UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ERIVAN GRANGEIRO DE MORAIS

TÉCNICAS DE CONTAGEM NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DE CONCURSOS PÚBLICOS

JUAZEIRO DO NORTE
2024

ERIVAN GRANGEIRO DE MORAIS

TÉCNICAS DE CONTAGEM NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DE CONCURSOS PÚBLICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior
Coorientador: Dr. Steve da Silva Vicentim

JUAZEIRO DO NORTE
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

M827t Morais, Erivan Grangeiro de.
Técnicas de contagem na resolução de questões de concursos públicos / Erivan Grangeiro de Morais. - 2024.
83 f. il. color.; 30 cm.
(Inclui bibliografia, p. 82-83).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2024.

Orientador: Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior.
Co-orientador: Prof. Dr. Steve da Silva Vicentim.

1. Técnicas de contagem. 2. Técnica de contagem. 3. Concursos públicos. 4.Triângulo de Pascal. I. Paulo Junior, Valdir Ferreira de - orientador. II. Vicentim, Steve da Silva - co-orientador. III. Título.

CDD 515

Bibliotecária: Maria Eliziana Pereira de Sousa – CRB 15/564

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TÉCNICAS DE CONTAGEM NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DE CONCURSOS PÚBLICOS

ERIVAN GRANGEIRO DE MORAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica

Aprovada em: 30 de agosto de 2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
VALDIR FERREIRA DE PAULA JUNIOR
Data: 18/10/2024 20:57:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior
Orientador - UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
STEVE DA SILVA VICENTIM
Data: 24/10/2024 12:14:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Steve da Silva Vicentim
Coorientador - UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
LEANDRO DA SILVA TAVARES
Data: 19/10/2024 17:29:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares
Examinador interno - UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
SAMARA COSTA LIMA
Data: 23/10/2024 14:57:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Samara Costa Lima
Examinador interno - UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
GLAUBER MARCIO SILVEIRA PEREIRA
Data: 23/10/2024 22:15:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Glauber Marcio Silveira Pereira
Examinador externo - UNINASSAU

À minha família

Agradecimentos

A conclusão desta dissertação marca um momento significativo na minha trajetória acadêmica e pessoal, e muitas pessoas contribuíram de maneira fundamental para que este trabalho fosse possível.

Primeiramente, agradeço a Deus, por me conceder saúde, força e sabedoria ao longo desta jornada. Sem sua orientação e bençãos, a conclusão deste trabalho não teria sido possível. Sou eternamente grato por sua presença constante em minha vida, iluminando meu caminho e fortalecendo minha fé em momentos de dificuldade.

À minha querida companheira Ana Heloísa, por seu amor incondicional, paciência e apoio constante ao longo desta jornada. Sua compreensão e encorajamento foram fundamentais para a conclusão deste trabalho. Obrigado por estar ao meu lado em cada passo do caminho, proporcionando-me força e motivação nos momentos mais desafiadores. Este trabalho é tão seu quanto meu.

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão aos meus pais, João Bosco e Maria Eliane. Seu amor incondicional, paciência e apoio constante foram fundamentais para a realização deste trabalho. Desde os primeiros passos na educação até os desafios enfrentados durante a elaboração desta dissertação, vocês sempre estiveram ao meu lado, oferecendo encorajamento e sabedoria.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Valdir Ferreira de Paula Junior, pela orientação, paciência e incentivo ao longo deste processo. Suas sugestões e comentários perspicazes foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

À Universidade Federal do Cariri - UFCA, por proporcionar o ambiente acadêmico e os recursos necessários para a realização desta pesquisa.

Um agradecimento especial aos meus colegas de curso e amigos, Daniele Alves, Felipe Nonato, Márcio Queiroz, Maria Auxiliadora e Melque Grangeiro, pelo apoio, discussões enriquecedoras e momentos de descontração que tornaram esta jornada mais leve e agradável.

A todos os professores do curso Licenciatura em Matemática do IFCE – Juazeiro do Norte, por tornarem possível meu acesso a esse mestrado. Em especial, aos professores Mário de Assis Oliveira, Zelalber Gondim Guimarães, Hildênio José Macedo, Luiz Eduardo Landim Silva e Regilânia da Silva Lucena por toda atenção e incentivo.

E finalmente, agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho e que, porventura, não foram mencionados nominalmente. A cada um de vocês, o meu muito obrigado.

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)

Resumo

O presente trabalho, intitulado "*Técnicas de Contagem Aplicadas à Resolução de Questões em Concursos Públicos*", explora a importância e o uso das questões de contagem em vestibulares e concursos públicos, abrangendo também a seleção de docentes nos Institutos Federais. A pesquisa analisa provas recentes desses concursos, com ênfase na frequência e nos tipos de problemas de contagem, como permutações e combinações, que são frequentemente abordados. A relevância deste estudo reside no fato de que as questões de contagem surgem de forma recorrente nesses exames, exigindo dos candidatos uma sólida compreensão das técnicas combinatórias. Além disso, dominar esses conceitos é essencial não só para a resolução de problemas específicos, mas também para o desenvolvimento de habilidades analíticas e lógicas, que são amplamente valorizadas tanto em exames seletivos quanto na prática docente, especialmente nas áreas de Matemática e disciplinas correlatas. O estudo também aborda o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton, ferramentas fundamentais no ensino médio, pois oferecem uma base sólida para a compreensão de conceitos de combinatória e álgebra. Essas ferramentas permitem que os alunos compreendam a estrutura dos coeficientes binomiais e suas aplicações em diversas áreas da matemática, como a resolução de equações e o cálculo de probabilidades. Além disso, o trabalho apresenta demonstrações combinatórias e algébricas de algumas propriedades do Triângulo de Pascal, explorando suas aplicações práticas em sala de aula. Por fim, oferece soluções para questões de contagem já abordadas em concursos, reforçando a importância do domínio dessas técnicas. A dissertação está estruturada em cinco capítulos, que abrangem desde os conceitos básicos de métodos de contagem até discussões mais aprofundadas sobre a aplicação desses conceitos em contextos educacionais. O objetivo final é fornecer um material de estudo útil para alunos e professores que desejam aprimorar seus conhecimentos e se preparar para concursos, destacando tanto a relevância quanto a complexidade das questões de contagem. Dessa forma, o trabalho não apenas contribui para o conhecimento técnico na área, mas também oferece suporte prático para o desenvolvimento de estratégias de ensino e aprendizagem focadas em combinatória.

Palavras-chave: combinatória; técnicas de contagem; concursos públicos; Triângulo de Pascal; Binômio de Newton.

Abstract

The present work, entitled "Counting Techniques Applied to the Resolution of Questions in Public Competitions", explores the importance and use of counting questions in entrance exams and public competitions, including the selection of teachers for Federal Institutes. The research analyzes recent exams from these competitions, with an emphasis on the frequency and types of counting problems, such as permutations and combinations, that are frequently addressed. The relevance of this study lies in the fact that counting questions appear recurrently in these exams, requiring candidates to have a solid understanding of combinatorial techniques. Furthermore, mastering these concepts is essential not only for solving specific problems but also for developing analytical and logical skills that are highly valued both in selective exams and in teaching practice, particularly in Mathematics and related subjects. The study also covers Pascal's Triangle and Newton's Binomial Theorem, fundamental tools in high school, as they provide a solid foundation for understanding concepts in combinatorics and algebra. These tools allow students to comprehend the structure of binomial coefficients and their applications in various areas of mathematics, such as equation solving and probability calculations. Additionally, the work presents combinatorial and algebraic demonstrations of some properties of Pascal's Triangle, exploring its practical applications in the classroom. Finally, it offers solutions to counting questions that have already been addressed in competitions, reinforcing the importance of mastering these techniques. The dissertation is structured into five chapters, covering basic counting methods to more in-depth discussions on the application of these concepts in educational contexts. The ultimate goal is to provide a useful study material for students and teachers who wish to improve their knowledge and prepare for these competitions, highlighting both the relevance and complexity of counting problems. Therefore, the work not only contributes to technical knowledge in the field but also offers practical support for the development of teaching and learning strategies focused on combinatorics.

Keywords: combinatorics; counting techniques; public competitions; Pascal's Triangle; Newton's Binomial Theorem.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplificação do PFC. . . . 18
Figura 2 – Problema das portas. . . . 19
Figura 3 – Representação de algumas soluções inteiras da equação $A+B+C+D = 8$. 31
Figura 4 – Soma dos 100 primeiros números naturais feita por Gauss. . . . 34
Figura 5 – Exemplificação da relação de Stifel. . . . 38
Figura 6 – Triângulo de Pascal com coeficientes binomiais. . . . 39
Figura 7 – Valores numéricos das entradas Triângulo de Pascal. . . . 40
Figura 8 – Soma dos elementos das 8 primeiras linhas do Triângulo de Pascal. . . 41
Figura 9 – Exemplificação do teorema das colunas. . . . 42
Figura 10 – Exemplificação do teorema das diagonais. . . . 45
Figura 11 – Fila de Pessoas - A . . . 72
Figura 12 – Fila de Pessoas - B . . . 72
Figura 13 – Problema das barracas . . . 74

Lista de tabelas

Tabela 1 – Exemplos de cálculo de fatorial 17
Tabela 2 – Soma de números ímpares consecutivos. 34

Sumário

Introdução **12**

1 Noções Básicas **14**

1.1 Somatórios 14

1.2 Fatorial de um Número Inteiro não negativo 17

1.3 Métodos de Contagem 18

1.3.1 Permutações com objetos repetidos 23

1.3.2 Combinações com repetição 31

1.4 Princípio de Indução 33

2 O Triângulo de Pascal **37**

2.1 Números Binomiais 37

2.2 Triângulo de Pascal e suas propriedades 39

3 Binômio de Newton **47**

3.1 Definição do Binômio de Newton 47

3.2 Termo geral do Binômio de Newton 49

4 Aplicações Combinatórias **52**

4.1 Aproximações de Potências de Números Decimais 52

4.2 Problemas com Polinômios 52

5 Contagem nos concursos de IFs **58**

5.1 Problemas, soluções e comentários 58

Considerações Finais **81**

Referências **82**

Introdução

Este trabalho tem como objetivo apresentar os principais conceitos e resultados dos Métodos de Contagem, servindo como material de estudo tanto para alunos que se preparam para vestibulares e concursos, quanto para professores que desejam ingressar como docentes nos Institutos Federais (IFs). Nesse contexto, serão abordados problemas de contagem frequentemente encontrados em concursos para o cargo de professor de Matemática. Esses problemas, de grande relevância e complexidade, fazem parte do currículo essencial de Matemática e exigem um sólido domínio dos princípios combinatórios, como permutações e combinações.

O triângulo aritmético, conhecido popularmente como triângulo de Pascal, triângulo de Tartaglia ou triângulo de Yang-Hui é um velho conhecido dos matemáticos com relatos em obras de épocas antes de Cristo. Segundo (DANTE, 2004) um dos primeiros registros do triângulo foi encontrado na China na Obra *O Manual de Matemática* escrito por Jia Xian por volta de 1050. O famoso matemático Yang-Hui foi associado ao triângulo devido a seus estudos e aplicações do triângulo em 1250.

O francês Pascal[1] chegou ao triângulo aritmético motivado pela resolução de um problema envolvendo a probabilidade de se obter um duplo 6 quando jogados dois dados. Segundo (DANTE, 2004) Pascal escreveu uma monografia sobre o triângulo aritmético, *Traité du triangle arithmétique*, publicado posteriormente em 1665.

Alguns matemáticos italianos redescobriram o triângulo aritmético, com destaque para Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia, que dedicou várias páginas de suas obras ao estudo desse triângulo. Tartaglia reivindicou a descoberta do triângulo para si, o que levou à sua nomeação em alguns lugares como *"Triângulo de Tartaglia"*, em vez de *"Triângulo de Pascal"*, conforme indicado por (LOPES, 2018, p. 11).

Em nossos livros didáticos, ou pelo menos em sua maioria, o Triângulo Aritmético é chamado de Triângulo de Pascal. Acredito que, como professor, não podemos nos furtar a dialogar com os nossos alunos sobre a história do que ensinamos em sala de aula. De fato, seguindo as orientações que encontramos em (BRASIL, 1998).

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhe permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdade eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporção de novos conhecimentos. Além disso, conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos é de grande utilidade para que o professor comprenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos (BRASIL, 1998, p. 37).

[1] Blaise Pascal, matemático francês (1623-1662).

Este trabalho é composto por cinco capítulos. No primeito capítulo será apresentado alguns conhecimentos básicos sobre somatórios, fatorial de um número natural, métodos de contagem e o princípio de indução, concluindo com a aplicação do princípio de indução em alguns exemplos, tendo como referências (CAMINHA, 2024), (LIMA et al., 2006), (HAZZAN, 2013) e (DANTAS, 2013). O segundo capítulo tratará sobre coeficientes binomiais e o *Triângulo de Pascal* além de ser feito uma abordagem das propriedades dos números binomiais, o qual é encerrado com um estudo das propriedades do triângulo, tendo como referências (USPENSKI, 1978), (LIMA, 2009) e (MORGADO et al., 2016). O terceiro capítulo trata sobre o binômio de Newton[2], além de ser feito uma abordagem relacionando o Binômio de Newton com o Triângulo de Pascal. No quarto capítulo é tratado de aplicações combinatórias, detalhando como os conceitos de somatórios e combinações são utilizados para resolver problemas complexos de contagem. Ele explora, por exemplo, o cálculo de somas envolvendo combinações e demonstra algumas técnicas para simplificar essas operações, como o uso do Triângulo de Pascal e outras ferramentas matemáticas. No quinto capítulo trataremos das aplicações e resultados mais relevantes sobre o Triângulo de Pascal e Binômio de Newton, tendo como referências (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007) e (FRANCO, 2020). Por fim, no quinto capítulo discutiremos diversas questões de contagem que foram cobradas em diversos concurso para professor de Matemática de institutos federais.

Sobre o documento

Com o intuito de facilitar a leitura, será utilizado o símbolo □ para encerrar uma demonstração e o símbolo ■ para marcar o final dos exemplos. A título de informação foram utilizados os editores de imagens e documentos vetoriais Inkscape[3] e CorelDRAW[4]. Além disso, todo o texto e fórmulas contido nos gráficos foram convertidos do formato *.pdf*, gerado pelo PDFLaTeX, para *.svg* através do site Online-Converter.[5]

[2] Isaac Newton, matemático inglês (1642 - 1727).
[3] Página oficial do software: <https://inkscape.org/pt/>. Tal software é gratuito.
[4] Página oficial do software: <https://www.coreldraw.com/br/free-trials/>.
[5] Página da ferramenta: <https://image.online-convert.com/convert-to-svg>.

1 Noções Básicas

Neste capítulo, serão apresentadas algumas noções básicas de matemática vistas no ensino médio. Serão apresentados conhecimentos de fatoriais, somatórios etc. Por fim, será apresentado o princípio de indução. Estes assuntos serão utilizados frequentemente nos capítulos posteriores, tais resultados podem ser encontrados em (HAZZAN, 2013).

1.1 Somatórios

A letra grega maiúscula $\sum$ (lê-se *sigma*) é utilizada para indicar uma soma de sequências de números.

Definição 1.1. *Dada uma sequência* $(a_j)_{j\geq 1}$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *escrevemos* $S = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ *para denotar a soma* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, *e lê-se o somatório dos* a_j, *para* $1 \leq j \leq n$. *Assim,*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \begin{cases} a_1, & se\ n = 1 \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, & se\ n > 1. \end{cases}$$

Onde:

- $\sum$ *é o símbolo de soma.*
- j *é o índice de soma, que varia de* 1 *(valor inicial) até* n *(valor final);*
- a_j *é a expressão que representa cada termo da soma.*

Uma das utilidades da notação $\sum$ se deve ao fato dela facilitar a representação de somas com muitas parcelas. Vejamos alguns exemplos.

i) $\sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n + n \cdot (n+1);$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3;$

iii) $\sum\limits_{i=1}^{2} \sum\limits_{j=2}^{4} 2^i \cdot 3^j = \sum\limits_{i=1}^{2} (2^i \cdot 3^2 + 2^i \cdot 3^3 + 2^i \cdot 3^4) =$

$= (2 + 2^2) \cdot 3^2 + (2 + 2^2) \cdot 3^3 + (2 + 2^2) \cdot 3^4 = \left(\sum\limits_{i=1}^{2} 2^i\right) \cdot \left(\sum\limits_{j=2}^{4} 3^j\right);$

iv) $\sum\limits_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n;$

As principais propriedades de somatório são

i) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária, então

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot a_i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i;$

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha = n \cdot \alpha;$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$

v) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{p-i} = \sum_{i=p-n}^{p} a_i$ para $n \leq p$.

Algumas dessas propriedades de somátorios são demonstradas em (STEWART, 2016, ver Apêndice E, p. 1171).

Veremos agora alguns exemplos ilustrando como utilizar tais propriedades na resolução de alguns problemas envolvendo somatórios.

Exemplo 1.1. *Expanda a expressão* $\displaystyle\sum_{i=3}^{7} \frac{3i^2}{i+1}$.

Solução. Para resolver esse problema utiliza-se as propriedades apresentadas acima. Então a expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{7} \frac{3i^2}{i+1} &= 3\sum_{i=3}^{7} \frac{i^2}{i+1} \\
&= 3\left[\frac{3^2}{3+1} + \frac{4^2}{4+1} + \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1} + \frac{7^2}{7+1}\right] \\
&= 3\left[\frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6} + \frac{36}{7} + \frac{49}{8}\right].
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.2. *Escreva a expressão usando a notação de somatório*

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7}.$$

Solução. Perceba que a expressão pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 7} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i\cdot(i+2)}.$$

■

Exemplo 1.3. *Calcule, em função de $n \in \mathbb{N}$, o valor da soma* $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$.

