UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DAVID RAMALHO NÓBREGA

EXPLORANDO A TEORIA DOS GRAFOS COMO FERRAMENTA PARA DESENVOLVER O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA

JUAZEIRO DO NORTE
2024

DAVID RAMALHO NÓBREGA

EXPLORANDO A TEORIA DOS GRAFOS COMO FERRAMENTA PARA DESENVOLVER O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduacão em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Érica Boizan Batista

JUAZEIRO DO NORTE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

N754e Nóbrega, David Ramalho.
Explorando a teoria dos grafos como ferramenta para desenvolver o pensamento computacional no ensino de matemática / David Ramalho Nóbrega – 2024.
71 f. il. color.; 30 cm.
(Inclui bibliografia, p.66-70).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2024.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Érica Boizan Batista.

1. Teoria dos grafos. 2. Pensamento computacional. 3. Toolkit. 4. Revisão sistemática.
5. ensino de matemática. I. Batista, Érica Boizan - orientadora. II. Título.

CDD 510.7

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

DAVID RAMALHO NÓBREGA

EXPLORANDO A TEORIA DOS GRAFOS COMO FERRAMENTA PARA DESENVOLVER O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 21/05/2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br ERICA BOIZAN BATISTA
Data: 17/06/2024 10:56:40-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Dra. Érica Boizan Batista
CCT/UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br CLARICE DIAS DE ALBUQUERQUE
Data: 17/06/2024 11:09:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Dra. Clarice Dias de Albuquerque
CCT/UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br HELLEN MONCAO DE CARVALHO SANTANA
Data: 17/06/2024 13:42:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Dra. Hellen Monção de Carvalho Santana
ICTE/UFTM

Dedico este trabalho ao meu amado filho Aquiles. Estarei sempre ao seu lado para protegê-lo, educá-lo, compartilhar de seus melhores momentos e comemorar suas conquistas!

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade de viver e evoluir.

A meus pais, que me educaram e me apoiaram nas minhas decisões.

Ao meu filho Aquiles, que me alegrou nos momentos mais difíceis.

Aos colegas de trabalho, pela adequação dos meus horários.

Aos meus professores do mestrado, que lecionaram com qualidade.

À minha orientadora Érica, que contribuiu muito para a redação deste trabalho.

“Uma pequena diferença em desempenho traz
uma grande diferença em resultado”
(Lair Ribeiro).

RESUMO

Este trabalho apresenta inicialmente uma revisão sistemática de literatura de teses e dissertações que tratam do emprego da teoria dos grafos em aulas de matemática nas escolas. Essa pesquisa foi realizada nas bases de dados BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações) e no acervo do PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), no período de 2013 a 2023, em língua portuguesa, buscando compreender como a teoria dos grafos vem sendo utilizada nas escolas e quais as finalidades do emprego dessa teoria. Os estudos selecionados mostram que há inúmeras aplicações e problemas do cotidiano possíveis de serem abordados em sala de aula aplicando conceitos de grafos, contribuindo assim para a aprendizagem dos alunos. Contudo, nesses trabalhos, constatou-se a ausência, por exemplo, do pensamento computacional nas aplicações com grafos. Sendo assim, o presente trabalho propõe uma integração entre o pensamento computacional e a teoria dos grafos no contexto das aulas de matemática no ensino básico. Ao apresentar definições fundamentais dessas áreas e sugerir atividades específicas, espera-se que o professor possa desenvolver com os alunos habilidades computacionais e de lógica matemática, além de promover a autonomia dos estudantes. As ferramentas exploradas da teoria dos grafos incluem o algoritmo de Dijkstra, cadeia euleriana fechada, grafo direcionado e cadeia euleriana aberta. Em relação ao pensamento computacional, utilizou-se o conjunto de habilidades do Computational Thinking in K-12 Education Leadership toolkit. Por fim, são dadas outras sugestões de aplicações voltadas para as escolas utilizando novas ferramentas e variações das atividades propostas.

Palavras-chave: teoria dos grafos; pensamento computacional; toolkit; revisão sistemática; ensino de matemática.

ABSTRACT

This work initially presents a systematic literature review of theses and dissertations that deal with the use of graph theory in mathematics classes in schools. This research was carried out in the BDTD databases (Brazilian Digital Library of Theses and Dissertations) and in the PROFMAT collection (Professional Master's Program in Mathematics on a National Network), from 2013 to 2023, in Portuguese, seeking to understand how Graph theory has been used in schools and what are the purposes of using this theory. The selected studies show that there are countless applications and everyday problems that can be addressed in the classroom by applying graph concepts, thus contributing to student learning. However, in these works, the absence, for example, of computational thinking in applications with graphs was noted. Therefore, the present work proposes an integration between computational thinking and graph theory in the context of mathematics classes in basic education. By presenting fundamental definitions of these areas and suggesting specific activities, it is expected that the teacher can develop computational and mathematical logic skills with students, in addition to promoting student autonomy. Tools explored from graph theory include Dijkstra's algorithm, closed Eulerian chain, directed graph, and open Eulerian chain. In relation to computational thinking, the set of skills from the Computational Thinking in K-12 Education Leadership toolkit was used. Finally, other suggestions for applications aimed at schools are given using new tools and variations of the proposed activities.

Keywords: graph theory; computational thinking; toolkit; systematic review; teaching mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Ano e quantidade de estudos encontrados 22

Figura 2 – Processo geral de seleção dos Estudos... 24

Figura 3 - (a) As sete pontes de Koenigsberg; (b) Grafo das sete pontes de Koenigsberg...... 39

Figura 4 - Vértices e arestas de um grafo... 40

Figura 5 - (a) Cadeia euleriana fechada; (b) Cadeia euleriana aberta.................................... 41

Figura 6 - (a) Árvore; (b) Grafo direcionado.. 42

Figura 7 - Mapa das sete cidades... 44

Figura 8 - Mapa das sete cidades com as rotas e distâncias.. 46

Figura 9 - Grafo para o problema do menor caminho 47

Figura 10 - (a) menor caminho de A a G; (b) menor caminho para cada vértice a partir de A 52

Figura 11 - Nomeação das arestas do grafo 55

Figura 12 - Cadeia euleriana fechada a partir do menor caminho encontrado........................ 56

Figura 13 - Cruzamentos e rotas possíveis... 57

Figura 14 - Grafo direcionado 59

Figura 15 - Grafo direcionado sem a aresta e_8 61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Questões norteadoras 20
Tabela 2 - Quantidade de estudos extraídos das bases de dados eletrônicas 21
Tabela 3 - Critérios de inclusão 22
Tabela 4 - Critérios de exclusão 23
Tabela 5 - Estudos selecionados 24
Tabela 6 - Temas matemáticos abordados 27
Tabela 7 - Ferramentas de teoria dos grafos utilizadas 28
Tabela 8 - Níveis de ensino 30
Tabela 9 - Finalidades didáticas 30
Tabela 10 - Resultados da aplicação da teoria dos grafos 31

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Critérios PICO para elaboração das questões de pesquisa 20
Quadro 2 – Strings de busca adaptadas para cada Base de Dados pesquisada 21
Quadro 3 - Distâncias entre os locais da cidade 45
Quadro 4 - Distâncias preenchidas entre os locais da cidade 45
Quadro 5 - Problema do menor caminho - PASSO 1 48
Quadro 6 - Problema do menor caminho - PASSO 2 49
Quadro 7 - Problema do menor caminho - PASSO 3 49
Quadro 8 - Problema do menor caminho - PASSO 4 50
Quadro 9 - Problema do menor caminho - PASSO 5 50
Quadro 10 - Problema do menor caminho - PASSO 6 51
Quadro 11 - Problema do menor caminho - PASSO 7 51
Quadro 12 - Sentido de deslocamento entre os cruzamentos 58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CSTA	Computer Science Teachers Association
ID	Identificação
ISTE	International Society for Technology in Education
MTD3-BR	Padrão Brasileiro de Metadados para Descrição de Teses e Dissertações
NSF	National Science Foundation
PC	Pensamento Computacional
PICO	Acrônimo para Paciente, Intervenção, Comparação e "Outcomes" (desfecho)
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RSL	Revisão Sistemática de Literatura

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14
2 REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA 17
3 PERCURSO METODOLÓGICO 20
4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA RSL 27
5 PENSAMENTO COMPUTACIONAL 35
6 ELEMENTOS BÁSICOS DA TEORIA DOS GRAFOS 39
7 ATIVIDADES PROPOSTAS 43
7.1 Atividade 1: O Problema do Menor Caminho 43
7.1.1 Apresentação da Atividade 44
7.1.2 Coleta e Análise de Dados 44
7.1.3 Representação de Dados e Abstração 46
7.1.4 Decomposição do Problema 47
7.1.5 Algoritmo de Dijkstra 48
7.1.6 Simulação e Paralelismo 53
7.2 Atividade 2: Cadeia euleriana fechada 53
7.2.1 Apresentação da Atividade 53
7.2.2 Análise de Dados 54
7.2.3 Representação de Dados 54
7.2.4 Decomposição do Problema 55
7.2.5 Algoritmo 55
7.2.6 Paralelismo 56
7.3 Atividade 3: Grafo direcionado com cadeia euleriana aberta 57
7.3.1 Apresentação da Atividade 58
7.3.2 Coleta e Análise de Dados 58
7.3.3 Representação de Dados e Abstração 59
7.3.4 Decomposição do Problema 60
7.3.5 Algoritmo 60
7.3.6 Simulação 62
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS 64
REFERÊNCIAS 66

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática é uma questão discutida constantemente por educadores e pesquisadores, na busca de tentar melhorar a aprendizagem dos alunos e oferecer metodologias inovadoras para auxiliar os professores na transmissão do conhecimento. Segundo Pereira (2019), a Matemática é uma ciência que vem sendo aperfeiçoada ao longo do tempo e evolui constantemente, relacionando a lógica com situações práticas e cotidianas. De acordo com Mesquita (2021), a resolução de problemas, por exemplo, é um tópico muito presente na vida das pessoas, o que exige estratégias diferentes em busca de novas soluções.

Neste sentido, o presente trabalho busca trazer para os professores uma proposta de aplicação de atividades em sala de aula para melhorar o desempenho dos alunos e oferecer estratégias diferentes na resolução de problemas, utilizando as habilidades do pensamento computacional juntamente com a teoria dos grafos, conceitos que serão definidos nos próximos capítulos.

Inicialmente, foi realizada uma revisão sistemática de literatura em busca de estudos realizados em sala de aula, envolvendo grafos e Matemática, depois uma seleção dos trabalhos que se encaixavam nos critérios desejados e uma análise dos dados obtidos.

Na revisão sistemática, buscamos responder algumas questões sobre como a teoria dos grafos tem sido aplicada nas escolas, em quais níveis de ensino e qual a finalidade dos estudos avaliados, visando contribuir para uma melhor compreensão das relações entre grafos e Matemática no ensino básico, e para fornecer aos professores e pesquisadores uma análise detalhada do que tem sido feito e o que ainda pode ser explorado no campo educacional com o auxílio dos grafos. Constatamos, por exemplo, que os estudos pesquisados não apresentaram uma aplicação conjunta de grafos e pensamento computacional explicitamente, o que motivou neste trabalho a elaboração de uma proposta de atividades relacionando a teoria dos grafos com o pensamento computacional para serem aplicadas nas aulas de Matemática.

O pensamento computacional (PC) é um meio de resolver problemas diversos, consiste em dividir o problema em partes menores, identificar padrões já vistos em outras situações, simplificar as informações para utilizar apenas aquelas relevantes e usar um algoritmo que indique um passo a passo para chegar em uma solução. Dourado (2021) relata que o pensamento computacional oferece diversas habilidades que ajudam o estudante em sua aprendizagem e na busca por soluções em questões matemáticas. Correa (2022) explica que o pensamento computacional não é apenas uma característica de quem atua na área de computação, mas sim um conjunto de habilidades básicas dos seres humanos, tais como ler, escrever ou efetuar operações matemáticas. Dessa forma, o PC pode ser uma ótima metodologia para os professores usarem nas escolas no intuito de ajudar os alunos no processo de resolução de problemas.

E para auxiliar o professor na aplicação das habilidades do PC, propomos a inclusão da teoria dos grafos, que trata de analisar as relações entre os elementos de um conjunto, que podem ser pessoas, casas, objetos, com as conexões existentes entre eles. De maneira geral, chamamos cada elemento de vértice e cada conexão entre um par de elementos de aresta.

Uma ferramenta muito utilizada em grafos é o algoritmo de Dijkstra, que foi elaborado pelo cientista da computação holandês Edsger Dijkstra em 1956, trazendo uma grande contribuição para diversos problemas de otimização e outros. Um deles é o problema do caminho mais curto. Por exemplo, queremos saber qual o menor caminho entre duas cidades, passando por outras intermediárias, de forma que a rota escolhida seja a menor possível. Neste sentido, dentre as principais ferramentas da teoria dos grafos, iremos explorar principalmente este algoritmo, no intuito de oferecer aos professores um mecanismo para resolver problemas envolvendo distâncias.

A única limitação do algoritmo de Dijkstra é o fato de ele só funcionar com números não negativos, mas de toda forma ajuda a resolver inúmeros desafios matemáticos. Esse algoritmo é utilizado em diversas áreas, desde problemas simples com poucos elementos até aqueles que envolvem dezenas ou centenas de pontos (vértices) para serem analisados. E nesse caso, faz-se uso de computadores mais potentes para realizar muitos cálculos.

Pereira Junior (2018) explica que o algoritmo de Dijkstra analisa um conjunto de menores caminhos, iniciando em um vértice inicial I, e a cada passo procura-se por um vértice que tenha a menor distância relativa a I, dentre os que são adjacentes a este. Repete-se este passo até que todos os vértices possíveis de serem acessados por I estejam no conjunto de menores caminhos, e as arestas que conectam vértices que já estão incluídos nesse conjunto são ignoradas.

Domenegueti (2019) relata que a teoria dos grafos permitiu modelar e resolver problemas complexos de forma simples, e tem implicações em vários ramos da sociedade, como redes de comunicação, jogos, programas computacionais, entre outros. Azevedo (2022) constatou existir em suas pesquisas a importância recorrente de incluir a teoria dos grafos no ensino básico, para melhorar o desenvolvimento do raciocínio lógico dos estudantes e resolução de problemas. Sendo assim, o estudo dos grafos tem grande potencial de aplicação nas escolas, em especial nas aulas de Matemática. Como essa teoria pode ser empregada sem o uso de computadores, é possível usá-la nas escolas em conjunto com o PC.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de aplicação da teoria dos grafos para desenvolver as principais habilidades do pensamento computacional nos alunos da educação básica, usando algumas ferramentas dos grafos como o algoritmo de Dijkstra, cadeia euleriana fechada, grafo orientado e cadeia euleriana aberta.

2 REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

De forma genérica, a revisão de literatura é todo trabalho que faz um levantamento dos artigos, dissertações e teses sobre um tema específico, buscando obter informações relevantes para saber como os estudos abordaram o tema, os objetivos, comparar e verificar possíveis lacunas. Neste artigo, iremos utilizar a revisão sistemática de literatura (RSL). Mas antes, é preciso fazer uma distinção entre revisão de literatura e revisão sistemática de literatura.

Enquanto a revisão de literatura não apresenta um detalhamento de como a mesma foi produzida, ou seja, não exibe os critérios de construção e etapas empregadas para o seu desenvolvimento, a RSL segue protocolos padronizados e reconhecidos no meio acadêmico, além de apresentar uma estrutura de produção por meio da qual outros autores podem reproduzi-la. Assim, a RSL informa as bases consultadas para obtenção dos estudos analisados, os procedimentos para a seleção dos artigos, os critérios de inclusão, os critérios de exclusão e o processo de análise dos trabalhos. Além disso, a RSL apresenta as limitações de cada artigo e inclusive da própria revisão, e constitui um excelente documento para tomada de decisão (Galvão, 2019). A RSL é reprodutível, imparcial, transparente e replicável, além de avaliar criticamente os estudos individuais (Donato; Donato, 2019).

Através da RSL, pode-se avaliar uma série de fatores acerca de um determinado assunto nos estudos relacionados, tais como: relevância dos trabalhos produzidos sobre um tema, desvios e inconsistências nos estudos, indicar a necessidade de produzir um novo trabalho para complementar ou suprir a falta de dados importantes em estudos anteriores, servir como ponto de partida para o desenvolvimento e aplicação de novas pesquisas, entre outros. Campos, Caetano e Gomes (2023) afirmam que a RSL pode ser entendida como uma pesquisa que sintetiza outras pesquisas. Ela também serve como critério para verificar a existência de trabalhos duplicados. Portanto, a RSL revela-se mais abrangente e aprofundada em comparação com uma revisão de literatura.

