantly, how these squares can be introduced into elementary classrooms to promote meaningful and engaging learning of mathematical concepts. By replacing traditional numbers with geometric shapes, geometric magic squares offer a unique opportunity for students to explore visual patterns and develop mathematical skills while having fun. Additionally, a pedagogical practice is proposed that includes the construction, analysis, and solving of problems related to geometric magic squares, stimulating critical thinking and teamwork. This interdisciplinary approach allows for the integration of concepts from geometry, algebra, and arithmetic, providing a holistic and enjoyable learning experience for students

Keywords: Geometric Magic Squares. Area. Games.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Um quadrado mágico geométrico, ou também denominado, quadrado geomágico criado por Lee Sallows em 2001, é um quadrado mágico onde os números são substituídos por formas geométricas. Para Lee Sallows, os quadrados mágicos eram um instrumento mal interpretado, pois não tinha sido reconhecido pelo objeto não essencialmente não numérico que realmente é. Essa abordagem inovadora combina a beleza da geometria com os princípios dos quadrados mágicos resultando em estruturas matemáticas que desafiam a intuição e estimulam a investigação das relações entre números e formas.

Neste trabalho, iremos explorar as características dos quadrados mágicos geométricos, investigando sua história, propriedades e aplicações de como esse assunto pode ser inserido nas aulas de matemática no ensino básico estimulando o aprendizado de forma significativa. Além disso, promover a divulgação deste tema, pois é cativante e não há registros sobre o mesmo Brasil, buscando torná-lo mais acessível. Adentraremos nessa nova área da matemática recreativa onde a harmonia entre os números e a geometria se entralaça de maneira extraordinária.

Bártlová (2016), ressalta que "em geral, a matemática é considerada recreativa se tiver um aspecto lúdico que possa ser compreendido e apreciado por não matemáticos". Por sua vez, os jogos oferecem um ambiente cativante e dinâmico, no qual os alunos são desafiados a resolver problemas e tomar decisões estratégicas, estimulando não apenas o raciocínio lógico, mas também o trabalho em equipe e a criatividade. Assim, a utilização de jogos no ensino de matemática tem sido reconhecida como uma estratégia eficaz para engajar os alunos e promover a compreensão dos conceitos matemáticos de forma significativa. De acordo com Kishimoto (2003, p. 96), "as crianças se sentem mais motivadas a usar sua inteligência quando estão envolvidas em jogos, pois desejam ter um bom desempenho: assim, se esforçam para superar desafios, sejam eles cognitivos ou emocionais".

Segundo os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN)

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (PCN, 1998, p. 46)

Neste contexto, os quadrados mágicos geométricos emergem como uma ferramenta promissora para ser introduzida nas salas de aula do ensino básico. Um quadrado mágico de ordem n consiste em uma matriz $n \times n$ de n^2 elementos dispostos de forma que a soma dos números de qualquer linha, coluna ou diagonal seja sempre a mesma, chamada de constante mágica. Esses quadrados não apenas desafiam os alunos a resolverem problemas matemáticos, mas também estimulam a criatividade ao explorarem padrões geométricos.

Lee Cecil Fletcher Sallows propôs uma nova perspectiva ao substituir os números tradicionais por formas geométricas nos quadrados mágicos, resultando nos quadrados mágicos geométricos. Essa abordagem não só proporciona belos padrões visuais, mas também oferece uma oportunidade para os alunos explorarem conceitos matemáticos de uma maneira diferente. Como destacado por Orton (1999) e Vale (2009), alguns estudantes demonstram uma inclinação significativa pelo pensamento visual, e, portanto, uma abordagem que privilegie elementos visuais pode ser altamente eficaz para esse grupo.

Uma proposta de prática pedagógica envolvendo quadrados mágicos geométricos pode incluir atividades como a construção desses quadrados utilizando diferentes formas geométricas, a análise de padrões visuais e a resolução de problemas relacionados aos quadrados mágicos. Os alunos podem trabalhar em equipe para criar e analisar diferentes quadrados mágicos, estimulando a colaboração e o pensamento crítico. Martin, Towers e Pirie (2006) destacam a importância desse tipo de atividade na promoção da construção coletiva de conhecimento matemático, onde as contribuições individuais são elaboradas e refinadas pelo grupo, resultando em entendimentos compartilhados.

Além disso, os quadrados mágicos geométricos podem ser integrados ao currículo de matemática de forma interdisciplinar, explorando conceitos de geometria, álgebra e aritmética. Essa abordagem proporciona uma experiência de aprendizado holística, na qual os alunos podem aplicar seus conhecimentos matemáticos de maneira prática e criativa. Segundo os PCN (1998, p.40), "está implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução."

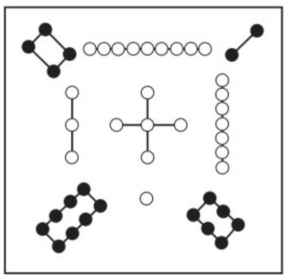
Os quadrados mágicos geométricos oferecem uma oportunidade única para os alunos explorarem conceitos matemáticos de forma visual e interativa. Ao incorporar esses quadrados mágicos nas práticas pedagógicas, os educadores podem promover um ambiente de aprendizado estimulante e significativo, capacitando os alunos a desenvolverem suas habilidades matemáticas e criativas.

Capítulo 2

Quadrados mágicos geométricos

Segundo Eves (1995), um quadrado mágico de ordem n consiste de uma matriz $n \times n$ de n^2 inteiros distintos dispostos de tal forma que a soma dos números de qualquer linha, coluna ou diagonal têm sempre o mesmo valor, chamada *constante mágica*. A figura 2.1 mostra o exemplo mais famoso conhecido como *Lo Shu*, onde a soma dos números em cada linha, coluna e em cada diagonal tem sempre o mesmo valor 15. A lenda conta que o Imperador da antiga China, chamado Yu (2200 $a.C$), estava meditando as margens do Rio Lo quando emergiu uma tartaruga, considerada um animal sagrado, com estranhas marcas no casco. Yu percebeu um arranjo quadrado de números naturais expressos por cordas e que todos eles somavam quinze em qualquer direção, considerando assim um número mágico.

Figura 2.1: *Lo Shu* e o Quadrado mágico *Lo Shu*



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Sallows, Lee (2013)

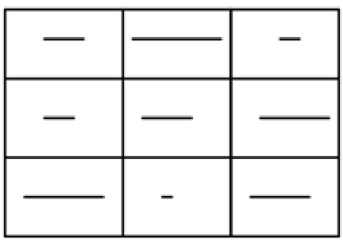
Há milhares de anos os quadrados mágicos fascinam não apenas os entusiastas da matemática, mas, de um modo em geral, pelos padrões hipnotizantes que produzem. De acordo com Santinho e Machado (2006, p.2), o interesse despertado em alguns matemáticos é originado pelos problemas difícies em relação à construção, classificação e enumeração dos quadrados mágicos de uma dada ordem. Podemos citar estudiosos como Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675), Claude-Gaspar Bachet (1581-1638), Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783) que dedicaram-se estudos aos quadrados mágicos e cubos mágicos.

Paul Carus (1917) ressalta:

> O interesse peculiar dos quadrados mágicos e de todos as curiosidades aritméticas reside no fato de possuírem o encanto misterioso. Eles parecem atrair alguma inteligência oculta que, através de um plano pré-concebido, produz a impressão de um design intencional, um fenômeno que encontra seu análogo próximo na natureza.

Em 2001, o engenheiro eletrônico britânico Lee Cecil Fletcher Sallows apresentou uma nova abordagem para os quadrados mágicos, sugerindo a substituição dos números por formas geométricas. Essa perspectiva inovadora não apenas valoriza as complexidades dos quadrados mágicos, mas também gera belos padrões geométricos. Uma dessas representações é a reprodução gráfica do *Lo Shu*, onde os números são representados por segmentos de retas, na qual a orientação não importa, formando uma única linha reta de comprimento 15. Observando a figura 2.2, temos que a primeira coluna representada pelos elementos $4 + 3 + 8$, unidos ponta a ponta para formar ou "pavimentar" uma única linha reta de comprimento 15, que corresponde à constante mágica do quadrado mágico de *Lo Shu*, da mesma maneira que é válido para os outros segmentos que ocupam as linhas, colunas e diagonais restantes. Tornando-se um caso particular de um quadrado mágico geométrico onde os elementos são unidimensionais (1-D), ou seja, um segmento de linha reta. De um modo geral, Sallows afirma que

Figura 2.2: Uma versão geométrica *Lo Shu*



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Elaborada pela autora.

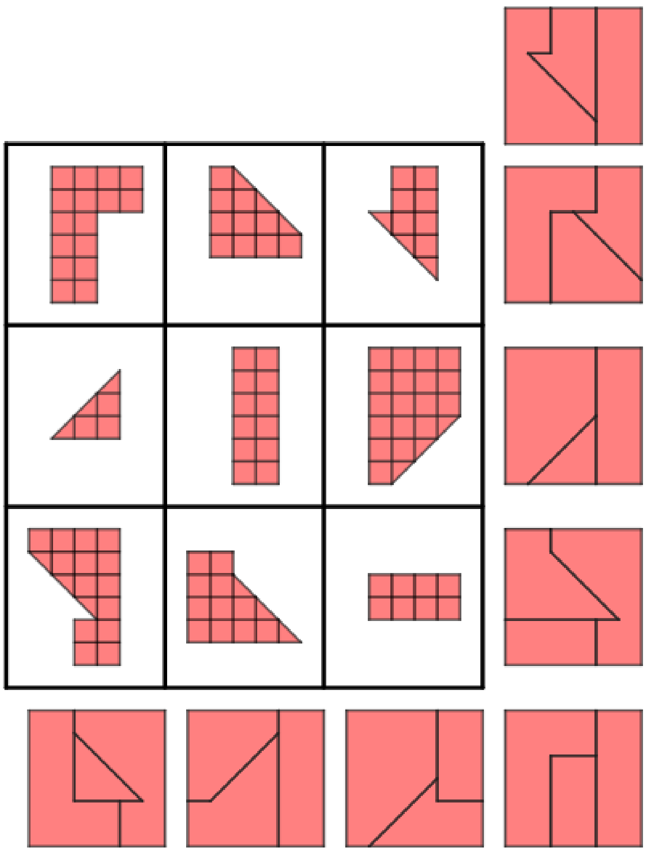
(1) Os números que ocorrem nos quadrados mágicos podem ser vistos como abreviaturas de suas contrapartes geométricas, que são ***segmentos de linha reta*** *de comprimento apropriado.*

(2) O processo de somar números de modo a produzir a soma constante recorrente é então mais fácil de interpretar como contrapartida aritmética de ***particionar*** *ou* ***dividir um espaço*** *com esses segmentos de linha.* (Sallows,2011, p.3)

Além do caso unidimensional citado, iremos desfrutar de outros cenários, nos detendo em figuras planas ou bidimensionais, pois tal qual os segmentos de linhas podem ser "pavimentadas" em segmentos mais longos, as áreas podem pavimentar áreas maiores, assim como, os volumes podem compactar em volumes maiores e assim por diante.

Um quadrado mágico geométrico, ou **geomágico**, é usado para designar um quadrado mágico no qual formas geométricas de dimensões superiores (ladrilhos ou peças) surgem nas células ao invés de números, de modo que, em cada linha, coluna ou diagonal se encaixem para produzir uma forma idêntica, definida por alvo constante. Observe a figura 2.3 (à esquerda), as peças da primeira linha se encaixam formando um quadrado 6×6, assim como a segunda e terceira linha, bem como as colunas e diagonais. Sendo considerado cada quadradinho com área 2, então cada uma das nove peças tem área inteira e como a união das três peças em cada linha, coluna e diagonal têm o mesmo formato, a área deve ser a mesma, obtendo assim um quadrado mágico (à direita) com a soma constante igual a 72 que corresponde a área do alvo.

Figura 2.3: Um quadrado geomágico 3×3



32	23	17
9	24	39
31	25	16

Fonte: Elaborada pela autora.

Uma representação algébrica dos quadrados mágicos, representada na figura 2.4, é devido a um matemático francês do século 19, Édouard Lucas que caracteriza a estrutura de cada um dos quadrados mágicos, dentre eles o *Lo Shu*, considerando $a = 3, b = 1$ e $c = 5$. Sallows supôs que a fórmula poderia conter algo ainda não revelado, substituindo as variáveis da fórmula de Lucas por formas geométricas distintas, onde as operações de adição e subtração seriam interpretadas como uma superfície na qual adicionamos ou subtraímos essas formas.

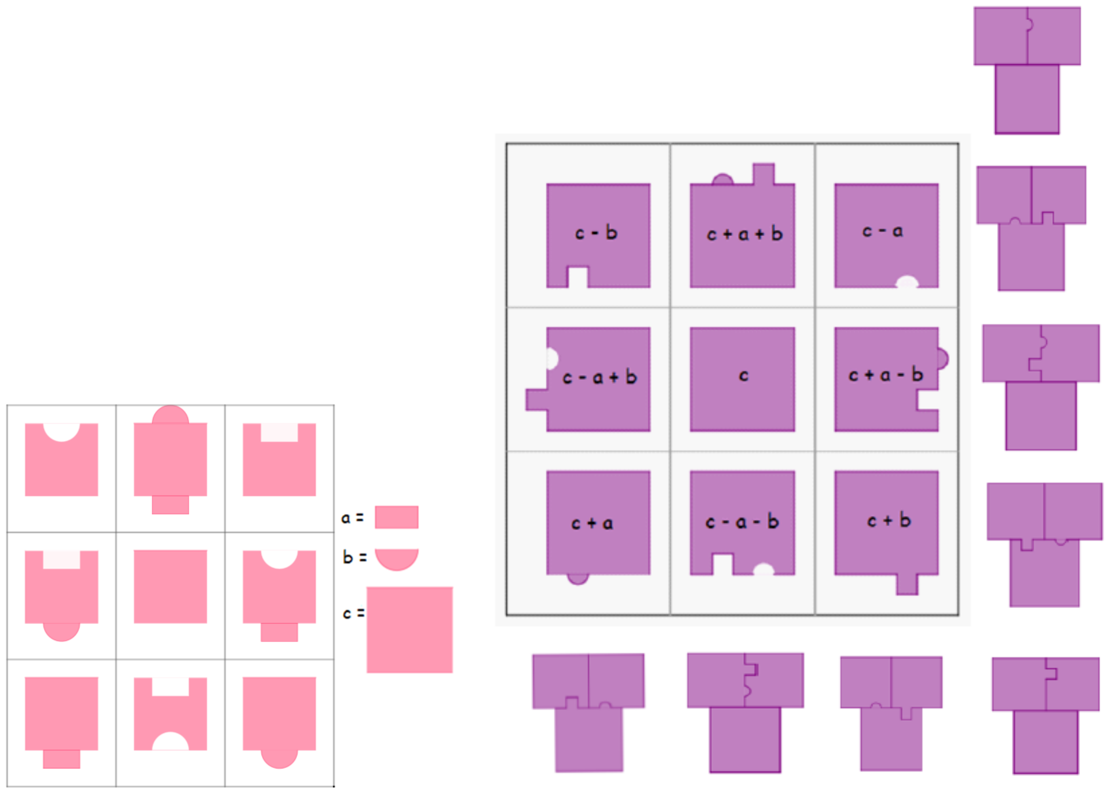
Figura 2.4: Fórmula de Lucas

c - b	c + a + b	c - a
c - a + b	c	c + a - b
c + a	c − a - b	c + b

Fonte: Elaborada pela autora.