Solução. Aplicando as propriedades dos somatórios e utilizando o fato de que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (veja a demonstração deste resultado em (LIMA et al., 2006, p. 7)), obtém-se:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = n^2 + 2n. \qquad \blacksquare$$

Uma *soma telescópica*[1] é uma série na qual muitos dos termos se cancelam entre si, resultando em uma soma mais simples. Esse tipo de soma ocorre frequentemente em séries de diferenças de termos consecutivos. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 1.4 (Soma Telescópica)**.** *Simpliflique a soma* $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

Solução. Expandindo os primeiros termos da soma para entender o padrão, temos

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Agora, fazendo o cancelamento dos termos, temos

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Todos os termos intermediários se cancelam, deixando apenas o primeiro e o último termos

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Portanto, a soma telescópica resulta em

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

$\blacksquare$

Observação 1.1. *Dada uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$, tome $\sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1} - a_j)$ efetuando os cancelamentos intermediários na soma*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1} - a_j) &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_n - a_1. \end{aligned}$$

Observação 1.2. *Naturalmente qualquer sequência de termos b_n, pode ser escrita como uma soma telescópica:*

$$b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n-1} - b_{n-2}) + (b_n - b_{n-1}).$$

[1] O nome soma telescópica deriva da função do telescópio, que "encurta a enorme distância entre nossos olhos e os corpos celestes", da mesma forma que a propriedade encurta o caminho entre a soma inicial de muitas parcelas e o cálculo do resultado da mesma (CAMINHA, 2011, p. 17).

1.2 Fatorial de um Número Inteiro não negativo

A seguir veremos a definição de fatorial de um número inteiro não negativo.

Definição 1.2. *Dado um inteiro não negativo n, o fatorial de n é o número*

$$n! = \begin{cases} 1, \; se\, n \leqslant 1 \\ n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \; se\, n > 1. \end{cases}$$

Em princípio poderia parecer mais razoável definir $0! = 0$, mas as razões para a convenção $0! = 1$ logo ficarão evidentes.

A seguir tem-se uma tabela com os valores de alguns fatoriais:

Tabela 1 – Exemplos de cálculo de fatorial

n	$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
0	$0! = 1$
1	$1! = 1$
2	$2! = 2 \cdot 1 = 2$
3	$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
4	$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
5	$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
6	$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Veja agora, como é possível simplificar expressões algébricas que envolvem o fatorial de vários números. A primeira observação é que existe uma relação simples entre o fatorial de um número n e o fatorial de $n - 1$. De fato, para $n \geq 1$, temos que:

$$n! = n \cdot (n-1)! \tag{1.1}$$

A justificativa de considerar $0! = 1$ vem da propriedade recursiva do fatorial $n! = n \cdot (n-1)!$, cuja validade se mantém para $n = 1$ apenas se definirmos $0! = 1$, o que é necessário para a consistência da função fatorial.

Essa relação pode ser verificada simplesmente substituindo-se os valores de $(n-1)!$ e de $n!$ na igualdade $n! = n \cdot (n-1)!$ e observando que tanto o primeiro quanto o segundo membro representam o produto dos números $1, 2, \ldots, n-1, n$. Com isso, podemos continuar a lista do Exemplo 1.5 sem precisar refazer o produto de todos os números em cada linha.

Exemplo 1.5. *Veja que:*

a) $7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$

b) $8! = 8 \cdot 7! = 8 \cdot 5040 = 40320$

c) $9! = 9 \cdot 8! = 9 \cdot 40320 = 362880.$ ∎

No exemplo a seguir, as desigualdades nos dão uma ideia de quão grande é $n!$.

Exemplo 1.6. *Para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, temos $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$.*

Solução. Para demonstrar que $n! \leq n^{n-1}$. Basta observar que $n^{n-1} = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ é o produto de $n-1$ números iguais a n, enquanto $n!$ é o produto de n números, sendo um deles igual a 1 e os outros $n-1$ menores ou iguais a n. De modo semelhante, para mostrar que $n! \geq 2^{n-1}$, basta observar que $n!$ é igual a 1 vezes o produto de $n-1$ números maiores ou iguais a 2. ∎

1.3 Métodos de Contagem

Um procedimento muito comum nos textos que abordam os métodos de contagem tem sido começar o estudo com o chamado *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC). Nesta seção, será mantida essa tradição, apresentando este princípio no início.

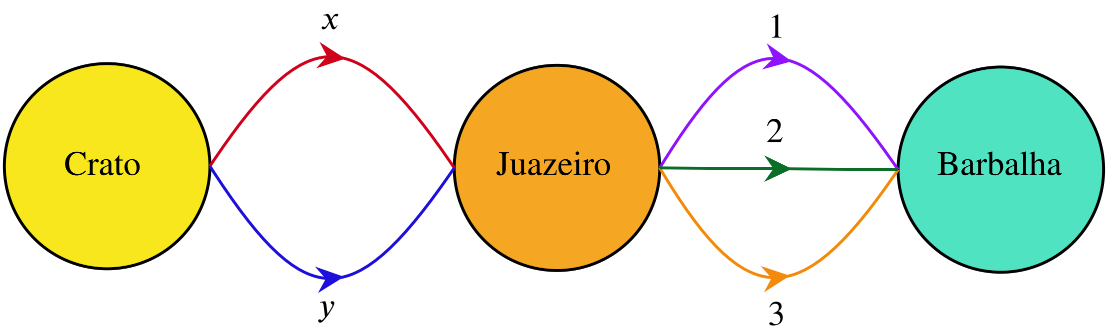
Axioma 1.1 (Princípio Fundamental da Contagem - PFC)**.** *Suponha que uma tarefa pode ser executada em duas etapas. Se a primeira etapa pode ser realizada de n maneiras e a segunda etapa de m maneiras, então a tarefa pode ser executada de $n \cdot m$ maneiras.*

Exemplo 1.7. *João deseja ir de Crato à Barbalha. Os caminhos de Crato à Barbalha passam pela cidade de Juazeiro. Se há dois caminhos que ligam Crato à Juazeiro e três caminhos que ligam Juazeiro à Barbalha, de quantas maneiras João pode ir de Crato à Barbalha passando por Juazeiro?*

Solução. Designando x e y os caminhos que ligam Crato à Juazeiro e por 1, 2, e 3 os caminhos que ligam Juazeiro à Barbalha, então os seis caminhos que ligam Crato à Barbalha são: x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3. Portanto, existem seis maneiras de João ir de Crato à Barbalha. ∎

A seguir, a Figura 1 mostra uma ilustração do exemplo anterior

Figura 1 – Exemplificação do PFC.

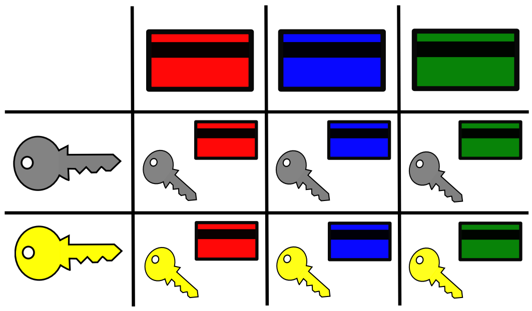


Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Exemplo 1.8 (Extraído de (HOLANDA, 2018)). *Uma porta só é aberta quando usamos simultaneamente a chave e o cartão corretos. Se você possui duas chaves e três cartões, quantos testes devemos fazer para garantir que a porta irá abrir?*

Solução. Montando o diagrama (Figura 2) para auxilar na solução do problema.

Figura 2 – Problema das portas.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

No diagrama acima é possível ver todas as possibilidades de uma chave com um cartão. Assim, a solução é visual é igual a 6. Por outro lado, o problema pode ser resolvido da seguinte forma: note que para cada escolha de cartão existem duas maneiras para escolher a chave. Como temos três cartões, o total de possibilidades é $3 \cdot 2 = 6$. Nesse caso, seriam necessárias no máximo 6 tentativas para abrir a porta. ■

Definição 1.3. *O produtório é uma notação matemática utilizada para indicar o produto de uma sequência de termos. Formalmente, o produto dos termos a_k para k variando de 1 até n é representado por:*

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n,$$

onde:

- $\prod$ *é o símbolo de produto.*
- k *é o índice que varia de 1 a n.*
- a_k *é o termo da sequência que está sendo multiplicado.*

Como exemplo, o produto dos primeiros n números inteiros positivos é:

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Observação 1.3. *De maneira geral, se determinada atividade pode ser dividida em k etapas e se a primeira parte pode ser feita de n_1 maneiras diferentes, a segunda de n_2 maneiras diferentes, e assim por diante, então todo o procedimento pode ser feito de* $\prod_{j=1}^{k} n_j = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ *maneiras diferentes.*

Veja agora um exemplo que pode ser resolvido usando essa generalização do PFC.

Exemplo 1.9. *Em um restaurante, é oferecido o famoso prato feito. Todos os pratos possuem arroz, e o cliente pode escolher uma combinação entre 3 possibilidades de carne (bovina, de frango e porco), 2 tipos de feijão (caldo ou tropeiro) e 2 tipos de bebida (suco ou refrigerante). De quantas maneiras distintas um cliente pode fazer o pedido?*

Solução. Nesse problema, observe que o cliente deve tomar três decisões. A primeira decisão é escolher o tipo de carne que ele quer em seu prato, essa decisão pode ser tomada de três maneiras, a segunda decisão é a escolha do tipo de feijão e ele pode tomar essa decisão de duas maneiras distintas e por fim o cliente deve escolher o tipo de bebida que ele quer, essa decisão pode ser tomada de duas maneiras distintas. Aplicando o *princípio fundamental da contagem*, temos que o total de prato que o cliente pode formar é $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ pratos. ■

Agora, algumas definições importantes:

Definição 1.4. *Seja C um conjunto com m elementos. Chama-se um arranjo de tamanho n de C qualquer sequência ordenada de n elementos retirados de C, onde a ordem dos elementos importa.*

Os arranjos podem ser retiradas de um conjunto de duas maneiras, com reposição ou sem reposição. Nos arranjos retirados com reposição cada elemento selecionado é reposto no conjunto antes da próxima retirada. No caso de arranjos sem reposição, como nome diz, os elementos não são repostos após cada retirada.

Os elementos do arranjo poderão ainda ser ordenados ou não.

Definição 1.5. *Um arranjo é dito ordenado se os seus elementos forem ordenados, isto é, se dois arranjos com os mesmos elementos, porém em ordens distintas, forem consideradas diferentes.*

Exemplo 1.10. *Considere uma classe com vinte estudantes. O conselho de classe é formado por três estudantes: um presidente, um secretário e um tesoureiro. Ao escolher um arranjo de três estudantes para formarem o conselho, deve-se considerar os arranjos ordenados, pois ainda que dois arranjos sejam formados pelas mesmas pessoas, se elas executam tarefas distintas, devem ser consideradas como diferentes.* ■

Definição 1.6. *Um arranjo representa o número de amostras ordenadas que podem ser formadas a partir de um conjunto de m elementos, escolhendo n elementos sem reposição. Ou seja, é a contagem de todas as possíveis sequências ordenadas desses n elementos.*

Agora será estudado como determinar o número de arranjos de cada tipo.

Lema 1.1. *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \geq p$, o número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho p, de um conjunto com n elementos,que será denotado por A_n^p, é dado por:*

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}. \tag{1.2}$$

Demonstração. Os arranjos são retirados sem reposição, portanto o primeiro elemento do arranjo pode ser retirado de n maneiras, o segundo de $(n-1)$ maneiras, e assim por diante até o p-ésimo que pode ser retirado de $(n-(p-1))$ maneiras. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de arranjos de tamanho p é dado pelo produto desses números. □

Exemplo 1.11. *No Exemplo 1.8, o número de maneiras que o conselho de classe pode ser formado é igual ao número de arranjos ordenados sem reposição de tamanho 3 de um conjunto com 20 elementos. Logo, pelo Lema 1.1 tem-se:* $A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840$. ■

Exemplo 1.12. *Considere o conjunto das quatro primeiras letras do alfabeto $\{a, b, c, d\}$. O número de arranjos ordenados sem reposição de tamanho 3 é igual a $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Para referência futura, será listada essas 24 arranjos.*

$$\begin{array}{cccc} abc & abd & acd & bcd \\ acb & adb & adc & bdc \\ bac & bad & cad & cbd \\ bca & bda & cda & cdb \\ cab & dab & dac & dbc \\ cba & dba & dca & dcb \end{array}$$
■

Lema 1.2. *O número de arranjos ordenados com reposição de tamanho n, de um conjunto com m elementos é igual a m^n.*

Demonstração. De fato, como após cada retirada o elemento retirado é reposto, então em cada uma das n retiradas temos m escolhas possíveis. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem o número de arranjos é m^n. □

Definição 1.7. *Um arranjo ordenado sem reposição de tamanho n de um conjunto com n elementos será denominado uma permutação de n elementos.*

Lema 1.3. *O número de permutações de n elementos, denotado P_n, é dado por $n!$*

Demonstração. Substituindo m por n na expressão de A_m^n dada pela fórmula (1.2), obtêm-se

$$\begin{aligned} A_n^n &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= n!. \end{aligned}$$
□

Exemplo 1.13. *Considere o conjunto dos números inteiros de 1 a 3. O número de permutações desse conjunto é* $P_3 = 6$ *e as permutações são as seguintes*

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312 \text{ e } 321.$$

■

Definição 1.8. *Um arranjo é dita não ordenado se os seus elementos não forem ordenados, assim um arranjo não ordenado de tamanho* n *coincide com um subconjunto de tamanho* n.

Definição 1.9. *Um arranjo não ordenado, de tamanho* n*, sem reposição de um conjunto com* m *elementos tambem será denominada uma combinação de* m *elementos tomados* n *a* n*. O número dessas amostras será denotado* C_m^n.

Lema 1.4. *O número de arranjos não ordenados sem reposição de tamanho* n*, de um conjunto com* m *elementos, é dado por*

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}. \tag{1.3}$$

Demonstração. Tome um conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ com m elementos. Seja um arranjo não ordenado sem reposição de tamanho n é um subconjunto com n elementos. Considere esse arranjo de tamanho n composta pelos elementos do conjunto $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n}\}$, onde $j_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $1 \leq k \leq n$. Este arranjo pode gerar $n!$ arranjos ordenados sem reposição. Como isto é válido para qualquer arranjo não ordenado e o número dessas é C_m^n, tem-se

$$A_m^n = C_m^n \cdot P_n.$$

Então

$$\begin{aligned} C_m^n &= \frac{A_m^n}{P_n} \\ &= \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} \\ &= \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} \cdot \frac{(m-n)!}{(m-n)!} \\ &= \frac{m!}{n!(m-n)!}. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão C_m^n pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \tag{1.4}$$

□

Vamos ver alguns exemplos da situação acima.

Exemplo 1.14 (CESGRANRIO - 2020)**.** *João tem o hábito de jogar na Mega-Sena. Toda semana, ele faz uma única aposta, composta por seis números distintos. Os números das apostas de João são, sempre, escolhidos dentre os seguintes: 11, 13, 24, 28, 32, 36, 44, 48 e 60. Duas apostas são consideradas distintas se apresentam, pelo menos, um número diferente. Durante quantas semanas consecutivas, no máximo, João pode fazer apostas diferentes?*

Solução. Cada aposta simples da Mega-Sena é composta por 6 números. Portanto, para descobrir quantas apostas diferentes João pode fazer, devemos calcular quantas combinações de 6 números podem ser formadas a partir dos 9 disponíveis (11, 13, 24, 28, 32, 36, 44, 48 e 60). Logo, o total de jogos é

$$C_9^6 = \frac{9!}{6! \cdot (9-6)!} = 84 \text{ jogos}.$$

Portanto, João poderá fazer 84 apostas diferentes. Como só faz uma aposta por semana, isso poderá ser feito por 84 semanas. ■

Exemplo 1.15. *Seis times participam de um torneio de basquete. Cada uma das equipes enfrenta todas as demais exatamente uma vez. Quantos jogos serão realizados?*

Solução. Para determinar o número de jogos, será preciso calcular o número de amostras não ordenadas de tamanho 2 de um conjunto com 6 elementos. Pela fórmula (1.4) tem-se

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

■

Exemplo 1.16. *Vinte times de futebol disputam a Série A do Campeonato Brasileiro. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários, sendo um jogo em casa e outro fora. Quantos jogos serão realizados nesse campeonato?*

Solução. Note que o número de jogos será dado por $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$ jogos. ■

Exemplo 1.17. *Uma comissão formada por três estudantes deve ser escolhida em uma classe de vinte estudantes para organizar os jogos interclasses. De quantas maneiras essa comissão pode ser escolhida?*

Solução. Como a comissão deve ter três membros distintos, as amostras devem ser selecionadas sem reposição, e como a ordem de escolha dos participantes é irrelevante, trata-se de amostras não ordenadas. Pela fórmula (1.4) tem-se

$$C_{20}^3 = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140.$$

Assim, haverão 1140 maneiras de escolher essa comissão. ■

1.3.1 Permutações com objetos repetidos

Uma aplicação comum de permutação com repetição é quando se quer encontrar o número de maneiras de organizar um conjunto de itens, onde alguns são repetidos. Por exemplo, considerando a palavra ANA e pensando em seus anagramas[2]. Será indicado A_1

[2] Um anagrama é a reorganização das letras de uma palavra para produzir outras palavras, utilizando todas as letras originais exatamente uma vez.

para o primeiro A e A_2 para o segundo A da palvra ANA. Então, listando os anagramas tem-se

$$\begin{array}{cccccc} A_1NA_2 & A_1A_2N & NA_1A_2 & NA_2A_1 & A_2NA_1 & A_2A_1N \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{array}$$

Perceba que as permutações

(1) e (5) são iguais;

(2) e (6) são iguais;

(3) e (4) são iguais.

Na verdade, não há $3! = 6$ permutações distintas, mas apenas 3, que são

$$\text{ANA}, \quad \text{AAN}, \quad \text{NAA}.$$

Essa diminuição do número de permutações decorre do fato de aparecer duas letras iguais a "A", no conjunto de letras a serem permutadas. É intuitivo perceber que, o fato de existirem letras repetidas para serem permutadas, acarreta em uma diminuição do número de permutações em relação ao número que seria se todas fossem distintas. Por isso, para resolver esse tipo de problema, temos que analisar a quantidade de objetos que se repetem e o número de vezes que eles se repetem. Para realizar o que foi descrito, dividiremos o estudo em alguns casos.

(i) Um objeto se repete.

(ii) Dois objetos distintos se repetem.

(iii) Três objetos distintos se repetem.

(iv) r objetos distintos se repetem.

Para resolver o problema na situação (i), considere n objetos, dos quais n_1 são iguais a a_1 e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1. Indicando por $P_n^{n_1}$, o número de permutações nessas condições e calculando esse número.

