UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI – URCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS APLICADAS À EDUCAÇÃO BÁSICA

EDUARDO FERREIRA MATIAS

JUAZEIRO DO NORTE – CE

2024

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM DUAS INCÓGNITASAPLICADAS À EDUCAÇÃO BÁSICA

EDUARDO FERREIRA MATIAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador

Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar

JUAZEIRO DO NORTE – CE

2024

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Matias, Eduardo Ferreira

M433e EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS APLICADAS À EDUCAÇÃO BÁSICA / Eduardo Ferreira Matias. Juazeiro do Norte - CE, 2024.

81p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar

1.Situações-problemas, 2.Números Inteiros, 3.Ensino Fundamental, 4.Professor de Matemática, 5.Ensino Médio; I.Título.

CDD: 510

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM DUAS INCÓGNITASAPLICADAS À EDUCAÇÃO BÁSICA

EDUARDO FERREIRA MATIAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 13 de Junho de 2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (Urca)

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira
Universidade Regional do Cariri (Urca)

Prof. Dr. Júnio Moreira de Alencar
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico à minha esposa, Samille de Lima Silva, à minha filha, Maria Júlia Lima Matias, e aos meus pais e irmãos.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão, começando por Deus, pela sua orientação e benção ao longo desta jornada. À minha esposa, que tem sido meu suporte inabalável, obrigado por estar sempre ao meu lado nos momentos difíceis, demonstrando compreensão e apoio. À minha filha, mesmo tão jovem, agradeço por compreender minha ausência e permitir que eu me dedicasse aos estudos. Deixo registrado aqui o imenso amor e gratidão que sinto por vocês.

Aos meus pais, Maria de Fátima Ferreira Matias e Edilson Matias da Silva, agradeço pelo dom da vida e pela educação que me proporcionaram. Foi graças aos esforços de vocês que cheguei até aqui. Aos meus irmãos, Edinardo Fagner, Flávia, Elizabete e Edson, meu reconhecimento pelo apoio e companheirismo.

Ao meu orientador, Professor Dr. Alexsandro Coelho, agradeço por todo incentivo e colaboração na realização deste trabalho. A todos os professores do mestrado, meu sincero agradecimento pelo valioso conhecimento transmitido.

Por último, mas não menos importante, agradeço aos meus amigos. Para evitar o risco de esquecer alguém, opto por não nomeá-los individualmente, mas saibam que cada um de vocês é importante para mim e contribuíram para minha conquista. Aos meus colegas de turma, obrigado por todo o apoio e por compartilharem as aflições e conquistas deste período. Aos meus coordenadores escolares, pela compreensão e suporte quando necessário. A todos vocês, meu profundo agradecimento.

“Quando a mente muda, a gente anda pra frente.

E quando a gente manda ninguém manda na gente.

Na mudança de atitude não há mal que não se mude nem doença sem cura.

Na mudança de postura a gente fica mais seguro.

Na mudança do presente a gente molda o futuro!”

(Gabriel O pensador)

RESUMO

Obter pares de números que são soluções de determinada equação é uma ação corriqueira para a maioria dos estudantes do Ensino Fundamental. Geralmente essas soluções são obtidas pelo método da tentativa e erro. Diferentemente do método da tentativa e erro, a solução geral de equações diofantinas lineares aprimora a resolução de situações-problemas, pois com esse método obtém-se uma equação que fornece todas as soluções da equação. O objetivo fundamental desse estudo é mostrar que a resolução dessas equações por meio da solução geral de equações pode ser incorporada pelo professor de matemática em sala de aula, enriquecendo, assim, o processo de ensino e aprendizagem. Além disso, visamos também à produção de material pedagógico para suporte aos professores que queiram implementar o estudo das equações diofantinas para estudantes da educação básica. Nesse sentido, o trabalho se configura como uma pesquisa do tipo exploratória, cujas fontes são todas bibliográficas, para aprofundamento do tema e elaboração do material aqui proposto. Diante de tudo que foi apresentado, este trabalho mostrou a importância de abordar as equações diofantinas lineares com duas incógnitas, aplicando o método para encontrar todas as soluções dessas equações e a relevância desse assunto, mesmo que ele não se faça presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), trazendo assim um ganho na aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: Situações-problemas, Números Inteiros, Equação, Inequação, Professor de Matemática, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

ABSTRACT

Obtaining pairs of numbers that are solutions to a given equation is a common activity for most elementary school students. These solutions are generally obtained through the method of trial and error. Unlike the trial and error method, the general solution of linear Diophantine equations enhances problem-solving since this method yields an equation that provides all the solutions to the equation. The primary objective of this study is to demonstrate that solving these equations using the general solution method can be incorporated by mathematics teachers in the classroom, thereby enriching the teaching and learning process. Additionally, we aim to produce pedagogical materials to support teachers who wish to implement the study of Diophantine equations for basic education students. In this context, the work is characterized as exploratory research, with all sources being bibliographic, to deepen the topic and develop the proposed material. Given all that has been presented, this work has shown the importance of addressing linear Diophantine equations with two variables, applying the method to find all solutions to these equations, and highlighting the relevance of this subject, even though it is not included in the National Common Curricular Base (BNCC), thus enhancing student learning.

Keywords: Problem-solving situations, Integers, Equation, Inequation, Mathematics Teacher, Elementary and High School Education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Obter pares de números que são soluções de determinada equação é uma ação corriqueira para a maioria dos estudantes do Ensino Fundamental. Geralmente essas soluções são obtidas pelo método da tentativa e erro, que apesar de importante, pois induz à imaginação, aos contraexemplos, aos erros e acertos, pode se tornar difícil de ser aplicado quando o problema envolve valores muito altos (Vieira, 2018).

Diferentemente do método da tentativa e erro, a solução geral de equações diofantinas lineares com duas incógnitas aprimora a resolução de situações-problemas, pois com esse método obtém-se uma equação que fornece todas as soluções inteiras da equação.

Este estudo, será dedicado à resolução de equações diofantinas lineares com duas incógnitas. Essas equações pertencem ao tipo $ax + by = c$, onde $a, b \in \mathbb{Z}^*$, e o par de inteiros (x_0, y_0) representa uma solução válida para a equação. Esse tema geralmente recebe apenas uma abordagem superficial durante os anos finais do Ensino Fundamental e o Novo Ensino Médio. Nessas etapas educacionais, o enfoque principal é na resolução de situações-problema que emergem dentro desse contexto de aprendizado.

O objetivo fundamental desse estudo é demonstrar que a resolução dessas equações por meio da solução geral de equações pode ser incorporada pelo professor de matemática em sala de aula, enriquecendo, assim, o processo de aprendizagem dos alunos. Vale ressaltar que os conteúdos necessários para a resolução das equações diofantinas lineares são estudados ao longo do Ensino Fundamental anos finais.

Esta dissertação consistirá em uma revisão bibliográfica, na qual serão consultados e estudados materiais já publicados da mesma natureza desse trabalho, obtidos em bibliotecas virtuais ou bases de dados, e será dividida nos seguintes capítulos:

No **Capítulo 2**, é dado destaque ao surgimento da álgebra, ressaltando a contribuição de figuras importantes como os matemáticos gregos e árabes. Discute-se a influência da cidade de Alexandria como centro de atividade matemática, mencionando Euclides, Arquimedes e Al-Khwarizmi. Além disso, é explorada a figura de Diofanto de Alexandria e sua obra "*Arithmetica*", questionando seu papel como "pai da álgebra" e analisando sua contribuição.

No **Capítulo 3**, são abordados alguns conceitos fundamentais da Teoria dos Números, conhecidos pelos alunos desde os primeiros anos da educação básica. Os tópicos presentes nesse capítulo são essenciais para a compreensão das equações diofantinas lineares com duas incógnitas.

No **Capítulo 4**, são apresentadas a definição e a demonstração das equações diofantinas lineares com duas incógnitas. Os exemplos e questões apresentados nesse capítulo são contextualizados para aprimorar a compreensão e estimular o interesse dos alunos pelo tema.

No **Capítulo 5**, concentra-se as considerações finais inerentes a esse trabalho.

Por fim, o produto educacional apresentado consiste em um guia didático elaborado com o objetivo de auxiliar o professor em sala de aula na abordagem desse tema, enriquecendo assim sua prática docente. No guia, são apresentadas questões contextualizadas e desafiadoras, juntamente com suas respectivas soluções, cumprindo assim as prerrogativas do mestrado profissional em Matemática (Profmat)

2 BREVE RELATO DA OBRA E VIDA DE DIOFANTO DE ALEXANDRIA

2.1 Breve história da matemática antiga e o surgimento da álgebra

Desde que há registro e conhecimento sobre a história humana e "seus inventos", o homem sempre buscou explicação e aperfeiçoamento de tudo que acontecia ao seu redor. Com a ciência matemática também foi assim. As práticas matemáticas evoluíram em diferentes de civilizações, formando um corpo de conhecimento sistematizado ao longo do tempo. Uma vez sistematizada, não dá para falar da matemática sem citar a cidade de Alexandria, onde havia uma grande biblioteca que reunia todo o saber da época e recebia pensadores de todo o mundo. Dessa grande época, Euclides e Arquimedes são os pensadores mais conhecidos. A grande biblioteca foi responsável por disseminar o conhecimento matemático e tantos outros conhecimentos registrados na época. É sabido que o lugar passou por incêndios que reduziu a cinzas trabalhos de anos e de grande importância para a humanidade. Mesmo assim, o que restou é responsável por tornar público textos de grande relevância (Roque, 2012).

Além da contribuição dos gregos, em certo ponto da história há contribuição e registro do uso da matemática árabe. Dentre os matemáticos árabes, o mais famoso é Al-Khwarizmi, do século IX, importante personagem no desenvolvimento da álgebra (Roque, 2012). A afirmação pode parecer contraditória à primeira vista, dada a ênfase tradicionalmente colocada na matemática grega, que era mais geométrica do que algébrica. No entanto, a contribuição dos matemáticos árabes, como Al-Khwarizmi, para o desenvolvimento da álgebra foi significativa e influente. Embora os árabes tenham desempenhado um papel importante na preservação e disseminação do conhecimento matemático grego, através da tradução de trabalhos, também contribuíram substancialmente para o desenvolvimento da álgebra e de outras áreas da matemática. Suas contribuições foram fundamentais para a evolução da matemática como a conhecemos hoje.

Al-Khwarizmi, em particular, escreveu o livro "Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala" (O Livro Composto sobre Cálculo por Conclusão e Equação) (Silva; Morey, 2021). Nesse livro, Al-Khwarizmi introduziu métodos sistemáticos para resolver equações lineares e quadráticas, além de desenvolver técnicas algébricas para lidar com problemas práticos do mundo real, como problemas de herança e divisão de terras.

Sendo assim, não se pode atribuir o desenvolvimento da matemática apenas ao conhecimento de gregos como Euclides, Arquimedes, Ptolomeu e Diofanto. Há registros tão relevantes, e poucos disseminados, dessa ciência exata feitos por outras civilizações. No entanto, pela importância histórica, queremos, nesta pesquisa, destacar o trabalho do grego Diofanto, em virtude da atribuição da sua relevante contribuição para o estudo de equações com duas incógnitas, tanto que a um tipo especial dessas equações, elas carregam hoje o nome de *diofantinas*.

2.2 Diofanto de Alexandria

Diofanto (Diophantus) tem o seu nome ligado à cidade que foi o maior centro de atividade matemática na Grécia antiga: Alexandria. Entretanto, pouco se sabe acerca da sua vida, e assim, o desconhecimento impede de fixar com segurança em que século ele viveu. Através de manuscritos que citam o seu nome ou sua obra é que se pode deduzir em que época ele existiu.

Em *"Almagest de Ptolomeu"*, o autor Theon de Alexandria, cita trechos do trabalho de Diofanto. Theon viveu em meados do século IV a.E.C. Outro escrito encontrado é do intelectual Michael Psellus, um estudioso bizantino do século XI, que foi usado para datar Diofanto com maior precisão. Nesse escrito, Psellus menciona o trabalho sobre *"Arithmetica"*. Isso colocaria Diofanto no século III E.C. (Duarte, 2020).