A RSL deve ser exaustiva, no sentido de incluir toda a literatura relevante referente ao tema abordado; deve seguir uma metodologia rigorosa, por meio da qual todos os passos respeitam os critérios definidos e seguem a questão principal de investigação; e pelo menos duas pessoas devem participar da revisão (Donato; Donato, 2019).

Na etapa de produção da RSL, podemos destacar alguns passos importantes, buscando sistematizar todo o processo de revisão. São eles: a delimitação da questão, a seleção das bases de dados, a elaboração da estratégia de busca, a seleção, sistematização e equipe. Na delimitação da questão, é preciso definir a população, intervenção, comparação e outcome/resultado, abordagem está conhecida como PICO. Onde a população é o grupo de pessoas ou objetos para os quais a pesquisa é direcionada, intervenção é o que será aplicado na população, comparação é para os casos em que há várias intervenções e *outcome* representa os resultados obtidos (Galvão, 2019).

É importante destacar que, antes de iniciar uma RSL, faz-se necessário investigar se já existem outras revisões sistemáticas relacionadas ao mesmo tema. Campos, Caetano e Gomes (2023) recomendam verificar se a questão de pesquisa é nova e ainda não foi utilizada por outros estudos, garantindo, dessa forma, a originalidade e a necessidade de fazer a RSL. Caso já exista alguma revisão sistemática para o tema desejado, pode-se escolher entre fazer uma atualização desta ou construir uma revisão que agregue outros valores e qualidade ao ramo de pesquisa (Galvão, 2019).

Existem diversas bases de dados nacionais e internacionais, cada uma voltada para uma ou várias áreas específicas. Neste artigo, utilizamos as bases do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) e da BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações). A escolha das bases deve considerar o tema da pesquisa e os mecanismos facilitadores de busca da base que propiciem uma pesquisa abrangente e direcionada.

Na estratégia de busca, nos casos em que a base oferece uma busca avançada, procura-se inicialmente por sinônimos das palavras-chave presentes na pesquisa, assim garante-se que a procura seja mais precisa. Em seguida, utiliza-se os operadores booleanos: AND, OR e AND NOT, onde AND indica intersecção, OR união e AND NOT a exclusão. Na escolha dos sinônimos, é preciso procurar palavras em idiomas diferentes, nos casos em que a pesquisa envolve estudos em português, inglês, entre outros idiomas.

Durante a seleção dos estudos, recomenda-se que a mesma seja realizada por uma equipe de pelo menos dois pesquisadores, que irão fazer a análise dos trabalhos em busca das informações necessárias. Pode-se também incluir um terceiro pesquisador que desempenha a função de árbitro. A seleção pode ser feita em vários estágios, nos quais são verificados os títulos, resumos, palavras-chave entre outros, onde cada etapa engloba alguns desses metadados (Galvão, 2019).

Em todo o processo de elaboração da revisão sistemática, é preciso informar todos os passos dados e registrar as informações obtidas em um quadro, planilha ou em algum sistema de registros de dados. Assim, garante-se que a análise futura seja feita de forma organizada e evita repetir a consulta aos trabalhos, além de possibilitar que outros pesquisadores possam seguir com precisão o percurso realizado em uma RSL, caso desejem reproduzir ou ampliar o escopo de uma pesquisa do mesmo tema (Campos; Caetano; Gomes, 2023).

Sendo assim, este trabalho busca identificar como a teoria de grafos pode ser empregada no ensino de Matemática utilizando a RSL, que oferece parâmetros seguros e organizados de pesquisa e seleção de dados, para responder algumas questões norteadoras acerca da relação entre grafos e Matemática no Ensino Fundamental e Médio.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Este trabalho foi desenvolvido a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura usando mecanismos de busca online em base de dados a partir da combinação de palavras-chave (*strings*). Trata-se de um estudo com abordagem qualitativa e de enfoque exploratório, visando fazer um reconhecimento das pesquisas publicadas sobre a abordagem da teoria dos grafos no ensino de Matemática em escolas brasileiras, buscando com isso identificar o perfil das práticas didáticas mais utilizadas e avaliar os objetivos dessas abordagens em sala de aula.

Neste estudo, foram estabelecidos os seguintes critérios utilizando a abordagem PICO, conforme indicado no Quadro 1.

Quadro 1 – Critérios PICO para elaboração das questões de pesquisa

Critérios	**Termos**
População	Pesquisadores em Ensino de Matemática
Intervenção	Estratégias de ensino com o uso da Teoria de Grafos
Comparação	Teses e Dissertações brasileiras na área de Ensino de Matemática
Resultado	Abordagens da Teoria de Grafos no Ensino Básico

Fonte: Elaborado pelos autores

Definimos três questões de pesquisa principais com suas identificações (ID) que, em conjunto, buscam atender ao objetivo proposto e foram elencadas a fim de obter respostas no decorrer deste estudo, fazendo para isso fichamentos e comparando os estudos selecionados, conforme descritas na Tabela 1:

Tabela 1 - Questões Norteadoras

ID	**Questão de pesquisa**
Q1	Como a teoria dos grafos vem sendo utilizada no contexto da educação e/ou aprendizagem no cenário brasileiro?
Q2	Em quais níveis de escolaridade as pesquisas foram realizadas?
Q3	Quais são os objetivos dos estudos realizados?

Fonte: Elaborado pelo autor

Com a Q1, pretende-se analisar quais conteúdos de teoria dos grafos e matemáticos são abordados nos estudos, a maneira como é feita a relação entre a Matemática e a teoria dos grafos, bem como os recursos metodológicos utilizados. A Q2 objetiva verificar em quais etapas da educação básica os estudos foram aplicados, e a Q3 investiga a finalidade do emprego da teoria dos grafos no ensino básico de Matemática.

Para a realização da seleção dos artigos analisados, foram escolhidas como fonte de pesquisa as seguintes bases de dados eletrônicas: o acervo de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD. Essas bases de dados foram escolhidas por serem adequadas e confiáveis para a efetivação desta pesquisa, o PROFMAT por ser um programa voltado para o ensino-aprendizagem de Matemática, e a BDTD por fornecer o Padrão Brasileiro de Metadados para Descrição de Teses e Dissertações (MTD3-BR).

Quadro 2 – Strings de busca adaptadas para cada Base de Dados pesquisada

Base de Dados	**String adaptada**
PROFMAT	Grafo
BDTD	"grafo AND ensino AND Matemática"

Fonte: Elaborado pelos autores

O Quadro 2 apresenta as *strings* de busca utilizadas em cada Base de Dados. Como o acervo digital do PROFMAT não dispõe de uma ferramenta de busca avançada, optou-se por empregar a palavra-chave “grafo” para a localização de trabalhos nessa plataforma. Na sequência, todos os estudos encontrados nesta base foram salvos e catalogados para ser possível avaliar outros dados presentes no desenvolvimento do texto. Em contrapartida, na pesquisa na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, foi possível realizar uma busca avançada, onde a *string* utilizada foi “grafo *AND* ensino *AND* Matemática”, além de ser possível delimitar o idioma, tipo de documento e data.

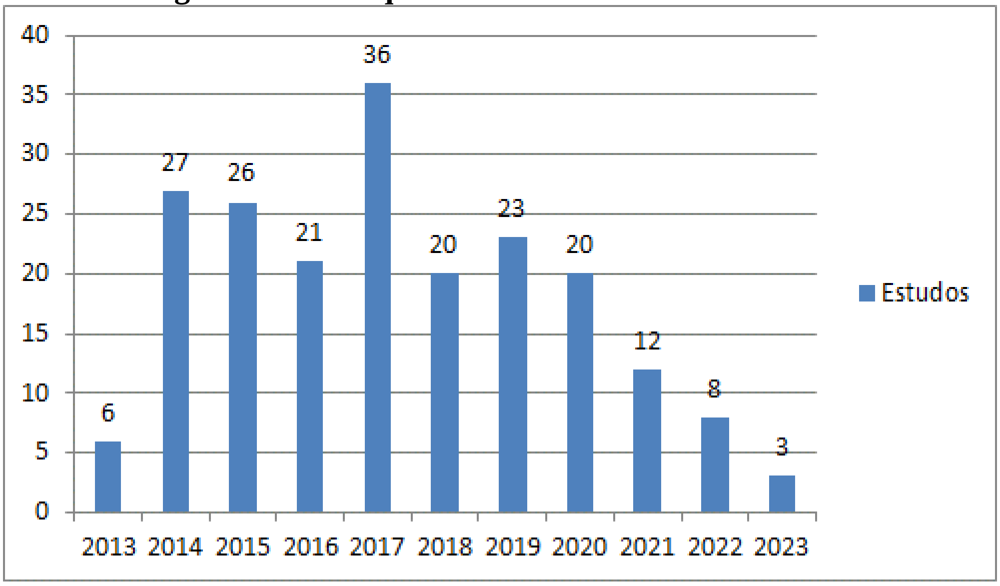
A Tabela 2 apresenta cada base de dados eletrônica utilizada e a quantidade de estudos obtidos, já a Figura 1 mostra as quantidades por ano:

Tabela 2 - Quantidade de estudos extraídos das bases de dados eletrônicas

Base de dados	**Número de trabalhos encontrados**
PROFMAT	108
BDTD	94

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 1 - Ano e quantidade de estudos encontrados



Fonte: Elaborado pelo autor

O processo de seleção e avaliação dos estudos foi dividido em duas etapas. A primeira etapa tratou de uma primeira seleção, visando limitar o escopo da pesquisa a estudos realizados nos últimos 11 anos no formato de tese ou dissertação, no intuito de analisar principalmente as dissertações do PROFMAT, que estão disponíveis a partir do ano 2013. Essa seleção foi aplicada a todos os estudos obtidos pela busca nas bases de dados. Para atender aos critérios de inclusão, os estudos deveriam centrar-se na teoria dos grafos para o ensino de Matemática, seja como tema principal ou referencial teórico. Além disso, foi necessário que os trabalhos englobassem atividades específicas desenvolvidas e aplicadas em ambiente escolar, dentro do cenário nacional, e cujo conteúdo completo estivesse disponível *online*. Inicialmente, a consulta foi realizada no acervo digital do PROFMAT e depois na base BDTD. Dessa forma, os arquivos considerados repetidos estavam presentes na base BDTD, referentes aos já encontrados na base PROFMAT.

Durante a busca, foram extraídas das bases de dados as principais informações dos estudos e registradas em uma planilha eletrônica, tais como base de dados, ano de publicação, quantidade de páginas, palavras-chave, título, autor, critérios de inclusão e exclusão, visando sistematizar a pesquisa e facilitar a execução dos próximos passos. Nesta primeira etapa, foram aplicados os critérios de inclusão conforme, a Tabela 3:

Tabela 3 - Critérios de inclusão

Sigla	Critério de Inclusão
CI1	Estudos no formato de Tese ou Dissertação.

CI2	Estudos em português (Brasil).
CI3	Estudos realizados entre 2013 e 2023.
CI4	Estudos que tratam do ensino de Matemática na educação básica por meio da teoria dos grafos.

Fonte: Elaborado pelo autor

A segunda fase consistiu na análise manual de cada estudo identificado após a aplicação dos critérios de inclusão. Nesse processo, os estudos foram salvos em um computador de forma organizada e indexada, inserindo no nome de cada arquivo o banco de dados, ano de publicação, instituição vinculada ao estudo, quantidade de páginas e nome do autor. Como exemplo, temos: "PROFMAT - 2017 - PUC - 108 - Larissa da Conceição Borges dos Santos". Este detalhe facilitou a identificação dos trabalhos e buscas futuras. Foram examinados os metadados de cada estudo extraído, incluindo título, resumo e palavras-chave. Contudo, quando não havia clareza quanto aos objetivos e conteúdos abordados nos trabalhos, também foram examinados o sumário, aplicações e conclusão, associados a cada dissertação ou tese.

Visando garantir que os estudos selecionados fossem relevantes com relação às questões norteadoras da pesquisa, foram definidos os seguintes critérios de exclusão, conforme a Tabela 4:

Tabela 4 - Critérios de exclusão

Sigla	**Critério de Exclusão**
CE1	Estudos duplicados entre as bases de dados utilizadas.
CE2	Trabalhos com conteúdo inacessível.
CE3	Estudos que não estão voltados para o ensino básico.
CE4	Estudos que não estão voltados para o ensino de Matemática através da teoria dos grafos.
CE5	Estudos que não foram aplicados em sala de aula.
CE6	Trabalhos que tratam apenas de revisão bibliográfica.

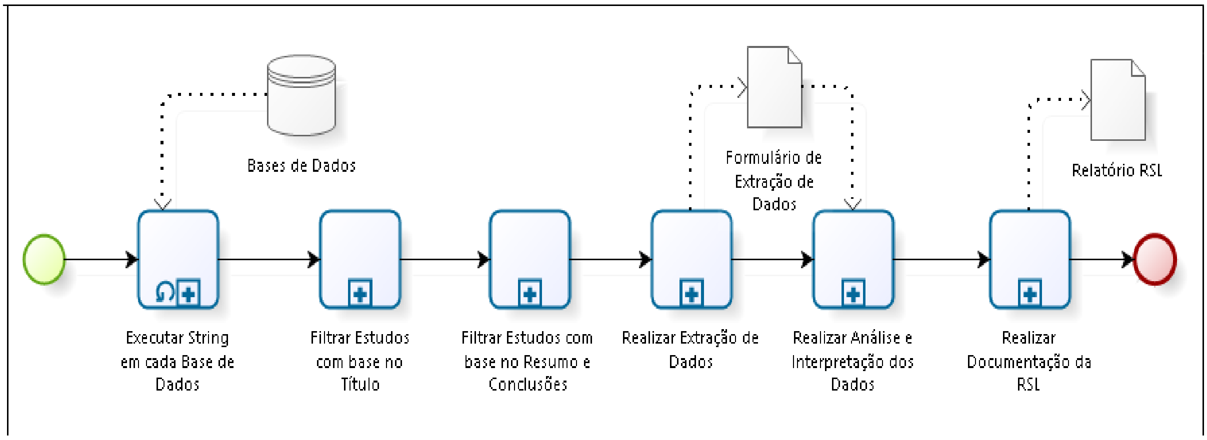
Fonte: Elaborado pelo autor

O critério CE1 garantiu que os estudos já presentes em uma base não fossem inseridos novamente na seleção; CE2 filtrou os trabalhos que, além de atenderem aos critérios de inclusão, também estivessem disponíveis para consulta; CE3 direcionou a pesquisa para estudos que tinham enfoque no Ensino Fundamental e Médio, que são os níveis de ensino avaliados na pesquisa; CE4 garantiu que os registros não tivessem outro enfoque que não o de ensino de

Matemática, excluindo assim aqueles direcionados para outras áreas como química, física, biologia, entre outras; CE5 foi um critério determinante para que a seleção de trabalhos contivesse apenas aqueles com aplicação e execução confirmada em sala de aula; e o CE6 verificou se os estudos tratavam apenas de revisão bibliográfica, sem foco no emprego da teoria dos grafos no ensino de Matemática.

A seleção dos estudos foi conduzida manualmente, aderindo ao procedimento delineado na Figura 2. Durante a análise de cada estudo, o software PDF-XChange Editor foi empregado, possibilitando a inserção de marcações nos documentos em PDF de forma versátil. Assim, para cada tópico e subtópico presentes no sumário de todos os arquivos, foram aplicadas marcações a fim de facilitar a comparação, pesquisa e revisão dos metadados dos estudos, permitindo uma resposta ágil sempre que a necessidade de retornar a um tópico específico surgia.

