UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GEOMETRIA ESPACIAL: UM ESTUDO SOBRE OS TÓPICOS MAIS ABORDADOS NAS QUESTÕES DO ENEM DOS ANOS 2009 A 2023.

OTÁVIO DIONÍSIO GONÇALVES NETO

Juazeiro do Norte - CE
2024

OTÁVIO DIONÍSIO GONÇALVES NETO

GEOMETRIA ESPACIAL: UM ESTUDO SOBRE OS TÓPICOS MAIS ABORDADOS NAS QUESTÕES DO ENEM DOS ANOS 2009 A 2023.

Dissertação de Mestrado apresentada junto ao programa de **Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT** do **Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri**, como requisito parcial à obtenção do título de **Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica**.

Orientadora:

profª. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.

Juazeiro do Norte - CE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

G635g Gonçalves Neto, Otávio Dionísio.
Geometria espacial: um estudo sobre os tópicos mais abordados nas questões do Enem dos anos 2009 a 2023 / Otávio Dionísio Gonçalves Neto. - 2024.
92 f. il. color.; 30 cm.
(Inclui bibliografia, p. 92- 94).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2024.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.

1. Geometria espacial. 2. Cálculo de volume. 3. Matemática- Enem. I. Costa, Maria Silvana Alcântara - orientadora. II. Título.

CDD 516

Bibliotecária: Maria Eliziana Pereira de Sousa – CRB 15/564

OTÁVIO DIONÍSIO GONÇALVES NETO

GEOMETRIA ESPACIAL: UM ESTUDO SOBRE OS TÓPICOS MAIS ABORDADOS NAS QUESTÕES DO ENEM DOS ANOS 2009 A 2023

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Aprovada em: 24 de maio de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br MARIA SILVANA ALCANTARA COSTA
Data: 17/06/2024 15:12:59-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa (Orientadora)
UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br FRANCISCO PEREIRA CHAVES
Data: 17/06/2024 14:17:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves
UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br FRANCISCO CALVI DA CRUZ JUNIOR
Data: 26/06/2024 09:37:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Francisco Calvi da Cruz Junior
UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br ERICA FERREIRA DE ALCANTARA
Data: 24/06/2024 09:07:02-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Ma. Érica Ferreira de Alcântara
2º CPM-CHMJ

Dedico este trabalho à minha família, que sempre me apoiou incondicionalmente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela proteção da minha família e por permitir a realização desse sonho.
Aos meus pais e a minha irmã pelo incentivo e por tudo que fizeram e fazem por mim.
Agradeço imensamente à minha esposa Viviany por ser a pessoa que mais me apoia, incentiva e ajuda em tudo .
Aos amigos da EEMTI Liceu Dr. José Gondim por fazerem de tudo para que fosse possível a conciliação do trabalho com as atividades do mestrado e pelo incentivo.
A todos os colegas de turma pelas experiências, brincadeiras e pelas contribuições para que esse resultado fosse alcançado.
Aos professores por todos os ensinamentos. Em especial à professora Dra. Maria Silvana Alcântara Costa pela paciência e pela compreensão durante a elaboração deste trabalho.
Por fim, agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática - SBM - e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA - pelo desenvolvimento e implementação do PROFMAT e a CAPES pelo financiamento do programa.

"Não se preocupe muito com as suas dificuldades em Matemática, posso assegurar-lhe que as minhas são ainda maiores."

(Albert Einstein).

RESUMO

A partir de 2009 o ENEM passou a ser utilizado como forma de acesso à educação superior e, com o passar do tempo, tornou-se o principal meio de ingresso em cursos superiores em instituições de ensino no Brasil. Esse exame é aplicado anualmente e a Matemática é abordada de forma direta em 45 questões objetivas, além de servir como base para assuntos estudados em outras áreas e componentes curriculares, logo, fica evidente a sua importância. Neste trabalho, foram analisadas as questões dos anos de 2020 a 2023 e os resultados obtidos foram incorporados aos já produzidos pelos colegas Vonaldo Feitosa, Érica Ferreira e Matheus Siqueira que analisaram as questões de 2009 a 2019. Dessa forma, foi constatado que 89 questões da referida área abordaram assuntos de Geometria Espacial, com destaque para o cálculo de Volume, presente em 53 questões. Assim, o objetivo desta dissertação é acrescentar ao acervo do Cursinho Edificar um material sobre Geometria Espacial, em especial, Cálculo de Volume e auxiliar alunos que estão em busca de uma vaga no ensino superior, professores e demais pessoas interessadas. Foram abordadas informações sobre a estrutura da prova de matemática e análises estatísticas das questões. Tais estatísticas foram utilizadas para selecionar os conceitos relacionados à Geometria Espacial abordados. Por fim, várias questões, escolhidas de forma minuciosa para refletirem o perfil de cobrança, foram apresentadas e comentadas.

Palavras-chave: Matemática, ENEM, Geometria Espacial, Cálculo de Volume.

ABSTRACT

From 2009 onwards, ENEM began to be used as a way of accessing higher education and, over time, it became the main means of entry into higher education courses at educational institutions in Brazil. This exam is administered annually and Mathematics is addressed directly in 45 objective questions, in addition to serving as a basis for subjects studied in other areas and curricular components, therefore, its importance is evident. In this work, questions from the years 2020 to 2023 were analyzed and the results obtained were incorporated into those already produced by colleagues Vonaldo Feitosa, Érica Ferreira and Matheus Siqueira who analyzed the questions from 2009 to 2019. In this way, it was found that 89 questions from This area covered topics of Spatial Geometry, with emphasis on the calculation of Volume, present in 53 questions. Thus, the objective of this dissertation is to add to the collection of Course Create material on Spatial Geometry, in particular, Volume Calculation and assist students who are looking for a place in higher education, teachers and other interested people. Information about the structure of the mathematics test and statistical analysis of the questions were covered. Such statistics were used to select the concepts related to Spatial Geometry covered. Finally, several questions, carefully chosen to reflect the billing profile, were presented and commented.

Keywords: Mathematics, ENEM, Spatial Geometry, Volume Calculation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Poliedros 21
Figura 3.2 – Não Poliedros 22
Figura 3.3 – Elementos de um Poliedro 22
Figura 3.4 – Poliedros Convexos e Não Convexos 23
Figura 3.5 – Poliedro Não Convexo 24
Figura 3.6 – Poliedros de Platão 29
Figura 3.7 – Poliedros Regulares e suas Planificações 30
Figura 3.8 – Octaedro Regular e sua Planificação 30
Figura 3.9 – Octaedro Regular e sua Planificação-editada 31
Figura 3.10–Planificação do Cubo 31
Figura 3.11–Cubo 32
Figura 3.12–Alternativas 32
Figura 3.13–Planificação do Cubo - Editada 32
Figura 3.14–Prisma 33
Figura 3.15–Elementos de um Prisma 34
Figura 3.16–Nomenclatura dos Prismas 34
Figura 3.17–Prisma Reto e Prisma Oblíquo 35
Figura 3.18–Prismas Regulares 35
Figura 3.19–Paralelepípedos 36
Figura 3.20–Cubo ou Paralelepípedo Reto Retângulo 36
Figura 3.21–Cabana e sua Estrutura 36
Figura 3.22–Cabana e sua Estrutura 37
Figura 3.23–Área do Prisma 38
Figura 3.24–Área Lateral do Prisma 38
Figura 3.25–Escada 39
Figura 3.26–Parede Lateral 40
Figura 3.27–Pilha de Chapas Metálicas 41
Figura 3.28–Volume do Prisma 42
Figura 3.29–Silo 43
Figura 3.30–Pirâmide 45
Figura 3.31–Elementos de uma Pirâmide 46
Figura 3.32–Pirâmide Reta/Oblíqua 46
Figura 3.33–Pirâmide Regular 47
Figura 3.34–Área da Pirâmide 47
Figura 3.35–Área da Pirâmide - editada 48
Figura 3.36–Volume da Pirâmide 49

Figura 3.37–Pirâmide - Vela 51
Figura 3.38–Cilindro 52
Figura 3.39–Elementos de um Cilindro 53
Figura 3.40–Classificação dos Cilindros 53
Figura 3.41–Cilindro - Seção Meridiana 54
Figura 3.42–Planificação do Cilindro 54
Figura 3.43–Volume do Cilindro 56
Figura 3.44–Cone 58
Figura 3.45–Elementos de um Cone 59
Figura 3.46–Cone Reto/Oblíquo 59
Figura 3.47–Seção Meridiana no Cone 60
Figura 3.48–Planificação do Cone 60
Figura 3.49–Volume do Cone 62
Figura 3.50–Tronco de Cone 63
Figura 3.51–Tronco de Cone - adaptada 63
Figura 3.52–Esfera 65
Figura 3.53–Elementos da Esfera 65
Figura 3.54–Clépsidra e Anticlépsidra 66
Figura 3.55–Esfera e Cilindro Seccionados 67
Figura 3.56–Taças 69
Figura 3.57–Escultura 72
Figura 3.58–Escultura - editada 73
Figura 3.59–Chocolate - Cone 78
Figura 3.60–Recipiente - Paralelepípedo 80
Figura 3.61–Petroleiro - Reservatório 82
Figura 3.62–Petroleiro - Reservatório 83
Figura 3.63–Piscina 85
Figura 3.64–Planificação - Caixa 86
Figura 3.65–Planificação - Caixa - editada 86
Figura 3.66–Alternativas da questão 87
Figura 3.67–Planificações - Caixas 88

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Porcentagem por objetos de conhecimento no período levantado. 17
Tabela 2.2 – Questões do ENEM sobre Geometria Espacial- Caderno Amarelo. . . . 18

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
Fies	Fundo de Financiamento Estudantil
MEC	Ministério da Educação
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática
ProUni	Programa Universidade para Todos
Sisu	Sistema de Seleção Unificada
UFCA	Universidade Federal do Cariri

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO . . . 14

2 O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO – ENEM . . . 16

2.1 ANÁLISE DAS QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENEM . 17

3 TÓPICOS DE GEOMETRIA ESPACIAL . . . 21

3.1 POLIEDROS . . . 21

3.1.1 POLIEDROS DE PLATÃO . . . 26

3.1.2 POLIEDROS REGULARES E SUAS PLANIFICAÇÕES . . . 29

3.2 PRISMAS . . . 33

3.2.1 PARALELEPÍPEDO . . . 35

3.2.2 ÁREA DA SUPERFÍCIE DO PRISMA . . . 37

3.2.3 PRINCÍPIO DE CAVALIERI . . . 41

3.2.4 VOLUME DO PRISMA . . . 42

3.3 PIRÂMIDE . . . 45

3.3.1 ÁREA DA SUPERFÍCIE DA PIRÂMIDE . . . 47

3.3.2 VOLUME DA PIRÂMIDE . . . 49

3.4 NÃO POLIEDROS . . . 52

3.4.1 CILINDRO . . . 52

3.4.2 CONE . . . 58

3.4.3 ESFERA . . . 64

3.5 QUESTÕES DO ENEM . . . 71

3.5.1 CÁLCULO DE VOLUME . . . 71

3.5.2 CÁLCULO DE ÁREA E PLANIFICAÇÃO . . . 84

4 CONCLUSÃO . . . 89

REFERÊNCIAS **90**

1 INTRODUÇÃO

Atualmente o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é a principal forma de ingresso em cursos superiores no Brasil, pois a nota obtida nessa avaliação pode ser utilizada para pleitear uma vaga em instituições de ensino públicas e privadas no país. O Governo Federal, por intermédio do Ministério da Educação (MEC), oferta tais vagas por meio de programas como o Sistema de Seleção Unificada (Sisu), o Programa Universidade para Todos (ProUni) e o Fundo de Financiamento Estudantil (Fies).

O Exame é composto por uma prova com 180 questões objetivas, das quais 45 abordam de forma direta assuntos de Matemática. Além disso, a Matemática também é abordada de maneira indireta em diversas questões de outras áreas e componentes curriculares. Ela é utilizada em várias situações, por exemplo, na área de Ciências da Natureza, nos componentes curriculares Química, Física e Biologia, logo, o estudo da Matemática é fundamental para o candidato que deseja pleitear uma vaga no ensino superior.

Por outro lado, infelizmente, a Matemática é temida e até odiada por muitos alunos. Diante dos fatos supracitados, a Professora Drª Maria Silvana Alcântara Costa sugeriu a produção de materiais voltados para o ENEM que possam ser utilizados no Cursinho Edificar, vinculado ao Programa de Extensão Edifique Ações da Universidade Federal do Cariri (UFCA) para alunos de escolas públicas.

Assim, este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de acrescentar ao acervo do Cursinho Edificar um material sobre Geometria Espacial, em especial, Cálculo de Volume, e auxiliar alunos que estão em busca de uma vaga no ensino superior, professores e demais pessoas interessadas. Dessa forma, por se tratar de um material voltado para a preparação para a prova do ENEM, as demonstrações de resultados (proposições e teoremas) foram suprimidas quando eram necessários conceitos estudados a nível de graduação.

Primeiramente, este trabalho irá abordar informações gerais acerca do ENEM, sua estruturação e Programas do Governo que são utilizados para acesso ao ensino superior no Brasil. Em seguida, será feita a análise de questões do ENEM com base na sua Matriz de Referência para identificar os conteúdos mais relevantes e cobrados com maior frequência, bem como padrões de cobrança.

Com base nas informações levantadas, optou-se por abordar conteúdos relacionados à Geometria Espacial. Foram trabalhadas as seguintes figuras: poliedros, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Em cada uma dessas figuras foram abordadas a definição, os principais elementos, as classificações, a área, a planificação e o volume, sempre destacando que o cálculo de volume é o tópico mais importante.

Por fim, foram selecionadas e resolvidas algumas questões que refletem a cobrança dos conteúdos supracitados, as quais foram divididas em dois grupos: o primeiro referente ao cálculo de volumes, enquanto o segundo refere-se aos demais assuntos cobrados de forma menos significativa.

2 O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO – ENEM

O texto desta seção foi baseado nas referências [1] e [2].

Com o objetivo de aferir o aprendizado dos discentes ao concluírem o Ensino Médio (ou após sua conclusão) foi criado, em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Ao longo do tempo o exame passou por algumas alterações, sendo uma das mais significativas em 2009, quando passou a ser utilizado como forma de acesso à educação superior. Assim, o ENEM tornou-se o principal meio de ingresso em cursos superiores em instituições de ensino públicas e privadas no Brasil e também no exterior, pois possibilita a admissão em universidades de outros países, por exemplo, Portugual, Canadá, Reino Unido, Estados Unidos, entre outros.

Os estudantes podem utilizar a nota obtida no ENEM para participar de vários programas ofertados pelo Governo Federal por meio do Ministério da Educação (MEC), dentre os quais destacam-se o Sistema de Seleção Unificada (Sisu), o Programa Universidade para Todos (ProUni) e o Fundo de Financiamento Estudantil (Fies), criados para facilitar o acesso à Educação Superior.

O SISU é um programa que utiliza a nota do ENEM como forma de seleção de estudantes para ingresso em cursos de graduação em instituições públicas de ensino no país. Já o PROUNI possibilita que a nota do ENEM seja utilizada também como porta de entrada em instituições particulares por meio da concessão de bolsas de estudos totais ou parciais. O FIES, por sua vez, concede financiamento de cursos superiores (pagos) ofertados por instituições privadas que aderiram ao programa.

Podem se inscrever e participar do ENEM todas as pessoas que estão matriculadas no ensino médio ou que já o concluíram, inclusive aquelas que cumprem pena privativa de liberdade. Se o aluno ainda não está cursando o último ano do ensino médio, ele pode inscrever-se como treineiro, modalidade que permite ao estudante participar da prova apenas para ganhar experiência, não sendo possível que ele se inscreva nos programas de acesso às vagas em universidades.

Atualmente, a avaliação é composta por uma redação e 180 questões objetivas, que são divididas em quatro áreas do conhecimento, de forma que cada área tenha 45 questões. Os componentes curriculares são distribuídos da seguinte maneira: a) Linguagens, códigos e suas tecnologias - Artes, Educação Física, Língua Estrangeira, Língua Portuguesa e Literatura; b) Ciências Humanas - Filosofia, Geografia, História e Sociologia; c) Matemática e suas tecnologias - Matemática; d) Ciências da Natureza - Biologia, Física e Química.

Nos últimos anos, a aplicação ocorre em dois domingos consecutivos (geralmente os dois primeiros) do mês de novembro. O primeiro é destinado para a Redação, Linguagens, códigos e suas tecnologias e Ciências Humanas. Já o segundo, é reservado para as áreas da Matemática e suas tecnologias e Ciências da Natureza.

Ao analisar a quantidade de questões por área do conhecimento percebe-se que Matemática é o componente curricular que é cobrado no maior número de questões, além de servir como base para assuntos estudados em outras áreas e componentes curriculares, logo, é nítida a sua importância.

2.1 ANÁLISE DAS QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENEM

O texto desta seção foi baseado nas referências [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9],[10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20] como referências.

Analisando apenas o número de questões por área do conhecimento e componentes curriculares, fica evidente a relevância da Matemática na prova do ENEM. Partindo dessa constatação, os alunos Vonaldo Feitosa de Siqueira, Érica Ferreira de Alcântara e Matheus Siqueira Araújo Dantas, da turma 2018 do PROFMAT da Universidade Federal do Cariri (UFCA), analisaram as questões de Matemática do ENEM de 2009 a 2019 . Neste trabalho, foram analisadas as questões dos anos de 2020 a 2023 e os resultados obtidos foram incorporados aos já produzidos pelos colegas citados. O objetivo dessa análise foi evidenciar quais conteúdos são mais cobrados e como estão divididos nas subáreas da Matemática.

A Tabela 2.1 ilustra a distribuição das questões por objeto do conhecimento, de acordo com a matriz de referência do ENEM.

Tabela 2.1 – Porcentagem por objetos de conhecimento no período levantado.

Objetos de conhecimento	Total Geral	Média Anual	% Geral
Conhecimentos Algébricos	95	6,3	14,1
Conhecimentos Algébricos e Geométricos	22	1,4	3,3
Conhecimentos de Estatística e Probabilidade	115	7,7	17
Conhecimentos Geométricos	208	13,9	30,8
Conhecimentos Numéricos	235	15,7	34,8
Total Geral	675	45	100

Fonte: Autor, baseado em [3] a [18].

Note que conhecimentos geométricos foram cobrados em 208 questões. Com base em uma análise mais detalhada, é possível perceber que destas, 89 questões abordaram conteúdos relacionados à Geometria Espacial no período de 2009 a 2023. A tabela 2.2 traz uma análise detalhada das questões que abordaram Geometria Espacial no período citado com o intuito de deixar mais evidente a sua importância.

Para a construção da referida tabela, foram analisados os cadernos de provas amarelos e as questões foram dispostas com base em um critério cronológico das edições: da mais antiga para a mais atual. A primeira coluna indica a ordem das questões, a segunda o ano em que a prova foi aplicada, a terceira o número da questão no caderno, já a quarta, a quinta e a sexta colunas indicam o(s) conteúdo(s) mais relevante(s) para a resolução da questão.

Tabela 2.2 – Questões do ENEM sobre Geometria Espacial- Caderno Amarelo.

Questões	ano	Nº da questão	Conteúdo 1	Conteúdo 2	Conteudo 3
1	2009	151	Prisma	Poliedro	
2	2009	157	Volume	Esfera	
3	2009	170	Volume	Pirâmide	
4	2009	178	Pirâmide		
5	2009	180	Volume		
6	2010	137	Planificação	Tronco de Cone	Cilindro
7	2010	139	Volume	Paralelepípedo	Cubo
8	2010	146	Volume		
9	2010	151	Volume	Cilindro	
10	2010	157	Volume	Cilindro	
11	2010	158	Volume	Cilindro	
12	2010	162	Volume	Cilindro	Área
13	2010	164	Cilindro	Prisma	
14	2010	168	Volume	Cone	Esfera
15	2010	179	Volume	Cubo	
16	2011	140	Cone		
17	2011	144	Pirâmide	Cubo	
18	2011	145	Volume	Conversão	
19	2011	168	Volume	Cilindro	
20	2012	139	Conversão	Volume	
21	2012	141	cilindro	Prisma	Pirâmide
22	2012	147	Volume	Paralelepípedo	
23	2012	154	Pirâmide	Projeção	
24	2012	166	Esfera	Projeção	
25	2012	176	Volume	Porcentagem	
26	2013	143	Volume		

Continua.