Um enigma que estava junto dos seus restos mortais, denotava que Diofanto viveu até os 84 anos. O enigma dizia o seguinte:

> "Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diophantus. E os números podem mostrar (milagre!) quão longa foi a sua vida, cuja sexta parte foi a sua bela infância. Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu rosto se cobriu de pelos. E a sétima parte de sua existência decorreu com um casamento estéril. Passou mais um quinquênio e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito, cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai, que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho. " (Duarte, 2020, p. 43).

Podemos transcrever o texto para a linguagem algébrica da seguinte forma:

- Seja x o número correspondente ao seu tempo de vida em anos;

- $\frac{x}{6}$ correspondente ao período da sua infância;
- $\frac{x}{12}$ correspondente a sua juventude;
- $\frac{x}{7}$ corresponde ao tempo de sua vida que estava casado e sem filhos;
- Mais 5 anos se passaram até nascer seu primeiro filho;
- $\frac{x}{2}$ corresponde ao tempo que seu filho viveu;
- Mais 4 anos de sua vida em luto pela perda do seu filho.

Temos então a seguinte equação:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

$$\frac{14x+7x+12x+420+42x+336}{84}=\frac{84x}{84}$$

$$75x+756=84x$$

$$x=\frac{756}{9}$$

$$x=84$$

Logo, pelo enigma concluímos que Diofanto viveu 84 anos.

Apesar dos achados mencionados e outros estudados, a vida e período da história que Diofanto viveu segue sendo uma incógnita. O que se tem certeza é da sua contribuição e notoriedade na álgebra.

Enquanto as obras clássicas gregas eram mais geométricas em sua abordagem, Diofanto introduziu métodos algébricos que representaram um avanço significativo na Teoria dos Números e na Álgebra (Duarte, 2020). Ele é frequentemente chamado de “o pai da álgebra” devido à sua obra *“Arithmetica”*, que é um dos primeiros tratados algébricos conhecidos. A obra era composta por 13 livros, dos quais só foram preservados seis. O escrito não era uma apresentação sobre as operações algébricas ou as funções algébricas, mas sim um compilado de 130 problemas que não se sabe até onde eram exclusivos da obra ou tirados de outras (Eves, 2011).

Em *“Arithmetica”*, Diofanto introduziu uma notação simbólica para representar incógnitas (Figura 1) e expressou equações polinomiais de maneira algébrica, em contraste com a abordagem mais geométrica dos matemáticos gregos. Sua abordagem permitiu a resolução sistemática de equações e o desenvolvimento de técnicas algébricas que foram posteriormente refinadas e ampliadas pelos matemáticos árabes, como Al-Khwarizmi, e continuaram a ser desenvolvidas ao longo dos séculos.

Figura 1: Símbolos de Diofanto, seus significados e representações atual

Símbolos de Diofanto	Significado	Representação Atual
ς	Quantidade desconhecida	x (símbolo qualquer)
Δ^Y	Quadrado da quantidade	x^2
K^Y	Cubo	x^3
$\Delta^Y\Delta$	Quarta potência	x^4
ΔK^Y	Quinta potência	x^5
$K^Y K$	Sexta potência	x^6

Fonte: Melz, 2022, p. 38

Tatiana Roque afirma o seguinte em seu livro:

> No texto de Diofanto as quantidades desconhecidas são abreviadas, e não simbolizadas, o que já havia sido observado por J. Klein[8]. Símbolos não são somente abreviações ou notações empregadas para facilitar a prática de procedimentos de cálculo e resolução de problemas; o simbolismo algébrico é um tipo de representação que conduz a abstrações que não estavam presentes na Aritmética de Diofanto. Para caracterizar o pensamento algébrico não basta associá-lo ao uso de símbolos, e menos ainda ao uso de abreviações (Roque, 2012, p.234).

Essa afirmação leva a autora a se perguntar se Diofanto pode realmente ser considerado o pai da álgebra. Tal indagação corrobora com o pensamento de Eves (2004), o qual escreveu que não foi Diofanto o primeiro a trabalhar com equações indeterminadas ou a resolver equações quadráticas de maneira não geométrica, como às vezes é afirmado pela história. Porém, pode ter sido ele o primeiro a dar os primeiros passos rumo a uma notação algébrica.

Diofanto é um importante personagem do relato tradicional, ocupando um lugar intermediário entre Euclides e os renascentistas europeus (Roque, 2012). Se pensarmos primariamente em termos de notação, Diofanto tem boas razões para pretender o título de pai da álgebra, mas em termos de motivação e conceitos a pretensão é menos justificada (Boyer, 1996).

Hoje, a Arithmetica de Diofanto parece notavelmente original, mas talvez essa impressão resulte da perda de coleções de problemas rivais. É inegável que a obra desse matemático é digna do período de renascimento em que foi escrita, mas, em motivação e conteúdo, está muito distante dos tratados admiravelmente racionais do grande triunvirato de geômetras da primeira Idade Alexandrina (Boyer, 1996). Ainda assim, sua obra ajuda a consagrar esse grande capítulo da história da matemática, que foi a forma como os gregos organizaram esse saber.

Dito isto, no tópico seguinte apresentaremos alguns resultados em teoria dos números, como pré-requisitos do tema central deste trabalho, que são as equações diofantinas.

3 TEORIA DOS NÚMEROS

Neste capítulo, abordamos alguns tópicos de Teoria dos Números que servem de alicerce para a compreensão das equações diofantinas lineares, enriquecendo, assim, a compreensão e facilitando a apreciação de sua relevância no contexto matemático. Os enunciados e demonstrações presentes neste capítulo foram baseados em Martinez *et al.* (2010), Hefez (2016) e Fonseca (2011).

3.1 Divisibilidade

Inicialmente vamos definir o conjunto dos números inteiro que é denotado por $\mathbb{Z}$ e representado por $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Definição 3.1.1: Dados dois números inteiros a e b, temos que a divide b, e usamos a denotação $a|b$, quando existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Nesse caso dizemos que a é divisor de b, ou ainda, que b é um múltiplo de a ou que b é divisível por a.

A negação da afirmação $a|b$ é $a \nmid b$ significando que não existe nenhum número inteiro c tal que $b = c \cdot a$.

<u>Exemplo 1:</u>

a) Temos que $7|21$, pois $21 = 3 \cdot 7$.
b) Temos que $-3|15$, pois $15 = (-5) \cdot (-3)$.
c) Temos que$4 \nmid 7$, pois não existe um número inteiro a tal que $7 = a \cdot 4$.

Proposição 3.1.2: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tem-se que:

i) $1|a,\ a|a$ e $a|0$.
ii) Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

<u>Demonstração:</u> De (I), temos as igualdades $a = a \cdot 1,\ a = 1 \cdot a$ e $0 = 0 \cdot a$. De (II), temos que $a|b$ e $b|c$ resulta que existem $f, g \in \mathbb{Z}$, tais que $b = f \cdot a$ e $c = g \cdot b$. Substituindo o valor de b da primeira equação na segunda, obtemos

$$c = g \cdot b = g \cdot (f \cdot a) = a \cdot (f \cdot g).$$

O que nos mostra que $a|c$. ■

Proposição 3.1.3: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a|b$ e $c|d$ então $ac|bd$.

Demonstração: Se $a|b$ e $c|d$, então existe $f, g \in \mathbb{Z}$, tais que $b = f \cdot a$ e $d = g \cdot c$. Temos que, $b \cdot d = (f \cdot a) \cdot (g \cdot c)$ então $b \cdot d = (f \cdot g) \cdot (a \cdot c)$, logo, $ac|bd$. ■

Proposição 3.1.4: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tais que $a|(b \pm c)$. Então temos que $a|b \Leftrightarrow a|c$.

Demonstração: Vamos inicialmente supor que, $a|(b + c)$, então existe um número inteiro f tal que $b + c = f \cdot a$. Se $a|b$, então temos que existe um número inteiro g tal que $b = g \cdot a$. Substituindo b na primeira equação por $g \cdot a$, temos

$$g \cdot a + c = f \cdot a \Rightarrow c = f \cdot a - g \cdot a \Rightarrow c = (f - g) \cdot a.$$

Logo, $a|c$.

De modo análogo, suponhamos que $a|(b - c)$, então existe um número inteiro h tal que $b - c = h \cdot a$. Se $a|b$, então temos que existe um número inteiro i tal que $b = i \cdot a$. Substituindo b na primeira equação por $i \cdot a$, temos

$$i \cdot a - c = h \cdot a \Rightarrow c = i \cdot a - h \cdot a \Rightarrow c = (i - h) \cdot a.$$

Logo, $a|c$.

Suponha mais uma vez que $a|(b + c)$, então existe um número inteiro j tal que $b + c = j \cdot a$. Se $a|c$, então temos que existe um número inteiro k tal que $c = k \cdot a$. Substituindo c na primeira equação por $k \cdot a$, temos

$$b + k \cdot a = j \cdot a \Rightarrow b = j \cdot a - k \cdot a \Rightarrow b = (j - k) \cdot a.$$

Logo, $a|b$.

Agora suponhamos que $a|(b - c)$, então existe um número inteiro l tal que $b - c = l \cdot a$. Se $a|c$, então temos que existe um número inteiro m tal que $c = m \cdot a$. Substituindo c na primeira equação por $m \cdot a$, temos

$$b - m \cdot a = l \cdot a \Rightarrow b = l \cdot a + m \cdot a \Rightarrow b = (l + m) \cdot a.$$

Logo, $a|b$.

Portanto, sendo $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a|(b \pm c)$, então temos que $a|b \Leftrightarrow a|c$. ■

Exemplo 2: Observe que 3|15 e 3|45 então 3|(15 + 45) pois 3|60.

Proposição 3.1.5: Se $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a|b$ e $a|c$. Então, para todo $x, y \in \mathbb{Z}$ temos que $a|(x \cdot b + y \cdot c)$.

Demonstração: Como $a|b$ e $a|c$, logo, existem $f, g \in \mathbb{Z}$ tais que $b = f \cdot a$ e $c = g \cdot a$ temos que

$$x \cdot b + y \cdot c = x \cdot (f \cdot a) + y \cdot (g \cdot a) \Rightarrow$$
$$x \cdot b + y \cdot c = (x \cdot f) \cdot a + (y \cdot g) \cdot a \Rightarrow$$
$$x \cdot b + y \cdot c = (x \cdot f + y \cdot g) \cdot a$$

Logo, $a|(x \cdot b + y \cdot c)$. ■

Exemplo 3: Como $5|20$ e $5|60$ e, pela **Proposição 3.1.5** temos que $5|(5 \cdot 20 - 1 \cdot 60)$, ou seja, $5|40$.

Proposição 3.1.6: Se $a, b \in \mathbb{Z}$, onde $b \neq 0$, temos que $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$.

Demonstração: Se $a|b$, então existe um inteiro c tal que $b = c \cdot a$. Segue que tomando módulos, temos que $|b| = |c| \cdot |a|$. Como $b \neq 0$, temos que $c \neq 0$, logo $1 \leq |c|$, multiplicando a desigualdade por $|a|$ temos, $|a| \leq |a| \cdot |c| \Rightarrow |a| \leq |b|$. ■

Proposição 3.1.7: Se $a|b$ e se $b|a$, então $a = \pm b$.

Demonstração: Se $a|b$, então existe $f \in \mathbb{Z}$ tal que $b = f \cdot a$. Se $b|a$ então existe $g \in \mathbb{Z}$, tal que $a = g \cdot b$. Logo, temos que $a = a \cdot f \cdot g \Rightarrow 1 = f \cdot g \Rightarrow g|1 \Rightarrow g = \pm 1$. Como $a = g \cdot b$ e $g = \pm 1$ então $a = \pm b$. ■

3.2 Divisão Euclidiana

Mesmo quando um número inteiro b, sendo diferente de zero, não divide o número inteiro a, Euclides, na obra Elementos, emprega implicitamente o princípio de que é sempre viável realizar a divisão de a por b, com a obtenção de um resto.

Teorema 3.2.1: (Divisão Euclidiana) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$, Então existem dois únicos números inteiros q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.

Demonstração: Existem duas proposições a serem demonstradas: uma refere-se à existência dos inteiros q e r nas condições especificadas, enquanto a outra diz respeito à unicidade desses inteiros.

Inicialmente, provaremos a existência de q e r.

Dado o conjunto $S = \{a - bq \;/\; q \in \mathbb{Z} \text{ e } a - bq \geq 0\}$.