Figura 2 – Processo geral de seleção dos Estudos



Fonte: Grupo de Qualidade de Software da Universidade Federal de Santa Catarina

Após a conclusão do processo de seleção, 34 dentre os 202 trabalhos encontrados foram escolhidos, abrangendo todos os estudos obtidos das bases de pesquisa investigadas. Os artigos selecionados com suas respectivas identificações (ID) estão listados na Tabela 5:

Tabela 5 - Estudos selecionados

ID	Ano	Título	Autor
E1	2013	Resolução de problemas em contextos de ensino de Matemática: uma abordagem por meio da Teoria dos Grafos.	Jefferson Ricart Pezeta
E2	2014	Atividades de Modelagem Matemática envolvendo a Teoria dos Grafos no Ensino Médio.	Andreia Araújo de Farias

E3	2014	Possibilidades em Grafos Hamiltonianos.	Michel Guerra de Souza
E4	2014	Resolução de Problemas via Teoria dos grafos.	Renato Ferreira de Souza
E5	2014	Redes sociais: um estudo introdutório.	André Luiz Bispo Ferreira
E6	2015	Grafos no Ensino Básico.	Marcelo Alves Souza
E7	2015	Grafos: Uma Experiência no Ensino Fundamental.	Alan Marcelo Oliveira da Silva
E8	2015	Grafos: Uma Experiência no Ensino Médio.	Alessandro de Araújo Gomes
E9	2015	Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio.	Daniel Klug Nogueira
E10	2015	Resolução de problemas relacionados à teoria dos grafos no Ensino Fundamental.	Daniel da Rosa Mesquita
E11	2016	Coloração em Grafos: Uma Experiência no Ensino Médio.	Odilon Magno da Silva Júnior
E12	2016	Caminhos em Grafos: Uma Experiência no Ensino Médio.	Victor Leite Alves
E13	2016	Uma Metodologia para o Ensino da Teoria dos Grafos utilizando Objetos Virtuais de Aprendizagem.	Maria Elenice Schoroeder de Sena
E14	2017	Grafos Eulerianos na Educação Básica.	Bruno Nogueira Cardoso
E15	2017	O Ensino de Matrizes Utilizando Teoria dos Grafos.	Suelma Luiza Alves de Souza
E16	2017	Coloração em Grafos: Uma experiência no Ensino Fundamental.	Fábio da Rocha Costa
E17	2017	Resolução de problemas via Teoria dos grafos: uma possibilidade de tornar a Matemática mais atraente na Educação Básica.	Danila de Fátima Chagas Assis
E18	2017	Grafos e Problemas de Caminhos.	Dárcio Costa Nogueira Júnior
E19	2017	A teoria dos grafos e sua abordagem na sala de aula com recursos educacionais digitais.	Flávia Fernanda Favaro
E20	2018	Coloração dos grafos na Educação Básica.	Vinicius Trevezani Pereira Leal

E21	2018	Uma Abordagem sobre a Teoria dos Grafos no Ensino Médio.	Antônio Valdemir Pereira Júnior
E22	2018	Caminhos em Grafos: Uma Experiência no Ensino Fundamental.	Osni Novaes da Silva Júnior
E23	2018	Grafos e Emparelhamentos em Grafos.	Thiago Silveira da Fonseca
E24	2018	Teoria dos Grafos no ensino médio: aplicações em problemas de trânsito.	João Paulo Gonçalves Della Torre
E25	2019	O Menor Limite Inferior de Vértices de Grau 2 Para Um Grafo Minimal 2-Aresta-Conexo.	José Ivan Dultra Júnior
E26	2019	Grafos: Uma Experiência em Turmas Militares dos Ensino Médio e Fundamental.	Rodrigo Cesário de Aquino
E27	2019	Grafos: Uma Proposta Aplicada ao Cotidiano de Alunos do Ensino Fundamental.	Carolina Ribeiro Pereira
E28	2019	Introdução à teoria dos Grafos e o Problema de Coloração.	Ananda Kainne Oliveira Domenegueti
E29	2019	Noções de topologia nos anos iniciais do ensino fundamental: uma possibilidade investigativa por meio do software Scratch.	Priscilla Frida Salles Tojeiro
E30	2020	Grafos: uma abordagem através de questões da OBMEP e do Canguru de Matemática.	Luís Antônio de Souza da Silva
E31	2020	Atividades de Modelagem Matemática: o Uso da Teoria dos Grafos no Ensino Fundamental.	Guilherme da Silva Oliveira
E32	2021	Grafos e suas Aplicações no Ensino de Matemática.	Carolina Pereira Vaz Mesquita
E33	2022	Mentalidades Matemáticas: Uma Proposta de Atividade Envolvendo Grafos.	Roberto Pereira Azevedo
E34	2022	Uma Abordagem da Teoria dos Grafos nos Anos Finais do Ensino Fundamental por meio de Problemas Olímpicos de Matemática.	Igor Correia de Souza Costa

Fonte: Elaborado pelo autor

No próximo capítulo, é apresentada uma análise dos estudos selecionados na revisão. Ao final, realizamos uma breve discussão dos resultados apresentados com o objetivo de responder às questões iniciais a respeito da aplicabilidade da teoria dos grafos no ensino de Matemática, suas contribuições e desafios.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DA RSL

Após analisar os estudos selecionados, foram feitos fichamentos contendo dados relevantes para responder às questões norteadoras, de forma a obter semelhanças entre as abordagens nos estudos e as relações entre as ferramentas de teoria dos grafos empregadas nos tópicos de Matemática.

Notamos que a maioria dos trabalhos pesquisados nas bases de dados selecionadas foi publicada no ano de 2017, tendo uma queda nos anos seguintes. Isso pode indicar a necessidade de mostrar a importância e os benefícios que o estudo de grafos pode trazer para o ensino básico para estimular a produção de mais trabalhos voltados para esse campo.

Com relação à primeira questão norteadora deste trabalho, a saber: Q1 - "Como a teoria dos grafos vem sendo utilizada no contexto da educação e/ou aprendizagem no cenário brasileiro?", foram destacados alguns dados em todos os estudos, tais como: metodologia, materiais utilizados, temas matemáticos abordados, e as ferramentas de teoria dos grafos.

Os materiais empregados variaram entre papel e lápis, laboratório de informática, celular e recursos concretos, como canudos, palitos e massa de modelar. Notavelmente, a utilização desses objetos simples revelou-se uma alternativa eficaz em ambientes escolares com limitações tecnológicas.

Na Tabela 6, exibimos os conteúdos matemáticos abordados em cada estudo, correspondente à etapa de exploração do material e categorização:

Tabela 6 - Temas matemáticos abordados

Temas matemáticos abordados	**Estudo**
Matrizes	E1, E2, E5, E13, E14, E15, E18, E19, E21, E28
Raciocínio Lógico-matemático	E1, E3, E4, E6, E7, E8, E10, E12, E13, E15, E16, E17, E18, E20, E22, E23, E24, E26, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E33, E34
Análise Combinatória	E8, E9, E11, E13, E18, E19, E24
Probabilidade	E18
Poliedros	E9, E12, E18
Geometria plana e espacial	E12

Perímetro	E13, E15
Números binários	E1
Curvas e segmentos de reta	E15

Fonte: Elaborado pelo autor

A maior parte dos estudos, portanto, abordou o “raciocínio lógico-matemático”. Isso deve-se ao fato de que boa parte dos problemas relacionados a grafos pode ser resolvida sem o uso de fórmulas matemáticas, ou seja, apenas com o raciocínio lógico. Em segundo lugar temos o conteúdo “matrizes”. Como na teoria dos grafos utilizamos as relações entre vértices e arestas em muitas aplicações, o uso da matriz de adjacência e, portanto, de matrizes, está muito presente, visto que por meio dela podemos organizar e visualizar melhor as relações entre os elementos de um grafo. Em terceiro lugar temos o conteúdo “Análise combinatória”, que envolve o emprego de problemas nos quais é preciso determinar todas as possibilidades existentes de caminhos entre um ponto (vértice) e outro, ou mesmo qual o menor caminho.

Fica evidente, portanto, que o uso de grafos é utilizado no ensino, pois há inúmeros problemas que podem ser tratados em sala de aula envolvendo matrizes, raciocínio lógico-matemático e análise combinatória, juntamente com outros conteúdos de Matemática. Além disso, os alunos podem perceber uma aplicabilidade para os assuntos dessa disciplina no cotidiano. Na Tabela 7 são mostradas as principais ferramentas de teoria dos grafos utilizadas nos estudos selecionados:

Tabela 7 - Ferramentas de teoria dos grafos utilizadas

Ferramentas de teoria dos grafos	**Estudo**
Grau do vértice e número de arestas	E1, E2, E6, E7, E8, E9, E10, E12, E13, E14, E15, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E33, E34
Matriz de Adjacência	E1, E2, E14, E15, E18, E19, E21, E28
Ciclos Hamiltonianos	E3, E4, E8, E9, E10, E17, E31
Caminhos Eulerianos	E1, E6, E7, E8, E10, E12, E14, E17, E21, E22, E23, E24, E26, E29, E30, E31, E33, E34

Coloração dos grafos	E1, E6, E7, E10, E11, E14, E16, E18, E20, E26, E28, E30, E32
Tipos dos grafos	E1, E9, E7, E12, E13, E14, E18, E21, E22, E23, E26
Algoritmo de Dijkstra, Floyd, PRIM e Kruskal	E1, E7, E8, E12, E13, E17, E18, E21, E22, E24, E26, E27
Planaridade	E8, E9, E11, E12, E17, E18, E20, E22, E26, E28
Isomorfismo	E8, E9, E12, E25, E26
O Problema do Caixeiro Viajante	E10, E13
Laços	E1, E12, E18, E22, E26
Caminho, trilha, ciclo	E12, E15, E17, E18, E19, E21, E22, E24, E27, E32
Grafo Conexo	E9, E12, E14, E18, E22, E23, E25, E26, E34
Teorema de Euler	E12, E18

Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se que praticamente todo estudo que abordou o grau do vértice de um grafo também trabalhou com número de arestas, isso se deve ao fato de que essas duas ferramentas são básicas no estudo de grafos. Comparando as ferramentas “ciclo Hamiltoniano” e “caminho Euleriano”, vemos que este último é mais utilizado, provavelmente por ser mais fácil de aplicar em sala de aula e de os alunos conseguirem resolver os problemas relacionados.

Entre os tópicos da teoria dos grafos mais utilizados estão a “coloração de grafos, que acreditamos ser de fácil aplicação para os alunos; o “Algoritmo de Dijkstra”, por facilitar a identificação de um caminho mais curto em mapas; “planaridade” por facilitar a organização de grafos; e “caminho, trilha e ciclo”, que ajudam na sistematização de relações entre vértices e arestas.

Na sequência, também foram bastante utilizadas as ferramentas “Matriz de adjacência”, que está diretamente ligada ao conteúdo de matrizes, inclusive à multiplicação de matrizes, nos casos em que se investiga a quantidade de saltos necessários de um vértice para outro; “tipos de grafos” e “grafo conexo”, que também são importantes na resolução de problemas com grafos. Contudo, de maneira geral, alguns estudos introduziram um ou outro conceito da teoria dos grafos de maneira pontual e secundária, mesmo que o foco do trabalho estivesse voltado para outras aplicações.

Para responder à questão norteadora Q2: "Em quais níveis de escolaridade as pesquisas foram realizadas?", analisamos os níveis de ensino nos quais os estudos selecionados foram aplicados, conforme a Tabela 8:

Tabela 8 - Níveis de Ensino

Nível de ensino	**Estudo**
Ensino Fundamental I	E29
Ensino Fundamental II	E4, E6, E7, E10, E14, E16, E20, E22, E23, E26, E27, E31, E32, E33, E34
Ensino Médio	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E11, E12, E13, E15, E17, E18, E19, E21, E24, E25, E26, E28, E30, E32

Fonte: Elaborado pelo autor

Observou-se uma predominância significativa da aplicação da teoria dos grafos no contexto do Ensino Médio, possivelmente atribuída à inclusão dos conteúdos de matriz e análise combinatória, os quais foram amplamente utilizados nos estudos selecionados. No Ensino Fundamental II também houve uma grande aplicação da teoria dos grafos, fato este que acreditamos ser devido à possibilidade de trabalhar o raciocínio lógico-matemático nessa etapa, e inclusive uma introdução simples do conteúdo de matrizes.

Apesar da boa aplicação de grafos observada nos níveis Fundamental II e Médio, no Ensino Fundamental I verificou-se apenas um estudo direcionado para esta etapa. No entanto, é plausível considerar uma extensão das aplicações de grafos no Ensino Fundamental I, caso os problemas selecionados abordem conceitos matemáticos elementares, como, por exemplo, a coloração de mapas, uma ferramenta que, sem dúvida, seria pertinente para alunos desse nível de ensino.

Sobre a questão norteadora Q3: "Quais são os objetivos dos estudos realizados?", reunimos informações sobre as finalidades didáticas de cada trabalho, conforme a Tabela 9:

Tabela 9 - Finalidades didáticas

Finalidades didáticas	**Estudo**
Fortalecer a habilidade de solucionar problemas do mundo real por meio do estudo dos grafos	E1, E2, E25, E33
Capacitar os alunos para investigarem a existência de ciclos hamiltonianos em um grafo	E3

Verificar se houve melhora no desempenho na resolução de problemas após aplicar a teoria dos grafos para os alunos	E1, E4, E7, E8, E10, E11, E12, E14, E15, E16, E17, E19, E21, E22, E24, E26, E27, E29
Avaliar a viabilidade do uso de teoria dos grafos no ensino básico	E1, E5, E9, E13, E18, E23, E28, E30, E31, E32, E34
Desenvolver as habilidades de investigação, análise, modelagem e resolução de problemas por meio da teoria dos grafos	E1, E6
Mostrar aplicações de matrizes por meio da teoria dos grafos	E15
Desenvolver o raciocínio lógico e argumentação	E10, E20

Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se que a maioria dos estudos tem como finalidade didática "verificar se houve melhora no desempenho na resolução de problemas após aplicar a teoria dos grafos para os alunos", em segundo lugar, tiveram como finalidade "avaliar a viabilidade do uso de teoria dos grafos no Ensino Médio". Sobre a finalidade "Desenvolver o raciocínio lógico e argumentação", apesar de somente dois estudos (E10 e E20) relatarem explicitamente que tinham essa finalidade, outros estudos (E1, E5, E7, E8, E11, E12, E14, E16, E17, E21, E22, E26, E30, E31, E32 e E34) trataram de problemas que envolviam o raciocínio lógico.

Observa-se, portanto, que a experimentação da teoria dos grafos tem sido realizada em ambientes educacionais, especialmente em salas de aula, visando a avaliação de sua aplicabilidade e se houve melhora no desempenho dos alunos. Os estudos conduzidos nesse contexto oferecem subsídios relevantes para considerar a possível integração desta teoria no currículo de Matemática destinado ao Ensino Fundamental e Médio.

Sobre os resultados obtidos em virtude da aplicação da teoria dos grafos em sala de aula, reunimos na Tabela 10 os relatos dos trabalhos selecionados com relação aos resultados:

Tabela 10 - Resultados da aplicação da teoria dos grafos

Resultado	**Estudo**
Estudo relata que houve melhora no raciocínio lógico e na capacidade de resolução de problemas dos alunos	E1, E2, E7, E8, E10, E12, E13, E15, E19, E31,
Estudo relata que houve melhora na assimilação do conhecimento referente ao conteúdo abordado por meio da teoria dos grafos	E3, E4, E5, E6, E9, E11, E14, E16, E17, E18, E20, E21, E22, E23, E24, E26, E28, E29, E30, E32, E33, E34,

Os alunos tiveram dificuldade com a teoria dos grafos	E3, E6, E7, E8, E9, E10, E18, E19, E20, E22,
Os alunos demonstraram maior motivação nos conteúdos de Matemática que foram associados à teoria dos grafos	E1, E2, E7, E8, E10, E11, E12, E14, E15, E17, E18, E19, E21, E23, E26,
O uso dos grafos foi indispensável para resolver o problema	E2, E6, E8, E12, E13, E17, E18, E22, E24, E27,
A incorporação da teoria dos grafos no conteúdo programático de Matemática mostrou-se viável	E2, E11, E13, E15, E18, E34,
O uso dos grafos deu significado aos conteúdos matemáticos	E1, E2, E7, E8, E11, E13, E15, E18, E19, E22,
O uso dos grafos fomentou discussões sobre temas transversais por meio da Matemática	E2, E13, E14, E27,
O uso dos grafos favoreceu o estabelecimento de critérios para resolver problemas	E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E10, E11, E12, E15, E17, E18, E27,
O uso dos grafos possibilitou a inclusão de recursos tecnológicos nas aulas	E1, E2, E5, E8, E13, E15, E17, E18, E19, E20, E21, E26, E27, E29, E33,
O uso dos grafos permitiu que os alunos usassem a Matemática em situações cotidianas	E1, E2, E7, E8, E12, E13, E16, E19, E21, E22,

Fonte: Elaborado pelo autor

Destaca-se que a maioria das pesquisas submetera os alunos a um pré-teste e um pós-teste durante a implementação de problemas, o que possibilitou a comparação dos resultados antes e depois da exposição à teoria dos grafos. Os resultados indicam que os índices de acertos apresentaram uma ampliação significativa após a explicação dos conceitos de grafos, evidenciando também uma maior motivação dos alunos na resolução de problemas.