Um exemplo que fomentou a ideia do quadrado pode ser visto na figura 2.5 (à esquerda), supondo que a é retângulo, b é pequeno semicírculo e c um quadrado maior. Então, para $c + a$ ele une as duas formas, do mesmo modo para c - b, por exemplo, o semicírculo é extraído do quadrado c, assim como, a entrada $c + a + b$ une o retângulo a e o semicírculo b ao quadrado c, e assim por diante. Entretanto, o resultado apresentava uma falha, pois as três peças da linha central e as três da coluna central não se encaixavam formando um retângulo como as demais peças, o que motivou a Sallows a buscar uma alternativa semelhante ao apresentado na figura 2.5 mas sem defeito, surgindo a ideia do quadrado mágico geométrico. A figura (à direita) mostra uma tentativa bem sucedida de um quadrado geomágico resultando em infinitas soluções, pois, as escolhas das peças a, b e c não importa muito. Como exemplo, poderíamos substituir o semicírculo por um pequeno triângulo resultando em diferentes peças que se combinam. É evidente que as áreas das peças em todas linhas, colunas e diagonais correspondem a três vezes o valor da peça central, de acordo com a fórmula.

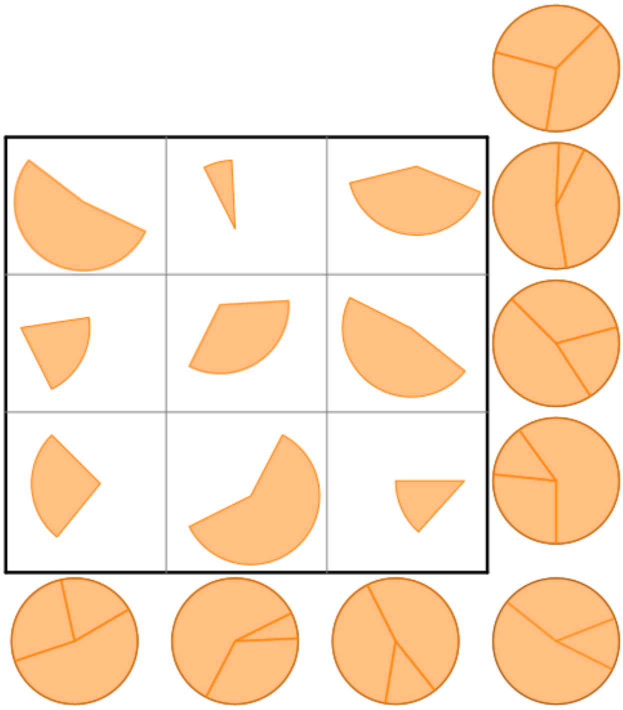
Figura 2.5: Representação pictórica da fórmula de Lucas



Fonte: Elaborada pela autora.

Outra abordagem para representar os quadrados numéricoss de forma geométrica, é utilizando arcos circulares, ao invés de linha reta. A figura 2.6 mostra uma versão geométrica baseado no *Lo Shu*. Como a soma constante é 15, o menor arco correspondente é dado por $360°/15 = 24°$, uma vez que os demais arcos são todos múltiplos de $24°$. Observe que o alvo é um círculo completo, no entanto, poderíamos nos conter com qualquer fração desejada dele.

Figura 2.6: Uma versão geométrica do *Lo Shu*



Fonte: Elaborada pela autora.

2.1 Características dos quadrados mágicos geométricos de ordem 3

Existem diferentes métodos para construir quadrados mágicos geométricos, incluindo o uso de poliformas, como poliominós e poliamantes, e abordagens computacionais. Esses métodos permitem criar uma variedade de quadrados mágicos com diferentes alvos e padrões geométricos. Delahayane (2013) ressalta que é difícil compreender porque ninguém pensou neles antes, pois esses objetos generalizam os quadrados mágicos e tornam as várias relações entre seus componentes visíveis.

Sallows em busca incessante de métodos para produzir novos quadrados mágicos geométricos, percebeu duas abordagens que surgiram gradualmente

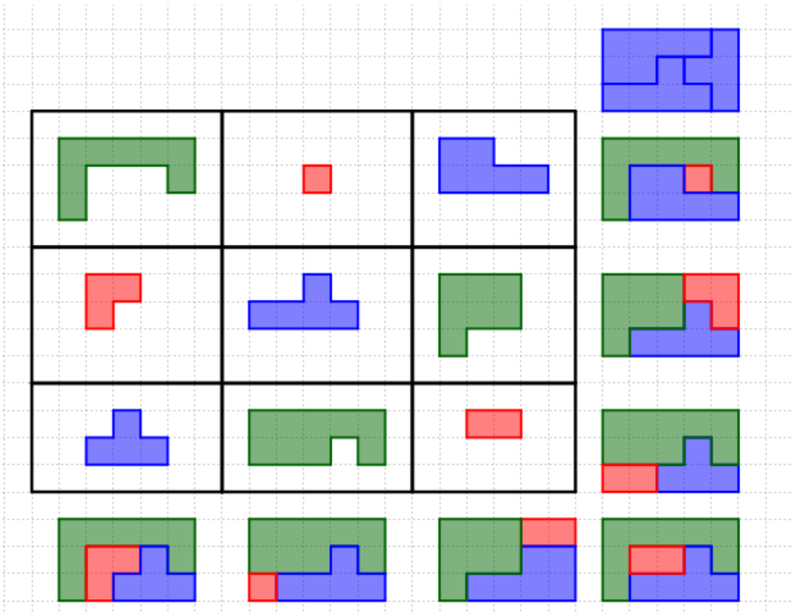
> *(1) métodos de lápis e papel baseados em fórmulas algébricas, nos moldes já mencionados;*
> *(2) no caso de quadrados restritos a poliformas ou formas construídas a partir de átomos repetidos, buscas de força bruta por computador* (Sallows, 2011, p.7).

As poliformas são peças construídas a partir de polígonos, dentre elas podemos citar os poliominós que são peças construídas a partir de quadrados unitários, temos os poliamantes que corresponde aos triângulos equiláteros e os polihexes associado aos hexágonos regulares.

Com base no *Lo Shu*, foi desenvolvido um quadrado geomágico utilizando poliominós, ou seja, com áreas de 1 a 9, desenvolvido por um quadrado, dois quadrados e assim por diante, essa figura corresponde a versão geométrica do *Lo shu*, mostrado na figura 2.2, onde os segmentos de retas são substituídos por poliominós. O *Lo Shu*, é denominado de quadrado normal, pois os elementos correspondem a uma progressão aritmética $1, 2, \ldots, n$, bem como o quadrado geomágico classificado como 2-D normal, pois as áreas de cada poliominó também formam uma progressão aritmética.

Com o auxílio computacional, os quadrados podem se organizar em diferentes formas. Sallows descobriu que existem 1411 quadrados geomágicos distintos, onde o alvo é um retângulo 3×5, como na figura 2.7 seguinte. As oitos variações resultantes da rotação e/ou reflexão são contadas como o mesmo quadrado.

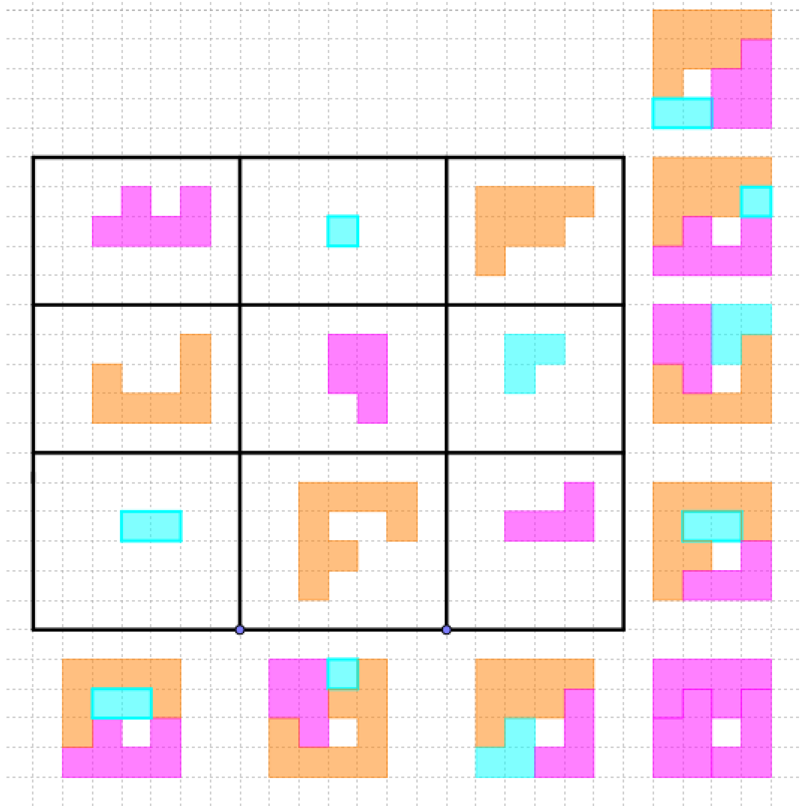
Figura 2.7: Um dos 1411 quadrados normais com alvo retangular 3×5



Fonte: Elaborada pela autora

Cada poliominó é congruente entre si, sendo conectados apenas por suas arestas. Dessa forma, podemos reorganizá-los a fim de obter uma nova figura. Existem 4370 formas de reorganizar os poliominós da figura 2.7, a fim de obter um quadrado 4×4 com um furo, isto é, um quadrado que não possui uma de suas células centrais. Um das possíveis soluções é mostrada na figura 2.8.

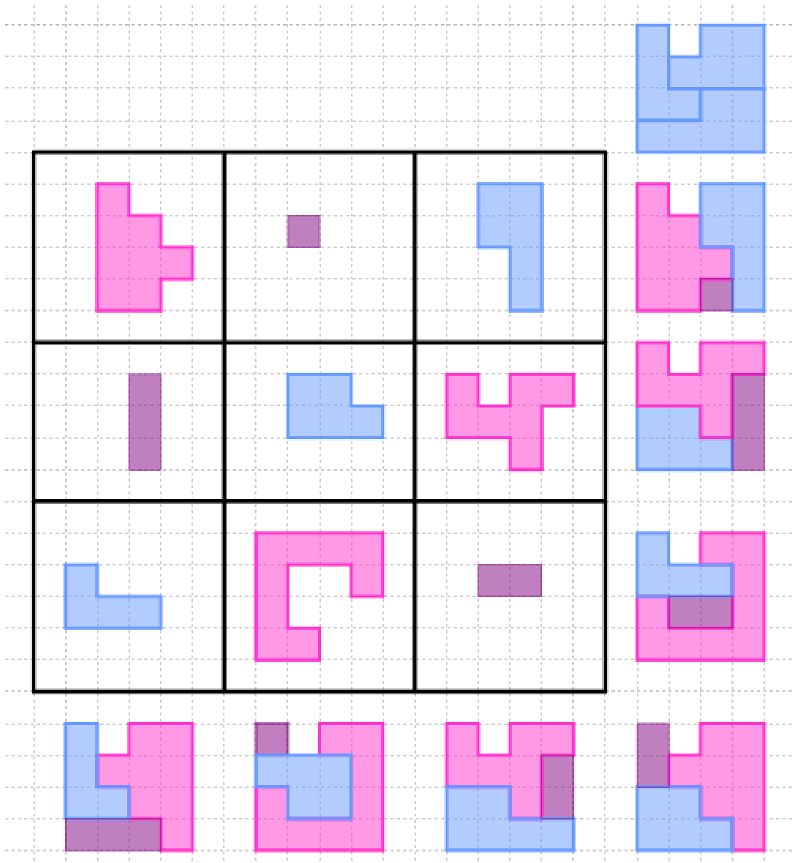
Figura 2.8: Um dos 4370 quadrados normais com alvo retangular 4×4 e com um furo central



Fonte: Elaborada pela autora

Quando o alvo é um quadrado 4×4, com as mesmas condições, retirando um quadrado 1×1 da borda, que não seja o canto, o número de soluções passa ser de 16465.

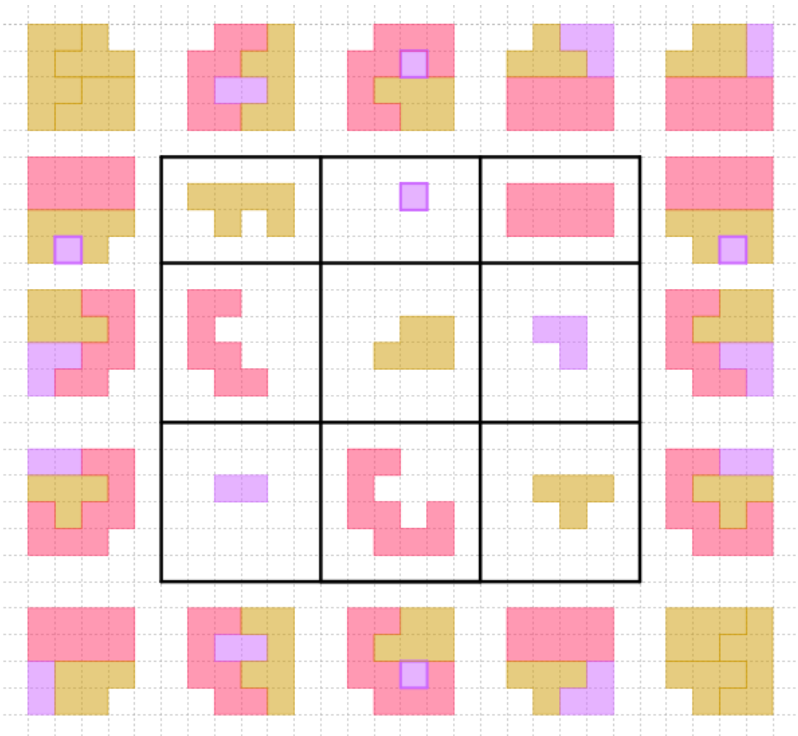
Figura 2.9: Um dos 16465 quadrados normais com alvo 4×4 faltando uma peça na borda



Fonte: Elaborada pela autora

E agora, considerando o alvo como um quadrado 4×4, nas mesmas condições, porém com a retirada de quadrado 1×1 de um dos cantos, o resultado passa a ser 27110 soluções.