O conjunto S não é vazio. Poissendo $b \in \mathbb{Z}$ e $b > 0$, temos $b \geq 1$ e, portanto, para $q = -|a|$, resulta:

$$a - bq = a + b|a| \geq a + |a| \geq 0.$$

Então pelo “princípio da boa ordenação”, existe um elemento mínimo r de S tal que $0 \leq r$ e $r = a - bq$ ou $a = bq + r$, com $q \in \mathbb{Z}$.

E ainda temos que $r < b$, pois se $r \geq b$, teríamos:

$$0 \leq r - b = a - bq - b = a - b(q + 1) < r$$

Logo, r não seria o elemento mínimo de S.

Agora iremos demonstrar a unicidade de q e r, suponhamos que existem dois outros inteiros x e y tais que $a = bx + y$ e $0 \leq y < b$.

Então, teremos:

$$bx + y = bq + r \Rightarrow y - r = bq - bx \Rightarrow y - r = b(q - x) \Rightarrow b|(y - r).$$

Por outro lado, temos $-b < -r \leq 0$ e $0 \leq y < b$.

Logo, $-b < r - y < b$.

Isto é $|y - r| < b$.

Ou seja, $b|(y - r)$. Como $|y - r| < b$, segue que $y - r = 0$, isto é, $r = y$. Por isso, $x = q$, uma vez que $b \neq 0$. ∎

Nas condições estabelecidas pelo teorema, os números q e r são denominados, respectivamente, quociente e resto da divisão de b por a.

Corolário 3.2.2: Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, Então existem dois únicos números inteiros q e r tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$.

Demonstração: Se $b > 0$, nada há para demonstrar, se $b < 0$, então $|b| > 0$, logo existem e são únicos os inteiros x e r tais que

$$a = |b|x + r \text{ e } 0 \leq r < |b|.$$

Ou seja, por ser $|b| = -b$.

$$a = b(-x) + r \text{ e } 0 \leq r < |b|.$$

Logo, existem e são únicos os inteiros $q = x$ e r tais que

$$a = bq + r\text{e } 0 \leq r < |b| \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4: Achar o quociente q e o resto r na divisão de $a = 63$ por $b = -5$ que satisfazem as condições do algoritmo da divisão.

Solução: A divisão do $|a|$ pelo $|b|$ é $63 = 5 \cdot 12 + 3$.

Então, $63 = (-5) \cdot (-12) + 3$.

E temos que, $0 \leq 3 < |-5|$. Logo, o quociente $q = -12$ e o resto $r = 3$.

Exemplo 5: Achar o quociente q e o resto r na divisão de $a = -109$ por $b = 13$ que satisfazem as condições do algoritmo da divisão.

Solução: A divisão do $|a|$ pelo $|b|$ é $109 = 13 \cdot 8 + 5$.

Então,$-109 = 13 \cdot (-8) - 5$.

Temos que r não satisfaz a condição do algoritmo da divisão $0 \leq r < |-8|$, então veja que:

$$-109 = 13 \cdot (-8) - 5 + 13 - 13$$
$$-109 = 13 \cdot (-9) + 8$$

Como $0 \leq 8 < 13$. Logo, o quociente $q = -9$ e o resto é $r = 8$.

Exemplo 6: Na divisão de 437 por b com $b > 0$, o quociente é 27 e o resto é r, como determinar os possíveis valores de b e r?

Solução: Temos que $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$. Substituindo os valores dados, obtemos:

$$437 = b \cdot 27 + r$$
$$437 - 27b = r$$

Então, temos que:

$$0 \leq 437 - 27b < b$$

Resolvendo a primeira parte da inequação, temos:

$$0 \leq 437 - 27b$$
$$27b \leq 437$$
$$b \leq \frac{437}{27}$$
$$b \leq 16{,}18518518\ldots$$

Resolvendo a segunda parte da inequação, temos:

$$437 - 27b < b$$
$$-28b < -437$$
$$b > \frac{437}{28}$$
$$b > 15{,}6071285\ldots$$

Logo, como $b \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então temos um único valor o possível valor para b e r.

Quando $b = 16$, temos:

$$r = 437 - 27 \cdot 16$$
$$r = 437 - 432$$
$$r = 5$$

Portanto, quando $b = 16$ teremos $r = 5$.

3.3 Máximo Divisor Comum

Definição 3.3.1: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Chama-se máximo divisor comum (mdc) de a e b o inteiro positivo d $(d > 0)$ que satisfaz às condições:

i) $d|a$ e $d|b$.

ii) Se $c|a$ e se $c|b$, então $c \leq d$.

Essas condições implicam que d é um divisor comum de a e b, e é o maior entre todos os divisores comuns de a e b.

O m.d.c. de a e b, será denotado por (a, b).

É imediato que o $(a, b) = (b, a)$. E temos que:

1) O (0, 0) não existe.
2) O $(a, 1) = 1$.
3) Se $a \neq 0$, então o $(a, 0) = |a|$.
4) Se $a|b$, então o $(a, b) = |a|$.

<u>Exemplo 7:</u> Vejamos:

a) $(10, 1) = 1$
b) $(-5, 0) = 5$
c) $(-8, 40) = |-8| = 8$

Teorema 3.3.2: (Identidade de Bézout) Se $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então existe e é único o $(a, b) = d$, além disso, existem inteiros x e y tais que $d = ax + by$.

<u>Demonstração:</u> Seja B o conjunto de todas as *combinações lineares*[1] $xa + yb$, com $x, y \in \mathbb{Z}$. Este conjunto, claramente, incorpora números negativos, positivos e também o zero.

Vamos escolher x_0 e y_0 tais que $c = x_0a + y_0b$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto B. Inicialmente, provaremos que $c|a$ e $c|b$.

[1]Uma *combinação linear* de a e b é toda expressão da forma $ax + by$, em que x e y são inteiros.

Suponhamos que $c \nmid a$, neste caso, pelo **Teorema 3.2.1:** (Divisão Euclidiana), existem q e r tais que $a = qc + r$ com $0 < r < c$.

Logo,

$$r = a - qc$$
$$r = a - q(x_0 a + y_0 b)$$
$$r = a - qx_0 a + (-qy_0 b)$$
$$r = (1 - qx_0)a + (-qy_0)b$$

Isto mostra que $r \in B$, o que é uma contradição, pois $0 < r < c$ é o menor elemento positivo de B. De forma análoga se prova que $c|b$.

Como d é um divisor comum de a e b, existem inteiros w_1 e w_2 tais que $a = w_1 d$ e $b = w_2 d$ e, portanto, $c = x_0 a + y_0 b = x_0 w_1 d + y_0 w_2 d = d(x_0 w_1 + y_0 w_2)$ o que implica $d|c$. Por serem d e c ambos positivos, segue da **Proposição 3.2.6**, que $d \leq c$. Como $d < c$ não é possível, pois d é o máximo divisor comum, concluímos que $d = x_0 a + y_0 b$. ■

3.4 Algoritmo de Euclides

Lema 3.4.1: Se $a = bq + r$, então o $(a, b) = (b, r)$.

<u>Demonstração:</u> Se o $(a, b) = d$, então $d|a$ e $d|b$, o que implica $d|(a - bq)$ ou $d|r$, isto é, d é um divisor comum de b e r.

Por outro lado, se c é um divisor comum qualquer de b e r, então $c|(bq + r)$ ou $c|a$, isto é, c é um divisor comum de a e b, o que implica $c \leq d$. Assim sendo, o $(b, r) = d$. ■

O Algoritmo de Euclides está assim definido:

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ cujo máximo divisor comum se deseja determinar.

É imediato:

i) Se $a \neq 0$, então $(a, 0) = |a|$.
ii) Se $a \neq 0$, então $(a, a) = |a|$.

iii) Se $b|a$, então $(a,b) = |b|$.

Além disso, por ser $(a,b) = (|a|,|b|)$, a determinação do (a,b) reduz-se ao caso em que a e b são inteiros positivos distintos, por exemplo, como $a > b$, tais que b não divide a, isto é: $a > b > 0$ e $b \nmid a$. Nestas condições, a aplicação repetida do algoritmo da divisão dá-nos as igualdades:

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b = r_1q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ r_2 = r_3q_4 + r_4, & 0 < r_4 < r_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Como os restos $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$ são todos inteiros positivos tais que

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots$$

e existem apenas $b - 1$ inteiros positivos menores que b, necessariamente se chega a uma divisão cujo resto $r_{n+1} = 0$, isto é, finalmente, teremos:

$$\begin{array}{ll} r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}, & r_{n-1} = 0 \end{array}$$

O último resto $r_n \neq 0$ que aparece nesta sequência de divisões é o máximo divisor comum procurado de a e b, isto é, o $(a,b) = r_n$, visto que, pelo lema anterior, temos:

$$(a,b) = (b,r_1) = (r_1,r_2) = \cdots = (r_{n-2},r_{n-1}) = (r_{n-1},r_n) = r_n$$

Este processo prático para o cálculo do m.d.c. de dois inteiros positivos a e b é denominado Algoritmo de Euclides ou processo das divisões sucessivas.

Na prática, pode-se realizar o Algoritmo de Euclides da seguinte forma:

Inicialmente, efetuamos a divisão $a = bq_1 + r_1$ e colocamos os números envolvidos no seguinte diagrama:

	q_1	
a	b	
r_1		

A seguir, continuamos efetuando a divisão $b = r_1q_2 + r_2$ e colocamos os números envolvidos no diagrama:

	q_1	q_2	
a	b	r_1	
r_1	r_2		

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos:

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (a,b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n		

Exemplos 8: Calcular o mdc de 744 e 324, pelo Algoritmo de Euclides.

Solução: Usando o Algoritmo de Euclides, temos:

	2	3	2	1	2
744	324	96	36	24	12
96	36	24	12	0	

Logo, encontramos o $(744, 324) = 12$.

Podemos observar no exemplo acima, que o Algoritmo de Euclides também fornece que:

$$12 = 36 - 24 \cdot 1$$

$$24 = 96 - 36 \cdot 2$$

$$36 = 324 - 96 \cdot 3$$

$$96 = 744 - 324 \cdot 2$$

Donde se segue que:

$$\begin{aligned} 12 &= 36 - 24 \cdot 1 \\ &= 36 - 1 \cdot (96 - 36 \cdot 2) \\ &= 3 \cdot 36 - 96 \\ &= 3 \cdot (324 - 96 \cdot 3) - 96 \\ &= 3 \cdot 324 - 9 \cdot 96 - 96 \end{aligned}$$

$$= 3 \cdot 324 - 10 \cdot 96$$

$$= 3 \cdot 324 - 10 \cdot (744 - 324 \cdot 2)$$

$$= 3 \cdot 324 - 10 \cdot 744 + 20 \cdot 324$$

$$= 23 \cdot 324 - 10 \cdot 744.$$

Temos, então, que

$$(744, 324) = 12 = 23 \cdot 324 + (-10) \cdot 744.$$

Através do Algoritmo de Euclides feito de trás para frente, conseguimos escrever $12 = (744, 324)$ como múltiplo de 324 mais um múltiplo de 744.

<u>Exemplo 9:</u> Para o par de números naturais $a = 637$ e $b = 3.887$, ache (a, b) e determine números inteiros m e n tais que $(a, b) = m \cdot a + n \cdot b$.

<u>Solução:</u> Usando o Algoritmo de Euclides, temos:

	6	9	1	4
3.887	637	65	52	13
65	52	13	0	

Logo, encontramos o $(3.887, 637) = 13$.

O Algoritmo de Euclides também fornece que:

$$13 = 65 - 52 \cdot 1$$

$$52 = 637 - 65 \cdot 9$$

$$65 = 3.887 - 637 \cdot 6$$

Segue que:

$$13 = 65 - 52 \cdot 1$$

$$= 65 - (637 - 65 \cdot 9)$$

$$= 10 \cdot 65 - 1 \cdot 637$$

$$= 10 \cdot (3.887 - 637 \cdot 6) - 637$$

$$= 10 \cdot 3.887 - 61 \cdot 637.$$

Temos, então, que

$$(3.887, 637) = 13 = 10 \cdot 3.887 + (-61) \cdot 637.$$

Logo, temos que $m = 10$ e $n = -61$.