Sendo assim, a maioria dos estudos relatou melhorias no aprendizado de maneira geral, sendo que 10 estudos especificamente mencionaram avanços no aprendizado de Matemática. Todos os estudos destacam que os alunos compreenderam a teoria dos grafos, e percebe-se que essa compreensão contribuiu de várias formas, proporcionando significado aos conteúdos matemáticos, estimulando discussões sobre outras áreas relacionadas à Matemática, possibilitando a integração de recursos tecnológicos em sala de aula e aplicando a Matemática em situações cotidianas, entre outros benefícios.

Dessa forma, a teoria dos grafos não só ajudou na aprendizagem de Matemática, como também favoreceu estudos envolvendo conteúdos interdisciplinares e mostrou a aplicabilidade de alguns tópicos da Matemática em situações práticas, contribuindo assim para uma melhor abordagem dessa disciplina e forneceu meios alternativos e lógicos para resolução de problemas.

Este estudo empreendeu uma análise abrangente de diversos trabalhos que incorporaram a teoria dos grafos no ensino básico, examinando os temas matemáticos associados a essa abordagem e os resultados observados em ambiente escolar. Foram observadas as metodologias empregadas, os objetivos e para quais níveis de ensino os estudos foram direcionados.

Destaca-se que os conteúdos matemáticos mais explorados foram matrizes, raciocínio lógico-matemático e análise combinatória. No que tange às ferramentas de teoria dos grafos, destacaram-se grau do vértice, número de arestas, caminhos Eulerianos, coloração de mapas, algoritmo de Dijkstra, planaridade, caminho, grafo conexo e matriz de adjacência. Além disso, os estudos ocorreram majoritariamente no Ensino Médio (64,7%), seguido pelo Ensino Fundamental II (44,1%), sendo que apenas um estudo (2,9%) foi conduzido no Ensino Fundamental I.

Por outro lado, as metodologias e abordagens adotadas pelos estudos foram diversas, com ênfase em resolução de problemas, pesquisa experimental e estudo de caso.

Constatou-se que as principais finalidades didáticas foram verificar se houve melhora no desempenho na resolução de problemas após aplicar a teoria dos grafos com os alunos, avaliar a viabilidade do uso da teoria dos grafos no Ensino Médio, contribuir para a formação de um indivíduo autônomo e crítico por meio da teoria dos grafos e facilitar a resolução de problemas da realidade com o estudo de grafos.

Dos estudos selecionados, 64,7% dos relataram melhora no aprendizado em geral, e 29,4% mostrou que houve melhora no aprendizado de Matemática, além de indicar vários benefícios no estudo de grafos tais como aprender a usar a Matemática em situações cotidianas, introduzir recursos tecnológicos em sala de aula, buscar os dados necessários para resolver problemas e dar significado aos conteúdos matemáticos.

Apesar dos resultados satisfatórios, os estudos também relataram que os alunos enfrentaram desafios na organização de suas ideias ao abordar o problema proposto, mesmo após terem sido introduzidos aos conceitos básicos da teoria dos grafos. Essa situação sugere a necessidade de intervenções pedagógicas voltadas para reforçar as habilidades de organização cognitiva dos estudantes em relação aos temas matemáticos.

Ao analisar os estudos, também se observou uma lacuna significativa na abordagem explícita do pensamento computacional, visto que os trabalhos selecionados priorizaram a introdução da teoria dos grafos em sala de aula e sua aplicabilidade. Diante desse cenário, vislumbramos que a integração do pensamento computacional ao contexto escolar, em conjunto com a teoria dos grafos, tem o potencial de otimizar os resultados. Essa abordagem pode ser especialmente relevante na resolução de problemas cotidianos, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da autonomia dos alunos, ampliando, assim, as possibilidades de uma aprendizagem mais significativa.

Concluiu-se, portanto, que a utilização da teoria dos grafos no ensino básico se revela como uma alternativa relevante para aprimorar a aprendizagem dos alunos. Essa abordagem não se limita a problemas matemáticos, abrangendo também situações cotidianas e contextualizadas, o que facilita a assimilação de conceitos matemáticos. Destaca-se que a associação de ferramentas da teoria dos grafos aos conteúdos de Matemática demonstra a aplicabilidade dessa disciplina em situações reais, contribuindo para despertar o interesse e o desejo dos alunos em aprender de forma mais engajada. Por fim, embora os estudos analisados tenham apresentado bons resultados, acreditamos que esses podem ser potencializados por meio da incorporação de práticas pedagógicas que estimulem a organização cognitiva dos alunos, como é o caso do pensamento computacional.

5 PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Levando em consideração o capítulo 4, no qual constatamos não haver explicitamente nos trabalhos pesquisados uma aplicação envolvendo teoria dos grafos com pensamento computacional, trouxemos nesta seção as principais definições deste, no intuito de sugerir mais adiante atividades relacionando as duas áreas.

O pensamento computacional é um conceito que visa facilitar a resolução de problemas de maneira lógica e organizada, buscando seguir uma sequência de passos que se complementam para se obter uma solução. Ele pode ser aplicado em diversos contextos, e apesar do nome, não significa necessariamente envolver o uso de computadores, visto que pode ser empregado em situações que não dependem de dispositivos eletrônicos.

De acordo com Peters (2023), a expressão *computational thinking* (pensamento computacional) foi apresentada inicialmente por Seymour Papert em 1980 para indicar um conjunto de habilidades trabalhadas na área de Ciência da Computação, mas que também poderiam ser utilizadas em outras áreas e contextos diversos. No entanto, foi em 2006 que o termo pensamento computacional ganhou força após a pesquisadora Jeannete Wing publicar um artigo intitulado "Computational Thinking Communications", onde a mesma define o PC como um processo de identificar características computacionais em situações do cotidiano, aplicando técnicas para entender e solucionar problemas naturais, sociais e artificiais (Carboni, 2023).

Dessa forma, os conceitos do PC podem ser aplicados na educação básica para ajudar na aprendizagem dos alunos, já que uma das maiores dificuldades dos estudantes é compreender um problema e definir um caminho para resolvê-lo. Para Silva (2022), o PC é uma ferramenta essencial para a educação básica, visto que possibilita aos alunos desenvolverem habilidades de resolução de problemas já nos primeiros anos da escola.

De acordo com Carboni (2023), o pensamento computacional não se limita ao uso de programação, pois envolve o desenvolvimento de habilidades como a representação de problemas, abstração e identificação de padrões. Silva (2022), afirma que existem 4 pilares principais que norteiam o PC: 1) decomposição, 2) reconhecimento de padrões, 3) abstração e 4) algoritmo.

Em 2010, algumas escolas americanas em parceria com a *Computer Science Teachers Association* (CSTA), a *National Science Foundation* (NSF) e a *International Society for Technology in Education* (ISTE) desenvolveram um conjunto de ferramentas chamado de *Computational Thinking in K-12 Education Leadership toolkit*, embasado na ideia de que todos os alunos devem ter competências nas habilidades básicas do PC ao término do Ensino Médio CSTA et al. (2010, apud Andrade et al., 2013).

Neste material do toolkit, existe um quadro de progressão que aponta nove conceitos da área de computação, considerados essenciais para serem abordados no desenvolvimento do PC. São eles: 1) coleta de dados, 2) análise de dados, 3) representação de dados, 4) decomposição de problemas, 5) abstração, 6) algoritmos, 7) automação, 8) simulação e 9) paralelismo (Andrade et al., 2013). Sendo assim, esses conceitos podem ser usados em sala de aula como habilidades do PC, preferencialmente nessa ordem acima, mas não significa necessariamente que todos os conceitos estarão presentes para qualquer problema. Por exemplo, em atividades que não dependam de computadores, a automação seria dispensável, pois nela há o uso de computadores. De toda forma, o professor pode instigar os alunos a descobrirem quais habilidades podem ser utilizadas em uma determinada situação.

A *coleta de dados* consiste em buscar e organizar as informações. A *análise de dados* permite encontrar coerência nos dados, buscando padrões e obtendo conclusões a partir deles. Nela é possível identificar características e situações vistas em problemas anteriores com mais clareza e aplicar no atual. Nesta fase, procura-se por semelhanças ou padrões de outros desafios já vistos, usando ferramentas e técnicas aprendidas anteriormente para resolver o problema (Carboni, 2023). Dessa forma, torna-se mais fácil prosseguir no desenvolvimento da solução, pois já se conhece algo a respeito dos elementos envolvidos, fazendo uma conexão entre o saber adquirido e o novo contexto apresentado. Além disso, o emprego do reconhecimento de padrões evita a perda de tempo ao testar caminhos que não levarão à resposta correta, pois através dessa habilidade já podemos escolher qual percurso terá maiores possibilidades de acerto, com base em experiências anteriores e similares.

A *representação de dados* é a forma de organizar adequadamente as informações usando quadros, tabelas, gráficos e outros recursos semelhantes. Neste trabalho, usaremos grafos para tal. A *decomposição* é quando dividimos o problema principal em partes menores, o que facilita na identificação de seus elementos e ajuda nas decisões a serem tomadas posteriormente para encontrar o melhor caminho de resolução. A decomposição é semelhante ao trabalho feito por programadores, que dividem o código-fonte de um software em blocos específicos para executarem determinada tarefa. Para Silva (2022), é na decomposição que ocorre a quebra de um problema em partes menores para ser possível solucioná-lo e depois combinar as ideias obtidas em busca do resultado final. A decomposição possibilita, inclusive, a identificação rápida e precisa de possíveis erros que possam surgir no desenvolvimento de uma solução.

A próxima etapa é a *abstração*. Nela, simplificamos o trabalho, visando eliminar informações dispensáveis, mantendo apenas os elementos fundamentais sem os quais não teríamos como chegar na solução. Carboni (2023) afirma que na abstração devemos ignorar dados desnecessários, possibilitando trabalhar com ideias mais abrangentes, simplificando o desafio e facilitando o entendimento, além de estimular a capacidade de síntese. Nesta etapa, também conseguimos com mais eficiência entrelaçar os dados relevantes e planejar como aproveitá-los para se obter uma resposta aceitável.

Na etapa de *algoritmo*, conseguimos finalmente elaborar uma sequência de passos usando as informações colhidas para resolver determinado desafio, e para isso precisamos definir algumas regras e modelos de execução que nos darão o caminho certo para a finalização. Um algoritmo precisa de entradas (os dados), da execução (os passos encadeados) e da saída (a resposta desejada), em busca de atingir o objetivo desejado (Silva, 2022). O algoritmo não precisa envolver necessariamente o uso de computadores, visto que sua aplicação é abrangente e se adapta a contextos do nosso cotidiano. Ao longo do dia, por exemplo, executamos algoritmos diversos sem nos darmos conta disso. Quando levantamos cedo, tomamos banho, escovamos os dentes, tomamos café e saímos de casa, estamos utilizando um algoritmo simples.

A *automação* faz uso de computadores ou máquinas para realizar o trabalho, a *simulação* é a representação ou modelagem da execução do que será feito, e o *paralelismo* corresponde à organização de recursos para desenvolver tarefas simultâneas em busca de um objetivo comum (Andrade et al., 2013).

Como exemplo, imaginemos um pedreiro que irá construir uma casa, este é o desafio maior. Ele realiza a *coleta de dados*, ou seja, reúne os detalhes de como a casa deve ser construída. Depois *analisa os dados* para ver se é possível realizar a construção no local desejado da forma que foi idealizada e busca identificar padrões: o piso será semelhante ao de outra casa feita, as paredes terão esse ou aquele detalhe já visto, o telhado será conforme outra casa já construída, etc. Faz uma *representação dos dados* em papel, detalhando medidas, comprimentos e outras informações.

Ele pode dividir o problema maior (construir a casa) em partes menores através da *decomposição*, separando a parte do piso, das paredes, do telhado, parte elétrica, encanação, entre outros. Na sequência, sabendo dos gostos do cliente que o contratou para construir o imóvel, irá *abstrair* e simplificar cada parte para focar no que realmente precisa, ou seja, quais são os materiais necessários para a construção e as ferramentas utilizadas. Assim, tendo cada parte bem definida e os dados (materiais) em mãos, elabora um *algoritmo* (sequência de passos a serem tomados) para construir a casa, de forma organizada e seguindo uma regra (ordem) para que seja possível executar a obra com perfeição.

Pode-se utilizar da *automação* para facilitar seu trabalho, empregando ferramentas a laser e máquinas elétricas durante a construção, *simular* algumas etapas para ver se vai funcionar e repetir procedimentos por meio do *paralelismo*, como na construção de paredes com o mesmo formato e angulação.

Portanto, o PC pode ser aplicado em diversas situações através de suas principais habilidades para resolver problemas simples e complexos em contextos variados. E mais especificamente, no ensino básico de Matemática, há inúmeras possibilidades de utilização do PC. Pois apesar de os alunos saberem fórmulas e conceitos, muitas vezes não atingem seus objetivos por não saberem organizar o desenvolvimento da resolução, mas com as ferramentas do PC é possível melhorar a aprendizagem na escola. Sendo assim, este trabalho propõe atividades envolvendo a teoria dos grafos como uma ferramenta para as aulas de Matemática, no intuito de estimular e desenvolver as habilidades do PC.

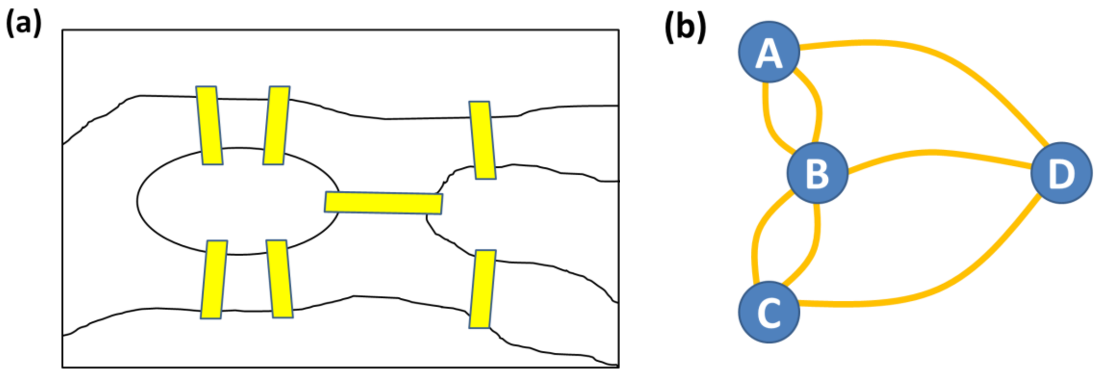
6 ELEMENTOS BÁSICOS DA TEORIA DOS GRAFOS

Grafo é uma estrutura abstrata de conexões entre vértices e arestas, onde os vértices podem representar cidades, pessoas, computadores, objetos diversos e as arestas são as conexões entre os elementos representados por estes vértices. A teoria dos grafos vem servindo muito para resolver os mais variados tipos de problemas do cotidiano por meio de uma interpretação relativamente simples, usando definições e teoremas desenvolvidos por matemáticos e pesquisadores renomados.

Ela surgiu graças ao renomado matemático Leonard Euler, por volta de 1735, motivado em resolver um desafio muito discutido entre os moradores da antiga cidade de Koenigsberg na Prússia Oriental, hoje conhecida como Kaliningrad na Rússia. O problema consistia em descobrir um percurso no qual fosse possível passar por 7 pontes que ligam aquela cidade com uma ilha no centro e retornar para o ponto de partida, de modo que nenhuma ponte fosse utilizada mais de uma vez. Após uma análise, Euler simplificou o problema, representando cada porção de terra em torno das pontes por vértices (pontos), e cada ponte indicou por uma aresta. Ele mostrou que somente seria possível um percurso de ida e volta sem repetir alguma das 7 pontes se cada vértice tivesse um número par de arestas associadas (Domenegueti, 2019).