Cada permutação dos n objetos é uma n-upla ordenada de elementos em que devem figurar n_1 objetos iguais a a_1 e os restantes $n - n_1$ elementos distintos.

$$\underbrace{(\text{—}, \text{—}, \text{—}, \ldots, \text{—})}_{n \text{ elementos}}.$$

Façamos o seguinte raciocínio: das n posições que existem na permutação, escolhe-se $n - n_1$ posições, para colocar os elementos distintos de a_1. Logo existem $C_n^{n-n_1}$ modos de escolher essas posições. Note que para cada escolha de $(n - n_1)$ posições, existem $(n - n_1)!$ modos em que os $(n - n_1)$ objetos podem ser permutados. Logo, o número de formas de dispor os elementos distintintos de a_1, na permutação é

$$C_n^{n-n_1} \cdot (n - n_1)! = \frac{n!}{n_1!}.$$

Uma vez colocados esses elementos distintos, a posição dos elementos repetidos a_1 fica determinada (de uma só forma) pelos lugares restantes. Logo, existem $P_n^{n_1} = \dfrac{n!}{n_1!}$ permutações com n_1 objetos iguais a a_1. O exemplo a seguir é uma aplicação do caso (i).

Exemplo 1.18. *Quantos anagramas existem da palavra PARAGUAI?*

Solução. Note que na palavra PARAGUAI temos

$$\begin{cases} \text{A, A, A} \longrightarrow \text{objetos repetidos} \\ \text{P} \\ \text{R} \\ \text{G} \\ \text{U} \\ \text{I} \end{cases}$$

Utilizando $n = 8$ e $n_1 = 3$, temos $P_8^3 = \dfrac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$ anagramas. ■

Para resolver o problema na situação (ii), considere n objetos, dos quais n_1 são iguais a a_1 : $\underbrace{a_1,\ a_1,\ a_1,\ \ldots, a_1}_{n_1}$ e n_2 são iguais a a_2 : $\underbrace{a_2,\ a_2,\ a_2,\ \ldots, a_2}_{n_2}$ e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1 e a_2. Indicando por $P_n^{n_1,n_2}$ o número de permutações nessas condições.

Cada permutação dos n objetos é uma n-upla ordenada de objetos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e os $n - n_1 - n_2$ elementos restantes.

Seguindo o seguinte raciocínio: das n posições que existem na permutação, escolhe-se $n - n_2$ lugares para colocar todos os elementos, com exceção dos iguais a a_2. Existem $C_n^{n-n_2}$ modos de escolher esses lugares. Para cada uma dessas escolhas existirão $P_{n-n_2}^{n_1}$ modos em que os $n - n_2$ elementos podem ser permutados (lembrando que, dos elementos a serem permutados agora, existem n_1 iguais a a_1). Ao todo existirão

$$C_n^{n-n_2} \cdot P_{n-n_2}^{n_1} = \frac{n!}{(n-n_2)!n_2!} \cdot \frac{(n-n_2)!}{n_1!}$$

formas de arranjar na permutação todos os elementos, com exceção de a_2.

Uma vez arranjados esses elementos na permutação, as posições dos elementos repetidos a_2 ficam determinadas (de uma única forma) pelos lugares restantes. Logo, existem $P_n^{n_1,n_2} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1 e n_2 elementos iguais a a_2. O exemplo a seguir é uma aplicação do caso (ii).

Exemplo 1.19. *Quantos anagramas existem da palavra ANALITICA?*

Solução. Note que em ANALITICA tem

$$\begin{cases} \text{A, A, A} \longrightarrow \text{objetos repetidos} \\ \text{I, I} \longrightarrow \text{objetos repetidos} \\ \text{N} \\ \text{L} \\ \text{T} \\ \text{C} \end{cases}$$

Utilizando $n = 9$ e $n_1 = 3,\ n_2 = 2$ tem-se $P_9^{3,2} = \dfrac{9!}{3!2!} = 30\,240$ anagramas. ■

Para resolver o problema na situação (iii), considere n objetos, dos quais n_1 são iguais a a_1 : $\underbrace{a_1,\ a_1,\ a_1,\ \ldots, a_1}_{n_1}$, n_2 são iguais a a_2 : $\underbrace{a_2,\ a_2,\ a_2,\ \ldots, a_2}_{n_2}$ e n_3 são iguais a a_3 : $\underbrace{a_3,\ a_3,\ a_3,\ \ldots, a_3}_{n_3}$ e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1 e a_2. Indicando por $P_n^{n_1,n_2,n_3}$ o número de permutações nessas condições.

Cada permutação dos n objetos é uma n-upla ordenada de objetos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2, n_3 elementos iguais a a_3 e os $n - n_1 - n_2 - n_3$ elementos restantes.

Observe que das n posições que existem na permutação, escolhe-se $n - n_3$ lugares para colocar todos os elementos, com exceção dos iguais a a_3. Existem $C_n^{n-n_3}$ modos de escolher esses lugares. Para cada uma dessas escolhas existirão $P_{n-n_3}^{n_1,n_2}$ modos em que os $n-n_3$ elementos podem ser permutados (lembrando que, dos elementos a serem permutados agora, existem n_1 iguais a a_1 e n_2 iguais a a_2). Ao todo existirão

$$C_n^{n-n_3} \cdot P_{n-n_3}^{n_1,n_2} = \frac{n!}{(n-n_3)!n_3!} \cdot \frac{(n-n_3)!}{n_1! \cdot n_2!}$$

formas de arranjar na permutação todos os elementos, com exceção de a_3.

Uma vez arranjados esses elementos na permutação, as posições dos elementos repetidos a_3 ficam determinadas (de uma única forma) pelos lugares restantes. Logo, existem $P_n^{n_1,n_2,n_3} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e n_3 elementos iguais a a_3. O exemplo a seguir é uma aplicação do caso (iii).

Exemplo 1.20. *Em um torneio de futsal, um time obteve 8 vitórias, 5 empates e 2 derrotas, nas 15 partidas disputadas. De quantas maneiras distintas esses resultados podem ter ocorrido?*

Solução. Podemos abordar esse problema como uma questão de contar as permutações de um conjunto de itens com repetição. A fórmula geral para o número de permutações de n

itens, onde existem n_1 itens de um tipo A, n_2 itens de um tipo B, n_3 itens de um tipo C e os outros itens distintos, é dada por

$$P_n^{n_1,n_2,n_3} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}.$$

No nosso caso, temos

- Total de partidas $n = 15$;
- Número de vitórias $n_1 = 8$;
- Número de empates $n_2 = 5$;
- Número de derrotas $n_3 = 2$

Portanto, o número de maneiras distintas de distribuir essas partidas é

$$\frac{15!}{8! \cdot 5! \cdot 2!}.$$

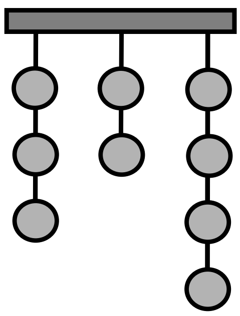
Portanto, o número de maneiras distintas de ter obtido 8 vitórias, 5 empates e 2 derrotas em 15 partidas é 135 135. ■

Para resolver o problema na situação (iv), vamos considerar n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2, $\ldots$, n_{r-1} são iguais a a_{r-1} e n_r são iguais a a_r. Usando um raciocínio análogo ao dos casos (i), (ii) e (iii), podemos determinar o número de permutações nessas condições (indicando por $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r}$) através da fórmula

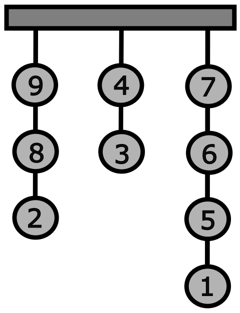
$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

Para ilustrar a aplicação prática dos conceitos teóricos discutidos, apresentaremos uma série de exemplos que demonstram como esses princípios são utilizados em diferentes problemas.

Exemplo 1.21 (Adaptado - PAPMEM/2015)**.** *Em um torneio de tiro, nove alvos são dispostos em três colunas penduradas, como mostra a figura. Cada competidor deve atirar nos alvos da seguinte forma: ele escolhe primeiro uma das três colunas e atira no alvo mais baixo que ele ainda não acertou. Em quantas ordens os nove alvos podem ser acertados?*



Solução. Na figura abaixo, observe uma possível sequência de tiros



Vamos considerar a ordem das escolhas. Sendo A, B e C as colunas, da esquerda para a direita, então a ordem de tiros da figura acima é CABBCCCAA. Note que a escolha da coluna já determina a escolha do alvo. Com isso, queremos contar o número de anagramas de CABBCCCAA, que é $P_9^{2,3,4} = \dfrac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1.260$ ordens de tiros possíveis. ■

Exemplo 1.22 (IDECAN - Colégio Pedro II)**.** *Num jogo da Copa Sul-Americana de clubes de futebol, em 2011, o Vasco da Gama, do Brasil, venceu o Aurora, da Bolívia, por 8 a 3. De quantas maneiras distintas o placar pode evoluir de 0 a 0 para 8 a 3, a favor do Vasco da Gama, levando-se em conta apenas a ordem em que os times construíram a sequência dos 11 gols?*

Solução. Considerando X para representar um gol do Vasco da Gama e Y para representar um gol do Aurora, podemos usar uma sequência de X e Y para representar a ordem dos gols do jogo, por exemplo, a ordem no qual o Vasco da Gama fez os 4 primeiros gols do jogo, depois o Aurora fez um, em seguida o Vasco da Gama fez um, depois o Aurora fez dois e, por fim, o Vasco fez 3 gols é representada por uma possível sequência de gols é $X - X - X - X - Y - X - Y - Y - X - X - X$. Então todas as maneiras desse placar ser criado é dado pela permutação dos elementos da sequência

$$X - X - X - X - Y - X - Y - Y - X - X - X.$$

Logo, o total de maneiras de construir esse placar é dado por

$$P_{11}^{3,8} = \frac{11!}{3! \cdot 8!} = 165 \text{ maneiras.}$$

■

Agora, veremos um exemplo da OBMEP que envolve uma aplicação de permutação com repetição.

Exemplo 1.23 (Extraído de (OBMEP, 2023))**.** *Uma formiga, inicialmente no vértice A, anda sobre as linhas do quadriculado da figura, sempre para a direita ou para cima, até chegar ao vértice B. De quantas maneiras ela pode fazer isso passando por algum dos pontos destacados?*

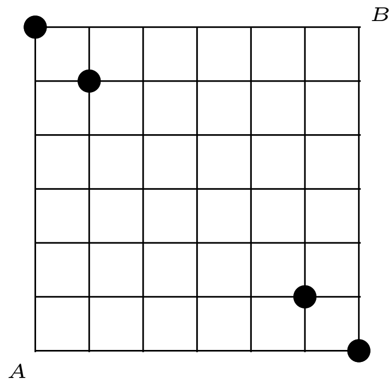
(A) 4

(B) 32

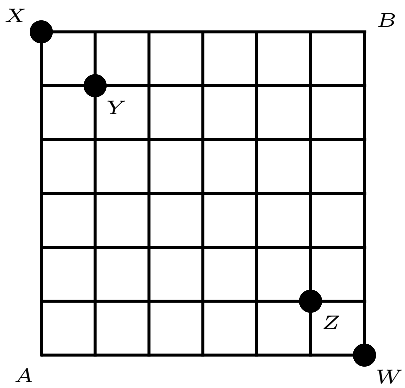
(C) 36

(D) 64

(E) 74

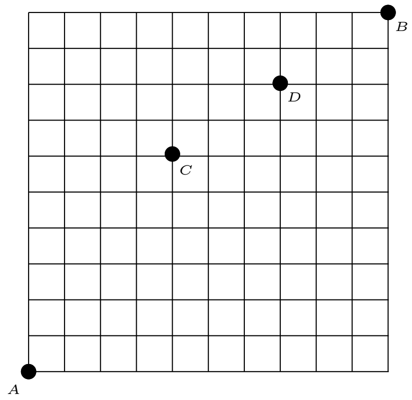


Solução. Vamos nomear os quatro pontos indicados no enunciado de X, Y, Z e W, conforme a figura abaixo.

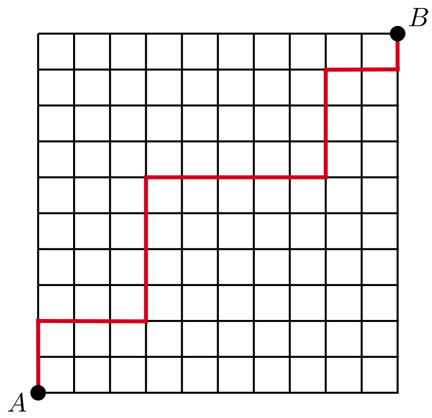


Observe que há um único caminho que vai de A até B passando por X. O mesmo ocorre com o ponto W, assim, até agora contamos dois caminhos. Para ir de A até Y há 6 caminhos, note que a formiga vai realizar 6 movimentos para ir de A até Y desses movimentos ela vai se deslocar uma vez para a direita e cinco vezes para cima, então o total de caminhos é dado por $P_6^5 = \dfrac{6!}{5!} = 6$. Note que de Y para B também há seis caminhos. Portanto, pelo PFC há $6 \cdot 6 = 36$ caminhos que saem de A até B passando por Y. Perceba que, a contagem do total de caminhos que ligam A até B passando por Z também é 36. Portanto, o total de caminhos é igual a $36 + 36 + 1 + 1 = 74$. ■

Exemplo 1.24 (Extraído de (FRANCO, 2020))**.** *Uma formiga vai de A a B seguindo sempre para cima ou para a direita, andando sempre sobre as arestas de um quadriculado* 10×10*, veja o desenho da figura abaixo. Quantos são os caminhos possíveis? Quantos são os caminhos possíveis passando por C e D?*



Solução. Para determinar o total de caminhos que a formiga pode fazer de A até B, vamos traçar o caminho em vermelho como está na figura abaixo



Observe que, em qualquer caminho que a formiga fizer ela deve fazer 20 movimentos, desses 20 movimentos, sabemos que 10 são para cima e 10 são para direita. Logo, o total de caminhos é dado por

$$P_{20}^{10,10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184\,756 \text{ caminhos.}$$

Agora, vamos determinar o total de caminhos que ligam os pontos A e B, e que passam pelos pontos C e D. Para isso, vamos determinar primeiro os caminhos que ligam A e C usando o mesmo raciocínio que foi usado para determinar os caminhos que ligam A e B. Então a quantidade de caminhos que ligam A e C é determinada por

$$P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210 \text{ caminhos.}$$

A quantidade de caminhos que ligam C e D é dada por

$$P_{5}^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10 \text{ caminhos.}$$

e a quantidade de caminhos que ligam os pontos D e B é dada também por $P_5^{2,3} =$ 10 caminhos. Logo, ficamos com uma situação parecida com o Exemplo 1.7. Portanto, aplicando o Princípio fundamental da contagem, temos que o total de caminhos que ligam A e B, passando por C e D, é dado por $210 \cdot 10 \cdot 10 = 21\,000$ caminhos. ■

1.3.2 Combinações com repetição

Em problemas de contagem é muito comum nos depararmos com situações em que devemos tomar decisões para a escolha de alguns objetos e podemos optar por objetos de um mesmo tipo. A seguir, temos a definição de uma combinação completa.

Definição 1.10. *O número de combinações completas de n elementos, tomados p a p é o número de formas de escolher p elementos dentre n disponíveis, podendo escolher repetidamente os objetos, até obter a quantidade p.*

Para usarmos uma notação diferente, representaremos a combinação com repetição por CR_n^p. Na combinação com repetição, calculamos o número de maneiras de selecionar elementos de um conjunto, permitindo a escolha de um mesmo elemento múltiplas vezes. Para ilustrar esse conceito, começaremos com um exemplo que exemplifica bem essa ideia.

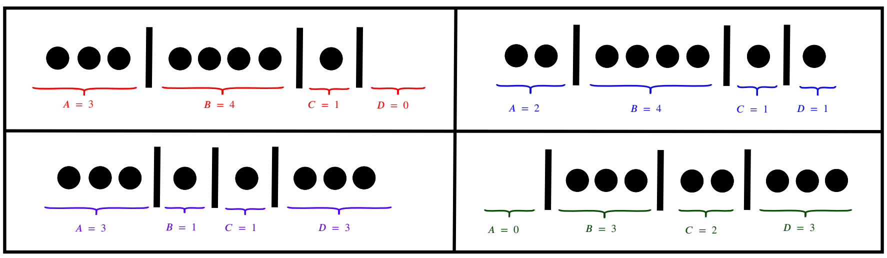
Exemplo 1.25. *De quantos modos podemos comprar 8 doces em uma padaria que tem 4 tipos de doces diferentes?*

Solução. Sejam A, B, C e D as quantidades de doces que iremos comprar do primeiro sabor, do segundo sabor, do terceiro sabor e do quarto sabor, respectivamente. Note que A, B, C e D devem ser inteiros não negativos e que $A + B + C + D = 8$. Logo, comprar 8 doces em uma padaria que oferece 4 sabores diferentes é encontrar uma solução, com inteiros não negativos, para a equação $A + B + C + D = 8$. Vamos listar algumas soluções para essa equação

- $A = 3$, $B = 4$, $C = 1$ e $D = 0$.
- $A = 2$, $B = 4$, $C = 1$ e $D = 1$.
- $A = 3$, $B = 1$, $C = 1$ e $D = 3$.
- $A = 0$, $B = 3$, $C = 2$ e $D = 3$.

Observe que existem outras soluções para a equação. Para não ter que enumerar todas as soluções de forma exaustiva, note que ao imaginar uma solução podemos reprentá-la no esquema bola/traço. A próxima imagem mostra as quatro soluções anteriores no esquema bola/traço.

Figura 3 – Representação de algumas soluções inteiras da equação $A + B + C + D = 8$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Assim, qualquer solução da equação $A+B+C+D=8$ pode ser representada por um fila com 9 elementos: 8 bolas (pois em qualquer solução devemos ter 8 unidades distribuídas nas incógnitas) e 3 traços (para separar quatro incógnitas usamos 3 traços). O total de filas é

$$P_{11}^{3,8} = \frac{11!}{3! \cdot 8!} = 165.$$

Portanto, o total de maneiras de escolher 8 sabores de doces em 4 sabores disponíveis é 165 maneiras. Observe que existem $CR_4^8 = P_{11}^{3,8} = C_{11}^8 = \dfrac{11!}{8! \cdot 3!} = 165$ maneiras de realizar essa escolha.

O importante nesse exemplo é perceber que podemos trabalhar com CR_n^p de duas maneiras descritas abaixo.

1ª) CR_n^p é o número de modos de selecionar p objetos, diferentes ou não entre n objetos disponíveis.

2ª) CR_n^p é o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1+x_2+\cdots+x_n=p$.