<u>Exemplo10:</u> Sabendo que uma fração $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ é dita irredutível quando $(a, b) = 1$. Nesse caso verifique se a fração $\frac{21x+4}{14x+3}$ é irredutível:

<u>Solução:</u> Vamos verificar o $(21x + 4, 14x + 3)$.

	1	2	$7x + 1$
$21x + 4$	$14x + 3$	$7x + 1$	1
$7x + 1$	1	0	

Logo, o $(21x + 4, 14x + 3) = 1$. Portanto, a fração é irredutível.

4 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS

Neste capítulo, o tema das Equações Diofantinas será abordado e exemplos contextualizados serão apresentados para estimular um maior interesse por essas equações. As equações diofantinas constituem uma classe especial de equações polinomiais, cujas soluções estão estritamente vinculadas a números inteiros. Essas equações recebem tal denominação em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria, conforme previamente discutido no **Capítulo 2** desse trabalho.

A atenção será direcionada para o tipo mais simples das equações diofantinas, especificamente a equação diofantina linear com duas incógnitas, x e y:

$$ax + by = c,$$

onde a, b e c são inteiros dados, com a condição de $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

A solução inteira da equação $ax + by = c$ consiste em todos os pares ordenado (x_0, y_0) tais que $ax_0 + by_0 = c$.

Para ilustrar, considere algumas soluções para a equação diofantina linear com duas incógnitas $x + 2y = 6$:

$$4 + 2 \cdot 1 = 6$$

$$(-6) + 2 \cdot 6 = 6$$

$$10 + 2 \cdot (-2) = 6$$

Portanto, os pares de inteiros 4 e 1, – 6 e 6, e 10 e – 2 são soluções da equação.

É importante notar que existem equações diofantinas lineares com duas incógnitas que não têm solução. Isso ocorre sempre que o maior divisor comum $d = (a, b)$ não divide c.

Teorema 4.1: A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se, e somente se, d divide c, sendo $d = (a, b)$.

<u>Demonstração:</u> Suponhamos que a equação $ax + by = c$ tem uma solução, isto é, que existe um par de inteiros x_0 e y_0, tais que $ax_0 + by_0 = c$.

Por ser o $(a, b) = d$, existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, e temos:

$$c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0)$$

e como $rx_0 + sy_0$ é um inteiro, segue-se que $d|c$.

Reciprocamente, suponhamos que $d|c$, isto é, que $c = dt$, onde t é um inteiro.

Por ser $(a, b) = d$, existem inteiros x_0 e y_0 tais que$d = ax_0 + by_0$.

O que implica:

$$c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(tx_0) + b(ty_0),$$

isto é, o par de inteiros:

$$x = tx_0 = \left(\frac{c}{d}\right)x_0 \cdot y = ty_0 = \left(\frac{c}{d}\right)y_0$$

é uma solução da equação $ax + by = c$. ■

Teorema 4.2: Se $d|c$, sendo $d = (a, b)$ e se o par de inteiros x_0 e y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então todas as outras soluções desta equação são dadas pelas fórmulas:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \quad \text{e} \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t$$

onde t é um inteiro arbitrário

<u>Demonstração:</u> Suponhamos que o par de inteiros x_0 e y_0 é uma solução particular da equação $ax + by = c$, e seja x_1 e y_1 uma outra solução qualquer desta equação. Então, temos:

$$ax_0 + by_0 = c \quad \text{e} \quad ax_1 + by_1 = c$$

Logo:

$$a(x_1 - x_0) = b(y_1 - y_0)$$

Sabendo que $d = (a, b)$, estão existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, onde $(r, s) = 1$. Então temos:

$$dr(x_1 - x_0) = ds(y_1 - y_0)$$

$$r(x_1 - x_0) = s(y_1 - y_0)$$

Dado que r e s são primos entre si, isso implica que $r|(y_1 - y_0)$ e $s|(x_1 - x_0)$.

Ou seja:

$$y_0 - y_1 = rt \quad \text{e} \quad x_1 - x_0 = st,$$

onde t é um inteiro qualquer.

Agora, substituindo essas relações nas fórmulas propostas, temos:

$$x_1 = x_0 + st = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t$$

$$y_1 = y_0 - rt = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t$$

Estes valores de x_1 e y_1 satisfazem realmente a equação $ax + by = c$, qualquer que seja o inteiro t, pois, temos:

$$ax_1 + by_1 = a\left[x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t\right] + b\left[y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t\right]$$

$$= ax_0 + by_0 + \left(\frac{ab}{d} - \frac{ab}{d}\right)t$$

$$= c + 0 \cdot t$$

$$= c$$

Como se vê, se $d = (a, b)$ divide c, então a equação diofantina linear $ax + by = c$ admite um número infinito de soluções, uma para cada valor do inteiro arbitrário t. ■

Exemplo 11: Determinar todas as soluções inteiras da equação diofantina linear:

$$7x + 9y = 5$$

Solução: Inicialmente vamos determinar o $(7, 9)$ pelo algoritmo de Euclides:

	1	3	2
9	7	2	1
2	1	0	

Logo, encontramos o $(7, 9) = 1$.

Daí, segue que:

$$1 = 7 - 2 \cdot 3$$

$$2 = 9 - 7 \cdot 1$$

Como o $(7, 9) = 1$ a equação tem solução, pois $(7,9)|5$.

Agora, expressando 1 como uma combinação linear, temos:

$$1 = 7 - 2 \cdot 3$$

$$= 7 - (9 - 7) \cdot 3$$

$$= 7 \cdot 4 + 9 \cdot (-3)$$

Multiplicando essa igualdade por 5, temos:

$$7 \cdot 20 + 9 \cdot (-15) = 5$$

Com isso obtemos o par de inteiros $x_0 = 20$ e $y_0 = -15$ que é uma solução particular da equação dada. E, pelo **Teorema 4.2** todas as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$x = 20 + 9t \quad \text{e} \quad y = -15 - 7t$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

<u>Exemplo12:</u> Determinar todas as soluções inteiras e positivas da equação diofantina linear $62x + 11y = 788$.

<u>Solução:</u> Determinando o $(62, 11)$ pelo algoritmo de Euclides:

	5	1	1	1	3
62	11	7	4	3	1
7	4	3	1	0	

Logo, encontramos o $(62, 11) = 1$.

Daí, segue que:

$$62 = 11 \cdot 5 + 7 \Rightarrow 62 - 11 \cdot 5 = 7$$

$$11 = 7 \cdot 1 + 4 \Rightarrow 11 - 7 \cdot 1 = 4$$

$$7 = 4 \cdot 1 + 3 \Rightarrow 7 - 4 \cdot 1 = 3$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

Como o $(62, 11) = 1$ a equação tem solução, pois $1|788$.

Agora, expressando 1 como uma combinação linear, temos:

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \\ &= 4 - (7 - 4) \\ &= 4 \cdot 2 - 7 \\ &= (11 - 7) \cdot 2 - 7 \\ &= 7 \cdot (-3) + 11 \cdot 2 \\ &= (62 - 11 \cdot 5) \cdot (-3) + 11 \cdot 2 \\ &= 62 \cdot (-3) + 11 \cdot 17 \end{aligned}$$

isto é

$$62 \cdot (-3) + 11 \cdot 17 = 1$$

Multiplicando essa igualdade por 788, temos:

$$62 \cdot (-2.364) + 11 \cdot (13.396) = 788$$

Com isso, obtemos o par de inteiros $x_0 = -2.364$ e $y_0 = 13.396$ que é uma solução particular da equação dada.

As soluções gerais são dadas pelas fórmulas:

$$x = -2.364 + 11t \quad \text{e} \quad y = 13.396 - 62t$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

As soluções inteiras e positivas são determinadas escolhendo t de modo que sejam satisfeitas as desigualdades $-2.364 + 11t > 0$ e $13.396 - 62t > 0$. Temos então que:

$$\begin{array}{lcl} -2.364 + 11t > 0 & & 13.396 - 62t > 0 \\ t > \dfrac{2.364}{11} & e & t < \dfrac{13.396}{62} \\ t > 214{,}909090\ldots & & t < 216{,}064516\ldots \end{array}$$

Como $t \in \mathbb{Z}$ temos que $t = 215$ e $t = 216$.

Para $t = 215$, temos:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{x} = -2.364 + 11 \cdot 215 & & \mathrm{y} = 13.396 - 62 \cdot 215 \\ & \text{e} & \\ \mathrm{x} = 1 & & \mathrm{y} = 66 \end{array}$$

Para $t = 216$, temos:

$$\begin{array}{lcl} x = -2.364 + 11 \cdot 216 & & y = 13.396 - 62 \cdot 216 \\ & \text{e} & \\ x = 12 & & y = 4 \end{array}$$

Assim, os pares de inteiros $x = 1, y = 66$ e $x = 12, y = 4$ são as soluções inteiras e positivas da equação dada.

<u>Exemplo13:</u> Determinar todas as soluções inteiras da equação diofantina linear:

$$15x + 9y = 8$$

<u>Solução:</u> Inicialmente iremos determinar o $(15, 9)$ pelo algoritmo de Euclides:

	1	1	2
15	9	6	3
6	3	0	

Logo, encontramos o $(15, 9) = 3$, como $3 \nmid 8$, pelo **Teorema 4.1**, a equação não tem solução.

4.1 As Equações Diofantinas Lineares nos anos finais do Ensino Fundamental

As equações do 1º grau com duas incógnitas são comumente apresentadas aos alunos no 8º ano do ensino fundamental, onde eles começam a explorar conceitos mais avançados de álgebra. No entanto, é essencial destacar que, ao restringirmos o conjunto universo dessas equações ao conjunto dos números inteiros, elas se tornam as chamadas "equações diofantinas lineares". Ao trabalhar com essas equações, os estudantes são introduzidos à ideia de encontrar pares de valores inteiros que satisfaçam a igualdade.

> Propor aos alunos que determinem soluções distintas para uma mesma equação do 1°grau com duas incógnitas. Espera-se que eles percebam que para obter tais soluções devem escolher um valor para uma das incógnitas, substituir esse valor na equação e, assim, determinar o valor da outra incógnita, sempre respeitando as condições dadas sobre os valores que as incógnitas podem assumir. Por exemplo, se as incógnitas representam idades ou quantidades, elas podem assumir somente valores positivos e inteiros, ou seja, devem ser números naturais. (Giovanni Junior, 2018, p. 148).

Vejamos uma questão e sua solução de acordo com a abordagem desse tema nos livros do ensino fundamental: anos finais.

<u>Exemplo14:</u> (Sampaio, 2018, p. 133) Luísa foi ao mercado comprar açúcar e havia dois tipos de açúcar à venda, refinado e cristal, ao preço de R$ 2,00 e R$ 3,00 por pacote, respectivamente. Sabendo que ela gastou R$ 28,00, quantos pacotes de cada tipo de açúcar ela comprou?

<u>Solução:</u> Inicialmente, vamos considerar x como a quantidade de quilos de açúcar do tipo refinado e y como a quantidade de quilos de açúcar do tipo cristal.

A situação pode ser representado pela equação diofantina $2x + 3y = 28$.

Daí:

$$2x + 3y = 28$$

$$2x = 28 - 3y$$

$$x = \frac{28 - 3y}{2}$$

$$x = 14 - \frac{3y}{2}$$

Como $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $0 \leq y \leq 9$, pois:

$$\frac{3y}{2} \leq 14$$

$$3y \leq 28$$

$$y \leq \frac{28}{3} \cong 9{,}333\cdots$$

Agora substituindo os possíveis valores de y obtemos os valores de x, acompanhe na tabela abaixo:

y	$x = 14 - \frac{3y}{2}$
0	14
1	$\frac{25}{2}$
2	11
3	$\frac{21}{2}$
4	8
5	$\frac{13}{2}$
6	5
7	$\frac{23}{7}$
8	2
9	$\frac{1}{2}$

Fonte: Autor

Então, os possíveis pares ordenados que são soluções da equação, são:

$x = 14, y = 0$; $x = 11, y = 2$; $x = 8, y = 4$; $x = 5, y = 6$ e$x = 2, y = 8$.

Podendo assim dizer que ela poderá comprar:

- ✓ 14 kg de açúcar refinado e 0 kg de açúcar cristal;
- ✓ 11 kg de açúcar refinado e 2 kg de açúcar cristal;
- ✓ 8 kg de açúcar refinado e 4 kg de açúcar cristal;

- ✓ 5 kg de açúcar refinado e 6 kg de açúcar cristal;
- ✓ 2 kg de açúcar refinado e 8 kg de açúcar cristal.