Daí por diante, Euler desenvolveu alguns teoremas e resultados acerca da teoria dos grafos e outros estudiosos também contribuíram. Existem alguns problemas clássicos dos grafos, como o problema chinês do carteiro, o problema do caixeiro viajante, o problema das três casas, do menor caminho e muitos outros. A Figura 3 (a) ilustra as sete pontes de Koenigsberg e a Figura 3 (b) mostra o grafo associado:

Figura 3 - (a) As sete pontes de Koenigsberg; (b) Grafo das sete pontes de Koenigsberg



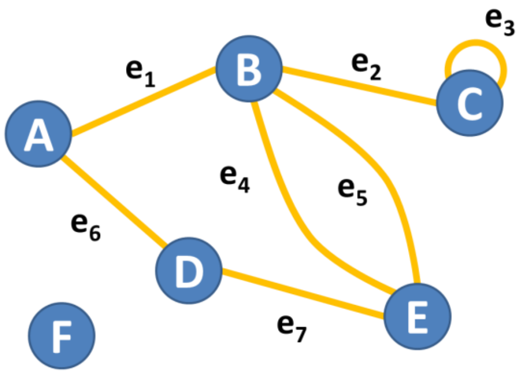
Fonte: Elaborado pelo autor

Onde os vértices A, B, C e D representam as porções de terra em volta da ilha, e as arestas laranjas indicam as 7 pontes. Note que não é possível iniciar um percurso, passar pelas 7 arestas e retornar para o início sem repetir alguma aresta, seja qual for o vértice de origem. Na sequência, definimos alguns conceitos importantes sobre grafos, tendo como referência teórica a obra de Goldbarg (2012):

Definição 1: Um grafo G é um par (V(G), E(G)) em que V(G) é o conjunto de vértices e E(G) o conjunto de arestas.

Na Figura 4, temos um exemplo de grafo no qual V = {A, B, C, D, E, F} e E = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7}:

Figura 4 - Vértices e arestas de um grafo



Fonte: Elaborado pelo autor

Definição 2: Duas ou mais arestas que conectam o mesmo par de vértices são chamadas arestas paralelas. Uma aresta que inicia e finaliza em um vértice é chamada laço.

Na Figura 4, as arestas e_4 e e_5 são paralelas, enquanto a aresta e_3 é um laço.

Definição 3: O grau de um vértice g(v) é a quantidade de arestas que o intersectam. Laços são contados duas vezes.

Na Figura 4, note que g(A) = 2, g(B) = 4, g(C) = 3, g(D) = 2, g(E) = 3 e g(F) = 0.

Definição 4: Se um vértice não possui arestas que o intersectam, então é chamado de vértice isolado.

Na Figura 4 temos que o vértice F é isolado, pois não é possível acessá-lo através dos outros vértices do grafo.

Definição 5: Passeio é uma sequência alternada de vértices e arestas com início em um vértice e fim em outro, mesmo que repita vértices e/ou arestas.

Como exemplo, na Figura 4 temos que a sequência de vértices A, B, C, B, E é um passeio.

Definição 6: Se um passeio não tiver arestas repetidas e começar e terminar no mesmo vértice, temos uma cadeia fechada.

Na Figura 4, a sequência de vértices A, B, E, D, A é uma cadeia fechada.

Definição 7: Se um passeio não tiver arestas repetidas e o vértice de início for diferente do vértice final, temos uma cadeia aberta.

Na Figura 4, a sequência alternada de vértices e arestas A, e_1, B, e_5, E, e_4, B, e_2, C é uma cadeia aberta.

Definição 8: Se uma cadeia fechada passar por todas as arestas de um grafo, temos uma cadeia euleriana fechada.

Observação: uma cadeia fechada ocorre apenas quando todos os vértices do grafo tiverem grau par.

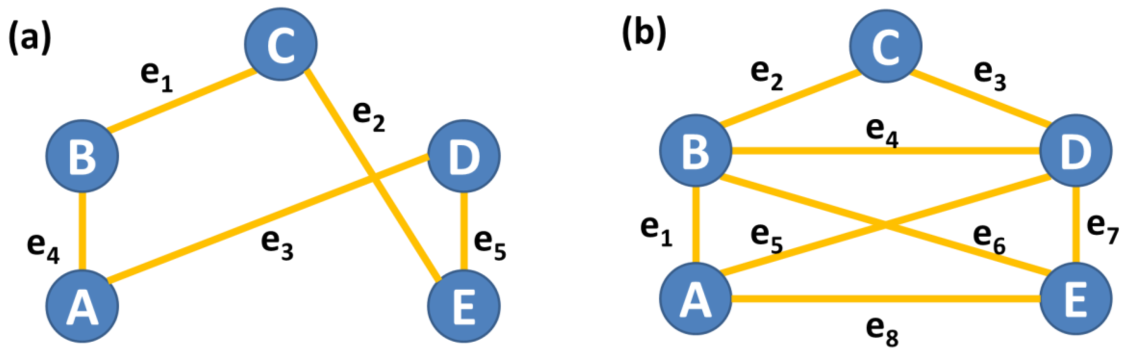
Na Figura 5 (a), a sequência de vértices A, B, C, E, D, A é uma cadeia euleriana fechada.

Definição 9: Quando uma cadeia aberta passar por todas as arestas de um grafo, temos uma cadeia euleriana aberta.

Observação: uma cadeia aberta ocorre apenas quando o grafo tiver dois vértices com grau ímpar e os demais com grau par. Para isso, é preciso iniciar e terminar o percurso em vértices de grau ímpar diferentes.

Como exemplo, temos que a sequência de vértices A, B, C, D, A, E, B, D, E na Figura 5 (b) é uma cadeia euleriana aberta.

Figura 5 - (a) Cadeia euleriana fechada; (b) Cadeia euleriana aberta



Fonte: Elaborado pelo autor

Definição 10: Quando uma cadeia aberta não possuir vértices repetidos, temos um caminho.

Como exemplo, a sequência de vértices A, B, D, C do grafo da Figura 5 (b) é um caminho.

Definição 11: Se um caminho termina e começa no mesmo vértice, temos um ciclo.

Na Figura 5 (b), a sequência de vértices A, D, C, B, A é um ciclo.

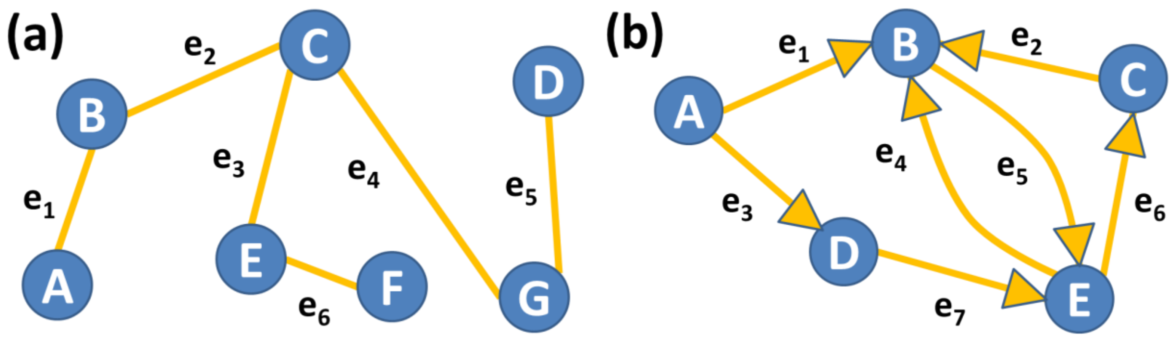
Definição 12: Se em um grafo existe um caminho entre quaisquer dois vértices e o mesmo não possui ciclos, dizemos que o grafo é uma árvore.

A Figura 6 (a) contém uma árvore, note que é possível conectar qualquer par de vértices, por exemplo, existe um caminho entre os vértices F e D.

Definição 13: Quando as arestas de um grafo possuem uma orientação por meio de setas, ou seja, um sentido único, dizemos que o grafo é direcionado.

A Figura 6 (b) contém um grafo no qual todas as arestas possuem um sentido. Note, por exemplo, que para ir do vértice A até o E, só existem dois caminhos possíveis: A-B-E (usando a aresta e_5) ou A-D-E. Como o grafo da Figura 6 (b) é direcionado, não seria possível seguir caminho pela sequência de vértices A-B-E (usando a aresta e_4) nem pela sequência A-B-C-E, pois as arestas e_4 e e_2 possuem sentido contrário ao caminho desejado de A até E.

Figura 6 - (a) Árvore; (b) Grafo direcionado



Fonte: Elaborado pelo autor

7 ATIVIDADES PROPOSTAS

Nesta seção, abordaremos algumas aplicações da teoria dos grafos para o desenvolvimento das habilidades do pensamento computacional presentes no Computational Thinking Toolkit, buscando mostrar para os professores uma sequência lógica indicando como e qual habilidade pode ser usada em determinado momento da solução. Mostraremos um problema sobre o menor caminho, sobre a cadeia euleriana fechada e outro acerca do grafo direcionado.

7.1 Atividade 1: O Problema do Menor Caminho

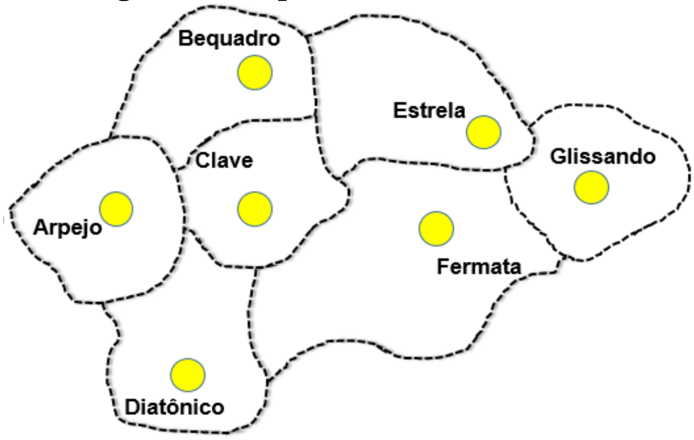
Esta atividade foi escolhida por ser de fácil aplicação em sala de aula, além de permitir o uso dos grafos e do PC em sua execução. As habilidades do PC escolhidas foram: coleta de dados, análise de dados, abstração, representação de dados, decomposição do problema, algoritmos, simulação e paralelismo. A automação pode ser incluída caso seja possível usar computadores no ambiente escolar.

O desafio consiste em descobrir o menor caminho entre um conjunto de cidades fictícias pelas quais um turista precise se deslocar da cidade Arpejo até a cidade Glissando, e para isso existem algumas rotas com suas distâncias para efetuar este percurso. As cidades próximas e intercaladas para realizar o deslocamento são: Arpejo, Bequadro, Clave, Diatônico, Estrela, Fermata e Glissando. As distâncias entre as cidades são:

- de Arpejo para Bequadro - 30 km;
- de Arpejo para Clave - 10 km;
- de Arpejo para Diatônico - 40 km;
- de Bequadro para Clave - 10 km;
- de Bequadro para Estrela - 80 km;
- de Clave para Diatônico - 40 km;
- de Clave para Estrela - 60 km;
- de Clave para Fermata - 40 km;
- de Diatônico para Fermata - 100 km;
- de Estrela para Fermata - 10 km;
- de Estrela para Glissando - 20 km;
- de Fermata para Glissando - 40 km.

A Figura 7 abaixo mostra o mapa dessas cidades, onde as linhas tracejadas indicam as divisões territoriais e os círculos amarelos representam a região urbana de cada cidade, de forma que podemos perceber quais cidades são vizinhas.

Figura 7 - Mapa das sete cidades



Fonte: Elaborado pelo autor

7.1.1 Apresentação da Atividade

O professor deve explicar o objetivo do problema para os alunos, que é encontrar o menor caminho entre a cidade Arpejo e a cidade Glissando. Mostra o mapa ou entrega uma cópia para cada aluno e escreve no quadro as distâncias entre cada município. Deve-se questionar como pode-se decidir qual rota é melhor do que outra, e qual estratégia pode ser usada para resolver o desafio. Nesse momento, espera-se que os alunos deem suas opiniões para estimular o raciocínio lógico, antes mesmo de apresentar a sugestão de usar grafos e o pensamento computacional.

7.1.2 Coleta e Análise de Dados

Após aguardar a opinião dos alunos sobre possíveis formas de encontrar o menor caminho, o professor sugere que façam um quadro para coletar os dados do problema, mais especificamente as distâncias entre as cidades, para se ter uma melhor compreensão do desafio, conforme mostra o Quadro 3.

Quadro 3 - Distâncias entre os locais da cidade

Origem	Destino	Distância	Origem	Destino	Distância

Fonte: Elaborado pelo autor

Espera-se que os alunos consigam registrar as informações corretamente, colocando na coluna “Origem” uma cidade e na coluna “Destino” outra diferente, e na coluna “Distância”, escrever a quilometragem percorrida entre elas. Uma pergunta que pode ser feita é: “Quantas linhas são necessárias para preencher todas as rotas”? Também é possível que os alunos preencham o quadro de forma aleatória, ou seja, iniciando por uma cidade e na linha debaixo por outra cidade. Mas o professor pode orientar como ser mais organizado se escrever, em linhas vizinhas, todas as rotas partindo de uma mesma cidade em direção a outras, facilitando os próximos passos, como mostra o Quadro 4.

Quadro 4 - Distâncias preenchidas entre os locais da cidade

Origem	Destino	Distância	Origem	Destino	Distância
Arpejo	Bequadro	30 km	Clave	Estrela	60 km
Arpejo	Clave	10 km	Clave	Fermata	40 km
Arpejo	Diatônico	40 km	Diatônico	Fermata	100 km
Bequadro	Clave	10 km	Estrela	Fermata	10 km
Bequadro	Estrela	80 km	Estrela	Glissando	20 km
Clave	Diatônico	40 km	Fermata	Glissando	40 km

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, fica mais fácil analisar os dados. Note que todas as rotas a partir de Arpejo estão em linhas próximas. É possível ver, pelo quadro, quais cidades são vizinhas a Arpejo (início do caminho) e quais são vizinhas a Glissando (fim do caminho).

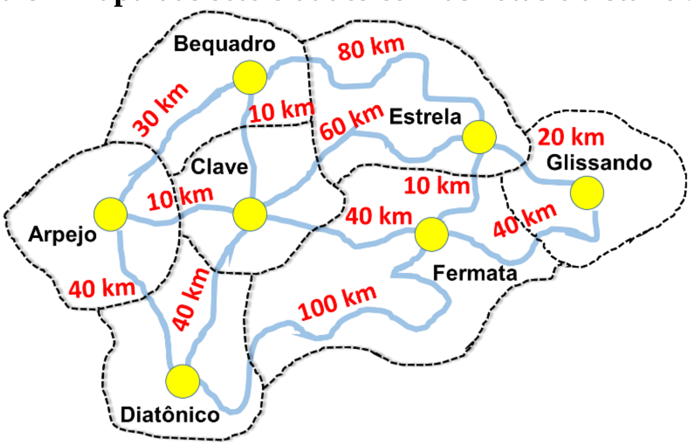
Na etapa de análise, pode-se sugerir o reconhecimento de padrões, que consiste em identificar no problema características similares em problemas vistos anteriormente. Como se trata de encontrar o menor caminho, o professor orienta os alunos sobre como calcular distâncias. Eles podem facilmente lembrar de alguma situação real onde precisaram decidir qual o melhor percurso para ir de um local a outro, com base na soma das distâncias intermediárias entre o início e o fim do caminho. Com isso, pode-se trazer esse conhecimento adquirido para resolver o problema apresentado.

7.1.3 Representação de Dados e Abstração

Para este tipo de problema, o aluno pode tentar resolver usando várias combinações de caminhos, somando as distâncias entre os pares de locais. Mas se a quantidade de itens (cidades) for maior, o aluno terá dificuldades para descobrir qual o menor caminho, pois existirão mais possibilidades de rotas e provavelmente ele se esquecerá de analisar algumas ou aumentará as chances de ter erros. Nesta atividade, usamos apenas sete locais para facilitar a demonstração da solução, mas pode-se trabalhar com 10, 20 ou mais locais a fim de estimular o desenvolvimento do pensamento computacional nos alunos.

Então, pode ocorrer de os alunos terem dificuldade na esquematização da solução. Para resolver isso, sugere-se que eles façam, inicialmente, traços entre as cidades do mapa e coloquem as distâncias, correspondendo à etapa de representação de dados, veja a Figura 8.