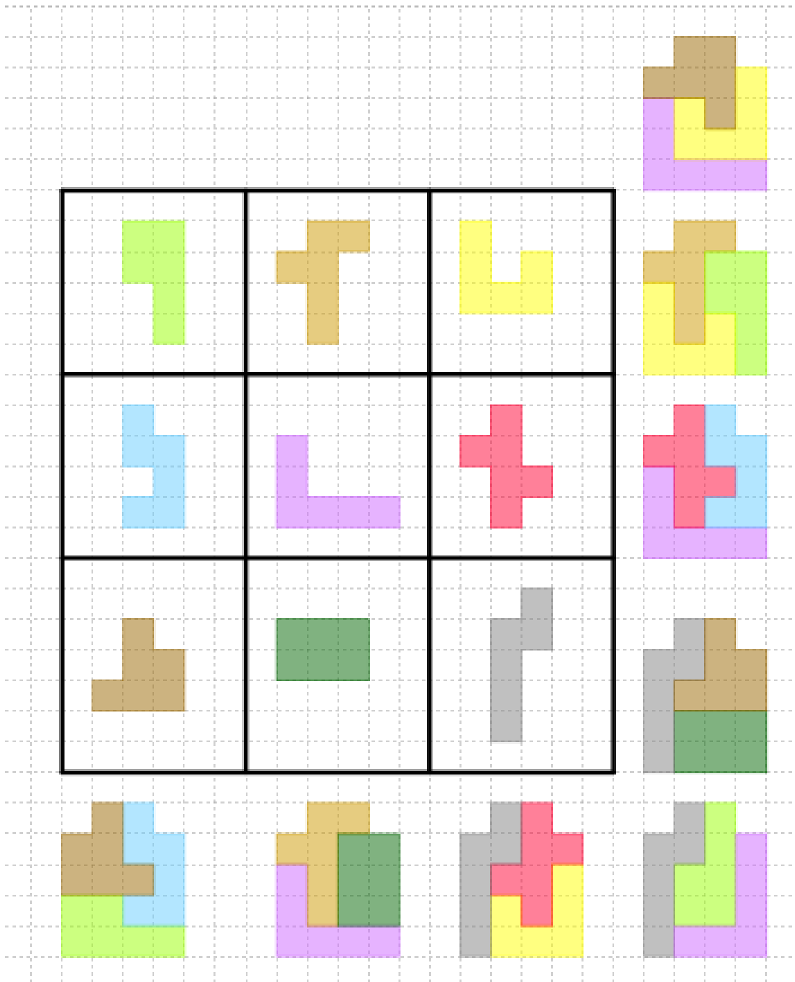
Figura 2.10: Um dos 27110 quadrados normais com alvo 4×4 faltando uma peça de canto



Fonte: Elaborada pela autora

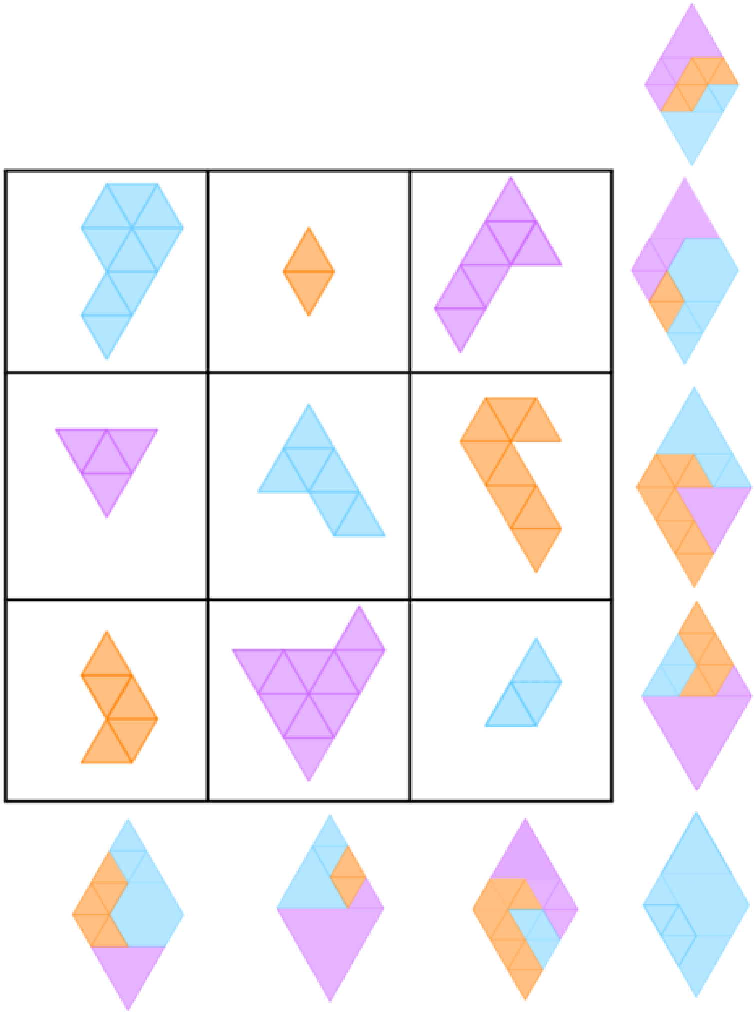
Os resultados mais favoráveis foram obtidos através de deduções decorrentes da Fórmula de Lucas, para a construção dos quadrados geomágicos, na busca por diversos alvos em formatos variados realizado por uma abordagem computacional. A figura 2.11 apresenta um quadrado mágico geométrico trivial (um quadrado cujas entradas são repetidas) 3×3, onde cada elemento é um hexaminó - um poliminó formado por 6 quadrados. Na definição de quadrado geomágico, exige que as peças sejam diferentes e não suas áreas. Assim, o quadrado geomágico pode não estar associado a nenhum quadrado numérico. Sallows (2013) afirma que os quadrados mágicos tradicionais nada mais são do que um exemplo especial de um quadrado mágico geométrico em que as entradas são unidimensionais.

Figura 2.11: Um quadrado geomágico cujas peças são hexaminós



A figura 2.12 apresenta a construção de um quadrado geomágico 3×3 usando poliamantes, que são formas construídas a partir de triângulos equiláteros unitários, com os tamanhos das peças variando entre 2 a 10. Essas peças formam uma série consecutiva que pode ser obtida adicionando 1 às entradas do *Lo Shu*. O alvo obtido é um losango ou paralelogramo equilátero. Sallows evidencia como uma de suas descobertas favoritas, à qual ele se refere como *Diamond Sutra*, pois o alvo tem forma de diamante.

Figura 2.12: Um quadrado geomágico cujas peças são triângulos equiláteros



Fonte: Elaborada pela autora

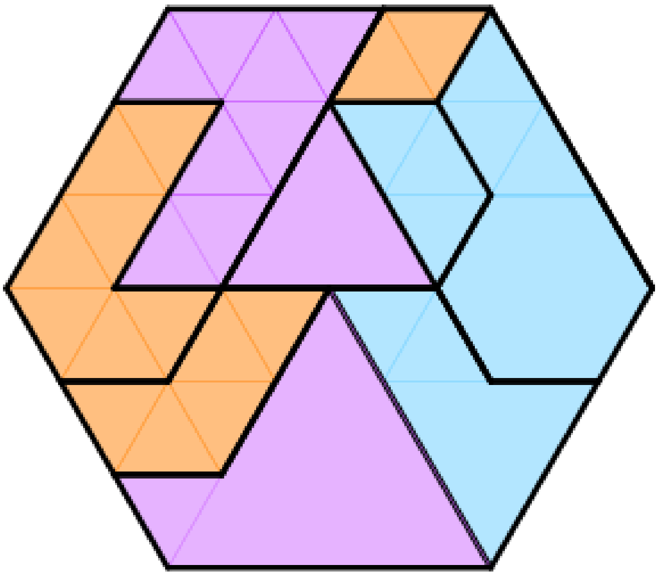
As nove peças utilizadas formam três diamantes, que, ao serem combinados, podem compor um hexágono regular. Observe que, cada diamante corresponde a uma área de 18 unidades. Com isso, entre os números de $2, 3, \ldots, 10$ podemos escolher três números inteiros cuja a soma representa 18.

Assim, das oitos possibilidades existentes, podemos escolher três peças para determinar a quantidade de hexágonos distintos que resulta uma combinação $\binom{8}{3}$, totalizando 56 maneiras. Além disso, cada diamante pode ser refletido em torno de uma ou de ambas as suas diagonais, gerando assim 4 orientações possíveis.

Com isso, o número de maneiras diferentes de completar um hexágono é dado por $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ que corresponde ao resultado de qualquer tríade de diamantes. Portanto, concluímos que existem $56 \cdot 64 = 3\ 584$ hexágonos diferentes que podem ser criados a partir das peças apresentadas.

Além dos 3 584 já identificados, as peças utilizadas podem formar hexágonos regulares de muitas outras maneiras diferentes. Com o auxílio computacional, foram identificados outros 17 213 hexágonos distintos, totalizando 20 797. A figura 2.13 mostra um hexágono formado com todas as peças do *Diamond Sutra*.

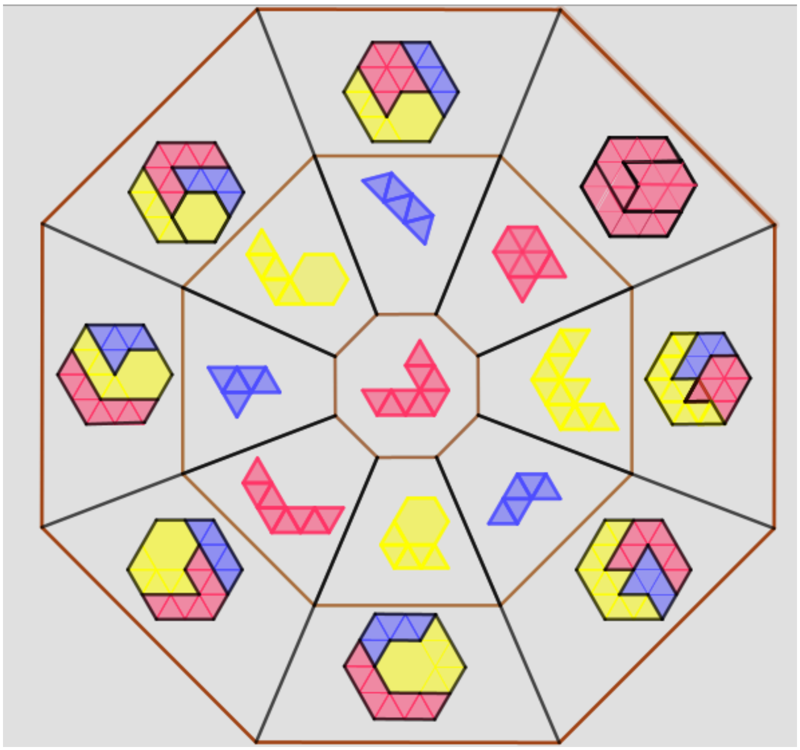
Figura 2.13: Um hexágono regular formado com as peças do *Diamond Sutra*.



Fonte: Elaborada pela autora

Como uma contemplação dos quadrados mágicos geométricos, Sallows buscou estruturar um quadrado mágico 3×3 em um arranjo octogonal, denominado *Magic Mandala I*, apresentado na figura 2.14, cujas peças são poliamantes e o alvo corresponde a um hexágono regular de área 24. Esse conjunto acredita-se que não tenha significado matemático, mas sim a aparência estética que o torna hipnotizante.

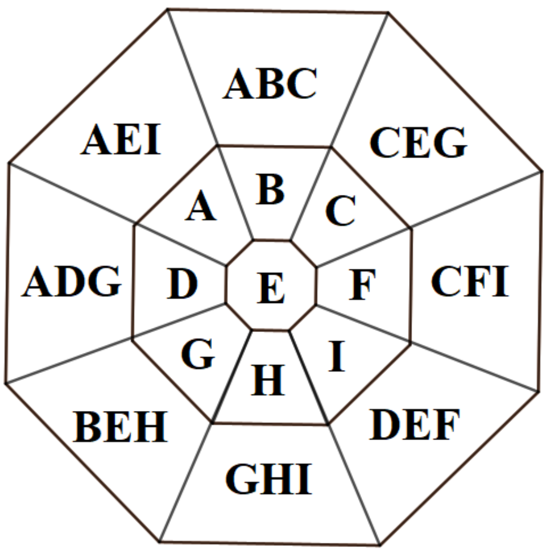
Figura 2.14: Um quadrado 3×3 estruturado de forma octogonal.



Fonte: Elaborada pela autora

A figura 2.15 traduz a legenda que identifica o alvo associado a cada linha, coluna e diagonal, neste caso, **ADG, BHE, CFI** correspondem as colunas, **ABC, DEF, GHI** são linhas e **AEI, CEG** são as diagonais.

Figura 2.15: Legenda para *Magic Mandala I*



Fonte: Elaborada pela autora

Capítulo 3

Os cinco tipos de quadrados de áreas 3×3

Analisaremos possíveis formas que um quadrado mágico de área 3×3 podem assumir, decorrentes da Fórmula de Lucas, como base de construção. O *tipo 0* é todo quadrado normal, ou seja, as entradas correspondem a elementos distintos, bem como áreas são todas diferentes. Os demais tipos serão considerados quadrados mágicos degenerados, isto é, um quadrado com entradas repetidas, também conhecido como quadrado mágico trivial.

Delahayne (2013), ressalta que, para a definição de um quadrado geomágico é necessário que as peçam sejam diferentes e não suas áreas.

Sallows, por sua vez, considerou M um quadrado geomágico e M' um quadrado numérico, resultado da substituição das peças de M por número que representa sua área. A figura 3.1 representa uma figura padrão para identificar as células.

Figura 3.1: Identificação padrão para um quadrado 3×3

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Fonte: Elaborada pela autora.

Tendo em vista que M' deve satisfazer a fórmula de Lucas, supondo que a figura 3.1 as entradas A e B sejam iguais. Pela figura 2.4, é apresentada a fórmula de Lucas, segue que, $c - b = c + a + b$, ou seja, $a = -2b$, substituindo o resultado na fórmula obtemos o quadrado *tipo 1*, que é observado na figura 3.2 em seguida, neste caso, os casos são equivalentes para quando $B = C, C = D, \ldots, D = A$. Considerando agora as entradas A e C iguais, temos que: $c - b = c + a$, ou seja, $a = b$, diante disso obtemos uma figura do *tipo 2*. Tomando $C = E$, obtemos que $a = 0$, assim obtemos o quadrado do *tipo 3*. E o *tipo 4*, é quando todas as entradas são iguais.