Vejamos outro exemplo:

Exemplo15: (Domingues; Iezzi, 2003, p. 52) Decomponha o número 100 em duas parcelas positivas tais que uma é múltipla de 7 e a outra de 11.

Solução: Resolver o problemaequivale a encontrar a soluçãoda equação diofantina linear$7x + 11y = 100$.

Daí,

$$7x + 11 = 100$$

$$7x = 100 - 11y$$

$$x = \frac{100 - 11y}{7}$$

Como x e y são inteiros positivos,temos que $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ pois para $y > 9$ os valores de x serão menores que 0.

Agora, substituindo os possíveis valores de y obtemos os valores de x, acompanhe na tabela abaixo:

y	$x = \frac{100 - 11y}{7}$
1	$\frac{89}{7}$
2	$\frac{78}{7}$
3	$\frac{67}{7}$
4	$\frac{56}{7} = 8$
5	$\frac{45}{7}$
6	$\frac{34}{7}$
7	$\frac{23}{7}$
8	$\frac{12}{7}$

9	$\frac{1}{7}$

Fonte: Autor

Logo, a única solução possível é o par de inteiros$x = 8$ e $y = 4$. E os números procurados são $7 \cdot 8 = 56$ e $11 \cdot 4 = 44$.

Ao abordar a resolução desse tipo de equação conforme apresentado anteriormente, percebemos que o professor perde a oportunidade de revisitar e aplicar conceitos já estudados em anos anteriores. Embora, seja interessante mostrar essa abordagem específica para solucionar equações do 1º grau com duas incógnitas, encontrando o valor de uma incógnita e, por meio dos cálculos necessários, descobrindo o valor da outra incógnita, apresentar a solução geral das equações diofantinas lineares de duas incógnitas enriqueceria a aula. Além disso, proporcionaria uma aplicação prática de conteúdos previamente abordados, como divisibilidade, máximo divisor comum (MDC), algoritmo de Euclides, equações do 1º grau e inequações do 1º grau.

4.2 As equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio

Neste tópico, exploraremos questões do Exame Nacional do Ensino Médio – Enem, bem como desafios presentes em olimpíadas e vestibulares, que encontram solução por meio de equações diofantinas lineares.

<u>Exemplo 16:</u> (Enem – 2021) Um lava-rápido oferece dois tipos de lavagem de veículo: lavagem simples, ao preço de $R\$ 20{,}00$ e lavagem completa, ao preço de $R\$ 35{,}00$. Para cobrir as despesas com produtos e funcionários e não ter prejuízos, o lava-rápido deve ter uma receita diária de, pelo menos, $R\$ 300{,}00$.

Para não ter prejuízos, o menor número de lavagens diárias que o lava-rápido deve efetuar é

a) 6.
b) 8.
c) 9.
d) 15.
e) 20.

<u>Solução:</u> Considerando x como a quantidade de lavagens simples e y como a quantidade de lavagens completas, temos a seguinte equação diofantina linear:

$$20x + 35y = 300,$$

com $x, y \in \mathbb{N}$.

Vamos determinar o $(35, 20)$ pelo algoritmo de Euclides:

	1	1	3
35	20	15	5
15	5	0	

Logo, encontramos o $(35, 20) = 5$.

Daí, segue que:

$$35 = 1 \cdot 20 + 15 \Rightarrow 35 - 20 = 15$$

$$20 = 1 \cdot 15 + 5 \Rightarrow 20 - 15 = 5$$

Como $5|300$, a equação tem solução.

Agora, expressando 5 como uma combinação linear, temos:

$$\begin{aligned} 5 &= 20 - 15 \\ &= 20 - (35 - 20) \\ &= 20 + 20 - 35 \\ &= 2 \cdot 20 - 35 \\ &= 20 \cdot 2 + 35 \cdot (-1) \end{aligned}$$

isto é

$$20 \cdot 2 + 35 \cdot (-1) = 5$$

Multiplicando essa igualdade por 60, temos:

$$20 \cdot 120 + 35 \cdot (-60) = 300$$

Com isso, obtemos o par de inteiros $x_0 = 120$ e $y_0 = -60$ que é uma solução particular da equação dada.

As soluções gerais são dadas pelas formulas:

$$x = x_0 + \frac{b}{d} t e y = y_0 - \frac{a}{d} t$$

com $t \in \mathbb{Z}$. Então:

$$x = 120 + \frac{35}{5} t \quad \text{e} \quad y = -60 - \frac{20}{5} t$$

$$x = 120 + 7t \qquad y = -60 - 4t$$

As soluções inteiras não negativas são determinadas escolhendo t de modo que sejam satisfeitas as desigualdades $120 + 7t \geq 0$ e $-60 - 4t \geq 0$. Temos então que:

$$120 + 7t \geq 0 \qquad -60 - 4t \geq 0$$

$$t \geq -\frac{120}{7} \quad e \quad t \leq -\frac{60}{4}$$

$$t \geq -17{,}142857 \ldots \qquad t \leq -15$$

Como $t \in \mathbb{Z}$ temos que $t = -17$, $t = -16$ e $t = -15$.

Para $t = -17$, temos:

$$x = 120 + 7 \cdot (-17) \quad \text{e} \quad y = -60 - 4 \cdot (-17)$$

$$x = 1 \qquad y = 8$$

Para $t = -16$, temos:

$$x = 120 + 7 \cdot (-16) \quad \text{e} \quad y = -60 - 4 \cdot (-16)$$

$$x = 8 \qquad y = 4$$

Para $t = -15$, temos:

$$x = 120 + 7 \cdot (-15) \quad \text{e} \quad y = -60 - 4 \cdot (-15)$$

$$x = 15 \qquad y = 0$$

Assim, os pares de inteiros $x = 1, y = 8$, $x = 8, y = 4$ e $x = 15, y = 0$ são as soluções inteiras não negativas da equação dada.

Com isso, temos que a menor quantidade de lavagem para que o lava-rápido não tenha prejuízo são 9, sendo uma lavagem simple e 8 lavagem completas.

Gabarito: letra C.

Agora, vejamos uma questão que aborda o tema das equações diofantinas lineares na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.

Exemplo 17: (OBMEP – Nível 3 – 2012) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou $R\$$ 2,99 na compra de botões, de 4 centavos cada, e de laços, de 7 centavos cada. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

a) 23
b) 13
c) 10
d) 5
e) 2

Solução: Sejam x e y as quantidades de botões e laços comprados, respectivamente. De acordo com o enunciado, a equação associada é:

$$0{,}04x + 0{,}07y = 2{,}99$$

com $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Multiplicando a equação por 100, temos:

$$4x + 7y = 299$$

Obtemos assim uma equação diofantina linear.

Como 4 e 7 são primos entre si, ou seja, $(7{,}4) = 1$, a equação diofantina linear tem solução, pois $1|299$. Mesmo obtendo o MDC, o calcularemos usando o algoritmo de Euclides a fim de encontrar uma solução particular para essa equação.

	1	1	3
7	4	3	1
3	1	0	

Logo, encontramos o $(7, 4) = 1$.

Daí, segue que:

$$7 = 4 \cdot 1 + 3 \Rightarrow 7 - 4 = 3$$
$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 4 - 3 = 1$$

Agora, expressando 1 como uma combinação linear, temos:

$$1 = 4 - 3$$
$$= 4 - (7 - 4)$$

$$= 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1)$$

Isto é:

$$4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) = 1$$

Multiplicando essa igualdade por 299, temos:

$$4 \cdot 598 + 7.(-299) = 299$$

Logo, $x_0 = 598$ e $y_0 = -299$ é a solução particular da equação diofantina. A solução geral é:

$$x = 598 + 7tey = -299 - 4t$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

Como ela comprou pelo menos um dos artigos para confecção das blusas, termos que as soluções para x e y são maiores que zero, ou seja, $x > 0$ e $y > 0$.

$$598 + 7t > 0 \qquad\qquad -299 - 4t > 0$$

$$t > -\frac{598}{7} \qquad \text{e} \qquad t < -\frac{299}{4}$$

$$t > -85{,}428571\ldots \qquad\qquad t < -74{,}75$$

Logo, $t \in \{-85, -84, -83, -82, -81, -80, -79, -78, -77, -76, -75\}$

Mostraremos na tabela abaixo todas as soluções da equação diofantina linear:

t	$x = 598 + 7t$	$y = -299 - 4t$
-85	3	41
-84	10	37
-83	17	33
-82	24	29
-81	31	25
-80	38	21
-79	45	17
-78	52	13
-77	59	9
-76	66	5

-75	73	1

Fonte: Autor

Como a costureira utilizou todos os botões e laços que comprou, a quantidade de botões x e a quantidade de laços y precisam ser múltiplos. Logo, a única solução possível é $x = 52$ e $y = 13$. Portanto, ela fez 13 blusas, utilizando 4 botões e 1 laço em cada blusa.

Gabarito: letra B.

Agora vejamos uma questão de vestibular que podemos resolver utilizando as equações diofantinas lineares.

Exemplo 18: (Urca – 2022.2) Seja S o conjunto formado pelos pontos (x, y) onde a reta $2y = x + 4$ intersecta a circunferência $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$. É correto afirmar que

a) $S = \{(4,0),(2,4)\}$
b) $S = \{(0,4)\}$
c) $S = \emptyset$
d) $S = \{(0,2),(4,4)\}$
e) $S = \{(2,2)\}$

Solução: Dada a equação da reta $2y = x + 4$, analisaremos as soluções inteiras não negativas, já que, pelas alternativas fornecidas, os valores de x e y pertencem a esse conjunto.

Como $x, y \in \mathbb{Z}$, podemos escrever a equação da reta da seguinte forma:

$$-x + 2y = 4$$

e concluir que essa equação é também uma equação diofantina, com $a = -1$ e $b = 2$.

Vamos encontrar a solução geral da equação diofantina linear $-x + 2y = 4$.

Como o $(-1, 2) = 1$, a equação tem solução já que $1|4$.

É fácil ver, que uma solução particular é $x_0 = 2$ e $y_0 = 3$. Logo,

$$x = x_0 + bt \qquad \text{e} \qquad y = y_0 - at$$
$$x = 2 + 2\text{t} \qquad \qquad y = 3 - (-1)\text{t}$$

$$y = 3 + \text{t}$$

Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$, temos:

$$2 + 2t \geq 0 \qquad\qquad 3 + t \geq 0$$
$$2t \geq -2 \qquad \text{e} \qquad t \geq -3$$
$$t \geq -1$$

Logo, $t \geq -1$.

Veja na tabela abaixo alguns pares ordenados que são solução da equação.

t	$x = 2 + 2t$	$y = 3 + t$	(x, y)
-1	0	2	$(0, 2)$
0	2	3	$(2, 3)$
1	4	4	$(4, 4)$
2	6	5	$(6, 5)$
3	8	6	$(8, 6)$

Fonte: Autor

Dos possíveis pares ordenados os únicos que satisfazem a equação da circunferência $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$ são $(0, 2)$ e $(4, 4)$. veja:

Substituindo o par ordenado $(0, 2)$, na equação da circunferência, temos:

$$(0 - 4)^2 + (2 + 1)^2 = 25$$
$$(-4)^2 + 3^2 = 25$$
$$16 + 9 = 25$$

Substituindo o par ordenado $(4, 4)$, na equação da circunferência, temos:

$$(4 - 4)^2 + (4 + 1)^2 = 25$$
$$0^2 + 5^2 = 25$$
$$0 + 25 = 25$$

Então, $S = \{(0, 2), (4, 4)\}$.

Gabarito: letra D.

A análise dos exemplos apresentados revela que, embora as Equações Diofantinas Lineares não estejam contempladas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), seu estudo se justifica, uma vez que representaria mais uma ferramenta para a solução de diversas questões. Vale salientar que o uso das equações Diofantinas

Lineares nem sempre conduzirá a soluções imediatamente evidentes aos alunos para determinadas questões. No entanto, ao abordar e apresentar essas soluções aos estudantes, o professor enriquecerá sua aula, proporcionando uma compreensão mais abrangente e aprofundada do tópico.