Figura 8 - Mapa das sete cidades com as rotas e distâncias

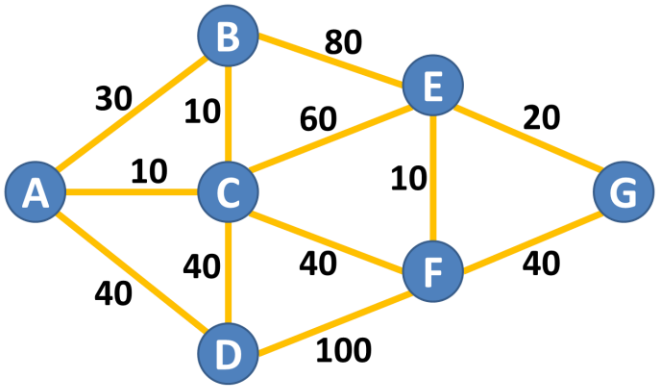


Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, os alunos terão uma visão mais completa do problema e poderão iniciar as tentativas. Nesse momento, o professor pode solicitar que eles testem alguns percursos e comparem entre si qual foi o menor caminho. Pergunta-se: “Mas como ser preciso na busca pela rota mais curta”? “E se tivessem 20 ou mais cidades”? São perguntas importantes para os estudantes perceberem a necessidade de utilizar algum método mais eficiente. Nesse sentido, o professor indaga se é possível simplificar alguns dados do mapa a fim de melhorar a visualização.

Essa é a etapa de abstração, ou seja, simplifica-se o desafio concentrando-se em dados que realmente são importantes, descartando aqueles desnecessários. Neste exemplo, o professor sugere representar cada cidade por letras maiúsculas, então teremos: (A) Arpejo, (B) Bequadro, (C) Clave, (D) Diatônico, (E) Estrela, (F) Fermata e (G) Glissando. Também pode-se indicar as distâncias apenas por números, sem usar o termo “km”. E para ilustrar melhor, introduz-se o conceito de grafo, ou se já tiver sido ensinado, pede-se aos alunos que criem um grafo semelhante ao da Figura 9, onde representamos as cidades (letras) por vértices e as distâncias entre elas por arestas (representadas pelos segmentos laranjas na Figura 9).

Figura 9 - Grafo para o problema do menor caminho



Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, temos o problema do menor caminho simplificado graças à teoria dos grafos, facilitando o processo de abstração no desenvolvimento do pensamento computacional. Inclusive, as divisões territoriais das cidades não são mais necessárias. Conseguimos assim visualizar melhor a questão apresentada e evitar que alguma rota seja esquecida, além de facilitar os cálculos.

7.1.4 Decomposição do Problema

Com relação à decomposição, pode-se dividir o problema principal em partes. Então, ao invés de ficar procurando aleatoriamente por rotas a partir de Arpejo até Glissando, o professor pergunta aos alunos se é possível dividir o problema em partes menores, a fim de facilitar a procura pelo menor caminho. Talvez queiram tentar usando apenas arestas entre um conjunto específico de vértices, ou sempre escolherem as arestas de menor valor (o que não será necessariamente o menor caminho).

Nesse sentido, o professor pode sugerir que os alunos façam todas as rotas possíveis iniciando pelos vértices A e B, depois todas as rotas iniciando pelos vértices A e C, e depois pelos vértices A e D. Assim, a decomposição ajuda na organização do trabalho a ser feito. Mas os alunos podem perguntar o que fazer, por exemplo, nas rotas começando pelos vértices A e B, qual será o próximo vértice depois de B? O professor explica que é possível decompor novamente o problema em partes menores, ou seja, do vértice B pode-se ir para C ou E. Então, tem-se duas novas rotas para serem analisadas. E esse processo se repete nos caminhos iniciados pelos vértices A e C e pelos vértices A e D. Uma opção é o professor dividir os alunos em grupos, cada um fica responsável por analisar os caminhos possíveis a partir de uma das rotas iniciais mostradas acima (A-B, A-C ou A-D).

Posteriormente, o professor indaga se é possível seguir um passo a passo mais preciso na busca pelo menor caminho, e explica o conceito de algoritmo. Nesse sentido, vamos sugerir o uso do algoritmo de Dijkstra da teoria dos grafos para desenvolver a habilidade algoritmo do pensamento computacional.

7.1.5 Algoritmo de Dijkstra

Para este exemplo, vamos descobrir o menor caminho entre os vértices A e G da Figura 9, onde os números indicam a distância entre cada par de vértices (cidades). Os passos do algoritmo de Dijkstra são os seguintes:

Passo 1: Começando pelo vértice inicial A, definimos distância 0 para ele mesmo e em seguida procuramos o vértice de menor distância entre os adjacentes a ele, seguindo caminho por esse novo vértice. Para ajudar na esquematização, usamos a notação (d,V), onde V é o vértice adjacente um passo anterior ao atual e d é a distância atribuída a V, contando o menor percurso desde o início até ele. Assim, podemos preencher um quadro com n linhas (vértices) e n colunas (passos), em que n é o número de vértices do grafo. Iniciamos, portanto, inserindo o (0,A) no passo 1 referente ao vértice A, pois a distância para o próprio vértice é zero. Como A se conecta com B, C e D, as distâncias daquele até estes são (30,A) leia "trinta vindo de A", (10,A) e (40,A) respectivamente. Como a menor distância até o vértice A é 0, fixamos (colorindo de verde) o par (0,A). E preenchemos também no passo 1 as distâncias de A até B, C e D, conforme mostra o Quadro 5.

Quadro 5 - Problema do menor caminho - PASSO 1

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6	Passo 7
A	(0,A)						
B	(30,A)						
C	(10,A)						
D	(40,A)						
E							
F							
G							

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 2: Dentre as distâncias ainda não fixadas, temos que a menor é (10,A), então devemos repeti-la e fixá-la no passo 2. Como este par (10,A) está na linha do vértice C, repetimos a busca, só que agora pelos vértices adjacentes a C. Destes, ignoramos o vértice A, pois ele já foi fixado, então temos as distâncias de C até B, D, E e F, respectivamente (20,C), (50,C), (70,C) e (50,C). Registramos esses dados no Quadro 6.

Quadro 6 - Problema do menor caminho - PASSO 2

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6	Passo 7
A	(0,A)						
B	(30,A)	(20,C)					
C	(10,A)	(10,A)					
D	(40,A)	(50,C)					
E		(70,C)					
F		(50,C)					
G							

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 3: Note que agora temos dois vértices fixados, ou seja, já encontramos a menor distância de A (ponto inicial) até eles. Prosseguindo, dos pares que ainda não foram fixados (olhamos apenas para as linhas que ainda não tiveram um par colorido), temos que (20,C) é a menor distância, então fixamos esse par no passo 3. Como ele está na linha do vértice B, faremos uma nova busca a partir de B. Os vértices adjacentes a B são A, C e E, mas como A e C já foram fixados, resta-nos analisar a distância até E. Para tal, somamos a menor distância acumulada até o vértice B com a distância de B até E, ou seja, 20 + 80 = 100. Dessa forma, inserimos o par (100,B) no passo 3 na linha do vértice E, conforme o Quadro 7.

Quadro 7 - Problema do menor caminho - PASSO 3

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6	Passo 7
A	(0,A)						
B	(30,A)	(20,C)	(20,C)				
C	(10,A)	(10,A)					
D	(40,A)	(50,C)					
E		(70,C)	(100,B)				
F		(50,C)					
G							

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 4: Temos agora três vértices fixados (A, B e C), analisando os pares daqueles ainda não fixados, vemos que o par (40,A) da linha do vértice D representa o menor caminho até então. Portanto, iniciamos nova busca pelos vértices adjacentes a D, que são A, C e F. Como A e C já foram fixados, resta-nos observar a distância até F. De A até D já temos a distância 40 como menor caminho e, de D até F, a distância 100. Assim, somamos 40 + 100 = 140 e obtemos o par (140,D), conforme o Quadro 8.

Quadro 8 - Problema do menor caminho - PASSO 4

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6	Passo 7
A	(0,A)						
B	(30,A)	(20,C)	(20,C)				
C	(10,A)	(10,A)					
D	(40,A)	(50,C)		(40,A)			
E		(70,C)	(100,B)				
F		(50,C)		(140,D)			
G							

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 5: Nesse momento, temos quatro vértices fixados (A, B, C e D), e dos pares restantes não fixados temos (50,C) indicando a menor distância. Ele está na linha do vértice F, que está conectado diretamente aos vértices C, D, E e G. Como C e D já estão fixados, analisamos a distância até E e G. Temos de A até F distância 50 e de F até E distância 10, somando teremos o par (60,F). E do vértice F até G temos distância 40, somando teremos 50 + 40 = 90, portanto o par (90,F). Anotamos os dados no Quadro 9.

Quadro 9 - Problema do menor caminho - PASSO 5

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6	Passo 7
A	(0,A)						
B	(30,A)	(20,C)	(20,C)				
C	(10,A)	(10,A)					
D	(40,A)	(50,C)		(40,A)			
E		(70,C)	(100,B)		(60,F)		
F		(50,C)		(140,D)	(50,C)		
G					(90,F)		

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 6: Com cinco vértices fixados, sobram apenas dois para analisar. Dentre estes, vemos que o par (60,F) da linha do vértice E indica o menor caminho. Logo, iremos buscar pelos vértices adjacentes a ele, que são B, C, F e G. Como os vértices B, C e F já estão fixados, iremos encontrar a distância até G, que neste caso é 60 + 20 = 80, cujo par é (80,E). O Quadro 10 mostra esse resultado.

Quadro 10 - Problema do menor caminho - PASSO 6

Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6	Passo 7
A	(0,A)						
B	(30,A)	(20,C)	(20,C)				
C	(10,A)	(10,A)					
D	(40,A)	(50,C)		(40,A)			
E		(70,C)	(100,B)		(60,F)	(60,F)	
F		(50,C)		(140,D)	(50,C)		
G					(90,F)	(80,E)	

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 7: Note que resta apenas um passo para concluirmos a verificação de todas as distâncias, e até o momento já temos seis dos sete vértices fixados. Como só falta analisar o vértice G e já sabemos qual o menor caminho para todos os vértices anteriores, basta compararmos qual dos pares da linha do vértice G indica a menor distância, que neste caso é o par (80,E). Assim, o Quadro 11 exibe o resultado final da busca pelo menor caminho entre os vértices A e G.

Quadro 11 - Problema do menor caminho - PASSO 7

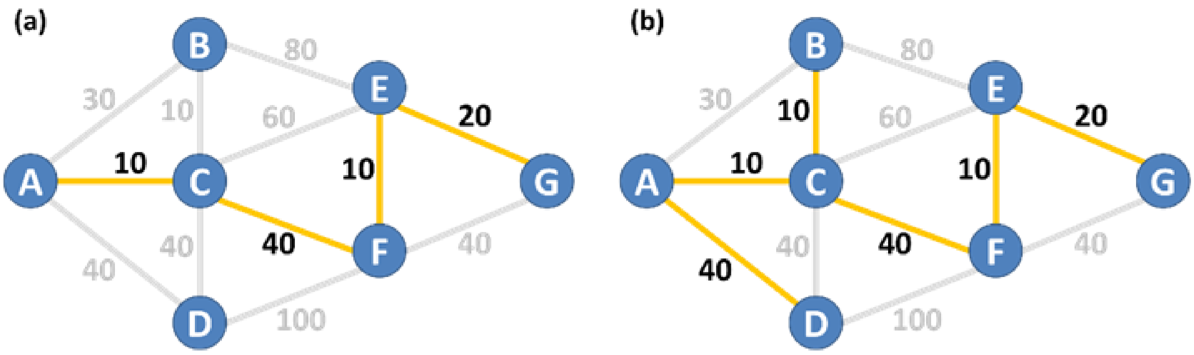
Vértice	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4	Passo 5	Passo 6	Passo 7
A	(0,A)						
B	(30,A)	(20,C)	(20,C)				
C	(10,A)	(10,A)					
D	(40,A)	(50,C)		(40,A)			
E		(70,C)	(100,B)		(60,F)	(60,F)	
F		(50,C)		(140,D)	(50,C)		
G					(90,F)	(80,E)	(80,E)

Fonte: Elaborado pelo autor

Para sabermos qual a trajetória do menor caminho para cada vértice, basta procurarmos o vértice na primeira coluna do Quadro 11 e vermos qual vértice foi marcado (em verde) na mesma linha daquele, o primeiro valor em parênteses já indica a menor distância. Na sequência, repetimos esse passo para outros vértices até chegarmos no vértice A. Como queremos encontrar o menor caminho entre A e G, buscamos pelo vértice G na primeira coluna e vemos que (80,E) está marcado em verde na linha do G, ou seja, o vértice E antecede o vértice G, e o menor caminho de A até G é 80. Depois repetimos a busca na primeira coluna, só que agora pelo vértice E, e notamos que (60,F) está em verde na linha do E, isso indica que o vértice F antecede o vértice E. Em seguida, buscamos por F na primeira coluna e visualizamos o par (50,C) em destaque na linha do F, significa que o vértice C o antecede. Mais uma vez procuramos na primeira coluna pelo vértice C e vemos que o par (10,A) está marcado na linha associada a C, o que indica que A antecede C. Como já atingimos o vértice A, que é o ponto de partida, concluímos que o menor caminho de A até G é a sequência A, C, F, E, G, cuja distância total é a soma das distâncias entre cada par de vértices desta sequência: 10 + 40 + 10 + 20 = 80. Terminamos o algoritmo.

Na Figura 10, temos o resultado da aplicação do algoritmo de Dijkstra, onde as arestas laranjas indicam o caminho escolhido. Na imagem da esquerda (a) temos o menor caminho do vértice A ao G, enquanto na imagem da direita (b) temos o menor caminho do vértice A para cada um dos outros vértices. Dessa forma, após os alunos tentarem encontrar o menor caminho, o professor mostra esses resultados nos grafos e no quadro para que os estudantes possam conferir suas respostas.

Figura 10 - (a) menor caminho de A a G; (b) menor caminho para cada vértice a partir de A



Fonte: Elaborado pelo autor

O professor pode ainda resumir o algoritmo de Dijkstra mostrado acima em passos genéricos que sirvam para outras aplicações semelhantes, inclusive para o uso em computadores por meio de alguma linguagem de programação, da seguinte forma:

- atribuir distância zero ao vértice de origem $\boldsymbol{V_0}$ e fixá-lo;
- enquanto existir um vértice não fixado;
  - seja $\boldsymbol{V_i}$ um vértice ainda não fixado tal que a distância até ele seja a menor entre todos os vértices ainda não fixados;
  - fixe o vértice $\boldsymbol{V_i}$;
  - para todo vértice $\boldsymbol{V_k}$ ainda não fixado para o qual existe a aresta **vk**;
    - some a distância de $\boldsymbol{V_i}$ com o valor da aresta **vk**;
    - caso esta soma seja menor que o resultado anterior para o vértice $\boldsymbol{V_k}$, substitua-a e registre $\boldsymbol{V_i}$ como antecessor de $\boldsymbol{V_k}$.

Note também que o grafo obtido na Figura 10 (b) na busca pelo menor caminho através do algoritmo de Dijkstra gera uma árvore, ou seja, conseguimos acessar qualquer vértice a partir de outro e o grafo não possui ciclos.

7.1.6 Simulação e Paralelismo

A etapa de simulação pode ser vista como a execução do trabalho e verificação de possíveis erros. Então, após terem seguido o algoritmo de Dijkstra, o professor pede aos alunos para avaliarem se as soluções obtidas estão respeitando as condições do problema, além de conferirem cada passo dado na busca pelo menor caminho. Nesta fase, os estudantes podem descobrir se trocaram ou esqueceram algum procedimento. Detectado o erro, conseguem executar facilmente o algoritmo outra vez sem precisar analisar a solução inteira.

Simultaneamente à solução encontrada pelos alunos, o professor pode incentivar a busca por outras soluções. Ele pergunta: “Será possível existir outro caminho mais curto? Qual distância pode ser alterada para se ter duas rotas iguais e que sejam o menor caminho”? Esta fase corresponde ao paralelismo, ou seja, a busca e organização por recursos que tenham um objetivo comum. Além disso, o professor pode indicar como início do percurso outro vértice, reforçando a aprendizagem dos alunos em relação às habilidades do pensamento computacional por meio da teoria dos grafos.

7.2 Atividade 2: Cadeia euleriana fechada

Aproveitando o grafo do resultado desse problema de menor caminho, pode-se introduzir outra questão acerca da cadeia euleriana fechada. Nesta, o percurso deve iniciar e terminar no mesmo vértice e passar por todas as arestas sem repetir nenhuma. Pode-se até passar pelo mesmo vértice mais de uma vez, ou não passar por todos os vértices, desde que nenhuma aresta seja repetida. Mas para este desafio, queremos um percurso que passe por todos os vértices para estimular ainda mais o raciocínio lógico, e para isso o aluno pode adicionar 5 arestas daquelas que não foram incluídas no problema do menor caminho. As habilidades do PC abordadas nessa atividade são: análise de dados, decomposição do problema, representação de dados, algoritmo e paralelismo.