Questões	ano	Nº da questão	Conteúdo 1	Conteúdo 2	Conteudo 3
27	2013	145	Volume	Cilindro	
28	2013	159	Volume	Conversão	
29	2013	163	Volume	Conversão	
30	2013	169	Tronco-Cone		
31	2013	173	Projeção		
32	2014	140	Cone	Planificação	
33	2014	145	Paralelepípedo	Planificação	
34	2014	146	Volume	Paralelepípedo	Porcentagem
35	2014	154	Projeção		
36	2014	158	Volume	Cilindro	Esfera
37	2014	160	Volume	Paralelepípedo	Escala
38	2014	171	Volume	Prisma	
39	2014	173	Volume	Cubo	
40	2015	137	Volume		
41	2015	156	Poliedros		
42	2015	163	Volume	Cilindro	
43	2015	167	Volume	Cilindro	Cubo
44	2015	172	Volume	Conversão	
45	2015	174	Volume	Conversão	
46	2015	179	Volume	Paralelepípedo	
47	2016	146	Volume	Paralelepípedo	
48	2016	159	Esfera		
49	2016	162	Pirâmide		
50	2016	172	Projeção		
51	2016	175	Volume	Cilindro	Cone
52	2017	139	Volume	Cubo	Paralelepípedo
53	2017	150	Volume	Paralelepípedo	
54	2017	154	Prisma		
55	2017	165	Volume	Conversão	Escala
56	2017	180	Esfera		
57	2018	146	Cubo		
58	2018	170	Cilindro		
59	2019	136	Capacidade		
60	2019	139	Projeção		
61	2019	152	Volume		
62	2019	161	Tetraedro		
63	2019	169	Volume		

Continua.

Questões	ano	Nº da questão	Conteúdo 1	Conteúdo 2	Conteudo 3
64	2019	178	Volume	Cilindro	
65	2020	137	Projeção		
66	2020	138	Volume	Paralelepípedo	Escala
67	2020	150	Volume	Paralelepípedo	Escala
68	2020	158	Tronco-pirâmide		
69	2020	168	Volume	Cilindro	
70	2020	175	Volume	Paralelepípedo	
71	2020	179	Cone		
72	2021	144	Cubo		
73	2021	145	Octaedro	Planificação	
74	2021	147	Volume	Tronco-Cone	
75	2021	180	Cubo	Projeção	
76	2022	142	Volume	Cilindro	
77	2022	147	Volume	Esfera	
78	2022	148	Volume	Cone	
79	2022	158	Cubo	Planificação	
80	2022	160	Volume	Escala	
81	2022	165	Projeção		
82	2022	167	Volume	Paralelepípedo	Conversão
83	2022	169	Volume	Cilindro	Esfera
84	2022	178	Cubo	Projeção	
85	2023	146	Volume	Cilindro	Vazão
86	2023	150	Volume	Cilindro	Conversão
87	2023	164	Volume	Cone	Cilindro
88	2023	172	Projeção		
89	2023	178	Paralelepípedo	Área	

Fonte: Autor, baseado em [3] a [18] .

Ao analisar as tabelas 2.1 e 2.2, percebe-se que nas provas do ENEM de 2009 a 2023, cerca de 31% das questões de Matemática abordaram Conhecimentos Geométricos. Foi constatado que aproximadamente 13% destas (89 das 675), abordaram assuntos de Geometria Espacial, com destaque para o Cálculo de Volume, presente em torno de 60% das questões sobre Geometria Espacial (53 das 89). Devido à importância constatada da Geometria Espacial no ENEM, no capítulo seguinte serão expostos os conteúdos mais relevantes.

3 TÓPICOS DE GEOMETRIA ESPACIAL

O texto desta seção foi baseado nas referências [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29] e [30].

Esta seção tem por objetivo apresentar a teoria referente aos tópicos de Geometria Espacial mais recorrentes no ENEM, com ênfase no Cálculo de Volume, visto que este assunto é cobrado em um maior número de questões. A seguir, serão expostas as definições, os elementos, as classificações importantes, os cálculos de áreas e volumes dos Poliedros, Prismas, Pirâmides, Cilindros, Cones e Esferas.

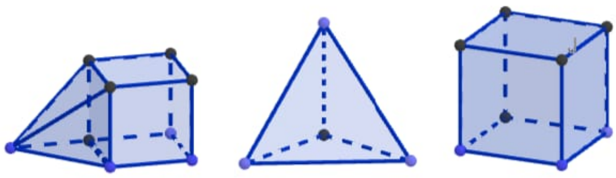
3.1 POLIEDROS

A palavra Poliedro deriva da junção de duas palavras gregas: polys que significa muitos e hedra que significa face. Logo, de forma simples, Poliedro representa um sólido com muitas/várias faces.

Definição 1 *Poliedros são sólidos geométricos espaciais formados por uma quantidade finita de polígonos e pela região limitada por eles no espaço, que satisfazem as seguintes propriedades:*
i) O lado de cada polígono é também o lado de apenas outro polígono.
ii) A intersecção de quaisquer dois polígonos ou é vazia, ou é um vértice ou é um lado comum.
iii) É sempre possível ir de um ponto de um polígono a um ponto de qualquer outro, passando apenas pelas arestas, ou seja, sem passar pelos vértices.

Por ser extensa, essa definição pode gerar dúvidas ao ser apresentada aos alunos do ensino médio. Nesse momento, é interessante ressaltar que, equivalentemente, os Poliedros são sólidos geométricos espaciais formados por faces poligonais. Estas, por sua vez, são figuras planas, fechadas e formadas por segmentos de reta. A Figura 3.1 ilustra alguns exemplos de poliedros.

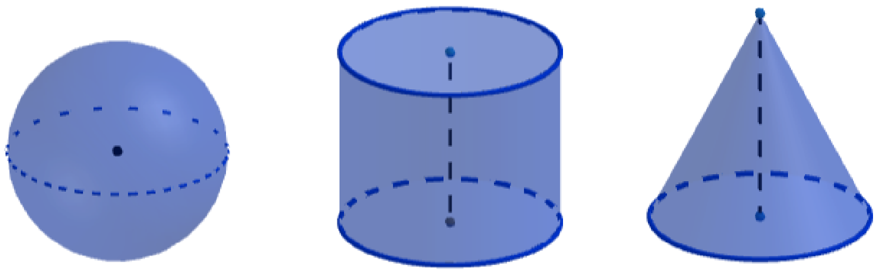
Figura 3.1 – Poliedros



Fonte: Autor.

Vale ressaltar que os principais exemplos de não poliedros presentes em questões são a esfera, o cilidro e o cone, como mostra a Figura 3.2.

Figura 3.2 – Não Poliedros



Fonte: Autor.

Em qualquer poliedro, pode-se destacar os seguintes elementos:

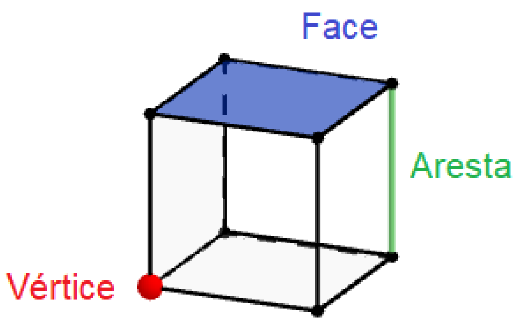
Faces: São os polígonos que formam o poliedro.

Arestas: São os lados de cada uma das faces do Poliedro. Cada aresta é comum a exatamente duas faces.

Vértices: São os pontos de interseção entre três ou mais arestas. Os vértices do poliedro coincidem com os vértices dos polígonos que o formam.

A Figura 3.3 traz exemplo de um poliedro com seus elementos destacados.

Figura 3.3 – Elementos de um Poliedro



Fonte: Autor.

Uma classificação importante dos poliedros é com relação à convexidade, mas antes de abordá-la é preciso definir região convexa.

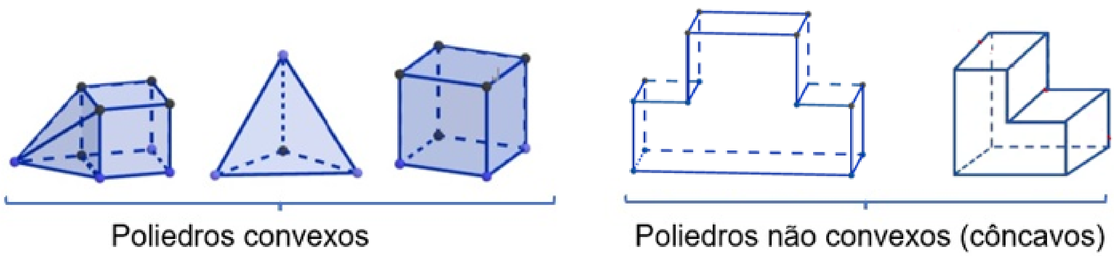
Definição 2 *Uma região do espaço é dita convexa se, para quaisquer dois de seus pontos , o segmento de reta que os une está totalmente contido na região. Caso contrário, a região é côncava ou não convexa.*

A partir da definição anterior pode-se estabelecer a classificação dos poliedros em convexos e não convexos (ou côncavos).

Definição 3 *Diz-se que um poliedro é convexo quando qualquer reta, não paralela a nenhuma das suas faces, o intersecta em, no máximo, dois pontos distintos. Caso contrário, o poliedro é dito não convexo (côncavo).*

Assim, para que um poliedro seja considerado convexo é necessário e suficiente que todo segmento de reta que liga quaisquer dois de seus pontos esteja totalmente contido nele. E a definição de não convexo é residual. A Figura 3.4 traz exemplos que ilustram essa distinção.

Figura 3.4 – Poliedros Convexos e Não Convexos



Fonte: Autor.

Ao analisar as questões, percebe-se que a cobrança desse assunto no ENEM tem como foco os poliedros convexos. Portanto, a partir desse ponto, o trabalho dará ênfase ao estudo desses.

O matemático suiço Leonhard Euler analisou o número de faces, vértices e arestas dos poliedros e constatou que esses elementos seguiam um padrão em todos os poliedros convexos, que ficou conhecido como Relação de Euler. No entanto, essa relação não era válida para todos os poliedros não convexos.

Teorema 1 *Em todo poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, é válida a relação $V + F = A + 2$.*

Tendo em vista que o objetivo dessa dissertação é servir como material de estudos para o ENEM, a demonstração desse teorema será suprimida. Caso seja do interesse do leitor a mesma pode ser encontrada na referência [21].

Exemplo 1 *Vamos determinar o número de faces de um poliedro convexo que possui 12 Arestas e 6 vértices.*

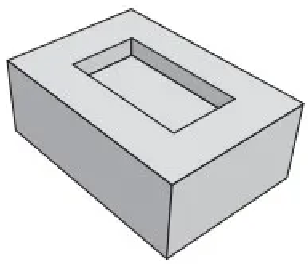
Pelo enunciado tem-se que $A = 12, V = 6$. Logo,

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ 6 + F &= 12 + 2 \\ 6 + F &= 14 \\ F &= 14 - 6 \\ F &= 8. \end{aligned}$$

Portanto, o poliedro tem 8 faces.

Exemplo 2 *(ENEM 2019 - PPL) No ano de 1751, o matemático Euler conseguiu demonstrar a famosa relação para poliedros convexos que relaciona o número de suas faces (F), arestas (A) e vértices (V): V + F = A + 2. No entanto, na busca dessa demonstração, essa relação foi sendo testada em poliedros convexos e não convexos. Observou-se que alguns poliedros não convexos satisfaziam a relação e outros não. Um exemplo de poliedro não convexo é dado na figura. Todas as faces que não podem ser vistas diretamente são retangulares.*

Figura 3.5 – Poliedro Não Convexo



Fonte: Autor.

Qual a relação entre os vértices, as faces e as arestas do poliedro apresentado na figura?

a) V + F = A

b) V + F = A - 1

c) V + F = A + 1

d) V + F = A + 2

e) V + F = A + 3

Solução: *Contando o número de vértices, faces e arestas, obtem-se que* $V = 16, F = 11, A = 24$. *Assim:*

$$\begin{aligned} V + F &= 16 + 11 \\ V + F &= 27. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 27 &= 24 + 3 \\ 27 &= A + 3. \end{aligned}$$

Portanto, nesse poliedro $V + F = A + 3$.

Resposta: alternativa e.

Note que a Figura 3.5 ilustra um poliedro não convexo e que a **Relação de Euler não é válida para esse Poliedro.**

Observação 1 *A Relação de Euler não é válida para todos os poliedros côncavos (não convexos), ou seja, existem poliedros não convexos nos quais* $V + F \neq A + 2$.

Todo poliedro no qual a Relação de Euler é válida é chamado de poliedro euleriano. Assim, todo poliedro convexo é euleriano mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Exemplo 3 *(ENEM 2017 - 2ª APLICAÇÃO) O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces. Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a*
a) 10
b) 12
c) 25
d) 42
e) 50

Solução: *Como o poliedro é convexo, então para resolver a questão pode-se utilizar a Relação de Euler. Tem-se que:*
$A = 30$, $V = 20$ *e* $F = ?$.

Logo:

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ 20 + F &= 30 + 2 \\ 20 + F &= 32 \\ F &= 32 - 20 \\ F &= 12. \end{aligned}$$

Resposta: alternativa b.

3.1.1 POLIEDROS DE PLATÃO

Platão foi um grande filósofo e matemático apaixonado pela Geometria. Ele e seus discípulos associavam os poliedros aos elementos essenciais para a formação do mundo físico: o Tetraedro ao fogo, o Cubo à terra, o Octaedro ao ar, o Dodecaedro ao universo e o Icosaedro à água. Devido à dedicação ao estudo do tema, esses sólidos ficaram conhecidos como poliedros de Platão.

Definição 4 *Um poliedro é dito de Platão se satisfaz simultaneamente as três condições listadas abaixo:*
i) Todas as faces têm o mesmo número de arestas.
ii) De cada vértice parte o mesmo número de arestas.
iii) A relação de Euler é válida, ou seja, $V + F = A + 2$.

Teorema 2 *Existem exatamente 5 poliedros de Platão.*

Demonstração:

Seja n o número de arestas comuns a cada face do poliedro (pelo item i da definição 4), com $n \geq 3$. *Sabe-se que cada uma das n arestas é comum a 2 faces. Assim:*

$$\begin{aligned} n \cdot F &= 2A \\ F &= \frac{2A}{n} \end{aligned}$$

Seja m o número de arestas que partem de cada vértice, com $m \geq 3$. Então:

$$m \cdot V = 2A$$

$$V = \frac{2A}{m}$$

Substituindo esses valores na Relação de Euler e reorganizando a expressão, obtem-se:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} > 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0$$

1º Caso: *Se $n = 3$, então:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} &> 0 \\ \Longrightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} &> 0 \\ \Longrightarrow \frac{1}{m} &> \frac{1}{6} \\ \Longrightarrow m &< 6 \end{aligned}$$

Logo, $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$. Portanto, 3 classes de poliedros

2º Caso: *Se $n = 4$, então:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} &> 0 \\ \Longrightarrow \frac{1}{m} &> \frac{1}{4} \\ \Longrightarrow m &< 4 \end{aligned}$$

Logo, $m = 3$. Portanto, mais 1 classe de poliedros.

3º Caso: *Se $n = 5$, então:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} &> 0 \\
\Longrightarrow \frac{1}{m} - \frac{3}{10} &> 0 \\
\Longrightarrow \frac{1}{m} &> \frac{3}{10} \\
\Longrightarrow 3m &< 10 \\
\Longrightarrow m &< \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

Logo, $m = 3$. Portanto, mais 1 classe de poliedros.

4º Caso: *Se $n > 5$ (ou $n \geq 6$), então:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &\geq \frac{1}{6} \\
\frac{1}{n} - \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\
\frac{1}{n} - \frac{1}{2} &\geq -\frac{1}{3} \\
\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{m} - \frac{1}{3} > 0
\end{aligned}$$

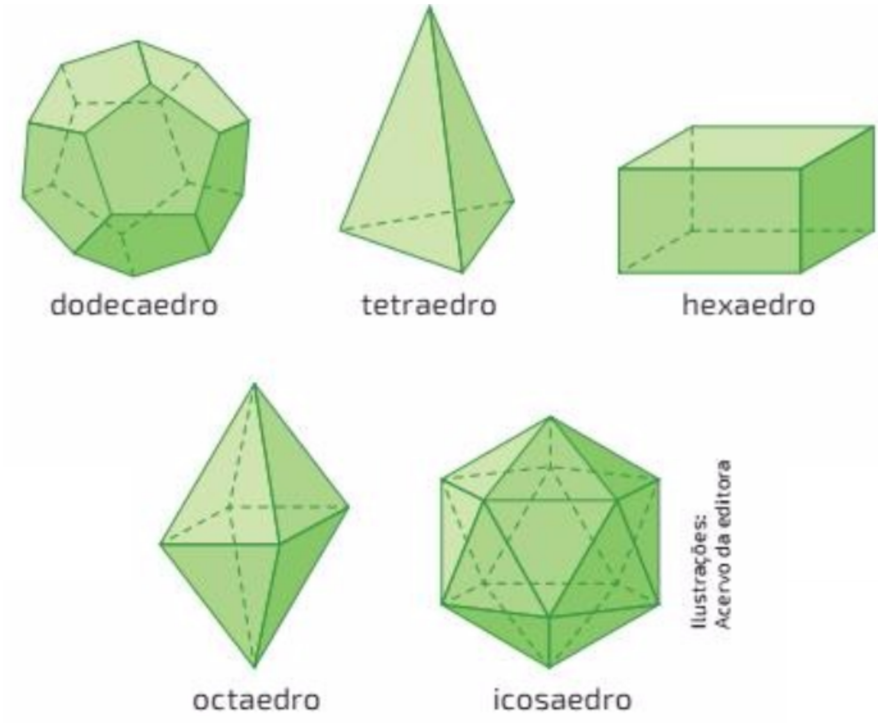
Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} &> \frac{1}{3} \\
\Longrightarrow m &< 3.
\end{aligned}$$

Absurdo, pois $m \geq 3$. Logo, tem-se que $n \leq 5$ e , portanto, existem apenas cinco classes de poliedros de Platão.

A Figura 3.6 ilustra os poliedros de Platão.

Figura 3.6 – Poliedros de Platão



Fonte: referência [23].

3.1.2 POLIEDROS REGULARES E SUAS PLANIFICAÇÕES

Outra classificação importante dos poliedros está relacionada à regularidade. Esses podem ser regulares ou irregulares. Nesse sentido, Platão tem uma grande contribuição, visto que ele foi responsável pela primeira demonstração da existência de apenas cinco poliedros regulares.