Observação 1.4. *Note que calcular CR_n^p é o mesmo que calcular o número de soluções inteiras não negativas de $x_1+x_2+\cdots+x_n=p$. Para determinar esse número usando o esquema bola/traço, necessitamos de p bolas e $(n-1)$ traços. Portanto, temos a seguinte relação*

$$CR_n^p = P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p! \cdot (n-1)!} = C_{n+p-1}^p. \tag{1.5}$$

A equação (1.5) será justificada no Teorema 1.1.

Teorema 1.1 (Combinação com repetição)**.** *Seja n o número de tipos diferentes de elementos em um conjunto e p o número de elementos a serem escolhidos, com a permissão de escolher elementos repetidamente. O número de maneiras de escolher p elementos de um conjunto com n tipos de elementos, onde a ordem não importa e a repetição é permitida, é dado pela fórmula*

$$C(n+p-1,p) = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Demonstração. Para resolver o problema de combinações com repetição, podemos utilizar uma abordagem combinatória conhecida como "*Método das bolas e traços*". Imagine que temos p elementos para distribuir em n categorias distintas. Podemos representar esses elementos como p bolas ($\bullet$) e as separações entre as categorias como $n-1$ traços ($|$).

- As bolas representam os elementos que estamos escolhendo.
- Os traços representam as divisões entre os diferentes tipos de elementos.

Por exemplo, se $n = 8$ e $p = 3$, uma configuração possível é

$$\bullet\bullet \mid \bullet \mid\mid\mid\mid\mid\mid$$

Neste caso, temos 2 elementos do primeiro tipo, 1 do segundo tipo e nenhum dos outros seis tipos. O problema é então encontrar o número total de maneiras de organizar essas bolas e traços. O número total de objetos a serem organizados é $p + (n - 1)$ (bolas mais traços). Portanto, temos um total de $p + n - 1$ objetos. O número de maneiras de escolher quais desses objetos serão as traços (ou, equivalente, as bolas) é dado pelo coeficiente binomial

$$C_{p+n-1}^{p}$$

ou

$$C_{p+n-1}^{n-1}$$

A fórmula é equivalente pois $C_n^m = C_n^{n-m}$. Portanto, o número de maneiras de escolher p elementos com repetição permitida de um conjunto com n tipos de elementos é: C_{n+p-1}^{p} ou C_{n+p-1}^{n-1}. Com isso, concluímos a demonstração. □

Para uma melhor compreensão do Teorema 1.1, consulte as seguintes referências (ROSEN, 2011), (STANLEY, 2011) e (MORGADO et al., 2016).

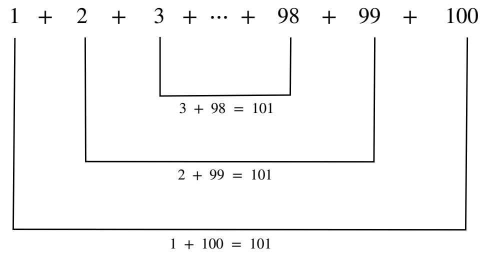
1.4 Princípio de Indução

A história da soma dos primeiros números naturais é frequentemente atribuída ao matemático Carl Friedrich Gauss(1777-1855)[3]. Segundo (EVES, 1990) a lenda conta que, quando Gauss era criança, seu professor pediu que ele somasse os números de 1 a 100, esperando que a tarefa demorasse. Qual foi a surpresa quando, pouco tempo depois, Gauss deu a resposta: 5 050. Indagado como tinha descoberto tão rapidamente o resultado, Gauss, descreveu o método na imagem a seguir. Segundo (STILLWELL, 2013), Gauss percebeu que a soma dos números de 1 a 100 poderia ser calculada emparelhando os números em uma sequência. Por exemplo, ao somar o primeiro número com o último (1 + 100), o segundo número com o penúltimo (2 + 99), e assim por diante, cada par soma 101.

[3] Carl Friedrich Gauss, matemático alemão (1777-1855).

Com 50 pares, a soma total é 5 050.

Figura 4 – Soma dos 100 primeiros números naturais feita por Gauss.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Essa técnica de Gauss pode ser aplicada a qualquer *progressão aritmética*[4], com algumas adaptações na fórmula para levar em conta o primeiro termo e a diferença comum entre os termos. A soma dos n primeiros números naturais pode ser escrita por

$$S(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n.$$

O objetivo é encontrar uma fórmula para $S(n)$. Somando a igualdade acima, membro a membro, note que

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S(n) & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S(n) & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Portanto, $2S(n) = \overbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}^{\text{n parcelas iguais a n + 1}}$. Logo, $2S(n) = n(n+1)$ e, portanto,

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.6}$$

Agora, observe a seguinte expressão que é soma dos n primeiros números ímpares

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1).$$

Na tabela a seguir será apresentados alguns valores de $S(n)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Tabela 2 – Soma de números ímpares consecutivos.

n	$S(n)$
1	$1 = 1^2$
2	$1 + 3 = 4 = 2^2$
3	$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
4	$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
5	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$
6	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$
7	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$
8	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2$
$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

4 Progressão arimética é uma sequência numérica em que a diferença entre um termo e seu antecessor resulta sempre em um mesmo valor, chamado de razão.

Observando a tabela pode-se conjecturar que

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2. \tag{1.7}$$

Para demonstrar a fórmula acima, utilizaremos o Princípio de Indução Finita. O Princípio de Indução Finita é uma ferramenta crucial na matemática, especialmente em provas envolvendo números naturais. Para mais detalhes sobre o princípio da indução e suas aplicações, recomenda-se a leitura dos livros *Análise Real* de (LIMA, 2020), *Curso de Análise* de (LIMA, 2022) ou *Introdução à Análise Real* de (CORRÊA, 2008).

O Princípio da Indução Finita, conforme descrito por (CORRÊA, 2008, p. 18), pode ser enunciado conforme descrito abaixo

Princípio da Indução Finita. Seja P uma propriedade satisfeita por um conjunto de números $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que

1. o número n_0 satisfaz a propriedade P;
2. se um número natural $n \geq n_0$ satisfaz a propriedade P, então $n+1$ também satisfaz a propriedade P.

Então todos os números naturais $n \geq n_0$ satisfazem a propriedade P.

Segundo (CORRÊA, 2008, p. 18), o princípio acima é equivalente ao resultado abaixo.

Segundo Princípio da Indução Finita. Suponhamos que a cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos uma proposição $P(n)$. Se, para cada $m \in \mathbb{N}$, a hipótese de que $P(k)$ é verdadeira para todo $k < m$ implica que $P(m)$ é verdadeira, então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Façamos algumas aplicações do Princípio da Indução. O exemplo a seguir é bem útil para entender como funciona uma demostração por indução.

Exemplo 1.26. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros naturais ímpares é igual a n^2.*

Solução. Como o k-ésimo natural ímpar é o número $2k-1$, a propriedade $S(n)$ é, neste caso

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Para fazer uma demostração por indução, é preciso verificar que

i) $S(1)$ é verdadeira.

ii) $S(k)$ verdadeira $\Rightarrow S(k+1)$ verdadeira.

A verificação de i) é imediata, pois o primeiro natural ímpar é 1 que é igual a 1^2. Para verificar ii), suponha que $S(k)$ é verdadeira, isto é

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2. \tag{1.8}$$

Para demonstrar que $S(k+1)$ também é verdadeira, basta adicionar $(2(k+1)-1)$ nos membros da equação (1.8), obtendo

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) + [(2(k+1)-1)] = k^2 + [(2(k+1)-1)]. \tag{1.9}$$

Como a propriedade $S(k)$ é válida, segue

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + (2k-1) + [(2(k+1)-1)] &= k^2 + [(2(k+1)-1)] \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Portanto, $S(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, o que finaliza a resolução. ■

2 O Triângulo de Pascal

Neste capítulo, serão apresentadas as propriedades do Triângulo de Pascal, acompanhadas de exemplos que ilustram a aplicação dessas propriedades na resolução de problemas de contagem.

2.1 Números Binomiais

Para estudar o Triângulo de Pascal, necessitamos inicialmente compreender o conceito de números binomiais.

Definição 2.1 (Número Binomial)**.** *Sejam n e k inteiros não negativos. Chamamos de número binomial ou coeficiente binomial o número representados por*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}, & se\, 0 \leq k \leq n; \\ 0, & se\, n < k. \end{cases}$$

É fácil verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Vejamos alguns exemplos de como calcular números binomiais.

- $\binom{3}{1} = \dfrac{3!}{(3-1)!1!} = \dfrac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1!} = 3;$
- $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{(4-2)!2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6;$
- $\binom{5}{3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10;$
- $\binom{8}{5} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$

Observação 2.1. *Note que para $n \in \mathbb{N}$, os números $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ são todos números naturais.*

Observação 2.2. *A Definição (2.1) garante que $\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$ e $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$, os quais por sua vez também são todos números naturais.*

Cabe então perguntar se $\binom{n}{k}$ é natural para todas as escolhas de inteiros n e k, tais que $0 \leq k \leq n$. Para estudarmos tal questão, precisamos do resultado abaixo devido a *Stifel*[1]

[1] Michael Stifel, matemático alemão (1486 - 1567).

A Proposição 2.1, como apresentada em (FRANCO, 2020, p. 53), é uma importante identidade combinatória utilizada em várias aplicações.

Proposição 2.1 (Relação de Stifel)**.** *Se n e k são inteiros tais que $0 \leq k \leq n$, então*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{2.1}$$

Demonstração(Algébrica). Basta aplicar a definição de número binomial aos termos do primeiro membro da equação (2.1) como apontado a seguir.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{k+1}{k+1} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n-k}{n-k} \\
&= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{k \cdot n! + n! + n \cdot n! - k \cdot n!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \binom{n+1}{k+1},
\end{aligned}$$

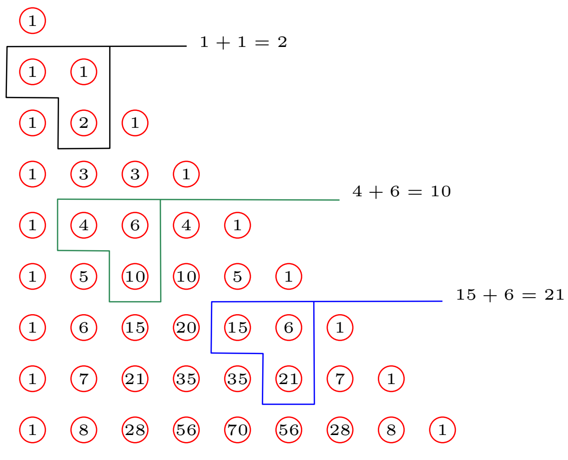
como queríamos demonstrar. □

Demonstração(Combinatória). Considere uma caixa com uma bola branca e n bolas pretas. O número de modos de selecionar nessa caixa $k+1$ bolas é C_{k+1}^{n+1}. O número de modos de selecionar essas bolas de modo que tenhamos uma bola branca e k bolas pretas é $1 \times C_n^k = C_n^k$ e o número de modos de selecionar $k+1$ bolas pretas é C_n^{k+1}. Como o número total de modos de fazer essas escolhas é a soma dos valores em que a bola branca aparece e quando ela não aparece, conclui-se que

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1},$$

como queríamos demostrar. □

Figura 5 – Exemplificação da relação de Stifel.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

2.2 Triângulo de Pascal e suas propriedades

Com os números binomiais e combinações acima definidos podemos construir uma tabela numérica triangular, chamada de *Triângulo de Pascal*, do seguinte modo:
Contando as linhas e colunas a partir de 0, sendo as linhas numeradas de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita; a entrada (i.e, o número) da n-ésima linha e k-ésima coluna é a combinação C_n^k. Mais especificamente:

- As entradas da coluna 0, lidas de cima para baixo, são respectivamente iguais as combinações $C_0^0,\ C_1^0,\ C_2^0,\ C_3^0,\ \ldots, C_n^0$. Como visto anteriormente, todos esses números são iguais a 1. A linha zero é formada somente pela combinação $C_0^0 = 1$.
- A linha 1 é formada pelas combinações C_1^0 e C_1^1, ambos iguais a 1.
- Em geral, as entradas da linha n, lidas da esquerda para a direita, são respectivamente iguais aos números binomiais $C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \ldots,\ C_n^{n-1},\ C_n^n$.

Definição 2.2 (Triângulo de Pascal)**.** *O triângulo de Pascal é a organização dos coeficientes binomiais em uma tabela. É infinito e formado por números binominais, iniciando a partir do 0 e seguindo o padrão descrito anteriormente.*

Na Figura 6, é mostrado as linhas iniciais do triângulo de Pascal, de acordo com a construção descrita.

Figura 6 – Triângulo de Pascal com coeficientes binomiais.

$$\begin{array}{cccccccc}
C_0^0 & & & & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & C_n^4 & \cdots & C_n^n &
\end{array}$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

A relação de Stifel, equação (2.1) diz que, ao somar, na linha $n-1$, as entradas da coluna $k-1$ e da coluna k, obtem-se a entrada da linha n e coluna k. Isso é mais difícil de dizer do que entender e verificar, e permite obter recursivamente os valores numéricos das combinações C_n^k. A Figura 7, mostra os valores numéricos das combinações C_n^k para $0 \leq n \leq 8$, obtidos com o auxílio da relação de Stifel.

Figura 7 – Valores numéricos das entradas Triângulo de Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1
\end{array}
$$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Uma relação importante é conhecida como *Combinações Complementares*, cuja definição veremos a seguir.

Definição 2.3 (Combinações Complementares). *Em uma mesma linha do Triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais. Essa relação pode ser entendida na equação (2.2).*

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p. \tag{2.2}$$

Teorema 2.1 (Teorema das Linhas). *A soma dos elementos da n-ésima linha é* 2^n, *isto é*

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Demonstração. Note que, para $n = 0$ temos $C_0^0 = 1 = 2^0$, logo a propriedade é satisfeita. Para demonstrar a propriedade para os naturais usaremos o *princípio da indução finita.*

1º Passo: $n = 1$

$$\sum_{i=0}^{1} C_i^1 = C_0^0 + C_0^1 = 1 + 1 = 2 = 2^1.$$

Portanto, para $n = 1$ a propriedade está satisfeita.

2º Passo: Suponha que a afirmação é válida para $n = k$, ou seja,

$$C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \cdots + C_k^{k-1} + C_k^k = 2^k.$$

$3^{\underline{o}}$ Passo: Usando o princípio de indução finita, para mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja

$$C^0_{k+1} + C^1_{k+1} + C^2_{k+1} + \cdots + C^{k-1}_{k+1} + C^k_{k+1} + C^{k+1}_{k+1} = 2^{k+1}.$$

Aplicando a relação de Stifel pode-se escrever

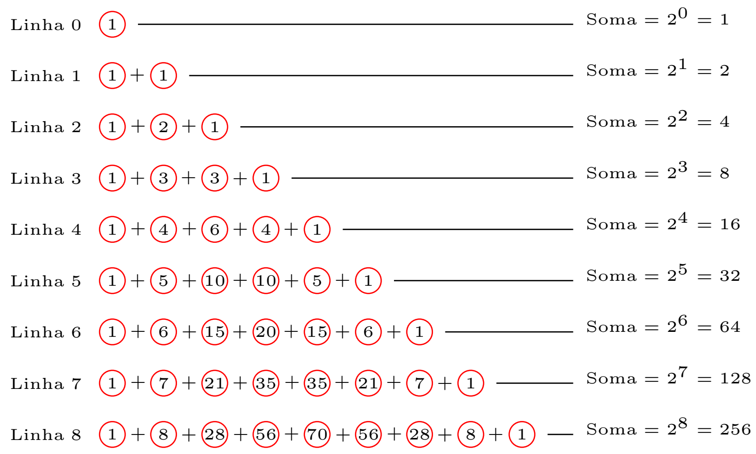
$$\begin{array}{rcl} C^1_{k+1} & = & C^0_k + C^1_k \\ C^2_{k+1} & = & C^1_k + C^2_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C^k_{k+1} & = & C^{k-1}_k + C^k_k \end{array}$$

Recorde que $C^0_{k+1} = C^0_k$ e $C^{k+1}_{k+1} = C^k_k$. Utilizando a hipótese de indução, temos

$$\begin{array}{rcl} C^0_{k+1} + C^1_{k+1} + C^2_{k+1} + \cdots + C^{k+1}_{k+1} & = & C^0_{k+1} + C^1_{k+1} + C^2_{k+1} + \cdots + C^k_{k+1} + C^{k+1}_{k+1} \\ & = & C^0_k + C^0_k + C^1_k + C^1_k + \cdots + C^k_{k+1} + C^{k+1}_{k+1} \\ & = & 2[C^0_k + C^1_k + \cdots + C^k_k] \\ & = & 2.2^k \\ & = & 2^{k+1}. \end{array}$$

Logo, o resultado vale para todo $n \in \mathbb{N}$, e como vale para $n = 0$, concluimos que vale para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Figura 8 – Soma dos elementos das 8 primeiras linhas do Triângulo de Pascal.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Teorema 2.2 (Teorema das Colunas)**.** *A soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna sobre a última parcela da soma, isto é*

$$C^k_k + C^k_{k+1} + C^k_{k+2} + \cdots + C^k_{k+n} = C^{k+1}_{k+n+1}.$$

Demonstração. Note que, para $n = 0$ temos $C^k_k = C^{k+1}_{k+1} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo a propriedade é satisfeita para $n = 0$. Para demonstrar a propriedade para os naturais usaremos o Princípio de Indução Finita sobre n. Seja k um número inteiro não negativo fixo.

1º Passo: $n = 1$

$$C_k^k + C_{k+1}^k = 1 + \frac{(k+1)!}{k! \cdot ((k+1)-k)!} = 1 + k + 1 = k + 2 = C_{k+2}^{k+1}.$$

Portanto, para $n = 1$ a propriedade está satisfeita.