Além disso, é importante ressaltar que o estudo dessas equações também permite a revisitação e consolidação de conteúdos previamente estudados no ensino fundamental anos finais. Dessa forma, a incorporação das Equações Diofantinas Lineares no currículo não apenas amplia o repertório matemático dos alunos, mas também fortalece a conexão entre diferentes conceitos ao longo de sua trajetória educacional.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho deve ser compreendido em sua totalidade, pois o guia didático utilizará seus capítulos como material de consulta e fundamentação teórica das equações diofantinas lineares com duas incógnitas. A abordagem do contexto histórico em que Diofanto de Alexandria estava inserido também é um tema significativo nesse trabalho. Diofanto contribuiu para transição da álgebra retórica, isto é, sem a necessidade de fazer uso de símbolos específicos para variáveis ou números para a álgebra que se utiliza de símbolos para representar números e operações.

Além disso, são exploradas as proposições, teoremas e suas respectivas demonstrações relevantes às equações diofantinas lineares com duas incógnitas, propondo exercícios contextualizados e suas soluções. Diante de tudo que foi apresentado, o trabalho demonstra a importância de abordar as equações diofantinas lineares com duas incógnitas, aplicando métodos para encontrar todas as soluções inteiras dessas equações e destacando a relevância desse tema, mesmo que ele não esteja explicitamente presente na BNCC.

Este estudo também oferece ao professor a oportunidade de aplicar conteúdos vistos nos anos finais do ensino fundamental no ensino médio, promovendo uma retomada de conteúdos e demonstrando sua importância. Ao aplicar esse conteúdo em suas aulas na Educação Básica, o professor pode enriquecer o aprendizado dos alunos, tornando-o mais contextualizado e estimulante.

Não se pretende, com este trabalho, apresentar uma forma mais fácil de resolver equações do 1° grau com duas incógnitas, mas sim oferecer uma ferramenta adicional que o aluno pode usar para resolver tais equações.

Reconhece-se que existem limitações e dificuldades para os professores de matemática das escolas públicas em adicionar mais um conteúdo à extensa grade curricular dessa disciplina. No entanto, a inovação e o aprimoramento nas aulas são aspectos inerentes à profissão de professor. Este trabalho é valioso como fonte de pesquisa para professores de matemática que desejem ou necessitem estudar esse conteúdo em suas aulas na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria Elementar dos Números.** 1. Ed. São Paulo: Nobel, 1981.

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria Elementar dos Números.** São Paulo: Editora Nobel S.A, ano 1981.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** Tradução: Elza F. Gomides. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson; **Álgebra moderna: volume único**. 4 ed. São Paulo: Atual, 2003.

DUARTE, José Roberto. **Equações Diofantinas associadas a Funções Aritméticas.** 2020. 125 p. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2020.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FONSECA, Rubens Vilhena. **Teoria dos Números.** Belém: UEPA / Centro de Ciências Sociais e Educação, 2011.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática: 8° ano: ensino fundamental: anos finais.** 1. Ed. São Paulo: FTD, São Paulo 2018.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, Dennis Freitas. **Equações Diofantinas e Aplicações.**2022. 106 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira– UNILAB, Redenção, 2022.

MARTINEZ, Fabio E. Brochero; MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A.; SALDANHA, Nicolau C.; TENGAN, Eduardo. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

MELZ, Elisângela Regina Selli; MISSE, Bruno Henrique Labriola. **Vivências e Experiências na Formação Inicial de Matemática: História da Matemática como articuladora do projeto integrador.** Blumenau: Editora IFC, 2022.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** 5. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2020.

SAMPAIO, Fausto Arnaud. **Trilhas da matemática, 8º ano: ensino fundamental, anos finais.** 4. Ed. São Paulo: Saraiva, São Paulo 2018.

SILVA, Rosangela Araújo da; MOREY, Bernadete Barbosa. **A álgebra islâmica antes de Omar Khayyam.** Revista de Produção Discente em Educação Matemática, São Paulo, v.10 n.1/2, p.79-93, Maio, 2021. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/54399. Acesso em: 20.04.2024.

Vieira, Bárbara Medeiros. **Equações Diofantinas: Uma proposta Didática para o 9º ano do Ensino Fundamental**. Dissertação (PROFMAT) - Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Palmas. Palmas, P. 56. 2018.

ANEXO

UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI – URCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PRODUTO EDUCACIONAL - GUIA DIDÁTICO PARA O ENSINO DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS

EDUARDO FERREIRA MATIAS

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2024

EDUARDO FERREIRA MATIAS

PRODUTO EDUCACIONAL - GUIA DIDÁTICO PARA O ENSINO DAS EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS

Produto Educacional apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar

JUAZEIRO DO NORTE- CE.

2024

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste guia didático voltado ao ensino de equações diofantinas lineares na Educação Básica, aplicaremos conceitos fundamentais que facilitam a compreensão e resolução dessas equações. Por meio desse material, busca-se contribuir para uma compreensão sólida e acessível das equações diofantinas lineares. Assim, enriquecendo o aprendizado e promovendo uma maior fluidez na compreensão do conteúdo.

As demonstrações detalhadas dos teoremas, que envolvem as equações diofantinas lineares com duas incógnitas, podem ser encontradas nos capítulos específicos de "**Teoria dos Números**" e "**Equações Diofantinas**" presentes no trabalho Equações diofantinas lineares com duas incógnitas aplicadas à Educação Básica, (Matias, 2024), que deu origem a esse guia.

As questões contidas nesse material foram retiradas de materiais didáticos que podem ser utilizados na rede básica de ensino, e outras, formuladas especificamente para esse guia. A seleção das questões levou em consideração dois critérios: 1 – questões com conteúdos considerados pré-requisitos para a resolução de equações diofantinas lineares com duas incógnitas; 2 – questões que envolvem no seu contexto situações cotidianas para motivar os alunos.

> Muitas vezes o aluno se depara com certos tipos de questões contextualizadas em sua própria realidade, desse modo exigindo-se alguns tipos de estratégias para resolvê-las. Além disso, o aluno percebe que para resolver tais situações-problema é necessário recorrer a conhecimentos já adquiridos e que precisam ser interligados (Frazão; Silva, 2023).

Questões que simulam situações do cotidiano têm o potencial de despertar o interesse dos alunos, além de desafiá-los a encontrar soluções para os problemas propostos. Essas situações, ao serem contextualizadas com o dia a dia dos estudantes, tornam-se mais significativas e estimulam um engajamento mais profundo com o aprendizado. Segundo Polya (2006), a resolução de situações-problema, mesmo de caráter simples, pode desafiar a curiosidade e colocar em jogo a capacidade de raciocínio lógico do aluno por meio de suas próprias estratégias, levando-o ao desejo de obter sucesso na resposta final.

Sabendo-se da necessidade de se ter mais materiais voltados para esse conteúdo, como também estimular a participação dos alunos nas aulas, esse guia objetiva-se em auxiliar os professores da Educação Básica com apresentações e resoluções de questões que abordam equações diofantinas lineares com duas incógnitas.

2 ATIVIDADES PROPOSTAS

Com o propósito de auxiliar os professores, as atividades sugeridas foram estruturadas em dois níveis progressivos de complexidade, apresentando-as como sugestão para estudo. Destaca-se que a intenção não é estabelecer sequências didáticas para o ensino de equações diofantinas lineares na Educação Básica, mas sim, fornecer um suporte de consulta.

No **Nível 1**, são propostas atividades introdutórias, escolhidas criteriosamente para proporcionar um primeiro contato acessível com o tema das equações diofantinas lineares. Estas atividades são especialmente adequadas para facilitar a compreensão de conceitos fundamentais, adaptando-se aos estágios iniciais de aprendizagem.

No **Nível 2**, as atividades são escolhidas visando os estágios mais avançados do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, focalizando o tema das equações diofantinas lineares. Elas abrangem conceitos desafiadores, adequados para estudantes que procuram desenvolver habilidades para resolver essas equações. Além disso, essas atividades frequentemente incorporam interdisciplinaridade, conectando conceitos de diferentes áreas do conhecimento para uma compreensão mais ampla e contextualizada.

2.1 Nível 1

Atividade 1. (Giovanni Júnior, 2018, p. 148) Em um estacionamento, há x carros e y motos, totalizando 60 rodas.

a) Qual é a equação nas incógnitas x e y que representa esse fato?
b) Considerando 12 carros e 6 motos, esses valores (12 e 6) verificam a equação que você escreveu?

Atividade 2. (Sampaio, 2018, p. 130) Juliana fez um saque de $R\$ 200{,}00$ em um caixa eletrônico que dispunha apenas de cédulas de $R\$ 20{,}00$ e de $R\$ 50{,}00$. Quantas cédulas de cada valor ela pode ter recebido?

Atividade 3. (Dante, 2018, p. 137) Carolina e Natália participaram de uma partida de futebol na escola e fizeram, ao todo, 7 gols.

a) Escreva no caderno uma equação para representar essa situação, considerando x o número de gols que Carolina fez e y o número de gols que Natália fez.
b) As incógnitas x e y dessa equação devem pertencer a qual conjunto numérico?
c) Carolina pode ter marcado 3 gols?
d) Natália pode ter marcado 8 gols?

Atividade 4. (Sampaio, 2018, p. 133) Luísa foi ao mercado comprar açúcar e havia dois tipos de açúcar à venda, refinado e cristal, ao preço de $R\$ 2{,}00$ e $R\$ 3{,}00$ por pacote, respectivamente. Sabendo que ela gastou $R\$ 28{,}00$,quantos pacotes de cada tipo de açúcar ela comprou?

Atividade 5. (Oliveira, 2022, p. 72) Marcos comprou duas calças e três camisetas e gastou, ao todo, $R\$ 200{,}00$.

a) Sendo xo preço de uma calça e yo preço de uma camiseta, escreva a equação que representa essa situação.
b) É possível que cada calça tenha custado $R\$ 65{,}00$ e que cada camiseta tenha custado R$ 30,00?
c) Determine pelo menos três soluções para a equação obtida no item a.

2.2 Nível 2

Atividade 6. (Hefez, 2022, p.83) Resolva, em $\mathbb{Z}$, as equações:

a) $90x + 28y = 22$
b) $40x - 65y = 135$

Atividade 7. (Alencar Filho, 1981, p. 146) Determinar todas as soluções inteiras e positivas das seguintes equações diofantinas lineares:

a) $5x - 11y = 29$
b) $62x + 11y = 788$
c) $32x + 55y = 771$

Atividade 8. (Domingues; Iezzi, 2003, p. 52) Decomponha o número 100 em duas parcelas positivas tais que uma é múltiplo de 7 e a outra de 11.

Atividade 9. (Domingues; Iezzi, 2003, p. 52) O valor da entrada de um cinema é $R\$\ 8{,}00$ e da meia entrada $R\$\ 5{,}00$. Qual é o menor número de pessoas que pode assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de $R\$\ 500{,}00$? (Em tempo: a capacidade desse cinema é suficiente para esse número de pessoas.)

Atividade 10. (Lima, 2022, p. 48) Em decorrência da pandemia, uma empresa resolveu ajudar seus funcionários com um auxílio alimentação em tíquetes na quantia de R$ $550{,}00$. Sabendo que a empresa disponibiliza tíquetes de $R\$\ 50{,}00$ e $R\$\ 150{,}00$, de quantas formas distintas a empresa pode entregar o auxílio de $R\$\ 550{,}00$ aos seus funcionários?

Atividade 11. (Autoral) Maria Júlia, que está no 7º ano e gosta muito de estudar, comprou um número ímpar de livros e alguns cadernos, gastando $R\$\ 84{,}50$. Sabendo-se que os preços unitários dos livros e dos cadernos são, respectivamente, $R\$\ 12{,}50$ e $R\$\ 4{,}70$, determine quantos livros e quantos cadernos ela comprou.

Atividade 12. (Autoral) Considere a reta representada pela equação geral $2x + 7y = 3$. Determine os pontos da reta com coordenadas inteiras e verifique se existe algum ponto pertencente à reta onde ambas as coordenadas são inteiras e positivas.

Atividade 13: (Banco de Questões OBMEP – 2015) Considere dois tambores de capacidade suficientemente grande, um deles vazio e o outro cheio de líquido. Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido do tambor cheio, no vazio, usando dois baldes, um com capacidade de 5 litros e o outro com capacidade de 7 litros.