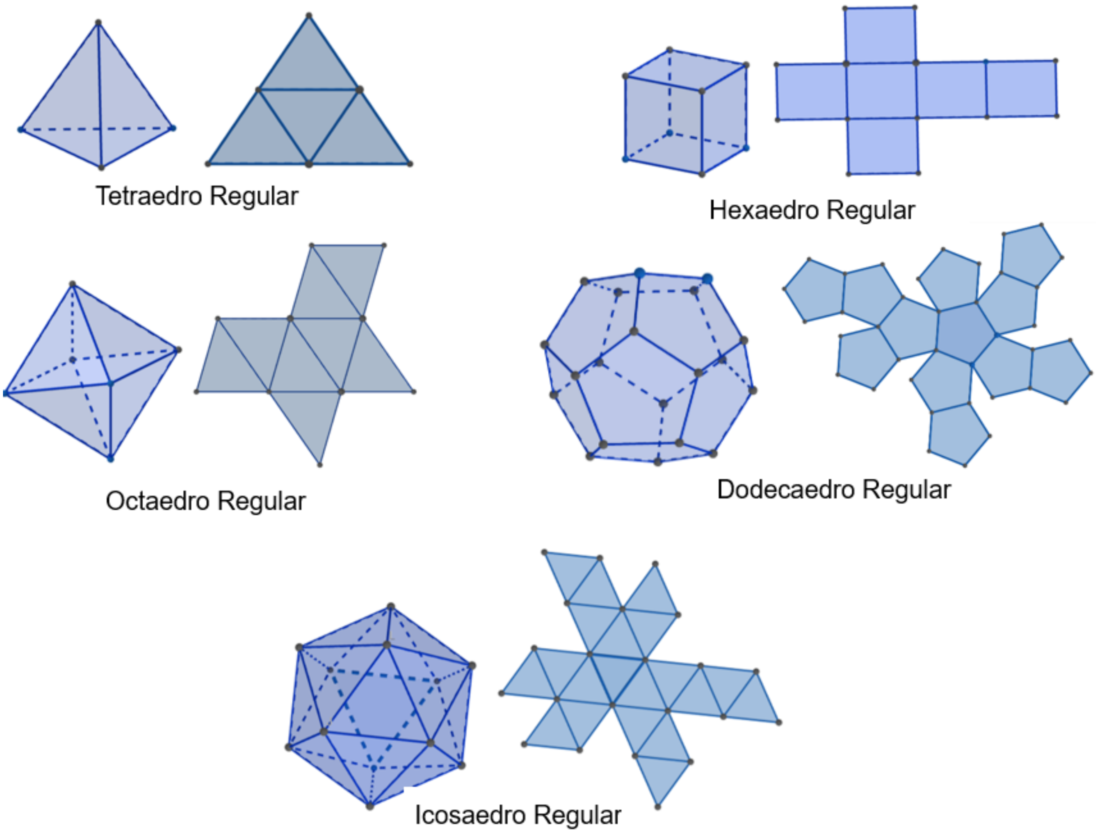
Definição 5 *Um poliedro convexo é dito regular quando:*
i) Todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si.
ii) De cada vértice do poliedro parte o mesmo número de arestas.

Teorema 3 *Existem apenas cinco poliedros regulares.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [23].

A planificação de Poliedros Regulares é um assunto muito importante, pois esse tipo de questão é recorrente em várias edições do ENEM. Como existem várias formas possíveis para planificá-los, então a Figura 3.7 traz apenas um exemplo de planificação.

Figura 3.7 – Poliedros Regulares e suas Planificações

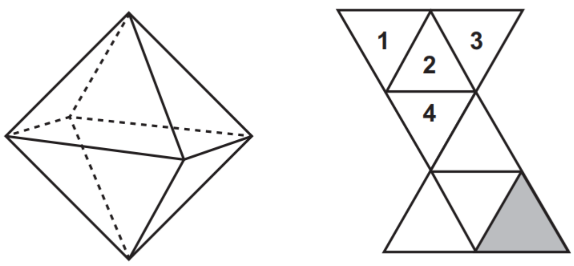


Fonte: Autor.

Observação 2 *Todo poliedro regular é de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é regular. Por exemplo, o hexaedro é um poliedro que pode ser regular ou não, porém, em ambos os casos, é um poliedro de Platão.*

Exemplo 4 *(ENEM 2021) Num octaedro regular, duas faces são consideradas opostas quando não têm nem arestas, nem vértices em comum. Na figura, observa-se um octaedro regular e uma de suas planificações, na qual há uma face colorida na cor cinza escuro e outras quatro faces numeradas.*

Figura 3.8 – Octaedro Regular e sua Planificação



Fonte: ENEM 2021.

Qual(is) face(s) ficará(ão) oposta(s) à face de cor cinza escuro, quando o octaedro *for reconstruído a partir da planificação dada?*

a) 1, 2, 3 e 4

b) 1 e 3

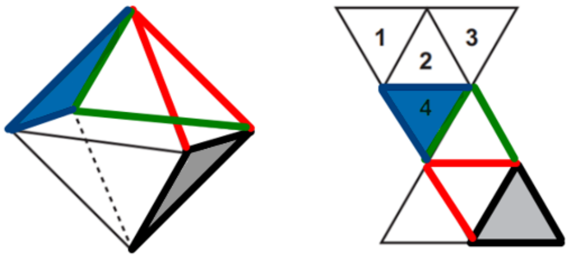
c) 1

d) 2

e) 4

Solução: *Para resolver a questão será necessário reconstruir o octaedro. Para isso, suponha que a face pintada na cor cinza ocupe uma certa posição e, a partir da aresta comum, encontra-se a posição das outras faces, como ilustra a Figura 3.9.*

Figura 3.9 – Octaedro Regular e sua Planificação-editada



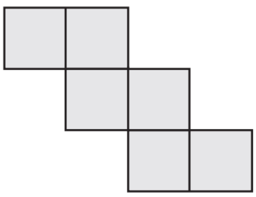
Fonte: ENEM 2021, editada pelo autor.

A questão solicitou a face oposta a de cor cinza escuro, que é a número 4 (destacada na cor azul). Observe que para resolvê-la não é necessário reconstruir o octaedro regular por completo.

Resposta: alternativa e.

Exemplo 5 *(ENEM 2022) Dentre as diversas planificações possíveis para o cubo, uma delas é a que se encontra apresentada na Figura 3.10.*

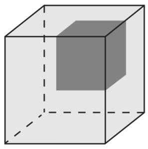
Figura 3.10 – Planificação do Cubo



Fonte: ENEM 2022.

Em um cubo, foram pintados, em três de suas faces, quadrados de cor cinza escura, que ocupam um quarto dessas faces, tendo esses três quadrados um vértice em comum, conforme ilustrado na Figura 3.11.

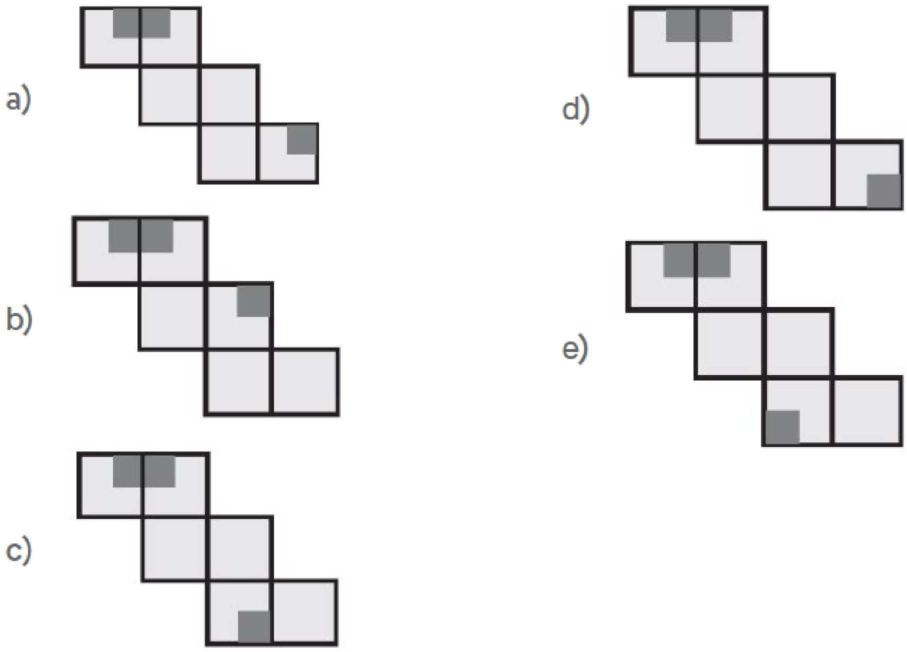
Figura 3.11 – Cubo



Fonte: ENEM 2022.

A planificação do cubo da Figura 3.11, conforme o tipo de planificação apresentada na Figura 3.10, é

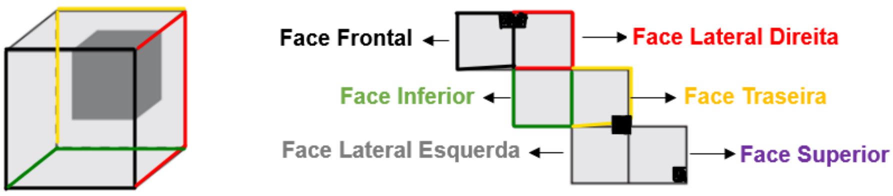
Figura 3.12 – Alternativas



Fonte: ENEM 2022, adaptada pelo autor.

Solução: Ao analisar as alternativas percebe-se que os dois quadrados superiores das planificações estão com os quadrados menores de cor cinza. Assim, a Figura 3.13 traz a planificação do cubo em questão explicando a posição de cada face.

Figura 3.13 – Planificação do Cubo - Editada



Fonte: ENEM 2022, adaptada pelo autor

Resposta: alternativa d.

Após essa introdução acerca dos poliedros, serão estudados com mais detalhes aqueles que são objeto de cobrança em questões do ENEM com maior frequência. Como citado anteriormente, o conteúdo de Geometria Espacial mais relevante é o Cálculo de Volume. Porém, por questões didáticas e também por serem cobrados em algumas questões, este trabalho também irá abordar o cálculo de área e a planificação de algumas figuras geométricas expostas.

3.2 PRISMAS

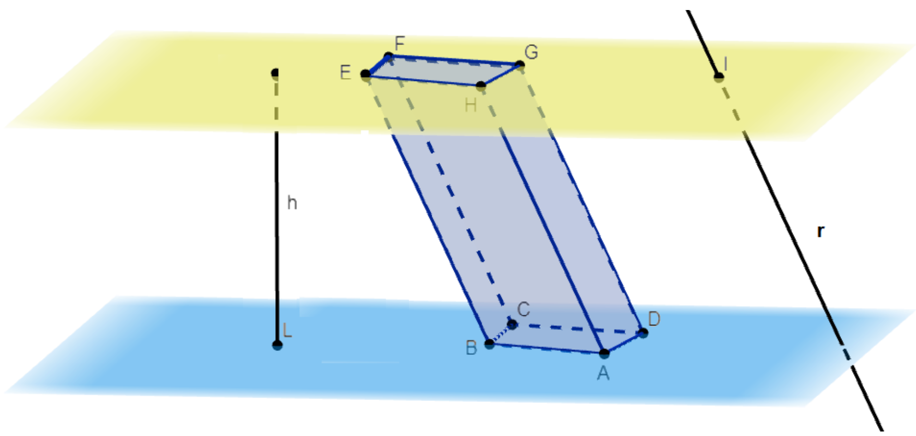
O Prisma é um caso particular de poliedro e, assim como as demais figuras geométricas espaciais, está bastante presente no cotidiano das pessoas visto que eles dão forma a vários objetos que utilizamos, embora isso não seja percebido. Existem vários prédios, caixas e embalagens, por exemplo, que assumem o formato de prismas.

Definição 6 *Considere dois planos paralelos e distintos α e β, um polígono convexo contido em α e uma reta r concorrente aos planos. Denomina-se prisma a região formada pela união de todos os segmentos de reta com uma extremidade no polígono e outra no plano β que são paralelos a r.*

Dessa forma, o prisma é um poliedro convexo que tem duas faces paralelas e congruentes, chamadas de bases, e as outras faces (faces laterais) são paralelogramos.

A Figura 3.14 traz um exemplo de prisma.

Figura 3.14 – Prisma



Fonte: Autor.

Em qualquer prisma pode-se destacar os seguintes elementos:

Bases: São os polígonos congruentes e paralelos entre si.

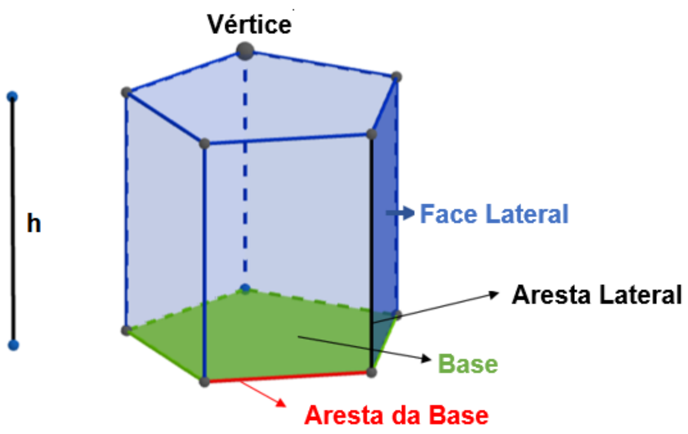
Arestas da base: São os lados de cada uma das bases.

Faces laterais: São paralelogramos.

Arestas laterais: São os lados de cada uma das faces laterais que não são arestas das bases.
Vértices: São os pontos de interseção entre três ou mais arestas.
Altura: É a distância entre os planos que contêm as bases.

A Figura 3.15 destaca cada um desses elementos em um prisma pentagonal.

Figura 3.15 – Elementos de um Prisma

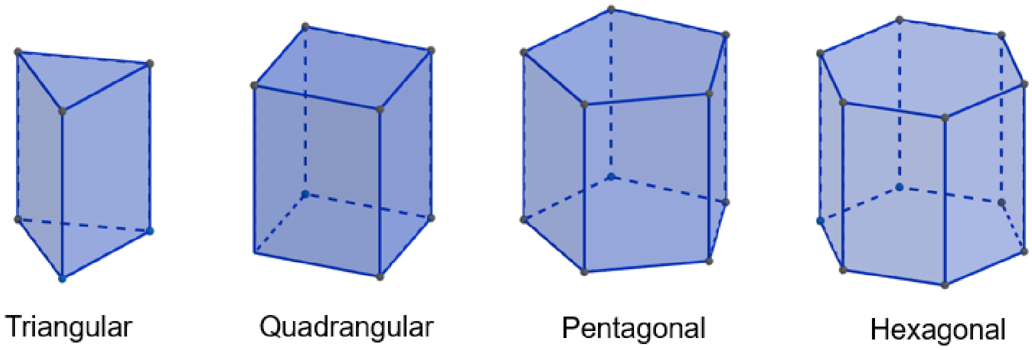


Fonte: Autor.

Observação 3 *Um prisma é denominado de acordo com o polígono que forma a sua base.*

A Figura 3.16 traz exemplos de prismas e suas respectivas nomenclaturas.

Figura 3.16 – Nomenclatura dos Prismas



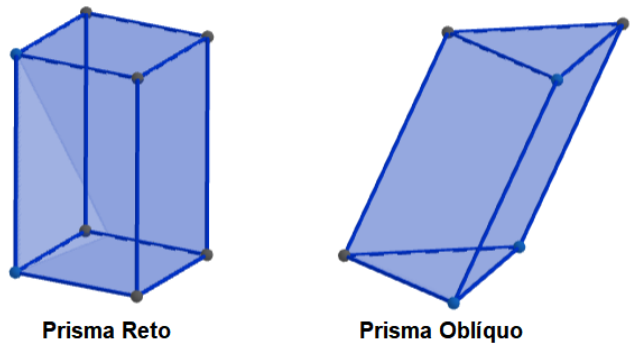
Fonte: Autor.

De acordo com algumas características, os prismas podem ter várias classificações. Dentre elas destacam-se as classificações em reto ou oblíquo e em regular ou irregular, que serão abordadas a seguir.

Definição 7 *Um prisma é reto se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Por outro lado, se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases, o prisma é oblíquo.*

A Figura 3.17 ilustra um prisma reto e um prisma oblíquo.

Figura 3.17 – Prisma Reto e Prisma Oblíquo

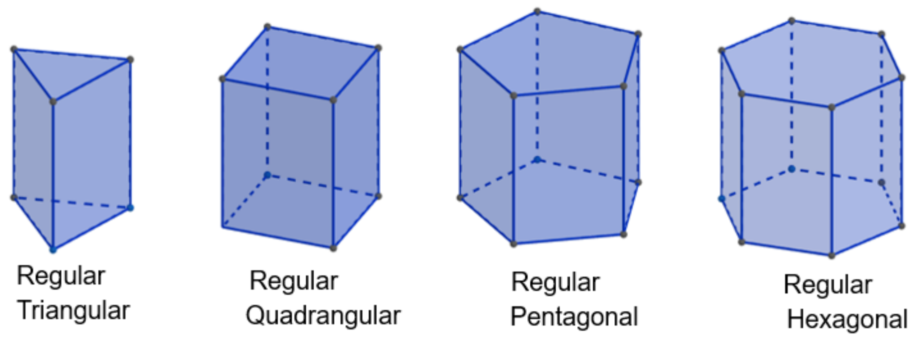


Fonte: Autor.

Definição 8 *Um Prisma é dito regular quando é reto e sua base é um polígono regular.*

A Figura 3.18 traz exemplos de Prismas Regulares.

Figura 3.18 – Prismas Regulares



Fonte: Autor.

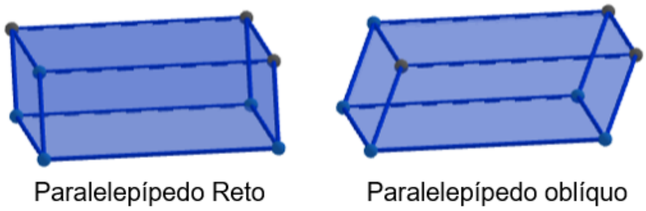
3.2.1 PARALELEPÍPEDO

O Paralelepípedo é um prisma muito importante e bastante cobrado em questões. Ele é classificado como quadrangular e pode ser reto ou oblíquo.

Definição 9 *Paralelepípedo é o nome dado ao prisma cujas bases são paralelogramos.*

A Figura 3.19 ilustra um paralelepípedo reto e um paralelepípedo oblíquo.

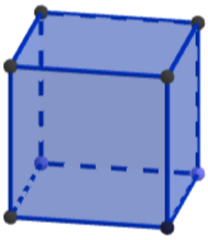
Figura 3.19 – Paralelepípedos



Fonte: Autor.

Observação 4 *O Cubo é um caso particular de paralelepípedo que apresenta todas as faces quadradas (lembre-se que todo quadrado é também um retângulo), conforme a Figura 3.20.*

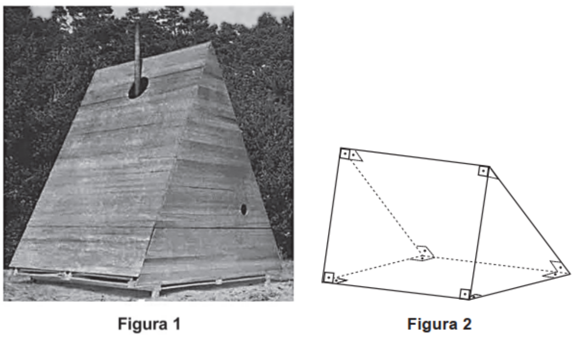
Figura 3.20 – Cubo ou Paralelepípedo Reto Retângulo



Fonte: Autor.

Exemplo 6 *(ENEM 2017) Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.*

Figura 3.21 – Cabana e sua Estrutura



ROMERO, L. Tendências. **Superinteressante**, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

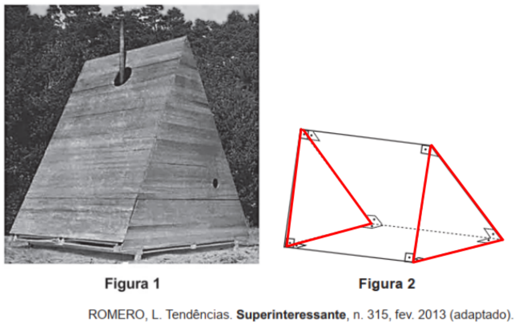
Fonte: ENEM 2017.