2º Passo: Suponha que a afirmação é válida para $n = i$, ou seja,

$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \cdots + C_{k+i-1}^k + C_{k+i}^k = C_{k+i+1}^{k+1}.$$

3º Passo: Para provar que vale para $n = i + 1$, deve-se mostrar que

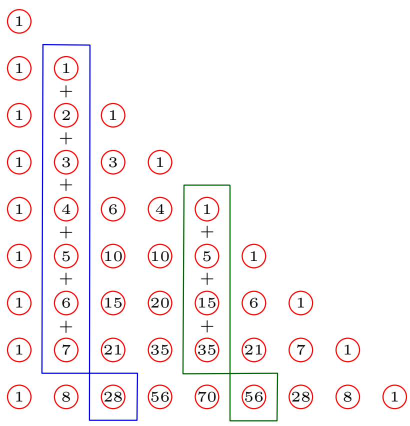
$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \cdots + C_{k+i-1}^k + C_{k+i}^k + C_{k+i+1}^k = C_{k+i+2}^{k+1}.$$

Considerando o lado esquerdo da expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
C_k^k + C_{k+1}^k + \cdots + C_{k+i}^k + C_{k+i+1}^k &= C_{k+i+1}^{k+1} + C_{k+i+1}^k \text{(por hipótese de indução.)} \\
&= \frac{(k+i+1)!}{(k+1)!i!} + \frac{(k+i+1)!}{k!(i+1)!} \\
&= \frac{(k+i+1)}{k!i!}\left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{i+1}\right] \\
&= \frac{(k+i+1)!(k+i+2)}{k!i!(k+1)(i+1)} \\
&= \frac{(k+i+2)}{(k+1)!(i+1)!} \\
&= C_{k+i+2}^{k+1} \\
&= C_{(k+i+1)+1}^{k+1}.
\end{aligned}$$

Logo, o resultado vale para todo $n \in \mathbb{N}$, e como vale para $n = 0$, concluimos que vale para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Figura 9 – Exemplificação do teorema das colunas.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Exemplo 2.1. *Aplicando o Teorema das Colunas, calcule as somas a seguir.*

a) Calcule

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \cdots + \binom{17}{3}.$$

b) Demostre que para cada $n \in \mathbb{N}$, *vale*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4}.$$

Solução:

a) Aplicando o Teorema 2.2, temos

$$\begin{aligned} \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \cdots + \binom{17}{3} &= \binom{17+1}{3+1} \\ &= \binom{18}{4} \\ &= 3\,060. \end{aligned}$$

b) Para resolver este problema, inicialmente faremos algumas manipulações algébricas para poder aplicar o Teorema 2.2. Note que

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)}{3!} \cdot 3! \\ &= 3! \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)}{3!} \\ &= 3! \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{k+2}{3} \\ &= 3! \cdot \left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{n+2}{3} \right] \text{(Utilizando o Teorema das colunas.)} \\ &= 3! \binom{n+3}{4} \\ &= 6 \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4} \end{aligned}$$

Teorema 2.3 (Teorema das Diagonais)**.** *Considere o Triângulo de Pascal, no qual o elemento na* n*-ésima linha e* k*-ésima coluna é dado pelo coeficiente binomial* C_n^k*. A soma da diagonal que começa em* C_n^0 *e vai até* C_n^k *é dada por*

$$\sum_{i=0}^{k} C_{n+i}^{i} = C_{n+k+1}^{k},$$

Demonstração. Considere o Triângulo de Pascal, no qual o elemento na n-ésima linha e k-ésima coluna é dado pelo coeficiente binomial C_n^k. Queremos provar que a soma dos elementos ao longo de uma diagonal do Triângulo de Pascal é igual ao coeficiente binomial localizado abaixo e à direita da diagonal, isto é,

$$\sum_{i=0}^{k} C_n^i = C_{n+k+1}^k.$$

Note que para $k = 0$, temos $\sum_{i=0}^{0} C_{n+i}^i = C_{n+0}^0 = C_n^0 = 1$, portanto o teorema é válido para $k = 0$. Para provar este teorema para os números naturais, usaremos o Princípio de Indução Finita sobre k. Note que, para $k = 1$, a soma é simplesmente C_n^0. Logo

$$\sum_{i=0}^{1} C_{n+i}^i = C_n^0 + C_{n+1}^1 = 1 + n + 1 = n + 2 = C_{n+2}^1 = C_{n+1+1}^1.$$

Portanto, o teorema é verdadeiro para $k = 1$. Agora, suponha que o teorema seja verdadeiro para $k = m$, ou seja, suponha que

$$\sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^i = C_{n+m+1}^m.$$

Queremos provar que

$$\sum_{i=0}^{m+1} C_{n+i}^i = C_{n+m+2}^{m+1}.$$

Escrevemos a soma no lado esquerdo da equação acima como

$$\sum_{i=0}^{m+1} C_{n+i}^i = \sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^i + C_{n+m+1}^{m+1}.$$

Pela hipótese da indução, temos

$$\sum_{i=0}^{m+1} C_{n+i}^i = C_{n+m+1}^m + C_{n+m+1}^{m+1}.$$

Logo, pela Proposição 2.1. Tem-se

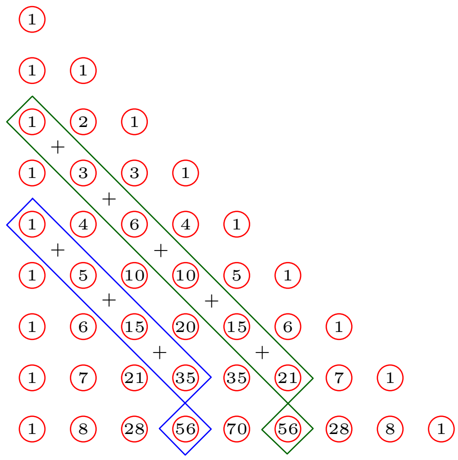
$$C_{n+m+1}^m + C_{n+m+1}^{m+1} = C_{n+m+2}^{m+1}.$$

Portanto, provamos que

$$\sum_{i=0}^{m+1} C_{n+i}^i = C_{n+m+2}^{m+1},$$

o que finaliza a demostração. □

Figura 10 – Exemplificação do teorema das diagonais.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Exemplo 2.2. *Determine o número de soluções inteiras não negativas da inequação* $x + y + z \leq 6$.

Solução: Como queremos determinar o número de soluções inteiras e não negativas da inequação $x+y+z \leq 6$ temos obrigatoriamente que $x, y, z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, isso significa que podemos reescrever o problema e estudar o número de soluções inteiras não negativas das equações

- $x + y + z = 0$,
- $x + y + z = 1$,
- $x + y + z = 2$,
- $x + y + z = 3$,
- $x + y + z = 4$,
- $x + y + z = 5$,
- $x + y + z = 6$.

Note que os conjuntos soluções destas equações são dois a dois disjuntos. Com isso pode-se somar as soluções de cada uma das equações acima. Fazendo isso, tem-se

$$\begin{aligned} CR_3^0 + CR_3^1 + CR_3^2 + CR_3^3 + CR_4^3 + CR_5^3 + CR_6^3 &= C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + C_5^3 + C_6^4 + C_7^5 + C_8^6 \\ &= C_9^3 \\ &= 84 \text{ soluções.} \end{aligned}$$

Outra possibilidade de solução, para esse problema, é perceber que $x + y + z \leq 6$ implica em $x + y + z = t$, com $0 \leq t \leq 6$, pois x, y e z são inteiros não negativos. Daí, temos que

$$x + y + z - t = 0, \text{ com } 0 \leq t \leq 6.$$

Queremos transformar esta equação em algo parecido com as equações lineares com soluções inteiras, como no Exemplo 1.25 para a qual sabemos contar as soluções. Nesse sentido, vamos somar 6 a ambos os membros da equação acima, obtendo

$$x + y + z + (6 - t) = 6, \text{ com } 0 \leq t \leq 6.$$

Façamos agora a mudança de variáveis $w = 6 - t$ e note que $0 \leq t \leq 6$ equivale a dizer que $0 \leq w \leq 6$, o que nos dá

$$x + y + z + w = 6, \text{ com } 0 \leq w \leq 6.$$

Como $x,\ y,\ z$ são não negativos, isso equivale a

$$x + y + z + w = 6,$$

com $x,\ y,\ z,\ w$ inteiros não negativos. Façamos uma bijeção entre cada escolha possível e uma configuração de "bolinhas e sinais de mais". Por exemplo,

$$\bullet + \bullet \bullet \bullet + \bullet + \bullet$$

representa a solução $x = 1,\ y = 3,\ z = 1$ e $w = 1$ de $x + y + z + w = 6$. Para determinar todas as soluções da equação, basta permutar os elementos da configuração. Note que, na configuração, temos nove símbolos, seis bolinhas e três sinais de mais. Logo, o total de permutações é $P_9^{3,6} = \dfrac{9!}{3! \cdot 6!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$ soluções. ■

3 Binômio de Newton

Neste capítulo, serão abordados conceitos relacionados ao Binômio de Newton, incluindo a relação entre o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton, bem como o termo geral do Binômio de Newton e outros tópicos relacionados.

3.1 Definição do Binômio de Newton

Toda potência da forma $(x+y)^n$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é conhecida como binômio de Newton. O desenvolvimento do binômio de Newton é bastante simples em casos como os seguintes

- $(5x-7)^0 = 1$;
- $(2x+y)^1 = 2x+y$;
- $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2+2xy+y^2$;
- $(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

Em casos como $(x+y)^7$, $(2x-y)^5$, $(x+2)^{10}$ e outros, serão utilizados alguns dos conhecimentos adquiridos em análise combinatória.

Teorema 3.1 (Retirado de (FRANCO, 2020))**.** *Se x e y são números reais e n é um inteiro positivo, então*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Demonstração. Façamos a demonstração desse teorema por indução sobre n, temos:
Para $n=1$, temos

$$(x+y)^1 = x+y = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = \sum_{k=0}^{1} x^k y^{1-k}.$$

Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para um certo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

e provemos que a afirmação será válida para $n+1$. Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $(x+y)$, obtemos

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}\\ &= x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}.\end{aligned}$$

Agora observe que $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k$. Fazendo essa substituição no segundo somatório do último membro, tem-se

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k\\ &= x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n-k+1}y^k\\ &= x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]x^{n-k+1}y^k.\end{aligned}$$

Usando a Relação de Stifel, provada na Proposição 2.1, concluímos que a expressão acima é igual a

$$x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n-k+1}y^k=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k,$$

concluindo a demonstração. □

Observação 3.1. *Observe que*

- *O desenvolvimento de* $(x+y)^n$ *possui* $n+1$ *termos.*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^kx^{n-k}=\binom{n}{0}y^0\cdot x^n+\binom{n}{1}y^1\cdot x^{n-1}+\binom{n}{2}y^2\cdot x^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}y^n\cdot x^0.$$

- *Os coeficientes do desenvolvimento de* $(x+y)^n$ *são elementos da n-ésima linha do Triângulo de Pascal.*

Exemplo 3.1. *Olhando para o Triângulo de Pascal*

$$\begin{array}{llllll}1\\1&1\\1&2&1\\1&3&3&1\\1&4&6&4&1\\1&5&10&10&5&1.\end{array}$$

Note que os coeficentes do Binômio de Newton são os termos das linhas do Triângulo de Pascal

1. $(x+y)^0 = 1y^0x^0 = 1.$

2. $(x+y)^1 = 1y^0x^1 + 1y^1x^0 = x + y.$

3. $(x+y)^2 = 1y^0x^2 + 2y^1x^0 + 1y^2x^0 = x^2 + 2yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$

4. $(x+y)^3 = 1y^0x^3 + 3y^1x^2 + 3y^2x^1 + 1y^3x^0 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$

5. $(x+y)^4 = 1y^0x^4 + 4y^1x^3 + 6y^2x^2 + 4y^3x^1 + 1y^4x^0 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$

■

3.2 Termo geral do Binômio de Newton

No desenvolvimento $(x+y)^n$ vimos que

$$(x+y)^n = \underbrace{\binom{n}{0}x^n}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}y}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}y^2}_{T_3} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{k}x^{n-k}y^k}_{T_{k+1}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}y^n}_{T_{n+1}}.$$

Assim, o *termo geral* é dado por

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Observe que em $T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n,\ T_{n+1}$, temos $n+1$ termos.

Exemplo 3.2. *Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento* $\left(2x^4 - \dfrac{1}{x}\right)^{12}$.
Solução: O termo geral do desenvolvimento é

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{12}{k} \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^k \cdot (2x^4)^{12-k} \\ &= \binom{12}{k}(-1)^k \cdot x^{-k} \cdot 2^{12-k} \cdot x^{48-4k} \\ &= (-1)^k\binom{12}{k}2^{12-k}x^{48-5k}. \end{aligned}$$

No termo em x^3 temos $48 - 5k = 3 \Rightarrow k = 9$. Assim,

$$T_{10} = (-1)^9\binom{12}{9}2^3x^3 = -1\,760x^3.$$

Portanto, o coeficiente de x^3 é $-1\,760$. ■

Exemplo 3.3. *Determine o termo máximo do desenvolvimento* $(1 + 1/5)^{60}$.

Solução: O termo geral do desenvolvimento é

$$T_{k+1} = \binom{60}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k 1^{60-k} = \binom{60}{k}.\frac{1}{5^k}.$$

$T_{k+1} > T_k$ (ou seja, cada termo é maior que o anterior) se

$$\binom{60}{k}\frac{1}{5^k} > \binom{60}{k-1}\frac{1}{5^{k-1}},$$

isto é,

$$\frac{60!}{k!(60-k)!5^k} > \frac{60!}{(k-1)!(61-k)!}\frac{1}{5^{k-1}}.$$

Assim,

$$\frac{(61-k)!}{(60-k)!} > \frac{k!}{(k-1)!}\frac{5^k}{5^{k-1}}\frac{60!}{60!},$$

isto é, $61 - k > k \cdot 5 \cdot 1$, ou seja, $k < 10,16$. Logo, $T_{k+1} > T_k$ para $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ e, analogamente, $T_{k+1} < T_k$ para $k \in \{11, 12, 13, \ldots, 60\}$.
Logo,

$$T_1 < T_2 < T_3 < \ldots < T_{10} < T_{11} \tag{3.1}$$

$$T_{11} > T_{12} > T_{13} > \ldots > T_{65}. \tag{3.2}$$

Das desigualdades (3.1) e (3.2), segue então, que o termo máximo é $T_{11} = \binom{60}{10}\frac{1}{5^{10}}$. ■

Agora, veremos um exemplo mais sofisticado envolvendo as propriedades do Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton. Esse exemplo foi extraído de (CARNEIRO; CAMPUS; PAIVA, 2014, p. 20).

Exemplo 3.4 (IV Olimpíada Cearense de Matemática - 1984)**.** *Considere o desenvolvimento de*

$$P(x) = (x+1)^{10} + (x+1)^{11} + \cdots + (x+1)^{100}$$

como o polinômio de x. Encontre neste desenvolvimento o coeficiente de

a) x^2

b) x^{98}

Solução:
a) Pelo Binômio de Newton, temos

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i.$$

Então, o coeficiente de x^2 em $P(x)$ é dado por

$$\binom{10}{2}+\binom{11}{2}+\cdots+\binom{99}{2}+\binom{100}{2}. \tag{3.3}$$

Usando o Teorema 2.2, temos

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\cdots+\binom{m-1}{n}+\binom{m}{n}=\binom{m+1}{n+1}$$

Concluímos de (3.3) que

$$\begin{aligned}\binom{10}{2}+\binom{11}{2}+\cdots+\binom{99}{2}+\binom{100}{2} &= \binom{101}{3}-\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{9}{2}\right]\\ &= \binom{101}{3}-\binom{10}{3}\\ &= 166\,650-120\\ &= 166\,530.\end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente de x^2 é 166 530.

b) Observe que os termos x^{98} só aparecem nos desenvolvimentos de $(x+1)^{98}$, $(x+1)^{99}$ e $(x+1)^{100}$. Usando o Binômio de Newton, podemos obter que o coeficiente de x^{98} no polinômio $P(x)$ é

$$\binom{98}{98}+\binom{99}{98}+\binom{100}{98}=\binom{101}{99}=\binom{101}{2}=5\,050.$$

■

4 Aplicações Combinatórias

Neste capítulo serão apresentados diversos problemas que podem ser estudados no ensino médio, os quais surgem em diversos vestibulares e concursos.

4.1 Aproximações de Potências de Números Decimais

O Binômio de Newton pode ser utilizado para fazer aproximações de números decimais elevados a expoentes muito grandes. Por exemplo, usando o desenvolvimento do Binômio de Newton para os quatro primeiros termos, obtemos uma aproximação, com dois algarismos significativos. Veja abaixo um exemplo.