Atividade 14. (Silva, 2018, p. 69) Um lava-jato lava carros oferecendo dois tipos de serviços: lavagem simples com o custo de $R\$\ 24{,}00$ e a completa por $R\$\ 36{,}00$. Certo dia, o gerente resolveu fazer uma promoção, dando 20% de desconto na lavagem simples e 10% de desconto na completa. No dia da promoção, o faturamento foi de $R\$\ 810{,}00$. Qual foi o menor número de clientes que foram atendidos?

Atividade 15. (Hefez, 2022, p. 83) Subindo uma escada de dois em dois degraus, sobra um degrau. Subindo a mesma escada de três em três degraus, sobram dois degraus. Determine quantos degraus possui a escada, sabendo que o número de degraus é múltiplo de 7 e está compreendido entre 40 e 100.

Atividade 16. (UFC – 2004) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, encontre o número de faces triangulares desse poliedro.

a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

3 SOLUÇÃO DAS ATIVIDADES

Vamos abordar cada uma das atividades propostas neste guia didático. É importante destacar que o objetivo das soluções não é apenas oferecer uma resolução mais trivial, mas sim proporcionar uma perspectiva adicional para o entendimento e aprimoramento da questão, com foco especial nas equações diofantinas.

3.1 Nível 1

<u>Solução da Atividade 1:</u> (Giovanni Júnior, 2018, p. 148) Em um estacionamento, há x carros e y motos, totalizando 60 rodas.

a) Qual é a equação nas incógnitas x e y que representa esse fato?
b) Considerando 12 carros e 6 motos, esses valores (12 e 6) verificam a equação que você escreveu?

a) Para encontrar a equação que representa o número de rodas em termos de x (carros) e y (motos), podemos considerar que cada carro tem 4 rodas e cada moto tem 2 rodas. Portanto, o número total de rodas é dado por:

$$\text{Total de rodas} = 4x + 2y$$

E, sabendo que este total é igual a 60, a equação resultante é:

$$4x + 2y = 60.$$

b) Podemos imediatamente substituir os valores $x = 12$ e$y = 6$ na equação encontrada anteriormente para verificar se a igualdade é satisfeita. Vejamos:

$$4 \cdot 12 + 2 \cdot 6 = 60$$

$$48 + 12 = 60$$

$$60 = 60$$

Conclui-se que $x = 12$ e $y = 6$ é uma solução válida da equação.

<u>Solução da Atividade 2:</u> (Sampaio, 2018, p. 130) Juliana fez um saque de $R\$\ 200{,}00$ em um caixa eletrônico que dispunha apenas de cédulas de $R\$\ 20{,}00$ e de $R\$\ 50{,}00$. Quantas cédulas de cada valor ela pode ter recebido?

Para resolver a situação apresentada, inicialmente é estabelecida a equação que descreve o problema. São designados x como a quantidade de cédulas de $R\$\ 20{,}00$ e y como a quantidade de cédulas de $R\$\ 50{,}00$, resultando na equação$20x + 50y = 200$. É ressaltado que os valores de x ey pertencem aos números naturais ($x, y \in \mathbb{N}$), caracterizando a equação como diofantina linear.

A seguir, é apresentada uma tabela com todas as soluções possíveis da equação:

x	y	Valor do saque
0	4	$R\$ 200,00$
5	2	$R\$ 200,00$
10	0	$R\$ 200,00$

Fonte: Autor

Como parte do processo reflexivo, os alunos são instigados a entenderem por que não é possível sacar apenas 3 cédulas de $R\$ 50,00$. Essa abordagem visa conduzir os estudantes a perceberem que não há como compor os $R\$ 50,00$ restantes utilizando exclusivamente cédulas de $R\$ 20,00$. Essa análise contribui para uma compreensão mais profunda do problema e dos princípios matemáticos envolvidos.

<u>Solução da Atividade 3:</u> (Dante, 2018, p. 137) Carolina e Natália participaram de uma partida de futebol na escola e fizeram, ao todo, 7 gols.

a) Escreva no caderno uma equação para representar essa situação, considerando x o número de gols que Carolina fez e y o número de gols que Natália fez.
b) As incógnitas x e y dessa equação devem pertencer a qual conjunto numérico?
c) Carolina pode ter marcado 3 gols?
d) Natália pode ter marcado 8 gols?

Espera-se que, nesta questão, os alunos tenham adquirido experiência suficiente para resolver cada item e associar que se trata de uma equação diofantina linear com duas incógnitas.

a) $x + y = 7$

b) Devem pertencer ao conjunto dos números naturais:$\mathbb{N}$

c) Sim, Carolina pode ter marcado 3 gols. É relevante destacar que o aluno pode perceber que Carolina poderia ter marcado outras quantidades de gols, como observado na tabela:

x	y
0	7

1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1
7	0

Fonte: Autor

d) Não. Pois $x + 8 = 7 \Rightarrow x = -1$, e como -1 não pertence aos números naturais, a resposta é inválida.

Solução da Atividade 4: (Sampaio, 2018, p. 133) Luísa foi ao mercado comprar açúcar e havia dois tipos de açúcar à venda, refinado e cristal, ao preço de $R\$\ 2{,}00$ e $R\$\ 3{,}00$ por pacote, respectivamente. Sabendo que ela gastou $R\$\ 28{,}00$,quantos pacotes de cada tipo de açúcar ela comprou?

Seja *x* a quantidade de pacotes de açúcar refinado e y a quantidade de pacotes de açúcar cristal que Luísa comprou. Como a quantidade de pacotes que ela comprou é um número natural, tem-se que a equação que expressa essa situação trata-se de uma equação diofantina linear, como pode ser observado a seguir.

$$2x + 3y = 28$$

Procurando uma resposta para essa equação, por tentativa e erro, os valores de x e y que satisfazem a equação, podemos encontrar as possíveis soluções:

x	y	$2x + 3y = 28$
2	8	$2 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 28$
5	6	$2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 28$
8	4	$2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 = 28$
11	2	$2 \cdot 11 + 3 \cdot 2 = 28$
14	0	$2 \cdot 14 + 3 \cdot 0 = 28$

Fonte: Autor

<u>Solução da Atividade 5:</u> Oliveira, 2022, p. 72) Marcos comprou duas calças e três camisetas e gastou, ao todo, $R\$\ 200{,}00$.

a) Sendo xo preço de uma calça e yo preço de uma camiseta, escreva a equação que representa essa situação.
b) É possível que cada calça tenha custado $R\$\ 65{,}00$ e que cada camiseta tenha custado R$ 30,00?
c) Determine pelo menos três soluções para a equação obtida no item a.

a) $2x\ +\ 3y = 200$

b) Utilizando a equação encontrada no item anterior, será feita a substituição de x por 65 e y por 30, resultando em:

$$2 \cdot 65 + 3 \cdot 30 = 130 + 90 = 210$$

Portanto, conclui-se que cada calça não poderia ter custado $R\$\ 65{,}00$ e cada camiseta não poderia ter custado $R\$\ 30{,}00$.

c) Alguns possíveis valores, para *x* e *y*, são:

x	y	$2x + 3y = 200$
85	10	$2 \cdot 85 + 3 \cdot 10 = 200$
55	30	$2 \cdot 55 + 3 \cdot 30 = 200$
40	40	$2 \cdot 40 + 3 \cdot 40 = 200$

Fonte: Autor

3.2 Nível 2

<u>Solução da Atividade 6:</u> (Hefez, 2022, p.83) Resolva, em $\mathbb{Z}$, as equações:

a) $90x + 28y = 22$
b) $40x - 65y = 135$

a) Inicialmente, determina-se o $(90, 28)$ pelo algoritmo de Euclides:

	3	4	1	2

90	28	6	4	2
6	4	2	0	

Logo, encontramos o $(90, 28) = 2$.

Como o $(90, 28) = 2$, a equação tem solução, pois $2|22$.

Daí, segue que:

$$90 = 28 \cdot 3 + 6 \Rightarrow 90 - 28 \cdot 3 = 6$$

$$28 = 6 \cdot 4 + 4 \Rightarrow 28 - 6 \cdot 4 = 4$$

$$6 = 4 \cdot 1 + 2 \Rightarrow 6 - 4 \cdot 1 = 2$$

Agora, expressando 2 como uma combinação linear, temos:

$$\begin{aligned} 2 &= 6 - 4 \cdot 1 \\ &= 6 - (28 - 6 \cdot 4) \\ &= 6 \cdot 5 + 28 \cdot (-1) \\ &= (90 - 28 \cdot 3) \cdot 5 + 28 \cdot (-1) \\ &= 90 \cdot 5 + 28 \cdot (-16) \end{aligned}$$

Isto é,

$$90 \cdot 5 + 28 \cdot (-16) = 2$$

Multiplicando essa igualdade por 11, obtém-se:

$$90 \cdot 55 + 28 \cdot (-176) = 22$$

Com isso, obtemos o par de inteiros $x_0 = 55$ e $y_0 = -176$, que é uma solução particular da equação dada. Todas as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$x = 55 + 28t \quad \text{e} \quad y = -176 - 90t,$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

b) Dada a equação diofantina linear $84x - 438y = 156$, a equação é simplificada dividindo-a por 6, resultando em $14x - 73y = 26$.

Agora, determina-se o $(73, 14)$ pelo algoritmo de Euclides:

	5	4	1	2
73	14	3	2	1
3	2	1	0	

Logo, encontramos o $(73, 14) = 1$.

Como o $(73, 14) = 1$, a equação tem solução, pois $1|26$.

Daí, segue que:

$$73 = 14 \cdot 5 + 3 \Rightarrow 73 - 14 \cdot 5 = 3$$
$$14 = 3 \cdot 4 + 2 \Rightarrow 14 - 3 \cdot 4 = 2$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Agora, expressando 1 como uma combinação linear, tem-se:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 3 - (14 - 3 \cdot 4) \\ &= 3 \cdot 5 + 14 \cdot (-1) \\ &= (73 - 14 \cdot 5) \cdot 5 + 14 \cdot (-1) \\ &= 73 \cdot 5 + 14 \cdot (-26) \end{aligned}$$

Isto é,

$$73 \cdot 5 + 14 \cdot (-26) = 1$$

Multiplicando essa igualdade por 26, obtém-se:

$$73 \cdot 130 + 14 \cdot (-676) = 26$$

Com isso, é encontrado o par de inteiros $x_0 = 130$ e $y_0 = -676$, que é uma solução particular da equação dada. Todas as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$x = 130 + 14t \quad \text{e} \quad y = -676 - 73t,$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

<u>Solução da atividade 7.</u> (Alencar Filho, 1981, p. 146) Determinar todas as soluções inteiras e positivas das seguintes equações diofantinas lineares:

a) $5x - 11y = 29$
b) $62x + 11y = 788$
c) $32x + 55y = 771$

a) Ao considerar a equação diofantina linear $5x - 11y = 29$, dado que 5 e 11 são números primos o $(11, 5) = 1$, conclui-se que $1|29$, logo a equação possui solução.

É fácil ver que uma solução particular da equação diofantina linear $5x - 11y = 29$ é $x_0 = 8$ e $y_0 = 1$, pois,

$$5 \cdot 8 - 11 \cdot 1 = 40 - 11 = 29$$

As soluções gerais são dadas pelas fórmulas:

$x = 8 - 11t \quad$ e $\quad y = 1 - 5t$

com $t \in \mathbb{Z}$.

Para encontrar as soluções inteiras positivas, é necessário determinar x e y de modo que $x > 0$ e $y > 0$. Logo,

$$8 - 11t > 0 \qquad\qquad 1 - 5t > 0$$
$$-11t > -8 \qquad \text{e} \qquad -5t > -1$$
$$t < 0{,}727272\ldots \qquad\qquad t < 0{,}2$$

Portanto, conclui-se que para qualquer valor de $t \leq 0$ teremos x e y inteirose positivos.

b) Tomando a equação diofantina linear $54x + 21y = 906$, ao dividir a equação por 3, obtemos $18x + 7y = 302$. Utilizando o algoritmo de Euclides, temos:

	2	1	1	3
18	7	4	3	1
4	3	1	0	

Logo, encontramos o $(18, 7) = 1$.