Figura 3.2: Tipos de áreas de um quadrado 3×3

c - b	c- b	c + 2b
c + 3b	c	c – 3b
c – 2b	c + b	c + b

TIPO 1

c - b	c + 2b	c - b
c	c	c
c + b	c - 2b	c + b

TIPO 2

c - b	c + b	c
c + b	c	c - b
c	c - b	c + b

TIPO 3

c	c	c
c	c	c
c	c	c

TIPO 4

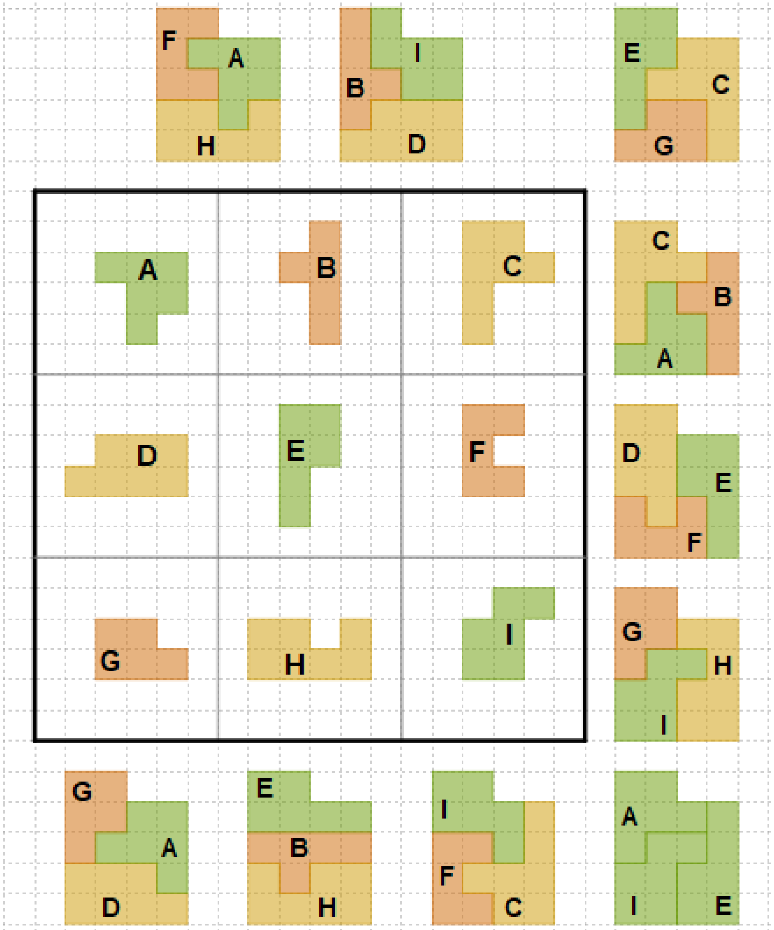
Fonte: Elaborada pela autora.

3.1 Exemplos especiais de quadrados geomágicos

Alguns quadrados mágicos, devido suas singularidades, recebem uma classificação especial, um exemplo disso é apresentado na figura a seguir, que representa um quadrado semi-nasik.

Um quadrado 3×3 semi-nasik ou semi-panmágico são aquelas que apresentam um total de 4 diagonais mágicas, que incluem as duas diagonais principais e um destes dois pares paralelos.

Figura 3.3: Um quadrado 3 × 3 semi - nasik.



6	5	7
7	6	5
5	7	6

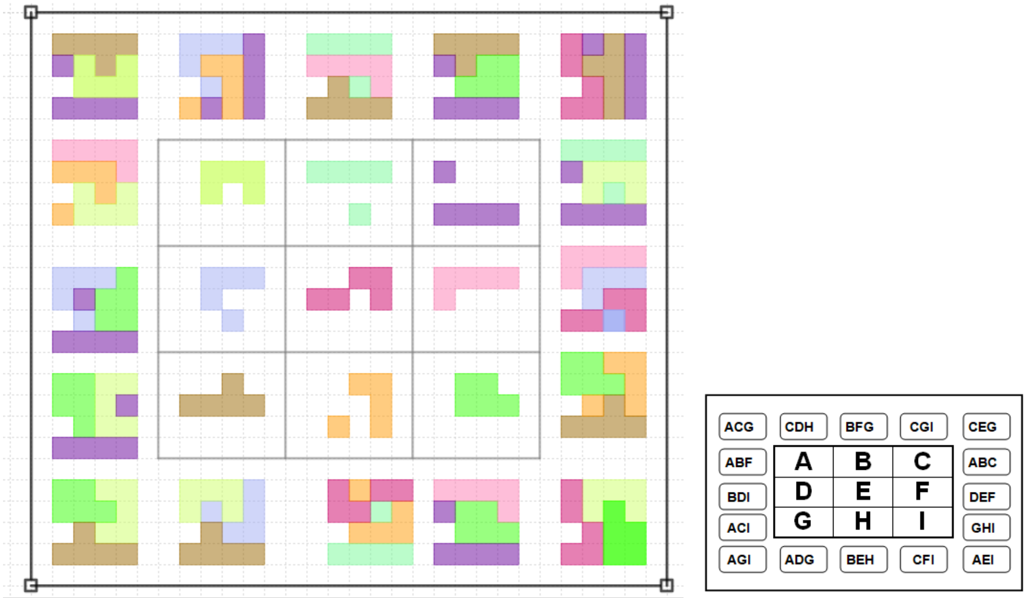
Fonte: Elaborada pela autora.

Note que em que cada diagonal, incluindo as diagonais "quebradas", **AFH, BDI, CDH** e **BFG**, são mágicas, ou sejam, as peças posicionadas formam o alvo. Além disso, **AFH** e **BDI** são paralelos, assim como **CDH** e **BFG**. Na parte superior da figura, são mostrados os alvos **AFH** e **BDI**.

Observe ainda que as peças utilizadas consistem em três tamanhos diferentes: três pentaminós, três hexáminos e três heptaminós, formando assim as áreas de um **quadrado latino**. Um quadrado latino, que foi estudado por Leonard Euler, é uma matriz $n \times n$, com n entradas distintas, onde cada uma delas ocorre, exatamente, uma vez em cada linha e coluna.

Um outro tipo de quadrado mágico, que exprime singularidades ainda mais sofisticadas, é chamado de Nasik, Pantiagonais ou Diabólicos. O termo "diabólico" deriva da dificuldade, pois, além das propriedades usuais dos quadrados mágicos, apresentam propriedades complexas. Não adentaremos em detalhes de tais propriedades. Um quadrado Nasik é definido por um quadrado mágico em que cada diagonal, quebrada ou não, é mágica. Embora não exista quadrados mágicos Nasik ou semi-nasik de ordem 3 não triviais, eles podem ser encontrados em ordem superiores. Por outro lado, Sallows, na sua busca por um quadrado geomágico Nasik obteve sucesso com poliominós desconectados, como mostra a figura 3.4.

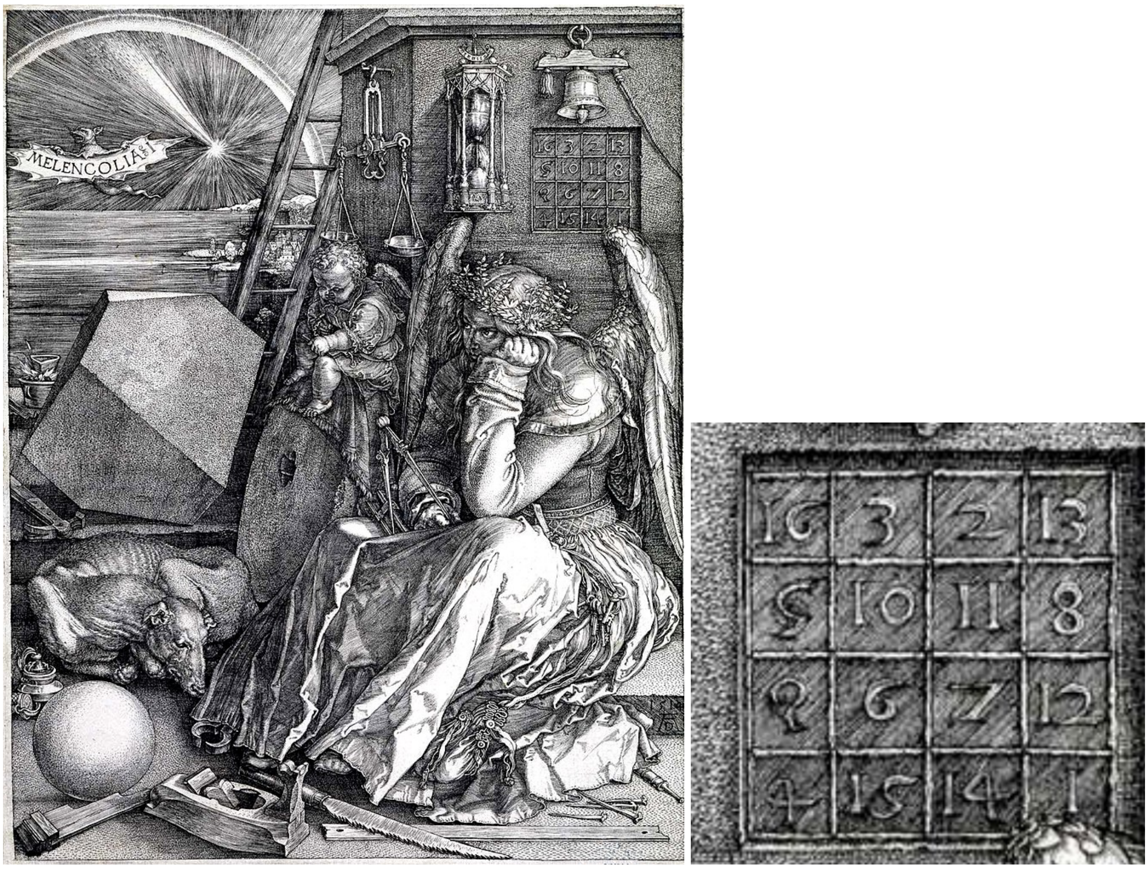
Figura 3.4: Uma quadrado nasik de ordem 3 e, ao lado, sua legenda.



Fonte: Elaborada pela autora.

O artista alemão e também matemático Albretcht Dürer (1471 - 1528), em uma de suas obras mais renomadas, *Melancolia I*, tem fascinado muitos estudiosos, por ser uma obra rica em simbolismo e interpretações sobre o seu significado na vida do autor. Um aspecto fascinante é a presença de elementos matemáticos como quadrado mágico 4×4, localizado no canto superior direito, composto pelos números de 1 a 16, cuja constante mágica é 34. Curiosamente, o ano da criação da gravura, 1514, está presente nas duas casas centrais da linha final.

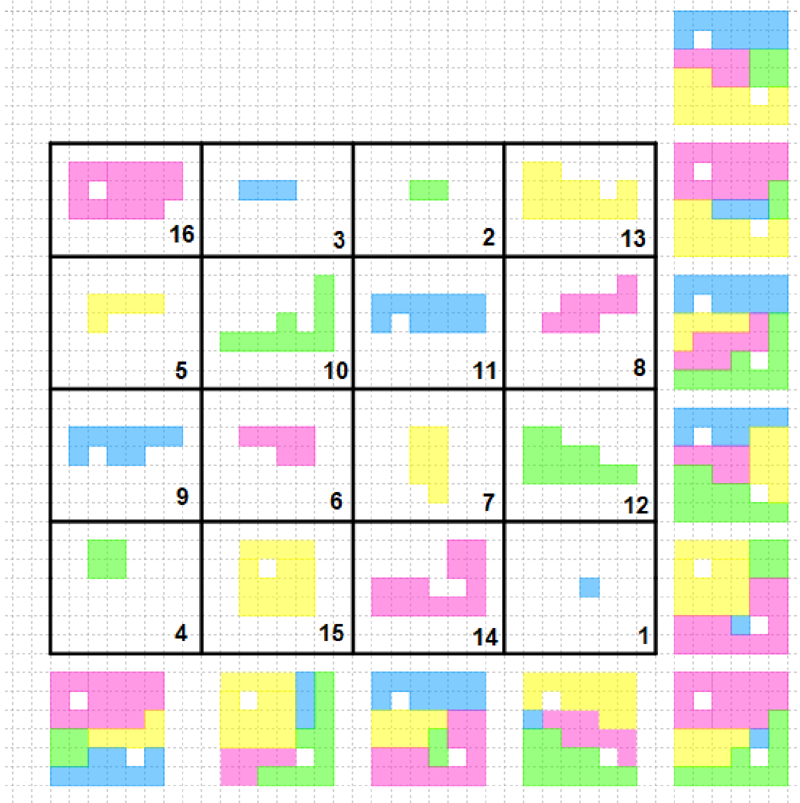
Figura 3.5: À esquerda: *Melancolia I*, Obra de Albretcht Dürer (1514). À direita: ampliação do quadrado mágico presente em *Melancolia I*.



Fonte: Wikipédia <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Melancolia_I>>.

A figura seguinte mostra uma versão geométrica, descoberta por um computador, baseado no quadrado mágico numérico de Dürer cujo alvo é um quadrado 6×6 com dois furos internos retirados.

Figura 3.6: Uma versão geométrica do quadrado numérico 4×4 de Dürer



Fonte: Elaborada pela autora.

Capítulo 4

Jogos no ensino de matemática

Os jogos proporcionam um ambiente cativante e dinâmico, repleto de desafios e estratégias que não apenas entretém, mas também estimulam a mente de forma única. Ao mergulhar nesse universo lúdico, os jogadores muitas vezes se encontram envolvidos em uma forma especial de investigação matemática, onde a resolução de problemas e a tomada de decisões estratégicas são fundamentais.

Conforme Miranda (2000), o jogo é uma atividade mental ou física, podendo envolver material concreto ou não, com objetivos regidos por regras, destacando a importância de manter o aspecto lúdico. Em muitos jogos, especialmente aqueles de estratégia, os jogadores são desafiados a calcular probabilidades, antecipar movimentos adversários e otimizar recursos. Essa abordagem requer uma compreensão sólida dos conceitos matemáticos, como álgebra, geometria e estatística, além de promover o desenvolvimento do raciocínio lógico.

A presença do jogo no contexto escolar se justifica pela intensa interação entre os alunos e pelo fomento ao respeito mútuo, independentemente do resultado. Rosada (2013) destaca que essa dinâmica é uma prática educativa e recreativa valiosa. Revela-se como um instrumento pedagógico que influencia o desenvolvimento do raciocínio lógico, físico e mental dos participantes.

No contexto do ensino de matemática, Pontes (2016) defende que a mera absorção de conteúdos matemáticos não é suficiente para a formação integral do aluno. É necessário que o estudante compreenda a aplicabilidade da matemática no seu dia a dia, conectando o "saber matemático" ao "fazer matemático". O autor propõe o lúdico como ferramenta essencial para despertar o entusiasmo pelo conhecimento matemático. Através de jogos, brincadeiras e atividades interativas, os alunos podem se envolver com a matemática de forma prazerosa e significativa, desenvolvendo habilidades como raciocínio lógico, criatividade e trabalho em equipe.

Grando (2000), argumenta também que os jogos promovem a resolução de problemas, visto que com a necessidade de vencer, o jogo impulsiona os jogadores a elaborar e testar estratégias, levantar hipóteses e refletir sobre suas ações e as de seus oponentes. Dante (2007) complementa essa visão, salientando que o problema matemático ideal deve ser desafiador, instigando a busca por soluções e motivando o aprendizado, mas ao mesmo tempo deve ser possível de ser solucionado, evitando frustração e desmotivação nos alunos.

> O real prazer de estudar Matemática está na satisfação que surge quando o aluno, por si só, resolve um problema. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. Um bom problema suscita a curiosidade e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, diminuindo sua passividade e conformismo (Dante, 2007, p. 13-14).

Assim, para que os jogos proporcionem um ambiente propício para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, é necessário que haja um equilíbrio entre o desafio e a possibilidade de sucesso.

Vale destacar que a utilização dos jogos no ensino de matemática vai além dos títulos convencionalmente associados à disciplina, como o xadrez. A resolução de quebra-cabeças e o planejamento estratégico são atividades intrínsecas a vários jogos. A análise de padrões emergentes desempenha um papel significativo no fortalecimento das habilidades matemáticas dos jogadores.