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é:
a) tetraedro.
b) pirâmide retangular.
c) tronco de pirâmide retangular.
d) prisma quadrangular reto.
e) prisma triangular reto.

Solução: *Por meio de uma análise rápida da figura pode-se descartar as três primeiras alternativas. Conclui-se, então, que a figura é um prisma reto.*

Agora basta identificar suas bases. Para isso, observe a Figura 3.22.

Figura 3.22 – Cabana e sua Estrutura



Fonte: ENEM 2017, editada pelo autor.

As bases de um prisma são polígonos congruentes, logo, nesse caso, são bases triangulares. Portanto, a forma geométrica é de um prisma triangular reto.

Resposta: alternativa e.

3.2.2 ÁREA DA SUPERFÍCIE DO PRISMA

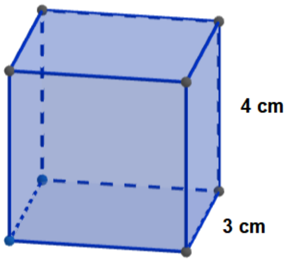
Em relação à área da superficie de um prisma, as questões podem abordar a área da base, a área lateral e a área total. Assim, faz-se necessário, definir cada uma delas.

Definição 10 *A área da base de um prisma corresponde à área do polígono que forma cada uma das bases do Prisma. Já a área lateral corresponde à soma das áreas de todos os polígonos que formam suas faces laterais. A área total, por sua vez, corresponde à soma da área lateral com duas vezes a área da base.*

Como o prisma é formado por polígonos, então é necessário saber calcular a área das principais figuras geométricas planas, por exemplo, triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos, trapézios, pentágonos e hexágonos regulares.

Exemplo 7 *Observe a Figura 3.23 e responda ao que se pede.*

Figura 3.23 – Área do Prisma



Fonte: Autor.

a) Calcule a área da base do prisma.

b) Calcule a área lateral do prisma.

c) Calcule a área total do prisma.

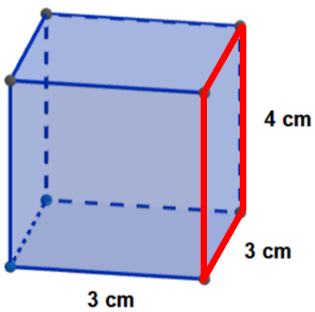
Solução: a) *A base desse prisma é um quadrado de lado 3 cm. Assim:*

$$\begin{aligned} A_{Base} &= l^2 \\ A_{Base} &= 3^2 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Portanto, a área da base é $9\,cm^2$.

b) *Cada uma das 4 faces laterais é um retângulo de dimensões 3 cm e 4 cm, conforme a Figura 3.24. Logo:*

Figura 3.24 – Área Lateral do Prisma



Fonte: Autor.

$$\begin{aligned} A_{Retângulo} &= b \cdot h \\ &= 3 \cdot 4 \\ &= 12. \end{aligned}$$

A área de cada retângulo é $12\,cm^2$. *Assim:*

$$\begin{aligned} A_{Lateral} &= 4 \cdot A_{Retângulo} \\ &= 4 \cdot 12 \\ &= 48. \end{aligned}$$

Logo, a área lateral é $48\,cm^2$.

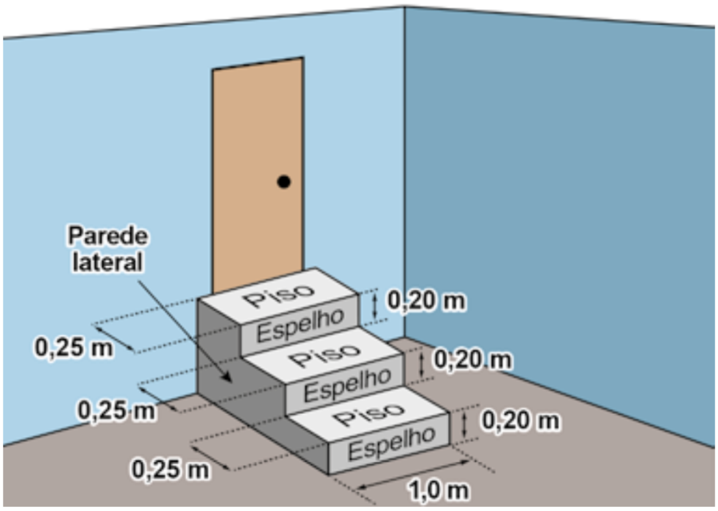
c)

$$\begin{aligned} A_{Total} &= A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base} \\ &= 48 + 2 \cdot 9 \\ &= 48 + 18 \\ &= 66. \end{aligned}$$

Portanto, a área total é $66\,cm^2$.

Exemplo 8 *(ENEM 2021) A figura 3.25 representa uma escada com três degraus, construída em concreto maciço, com suas medidas especificadas. Nessa escada, pisos e espelhos têm formato retangular, e as paredes laterais têm formato de um polígono cujos lados adjacentes são perpendiculares. Pisos, espelhos e paredes laterais serão revestidos em cerâmica.*

Figura 3.25 – Escada



Fonte: ENEM 2021.

A área a ser revestida em cerâmica, em metro quadrado, mede:

a) 1,20.

b) 1,35.

c) 1,65.
d) 1,80.
e) 1,95.

Solução: *Note que a área destinada ao piso é a área de 3 retângulos de dimensões 0,25 m por 1 m.*

$$\begin{aligned} A_{Retângulo} &= 0,25 \cdot 1 \\ &= 0,25. \end{aligned}$$

A área de cada retângulo é $0,25\,m^2$*. Assim:*

$$\begin{aligned} A_{Piso} &= 3 \cdot 0,25 \\ &= 0,75. \end{aligned}$$

A área destinada ao piso é $0,75\,m^2$*. Já a área destinada ao espelho é a área de 3 retângulos de dimensões 0,20 m por 1 m.*

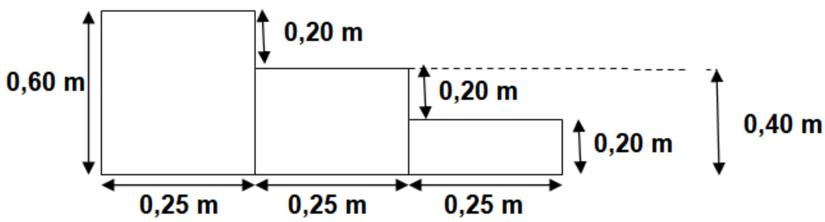
$$\begin{aligned} A_{Retângulo} &= 0,20 \cdot 1 \\ &= 0,20. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} A_{Espelho} &= 3 \cdot 0,20 \\ &= 0,60. \end{aligned}$$

A área do espelho é $0,60\,m^2$*. Cada parede lateral pode ser decomposta em 3 retângulos de dimensões 0,25 m por 0,60 m, 0,25 m por 0,40 m e 0,25 m por 0,20 m conforme a Figura 3.26.*

Figura 3.26 – Parede Lateral



Fonte: Autor.

Assim, a área de uma parede lateral é:

$$\begin{aligned}
A &= 0,25 \cdot 0,60 + 0,25 \cdot 0,40 + 0,25 \cdot 0,20 \\
A &= 0,25 \cdot (0,60 + 0,40 + 0,20) \\
A &= 0,25 \cdot 1,20 \\
A &= 0,30.
\end{aligned}$$

A área de uma parede lateral é $0,30\,m^2$*. Como são duas paredes laterais, então:*

$$\begin{aligned}
A_{Paredes\,laterais} &= 2 \cdot 0,30 \\
&= 0,60.
\end{aligned}$$

Logo, a área das paredes laterais é $0,60\,m^2$*. Assim:*

$$\begin{aligned}
A_{Revestida} &= 0,75 + 0,60 + 0,60 \\
&= 1,95.
\end{aligned}$$

Portanto, a área a ser revestida em cerâmica é $1,95\,m^2$*.*

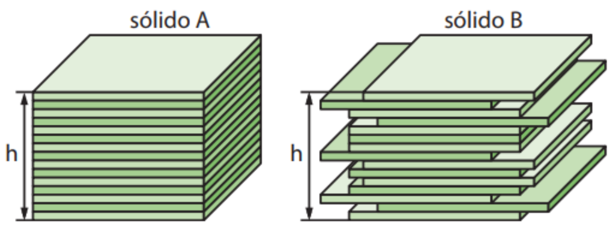
Resposta: alternativa e.

3.2.3 PRINCÍPIO DE CAVALIERI

O Princípio de Cavalieri consiste em um método para Cálculo de Volume de sólidos geométricos por meio da comparação com outro sólido de volume conhecido, desde que certas condições sejam satisfeitas. Primeiramente, ele será abordado de maneira intuitiva, e em seguida, será exposto de maneira formal.

Considere algumas chapas metálicas retangulares (paralelepípedo reto retângulo) de mesmas dimensões e mesmo volume empilhadas de duas formas diferentes, como ilustra a Figura 3.27.

Figura 3.27 – Pilha de Chapas Metálicas



Fonte: referência [21].

Ao analisar a figura, percebe-se que, independentemente da forma como as chapas são empilhadas, o volume de cada pilha de chapas é o mesmo, ou seja, não há alteração. Essa é a noção intuitiva do Princípio de Cavalieri.

Teorema 4 ***(Princípio de Cavalieri):*** *Considere dois sólidos geométricos A e B de mesma altura h, apoiados em um mesmo plano α , e um plano β paralelo a α que secciona A e B formando duas regiões planas de áreas A_1 e A_2. Se as áreas A_1 e A_2 forem iguais para qualquer plano β, então os volumes dos sólidos A e B também são iguais.*

Observação 5 *O Princípio de Cavalieri não pode ser demonstrado usando apenas matemática básica/elementar, são necessários conceitos mais avançados. A demonstração pode ser encontrada em [27].*

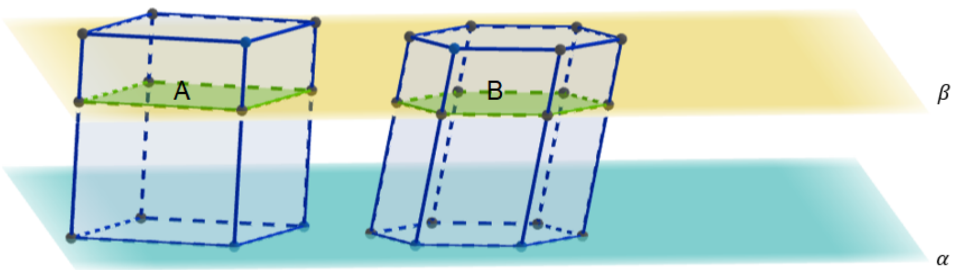
Esse princípio é utilizado para obter o volume de diversos sólidos geométricos. Neste trabalho, será usado para determinar o volume do Prisma, da Pirâmide, do Cilindro, do Cone e da Esfera.

3.2.4 VOLUME DO PRISMA

Uma das aplicações do Princípio de Cavalieri é a obtenção da fórmula para o Cálculo do Volume de Prismas.

Considere um paralelepípedo reto retângulo e um prisma qualquer em um plano α e altura h e de bases com áreas iguais. Todo plano β paralelo a α determina duas regiões planas A e B de áreas iguais, pois são congruentes as respectivas bases do paralelepípedo e do prisma, conforme a Figura 3.28.

Figura 3.28 – Volume do Prisma



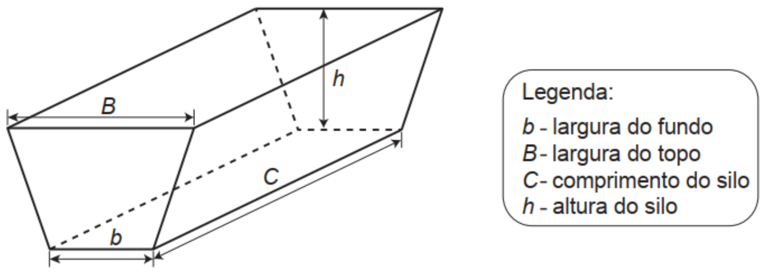
Fonte: Autor.

Pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm volumes iguais. Considere que o volume do paralelepípedo reto retângulo é dado pelo produto entre a área da base e a altura (pois para aplicar o Princípio de Cavalieri é necessário conhecer o volume de um dos sólidos), então:

$$V_{Prisma} = A_{Base} \cdot h$$

Exemplo 9 *(ENEM 2014) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.*

Figura 3.29 – Silo



Fonte: ENEM 2014.

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa $2\,m^3$ *desse tipo de silo.*

EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

a) 110.
b) 125.
c) 130.
d) 220.
e) 260.

Solução: *Analisando a legenda e as informações do enunciado tem-se que:* $h = 2\,m, B = 6\,m, C = 20\,m$.

Como a altura do silo é $h = 2\,m$ *e para cada metro de altura do silo, a largura do topo* (B) *tem* $0,5\,m$ *a mais do que a largura do fundo* (b) *então* B *é* $1\,m$ *maior que* b. *Assim,* $b = 5\,m$.

A área da base do prisma é dada por:

$$\begin{aligned} A_{Trapézio} &= \frac{(B+b)\cdot h}{2} \\ &= \frac{(6+5)\cdot 2}{2} \\ &= 11. \end{aligned}$$

A área do trapézio é $11\,m^2$*. Note que a altura do prisma é* $C = 20\,m$*, pois é a distância entre as duas bases. Logo, o volume do prisma é dado por:*

$$\begin{aligned} V_{Silo} &= A_{Base}\cdot H \\ &= 11\cdot 20 \\ &= 220. \end{aligned}$$

O volume do prisma é $220\,m^3$*. Sabe-se que 1 tonelada de forragem ocupa* $2\,m^3$*, assim. a quantidade máxima de forragem que cabe no silo é* $\frac{220}{2} = 110\,toneladas$*.*

Resposta: alternativa a.

Exemplo 10 *(ENEM 2015) Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25 %, ficando com consistência cremosa.*

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 *e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.*

O volume máximo, em cm^3*, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é*
a) 450.
b) 500.
c) 600.
d) 750.
e) 1 000.

Solução: *O volume da embalagem utilizada é:*

$$
\begin{aligned}
V_{Embalagem} &= 10 \cdot 20 \cdot 10 \\
&= 2000.
\end{aligned}
$$

O volume da embalagem é $2000\,cm^3$*. Como a mistura inicial de chocolate era de* $1000\,cm^3$ *,ao ser congelada, seu volume aumenta 25% e passa a ser* $1000 \cdot 1,25 = 1.250\,cm^3$*. O volume da embalagem é* $2000\,cm^3$*, logo, o volume da mistura sabor morango que pode ser adicionado é* $2000 - 1.250 = 750\,cm^3$*.*

Resposta: alternativa c.

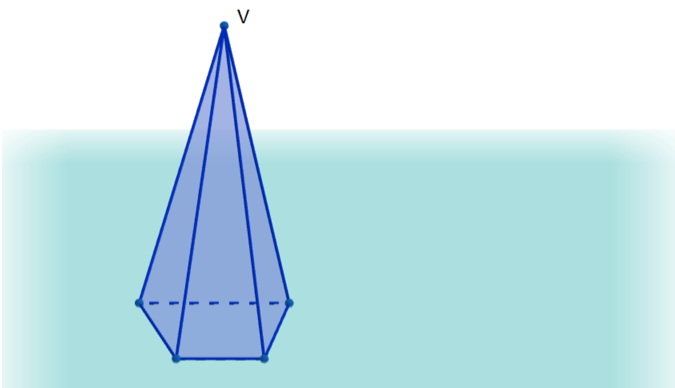
3.3 PIRÂMIDE

As pirâmides são figuras geométricas espaciais muito conhecidas devido às Pirâmides do Egito. Elas são outro tipo de poliedro e, assim como os prismas, estão bastante presentes no dia a dia das pessoas em embalagens, enfeites, obras de arquitetura, brinquedos, etc.

Definição 11 *Considere um polígono convexo contido em um plano* α *e um ponto* V *fora do plano. Denomina-se pirâmide a reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto do polígono e outra no ponto* V*.*

A Figura 3.30 traz um exemplo de pirâmide de base trapezoidal.

Figura 3.30 – Pirâmide



Fonte: Autor.

Em qualquer pirâmide pode-se destacar os seguintes elementos:

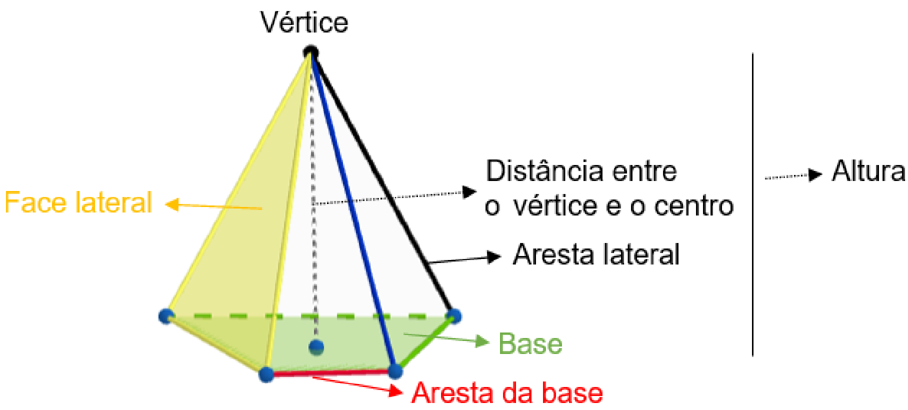
Base: É o polígono que está contido no plano α.

Vértice: É o ponto V, fora do plano α.

Faces laterais: São os triângulos formados ligando os vértices do polígono da base ao vértice da pirâmide.
Arestas da base: São os lados do polígono da base.
Arestas laterais: São os lados de cada uma das faces laterais que não são arestas da base.
Altura: É a distância entre o plano α e o ponto V.

A Figura 3.31 destaca cada um dos elementos de uma pirâmide de base trapezoidal.

Figura 3.31 – Elementos de uma Pirâmide



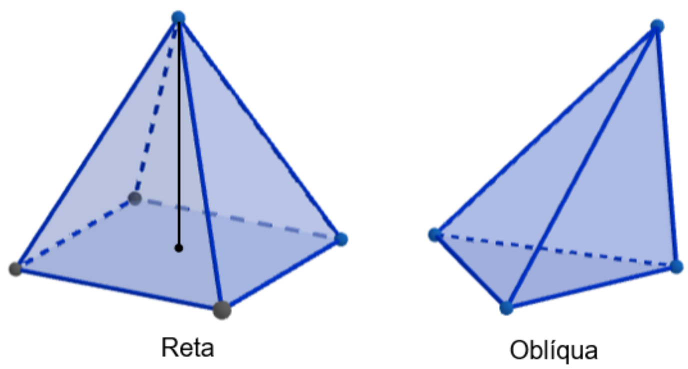
Fonte: Autor.

As pirâmides podem ser classificadas em reta ou oblíqua e em regulares ou irregulares. Elas também são denominadas de acordo com o polígono que forma a sua base.

Definição 12 *Uma pirâmide é dita reta quando a projeção do vértice coincide com o centro da base. Caso contrário, é dita oblíqua.*

A Figura 3.32 ilustra essa distinção.

Figura 3.32 – Pirâmide Reta/Oblíqua

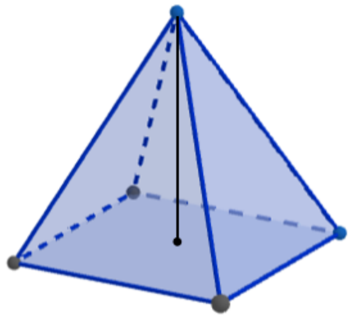


Fonte: Autor.

Definição 13 *Uma pirâmide é dita regular quando for reta e sua base for formada por um polígono regular.*

A Figura 3.33 traz um exemplo de pirâmide regular.