Exemplo 4.1 (UEMA)**.** *Abaixo estão* 5 *aproximações do número* $(1,003)^{20}$*. Usando o binômio de Newton é possível determinar a melhor delas, que é:*
a) 1 *b)* 1,01 *c)* 1,03 *d)* 1,06 *e)* 1,0003

Solução. Note que $(1,003)^2 = (1+0,003)^{20}$. Expandindo essa expressão pelo Binômio de Newton, temos

$$(1+0,003)^{20} = \binom{20}{0}1^{20}\cdot\ 0,003^0 + \binom{20}{1}1^{19}\cdot\ 0,003^1 + \cdots + \binom{20}{20}1^0\cdot\ 0,003^{20}.$$

Desprezando os termos de desenvolvimento a partir do 3º termo, pois são próximos de zero, obtemos

$$(1+0,003)^{20} = (1,003)^{20} \cong \binom{20}{0}\cdot 1^{20}\cdot 0,003^0 + \binom{20}{1}\cdot 1^{19}\cdot 0,003^1 \cong 1,06.$$

Portanto, a resposta é o item d). ■

4.2 Problemas com Polinômios

Teorema 4.1 (Extraído de (MORGADO et al., 2016))**.** *Todo polinômio* $p(x)$ *de grau* n *pode ser escrito na forma*

$$p(x) = A_0 + A_1x + A_2x(x+1) + \cdots + A_nx(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+n-1).$$

Demonstração. Para a demonstração desse teorema, considere $p(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$, onde n é o grau de $p(x)$. Note que, quando $n = 0$, temos $p(x) = b_0$ então tome $A_0 = b_0$, logo a propriedade é satisfeita para $n = 0$. Para provar que o teorema vale para os naturais, usaremos *indução matemática*, note que para $n = 1$, temos que $p(x) = b_0 + b_1x$, faça $b_0 = A_0$ e $b_1 = A_1$, logo para $n = 1$ verifica-se que o teorema é verdadeiro. Agora, suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$ o polinômio $p(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ pode ser escrito como

$$p(x) = A_0 + A_1x + A_2x(x+1) + \cdots + A_nx(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+n-1).$$

Agora, tome um polinômio $q(x) = p(x) + kx^{n+1}$ de grau $n+1$, pela hipótese de indução, temos

$$p(x) = A_0 + A_1x + A_2x(x+1) + \cdots + A_nx(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+n-1).$$

Então, resta mostrar que $q(x)$ também pode ser escrito dessa forma basta mostrar que kx^{n+1} pode ser escrito da forma $C_0+C_1x+C_2x(x+1)+\cdots+C_{n+1}x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)$. Então observe que

$$kx^{n+1} = k\cdot(x+n)\cdot x^n - n\cdot kx^n \tag{4.1}$$

Note que, pela hipótese de indução $x^n = D_0 + D_1x + \cdots + D_nx(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)$, então substuindo x^n por $D_0 + D_1x + \cdots + D_nx(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)$ na equação 4.1 segue que,

$$kx^{n+1} = C_0 + C_1x + C_2x(x+1) + \cdots + C_{n+1}x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n).$$

Portanto, $q(x) = p(x) + kx^{n+1}$ pode ser escrito como

$$q(x) = \lambda_0 + \lambda_1x + \cdots + \lambda_{n+1}x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n).$$

Logo, por indução segue que todo polinômio $p(x)$ de grau n pode ser escrito como

$$p(x) = A_0 + A_1x + A_2x(x+1) + \cdots + A_nx(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1).$$

□

Exemplo 4.2. *Calcule o valor da soma*

$$S = \sum_{k=1}^{50}(2k-1)^2(k+2).$$

Solução. Aplicando o Teorema 4.1, temos

$$\begin{aligned}
(2k-1)^2(k+2) &= 4k^3 + 4k2 - 7k + 3 && (4.2)\\
&= Ak(k+1)(k+2) + Bk(k+1) + Ck + D\\
&= A(k^3+3k^2+2k) + B(k^2+k) + Ck + D\\
&= Ak^3 + (3A+B)k^2 + (2A+B+C)k + D. && (4.3)
\end{aligned}$$

Igualando os polinômios das equações (4.2) e (4.3) tem-se

$$A = 4, \quad 3A+B = 4, \quad 2A+B+C = 7, \quad D = 2,$$

isto é,

$$A = 4, \quad B = -8, \quad C = 7, \quad D = 2.$$

Então

$$4k^3 + 4k^2 - 7k + 2 = 4k(k+1)(k+2) + 4k(k+1) - 7k + 2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{50}(2k-1)(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{50}\left[4k(k+1)(k+2)+4k(k+1)-7k+2\right] \\
&= 4\sum_{k=1}^{50}k(k+1)(k+2)+4\sum_{k=1}^{50}k(k+1)-7\sum_{k=1}^{50}k+\sum_{k=1}^{50}2 \\
&= 24\sum_{k=1}^{50}C_{k+2}^{3}+8\sum_{k=1}^{50}C_{k+1}^{2}-7\sum_{k=1}^{50}C_{k}^{1}+2\times 50 \\
&= 24C_{53}^{4}+8C_{52}^{3}-7C_{51}^{2}+100 \\
&= 24\frac{53!}{4!(53-4)!}+8\frac{52!}{3!(52-3)!}-7\frac{51!}{2!(51-2)!}+100 \\
&= 7\,027\,800+176\,800-8\,925+100 \\
&= 7\,195\,775
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.3. *Qual é o valor da soma* $\sum_{i=15}^{50} i(i+1)(i+2)$*?*

Solução. Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=15}^{50} i(i+1)(i+2) &= \sum_{i=1}^{50} i(i+1)(i+2)-\sum_{i=1}^{14} i(i+1)(i+2) \\
&= 6\sum_{i=1}^{50}C_{i+2}^{3}-6\sum_{i=1}^{14}C_{i+2}^{3} \\
&= 6C_{53}^{4}-6C_{17}^{4} \\
&= 6\frac{53!}{4!(53-4)!}-6\frac{17!}{4!(17-4)!} \\
&= 1\,756\,950-14\,280 \\
&= 1\,742\,670
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.4. *Calcule o valor da soma*

$$S = 1^3+2^3+3^3+\cdots+99^3.$$

Solução. Expressando a soma utilizando a notação de somatório, temos

$$S = 1^3+2^3+3^3+\cdots+99^3 = \sum_{i=1}^{99} i^3.$$

Note que

$$\begin{aligned}
i^3 &= Ai(i+1)(i+2)+Bi(i+1)+Ci+D \\
&= A(i^3+3i^2+2i)+B(i^2+i)+Ci+D \\
&= Ai^3+(3A+B)i^2+(2A+B+C)i+D.
\end{aligned}$$

Então

$$A=1, \quad 3A+B=0, \quad 2A+B+C=0 \quad D=0,$$

isto é,

$$A = 1, \quad B = -3, \quad C = 1, \quad D = 0.$$

Logo, conclui-se que

$$i^3 = i(i+1)(i+2) - 3i(i+1) + i.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{99} i^3 \\
&= \sum_{i=1}^{99} [i(i+1)(i+2) - 3i(i+1) + i] \\
&= \sum_{i=1}^{99} i(i+1)(i+2) - 3\sum_{i=1}^{99} i(i+1) + \sum_{i=1}^{99} i \\
&= 6\sum_{i=1}^{99} C_{i+2}^{3} - 6\sum_{i=1}^{99} C_{i+1}^{2} + \sum_{i=1}^{99} C_{i}^{1} \\
&= 6C_{102}^{4} - 6C_{101}^{3} + C_{100}^{2} \\
&= 6\frac{102!}{4!(102-4)!} - 6\frac{101!}{3!(101-3)!} + \frac{100!}{2!(100-2)!} \\
&= 25\,497\,450 - 999\,900 + 4\,950 \\
&= 24\,502\,500.
\end{aligned}$$

Mais ainda, observe que $S(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ pode ser escrita em uma fórmula em função de n

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= \sum_{i=1}^{n} [i(i+1)(i+2) - 3i(i+1) + i] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) - 3\sum_{i=1}^{99} i(i+1) + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 6\sum_{i=1}^{n} C_{i+2}^{3} - 6\sum_{i=1}^{n} C_{i+1}^{2} + \sum_{i=1}^{n} C_{i}^{1} \\
&= 6C_{n+3}^{4} - 6C_{n+2}^{3} + C_{n+1}^{2} \\
&= 6\frac{(n+3)!}{4!(n-1)!} - 6\frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4} - \frac{4(n+2)(n+1)n}{4} + \frac{2(n+1)n}{4} \\
&= \frac{n(n+1)[2 - 4(n+2) + (n+3)(n+2)]}{4} \\
&= \frac{n(n+1)[2 - 4n - 8 + n^2 + 5n + 6]}{4} \\
&= \frac{n(n+1)[n(n+1)]}{4} \\
&= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que $S(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2.$ ■

Exemplo 4.5. *Calcule o valor da soma*

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} iC_n^i$$

Solução. Aplicando a definição de combinação e as propriedades de somatórios, segue que

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{i=1}^{n} iC_i^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\frac{n!}{i!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=1}^{n} n\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \\
&= \sum_{i=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} \\
&= n\sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \\
&= n\left[C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{2} + \cdots + C_{n-1}^{n-1}\right] = n \cdot 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que $S(n) = n \cdot 2^{n-1}$. ■

Exemplo 4.6. *Calcule o valor da soma*

$$S = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Solução. Vamos encontrar constantes A, B e $C \in \mathbb{R}$, tais que

$$i^2 = Ai(i+1) + Bi + C.$$

Observe que podemos montar um sitema para determinar os valores de A, B e C.

$$i^2 = Ai^2 + (A+B)i + C,$$

$$A = 1, \quad A + B = 0, \quad C = 0,$$

que resulta em $A = 1,\ B = -1$ e $C = 0$. Logo, podemos escrever $i^2 = i(i+1) - i$. Então

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} [i(i+1) - i] \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} C_{i+1}^{2} - \sum_{i=1}^{n} C_i^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2C^3_{n+2} - C^2_{n+1} \\
&= 2\frac{(n+2)(n+1)(n)}{6} - \frac{(n+1)n}{2} \\
&= n(n+1)\left[\frac{n+2}{3} - \frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Desmonstraremos afórmula cima usando o Princípio de Indução Finita. O caso $n = 1$ é imediato. $1 = \dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$. Suponha que o resultado é válido para $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

Demonstraremos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1].$$

Utilizando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\
&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

5 Contagem nos concursos de IFs

Neste capítulo, serão resolvidas uma série de questões de Matemática que foram cobradas em concursos para professor EBTT de instutos federais que envolvem ideias interessantes sobre a Análise Combinatória, o que possibilita a construção de novas técnicas de resolução e consequentemente a ampliação da capacidade de abstração e raciocínio.

5.1 Problemas, soluções e comentários

1. (CSEP - IFPI/2022) Em 2021, devido às restrições e às medidas de distanciamento social, locais com auditórios tiveram que se adaptar e reduzir o número de lugares disponiveis para o público. A direção de um teatro optou por não marcar as cadeiras indisponiveis, e sim, pedir ao público que escolham poltronas que não estejam próximas. Dessa forma, foi colocado um comunicado na porta de entrada do teatro: "NENHUM ESPECTADOR PODE SENTAR-SE AO LADO DE OUTRO, SOB NENHUMA HIPÓTESE". Se uma das fileiras desse teatro possui 16 poltronas alinhadas e consecutivas, de quantos modos 7 pessoas podem se distribuir nessa fileira, obedecendo o comunicado da direção do teatro?

a) 120

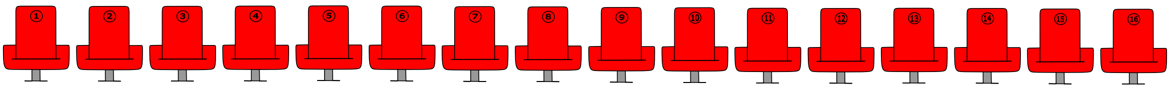
b) $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

c) 11 440

d) $3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

e) 8 008

Solução. Observando a figura abaixo, note que a questão consiste em calcular de quantos modos 7 pessoas podem se destribuir nessa fileira, sabendo que pessoas não podem se sentar em cadeiras consecutivas.



Por exemplo, uma forma das 7 pessoas serem distribuidas nas fileiras satisfazendo a hipótese da questão é se elas ficarem nas cadeiras 2, 4, 7, 9, 12, 14 e 16. Observe que para resolver o problema é necessário escolher sete números não consecutivos no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. Para facilitar o entendimento da solução desse problema, iremos usar a seguinte estratégia: Usaremos o símbolo de $(+)$ para representar que a cadeira está ocupada e o símbolo de $(-)$ para representar que a cadeira esta desocupada. Por exemplo, a representação de quando as cadeiras 2, 4, 7, 9, 12, 14 e 16 estão ocupadas é

$$(-)(+)(-)(+)(-)(-)(+)(-)(+)(-)(-)(+)(-)(+)(-)(+).$$

Note que nessa representação o símbolo $(-)$ aparece nove vezes e o símbolo $(+)$ aparece sete vezes. Então, considere a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 9, \tag{5.1}$$

em que $x_i \geq 0$ com $1 \leq i \leq 8$ é a quandidade de símbolos $(-)$ que aparecem entre dois símbolos de $(+)$. Note que que para quando as cadeiras 2, 4, 7, 9, 12, 14 e 16 estão ocupadas, a solução da equação (5.1) é $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, $x_6 = 1$, $x_7 = 1$ e $x_8 = 0$. Perceba que x_1 e x_8 podem ser iguais a zero, pois possivelmente não estarão entre duas cadeiras. Como no exemplo citado $x_1 = 1$ e $x_8 = 0$, já os números x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 não podem ser iguais a zero, pois cada um deles certamente estarão entre duas cadeiras ocupadas. Fazendo a substituição $x_i = x_i' + 1$ para $2 \leq i \leq 7$, obtemos,

$$x_1 + (x_2' + 1) + (x_3' + 1) + (x_4' + 1) + (x_5' + 1) + (x_6' + 1) + (x_7' + 1) + x_8 = 9,$$

simplificando a equação, temos

$$x_1 + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6' + x_7' + x_8 = 3.$$

Em que $x_1, x_2', x_3', x_4', x_5', x_6', x_7'$ e x_8 podem ser inteiros não negativos, usando os símbolos de $\bullet$ e $+$ para representar as soluções da equação, onde a bola azul significa que existe uma pessoa sentada na poltrona e a falta da bola azul antes, entre ou depois do símbolo de adição significa que não existe pessoa sentada na poltrona, por exemplo, para $x_1 = 1$, $x_2' = 1$, $x_3' = 0$, $x_4' = 1$, $x_5' = 0$, $x_6' = 0$, $x_7' = 0$ e $x_8 = 0$, temos a representação $+\bullet+\bullet+\bullet+$.

Para determinar todas as soluções da equação $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8 = 3$, devemos calcular todas as permutações da representação $+\bullet+++++++\bullet+$, que é dada por $P_{10}^{3,7} = \dfrac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$.

Portanto, a resposta do problema é o item a).

2. (IF Sertão - PE/2019) Uma lanchonete vende sucos com os respectivos sabores: acerola, maracujá, limão e laranja. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode comprar 6 copos de sucos nessa lanchonete?

a) 55

b) 70

c) 78

d) 84

e) 94

Solução. Denotamos por x a quantidade de copos de suco de acerola comprados, y a quantidade de suco de maracujá comprados, z a quantidade de copos de suco de limão comprados e w a quantidade de copos de suco de laranja comprados. Como essa pessoa deve comprar 6 copos de sucos devemos ter que $x+y+z+w=6$. Observe que as soluções dessa equação são números inteiros não negativos e perceba que $x=1$, $y=2$, $z=3$ e $w=0$ é uma solução particular dessa equação. Para determinar todas as soluções usaremos permutação com repetição. Para isso, observe que a solução $x=1$, $y=2$, $z=3$ e $w=0$ pode ser representada por $\bullet + \bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet\,+$, em que bolinha azul representa um copo de suco comprado e o sinal de adição separa os copos de sabores diferentes, a ausência de bolinha após o símbolo de adição significa que não tem copo de suco comprado do sabor W, além disso, qualquer outra solução pode ser representada por permutação dessas 6 bolas e desses 3 sinais de adição, portanto, para determinar todas as soluções do problema basta calcular o total de permutações da representação $\bullet + \bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet\,+$ que é dada por $P_9^{3,6} = \dfrac{9!}{3!\cdot 6!} = 84$ soluções. Portanto a resposta do problema é o item c).

3. (IF Sertão - PE/2019) Leia o texto abaixo:

"Depois de idas e vindas, a nova placa para os países do Mercosul finalmente começará a ser usada no Brasil. Inicialmente as novas placas serão usadas em veículos novos ou em automóveis que tiverem as placas atuais danificadas ou passarão por troca de categoria, transferência de proprietário, município ou estado."

Disponível em: <https://quatrorodas.abril.com.br/noticias/novo-padrao-deplacas-comecara-a-ser-usado-no-brasil-amanha/>

A imagem a seguir mostra o modelo de placa citado no texto.

Fonte: <https://seminovos.localiza.com/novas-placas-padrao-mercosul>

Pode-se observar que o novo padrão consiste em:

LETRA LETRA LETRA NÚMERO LETRA NÚMERO NÚMERO

Admitindo que numa determinada cidade todos os automóveis tenham suas placas iniciadas com a letra P, qual o número máximo de placas que podem ser formadas seguindo o padrão descrito acima?

a) $26! \cdot 10!$

b) $23^6 \cdot 10^4$

c) $3 \cdot 26 \cdot 3 \cdot 10$

d) $13^3 \cdot 20^3$

e) 260^2

Solução. Como as placas são iniciadas com a letra P, então os outros três espaços para as letras na placa podem ser preenchidos de 26 maneiras diferentes (26 letras do alfabeto) e os três espaços para números devem ser preenchidos de 10 maneiras diferentes (Algarismos de 0 a 10) conforme está ilustrado abaixo

1	26	26	10	26	10	10
P	LETRA	LETRA	NÚMERO	LETRA	NÚMERO	NÚMERO

Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o total de placas que se iniciam com a letra P é dado por $1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 \cdot 26^3$, observe que $10^3 \cdot 26^3 = 13^3 \cdot 20^3$. Portanto a resposta do problema é o item d).

4. (IDECAN - IFCE/2021) A soma de todos os números inteiros de três algarismos formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4, é

a) 1 110

b) 6 660

c) 16 650

d) 17 760

Solução. Note inicialmente que se o último algarismo for 1, temos

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Centena} & & \text{Dezena} & & \text{Unidade} & & \\ 4 & \times & 4 & \times & 1 & = & 16 \text{ Números} \end{array}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, temos que:

- 16 Números terminam em 2;
- 16 Números terminam em 3;
- 16 Números terminam em 4;

Efetuando a soma na classe de todas as unidades unidades possíveis, temos

$$\begin{aligned}\overbrace{1+\cdots+1}^{16\text{ números}}+\overbrace{2+\cdots+2}^{16\text{ números}}+\overbrace{3+\cdots+3}^{16\text{ números}}+\overbrace{4+\cdots+4}^{16\text{ números}} &= 1\cdot 16+2\cdot 16+3\cdot 16+4\cdot 16\\ &= (1+2+3+4)\cdot 16\\ &= 10\cdot 16\\ &= 160.\end{aligned}$$

De maneira análoga, teremos que a soma dos elementos das classes de todas as dezenas possíveis e todas as centenas possíveis também são 160, cada uma delas. Então, o resultado é $160 + 1\,600 + 16\,000 = 17\,760$. Portanto a resposta do problema é o item d).

5. (IFTO/2021) Em uma equação dada por,

$$\binom{x}{0}+3\binom{x}{1}+3^2\binom{x}{2}+\cdots+3^x\binom{x}{x}=1\,024.$$

determine o valor de x para que essa equação tenha solução.

a) 10

b) 12

c) 5

d) 6

e) 3

Solução. Relembre que $(a+b)^n=\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{n}a^{n-i}b^i$. Como na expressão

$$\binom{x}{0}+3\binom{x}{1}+3^2\binom{x}{2}+\cdots+3^x\binom{x}{x}$$

só aparecem os termos $3,\ 3^2,\ \ldots,3^x$, então temos que no binômio um dos termos deve ser 3 e, como o outro termos não aparece, ele deve ser igual a 1. Logo podemos deduzir que

$$\binom{x}{0}+3\binom{x}{1}+3^2\binom{x}{2}+\cdots+3^x\binom{x}{x}=(3+1)^x=4^x.$$

Para resolver essa última equação, temos

$$4^x=1\,024 \iff 2^{2x}=2^{10}\iff 2x=10\iff x=5.$$

Portanto a resposta do problema é o item c).