Nesse contexto, os quadrados mágicos geométricos surgem como uma ferramenta promissora, detendo potencial para ser introduzida de maneira eficaz nas salas de aula do ensino básico. Esta abordagem aprimora as competências matemáticas dos alunos e estimula o pensamento crítico. Além disso, promove a resolução criativa de problemas, enriquecendo o ambiente educacional com experiências além dos métodos tradicionais de ensino.

4.1 Uma Proposta de Prática Pedagógica com Quadrados Mágicos Geométricos

O processo educacional conhecido como RICA (Raciocínio, Inteligência, Criatividade, Aprendizagem) se caracteriza pela adoção de uma abordagem pedagógica em que o professor introduz a aula com a apresentação de um problema de matemática, de preferência relacionado a um tema novo, desafiando os alunos a resolverem de maneira intuitiva, partindo do princípio de que o exercício pertence a um tópico ainda desconhecido para os aprendizes (etapa R, de Raciocínio lógico e intuitivo). Em seguida, o docente provê os recursos necessários para a solução do problema proposto (etapa I, de Inteligência matemática e pensamento deliberativo). Posteriormente, o mediador incentiva os alunos a desenvolverem um problema prático do cotidiano utilizando o conteúdo abordado (etapa C, de Criatividade). Por fim, o professor avalia se o tópico foi relevante para os alunos e questiona se há interesse em prosseguir no aprendizado do conteúdo (etapa A, de Continuidade de aprendizagem).

Segundo Pontes (2019), após a apresentação do tema da aula e seus objetivos, o procedimento segue da seguinte maneira:

- Etapa R: é introduzido um problema de matemática relacionado ao tema da aula, e os alunos são questionados se conseguem resolvê-lo intuitivamente ou através de raciocínio lógico. Em caso afirmativo, um dos alunos é convidado a resolver o exercício no quadro-negro, sendo atribuído um ponto de bonificação. Caso contrário, é atribuído zero.

- Etapa I: é estabelecido o modelo matemático para compreender o problema apresentado na Etapa R. Após a exposição do modelo, os alunos são questionados se entenderam a explicação. Se sim, é atribuído um ponto de bonificação; caso contrário, zero é atribuído.

- Etapa C: os alunos são desafiados a criar um problema prático do dia a dia que envolva o modelo matemático apresentado com base nas informações anteriores. Se conseguirem, recebem um ponto de bonificação; caso contrário, zero é atribuído.

- Etapa A: avalia-se a necessidade do conteúdo para o cotidiano e o interesse em aprofundar o aprendizado. Em caso afirmativo, é atribuído um ponto de bonificação; caso contrário, zero é atribuído.

Baseando-se no documento de caráter normativo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. A componente curricular de matemática está dividida em cinco unidades temáticas, que orienta a formulação de habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental, dentre elas a geometria, que envolve um conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Dentro da unidade temática de geometria, as habilidades referem-se às capacidades que os estudantes irão desenvolver no estudo de determinado objeto de conhecimento.

De acordo com a BNCC (2018), podemos identificar:

- (EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

- (EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.

- (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

- (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

- (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

- (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Na busca por estratégias de ensino que proporcione interações entre a prática e os conceitos abordados em sala com o objetivo de desenvolver o pensamento geométrico do aluno, os quadrados mágicos geométricos são uma variedade de quebra-cabeça matemático fascinante por incorporar elementos geométricos na sua estrutura, além de propor aplicações que podem ser explorados em toda Educação Básica.

Essas aplicações incluem os objetos de conhecimento como polígonos, classificação, propriedades, simetria, área e perímetro. Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental ($1^{\underline{o}}$ ao $5^{\underline{o}}$ ano) espera-se que os alunos apontem as características das formas geométricas, nomeiem e comparem os polígonos por meios de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos. Os quadrados mágicos geométricos podem ser inseridos para que essas habilidades sejam obtidas por meio da manipulação de representações de figuras geométricas.

Já nos Anos Finais do Ensino Fundamental ($6^{\underline{o}}$ ao $9^{\underline{o}}$ano) vem consolidar as aprendizagens anteriores e ampliação das novas práticas. Os quadrados mágicos geométricos podem ser aplicados para dar significados as medidas de área e perímetro que possibilitam a comparação entre essas duas grandezas proporcionando uma interação com a prática e os conceitos abordados em sala de aula.

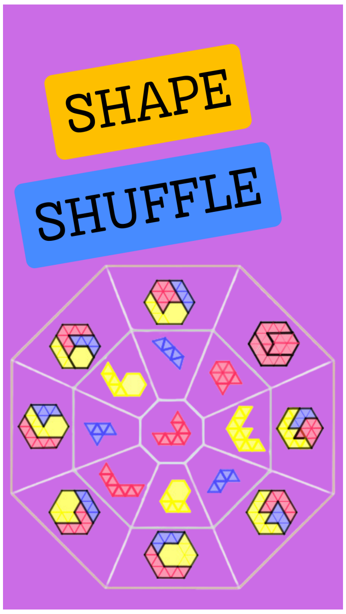
No Ensino Médio a Matemática e suas Tecnologias visa consolidar, expandir e aprofundar as aprendizagens essenciais que foram desenvolvidas no ensino fundamental.

Capítulo 5

Um jogo de baralho

Como proposta pedagógica, iremos apresentar um jogo de baralho, aqui chamaremos este jogo de *Shape Shuffle*, que pode ser traduzido livremente como embaralhamento de formas. As cartas foram elaboradas pelos autores. O jogo busca promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, inteligência estratégica e criatividade de maneira lúdica e envolvente. O *Shape Shuffle* emerge como uma proposta no cenário dos jogos educativos, apresentando uma abordagem estratégica e envolvente para a montagem de quebra-cabeças geométricos. Este trabalho analisa os principais elementos e dinâmicas do jogo, destacando suas características distintivas e potenciais contribuições para o entretenimento e o desenvolvimento cognitivo.

Figura 5.1: *Shape Shuffle*



Fonte: Elaborada pela autora.

O jogo se desenvolve em torno da montagem de um quadrado geométrico 3×3, onde cada jogador busca completar seu tabuleiro com as peças adequadas. Composto por 9 cartas de quebra-cabeças e uma variedade de cartas de estratégia,*Shape Shuffle* oferece uma experiência desafiadora e dinâmica para 2 a 5 participantes.

As cartas de quebra-cabeças apresentam diferentes combinações de formas geométricas, exigindo dos jogadores análise espacial e tomada de decisões estratégicas. Além disso, as cartas de estratégia introduzem reviravoltas emocionantes, como troca de cartas com outros jogadores e aquisição de peças adversárias.

A mecânica do jogo promove a interação social e o pensamento tático, enquanto sua estrutura modular permite uma ampla gama de estratégias e abordagens. A combinação de elementos de sorte e habilidade contribui para uma experiência equilibrada e envolvente, adequada para jogadores de todas as idades e níveis de habilidade.

O jogo *Shape Shuffle* apresenta uma abordagem pedagógica semelhante ao processo educacional conhecido como RICA (Raciocínio, Inteligência, Criatividade, Aprendizagem). Assim como no método RICA, o *Shape Shuffle* desafia os jogadores a resolverem problemas de montagem de quebra-cabeças geométricos de maneira intuitiva e estratégica, incentivando o raciocínio lógico e a tomada de decisões.

Na etapa R do jogo, os jogadores são confrontados com o desafio de completar seu tabuleiro com as peças adequadas, semelhante à apresentação de um problema de matemática na etapa R do método RICA. Eles são incentivados a usar seu raciocínio intuitivo para começar a resolver o quebra-cabeça.

Na etapa I, os jogadores precisam aplicar sua inteligência e compreensão do problema para encontrar soluções eficazes. Assim como na etapa I do método RICA, onde é estabelecido um modelo matemático para resolver o problema apresentado na etapa R, os jogadores do *Shape Shuffle* devem entender as regras do jogo e as combinações possíveis para avançar no jogo.

Na etapa C, os jogadores são desafiados a usar sua criatividade para desenvolver estratégias e abordagens únicas para completar o quebra-cabeça. Esta etapa reflete a parte do método RICA onde os alunos são incentivados a criar problemas práticos do cotidiano com base no conteúdo aprendido.

Por fim, na etapa A, os jogadores avaliam a relevância do conteúdo do jogo para suas experiências e interesses pessoais, semelhante à etapa de avaliação do método RICA. Se perceberem que o jogo oferece benefícios educacionais e entretenimento, são incentivados a continuar explorando o jogo.

Assim, o *Shape Shuffle* não apenas proporciona diversão e desafio, mas também promove o desenvolvimento do raciocínio lógico, inteligência estratégica, criatividade e interesse contínuo pela aprendizagem, alinhando-se aos princípios fundamentais do método RICA.

5.1 Cartas quebra-cabeça

No *Shape Shuffle*, as cartas quebra-cabeça são a base do jogo, representando os elementos que os jogadores precisam para completar seus quadrados geométricos. Cada carta quebra-cabeça possui uma configuração única que corresponde a uma parte específica de um hexágono regular. A estratégia reside na escolha cuidadosa e na colocação habilidosa dessas cartas para alcançar a vitória. O jogo conta com 9 cartas que representam peças de um hexágono regular. Abaixo, apresentamos o layout de cada uma delas.

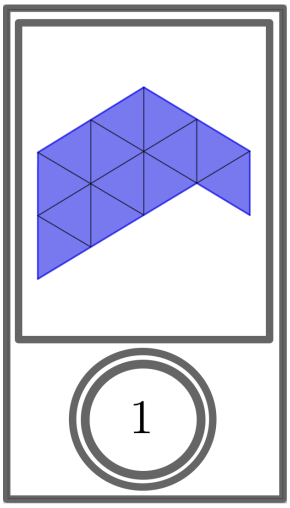


Figura 5.2: Peça 1.

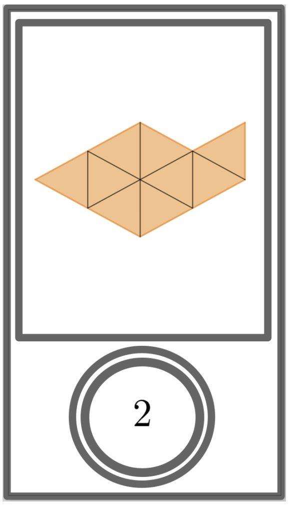


Figura 5.3: Peça 2.

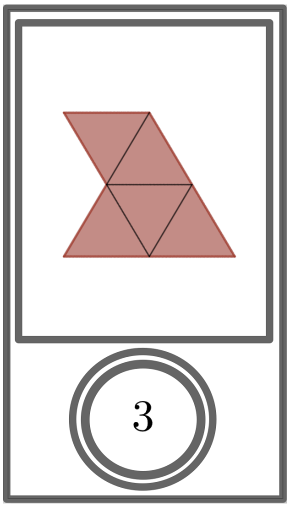


Figura 5.4: Peça 3.

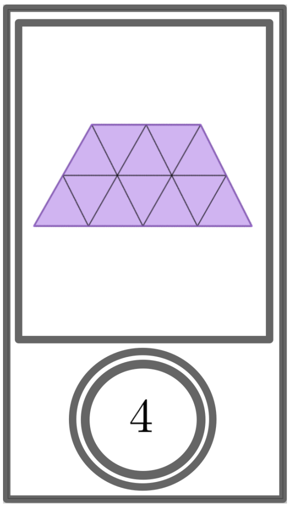


Figura 5.5: Peça 4.

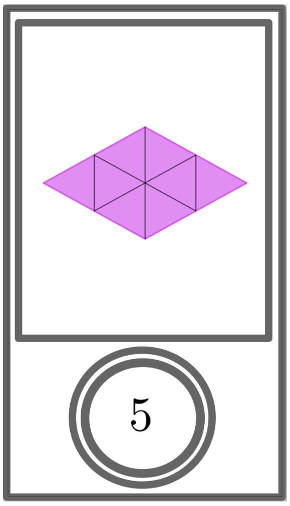


Figura 5.6: Peça 5.

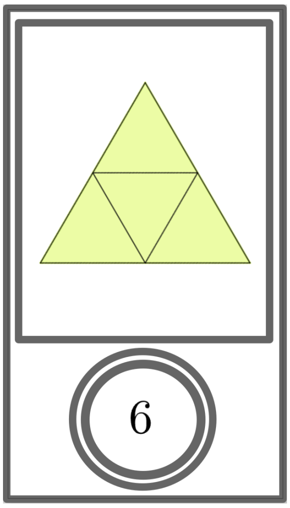


Figura 5.7: Peça 6.

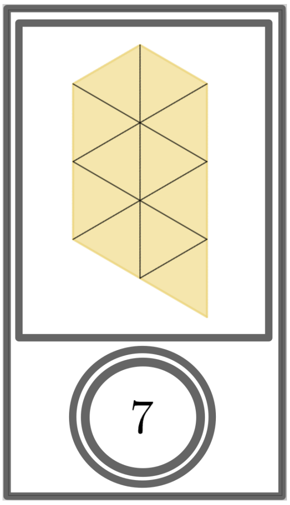


Figura 5.8: Peça 7.

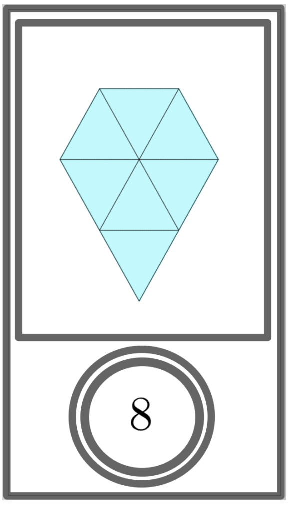


Figura 5.9: Peça 8.

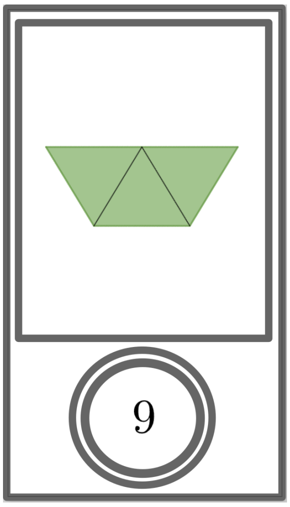


Figura 5.10: Peça 9.

5.2 Cartas de estratégia

Neste jogo de estratégia e geometria, as cartas de estratégia são elementos-chave que podem mudar o rumo da partida em um instante. Estas cartas especiais oferecem aos jogadores oportunidades únicas para dominar o tabuleiro e superar seus adversários.

Cada jogador deve usar cada carta com sabedoria para ganhar vantagem competitiva. Com uma variedade de opções à disposição, desde trocar peças até influenciar o jogo dos oponentes, essas cartas adicionam uma camada emocionante de tomada de decisões ao *Shape Shuffle*.

O jogo conta com 9 cartas de estratégia, cada uma com habilidades especiais que podem mudar o curso do jogo. Para utilizar cada carta, o jogador deve jogá-la no centro, demonstrando a ação para todos os jogadores em disputa. As cartas de estratégia não tem efeito sobre as cartas que estão na mão dos jogadores. Abaixo, apresentaremos cada carta, juntamente com o número de cartas disponíveis no baralho.

- **Pata mansa:** Tome uma carta do tabuleiro de outro jogador. Quando esta carta é jogada, o jogador seleciona uma carta do jogo de um adversário e a captura. A carta capturada deve ser imediatamente incorporada ao jogo do jogador que a capturou, não podendo ser mantida na mão. Quantidade de cartas no baralho: 5 cartas disponíveis.