Figura 3.33 – Pirâmide Regular



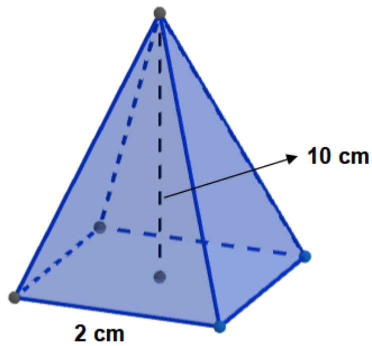
Fonte: Autor.

3.3.1 ÁREA DA SUPERFÍCIE DA PIRÂMIDE

As definições de área da base e área lateral são as mesmas apresentadas na seção de prismas. Lembre-se que as pirâmides, diferentemente dos prismas, possuem apenas uma base, por isso, a área total é igual a soma entre a área da base e a área lateral. A seguir, será apresentado um exemplo.

Exemplo 11 *Observe a Figura 3.34 (Pirâmide regular) e faça o que se pede:*

Figura 3.34 – Área da Pirâmide



Fonte: Autor.

a) Calcule a área da base da pirâmide.

b) Calcule a área lateral da pirâmide.

c) Calcule a área total da pirâmide.

Solução: a) A base da pirâmide é um quadrado, assim:

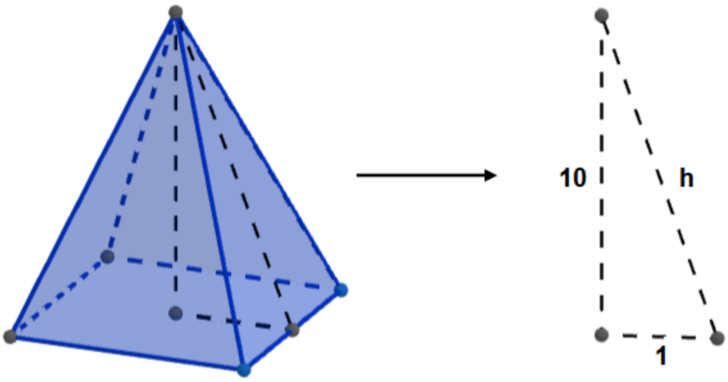
$$\begin{aligned} A_{Base} &= l^2 \\ A_{Base} &= 2^2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Logo, a área da base da pirâmide é $4\,cm^2$.

b) Cada face lateral é um triângulo isósceles de base $2\,cm$. Para calcular a altura desses triângulos pode-se utilizar o Teorema de Pitágoras.

Observe que um cateto coincide com a altura da Pirâmide e, consequentemente, mede $10\,cm$, e o outro corresponde a metade da aresta da base, logo, mede $1\,cm$, conforme a Figura 3.35.

Figura 3.35 – Área da Pirâmide - editada



Fonte: Autor.

Assim:

$$\begin{aligned} h^2 &= 10^2 + 1^2 \\ h^2 &= 100 + 1 \\ h &= \sqrt{101}. \end{aligned}$$

A altura do triângulo é $h = \sqrt{101}\,cm$. Assim:

$$\begin{aligned} A_{Triângulo} &= \frac{b \cdot h}{2} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{101}}{2} \\ &= \sqrt{101}. \end{aligned}$$

A área de cada face lateral é $\sqrt{101}\,cm^2$. Como são 4 faces laterais, então:

$$A_{Lateral} = 4 \cdot \sqrt{101}.$$

Portanto, a área lateral da pirâmide é $4 \cdot \sqrt{101}\,cm^2$.

c)

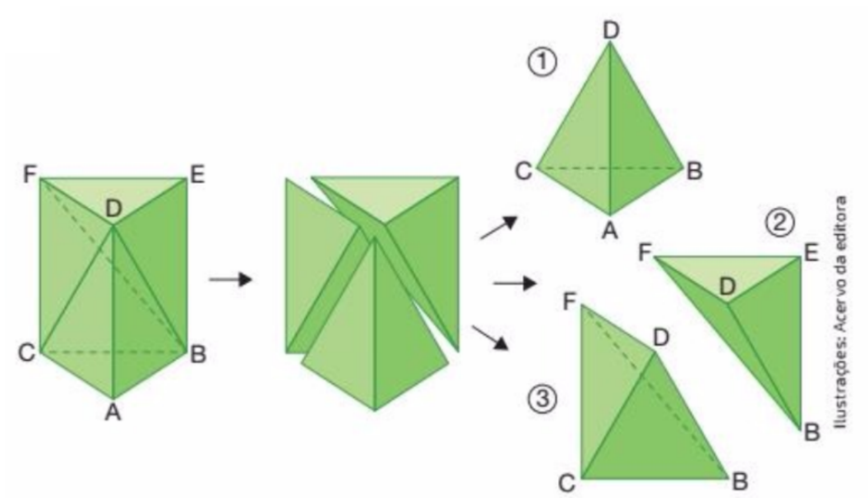
$$\begin{aligned} A_{Total} &= A_{Base} + A_{Lateral} \\ A_{Total} &= 4 \cdot (1 + \sqrt{101}). \end{aligned}$$

Portanto, a área total da pirâmide é $4 \cdot (1 + \sqrt{101})\,cm^2$.

3.3.2 VOLUME DA PIRÂMIDE

Esse resultado é apresentado aos alunos do ensino médio de forma mais simples, apenas relacionando prismas e pirâmides, como será exposto a seguir. Considere um prisma de base triangular e divida-o em três pirâmides triangulares de mesmo volume, conforme a Figura 3.36.

Figura 3.36 – Volume da Pirâmide



Fonte: referência [23].

Vamos mostrar que as três pirâmides têm volumes iguais. Primeiramente, observe que as bases das pirâmides 1 e 2 são congruentes, pois correspondem as bases do prisma e elas também possuem a mesma altura, que é igual a altura do prisma. Logo, as pirâmides 1 e 2 possuem volumes iguais.

Por outro lado, as bases das pirâmides 2 e 3 são congruentes e elas têm a mesma altura, que corresponde à distância entre o ponto O e o paralelogramo BEFC. Desse modo, as pirâmides 2 e 3 têm o mesmo volume. Portanto, as pirâmides têm volumes iguais. Assim, conclui-se que o volume de uma Pirâmide é igual ao volume do Prisma dividido por três.

$$\begin{aligned} V_{Pirâmide} &= \frac{V_{Prisma}}{3} \\ &= \frac{A_{Base} \cdot h}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h \end{aligned}$$

Esse resultado não é restrito apenas às pirâmides de base triangular, pois o Princípio de Cavalieri permite a generalização para pirâmides quaisquer. Dessa forma, pode-se enunciar a seguinte conclusão:

Teorema 5 *O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela sua altura.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [30].

Exemplo 12 *Calcule a altura, em cm, de uma pirâmide de base retangular sabendo que as dimensões da sua base são* $25\,cm \times 12\,cm$ *e o seu volume é* $1.300\,cm^3$.

Solução: *Note que a base é um retângulo. Assim:*

$$\begin{aligned} A_{Base} &= 25 \cdot 12 \\ &= 300. \end{aligned}$$

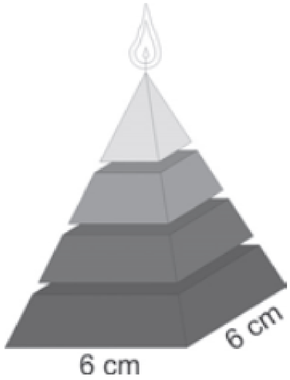
A área da base é $300\,cm^2$*. Então:*

$$\begin{aligned} V_{Pirâmide} &= \frac{A_{Base} \cdot h}{3} \\ 1300 &= \frac{300 \cdot h}{3} \\ 1300 &= 100 \cdot h \\ h &= 13. \end{aligned}$$

Portanto a altura da pirâmide é $13\,cm$.

Exemplo 13 *(ENEM 2009) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com* $19\,cm$ *de altura e* $6\,cm$ *de aresta da base. Essas velas são formadas* *por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de* $1\,cm$ *entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura 3.37.*

Figura 3.37 – Pirâmide - Vela



Fonte: ENEM 2009.

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem $1,5\,cm$ *de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?*
$a)156\,cm^3$.
$b)189\,cm^3$.
$c)192\,cm^3$.
$d)216\,cm^3$.
$e)540\,cm^3$.

Solução: *Existem 3 espaços entre os blocos e cada um deles mede* $1\,cm$*, logo, a altura da pirâmide com os blocos justapostos é* $h = 19 - 3 = 16\,cm$

A área da base da pirâmide é $A_{Base} = 6^2 = 36\,cm^2$*. Assim:*

$$\begin{aligned} V_{Pirâmide} &= \frac{36 \cdot 16}{3} \\ &= 12 \cdot 16 \\ &= 192. \end{aligned}$$

O volume da pirâmide maior é $192\,cm^3$*. A área da base da pirâmide menor é* $A_{Base} = 1,5^2 = 2,25\,cm^2$*. Como os blocos têm a mesma altura, então a altura da pirâmide* *menor é* $h = 4$ *e seu volume é:*

$$\begin{aligned} V_{Menor} &= \frac{2,25 \cdot 4}{3} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3. \end{aligned}$$

O volume da pirâmide menor é $3\,cm^3$. *Portanto, o dono passará a gastar* $192 - 3 = 189\,cm^3$.

Resposta: alternativa b.

3.4 NÃO POLIEDROS

Os sólidos geométricos espaciais que não satisfazem a definição de poliedros são chamados de não poliedros. Dentre esses, destacam-se os corpos redondos.

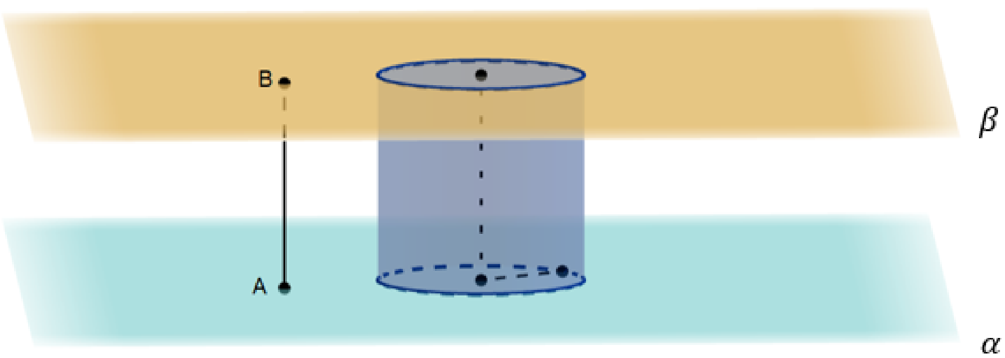
3.4.1 CILINDRO

O cilindro é uma figura geométrica espacial cuja forma serve como referência para a criação de embalagens, tubos, copos, lâmpadas, extintores de incêndio, latas de refrigerante, etc. Logo, é uma figura conhecida pela maioria das pessoas.

Definição 14 *Considere um círculo de centro* O *e raio* r *contido em um plano* α*, um plano* β *paralelo a* α *e um segmento de reta* AB *com* $A \in \alpha$ *e* $B \in \beta$*. Denomina-se cilindro o conjunto de todos os segmentos de reta com uma extremidade no círculo e outra em* β *que são paralelos e congruentes a* AB*.*

A Figura 3.38 ilustra um cilindro.

Figura 3.38 – Cilindro

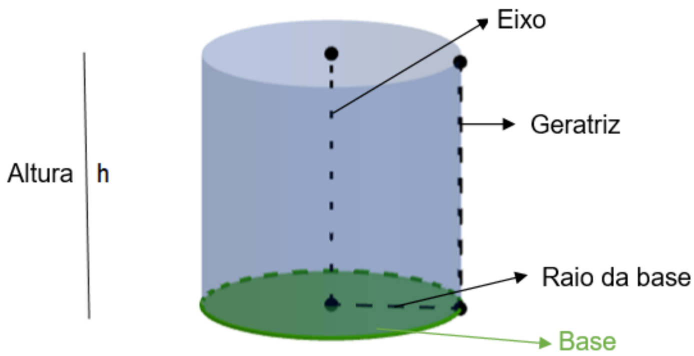


Fonte: Autor.

Em qualquer cilindro pode-se destacar os seguintes elementos:
Bases: são círculos paralelos de mesmo raio r.
Eixo: é a reta que liga os centros das bases.
Geratrizes: são os segmentos de reta com extremidades nas duas bases e paralelos ao eixo.
Altura: é a distância entre os planos que contêm as bases.

A Figura 3.39 destaca cada um dos elementos de um cilindro.

Figura 3.39 – Elementos de um Cilindro



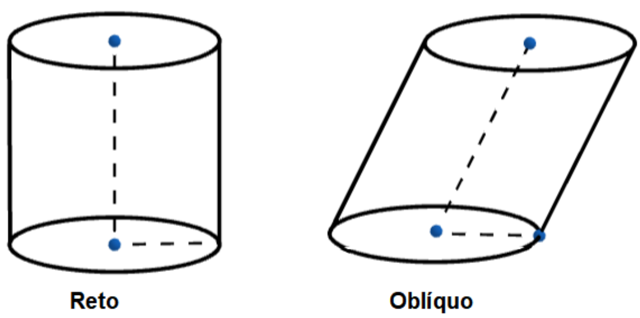
Fonte: Autor.

Os cilindros também podem ser classificados como retos ou oblíquos.

Definição 15 *Um cilindro é reto(ou de revolução) quando as geratrizes são perpendiculares às bases e oblíquo quando as geratrizes são oblíquas às bases.*

Observe essa distinção na Figura 3.40.

Figura 3.40 – Classificação dos Cilindros



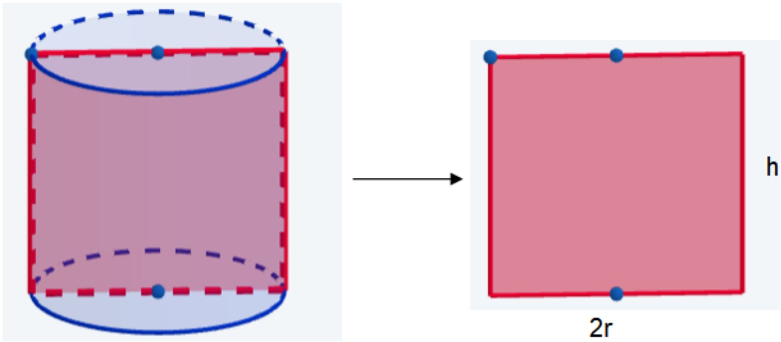
Fonte: Autor.

Outro aspecto relevante em provas do ENEM diz respeito a possibilidade de um cilindro ser seccionado por um plano que contém o seu eixo.

Definição 16 *A seção meridiana é a região que se obtém a partir da interseção do cilindro com um plano que contém o seu eixo.*

Observe um cilindro e sua seção meridiana na Figura 3.41.

Figura 3.41 – Cilindro - Seção Meridiana



Fonte: Autor.

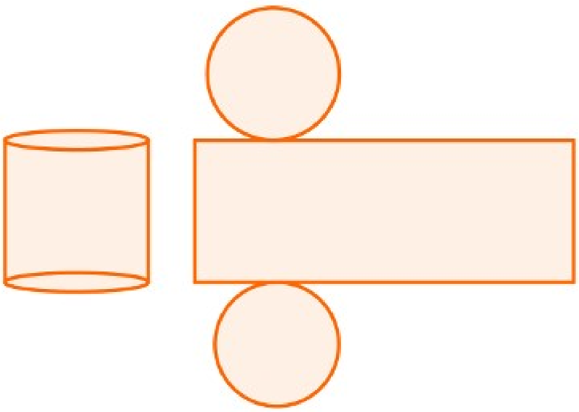
Observação 6 *A seção meridiana de um cilindro oblíquo é um paralelogramo, enquanto a de um cilindro reto é um retângulo. Caso a seção meridiana seja um quadrado* $(2r = h)$*, esse cilindro é chamado de equilátero.*

3.4.1.1 PLANIFICAÇÃO E ÁREA DA SUPERFÍCIE DE UM CILINDRO

A planificação do cilindro consiste em representá-lo no plano cartesiano, ou seja, em apenas duas dimensões.

A Figura 3.42 retrata um cilindro e sua planificação.

Figura 3.42 – Planificação do Cilindro



Fonte: Brasil Escola, referência [29].

Ao analisá-la, pode-se extrair a seguinte definição.

Definição 17 *A área da base corresponde à área do círculo que forma a base. A área lateral corresponde à área de um retângulo de base* $2\pi r$ *(comprimento da circunferência da base do cilindro) e altura* h *. Já a área total corresponde à soma da área lateral com duas vezes a área da base.*

Observe que:

$$\begin{aligned} A_{Total} &= 2\pi r^2 + 2\pi r h. \\ &= 2\pi r(r+h). \end{aligned}$$

Em **resumo**, tem-se:

$$\begin{aligned} A_{Base} &= \pi \cdot r^2. \\ A_{Lateral} &= 2\pi r h. \\ A_{Total} &= 2\pi r(r+h). \end{aligned}$$

A partir desse ponto, nos cálculos de áreas e volumes do cilindro, cone e esfera o número π estará presente. Ele é obtido ao dividir o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro. Essa divisão não é exata e o seu resultado, quando escrito na forma decimal, apresenta uma quantidade infinita de dígitos não periódicos. Portanto, o π é um número irracional.

Por conta disso, para facilitar os cálculos, em algumas questões são utilizadas aproximações para o π. A mais popular é 3,14, porém, várias questões do ENEM sobre cálculo de área ou volume adotam o 3 como aproximação para o π.

Exemplo 14 *Considere um cilindro cujo raio da base seja 6 cm e altura 8 cm. Calcule a área total do cilindro.*

Solução: *O raio é 6 cm e a altura 8 cm, então:*

$$\begin{aligned} A_{Total} &= 2\pi \cdot 6 \cdot (6+8) \\ &= 12\pi \cdot 14 \\ &= 168\pi. \end{aligned}$$

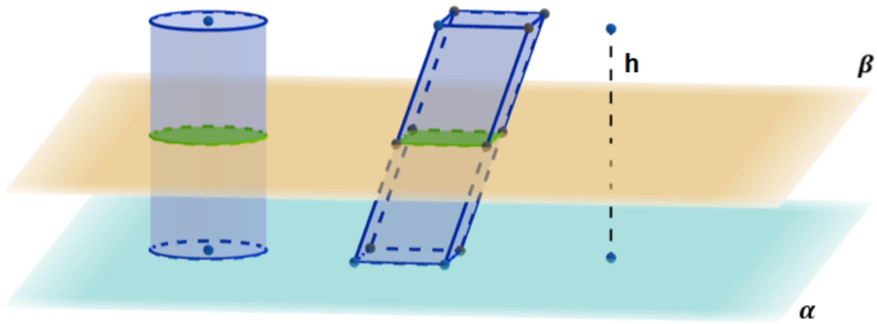
Portanto, a área total do cilindro é 168π cm^2*.*

3.4.1.2 VOLUME DO CILINDRO

O Cálculo do Volume do Cilindro é outra importante aplicação do Princípio de Cavalieri.

Considere um cilindro e um prisma em um plano α, ambos com altura h (alturas iguais) e com bases de mesma área. Todo plano β paralelo ao anterior determina seções com áreas iguais nos dois sólidos, pois são congruentes as respectivas bases do cilindro e do prisma, como ilustra a figura 3.43.

Figura 3.43 – Volume do Cilindro



Fonte: Autor.

Conclui-se, pelo Princípio de Cavalieri, que os volumes dos dois sólidos são iguais. Portanto, o volume do cilindro é igual ao produto entre a área da base e a altura. Como a base é um círculo, então:

$$V_{Cilindro} = \pi r^2 h$$

Exemplo 15 *(ENEM 2015) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.*

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?
a) 0,5
b) 1,0
c) 2,0
d) 3,5
e) 8,0

Solução: *O volume desejado é* $V = 81\,m^3$. *Seja* R *o novo raio. Assim:*

$$\begin{aligned} V_{Novo} &= \pi R^2 \dot{h} \\ 81 &= 3 \cdot R^2 \cdot 3 \\ 81 &= 9R^2 \\ R^2 &= \frac{81}{9} \\ R^2 &= 9 \\ R &= \sqrt{9} \\ R &= 3. \end{aligned}$$

O novo raio é 3 m e o antigo era 1 m, logo, o aumento foi de 2 m.