7.2.1 Apresentação da Atividade

O professor pergunta: “Como transformar o grafo (da Figura 10 (a)) em uma cadeia euleriana fechada que passe por todos os vértices, aproveitando as quatro arestas do menor caminho obtido e acrescentando 5 arestas das que foram descartadas”? Nesse momento, o professor mostra o grafo para os alunos e questiona quais habilidades do pensamento computacional podem ser trabalhadas, bem como de que maneira pode-se fazer essa transformação.

7.2.2 Análise de Dados

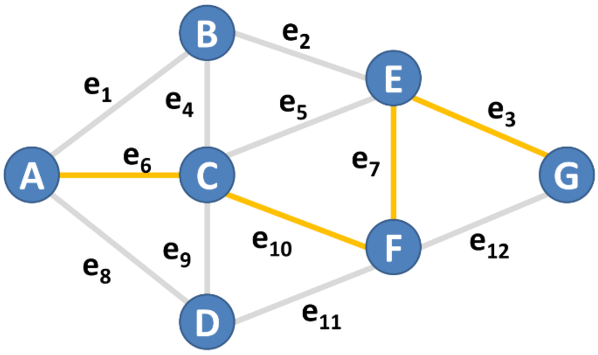
Como o grafo inicial já está montado, o professor pode sugerir diretamente que os alunos façam uma análise do problema. Pelo reconhecimento de padrões, o aluno já entende que uma aresta conecta dois vértices e que, para formar uma cadeia euleriana fechada, cada vértice deve ter grau par, aplicando esses conhecimentos na solução do novo problema.

Outro ponto que o professor pode instigar é a procura pelas arestas que consigam conectar os vértices isolados (B e D), já que o problema exige que o caminho percorra todos os vértices. Neste caso, são necessárias duas arestas (uma de chegada e outra de saída). Além disso, pedir aos alunos que confiram quais vértices já têm uma quantidade par de arestas incidentes, pois ao acrescentar uma nova aresta, o vértice terá grau ímpar e não será possível obter uma cadeia euleriana fechada, a menos que sejam adicionadas duas (e não uma) arestas a este vértice.

7.2.3 Representação de Dados

Para ilustrar melhor o desafio, o professor pede aos alunos para desenharem o grafo da Figura 10 (a) de forma que as arestas do menor caminho encontrado e seus respectivos valores fiquem de caneta e as arestas descartadas de lápis. Além disso, pede para que, ao invés de distâncias, as arestas sejam nomeadas por e_1, e_2, e_3, ..., e_{12}, como mostrado na Figura 11.

Figura 11 - Nomeação das arestas do grafo



Fonte: Elaborado pelo autor

7.2.4 Decomposição do Problema

Note que podemos decompor o problema em partes menores, como: arestas e distâncias que já foram selecionadas para o menor caminho e arestas que foram descartadas. Assim, o professor pede para os alunos concentrarem-se nas arestas descartadas com seus valores para decidirem quais delas serão acrescentadas, como pede o problema.

Outra opção é questionar por qual vértice começar a cadeia euleriana fechada. Pergunta-se: “Por quais vértices podemos iniciar acrescentando uma nova aresta”? Podem indicar o vértice A, pois só tem uma aresta (grau ímpar) até o momento que o intersecta, e nesse caso ele ficaria com grau par (desejável), mas o professor também pode sugerir iniciar pelos vértices isolados, pois eles estão sem nenhuma aresta ativa e precisam ser conectados. Dessa forma, a decomposição pode ser feita também com relação aos vértices: iniciar a busca pela cadeia euleriana fechada a partir dos vértices de grau ímpar ou iniciar a busca a partir dos vértices isolados.

Novamente, pode-se dividir os alunos em grupos para que cada um investigue um caso diferente: um grupo avalia as arestas descartadas para incluir cinco delas, outro grupo inicia acrescentando arestas em vértices de grau ímpar e outra equipe começa pelos vértices isolados.

7.2.5 Algoritmo

Tendo uma visão geral do problema, os alunos terão condições de prosseguir com a solução. Iremos dar um exemplo começando pelo vértice G (de grau ímpar), aproveitando a sequência de arestas e_6, e_{10}, e_7, e_3, que corresponde ao menor caminho encontrado de A até G no problema anterior.

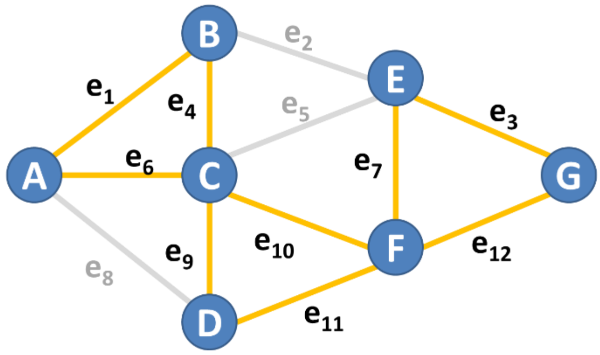
Neste caso, acrescentamos a aresta e_{12}, pois é o único percurso possível, visto que para termos uma cadeia euleriana fechada não podemos repetir a aresta e_3 (a outra conectada à G). Note que os vértices E e G já estão com grau 2 (adequado), e o vértice F está até o momento com grau 3. Nesse ponto, a única opção é seguir pela aresta e_{11}, pois as arestas e_{10} e e_7, também ligadas à F, já foram utilizadas.

Até aqui, já adicionamos duas arestas e restam três. Note que paramos no vértice D, que tem arestas disponíveis para A e C. Ocorre que o vértice A só tem três arestas conectadas (uma já usada e duas disponíveis para acrescentar), o que se torna um problema seguir para A. Isso porque não teríamos completado a cadeia euleriana fechada passando por todos os vértices (restaria B) e não seria possível sair de A e retornar para ele depois, visto que só tem três arestas. Sendo assim, o caminho correto é por e_9.

Paramos no vértice C, que tem arestas disponíveis para B e E. Como E já está com grau par, seguimos em direção a B por e_4. Note que agora o vértice C possui grau 4 (par), assim como os demais vértices também estão com grau par, exceto A. Mas como B tem aresta para A, seguimos para este e completamos a cadeia euleriana fechada, pois agora todos os vértices estão com grau par.

Uma solução possível é mostrada na Figura 12 (arestas laranjas), onde cada vértice possui grau par e uma sequência viável seria A-C-D-F-G-E-F-C-B-A, na qual o percurso inicia e termina no vértice A sem repetir as arestas escolhidas.

Figura 12 – Cadeia euleriana fechada a partir do menor caminho encontrado



Fonte: Elaborado pelo autor

7.2.6 Paralelismo

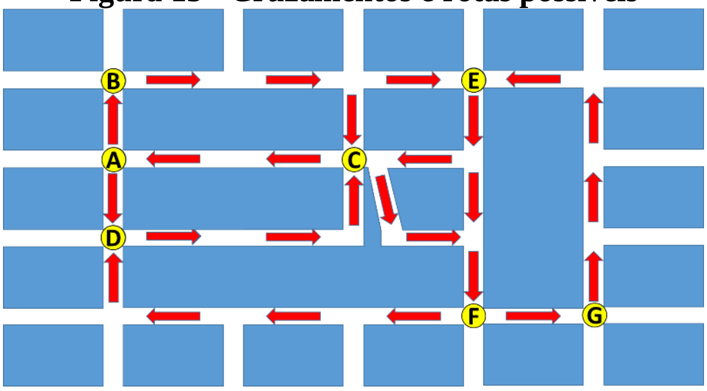
O professor pode perguntar aos alunos se é possível obter uma cadeia euleriana fechada iniciando em outro vértice diferente de A na Figura 12, em busca de explorar outros casos que resultam no mesmo objetivo. Temos que outra possibilidade seria a sequência de vértices A, C, F, G, E, F, D, C, B, A, ou ainda A, B, C, D, F, G, E, C, A, onde não são repetidas arestas.

Também pode-se incentivar os alunos a começarem a solução a partir de outro critério, como exemplo, iniciar por vértices isolados ou por uma das arestas a serem acrescentadas (e_1, e_2, e_5, e_8, e_9, e_{11} ou e_{12}).

7.3 Atividade 3: Grafo direcionado com cadeia euleriana aberta

Uma variação de atividade para o grafo do menor caminho apresentado anteriormente é utilizando o grafo direcionado. Neste, as arestas possuem um sentido único, limitando as possibilidades de rotas do ponto inicial até o final. Imagine a mesma situação do problema de menor caminho visto anteriormente, mas só que agora ao invés de cidades, utilizaremos cruzamentos de ruas nomeados de A, B, C, D, E, F e G, e as conexões entre esses cruzamentos possuem um sentido único, considerando apenas as ruas com setas, conforme a Figura 13.

Figura 13 - Cruzamentos e rotas possíveis



Fonte: Elaborado pelo autor

O objetivo é percorrer todos os sete cruzamentos nomeados de forma que o primeiro seja diferente do último, respeitando o sentido de deslocamento e sem repetir ruas, podendo remover apenas uma das rotas do mapa e passar pelas demais. Dessa forma, o problema trata de uma cadeia euleriana aberta, pois o ponto de partida deve ser diferente do ponto de chegada e não pode repetir ruas (arestas).

As habilidades do pensamento computacional escolhidas para este desafio são: coleta de dados, análise de dados, abstração, representação de dados, decomposição do problema, algoritmos e simulação.

7.3.1 Apresentação da Atividade

O professor deve mostrar o mapa da Figura 13 no quadro ou entregar uma cópia para os alunos e explicar o contexto do problema. Ele diz: “Uma empresa de segurança precisa instalar câmeras de vigilância nos sete cruzamentos da (Figura 13), instalando cabos nas ruas marcadas com seta para estabelecer uma conexão entre as câmeras. Para se deslocar, a empresa deve trafegar conforme as regras de trânsito, ou seja, não pode andar na contramão em ruas de via única, devendo parar o veículo próximo aos cruzamentos para fixar uma escada e usar ferramentas de instalação dos aparelhos. Considere que só é permitido transitar pelas ruas que possuem setas”.

O professor pergunta: “Dessa forma, encontre um percurso no qual a empresa consiga passar pelos sete cruzamentos A, B, C, D, E, F, G e por todas as ruas com setas respeitando o sentido de cada uma, sem repeti-las, podendo escolher apenas uma rua que não será usada, sendo o primeiro cruzamento diferente do último”.

Após esta introdução, o professor questiona se é possível realizar tal percurso seguindo todas essas condições e quais estratégias podem ser empregadas. Aguarda-se por respostas dos alunos para que se acostumem com o mapa e com as exigências do desafio. Ainda não se deve falar em grafos, mas caso o professor já tenha aplicado a primeira atividade (encontrar o menor caminho), provavelmente alguns alunos irão sugerir o uso dos grafos.

7.3.2 Coleta e Análise de Dados

Após ouvir os alunos sobre como resolver o problema, o professor pede para anotarem as informações em um quadro (inicialmente ele apresenta vazio) contendo o cruzamento de partida na coluna da esquerda e o cruzamento de chegada na coluna da direita, conforme o Quadro 12, semelhante ao realizado na primeira atividade.

Quadro 12 - Sentido de deslocamento entre os cruzamentos

Partida	Chegada	Partida	Chegada
A	B	D	C
A	D	E	C
B	C	E	F
B	E	F	D
C	A	F	G
C	F	G	E

Fonte: Elaborado pelo autor

Espera-se que os alunos preencham o quadro de forma semelhante ao que está disposto no quadro acima. Dessa forma, tem-se uma visão mais clara das relações entre os cruzamentos.

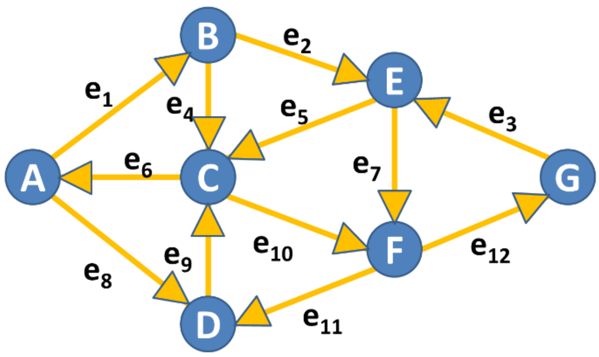
Na fase de análise, o professor pode perguntar se é possível descobrir quantas rotas existem olhando o mapa. Outra pergunta: “Quantas rotas existem com o cruzamento F”? Talvez os alunos digam que existem três (vendo o mapa), pelo fato de apenas três ruas estarem marcadas com setas em torno de F. Mas ocorre que este cruzamento possui quatro rotas: de F para D, de F para G, de C para F e de E para F. Assim, o Quadro 12 permite visualizar corretamente e com precisão quantas e quais são as rotas do mapa, pois estas quatro rotas estão presentes nele.

7.3.3 Representação de Dados e Abstração

Neste desafio, o aluno pode ter mais dificuldades de encontrar uma solução por conta das ruas com sentido único. Então, o professor sugere uma simplificação do problema usando grafos. Ele pergunta: “É possível transformar esse mapa em um grafo? Quem seriam os vértices e as arestas? Teria algo a acrescentar nas arestas”? Espera-se por respostas dos alunos para que busquem aplicar os conhecimentos sobre grafos nesta atividade. Não é difícil perceber que os cruzamentos serão os vértices e as ruas serão as arestas. O detalhe a mais que este exemplo traz é a necessidade de usar um grafo direcionado.

Então, o professor pede para os estudantes desenharem (com lápis) os vértices (cruzamentos) e tentarem conectá-los pelas arestas com seta, e nomeá-las da seguinte forma: e_1, e_2, e_5, e_8, e_9, e_{11} ou e_{12}. Uma disposição desses elementos pode ser vista na Figura 14.

Figura 14 - Grafo direcionado



Fonte: Elaborado pelo autor

Com isso, o processo de abstração do pensamento computacional foi usado para simplificar o mapa e a representação de dados resultou no grafo.

Pode ser que os alunos desenhem os vértices mais espaçados ou em disposição diferente da apresentada acima. Mas o professor esclarece que não tem problema, desde que as conexões e o sentido das setas estejam corretos. Inclusive, pode-se mostrar esse grafo acima e comparar com o grafo da primeira atividade. O professor questiona: "Tem alguma semelhança desse grafo com aquele da atividade sobre o menor caminho? E quais as diferenças"?

7.3.4 Decomposição do Problema

Após exibir o grafo com as arestas escolhidas, o professor pergunta aos alunos como dividir em casos, ou seja, escolher primeiramente qual aresta será removida. Pode-se dividir a turma em equipes e cada uma irá remover uma aresta diferente e fazer os testes.

Um segundo momento na decomposição é definir o vértice de início do percurso. Então, para cada grupo que escolheu uma aresta para retirar, terá que em seguida escolher qual vértice será o ponto de partida. Como veremos mais adiante, algumas opções de início não serão possíveis, devido à paridade dos vértices do grafo e ao sentido das arestas que podem impedir a conclusão de um percurso.

7.3.5 Algoritmo

Para otimizar a procura pelo caminho pedido, pode-se estabelecer alguns critérios e regras durante as escolhas dos vértices e arestas. Nesse sentido, o professor pode definir um algoritmo para resolver, ou seja, uma sequência de passos estruturados para garantir uma boa resolução. Considerando as fases do pensamento computacional, podemos usar um algoritmo já testado e funcional ou criarmos um novo conforme as características do novo problema. Neste exemplo, mostraremos um algoritmo simples para que o professor consiga ajudar os alunos durante a solução.

Como é pedido para encontrar um percurso que use todas as rotas, menos uma, e sem repeti-las, além de ter o local de origem diferente do local final, podemos pensar em uma cadeia euleriana aberta. Nesta, todos os vértices devem ter grau par, exceto o primeiro e o último. Daí, podemos organizar os passos da seguinte forma:

Passo 1: Verificar quantos vértices têm grau ímpar:

- se a quantidade for 2, iniciar a busca por um até chegar no outro, respeitando o sentido das setas;
- se a quantidade for maior que 2, é preciso eliminar alguma aresta para ter apenas 2 vértices de grau ímpar;

Notamos que no grafo existem 3 vértices de grau par (E, F e G) e 4 vértices de grau ímpar (A, B, C e D). Neste caso, executaremos o segundo item do passo 1.