- **Teletransporte:** Troque todas as suas cartas com outro jogador. Ao utilizar esta carta, o jogador seleciona um oponente e ambos trocam todas as suas cartas em jogo.Quantidade de cartas no baralho: 2 cartas disponíveis.

- **Bate e volta:** Troque uma carta do seu jogo com outra pessoa. Selecione uma carta do seu jogo e, em seguida, escolha uma carta do jogo de um adversário para trocar com a carta selecionada. As cartas trocadas devem ser adicionadas ao jogo de ambos os jogadores. Quantidade de cartas no baralho: 5 cartas disponíveis.

Figura 5.11: Carta "Pata mansa".

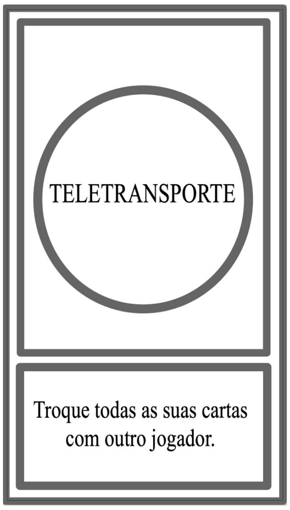


Figura 5.12: Carta "Teletransporte".

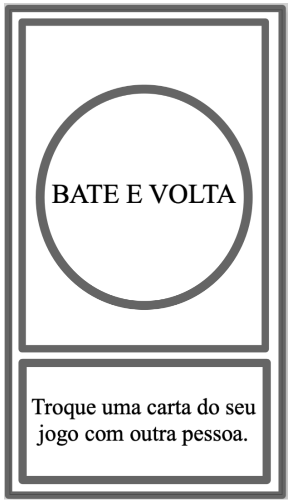


Figura 5.13: Carta "Bate e volta"

- **Bloqueio:** Escolha um jogador e impeça-o de jogar suas cartas na próxima rodada. Quantidade de cartas no baralho: 3 cartas disponíveis.

- **Soma 15:** Tome uma linha, coluna ou diagonal completa de um jogador de sua escolha. Quantidade de cartas no baralho: 2 cartas disponíveis.

- **Contra-ataque:** Se outro jogador usar uma carta de ação contra você, você pode jogar esta carta para cancelar o efeito da ação. Quantidade de cartas no baralho: 5 cartas disponíveis.

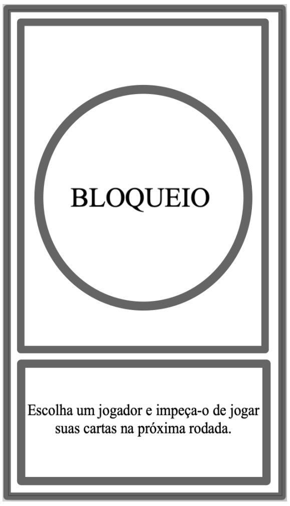


Figura 5.14: Carta "Bloqueio".

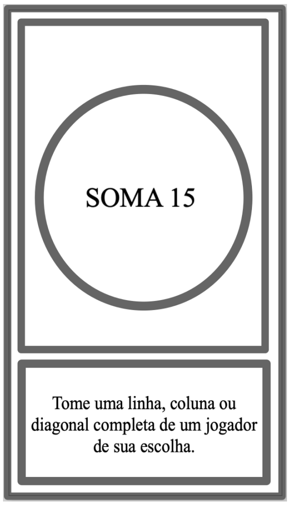


Figura 5.15: Carta "Soma 15"

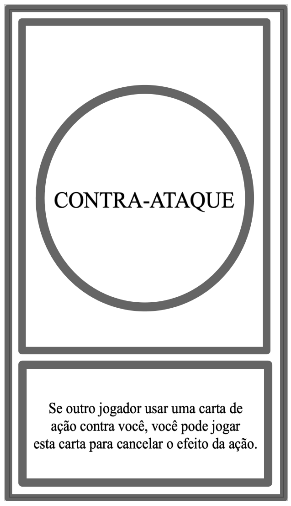


Figura 5.16: Carta "Contra-ataque"

- **Guloso:** Pegue duas cartas do baralho. Quantidade de cartas no baralho: 7 cartas disponíveis.
- **Cadeado:** Escolha uma linha, coluna ou diagonal para prender e impedir que outro jogador use a carta "Soma 15" para tomar suas cartas. Quantidade de cartas no baralho: 2 cartas disponíveis.
- **Promoção:** Saque 3 cartas e descarte 2. Quantidade de cartas no baralho: 5 cartas disponíveis.

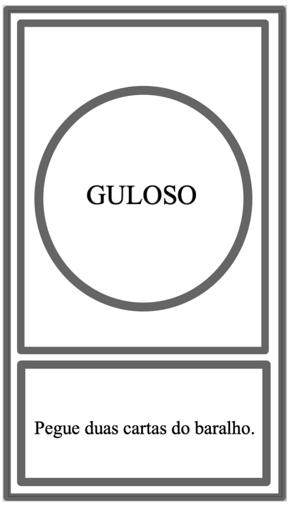


Figura 5.17: Carta "Guloso".

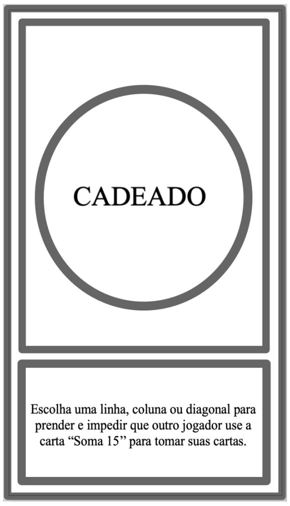


Figura 5.18: Carta "Cadeado".

Figura 5.19: Carta "Promoção"

5.3 Cartas Especiais

- **Curinga:** Esta carta pode ser usada como qualquer carta quebra-cabeça. Ela permite aos jogadores completar uma linha, coluna ou diagonal de seu quadrado geométrico, escolhendo a peça que melhor se encaixa na estratégia atual do jogador. Veja a figura 5.20. Quantidade de cartas no baralho: 2 cartas disponíveis.

- **15 completo:** Esta carta pode ser usada como qualquer carta quebra-cabeça indicada em pelas numerações em cada carta. Por exemplo, a carta 15 completo 4, 5 e 6 da figura 5.21, pode ser usada como as peças de quebra-cabeça 4, 5 ou 6 na montagem do quebra-cabeça principal. O jogo possui 8 cartas 15 completo, que indicam os 8 hexágonos que são soluções do quadrado mágico geométrico principal. As cartas 15 completo estão indicadas nas figuras 5.21 à 5.28.

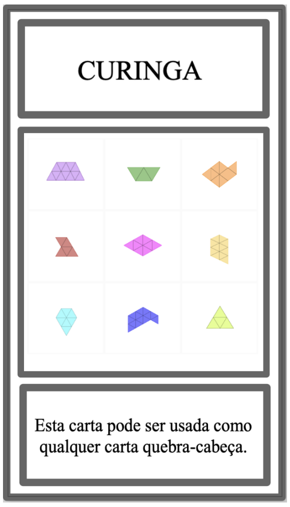


Figura 5.20: Carta "Curinga".

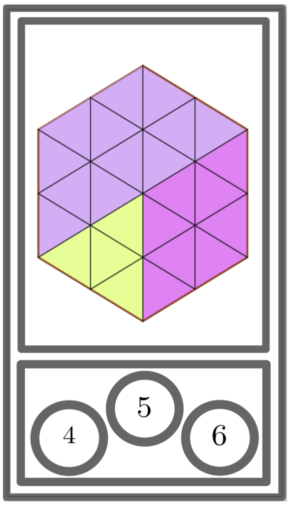


Figura 5.21: 15 completo $4 + 5 + 6$.

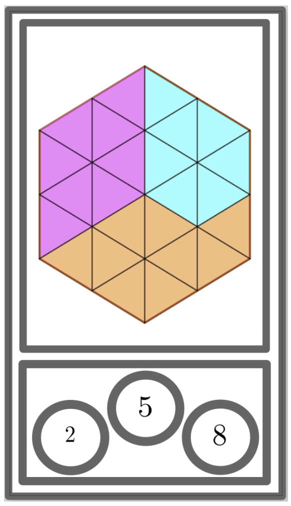


Figura 5.22: 15 completo $2 + 5 + 8$.

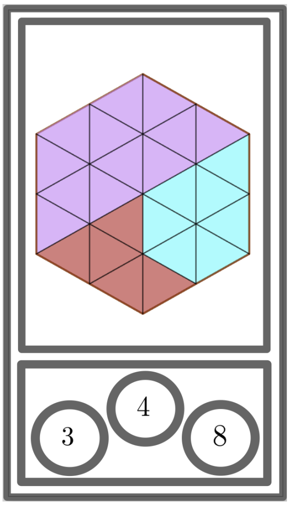


Figura 5.23: 15 completo $3+4+8$.

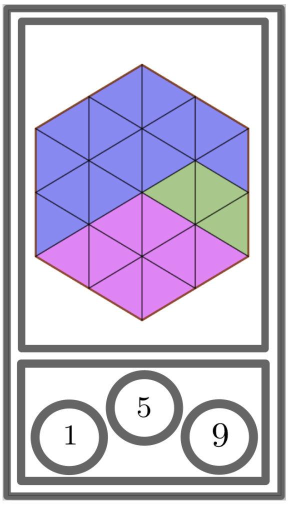


Figura 5.24: 15 completo $1+5+9$.

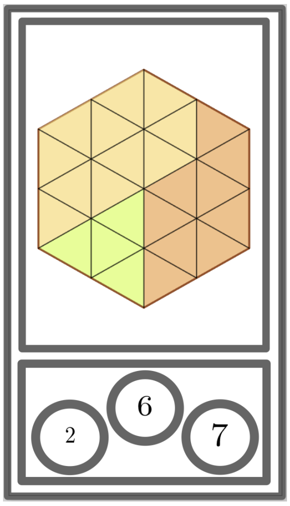


Figura 5.25: 15 completo $2+6+7$.

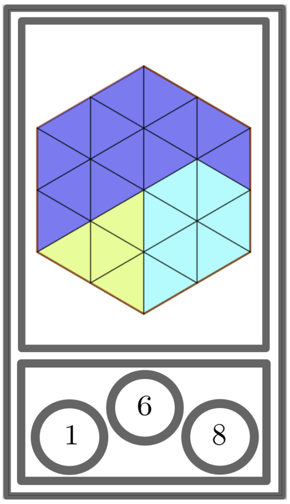


Figura 5.26: 15 completo $1+6+8$.

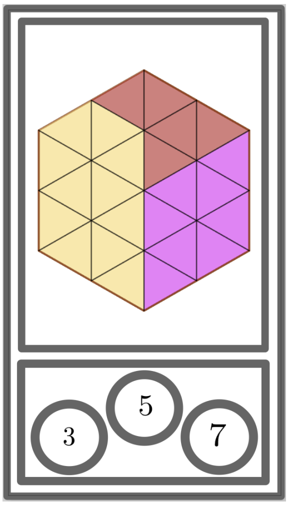


Figura 5.27: 15 completo $3+5+7$.

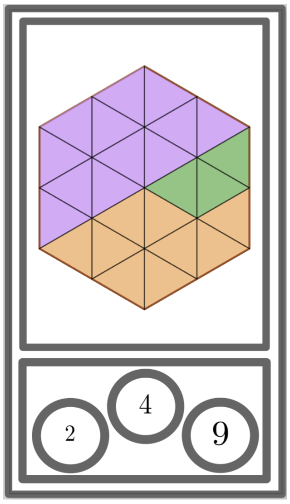


Figura 5.28: 15 completo $2+4+9$.

5.4 Regras do Jogo

Aqui faremos um pequeno resumo das regras do jogo.

- Quantidade de jogadores: 2 a 5.
- Objetivo: Seja o primeiro a completar as 9 peças do quadrado mágico geométrico.
- As cartas (quantidade): Quebra-cabeça (36, 4 de cada); Pata mansa (5); Teletransporte (2); Bate e volta (5); Bloqueio (3); Soma 15 (2); Contra-ataque (5); Guloso (7); Cadeado (2); Promoção (5); Curinga (2); 15 completo (8, 1 de cada tipo). Total de 82 cartas.

Vamos delinear o funcionamento do jogo. Após o embaralhamento do baralho, cada jogador receberá um conjunto inicial de 5 cartas. Para começar, cada jogador irá sacar 2 cartas do topo do baralho. Em cada rodada subsequente, os jogadores podem jogar até 3 cartas, seguindo o sentido anti-horário. É importante observar que cada jogador pode ter no máximo 7 cartas em sua mão ao final de sua jogada. Se um jogador tiver mais de 7 cartas, ele deve descartar o excesso no fundo do baralho. Os jogadores seguem jogando as cartas e preenchendo seu quadrados mágicos, até que um deles complete as 9 peças atingindo o objetivo de vencer o jogo. Uma possível solução é ilustrado nas figuras 5.29 e 5.30, onde a primeira solução utiliza todas as cartas que representam peças do hexágono regular. Já na segunda solução, o jogador pode utilizar, como estratégias, as cartas especiais para completar seu tabuleiro.

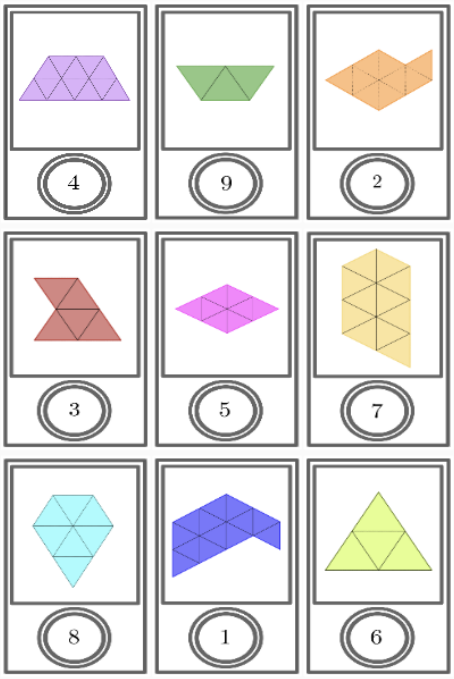


Figura 5.29: Solução 1.

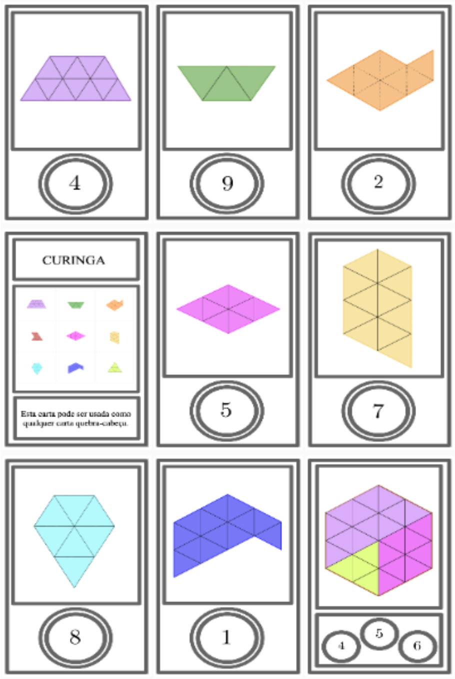


Figura 5.30: Solução 2.