6. (CETRO - IFPR/2014) Usando os algarismos 0, 2, 3, 5, 6 e 8, é correto concluir que a quantidade de números ímpares formados com quatro algarismos distintos é

a) 120

b) 96

c) 78

d) 64

e) 55

Solução. Para resolver esse tipo de problema, temos que começar analisando quantos algarismos podem ocupar as posições que tem restrições. Para isso, observe que para determinar todos os números ímpares com quatro algarismos distintos usando os algarismos 0, 2, 3, 5, 6 e 8 temos que obrigatoriamente o algarismo das unidades deve ser ímpar e o algarismo de milhar deve ser diferente de zero. Então, para resolver o problema, note que o algarismo das unidades pode ser preenchido de duas formas, 3 ou 5, o algarismo de milhar pode ser prenchido de quatro formas, pois ele tem que ser diferente de zero e não pode ser o algarismo escolhido nas unidades. O algarismo da centena pode ser escrito de quatro formas, pois ele não pode ser o algarismo escolhido para a unidade e milhar, mas pode ser o zero. O algarismo das dezenas pode ser escrito de três formas já que ele não pode ser o algarismo escolhido nas outras classe. Então note que

	Milhar	Centena	Dezena	Unidade
Possiblidades	4	4	3	2

Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o toral de números é $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ números. Portanto a resposta do problema é o item b).

7. (CETRO - IFPR/2014) Uma pessoa pretende guardar na prateleira da garagem de sua casa 8 garrafas retornáveis, sendo 3 garrafas de refrigerante diferentes; 2 garrafas de sucos diferentes e 3 garrafas de cervejas de marcas distintas. As garrafas serão colocadas uma ao lado da outra. Assinale a alternativa que apresenta a quantidade de maneiras que elas podem ser colocadas na prateleira de modo que as 3 garrafas dos refrigerantes sempre fiquem juntas.

a) 5 040

b) 4 320

c) 2 160

d) 1 540

e) 720

Solução. Para a resolução dessa questão, observe que as garrafas de refrigerantes devem permanecer juntas, mas podem permutar entre si de $P_3 = 3! = 6$ maneiras. Note que poderiamos considerar essas três garrafas como um único objeto e permutar ela com as duas garrafas de sucos diferentes e com as três garrafas de cervejas diferentes totalizando seis objetos que vão se permutar de $P_6 = 6! = 720$ maneiras. Agora note que em cada uma das permutações dos sete elementos, podemos ainda permutar as garrafas de refrigerantes que devem ficar juntas para então obter o total de maneiras de orgazinar essas garrafas. Então basta fazer $P_3 \cdot P_6 = 6 \cdot 720 = 4\,320$ maneiras de organizar essas garrafas. Portanto a resposta do problema é o item b).

8. (IFPI/2017) Certa Instituição Financeira decidiu que em todas as transações realizadas em seus caixas eletrônicos será exigida a digitação de um código de acesso, que será gerado automaticamente pelo sistema, formado por uma sequência de três letras em que o usuário vai digitar na tela do caixa eletrônico para autorizar a transação. Quantos códigos de acesso podem ser gerados, sabendo que podem ser utilizadas quaisquer das 26 letras do alfabeto da língua portuguesa e que não podemos ter letras consecutivas repetidas?

a) 15 576

b) 16 900

c) 16 250

d) 11 132

e) 12 167

Solução. Para resolver esse problema, observe que para a primeira letra existem 26 opções, para a segunda letra só existem 25 opções, pois a letra digitada não pode ser igual a letra que foi digitada primeiro e para a terceira opção de letra ele não pode repetir a letra que foi digitada anteriomente mas pode repetir a primeira letra, logo ele tem 25 opções. Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o total de senhas é dado por $26 \cdot 25 \cdot 25 = 16\,250$ senhas. Portanto a resposta do problema é o item c).

9. (IFMS/2016) Dados os números $\{1, 3, 5, 7 \text{ e } 9\}$, quantos números de 5 (cinco) algarismos distintos podemos formar, de modo que os números 1 e 3 nunca fiquem juntos e os números 5 e 7 sempre ocupem posições lado a lado.

a) 42

b) 24

c) 18

d) 28

e) 36

Solução. Para resolver essa questão, vamos distribuir os algarismos 1 e 3, conforme abaixo

$$\_\_\_\_ \; 1 \; \_\_\_\_ \; 3 \; \_\_\_\_$$

Note que o espaço entre 1 e 3 deve ser obrigatoriamente prenchido. Listaremos algumas possibilidades de como os outros números podem ser distribuídos.

- $1\,\boxed{57}\,3\,\boxed{9}$
- $\boxed{9}\,1\,\boxed{57}\,3$
- $1\,\boxed{9}\,3\,\boxed{57}$
- $\boxed{57}\,1\,\boxed{9}\,3$
- $1\,\boxed{9}\,\boxed{57}\,3$
- $1\,\boxed{57}\,\boxed{9}\,3$

Agora note que para cada uma dessas possibilidades podemos trocar as posições dos algarismos 1 e 3. Essa decisão pode ser feita de $P_2 = 2$ maneiras e podemos também trocar as posições dos algarismos 5 e 7. Tal decisão pode ser feita de $P_2 = 2$ maneiras, portanto, para determinar o total de maneiras de distribuir esses algarismos basta multiplicar as seis possibilidades por $2! \cdot 2! = 4$, totalizando $4 \times 6 = 24$ formas de distribuir esses algarismos. Logo a resposta do problema é o item b).

10. (IFMS/2016) Uma pessoa possuía certo número de objetos. Agrupando-os 4 a 4, de modo que cada grupo possua pelo menos um objeto diferente do outro, obtém-se o mesmo número de grupos que se os agrupasse 6 a 6, de modo idêntico. Quantos objetos possuía?

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

e) 12

Solução. Note que este problema trata-se de uma combinação de n objetos, combinados de tal forma que $C_n^4 = C_n^6$, logo

$$C_n^4 = C_n^6 \Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{6!(n-6)!} \Leftrightarrow 4!(n-4)! = 6!(n-6)! \Leftrightarrow n^2 - 9n - 10 = 0.$$

Agora é fácil verificar que as soluções da equação $n^2 - 9n - 10 = 0$ são $n_1 = 10$ e $n_2 = -1$ (não serve, ja que n é uma quantidade de objetos.). Portanto essa quantidade de objetos é 10 e a resposta para o problema é o item d).

11. (IFMS/2016) Em um restaurante que serve refeições por quilo tem-se 6 opções de pratos quentes (arroz com brócolis, lasanha de presunto e queijo, nhoque de espinafre, risoto de abóbora, penne quatro queijos e risoto de aspargo) e 4 opções de carnes (peixe, carne suína, frango e carne bovina). Quantas opções os clientes podem escolher montando o prato com 5 itens distintos, de sorte que contenha ao menos 2 opções de carnes?

a) 252

b) 318

c) 120

d) 186

e) 116

Solução. Para que o cliente tenha no mínimo 2 opções de carnes, ele pode montar seu prato das seguintes meneiras

- Três tipos de pratos quentes e dois tipos de carnes.
- Dois tipos de pratos quentes e três tipos de carnes.
- Um tipo de prato quente e quatro tipos de carnes.

Agora note que para escolher três tipos de pratos quentes e dois tipos de carnes, esse cliente pode fazer essa escolha de $C_6^3 \cdot C_4^2$. Para o cliente escolher dois tipos de pratos quentes e três tipos de carnes, ele pode fazer essa escolha de $C_6^2 \cdot C_4^3$ maneiras diferentes e para o cliente escolher um tipo de prato quente e quatro tipos de carnes, ele pode fazer essa escolha de $C_6^1 \cdot C_4^4$. Logo, o total de pratos que esse cliente pode montar é

$$C_6^3 \cdot C_4^2 + C_6^2 \cdot C_4^3 + C_6^1 \cdot C_4^4 = 20 \cdot 6 + 15 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 120 + 60 + 6 = 186.$$

Portanto a resposta do problema é o item d).

12. (MSCONCURSOS - IFAM/2014) De quantas maneiras diferentes podemos dispor uma equipe de 5 alunos numa sala de aula que tem 10 carteiras?

a) 3 628 800

b) 30 240

c) 500

d) 252

e) 120

Solução. Note que para escolher as carteiras, podemos fazer essa ação de C_{10}^{5} maneiras. Agora perceba que escolhidas as cadeiras devemos destribuir os alunos nessas cadeiras e essa ação pode ser realizada de P_5 maneiras. Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o total de possibilidades para realizar essa atividade é dada por $C_{10}^{5} \cdot P_5 = 252 \cdot 120 = 30\,240$ maneiras. Portanto a resposta do problema é o item b).

13. (FUNCERN - IFRN/2017) Na praça de alimentação de um shopping, um restaurante possibilita a seus clientes a composição de seus pratos com os seguintes elementos: tipo de massa, tipo de molho e acompanhamentos. O cliente, além de escolher um tipo de massa preferido, pode escolher até dois tipos de molhos distintos e deve optar, exatamente, por quatro acompanhamentos diferentes.

Se o restaurante oferece em seu cardápio quatro tipos de massa, três tipos de molho e sete tipos de acompanhamento, o número de maneiras distintas que um cliente pode montar o seu prato é de

a) 840.

b) 1 260.

c) 980.

d) 1 420.

Solução. Como o cliente pode escolher até dois tipos de molhos distintos, ele pode montar seu prato das seguintes meneiras:

- Um tipo de massa, nenhum tipo de molho e quatro acompanhamentos diferentes;
- Um tipo de massa, um tipo de molho e quatro acompanhamentos diferentes;
- Um tipo de massa, dois tipos distintos de molho e quatro acompanhamentos diferentes.

Agora note que para escolher um tipo de massa, nenhum tipo de molho e quatro acompanhamentos diferentes esse cliente pode fazer essa escolha de $C_4^1 \cdot C_3^0 \cdot C_7^4$. Para o cliente escolher um tipo de massa, um tipo de molho e quatro acompanhamentos diferentes, ele pode fazer essa escolha de $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_7^4$ maneiras diferentes e para o cliente escolher um tipo de massa, dois tipos distintos de molho e quatro acompanhamentos diferentes, ele pode fazer essa escolha de $C_4^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^4$. Logo, o total de pratos que esse cliente pode montar é

$$C_4^1 \cdot C_3^0 \cdot C_7^4 + C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_7^4 + C_4^1 \cdot C_3^2 \cdot C_7^4 = 140 + 420 + 420 = 980.$$

Portanto a resposta do problema é o item c).

14. (IFSC/2013) Determine o valor da soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x - y)^{10}$.

a) 1 022

b) 1 023

c) 1 025

d) 1 024

e) 1 021

Solução. Note que para obter a soma dos coeficientes de $(3x - y)^{10}$ basta fazer $x = y = 1$. Substituindo x por 1 e y por 1, temos

$$(3 \cdot 1 - 1)^{10} = (3 - 1)^{10} = 2^{10} = 1\,024.$$

Portanto a resposta do problema é o item d).

15. (FUNIVERSA - IFB/2012) Assinale a alternativa que apresenta a quantidade de maneiras diferentes com que um aluno pode vestir-se considerando que ele tenha 4 camisetas, 2 calças, 3 pares de meias e 3 pares de tênis e utilize simultaneamente apenas uma camiseta, uma calça, um par de meias e um par de tênis.

a) 72

b) 24

c) 18

d) 9

e) 8

Solução. Note que esse aluno deve tomar quatro decisões. A primeira decisão é escolher qual camisa ele vai usar, o que pode ser feito de 4 maneiras diferentes. A segunda decisão que ele deve tomar é escolher qual calça que ele vai vestir, note que ele pode escolher sua calça de 2 maneiras diferentes. A terceira decisão é escolher o par de meias, essa decisão pode ser feita de 3 maneiras diferentes e a quarta decisão, ele deve escolher seu tênis e essa escolha pode ser feita de 4 formas diferentes. Agora pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos que o total de maneiras desse aluno se vestir é dado por $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$. Portanto a resposta do problema é o item a).

16. (COPEMA - IFAL/2011) Considere um grupo de servidores do IFAL formado por 7 homens (entre os quais RICHARD) e 5 mulheres (entre as quais MARY), do qual se que formar uma banca de concurso constituída por 4 pessoas. O número de bancas formadas por 2 homens, entre os quais RICHARD, e 2 mulheres, mas sem incluir MARY, é

a) 120

b) 36

c) 30

d) 210

e) 18

Solução. Para resolver esse problema, devemos tomar duas decisões. A primeira decisão é escolher um homem entre seis disponíveis já que a banca deve ser composta por dois homens e um desses homens deve ser Richard então sobram seis homens. Devemos escolher também um deles. Logo tal essa decisão pode ser tomada de $C_6^1 = 6$ maneiras. Agora vamos tomar a segunda decisão que é escolher duas mulheres sem incluir Mary, como o total de mulheres é cinco então devemos escolher duas de quatro que estão disponíveis e isso pode ser feito de $C_4^2 = 6$ maneiras. Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o número de bancas é dado por $6 \cdot 6 = 36$. Portanto a resposta do problema é o item b).

17. (COPEMA - IFAL/2011) Quantos números distintos podemos formar permutando-se todos os algarismos do número 1234567, de modo que o algarismo que ocupa o lugar de ordem k, da esquerda para a direita, é sempre maior que o elemento que ocupa o lugar de ordem $k - 3$?

a) 5.040

b) 2.520

c) 24

d) 144

e) 210

Solução. Observe que o algarismo de ordem k é maior que o algarismo de ordem $k-3$. Então temos as seguintes desigualdes

4º Algarismo < 7º Algarismo

3º Algarismo < 6º Algarismo

2º Algarismo < 5º Algarismo

1º Algarismo < 4º Algarismo

Observe que a primeira e a última desigualdades devem ocorrer simultaneamente. Assim, restam apenas três condições.

1º Algarismo < 4º Algarismo < 7º Algarismo

3º Algarismo < 6º Algarismo

2º Algarismo < 5º Algarismo

Para resolver esse problema vamos analisar as possibilidades de escolhas dos algarismos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ satisfazendo as desigualdades anteriores. Para a primeira desigualdade devemos escolher três números no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e distribuir esses números em ordem crescente nos algarismos 1º, 4º e 7º. Essa primeira decisão pode ser feita de $C_7^3 = 35$ maneiras. Depois devemos escolher os números do 3º algarismo e 6º algarismo. Note que temos que escolher dois números entre quatro números disponíveis e depois de escolhidos colocar em ordem crescente e isso pode ser feito de $C_4^2 = 6$ maneiras. Agora temos que escolher e colocar em ordem crescente dois números entre dois números disponíveis para os algarismos 2º e 5º e isso pode ser feito de $C_2^2 = 1$ maneira. Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o total de formas de obter os números é $35 \cdot 6 \cdot 1 = 210$. Portanto a resposta do problema é o item e).

18. (IFRS/2016) Numa caixa há 35 bolas numeradas de 01 a 35. São retiradas dessa caixa 3 bolas, sem reposição, com as numerações x, y e z. O número de possibilidades para que $x + y + z$ seja um número par é:

a) 5 865

b) 6 545

c) 5 729

d) 3 281

e) 3 420

Solução. É fácil ver que a soma de três números será par somente quando esses três números são números pares ou quando dois deles são números ímpares e o outro é par. Portanto, temos que analisar dois casos. Para isso note que de 1 à 35 existem dezoito números ímpares e dezessete números pares. Então, para o primeiro caso, devemos escolher três de dezessete números pares e isso pode ser feito de $C_{17}^{3} = 680$ maneiras. Agora para o segundo caso, devemos escolher dois números ímpares de dezoito disponíveis e um número par de dezessete disponíveis. Essa decisão pode ser feita de $C_{18}^{2} \cdot C_{17}^{1} = 2\,601$ maneiras. Portanto, o total de formas de escolher esses números é de $680 + 2\,601 = 3\,281$ maneiras de escolha. Logo, a resposta do problema é o item d).

19. (IFPE/2014) Numa reunião, estão presentes 10 pessoas, dentre elas, Ana e três desafetos seus: Bruno, Carlos e Díogo. De quantas maneiras diferentes pode ser formada uma comissão com 5 pessoas desse grupo, se Ana não admite estar em uma comissão com qualquer um de seus três desafetos citados?

a) 128.

b) 162.

c) 141.

d) 108.

e) 157.

Solução. Para resolver esse problema, temos dois casos a serem analisados: Ana fazendo parte da comissão e Ana não fazendo parte da comição. Para o primeiro caso como Ana já faz parte da comissão e a comissão deve ter cinco pessoas, então devemos escolher quatro pessoas de seis pessoas, já que incialmente tínhamos dez pessoas mas foi retirado Ana e os seus três desafetos. Portanto, o total de comissões em que Ana faz parte é dado por $C_{6}^{4} = 15$ comissões. Agora para o segundo caso, vamos determinar o total de comissões em que Ana não participa. Note que os três desafetos de Ana podem participar da comissão. Como devemos escolher cinco pessoas dentre nove disponíveis, o total de comissões em que Ana não faz parte é dado por $C_{9}^{5} = 126$. Então o total de comissões é dado por $15 + 126 = 141$ comissões. Portanto a resposta do problema é o item c).

20. (IFPE/2014) De quantas maneiras é possivel organizar 6 homens e 3 mulheres em uma fila, de modo que as mulheres fiquem separadas, ou seja, entre duas mulheres exista pelo menos um homem?

a) 151 200

b) 362 880

c) 4 320

d) 30 240

e) 332 640

Solução. Observe que podemos organizar os homens e mulheres como na figura abaixo

Figura 11 – Fila de Pessoas - A

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Note na outra imagem abaixo, que essa fila pode ser organizada de outra maneira

Figura 12 – Fila de Pessoas - B

Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Vamos distribuir os homens em fila da seguinte maneira:

$$\_\_\_\_ \ H_1 \ \_\_\_\_ \ H_2 \ \_\_\_\_ \ H_3 \ \_\_\_\_ \ H_4 \ \_\_\_\_ \ H_5 \ \_\_\_\_ \ H_6 \ \_\_\_\_$$

Perceba que as mulheres devem ocupar três desses sete espaços, então devemos escolher esses três espaços de $C_7^3 = 35$ maneiras. Note que depois de determinadas as posições do homens e mulheres na fila, os mesmos podem permutar suas posições os homens podem permutar de $P_6 = 720$ maneiras. As mulheres podem permutar de $P_3 = 6$ maneiras. Agora podemos aplicar o Princípio Fundamental da Contagem, obtendo assim $35 \cdot 720 \cdot 6 = 151\,200$

maneiras de formar essa fila com as regras propostas no enuciado do problema. Portanto a resposta do problema é o item a).

21. (FUNCERN - IFRN/2017) No desenvolvimento do binômio $\left(\frac{1}{b^2}+ab\right)^7$, o valor de a, para que o coeficiente de b^4 seja 28, é

a) $\sqrt[5]{3}$.

b) $\sqrt[3]{2}$.

c) $\sqrt[6]{2}$.

d) $\sqrt[4]{3}$.