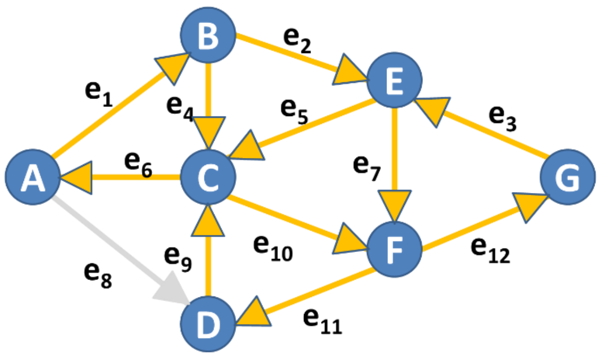
Passo 2: Para escolher qual aresta eliminar, devemos considerar a redução dos vértices de grau ímpar, ou seja, é natural que tentemos remover uma aresta destes vértices. Mas se a aresta em vista está conectada a outro vértice de grau par, ao removermos iremos tornar este um vértice de grau ímpar, o que não adianta. Logo, a aresta a ser removida deve estar conectada a dois vértices de grau ímpar.

Podemos criar um conjunto R de arestas removíveis, ou seja, daquelas que podem ser descartadas sem comprometer a elaboração de uma cadeia euleriana aberta. Neste caso, temos que R = {e_1, e_4, e_6, e_8, e_9}, pois são as únicas arestas associadas aos vértices de grau ímpar tal que, se removidas, não mudam a paridade de um vértice que era par.

Usaremos a seguinte notação: cada vértice receberá um par ordenado da forma V(x,y), onde V indica o vértice, x a quantidade de arestas de saída e y a quantidade de arestas de entrada. Como exemplo, temos C(2,3).

O professor pode indicar, por exemplo, a aresta e_8 para eliminar (visto que ela conecta dois vértices de grau ímpar), conforme mostra a Figura 15. Com isso, os vértices A(2,1) e D(1,2), que antes tinham grau 3 cada, passam a ter grau 2 (A(1,1) e D(1,1)), restando apenas os vértices B(2,1) e C(2,3) com grau ímpar. E este novo cenário é desejável, visto que podemos agora traçar percursos partindo de um vértice ímpar em direção ao outro vértice ímpar.

Figura 15 - Grafo direcionado sem a aresta e_8



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 3: Eliminada a aresta e_8, podemos iniciar o percurso a partir do vértice B ou C, que são ímpares. Iniciando por B, que tem grau ímpar, temos duas saídas conforme o sentido das arestas: para C ou E. Seguindo por C, temos arestas de saída para A e F, repetimos essas escolhas respeitando o sentido até passarmos por todas as arestas e finalizarmos no vértice C, que também tem grau ímpar. Neste caso de remover a aresta e8 e começando pelo vértice B, temos algumas sequências S possíveis:

$S_1 = \{e_4, e_{10}, e_{11}, e_9, e_6, e_1, e_2, e_7, e_{12}, e_3, e_5\}$;

$S_2 = \{e_4, e_{10}, e_{12}, e_3, e_7, e_{11}, e_9, e_6, e_1, e_2, e_5\}$;

$S_3 = \{e_4, e_6, e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{12}, e_3, e_7, e_{11}, e_9\}$;

$S_4 = \{e_4, e_6, e_1, e_2, e_7, e_{11}, e_9, e_{10}, e_{12}, e_3, e_5\}$;

$S_5 = \{e_4, e_6, e_1, e_2, e_7, e_{12}, e_3, e_5, e_{10}, e_{11}, e_9\}$.

Então, o professor explica esse procedimento cíclico para os alunos e aguarda pelas respostas para analisar se estão corretas. Um cuidado a ser tomado é de não removermos uma aresta indispensável a fim de manter todos os vértices do grafo acessíveis, ou seja, quando é possível intersectá-lo através de alguma aresta. Caso contrário, alguns vértices não seriam acessados e desrespeitaríamos a regra de passar por todos os vértices. Para ajudar neste detalhe, podemos remover as arestas à medida que seguimos o percurso por elas, pois sempre que formos escolher uma, saberemos se o grafo terá ou não vértices isolados. Como o professor tinha pedido aos alunos para desenharem o grafo com lápis, basta que eles usem uma borracha para apagar as arestas.

7.3.6 Simulação

Durante a execução do algoritmo, podem surgir alguns problemas na seleção de arestas. Como exemplo, a sequência $S_6 = \{e_4, e_6, e_1, e_2, e_5, e_{10}, e_{11}, e_9\}$ não serviria, pois ao passar pela aresta e_9, o vértice C não teria mais outra aresta de saída e não teríamos passado por todas as arestas (sobrariam e_3, e_7 e e_{12}). Então, o professor verifica se algum aluno se enquadrou nesse caso específico e explica o motivo de não ser possível obter uma cadeia euleriana aberta.

Um fato interessante para informar aos alunos no grafo direcionado ocorre se partirmos do Vértice C. A partir dele, podemos usar sua primeira saída, depois retornar para ele, sair de novo e depois voltar para ele outra vez. Mas irá sobrar uma aresta de entrada, e com isso não conseguiremos sair do vértice C para completar uma cadeia euleriana aberta. Assim, concluímos que, em um grafo direcionado, para ser possível traçar uma cadeia euleriana aberta, o vértice de grau ímpar inicial deve ter uma aresta de saída a mais que as de entrada. Inversamente, o vértice de grau ímpar final deve ter uma aresta de entrada a mais que as de saída. Veja que removendo a aresta e_8 as cadeias eulerianas abertas possíveis iniciam no vértice B e terminam no D, pois temos que B(2,1) e C(2,3). O professor pode também instigar os alunos a descobrirem outros percursos impossíveis no grafo.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propôs uma conexão entre o pensamento computacional e a teoria dos grafos nas aulas de Matemática, trazendo informações relevantes sobre cada área e algumas aplicações para serem utilizadas nas escolas.

A revisão sistemática de literatura mostrou que a teoria dos grafos tem sido abordada pelos professores de Matemática no Brasil com resultados positivos, principalmente em questões relacionadas a situações do cotidiano, resolução de problemas e modelagem Matemática. Também permitiu identificar lacunas em relação aos conteúdos inseridos e metodologias alternativas. Nesse sentido, o presente trabalho apresentou uma proposta de integração da teoria dos grafos com o pensamento computacional para oferecer aos professores mais um mecanismo de trabalho.

O pensamento computacional pode ser empregado de inúmeras formas, desde a computação desplugada, onde não precisamos de equipamentos tecnológicos, até o uso de computadores e internet. Para este trabalho, buscamos apresentar aplicações que podem ser utilizadas apenas com lápis e papel.

A teoria dos grafos é recente e já tem ajudado em muitos campos do conhecimento. Na área de educação, é possível usá-la de muitas maneiras e combinar com outros recursos didáticos. Neste trabalho, focamos em propor atividades envolvendo as ferramentas algoritmo de Dijkstra, cadeia euleriana fechada, grafo direcionado e cadeia euleriana aberta, juntamente com as habilidades do *Computational Thinking in K-12 Education Leadership toolkit*. Todavia, o professor pode explorar muitos recursos de grafos e abordar em sala para que os alunos experimentem outras possibilidades.

Ainda neste trabalho, o professor pode pensar em variações das atividades propostas. Por exemplo, na aplicação da cadeia euleriana aberta, pedir aos alunos que verifiquem se há outros casos possíveis ao remover uma das arestas do conjunto R, e também o que ocorre se remover mais de uma aresta. Nas atividades da cadeia euleriana fechada e do algoritmo de Dijkstra pode-se trazer exemplos com mais vértices e até mesmo pedir para os próprios alunos criarem seus grafos.

Para incrementar o processo de desenvolvimento do pensamento computacional com o auxílio da teoria dos grafos, o professor pode também utilizar recursos computacionais, como programas que manipulam grafos e linguagens de programação para executar os algoritmos.

Com estes exemplos apresentados, espera-se que os professores possam explorar as habilidades do pensamento computacional em sala de aula juntamente com as ferramentas de teoria dos grafos a fim de melhorar a capacidade dos alunos de resolver problemas. O pensamento computacional pode ajudar muito na organização do trabalho a ser feito, e a teoria dos grafos na esquematização e algoritmo.

Também esperamos que os professores busquem se aprofundar nestes assuntos abordados para que existam mais experiências e resultados em sala de aula, no intuito de aproximar cada vez mais o PC e o estudo dos grafos das escolas. O PC não necessita de recursos tecnológicos para ser empregado, então os professores podem utilizá-lo facilmente para desenvolver o raciocínio lógico dos estudantes. E para isso, os grafos auxiliam visual e tecnicamente no desenvolvimento das habilidades do PC.

Com o processo de abstração do pensamento computacional e da visualização de problemas através dos grafos, esperamos também que o professor estimule o desenvolvimento da autonomia nos alunos, capacitando-os para buscarem as informações necessárias diante dos desafios. O professor pode também estimular a criatividade, no sentido de motivar os estudantes a usarem ferramentas e recursos alternativos nas questões envolvendo Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, V. L. **Caminhos em Grafos**: uma experiência no Ensino Médio. 2016. 135 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2016.

ANDRADE, D. et al. Proposta de Atividades para o Desenvolvimento do Pensamento Computacional no Ensino Fundamental. *In*: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA (WIE), 19. , 2013, Campinas. **Anais** [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2013. p. 169-178. DOI: https://doi.org/10.5753/cbie.wie.2013.169. Disponível em: https://sol.sbc.org.br/index.php/wie/article/view/16658. Acesso em: 15 mar. 2024.

AQUINO, A. A. F. **Atividades de modelagem Matemática envolvendo a teoria dos grafos no ensino médio**. 2014. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

AQUINO, R. C. **Grafos**: uma experiência em turmas militares dos ensinos médio e fundamental. 2019. 154 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2019.

ASSIS, D. F. C. **Resolução de problemas via teoria de grafos**: uma possibilidade de tornar a Matemática mais atraente na educação básica. 2017. 152 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de São João Del Rei, São João Del Rei, 2017.

AZEVEDO, R. P. **Mentalidades matemáticas**: uma proposta de atividade envolvendo grafos. 2022. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2022.

CAMPOS, A. F. M.; CAETANO, L. M. D.; GOMES, V. M. L. R. (2023). Revisão Sistemática de Literatura em Educação: características, estrutura e possibilidades às pesquisas qualitativas. **Linguagens, Educação E Sociedade**, 27(54), 139-169. https://doi.org/10.26694/rles.v27i54.2702. Acesso em: 12 dez. 2023.

CARBONI, J. P. **O ensino e a aprendizagem do pensamento computacional na educação básica**. 2023. 73 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2023.

CARDOSO, B. N. **Grafos Eulerianos na Educação Básica**. Rio de Janeiro, 2017. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

CORREA, K, G. **A inserção do pensamento computacional nas aulas de Matemática no**

ensino básico. 2022. 138 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de São João Del Rei, São João Del Rei, 2022.

COSTA, F. R. **Coloração em grafos**: uma experiência no ensino fundamental. 2017. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2017.

COSTA, I. C. S. **Uma abordagem da teoria dos grafos nos anos finais do ensino fundamental por meio de problemas olímpicos de Matemática**. 2022. 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2022.

DELLA TORRE, J. P. G. **Teoria dos Grafos no ensino médio**: aplicações em problemas de trânsito. 2018. 148 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2018.

DOMENEGUETI, A. K. O. **Introdução à Teoria dos Grafos e o problema da coloração**. 2019. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2019.

DONATO, H; DONATO, M. Stages for Undertaking a Systematic Review. **Acta Med Port** [Internet]. 2019 Mar. 29 [cited 2024 Apr. 3];32(3):227-35. Available from: https://www.actamedicaportuguesa.com/revista/index.php/amp/article/view/11923. Acesso em: 12 dez. 2023.

DOURADO, L. E. B. N. **Problemas de mistura de líquidos**: uma abordagem com o geogebra e o pensamento computacional na educação básica. 2021. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

DULTRA JÚNIOR, J. I. **O menor limite inferior de vértices de grau 2 para um grafo minimal 2, aresta, conexo**. 2019. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019.

FAVARO, F. F. **A teoria dos grafos e sua abordagem na sala de aula com recursos educacionais digitais**. 2017. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.

FERREIRA, A. L. B. **Redes sociais**: um estudo introdutório. 2014. 110 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2014.

FONSECA, T. S. **Grafos e emparelhamentos em grafos.** 2018. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2018.

GALVÃO, M. C. B.; RICARTE, I. L. M. Revisão sistemática da literatura: conceituação, produção e publicação. **Logeion: Filosofia da Informação**, Rio de Janeiro, RJ, v. 6, n. 1, p.

57–73, 2019. DOI: 10.21728/logeion.2019v6n1.p57-73. Disponível em: https://revista.ibict.br/fiinf/article/view/4835. Acesso em: 10 dez. 2023.

GOLDBARG, M. C.; GOLDBARG, E. **Grafos**: conceitos, algoritmos e aplicações. 1. ed. Rio de janeiro: Elsevier, 2012. 640 p.

GOMES, A. A. **Grafos**: Uma Experiência no Ensino Médio. 2015. 101 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2015.

LEAL, V. T. P. **Coloração de grafos no ensino fundamental**. 2018. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2018.

MESQUITA, C. P. V. **Grafos e suas aplicações no ensino da Matemática**. 2021. 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2021.

MESQUITA, D. R. **Resolução de problemas relacionados à teoria de grafos no ensino fundamental**. 2015. 97 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

NOGUEIRA, D. K. **Introdução à teoria dos grafos**: proposta para o ensino médio. 2015. 114 f., il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

NOGUEIRA JÚNIOR, D. C. **Grafos e problemas de caminhos**. 2017. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa. 2017.

OLIVEIRA, G. S. **Atividades de modelagem Matemática**: o uso da teoria dos grafos no ensino fundamental. 2020. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2020.

PEREIRA, C. R. **Grafos**: uma proposta aplicada ao cotidiano de alunos do ensino fundamental. 2019. 52 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.

PEREIRA JÚNIOR, A. V. **Uma abordagem sobre a teoria dos grafos no ensino médio**. 2018. 57 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

PETERS, M. **Apropriação do pensamento computacional e da robótica educacional para um currículo alinhado às novas tendências em tecnologias educacionais**. 2023. 206 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2023.

PEZETA, J. R. **Resolução de problemas em contextos de ensino de Matemática**: uma abordagem por meio da Teoria dos Grafos. 2013. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

SENA, M. E. S. **Uma Metodologia para o Ensino da Teoria dos Grafos utilizando Objetos Virtuais de Aprendizagem**. 2016. 101 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Centro de Ciências Computacionais, Universidade Federal do Rio Grande, 2016.

SILVA, A. M. O. S. **Grafos**: Uma Experiência no Ensino Fundamental. 2015. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2015.

SILVA, L. A. S. **Grafos**: uma abordagem através de questões da OBMEP e do Canguru de Matemática. 2020. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

SILVA, J. M. **Computação desplugada como abordagem para implementação do pensamento computacional no ensino fundamental**. 2022. 140 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Inovação em Tecnologias Educacionais) – Instituto Metrópole Digital, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2022.

SILVA JÚNIOR, O. N. **Caminhos em grafos**: uma experiência no ensino fundamental. 2018. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2018.

SILVA JÚNIOR, O. M. **Coloração em Grafos**: Uma Experiência no Ensino Médio. 2016. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2016.

SOUSA, J. R.; SANTOS, S. C. M. Análise de conteúdo em pesquisa qualitativa: modo de pensar e de fazer. **Pesquisa e Debate em Educação**, Juiz de Fora: UFJF, v. 10, n. 2, p. 1396, 1416, jul. , dez. 2020. ISSN 2237,9444. DOI: https://doi.org/10.34019/2237,9444.2020.v10.31559.

SOUZA, M. A. **Grafos no Ensino Básico**. 2015. 101 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015.

SOUZA, M. G. **Possibilidades em grafos hamiltonianos**. 2014. 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

SOUZA, R. F. **Resolução de problemas via teoria de grafos**. 2014. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SOUZA, S. L. A. **O ensino de matrizes utilizando teoria dos grafos**. 2017. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal de Mato Grosso, Barra do Garças, 2017.

TOJEIRO, P. F. S. **Noções de topologia nos anos iniciais do ensino fundamental**: uma possibilidade investigativa por meio do software Scratch. 2019. 138 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.