Capítulo 6

Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo explorar as características dos quadrados mágicos geométricos e como eles podem ser introduzidos nas salas de aula do Ensino Básico como uma ferramenta inovadora do ensino de matemática. Apresentamos também um pouco da sua história, propriedades e de como essas estruturas matemáticas combinam a beleza da geometria como os princípios dos quadrados mágicos.

Os resultados levam contribuiçoes teóricas e práticas. Foi feita uma breve apresentação sobre os quadrados mágicos e realizada uma pesquisa sobre a importância dos jogos como uma ferramenta de ensino. No que tange as constribuições teóricas sobre os quadrados mágicos geométricos, temos a promoção e a divulgação do tema, afim de torná-lo mais acessível.

No que se refere as contribuições práticas, os quadrados geométricos podem ser aplicados para dar significados aos conteúdos trabalhados em sala de aula, por incorporar elementos geométricos na sua estrutura, os conceitos matemáticos podem ser explorados de forma visual e interativa.

Com o intuito de promover uma aprendizagem significativa e que os alunos explorem os padrões visuais para desenvolver habilidades matemáticas enquanto se divertem, o *Shape Shuffle* apresenta uma abordagem estratégica e envolvente para a montagem de um quebra-cabeça geométrico 3×3. Além de promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, inteligência estratégica, a criatividade e o aprendizado colaborativo.

Diante dos estudos dos quadrados mágicos geométricos, almeja-se que os educadores possam inserir essa ferramenta nas práticas pedagógicas, visando promover um ambiente de aprendizado estimulante e significativo, que contribua para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos.

Referências

1 ALSINA, C; Nelsen, R. B. *Math Made Visual*. MAA, p. 4, 2006.

2 BOCCALETTI, D. *From The Epicycles of The Greeks to Kepler's Ellipse – The Breakdown of The Circle Paradigm*F. Cosmology Through Time - Ancient and Modern Cosmology in The Mediterranean Area, Monte Porzio Catone (Rome), Italy, 2001.

3 BÁRTLOVÁ, T. History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics. Doctoral thesis. Charles University in Prague. Faculty of Mathematics and Physics – Department of Mathematical Analysis. Prague, 2016

4 BORTOLOSSI, H. J. *Epiciclos e Interpolação Trigonométrica*. Conteúdos Digitais para O Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2013. Disponível em: <<http://www.uff.br/cdme/epiciclos/>>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.

5 BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

6 BRASIL. Ministério da Educação.*Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

7 CARUS, P. Introdução do livro de S. W. Andrews, *Magic Squares and Cubes*.Open Court Publishing Company, 1917.

8 DANTE, Luiz Roberto. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. 12. ed. São Paulo: Editora Ática. 2007.

9 DELAHAYE, Jean-Paul. *Les carrés magiques géométriques*. Pour La science, n. 428, p. 80-84, 2013.

10 DESCATES, R. *Oeuvres de Descartes*. Ch. Adam & P. Tannery, Paris: Vrin/CNRS, 1964.

11 DÜRER, Albrecht. Melancolia I, 1514. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Melencolia_I_(Durero).jpg> >. Acesso em: 18 jan 2024.

12 EVES, Howard.*Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

13 GIRALDO, V., Caetano, P. e Mattos, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. UFRJ, UFSCar, UERJ/CP2. (2012), 240p.

14 GRANDO, Regina Célia. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.* 2000. Tese de Doutorado- Universidade Estadual Campinas. Faculdade de Educação – 2000.

15 KISHIMOTO, Tizuko M. *Jogos infantis: o jogo, a criança e a educação.* Petrópolis, RJ: Vozes, 1993.2003.p.96.

16 KLEINER, I. *Excursions in The History of Mathematics*. New York: Birkhäuser, 2012.

17 LOPES, T. I. D. A História dos Quadrados Mágicos. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra - Departamento de Matemática, p. 15, s.d. Disponível em: <

18 MARTIN, L.; Towers, J.; Pirie, S. *Collective mathematical understanding as improvisation*. Mathematical Thinking and Learning, v. 8, n. 2, p. 149–183, 2006.

19 MIRANDA, S. *Prática pedagógica das séries iniciais: Do fascínio do jogo à alegria de aprender*. Brasília: Universidade de Brasília, 2000, 187 p. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de Brasília, Brasília, 2000.

20 MATHOLOGER. *The Korean king's magic square: a brilliant algorithm in a k-drama (plus geomagic squares)*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=FANbncTMCGc>. Acesso em: 14 jan. 2024.

21 ORTON, A. (1999). *Pattern in teaching and learning of mathematics*. London: Cassel.

22 PAWLEY, M. G. *Closed Plane Curves Described by Finite and Infinite Sums of Rotating Vectors*. Journal of The Franklin Institute, v. 307, n. 3, p. 155-173, 1979.

23 PONTES, E. A. S. et al. *O saber e o fazer matemático: um dueto entre a teoria abstrata e a prática concreta de matemática*. Revista Psicologia e Saberes, v. 5, n. 6, p. 23-31, 2016.

24 PONTES, E. A. S. *Os Quatro Pilares Educacionais no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática.* Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, n. 24, p. e02-e02, 2019.

25 ROSADA, Adriane Michele Costa. *A importância dos jogos na educação matemática no ensino fundamental.* 2013. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2013.

26 SANTINHO, M. S.; Machado, R. M..*Os fascinantes Quadrados Mágicos.* 2006.

27 SALLOWS, L. *Geometric Magic Squares : A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers,* DoverPublications, 2013.

28 SALLOWS, L. *Geometric Magic Squares.* The Mathematical Intelligencer, v. 33, n. 4, p. 25–31, 2011.

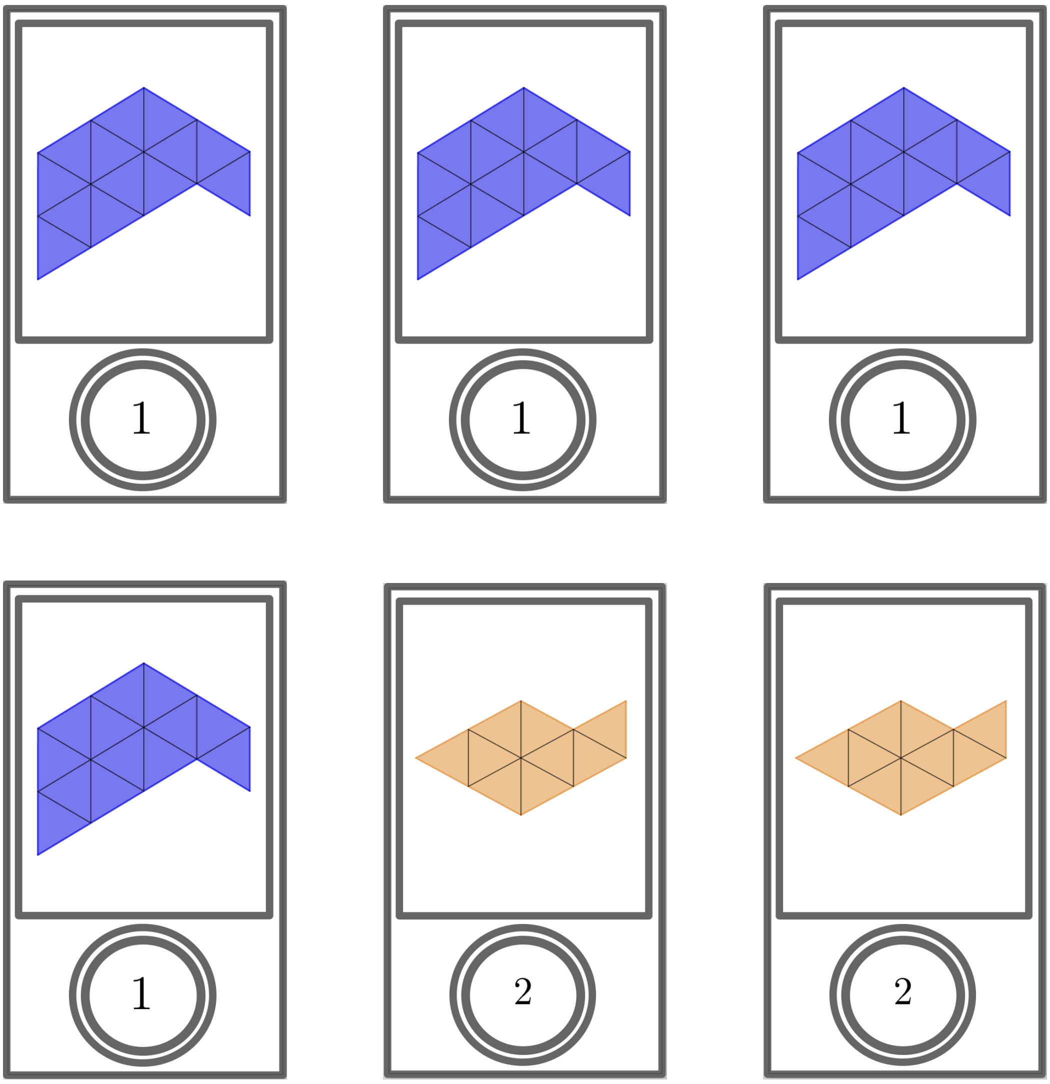
29 SALLOWS, L. Geomagic squares, 2013 (site Internet avec une grande famille d'exemples). Disponível em: <<https://www.geomagicsquares.com/> >. Acesso em: 27 nov. 2023.

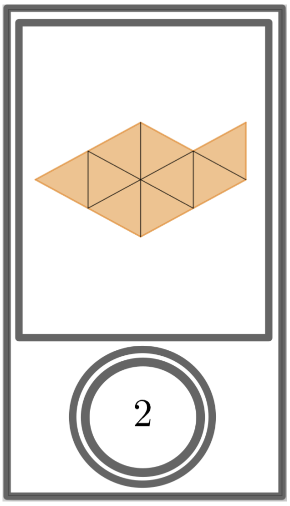
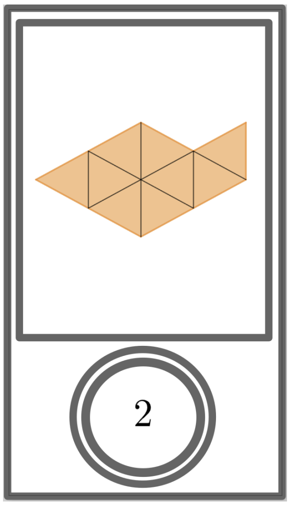
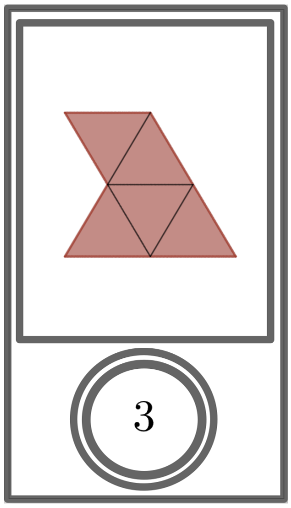
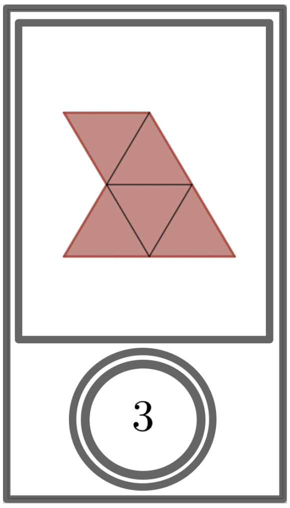
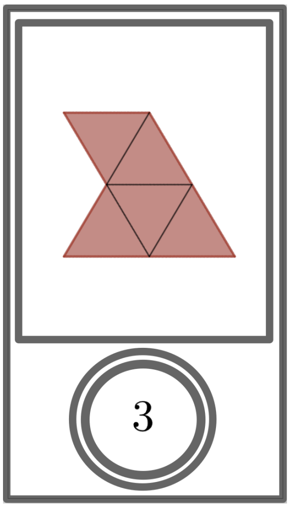
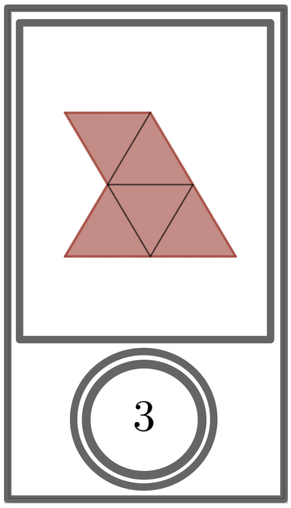
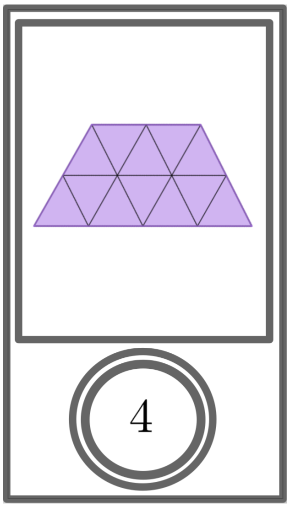
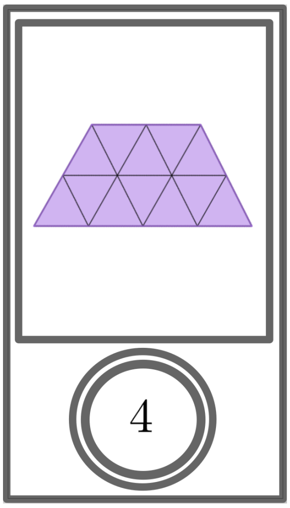
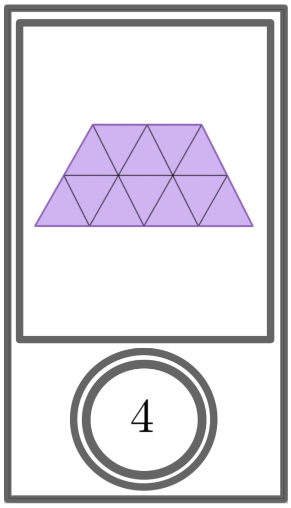
30 VALE, I. (2009). *Das tarefas com padrões visuais à generalização.* Em J. Fernandes, H. Martinho, F. Viseu (Eds.), Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 35-63). Viana do Castelo: Associação de Professores de Matemática (APM).

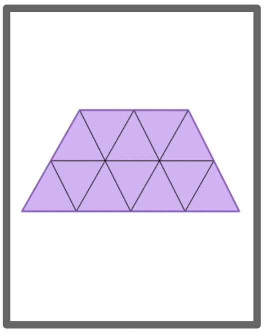
31 DÜRER, Albrecht. Melancolia I, 1514. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Melencolia_I_(Durero).jpg> >. Acesso em: 18 jan 2024.