Solução. Recorde que no binômio $(a+b)^n$ o termos geral é dado por $T_{i+1} = \binom{n}{i}a^{n-i}b^i$. Então aplicando essa definição do termo geral ao binômio $\left(\frac{1}{b^2}+ab\right)^7$, temos

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= \binom{7}{i}\left(\frac{1}{b^2}\right)^{7-i}(ab)^i \\ &= \binom{7}{i}a^i b^{3i-14} \end{aligned}$$

Como o exponte de b é igual a 4, logo devemos ter que $3i-14=4$ o que resulta em $i=6$. Aplicando $i=6$ no termo geral do binômio, temos

$$\begin{aligned} T_{6+1} = T_7 &= \binom{7}{6}a^6 b^{3\cdot 6-14} \\ &= 7a^6b^4 \end{aligned}$$

Como o coeficiente de b^4 é 28, logo chegamos na seguinte igualdade

$$7a^6 = 28 \iff a^6 = 4 \iff a = \sqrt[6]{4} \iff a = \sqrt[3]{2}.$$

Portanto a resposta do problema é o item b).

22. (IFPE/2014) Oito amigos vão acampar e levam 4 barracas idênticas. De quantos modos eles podem se distribuir, licando dois por barraca?

a) 50

b) 2 520

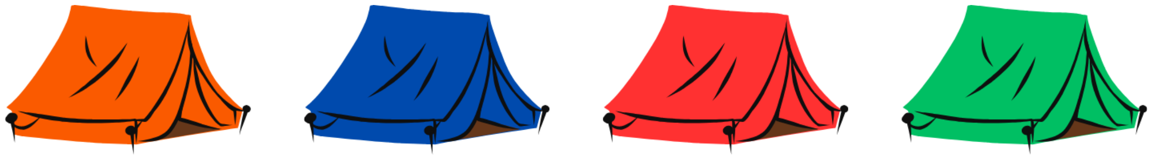
c) 40 320

d) 20 160

e) 105

Solução. Considere as barracas em cores distintas (Laranja, Azul, Vermelho e Verde) conforme a figura abaixo

Figura 13 – Problema das barracas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2024

Note que para resolver esse problema devemos tormar quatro decisões que estão listadas a sergir.

Decisão 1: Escolher dois amigos para ficar na barraca laranja.

Decisão 2: Escolher dois amigos para ficar na barraca azul.

Decisão 3: Escolher dois amigos para ficar na barraca vermelha.

Decisão 4: Escolher dois amigos para ficar na barraca verde.

Agora observe que a primeira decisão pode ser tomada de $C_8^2 = 28$ maneiras. Tomada a primeira decisão, a segunda decisão pode ser tomada de $C_6^2 = 15$ maneiras. Agora devemos tomar a terceira decisão que pode ser feita de $C_4^2 = 6$ maneiras. Por último tomemos a quarta decisão que pode ser feita de $C_2^2 = 1$. Agora, aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o total de possibilidades de distribuir esses oito amigos nas barracas é de $28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 2\,520$. Portanto a resposta do problema é o item b).

23. (IDECAN - IFAC/2024) Joana quer saber quantas senhas é possível formar utilizando duas letras do seu nome e os quatro dígitos do ano do seu nascimento, que é 1983.

a) 288 senhas

b) 1 440 senhas

c) 4 096 senhas

d) 32 000 senhas

Solução. Note que para Joana criar essa senha ela deve toma duas decisões. A primeira decisão é escolher duas letras entre as letras A, O, N e J. Essa decisão pode ser tomada de $4 \cdot 3 = 12$ maneiras. A segunda decisão é escolher o número gerado pela permutação dos algarismos 1, 3, 8 e 9. Essa decisão pode ser tomada de $P_4 = 24$ maneiras. Agora aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o total de senhas que Joana pode criar é dado por $12 \cdot 24 = 288$ senhas. Portanto a resposta do problema é o item a).

24. (IDECAN - IFAC/2024) Uma empresa possui 10 gerentes e deseja formar uma comissão com 4 deles. No entanto, há duas restrições: dois dos gerentes, Ana e Bruno, não podem participar juntos na mesma comissão. Carlos, outro gerente, deve estar obrigatoriamente na comissão. Calcule quantas comissões diferentes podem ser formadas sob essas condições.

a) 42.

b) 77.

c) 84.

d) 105.

Solução. O total de comissões em que Carlos figura é dado por $C_9^3 = 84$ comissões. Note que nessas 84 comissões foram contadas comissões em que Ana e Bruno figuram juntos. Sendo assim, vamos subtrair essas comissões em que sabemos que Carlos, Ana e Bruno figuram nelas. O total de comissões em que Carlos, Ana e Bruno figuram é dado por $C_7^1 = 7$ comissões. Logo, a resposta para o problema é dado por $84 - 7 = 77$ comissões. Portanto, a resposta do problema é o item b).

25. (CSEP - IFPI/2019) Um famoso jogador de futebol tem uma coleção de chuteiras que ele só usa em finais de copas. Desta forma, ele possui 7 pares iguais do modelo A, 8 do modelo B e 10 do modelo C. Sabendo que o time pelo qual joga disputará a final da Copa dos Campeões neste final de semana, de quantas maneiras o atleta poderá formar um conjunto não vazio de pares de chuteiras para levar ao estádio?

a) 560 maneiras.

b) 792 maneiras.

c) 791 maneiras.

d) 456 maneiras.

e) 789 maneiras.

Solução. São 7 pares iguais do modelo A, 8 pares iguais do modelo B e 10 pares iguais do modelo C. Como os pares são iguais dentro de cada modelo. Portanto, não precisamos determinar quais chuteiras serão selecionadas, mas sim quantas de cada modelo o jogador irá escolher.

- Para o modelo A, há 8 possibilidades de escolha: ou o atleta não leva nenhum par, ou leva 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7.
- Para o modelo B, são 8 possibilidades de escolha: ou o atleta não leva nenhum par, ou leva 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8.
- Para o modelo C, são 11 possibilidades de escolha: ou o atleta não leva nenhum par, ou leva 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o total de conjuntos será dado por

$$8 \cdot 9 \cdot 11 = 792$$

Mas como se pede o total de conjuntos não vazios, devemos descontar o caso em que ele não escolheu nenhum modelo de chuteira, obtendo assim

$$792 - 1 = 791 \text{ maneiras.}$$

Portanto a resposta do problema é o item c).

26. (CSEP - IFPI/2019) Numa loteria fictícia, o sorteio se dá na escolha aleatória de 4 números dentre os inteiros de 1 a 25. A quantidade de sorteios nos quais os números sorteados não são inteiros consecutivos é

a) 7 536 sorteios.

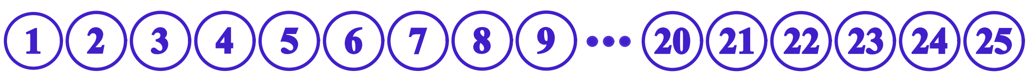
b) 12 650 sorteios.

c) 13 454 sorteios.

d) 1 568 sorteios.

e) 7 315 sorteios.

Solução. Veja que as 25 bolas do sorteio podem ser organizadas de forma enumerada conforme a figura abaixo:



Note que o nosso problema problema é selecionar quatro bolas tais que os números das bolas não podem ser consecutivos dois a dois. Então considere as bolas de numeração X, Y Z e W, onde $X < Y < Z < W$. Agora veja a ilustração abaixo

____ X ____ Y ____ Z ____ W ____

Note que podemos destribuir as 21 bolas retantes nos cinco espaços da figura acima das maneiras descritas a seguir.

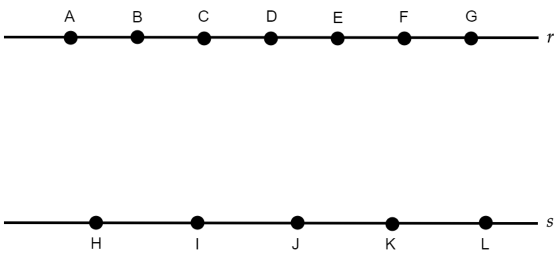
- A esquerda da bola X podemos colocar uma quantidade Q_1 de bolas, onde $Q_1 \in \mathbb{Z}_+$.
- Entre as bolas X e Y, podemos colocar uma quantidade $Q_2 + 1$ de bolas, onde $Q_2 \in \mathbb{Z}_+$.
- Entre as bolas Y e Z, podemos colocar uma quantidade $Q_3 + 1$ de bolas, onde $Q_3 \in \mathbb{Z}_+$.
- Entre as bolas Z e W, podemos colocar uma quantidade $Q_4 + 1$ de bolas, onde $Q_4 \in \mathbb{Z}_+$.
- A direita da bola W, podemos colocar uma quantidade Q_5 de bolas onde $Q_5 \in \mathbb{Z}_+$.

Realizando o cálculo diretamente, obtemos a seguinte equação $Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+Q_5 = 18$, em que Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 e $Q_5 \in \mathbb{Z}_+$. Para resolver essa esquação vamos usar permutação repetição. Note que temos 18 bolinhas ($\bullet$) e 4 sinais de ($+$) para permutar. Logo o total de permutações é dado por

$$P_{22}^{4,18} = \frac{22!}{4! \cdot 18!} = 7\,315 \text{ maneiras.}$$

Portanto a resposta do problema é o item e).

27. (IFSC/2013) Considere duas retas, r e s. Na reta r , foram marcados 7 pontos, $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ e na reta s , foram marcados 5 pontos, $\{H, I, J, K, L\}$, conforme a figura. Quantos triângulos serão possíveis encontrar unindo 3 pontos quaisquer das duas retas?



a) 220

b) 150

c) 200

d) 190

e) 175

Solução. Note que para determinar um triângulo com esses pontos precisamos fazer a escolha de três pontos não alinhados. Então, devemos escolher dois pontos de uma reta e um ponto da outra reta. Note que podemos escolher dois pontos em r e um ponto em s de

$$C_2^7 \cdot C_1^5 = 21 \cdot 5 = 105 \text{ maneiras,}$$

Note que podemos escolher dois pontos em s e um ponto em r de

$$C_2^5 \cdot C_1^7 = 10 \cdot 7 = 70 \text{ maneiras.}$$

Portanto, o total de triângulos possíveis de encontrar unindo três pontos é dado por $105 + 70 = 175$. Portanto a resposta do problema é o item e).

28. (FADESP - IFPA/2018) Um linhão de transmissão elétrica é composto de seis fios. Dois pássaros distintos pousam nos fios. O número de configurações possíveis para o pouso dos dois pássaros nos fios é de

a) 36.

b) 30.

c) 42.

d) 18.

e) 72.

Solução. Note que o primeiro pássaro pode escolher um de seis fios disponivéis. Já o segundo passáro também dispõe de seis fios para pousar (os pássaros podem ocupar o mesmo fio). Então, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de configurações possíveis para o pouso dos dois pássaros é $6 \cdot 6 = 36$. Portanto a resposta do problema é o item a).

29. (IF SUL/2014) Um professor de matemática possui 3 livros de Álgebra Linear, 5 livros de Funções e 7 livros de Estatística. Considerando que esses livros são de autores diferentes, ao colocar todos em uma mesma prateleira, sendo que os de mesmo assunto devem ficar juntos, o número máximo de possibilidades que ele tem para dispor esses livros será

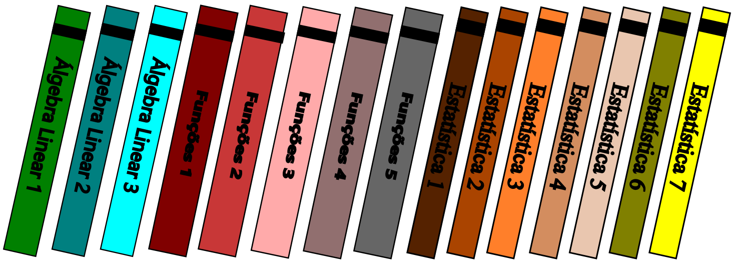
a) 21 772 800

b) 3 628 800

c) 10 886 400

d) 7 257 600

Solução. Observe, na figura a seguir, um exemplo de como distribuir esses livros.



Veja que os livros foram distribuídos por disciplina. Primeiro foram os livros de Álgebra Linear, depois os livros de Funções e por útimo os livros de Estatística. Note que esta ordem de livros por disciplina poderia ser alterada de $P_3 = 3! = 6$ maneiras. Note que quando estamos organizando os livros por disciplina, podemos também permutar suas ordens. Por exemplo, os livros de Álgebra Linear poderiam ser organizados na seguinte ordem, o primeiro livro de Álgebra Linear 2, o segundo livro seja de Álgebra Linear 3 e o terceiro livro seja de Álgebra Linear 1. Então devemos tomar quatro decisões, a primeira decisão é a de como podemos organizar os livros por disciplina que pode ser tomada de P_3 maneiras, a segunda decisão é de como devemos orgazinar os três livros de Álgebra Linear que pode ser tomada de P_3 maneiras, a terceira decisão é de como devemos orgazinar os cinco livros de Funções que pode ser tomada de P_5 maneiras e a quarta decisão é de como devemos orgazinar os sete livros de Estatística que pode ser tomada de P_7 maneiras. Agora, aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o total de possibilidades de organizar os livros é dado por

$$P_3 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_7 = 3! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 7! = 21\,772\,600 \text{ possibilidades.}$$

Portanto, a resposta do problema é o item a).

30. (FSADU - IFMA/2015) Considere um baralho comum de 52 cartas, divididas igualmente em quatro naipes (paus, ouros, espadas e copas). Sacam-se, sucessivamente e sem reposição 2 cartas. De quantos modos isso pode ser feito, se a primeira carta deve ser de paus e a segunda não pode ser um ás?

a) 576.

b) 672.

c) 624.

d) 611.

e) 612.

Solução. Para resolver esse problema, devemos organizar em dois casos, quando a primeira carta é um ás de paus e quando a primeira carta é de paus mas não é um ás. No primeiro caso temos que para a primeira carta ser ás de paus só existe uma possibilidade. Para a segunda carta não ser ás temos 48 possibilidades. Então para escolher essas cartas existem $1 \cdot 48 = 48$ maneiras. Já para o segundo caso, para escolher a primeira carta ela deve ser de paus e não ser um ás. Portanto existem 12 possibilidades e para a segunda carta não ser ás temos 48 possibilidades. Logo para escolher essas cartas existem $12 \cdot 48 = 576$ maneiras. Segue então que o total de modos de escolha dessas cartas é $48 + 576 = 624$ modos. Portanto a resposta do problema é o item c).

Considerações Finais

Este trabalho apresentou um estudo detalhado das principais técnicas de contagem que podem ser utilizadas por alunos que desejam se aprofundar, visando a preparação para vestibulares e concursos, oferecendo ferramentas essenciais para a resolução de problemas matemáticos. Além disso, o conteúdo também é direcionado a professores que buscam se especializar, focando em concursos para professores de matemática dos Institutos Federais ou outros concursos. Os conceitos fundamentais, como permutações e combinações, foram discutidos, assim como suas aplicações em problemas reais extraídos de provas desses concursos.

A partir da análise realizada, fica evidente que a compreensão profunda desses tópicos é essencial para os candidatos que desejam se destacar nas provas. O domínio das técnicas combinatórias não só contribui para a resolução eficaz dos problemas, mas também fortalece o raciocínio lógico e a capacidade de raciocínio matemático diante de outros problemas.

Dessa forma, este trabalho atinge seu objetivo de oferecer uma base sólida para professores e estudantes que desejam aprimorar seus conhecimentos em técnicas de contagem, contribuindo para a preparação em concursos na área de matemática. Espera-se que o conteúdo apresentado aqui seja uma referência útil para estudos futuros e inspire o desenvolvimento de novos recursos educacionais voltados ao aprendizado e ensino da matemática.

Referências

BRASIL. *Orientações Educacionais aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN'S), Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, 1998.

CAMINHA, A. *Tópicos de Matemática Elementar - Vol. 1. Números Reais*. [S.l.]: SBM, 2011.

CAMINHA, A. *Tópicos de Matemática Elementar - Vol. 4: Combinatória*. [S.l.]: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2024.

CARNEIRO, E.; CAMPUS, O.; PAIVA, M. *Olimpíadas Cearenses de Matemática, 1981-2005, Nível Médio*. Rio de Janeiro/RJ: SBM, 2014.

CORRÊA, F. J. S. D. A. *Introdução à Análise Real*. Belém, 2008.

DANTAS, C. A. B. *Probabilidade: Um Curso Introdutório*. São Paulo/SP: Edusp, 2013.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. Rio de Janeiro: ÁTICA, 2004. v. 2.

EVES, H. *An Introduction to the History of Mathematics*. [S.l.]: Saunders College Publishing, 1990.

FRANCO, T. F. S. *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro/RJ: IMPA, 2020.

HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática Elementar*. Rio de Janeiro/RJ: ATUAL, 2013. v. 5.

HOLANDA, E. C. B. *Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra*. first. Rio deJaneiro,/RJ: impa, 2018. v. 1. (Círculos de Matemática da OBMEP, v. 1).

LIMA, E. L. *Análise Real*. 13. ed. Rio de Janeiro: Editora da Universidade de São Paulo, 2020. 216 p. ISBN 978-65-990528-5-9.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. 320 p. ISBN 9788524404689.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.

LIMA, V. B. *Demonstração de Identidades Combinatórias com Teoria de Contagem*. 2009. Trabalho de Conclusão de Curso), UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais), Belo Horizonte/MG, Brazil.

LOPES, M. S. *Triângulo de Pascal: História, algumas de suas aplicações e uma proposta didática para o ensino*. Dissertação (Monografia (Licenciatura em Matemática)) — Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, 2018. Orientador: Prof. Me. Rogerio dos Santos Carneiro.

MORGADO, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro/RJ: SBM, 2016.

OBMEP. *Provas e Soluções*. 2023. <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. [Online; Acesso em: 9 jun. 2024.].

ROSEN, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2011.

SANTOS, J. P. de O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro/RJ: Ciência Moderna, 2007.

STANLEY, R. P. *Enumerative Combinatorics: Volume 1*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.

STEWART, J. *Calculus: Early Transcendentals*. 8th. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2016. ISBN 978-1285741550.

STILLWELL, J. *Mathematics and its History*. [S.l.]: Springer, 2013.

USPENSKI, V. *Triângulo de Pascal*. São Paulo: Mir. Moscou, 1978.