Resposta: alternativa c.

Exemplo 16 *(ENEM 2015) O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em* $1\,m^2$, *ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com* $1\,m^2$ *de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1 200 mm, era de um terço da sua capacidade. Utilize 3,0 como aproximação para* π.

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de

a) 10,8.
b) 12,0.
c) 32,4.
d) 108,0.
e) 324,0.

Solução: *O volume de água acumulado na lata cilíndrica era:*

$$\begin{aligned} V_{Lata} &= \frac{\pi r^2 h}{3} \\ &= \frac{3 \cdot 300^2 \cdot 1200}{3} \\ &= 90000 \cdot 1200 \\ &= 108.000.000. \end{aligned}$$

O volume de água acumulado foi $108.000.000\,mm^3$. *Perceba que no tanque em formato de cubo, a base é um quadrado cuja área é* $1\,m^2$*, que é equivalente a* $1000000\,mm^2$. *Agora, basta igualar os volumes para descobrir a altura da água no cubo.*

$$\begin{aligned} 1.000.000 \cdot H &= 108.000.000 \\ H &= 108. \end{aligned}$$

Portanto, o índice pluviométrico é $108\,mm$.

Resposta: alternativa d.

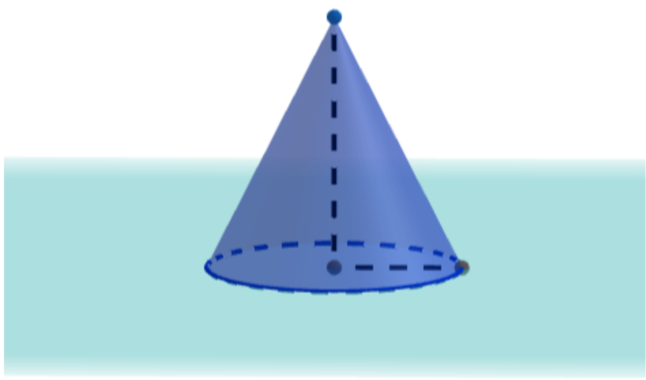
3.4.2 CONE

O Cone é um sólido geométrico bem conhecido porque é o formato de casquinhas de sorvete, chapéus de aniversário e cones de trânsito.

Definição 18 *Considere um plano* α *e um círculo (contido em* α*) de centro* O *e um ponto* V *fora de* α*. Denomina-se cone (ou cone circular) a reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no círculo e outra no ponto* V*.*

A Figura 3.44 traz a representação de um cone.

Figura 3.44 – Cone

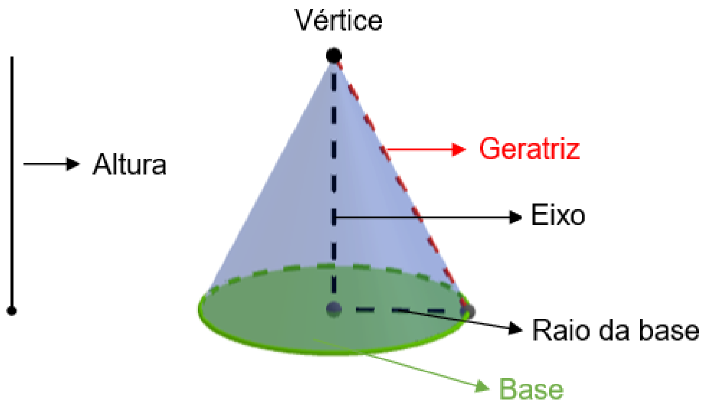


Fonte: Autor.

Em qualquer cone pode-se destacar os seguintes elementos:
Base: É um círculo.
Vértice: É o ponto V, fora do plano α.
Geratrizes (g)**:** são os segmentos de reta com extremidades na circunferência da base e no vértice V.
Eixo: é a reta que liga o centro do círculo da base ao vértice V.
Altura: É a distância entre o plano α e o ponto V.

A figura 3.45 destaca os elementos de um Cone.

Figura 3.45 – Elementos de um Cone



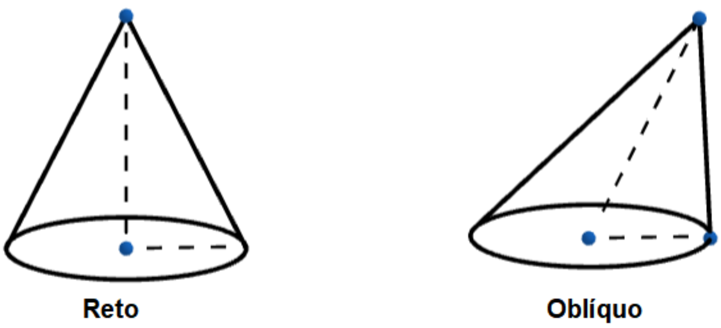
Fonte: Autor.

Os cones também podem ser classificados como retos ou oblíquos.

Definição 19 *Um Cone é reto (ou de revolução) quando seu eixo é perpendicular a sua base e oblíquo quando seu eixo não é perpendicular a sua base.*

A Figura 3.46 ilustra essa diferença.

Figura 3.46 – Cone Reto/Oblíquo



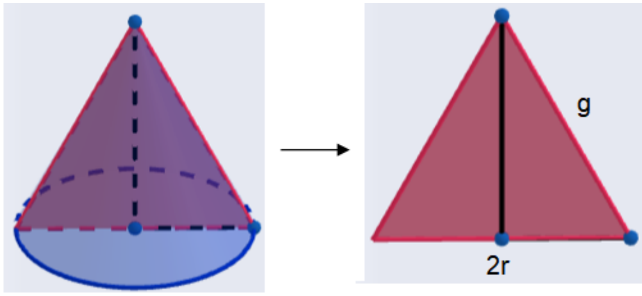
Fonte: Autor.

Assim como os cilindros, os cones também podem ser seccionados por um plano que contém o seu eixo.

Definição 20 *Seção Meridiana é a região que se obtém a partir da interseção do cone com um plano que contém o seu eixo.*

Observe um cone e sua seção meridiana na Figura 3.47.

Figura 3.47 – Seção Meridiana no Cone



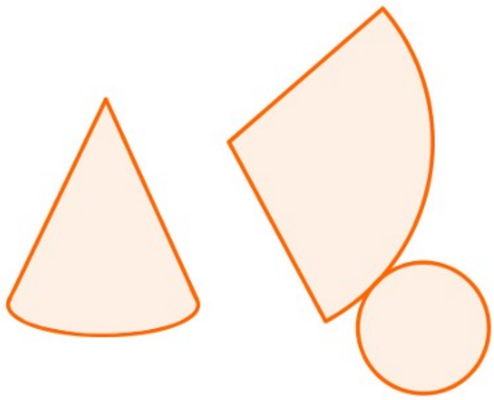
Fonte: Autor.

Observação 7 *A seção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles. No caso em que a seção meridiana de um cone é um triângulo equilátero (2r= g), esse cone é chamado de equilátero.*

3.4.2.1 PLANIFICAÇÃO E ÁREA DA SUPERFÍCIE DE UM CONE

A Figura 3.48 ilustra a planificação de um cone.

Figura 3.48 – Planificação do Cone



Fonte: Brasil Escola, referência [29].

Ao analisá-la pode-se extrair a seguinte definição.

Definição 21 *A área da base corresponde à área de um círculo (assim como a do cilindro). A área lateral corresponde à área de um setor circular de raio g (geratriz do cone) e comprimento* $2\pi r$. *Por fim, A área total corresponde à soma da área lateral com a área da base.*

A área de um setor circular é calculada por meio de uma regra de três simples porque é proporcional ao comprimento do arco. Como o referido setor circular possui raio g (geratriz do cone), então:

$$\begin{aligned} Comprimento\,do\,arco &\;-\; \acute{A}rea\,do\,setor \\ 2\pi g &\;-\; \pi g^2 \\ 2\pi r &\;-\; A_{Lateral} \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} 2\pi g \cdot A_{Lateral} &= 2\pi r \cdot \pi g^2 \\ A_{Lateral} &= \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g} \\ A_{Lateral} &= \pi r g. \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned} A_{Total} &= \pi r^2 + \pi r g \\ A_{Total} &= \pi r(r+g). \end{aligned}$$

Em **resumo**, tem-se:

$$\begin{aligned} A_{Base} &= \pi r^2. \\ A_{Lateral} &= \pi r g. \\ A_{Total} &= \pi r(r+g). \end{aligned}$$

Exemplo 17 *Calcule a área total de um cone reto cujo raio da base é 6 cm e a altura é 8 cm.(Use 3 como aproximação para π)*

Solução: *A geratriz do cone é:*

$$\begin{aligned} g^2 &= r^2 + h^2 \\ g^2 &= 6^2 + 8^2 \\ g^2 &= 36 + 64 \\ g^2 &= 100 \\ g &= 10. \end{aligned}$$

A geratriz do cone é $10\,cm$. *Logo:*

$$\begin{aligned} A_{Total} &= \pi r(r+g) \\ &= 3 \cdot 6 \cdot (6+10) \\ &= 18 \cdot 16 \\ &= 288. \end{aligned}$$

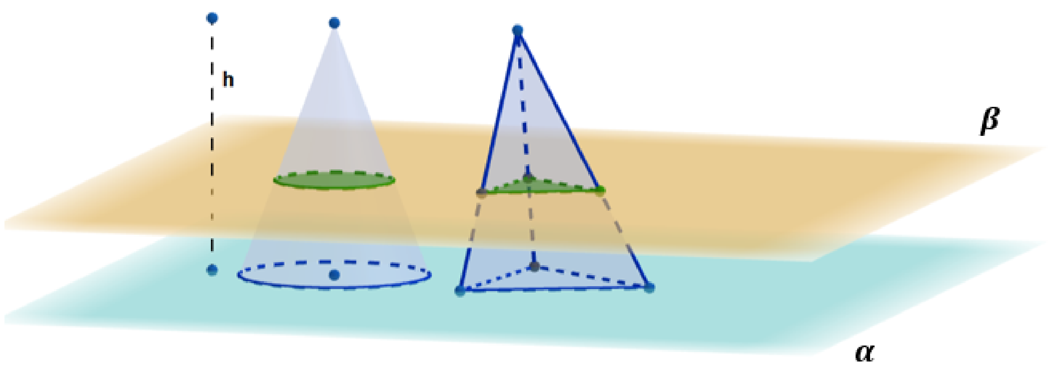
Portanto, a área total do cone reto é $288\,cm^2$.

3.4.2.2 VOLUME DO CONE

O Cálculo do Volume do Cone é mais uma importante aplicação do Princípio de Cavalieri.

Considere um cone e uma pirâmide em um plano α, ambos com altura h (alturas iguais) e com bases de mesma área. Todo plano β paralelo ao anterior determina seções com áreas iguais nos dois sólidos,pois são congruentes as respectivas bases do cilindro e da pirâmide, como ilustra a Figura 3.49.

Figura 3.49 – Volume do Cone



Fonte: Autor.

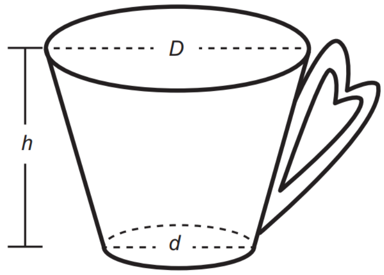
Conclui-se, pelo Princípio de Cavalieri, que os volumes do cone e da pirâmide são iguais, então:

$$\begin{aligned} V_{Cone} &= \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \dot{\pi} r^2 h \end{aligned}$$

Exemplo 18 *Uma pessoa comprou uma caneca para tomar sopa, conforme ilustração.*

Sabe-se que $1\,cm^3 = 1\,mL$ *e que o topo da caneca é uma circunferência de diâmetro (D) medindo 10 cm, e a base é um círculo de diâmetro (d) medindo 8 cm. Além*

Figura 3.50 – Tronco de Cone



Fonte: ENEM 2021.

disso, sabe-se que a altura (h) dessa caneca mede 12 cm (distância entre o centro das circunferências do topo e da base). Utilize 3 como aproximação para π. Qual é a capacidade volumétrica, em mililitro, dessa caneca?

a) 216

b) 408

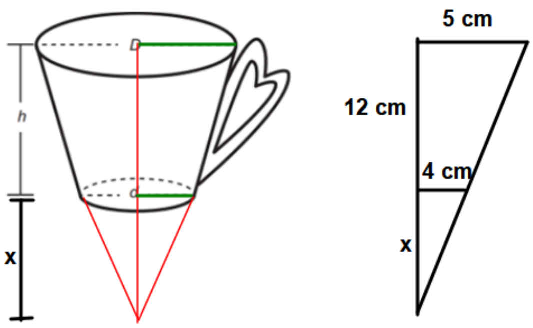
c) 732

d) 2 196

e) 2 928

Solução: *Note que os raios dos círculos são respectivamente, 5 cm e 4 cm. Em seguida, complete o Cone como mostra a Figura 3.51.*

Figura 3.51 – Tronco de Cone - adaptada



Fonte: ENEM 2021, adaptada pelo autor.

Por semelhança de triângulos tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} &= \frac{12+x}{x} \\ 5x &= 48+4x \\ 5x-4x &= 48 \\ x &= 48. \end{aligned}$$

A altura do cone menor é $48\,cm$. *Já a altura do cone maior é* $H = 12+48 = 60\,cm$.

Assim:

$$\begin{aligned} V_{Maior} &= \frac{\pi R^2 H}{3} \\ &= \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 60}{3} \\ &= 25 \cdot 60 \\ &= 1500. \end{aligned}$$

O volume do cone maior é $1500\,cm^3$. *A altura do cone menor é* $x = 48\,cm$. *Logo:*

$$\begin{aligned} V_{Menor} &= \frac{\pi r^2 x}{3} \\ &= \frac{3 \cdot 4^2 \cdot 48}{3} \\ &= 16 \cdot 48 \\ &= 768. \end{aligned}$$

O volume do cone menor é $768\,cm^3$. *Assim:*

$$\begin{aligned} V_{Caneca} &= 1500 - 768 \\ &= 732. \end{aligned}$$

o volume da caneca é $732\,cm^3$. *Como* $1\,cm^3 = 1\,mL$, *então a resposta procurada é* $732\,mL$.

Resposta: alternativa c.

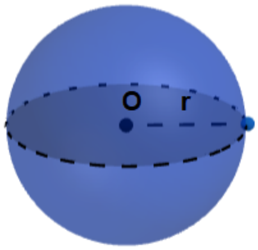
3.4.3 ESFERA

Embora essa associação não seja feita, um dos objetos de maior representatividade para os brasileiros tem a forma de uma Esfera: a bola de futebol. Existem vários outros exemplos como chocolates, enfeites de natal, brinquedos e até o planeta Terra.

Definição 22 *Considere um ponto* O *e um segmento de reta de medida* r. *Chama-se de Esfera de centro* O *e raio* r *o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto* O *seja menor ou igual a* r.

A Figura 3.52 traz a representação de uma esfera.

Figura 3.52 – Esfera

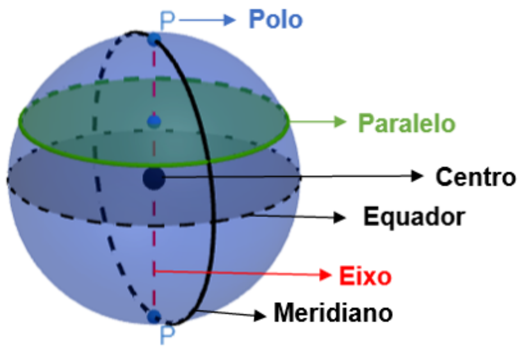


Fonte: Autor.

Em qualquer esfera pode-se destacar os seguintes elementos:
Centro: é o ponto O.
Eixo: é qualquer reta que contém o centro O.
Polos: são os pontos de interseção da superfície da esfera com o eixo.
Equador: é a circunferência obtida ao secionar a esfera por um plano que passe pelo ponto O e, ao mesmo tempo, seja perpendicular ao eixo.
Paralelos: são todas as circunferências paralelas ao equador (obtidas pela seção da esfera por planos paralelos ao equador).
Meridianos: são todas as circunferências obtidas ao secionar a esfera por planos que passam pelo eixo.

A Figura 3.53 mostra a identificação dos elementos de uma esfera.

Figura 3.53 – Elementos da Esfera



Fonte: Autor.

3.4.3.1 ÁREA DA SUPERFÍCIE DA ESFERA

Agora o estudo será voltado para a área da esfera. De maneira informal, a superfície da esfera representa o seu revestimento, isto é, o seu contorno.

Teorema 6 *A área da superfície da esfera de raio r é dada por $4\pi r^2$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [21].

Exemplo 19 *Qual a terça parte da área de uma esfera cujo raio mede 9 cm? (Considere $\pi = 3$).*

Solução: *Para resolver a questão basta calcular a área da esfera e dividí-la por 3, assim:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot A_{Esfera} &= \frac{4\pi r^2}{3} \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 9^2}{3} \\ &= 4 \cdot 81 \\ &= 324.\end{aligned}$$

Portanto, A terça parte da área da esfera é $324\,cm^2$.

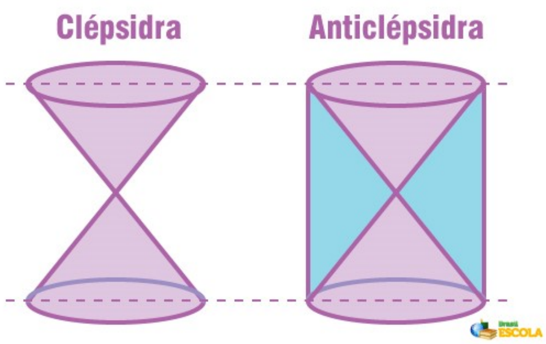
3.4.3.2 VOLUME DA ESFERA

De início, faz-se necessário definir a clépsidra e a anticlépsidra (sólidos que auxiliarão na dedução da fórmula para calcular o volume da esfera).

Definição 23 *A anticlépsidra é um sólido formado a partir da retirada de dois cones (opostos pelo vértice e cujas bases coincidem com as bases do cilindro) de um cilindro equilátero.*

A Figura 3.54 ilustra os referidos sólidos.

Figura 3.54 – Clépsidra e Anticlépsidra



Fonte: Brasil Escola, referência [28].

Observe que:

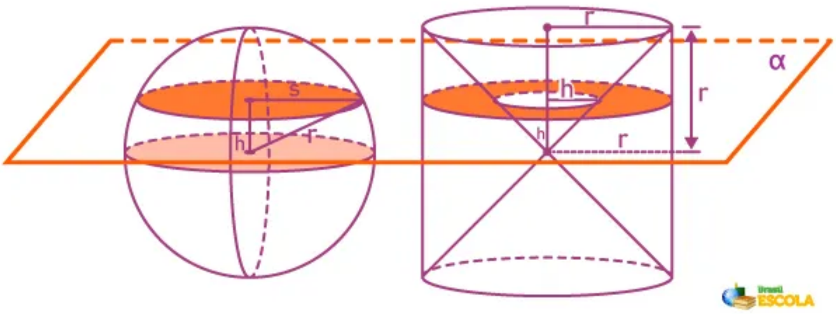
$$\begin{aligned}V_{Anticlepsidra} &= V_{Cilindro} - V_{Clepsidra} \\ &= V_{Cilindro} - 2 \cdot V_{Cone} \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot H - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.\end{aligned}$$

Como o cilindro é equilátero, então a altura H é igual ao dobro do raio da base, isto é, $H = 2r$. Assim, a altura h de cada cone é igual a metade da altura do cilindro, ou seja $h = r$. Assim:

$$\begin{aligned} V_{anticlepsidra} &= \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r \\ &= 2\pi \cdot r^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3. \end{aligned}$$

Agora, considere uma esfera de raio r e uma anticlépsidra de altura $h = 2r$ (os dois sólidos têm alturas iguais) sendo seccionados por um plano α paralelo ao plano da base, conforme a Figura 3.55.