Apêndice A

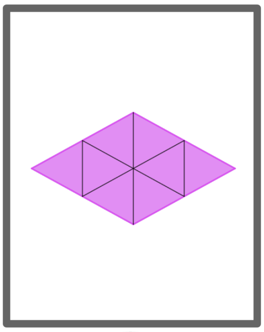
Shape Shuffle - cartas



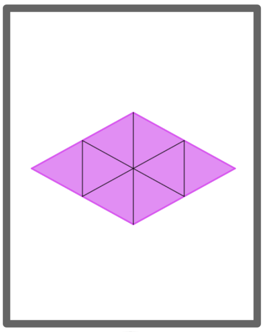

2

2

3

3

3

3

4

4

4



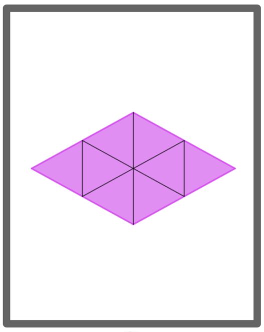
4



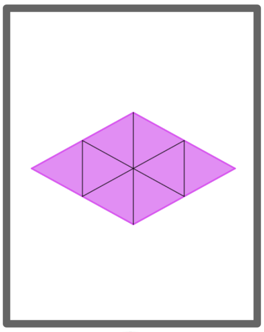
5



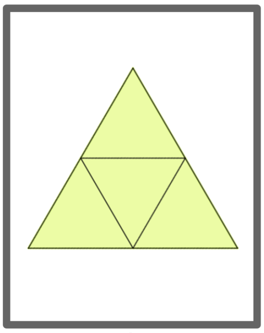
5



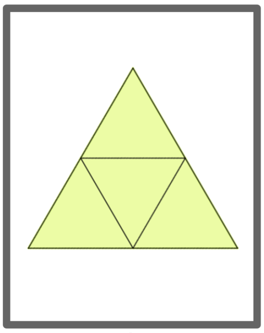
5



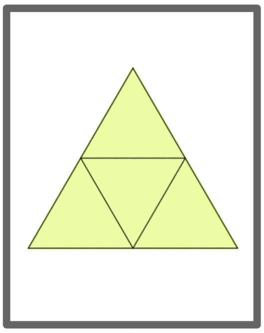
5



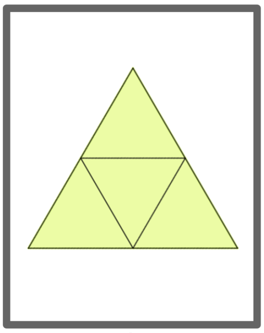
6



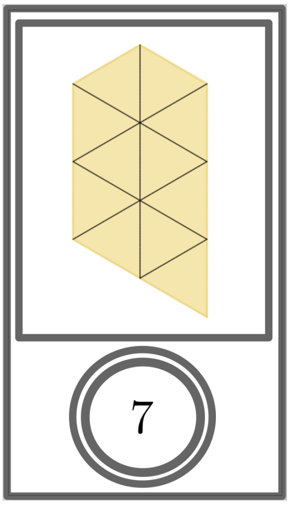
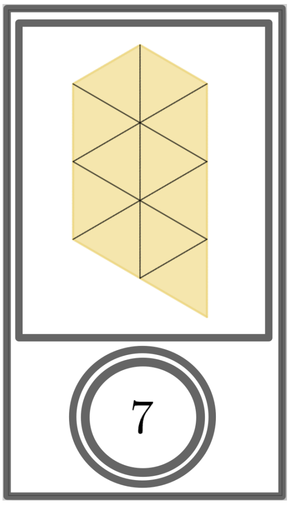
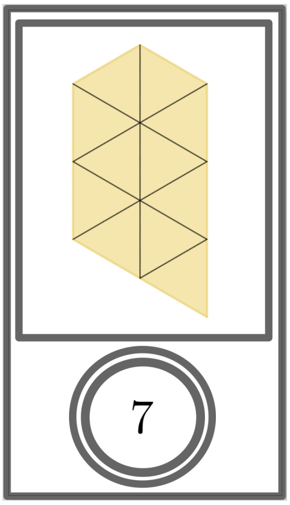
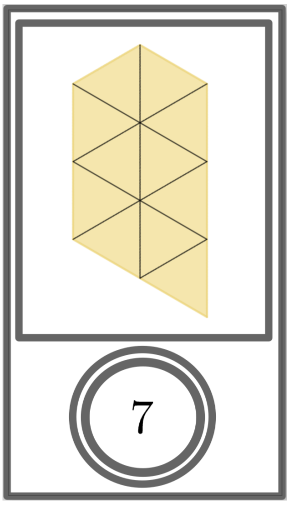
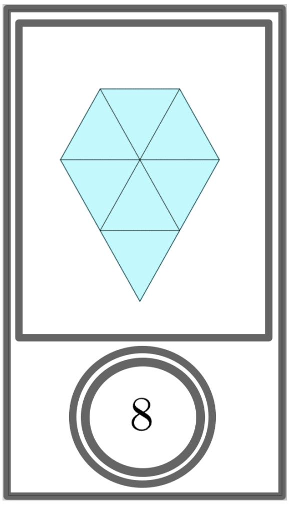
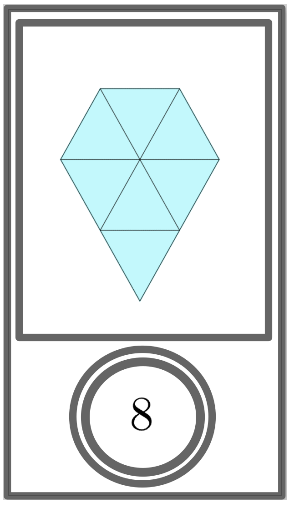
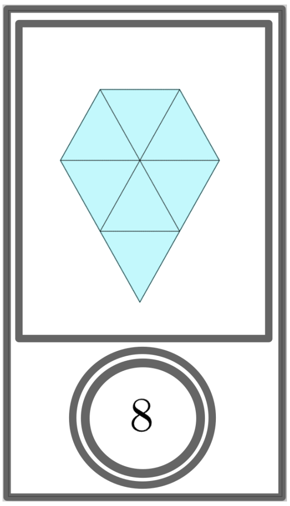
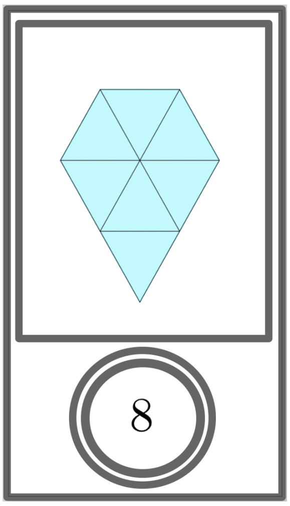
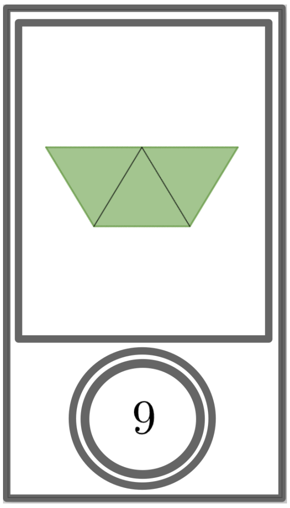
6

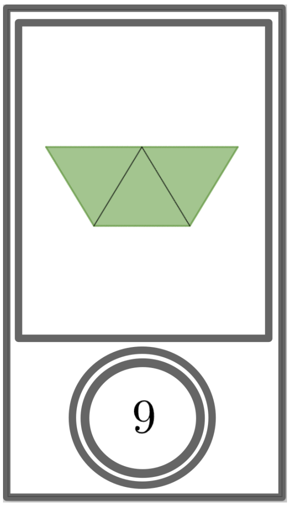


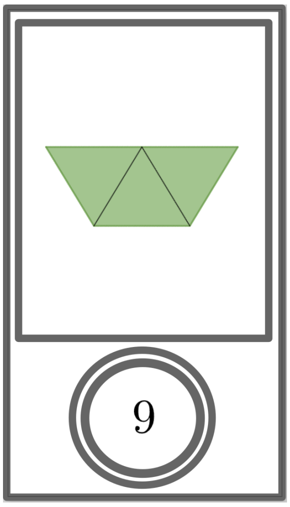
6

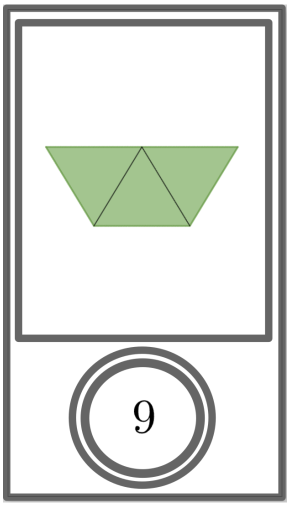


6


7

7

7

7

8

8

8

8

9







PATA MANSA

Tome uma carta do tabuleiro de outro jogador.

PATA MANSA

Tome uma carta do tabuleiro de outro jogador.

PATA MANSA

Tome uma carta do tabuleiro de outro jogador.

PATA MANSA

Tome uma carta do tabuleiro de outro jogador.

PATA MANSA

Tome uma carta do tabuleiro de outro jogador.

TELETRANSPORTE

Troque de posição com outro jogador no tabuleiro.

TELETRANSPORTE

Troque de posição com outro jogador no tabuleiro.

SOMA 15

Tome uma linha, coluna ou diagonal completa de um jogador de sua escolha.

SOMA 15

Tome uma linha, coluna ou diagonal completa de um jogador de sua escolha.

BLOQUEIO

Escolha um jogador e impeça-o de jogar suas cartas na próxima rodada.

BLOQUEIO

Escolha um jogador e impeça-o de jogar suas cartas na próxima rodada.

BLOQUEIO

Escolha um jogador e impeça-o de jogar suas cartas na próxima rodada.

BATE E VOLTA

Troque uma carta do seu jogo com outra pessoa.

BATE E VOLTA

Troque uma carta do seu jogo com outra pessoa.

BATE E VOLTA

Troque uma carta do seu jogo com outra pessoa.

BATE E VOLTA

Troque uma carta do seu jogo com outra pessoa.

BATE E VOLTA

Troque uma carta do seu jogo com outra pessoa.

CONTRA-ATAQUE

Se outro jogador usar uma carta de ação contra você, você pode jogar esta carta para cancelar o efeito da ação.

CONTRA-ATAQUE

Se outro jogador usar uma carta de ação contra você, você pode jogar esta carta para cancelar o efeito da ação.

CONTRA-ATAQUE

Se outro jogador usar uma carta de ação contra você, você pode jogar esta carta para cancelar o efeito da ação.

CONTRA-ATAQUE

Se outro jogador usar uma carta de ação contra você, você pode jogar esta carta para cancelar o efeito da ação.

CONTRA-ATAQUE

Se outro jogador usar uma carta de ação contra você, você pode jogar esta carta para cancelar o efeito da ação.

CADEADO

Escolha uma linha, coluna ou diagonal para prender e impedir que outro jogador use a carta "Soma 15" para tomar suas cartas.

CADEADO

Escolha uma linha, coluna ou diagonal para prender e impedir que outro jogador use a carta "Soma 15" para tomar suas cartas.

GULOSO

Pegue duas cartas do baralho.

GULOSO

Pegue duas cartas do baralho.

GULOSO

Pegue duas cartas do baralho.

GULOSO

Pegue duas cartas do baralho.

GULOSO

Pegue duas cartas do baralho.

GULOSO

Pegue duas cartas do baralho.

GULOSO

Pegue duas cartas do baralho.

PROMOÇÃO

Saque 3 cartas e descarte 2.

PROMOÇÃO

Saque 3 cartas e descarte 2.

PROMOÇÃO

Saque 3 cartas e descarte 2.

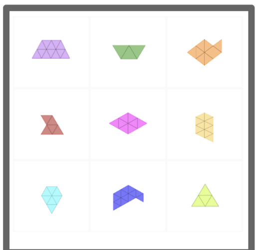
PROMOÇÃO

Saque 3 cartas e descarte 2.

PROMOÇÃO

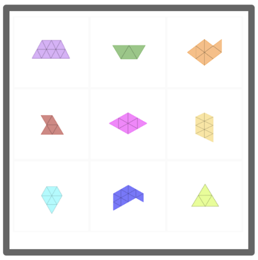
Saque 3 cartas e descarte 2.

CURINGA

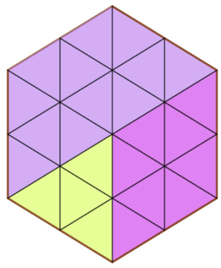


Esta carta pode ser usada como qualquer carta quebra-cabeça.

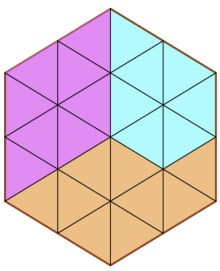
CURINGA



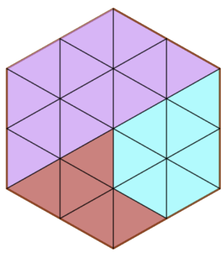
Esta carta pode ser usada como qualquer carta quebra-cabeça.



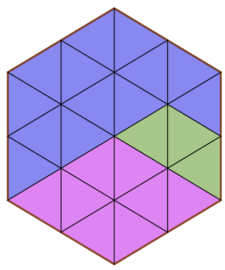
4 5 6



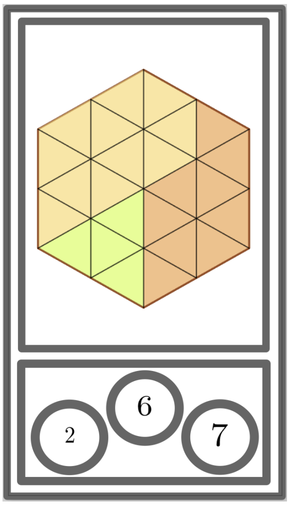
2 5 8

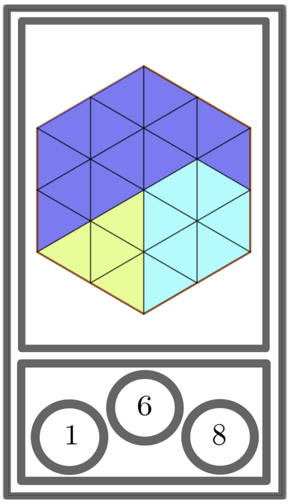


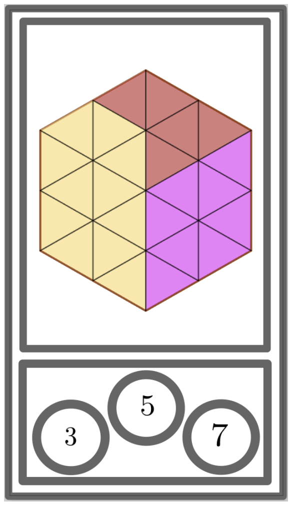
3 4 8

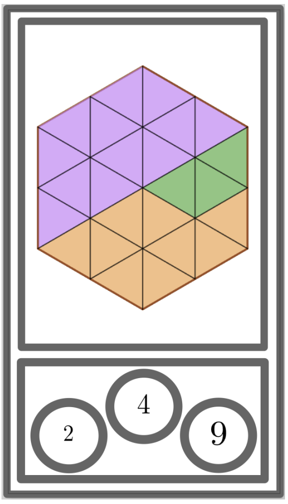


1 5 9


6
2
7


6
1
8


5
3
7


4
2
9


SHAPE
SHUFFLE