Figura 3.55 – Esfera e Cilindro Seccionados



Fonte: Brasil Escola, referência [28].

Note que a primeira seção é um círculo de raio s. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} r^2 &= h^2 + s^2. \\ s^2 &= r^2 - h^2. \end{aligned}$$

Substituindo, tem-se:

$$\begin{aligned} A_{Círculo} &= \pi \cdot s^2 \\ &= \pi \cdot (r^2 - h^2). \end{aligned}$$

A segunda seção é uma coroa circular na qual o raio maior é r e o menor é h, logo:

$$A_{Coroa} = \pi \cdot (r^2 - h^2).$$

Dessa forma, as áreas das duas seções são iguais e pelo Princípio de Cavalieri, o volume da esfera é igual ao volume da anticlépsidra.

Portanto, o volume da esfera de raio r é dado por:

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3.$$

Exemplo 20 *(ENEM 2014) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.*

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas. Use 3 como valor aproximado para π.

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a
a) 168.
b) 304.
c) 306.
d) 378.
e) 514.

Solução: *Cada pílula é formada por um cilindro e uma esfera (uma semiesfera em cada extremidade). Inicialmente, os cilindros têm 10 mm de comprimento (esta é a altura dos cilindros) e raio 5 mm (mesmo raio da esfera). Assim:*

$$\begin{aligned} V_{Inicial} &= V_{Cilindro} + V_{Esfera} \\ &= 3 \cdot 5^2 \cdot 10 + \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 5^3 \\ &= 30 \cdot 25 + 4 \cdot 125 \\ &= 750 + 500 \\ &= 1.250. \end{aligned}$$

O volume inicial de cada pílula é $1.250\, mm^3$. Como o raio passou a ser 4 mm, *então:*

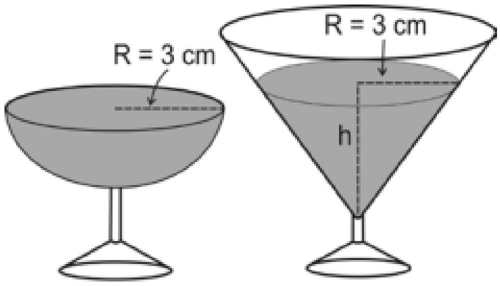
$$\begin{aligned} V_{Final} &= V_{Cilindro} + V_{Esfera} \\ &= 3 \cdot 4^2 \cdot 10 + \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 4^3 \\ &= 30 \cdot 16 + 4 \cdot 64 \\ &= 480 + 256 \\ &= 736. \end{aligned}$$

O novo volume de cada pílula é $736\,mm^3$. *Portanto, a redução do volume da pílula foi* $1.250 - 736 = 514\,mm^3$.

Resposta: alternativa e.

Exemplo 21 *(ENEM 2010 - editada) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério, porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone. No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.*

Figura 3.56 – Taças



Fonte: ENEM 2010.

Considere: $V_{Esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$ *e* $V_{Cone} = \frac{1}{3}\dot{\pi} r^2 h$.

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33
b) 6,00
c) 12,00
d) 56,52
e) 113,04

Solução: *O volume da primeira taça é igual a metade do volume da esfera de raio 3 cm. Note que o raio do cone também é 3 cm. Como os volumes devem ser iguais, tem-se*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot V_{Esfera} &= V_{Cone} \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 &= \frac{1}{3}\dot{\pi} r^2 h \\
\frac{2}{3} \cdot r^3 &= \frac{1}{3}\dot{r}^2 h \\
2 \cdot r^3 &= r^2 h \\
2 \cdot 3^3 &= 3^2 h \\
2 \cdot 27 &= 39h \\
h &= \frac{2 \cdot 27}{9} \\
h &= 2 \cdot 3 \\
h &= 6.
\end{aligned}$$

Portanto, a altura deve ser $6\,cm$.

Resposta: alternativa b.

3.5 QUESTÕES DO ENEM

Esta seção tem por objetivo apresentar algumas questões recorrentes nas provas do ENEM referentes à poliedros, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas acompanhadas das suas respectivas soluções.

As questões expostas a seguir refletem o perfil de cobrança de tais assuntos no período levantado (2009 a 2023). Quando conveniente, buscando facilitar o entendimento para o leitor, o autor editou algumas figuras.

Visando uma organização mais adequada, as questões serão divididas em dois tópicos. Por ter maior relevância e cobrança, o primeiro referente ao Cálculo de Volumes, enquanto o segundo refere-se aos demais assuntos cobrados, porém de forma menos significativa.

3.5.1 CÁLCULO DE VOLUME

Questão 1 ***(ENEM 2023)*** *A água utilizada pelos 75 moradores de um vilarejo provém de um reservatório de formato cilíndrico circular reto cujo raio da base mede 5 metros, sempre abastecido no primeiro dia de cada mês por caminhões-pipa. Cada morador desse vilarejo consome, em média, 200 litros de água por dia.*

No mês de junho de um determinado ano, o vilarejo festejou o dia do seu padroeiro e houve um gasto extra de água nos primeiros 20 dias. Passado esse período, as pessoas verificaram a quantidade de água presente no reservatório e constataram que o nível da coluna de água estava em 1,5 metro. Decidiram, então, fazer um racionamento de água durante os 10 dias seguintes. Considere 3 como aproximação para π.

Qual é a quantidade mínima de água, em litro, que cada morador, em média, deverá economizar por dia, de modo que o reservatório não fique sem água nos próximos 10 dias?
a) 50
b) 60
c) 80
d) 140
e) 150

Solução: *A quantidade de água restante é representada pelo volume do cilindro de raio*

$r = 5\,m$ *e altura* $h = 1,5\,m$.

$$\begin{aligned} V_{Restante} &= \pi r^2 h \\ &= 3 \cdot 5^2 \cdot 1,5 \\ &= 4,5 \cdot 25 \\ &= 112,5. \end{aligned}$$

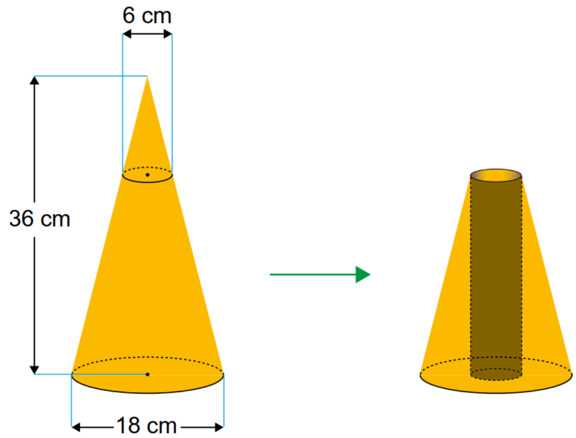
O volume é $112,5\,m^3$. *Como* $1\,m^3 = 1000\,L$, *então o volume restante é* $112.500\,L$. *Cada morador poderá utilizar* $\frac{112.500}{75} = 1.500\,L$ *nesses 10 dias. Logo, por dia, serão* $\frac{1.500}{10} = 150\,L$.

Portanto, cada morador deverá economizar $200 - 150 = 50L$ *por dia.*

Resposta: alternativa a.

Questão 2 ***(ENEM 2023)*** *Um artista plástico esculpe uma escultura a partir de um bloco de madeira de lei, em etapas. Inicialmente, esculpe um cone reto com 36 cm de altura e diâmetro da base medindo 18 cm. Em seguida, remove desse cone um cone menor, cujo diâmetro da base mede 6 cm, obtendo, assim, um tronco de cone, conforme ilustrado na figura.*

Figura 3.57 – Escultura



Fonte: ENEM 2023.

Em seguida, perfura esse tronco de cone, removendo um cilindro reto, de diâmetro 6 cm, cujo eixo de simetria é o mesmo do cone original. Dessa forma, ao final, a escultura tem a forma de um tronco de cone com uma perfuração cilíndrica de base a base. O tipo de madeira utilizada para produzir essa escultura tem massa igual a 0,6 g por centímetro cúbico de volume. Utilize 3 como aproximação para π.

Qual é a massa, em grama, dessa escultura?

a) 1.198,8

b) 1.296,0

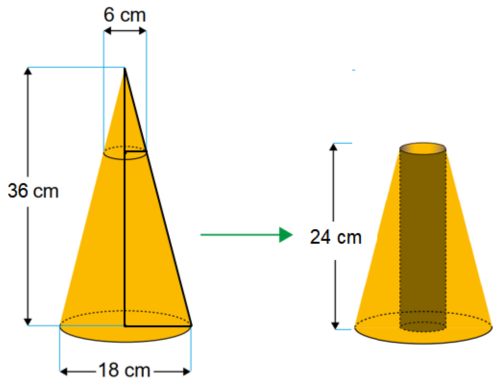
c) 1.360,8

d) 4.665,6

e) 4.860,0

Solução: *Primeiro deve-se descobrir a medida do raio do cone menor. Para isso, observe a figura 3.58.*

Figura 3.58 – Escultura - editada



Fonte: ENEM 2023, adaptada pelo autor.

Note que é possível formar triângulos retângulos. Como os raios dos círculos são 3 cm e 9 cm, perceba que a proporção é de 3:1, logo, a altura do cone maior (H) é o triplo da altura do menor $h = 12\,cm$ *e a altura do tronco de cone é 24 cm.*

$$\begin{aligned} V_{Tronco} &= V_{Cone\,Maior} - V_{Cone\,Menor} \\ &= \frac{3 \cdot 9^2 \cdot 36}{3} - \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 12}{3} \\ &= 9^2 \cdot 36 - 3^2 \cdot 12 \\ &= 81 \cdot 36 - 9 \cdot 12 \\ &= 2.808. \end{aligned}$$

O volume do tronco de cone é $2.808\,cm^3$*. Já o volume do cilindro retirado é:*

$$\begin{aligned} V_{Cilindro} &= 3 \cdot 3^2 \cdot 24 \\ &= 27 \cdot 24 \\ &= 648. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} V_{Final} &= V_{Tronco} - V_{Cilindro} \\ &= 2.808 - 648 \\ &= 2.160. \end{aligned}$$

O volume final é $2.160\, cm^3$. *Portanto, a massa da escultura é* $2.160 \cdot 0,6 = 1.296\, g$.

Resposta: alternativa b.

Questão 3 ***(ENEM 2022)*** *Uma loja comercializa cinco modelos de caixas-d'água (I, II, III, IV e V), todos em formato de cilindro reto de base circular. Os modelos II, III, IV e V têm as especificações de suas dimensões dadas em relação às dimensões do modelo I, cuja profundidade é* P *e área da base é* A_b*, como segue:*
modelo II: o dobro da profundidade e a metade da área da base do modelo I;
modelo III: o dobro da profundidade e a metade do raio da base do modelo I;
modelo IV: a metade da profundidade e o dobro da área da base do modelo I;
modelo V: a metade da profundidade e o dobro do raio da base do modelo I.

Uma pessoa pretende comprar nessa loja o modelo de caixa-d'água que ofereça a maior capacidade volumétrica. O modelo escolhido deve ser o
a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

Solução: *Para facilitar a resolução suponha que a altura (ou profundidade) do modelo I seja* $h = 2$ *e o raio seja* $r = 2$ *(a profundidade e raio podem ser valores quaisquer). Assim:*

$$\begin{aligned} A_b &= \pi r^2 \\ &= \pi 2^2 \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

O modelo II tem $h = 4$ *e* $A_b = 2\pi$.

$$\begin{aligned} V_{II} &= A_b \cdot h \\ &= 2\pi \cdot 4 \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

O modelo III tem $h = 4$ e $r = 1$.

$$\begin{aligned} V_{III} &= \pi r^2 h \\ &= \pi 1^2 \cdot 4 \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

O modelo IV tem $h = 1$ e $A_b = 8\pi$.

$$\begin{aligned} V_{IV} &= A_b \cdot h \\ &= 8\pi \cdot 1 \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

O modelo V tem $h = 1$ e $r = 4$.

$$\begin{aligned} V_V &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot 4^2 \cdot 1 \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Portanto, o modelo que ofereçe a maior capacidade volumétrica é o V.

Resposta: alternativa e.

Questão 4 ***(ENEM 2022)*** *Uma cozinheira produz docinhos especiais por encomenda. Usando uma receita-base de massa, ela prepara uma porção, com a qual produz 50 docinhos maciços de formato esférico, com 2 cm de diâmetro. Um cliente encomenda 150 desses docinhos, mas pede que cada um tenha formato esférico com 4 cm de diâmetro. A cozinheira pretende preparar o número exato de porções da receita-base de massa necessário para produzir os docinhos dessa encomenda.*

Quantas porções da receita-base de massa ela deve preparar para atender esse cliente?

a) 2
b) 3
c) 6
d) 12
e) 24

Solução: *O diâmetro inical é 2 cm, logo o raio é* $r = 1\,cm$*. Suponha que* $\pi = 3$ *para facilitar os cálculos. Assim:*

$$\begin{aligned} V_{Docinho} &= \frac{4\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 1^3}{3} \\ &= 4. \end{aligned}$$

O volume de cada docinho é $4\,cm^3$*. Logo:*

$$\begin{aligned} V_{1\,porção} &= 4 \cdot 50 \\ &= 200. \end{aligned}$$

O volume de cada porção é $200\,cm^3$*. Após o aumento, o diâmetro passou para 4 cm, assim, o raio pasou a ser* $r = 2\,cm$*. O volume de cada docinho passou a ser:*

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2^3}{3} \\ &= 4 \cdot 8 \\ &= 32. \end{aligned}$$

O novo volume de cada docinho é $32\,cm^3$*. Já o volume dos 150 docinhos encomendados é:*

$$\begin{aligned} V_{3\,porções} &= 3 \cdot 32 \cdot 50 \\ &= 4800. \end{aligned}$$

O volume das três porções é $4800\,cm^3$*. Portanto, devem ser feitas* $\frac{4800}{200} = 24$ *porções da receita-base.*

Resposta: alternativa e.

Questão 5 ***(ENEM 2022)*** *Peças metálicas de aeronaves abandonadas em aeroportos serão recicladas. Uma dessas peças é maciça e tem o formato cilíndrico, com a medida do raio da base igual a 4 cm e a da altura igual a 50 cm. Ela será derretida, e o volume de metal resultante será utilizado para a fabricação de esferas maciças com diâmetro de 1 cm, a serem usadas para confeccionar rolamentos. Para estimar a quantidade de esferas* *que poderão ser produzidas a partir de cada uma das peças cilíndricas, admite-se que não ocorre perda de material durante o processo de derretimento.*

Quantas dessas esferas poderão ser obtidas a partir de cada peça cilíndrica?

a) 800
b) 1200
c) 2400
d) 4800
e) 6400

Solução:

$$\begin{aligned} V_{Cilindro} &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot 4^2 \cdot 50 \\ &= 800\pi. \end{aligned}$$

O volume do cilindro é $800\pi\, cm^3$*. Já o diâmetro da esfera é 1 cm, então seu raio é* $\frac{1}{2}$ *cm,assim:*

$$\begin{aligned} V_{Esfera} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

O volume da esfera é $\frac{\pi}{6}\, cm^3$*. A quantidade de esferas é dada pela razão entre o volume do cilindro e o volume de cada esfera. Assim:*

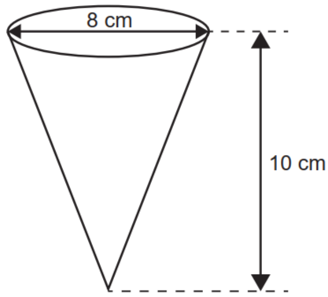
$$\frac{800\pi}{\frac{\pi}{6}} = 800\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 4800\, esferas.$$

Resposta: alternativa d.

Questão 6 ***(ENEM 2022)*** *Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.*

Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm.

Figura 3.59 – Chocolate - Cone



Fonte: ENEM 2022.

Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

a) 1,52.

b) 3,24.

c) 3,60.

d) 6,48.

e) 7,20.

Solução: *Se o diâmetro é 8 cm, então o raio é* $R = 4\,cm$ *e* $h = 10\,cm$. *Assim:*

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi R^2 h}{3} \\ &= \frac{\pi 4^2 \cdot 10}{3} \\ &= \frac{160\pi}{3}. \end{aligned}$$

O volume inicial era $\frac{160\pi}{3}\,cm^3$. *Como a redução foi de* 19%, *então resta* $100\% - 19\% = 81\% = 0,81$. *Logo;*

$$\begin{aligned} V_{Final} &= 0,81 \cdot \frac{160\pi}{3} \\ &= \frac{129,6\pi}{3}. \end{aligned}$$

O volume final é $\frac{129,6\pi}{3}\,cm^3$. *A altura permaneceu* $h = 10\,cm$.

$$\begin{aligned} V_{Final} &= \frac{\pi r^2 h}{3} \\ \frac{129,6\pi}{3} &= \frac{\pi r^2 \cdot 10}{3} \\ 10r^2 &= 129,6 \\ r^2 &= 12,96 \\ r &= \sqrt{12,96} \\ r &= 3,6. \end{aligned}$$

Portanto, o novo raio da base deverá ser $3,6\,cm$.

Resposta: alternativa c.

Questão 7 ***(ENEM 2020)*** *Uma loja de materiais de construção vende dois tipos de caixas-d'água: tipo A e tipo B. Ambas têm formato cilíndrico e possuem o mesmo volume, e a altura da caixa-d'água do tipo B é igual a 25% da altura da caixa-d'água do tipo A. Se R denota o raio da caixa-d'água do tipo A, então o raio da caixa-d'água do tipo B é;*
a) $\frac{R}{2}$
b) 2R
c) 4R
d) 5R
e) 16R

Solução: *Para facilitar os cálculos suponha que o raio da caixa do tipo A seja* $r = 10$ *e a altura seja* $H = 100$. *Assim, a altura da caixa do tipo B será* $h = 25$. *Como os volumes são iguais, então:*

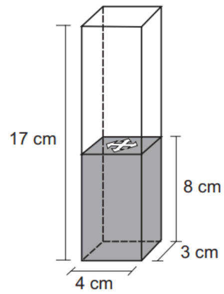
$$\begin{aligned} \pi \cdot 10^2 \cdot 100 &= \pi \cdot R^2 \cdot 25 \\ 25 \cdot R^2 &= 10000 \\ R^2 &= 400 \\ R &= \sqrt{400} \\ R &= 20. \end{aligned}$$

Portanto, o raio da caixa do tipo B é igual ao dobro do raio da caixa do tipo A.

Resposta: alternativa b.

Questão 8 ***(ENEM 2020)*** *Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água. Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a* $6\,cm^3$ *cada, que ficarão totalmente submersas.*

Figura 3.60 – Recipiente - Paralelepípedo



Fonte: ENEM 2022.

O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de
a) 14.
b) 16.
c) 18.
d) 30.
e) 34.

Solução: *Deve-se acrescentar um volume que faça a altura ser 15 cm. Como a altura inicial é 8 cm, o volume a ser colocado é o de um paralelepípedo de mesma base e altura* $15 - 8 = 7cm$*. Assim:*

$$\begin{aligned} VAcrescentar &= 4 \cdot 3 \cdot 7 \\ &= 84. \end{aligned}$$

O volume a ser acrescentado é $84\,cm^3$*. Como o volume de bolinha é* $6\,cm^3$*, a quantidade de bolinhas a serem acrescentadas é* $\frac{84}{6} = 14$.

Resposta: alternativa a.

Questão 9 ***(ENEM 2017)*** *Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1 000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.*

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é
a) 11,25.

b) 27,00.
c) 28,80.
d) 32,25.
e) 49,50.

Solução: *A lâmina d'água é mantida a* $50\,cm = 0,5\,m$*, logo, a altura da água é* $h = 1,7 - 0,5 = 1,2\,m$*. Assim:*

$$\begin{aligned} V_{Piscina} &= 3 \cdot 5 \cdot 1,2 \\ &= 18. \end{aligned}$$

O volume da piscina é $18\,m^3$*. Como* $1\,m^3 = 1000\,L$*, então* $V_{Piscina} = 18000L$*. Portanto serão necessários* $1,5 \cdot 18 = 27\,mL$ *do produto.*

Resposta: alternativa b.

Questão 10 ***(ENEM 2017)*** *Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:*
Caixa 1: 86 cm x 86 cm x 86 cm
Caixa 2: 75 cm x 82 cm x 90 cm
Caixa 3: 85 cm x 82 cm x 90 cm
Caixa 4: 82 cm x 95 cm x 82 cm
Caixa 5: 80 cm x 95 cm x 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior. A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número
a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Solução: *É necessário encontrar a caixa que possui todas as arestas maiores ou iguaus a 80 cm e que apresente o volume mais próximo do volume do objeto. Assim, elimina-se a caixa 2 de imediato.*

Para calcular os volumes deve-se multiplicar as medidas de cada caixa. Assim, os *volumes, em* cm^3*, são:*

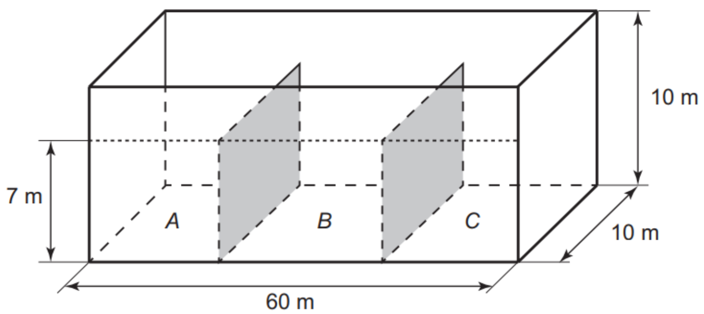
$$\begin{aligned} V_{Objeto} &= 80^3 = 512.000. \\ V_{Caixa\,1} &= 86^3 = 636.056. \\ V_{Caixa\,3} &= 85 \cdot 82 \cdot 90 = 627.300. \\ V_{Caixa\,4} &= 82 \cdot 95 \cdot 82 = 638.780. \\ V_{Caixa\,5} &= 80 \cdot 95 \cdot 85 = 646.000. \end{aligned}$$

Portanto, deve-se escolher a caixa 3.

Resposta: alternativa c.

Questão 11 ***(ENEM 2016)*** *Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m × 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.*

Figura 3.61 – Petroleiro - Reservatório



Fonte: ENEM 2016.

Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

a) $1,4 \cdot 10^3\, m^3$

b) $1,8 \cdot 10^3\, m^3$

c) $2,0 \cdot 10^3\, m^3$

d) $3,2 \cdot 10^3\, m^3$

e) $6,0 \cdot 10^3\, m^3$

Solução: *Após o vazamento restará petróleo apenas nos compartimentos A e B (comprimento de 40 m) até a altura das placas divisórias (7 m). Para encontrar o volume de petróleo derramado basta calcular o volume total e subtrair o volume restante. Assim:*

$$\begin{aligned} V Derramado &= 60 \cdot 10 \cdot 10 - 40 \cdot 10 \cdot 7 \\ &= 6000 - 2800 \\ &= 3200. \end{aligned}$$

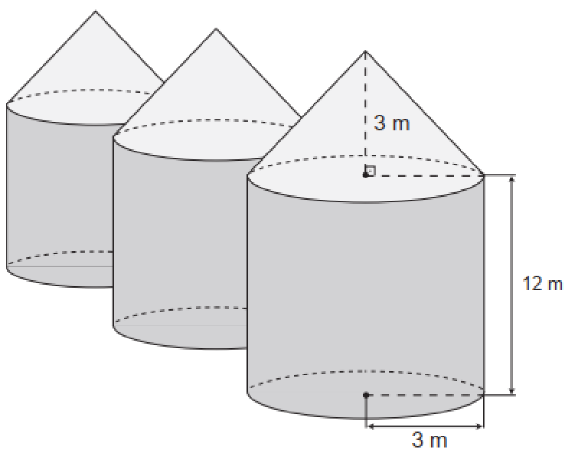
O volume derramado foi $3200\, m^3$*, que se escreve como* $3,2 \cdot 10^3\, m^3$ *em notação científica.*

Resposta: alternativa d.

Questão 12 ***(ENEM 2016)*** *Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de* $20\, m^3$*. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.*

Utilize 3 como aproximação para π*.*

Figura 3.62 – Petroleiro - Reservatório



Fonte: ENEM 2016.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é
a) 6

b) 16
c) 17
d) 18
e) 21

Solução: *Tem-se que:*

$$\begin{aligned} V_{Silo} &= V_{Cilindro} + V_{Cone} \\ &= 3 \cdot 3^2 \cdot 12 + \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 3}{3} \\ &= 36 \cdot 9 + 9 \cdot 3 \\ &= 351. \end{aligned}$$

O volume do silo, quando está cheio, é $351\,m^3$*. Como a capacipade do caminhão é de* $20\,m^3$*, então o número de viagens será* $\frac{351}{20} = 17,55$*. Portanto, o número mínimo de viagens será 18.*

Resposta: alternativa d.

3.5.2 CÁLCULO DE ÁREA E PLANIFICAÇÃO

Questão 13 ***(ENEM 2022)*** *Um casal planeja construir em sua chácara uma piscina com o formato de um paralelepípedo reto retângulo com capacidade para 90 000 L de água. O casal contratou uma empresa de construções que apresentou cinco projetos com diferentes combinações nas dimensões internas de profundidade, largura e comprimento. A piscina a ser construída terá revestimento interno em suas paredes e fundo com uma mesma cerâmica, e o casal irá escolher o projeto que exija a menor área de revestimento.*

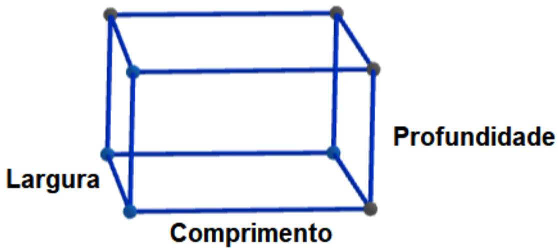
As dimensões internas de profundidade, largura e comprimento, respectivamente, para cada um dos projetos, são:
Projeto I: 1,8 m, 2,0 m e 25,0 m;
Projeto II: 2,0 m, 5,0 m e 9,0 m;
Projeto III: 1,0 m, 6,0 m e 15,0 m;
Projeto IV: 1,5 m, 15,0 m e 4,0 m;
Projeto V: 2,5 m, 3,0 m e 12,0 m.

O projeto que o casal deverá escolher será o
a) I.
b) II.
c) III.

d) IV.
e) V.

Solução: *Para facilitar o entendimento, observe a Figura 3.63.*

Figura 3.63 – Piscina



Fonte: Autor.

Deve-se somar a área das quatro faces laterais com a área do fundo da piscina .

$$\begin{aligned} A_{Projeto\,I} &= 2\cdot 25 + 2\cdot 1,8\cdot 25 + 2\cdot 1,8\cdot 2 = 50 + 90 + 7,2 = 147,2. \\ A_{Projeto\,II} &= 5\cdot 9 + 2\cdot 5\cdot 2 + 2\cdot 9\cdot 2 = 45 + 20 + 36 = 101. \\ A_{Projeto\,III} &= 15\cdot 6 + 2\cdot 1\cdot 6 + 2\cdot 1\cdot 15 = 90 + 12 + 30 = 132. \\ A_{Projeto\,IV} &= 15\cdot 4 + 2\cdot 1,5\cdot 15 + 2\cdot 1,5\cdot 4 = 60 + 45 + 12 = 117. \\ A_{Projeto\,V} &= 12\cdot 3 + 2\cdot 2,5\cdot 3 + 2\cdot 2,5\cdot 12 = 36 + 15 + 60 = 111. \end{aligned}$$

O projeto II apresenta a menor área. O volume é, em m^3:

$$\begin{aligned} V_{ProjetoII} &= 2\cdot 5\cdot 9 \\ V_{ProjetoII} &= 90. \end{aligned}$$

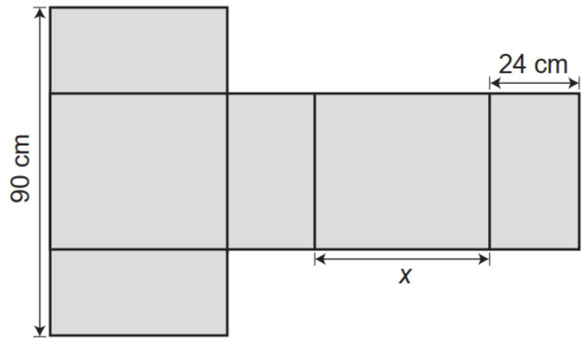
Como $1\,m^3 = 1000\,L$, então o volume da piscina é $90\,m^3$. Portanto, o casal deve escolher o projeto II.

Resposta: alternativa b.

Questão 14 ***(ENEM 2014)*** *Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.*

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.

Figura 3.64 – Planificação - Caixa



Fonte: ENEM 2014.

O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é:

a) 25.

b) 33.

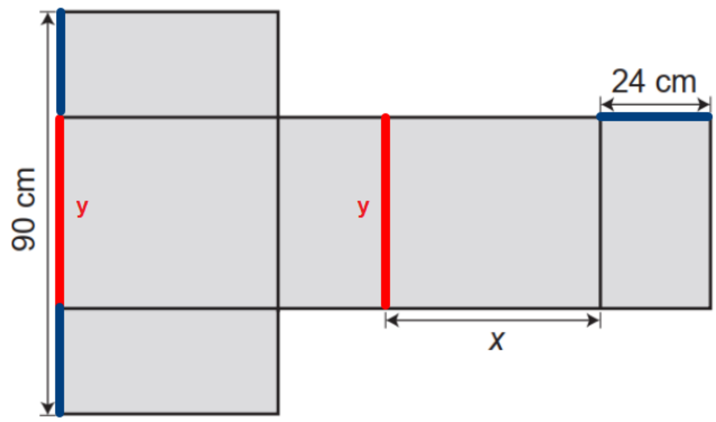
c) 42.

d) 45.

e) 49.

Solução: *Para facilitar o entendimento, observe a Figura 3.65.*

Figura 3.65 – Planificação - Caixa - editada



Fonte: ENEM 2014, editada pelo autor.

Observe que:

$$
\begin{aligned}
y + 24 + 24 &= 90 \\
y &= 90 - 48 \\
y &= 42.
\end{aligned}
$$

A soma das dimensões da bagagem não pode ultrapassar 115 cm. Assim:

$$\begin{aligned} x + 42 + 24 &\leq 115 \\ x &\leq 115 - 66 \\ x &\leq 49. \end{aligned}$$

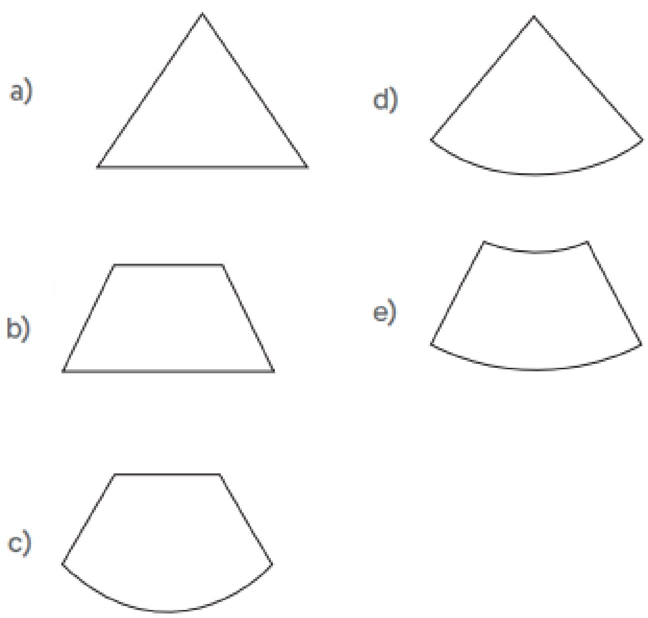
Portanto, o maior valor possível é 49.

Resposta: alternativa e.

Questão 15 ***(ENEM 2014)*** *Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.*

Qual deverá ser a forma do adesivo?

Figura 3.66 – Alternativas da questão



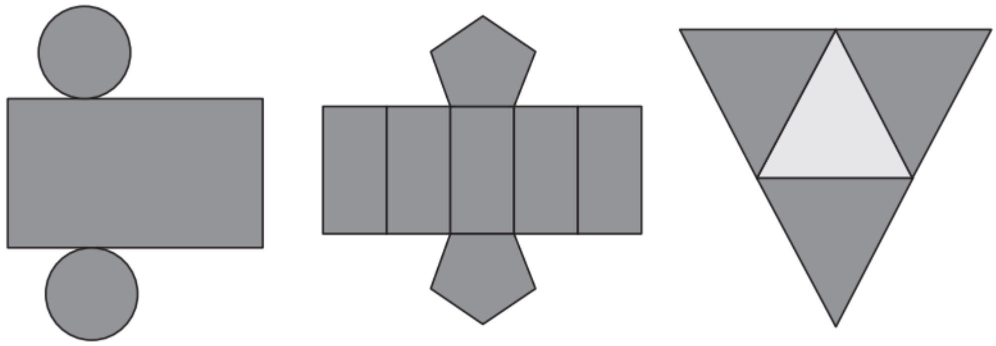
Fonte: ENEM 2014, adaptada pelo autor.

Solução: *Como o cone (sinalizador) precisa ser revestido da base até a metade da sua altura, então a planificação da superfície lateral a ser revestida será a planificação de um tronco de cone.*

Resposta: alternativa e.

Questão 16 ***(ENEM 2012)*** *Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.*

Figura 3.67 – Planificações - Caixas



Fonte: ENEM 2012.

Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?
a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
c) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
e) Cilindro, prisma e tronco de cone.

Solução: *A primeira tem duas bases circulares congruentes, logo, é a planificação de um cilindro. A segunda, dois pentágonos congruentes e faces laterais retangulares, logo, é a planificação de um prisma de base pentagonal. A terceira, apresenta quatro faces triangulares, logo, é uma pirâmide de base triângular.*

Resposta: alternativa a.

4 CONCLUSÃO

Para a maioria dos alunos do ensino médio ou pessoas que já o concluíram, a matemática é uma das disciplinas mais desafiadoras e temidas. Os dados são tão alarmantes que, embora existam, nem é necessária a realização de pesquisas para chegar a essa conclusão. Logo, ter um bom desempenho em matemática no ENEM é um diferencial enorme para quem busca ingressar em cursos de nível superior, independente do curso e da área, visto que, como já mencionado, ela é contemplada em um número expressivo de questões.

Porém, seria inviável que um único trabalho abordasse todo o conteúdo explorado em tal exame. Dessa forma, objetivou-se a criação de um material sobre Geometria Espacial com ênfase no cálculo de volume para alunos que estão se preparando para o ENEM o qual será acrescentado aos materiais já produzidos e utilizados no Cursinho Edificar da UFCA. Para tanto, foi necessária uma análise das questões de matemática para identificação de subáreas, conteúdos e padrões que são recorrentes e que resultou na escolha do tema.

Como a matemática é uma área que requer muito tempo de estudo, o material trouxe a teoria de forma objetiva buscando abordar os aspectos mais relevantes e, em seguida, exemplos que ilustram a forma de cobrança dos conteúdos nas questões. Tendo em vista a importância da resolução de exercícios para consolidação do aprendizado e para manutenção do mesmo por meio de revisões, destacou-se uma seção composta unicamente por questões cuidadosamente selecionadas e comentadas.

Portanto, espera-se que essa dissertação seja utilizada pelo maior número possível de alunos, professores e pessoas em geral durante o estudo de matemática para o ENEM, pois aborda temas relevantes e muito explorados nas questões. Por conta disso, pode trazer significativas contribuições.

Caso seja do interesse do leitor aprofundar-se em assuntos tratados nesse trabalho é interessante a utilização dos livros e materiais listados nas referências. Como proposta de continuidade a essa iniciativa sugere-se a elaboração de materiais como esse abordando outros assuntos importantes e cobrados no ENEM.

REFERÊNCIAS

1 BRASIL. ***Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)***.*Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem>. Acesso em: 15 de fevereiro de 2024.

2 TANCREDI, S. ***O que é Enem?";***_Brasil Escola_. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/educacao/o-que-e-enem.htm>. Acesso em: 15 de fevereiro de 2024.

3 SIQUEIRA, V. F. d. **Tópicos de geometria plana em provas do ENEM.** dissertação (mestrado profissional em matemática em rede nacional) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte: [s.n.]. 2020.

4 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** .*Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2023_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 14 de Novembro de 2023.

5 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** .*Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2022_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 14 de Novembro de 2023.

6 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** .*Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 14 de Novembro de 2023.

7 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** .*Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 21 de Novembro de 2023.

8 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** .*Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/2019_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 21 de Novembro de 2023.

9 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** .*Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf>. Acesso em: 21 de Novembro de 2023.

10 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** .*Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 21 de Novembro de 2023.

11 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** *.Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 25 de Novembro de 2023.

12 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** *.Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/2015_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 25 de Novembro de 2023.

13 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** *.Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014/2014_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 25 de Novembro de 2023.

14 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** *.Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. Acesso em: 25 de Novembro de 2023.

15 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** *.Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. Acesso em: 25 de Novembro de 2023.

16 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** *.Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. Acesso em: 25 de Novembro de 2023.

17 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** *.Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. Acesso em: 26 de Novembro de 2023.

18 BRASIL. ***Caderno de questões amarelo do ENEM*** *.Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2009/dia2_caderno5_amarelo.pdf>. Acesso em: 26 de Novembro de 2023.

19 ALCÂNTARA, *E.* F. **A matemática básica em provas do ENEM.** dissertação (mestrado profissional em matemática em rede nacional) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte: [s.n.]. 2020.

20 DANTAS, M. S. A. **Um Estudo Sobre Funções em Provas do ENEM.** dissertação (mestrado profissional em matemática em rede nacional) – Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte:: [s.n.]. 2020.

21 DOLCE OSVALDO; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial, Posição e Métrica**, vol. 10, 7ª edição. *São Paulo, Atual*, 2013.

22 DOLCE OSVALDO; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**, vol. 9, 7ª edição. *São Paulo, Atual*, 1993.

23 SOUZA, J.; GARCIA, J. **Contato matemática**. *São Paulo: FTD*, v. 3, 2016.

24 ENSINO, S. A. de Sá de. **Pré-universitário- Matemática**. *Fortaleza:Sistema Ari de Sá de Ensino*, Livro 5, 2019.

25 ENSINO, S. A. de Sá de. **Pré-universitário- Matemática**. *Fortaleza:Sistema Ari de Sá de Ensino*, Livro 6, 2019.

26 LIMA, E. L. et al. ***Temas e problemas elementares***. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2005.

27 SILVA, J. A. d. **Geometria Espacial: Volume de Cilindros, Cones e Esferas através de Resolução de Problemas.** dissertação (mestrado profissional em matemática em rede nacional) – universidade estadual de santa cruz, ilheús- bahia: [s.n.]. 2019.

28 OLIVEIRA, R. R. d. ***Princípio de Cavalieri.Brasil Escola***. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>. Acesso em: 16 de janeiro de 2024.

29 SILVA, L. P. M. ***"Planificação de sólidos geométricos".Brasil Escola***. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/planificacao-solidos-geometricos.htm>. Acesso em: 22 de janeiro de 2024.

30 LIMA, E. L. et al. ***Temas e problemas elementares***, *vol. 2, 5ª Edição*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2005.