Como o $(18, 7) = 1$, a equação tem solução, pois $1|302$.
Daí, segue que:

$$18 = 7 \cdot 2 + 4 \Rightarrow 18 - 7 \cdot 2 = 4$$

$$7 = 4 \cdot 1 + 3 \Rightarrow 7 - 4 \cdot 1 = 3$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

Agora, expressando 1 como uma combinação linear, tem-se:

$$1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$= 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1$$

$$= 18 \cdot 2 + 7 \cdot (-5)$$

Logo, $18 \cdot 2 + 7 \cdot (-5) = 1$.

Multiplicando esta equação por 302, obtemos:

$$18 \cdot 604 + 7 \cdot (-1.510) = 302$$

Consequentemente, é obtido o par de inteiros $x_0 = 604$ e $y_0 = -1.510$, que é uma solução particular da equação dada.

As soluções gerais são dadas pelas fórmulas:

$$x = 604 + 7t \quad \text{e} \quad y = -1.510 - 18t$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

Para encontrar todas as soluções inteiras positivas, é necessário determinar t de modo que x e y sejam maiores que zero.

Para $x > 0$, temos:

$$604 + 7t > 0$$
$$7t > -604$$
$$t > \frac{-604}{7}$$
$$t > -86{,}3$$

Para $y > 0$, temos:

$$-1.510 - 18t > 0$$
$$-18t > 1.510$$
$$t < -\frac{1.510}{18}$$
$$t < -83{,}9$$

Então, como $t \in \mathbb{Z}$, os possíveis valores de t são -86, -85 e -84.

Para $t = -86$, temos:

$$x = 604 + 7 \cdot (-86) = 2$$
$$y = -1.510 - 18 \cdot (-86) = 38$$

Para $t = -85$, temos:

$$x = 604 + 7 \cdot (-85) = 9$$
$$y = -1.510 - 18 \cdot (-85) = 20$$

Para $t = -84$, temos

$$x = 604 + 7 \cdot (-84) = 16$$

$$y = -1.510 - 18 \cdot (-84) = 2$$

Portanto, os pares de inteiros $x = 2, y = 38$, $x = 9, y = 20$ e $x = 16, y = 2$ são as soluções inteiras e positivas da equação dada.

c) Na equação diofantina linear $32x + 55y = 771$, inicialmente determina-se o $(55, 32)$ utilizando o algoritmo de Euclides:

	1	1	2	1	1	4
55	32	23	9	5	4	1
23	9	5	4	1	0	

Logo, encontramos o $(55, 32) = 1$.

Como o $(55, 32) = 1$, a equação tem solução, pois$1|771$.

Daí, segue que:

$$55 = 32 \cdot 1 + 23 \Rightarrow 55 - 32 \cdot 1 = 23$$

$$32 = 23 \cdot 1 + 9 \Rightarrow 32 - 23 \cdot 1 = 9$$

$$23 = 9 \cdot 2 + 5 \Rightarrow 23 - 9 \cdot 2 = 5$$

$$9 = 5 \cdot 1 + 4 \Rightarrow 9 - 5 \cdot 1 = 4$$

$$5 = 4 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 5 - 4 \cdot 1 = 1$$

Agora, expressando 1 como uma combinação linear, tem-se:

$$1 = 5 - 4 \cdot 1$$

$$= 5 - (9 - 5)$$

$$= 5 \cdot 2 + 9 \cdot (-1)$$

$$= (23 - 9 \cdot 2) \cdot 2 + 9 \cdot (-1)$$

$$= 23 \cdot 2 + 9 \cdot (-5)$$

$$= 23 \cdot 2 + (32 - 23) \cdot (-5)$$

$$= 23 \cdot 7 + 32 \cdot (-5)$$

$$= 32 \cdot (-5) + (55 - 32) \cdot 7$$

$$= 32 \cdot (-12) + 55 \cdot 7$$

Assim, $32 \cdot (-12) + 55 \cdot 7 = 1$. Multiplicando essa igualdade por 771, temos:

$$32 \cdot (-9.252) + 55 \cdot 5.397 = 771$$

Com isso, obteve-se o par de inteiros $x_0 = -9.252$ e $y_0 = 5.397$, que é uma solução particular da equação dada.

As soluções gerais são dadas pelas fórmulas:

$$x = -9.252 + 55t \quad \text{e} \quad y = 5.397 - 32t$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

Para determinar as soluções inteiras e positivas, é necessário escolher$t$ de modo que sejam satisfeitas as desigualdades $-9.252 + 55t > 0$ e $5.397 - 32t > 0$. Assim:

$$\begin{array}{lcl} -9.252 + 55t > 0 & & 5397 - 32t > 0 \\ t > \dfrac{9252}{55} & \text{e} & t < \dfrac{5397}{32} \\ t > 168{,}21818181\ldots & & t < 168{,}65625\ldots \end{array}$$

Como $t \in \mathbb{Z}$, não existe um valor de t para que a solução seja inteira e positiva.

<u>Solução da Atividade 8:</u> (Domingues; Iezzi, 2003, p. 52) Decomponha o número 100 em duas parcelas positivas tais que uma é múltiplo de 7 e a outra de 11.

Nesta questão, além de reconhecer que se trata de uma equação diofantina linear, o aluno utilizará as fórmulas da solução geral para resolver a equação. Vamos analisar:

Poderemos expressar essa situação através da seguinte equação:

$$7x + 11y = 100,$$

onde $7x$ representa a parcela múltipla de 7 e $11y$ a parcela múltipla de 11.

Esta equação é uma diofantina linear, pois $x, y \in \mathbb{Z}$. Determinando o $(11, 7)$ através do algoritmo de Euclides, temos:

	1	1	1	3
11	7	4	3	1

4	3	1	0	

$$11 = 7 \cdot 1 + 4 \Rightarrow 11 - 7 \cdot 1 = 4$$

$$7 = 4 \cdot 1 + 3 \Rightarrow 7 - 4 \cdot 1 = 3$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

Logo, encontramos o $(7, 11) = 1$, e a equação tem solução, pois $1|100$.

Agora, expressando 1 como uma combinação linear, temos:

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \\ &= 4 - (7 - 4) \\ &= 4 \cdot 2 - 7 \\ &= (11 - 7) \cdot 2 - 7 \\ &= 7 \cdot (-3) + 11 \cdot 2 \end{aligned}$$

isto é

$$7 \cdot (-3) + 11 \cdot 2 = 1$$

Multiplicando essa igualdade por 100, temos:

$$7 \cdot (-300) + 11 \cdot 200 = 100$$

Com isso obtemos o par de inteiros $x_0 = -300$ e $y_0 = 200$ que é uma solução particular da equação dada.

As soluções gerais são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{aligned} x &= -300 + 11t \\ y &= 200 - 7t \end{aligned}$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

As soluções inteiras e positivas são determinadas escolhendo t de modo que sejam satisfeitas as desigualdades $-300 + 11t > 0$ e $200 - 7t > 0$. Temos então que:

$$-300 + 11t > 0$$
$$t > \frac{300}{11}$$
$$t > 27{,}272727\ldots$$

$$200 - 7t > 0$$
$$t < \frac{200}{7}$$
$$t < 28{,}5714\ldots$$

Como $t \in \mathbb{Z}$ temos que $t = 28$

Para $t = 28$:

$$x = -300 + 11 \cdot 28 = 8$$
$$y = 200 - 7 \cdot 28 = 4$$

Assim, os pares de inteiros $x = 8$, $y = 4$ são as soluções inteiras e positivas da equação dada, e os múltiplos de 7 e 11 que somados resultam em 100 são, respectivamente, 56 e 44.

Solução da Atividade 9: (Domingues; Iezzi, 2003, p. 52) O valor da entrada de um cinema é R\$ 8,00 e da meia entrada R\$ 5,00. Qual é o menor número de pessoas que pode assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de R\$ 500,00? (Em tempo: a capacidade desse cinema é suficiente para esse número de pessoas.)

Agora, vamos formular a equação diofantina que representa a situação: $8x + 5y = 500$, onde x representa o número de pessoas que pagaram o valor inteiro da entrada e y o número de pessoas que pagaram meia-entrada, Sabendo que $x, y \in \mathbb{Z}$.

Vamos verificar se a equação tem solução utilizando o algoritmo de Euclides. tomando $(5, 8)$, obtemos:

	1	1	1	2
8	5	3	2	1
3	2	1	0	

$$8 = 5 \cdot 1 + 3 \Rightarrow 8 - 5 \cdot 1 = 3$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2 \Rightarrow 5 - 3 \cdot 1 = 2$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Portanto o $(5, 8) = 1$ e $1|500$ logo a equação tem solução.

Agora, vamos expressando 1 como uma combinação linear, temos:

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 2 \cdot (8 - 5) - 5 = (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 8$$

isto é

$$2 \cdot 8 + (-3) \cdot 5 = 1$$

Multiplicando esta última equação por 500, $1.000 \cdot 8 + (-1.500) \cdot 5 = 500$ encontramos uma solução particular para a equação diofantina, $x_0 = 1.000$ e $y_0 = -1.500$. As soluções gerais são dadas por:

$$x = 1.000 + 5t$$

$$y = -1.500 - 8t$$

com $t \in \mathbb{Z}$.

A solução do problema deve ser composta por números inteiros e positivos. Faremos $x \geq 0$ e $y \geq 0$:

$$1.000 + 5t \geq 0$$
$$t \geq -\frac{1.000}{5}$$
$$t \geq -200$$
$$-1.500 - 8t \geq 0$$
$$t \leq -\frac{1.500}{8}$$
$$t \leq 187,5$$

Como t é inteiro, os possíveis valores que t pode assumir são $-200 \leq t \leq -188$. Para encontrar o menor número de pessoas, vamos utilizar o maior valor obtido para $t = -188$. Então temos:

$$x = 1.000 + 5 \cdot (-188) = 60$$
$$y = \ -1.500 - 8 \cdot (-188) = 4$$

Portanto, o menor número de pessoas para que a bilheteria totalize R$ 500,00 é 64.

<u>Solução da Atividade 10:</u> (Lima, 2022, p. 48) Em decorrência da pandemia, uma empresa resolveu ajudar seus funcionários com um auxílio alimentação em tíquetes na quantia de $R\$\,550{,}00$. Sabendo que a empresa disponibiliza tíquetes de $R\$\,50{,}00$ e $R\$\,150{,}00$, de quantas formas distintas a empresa pode entregar o auxílio de $R\$\,550{,}00$ aos seus funcionários?

Seja denominada por x a quantidade de tíquetes de $R\$\,50{,}00$ e de y a quantidade de tíquetes de $R\$\,150{,}00$, resultando na equação diofantina linear $50x + 150y = 550$. Ao dividir essa equação por 50, obtemos uma equação equivalente $x + 3y = 11$, onde o $(3, 1) = 1$ e $1|11$, indicando que a equação tem solução.

É fácil ver que uma solução particular da equação é $x_0 = 2$ e $y_0 = 3$, pois $2 + 3 \cdot 3 = 11$. As soluções gerais são dadas pelas fórmulas:

$$x = 2 + 3t$$
$$y = 3 - t$$

Agora, buscam-se os valores de t para os quais x e y sejam maiores ou iguais a zero. Assim:

Para $x \geq 0$

$$2 + 3t \geq 0$$
$$3t \geq -2$$
$$t \geq -0{,}666\ldots$$

Para $y \geq 0$

$$3 - t \geq 0$$
$$t \leq 3$$

Portanto, os possíveis valores para t são 0, 1, 2 e 3. Agora, encontram-se os valores de x e y:

Para $t = 0$, $x = 2$ e $y = 3$; para $t = 1$, $x = 5$ e $y = 2$; para $t = 2$, $x = 8$ e $y = 1$; para $t = 3$, $x = 11$ e $y = 0$.

Portanto, a empresa pode entregar os tíquetes de quatro formas distintas.

<u>Solução da Atividade 11:</u> (Autoral) Maria Júlia, que está no 7º ano e gosta muito de estudar, comprou um número ímpar de livros e alguns cadernos, gastando $R\$\ 84{,}50$. Sabendo-se que os preços unitários dos livros e dos cadernos são, respectivamente, $R\$\ 12{,}50$ e $R\$\ 4{,}70$, determine quantos livros e quantos cadernos ela comprou.

Seja x a quantidade de livros comprados e y a quantidade de cadernos comprados pelo enunciado temos a seguinte equação diofantina linear $12{,}50x + 4{,}70y = 84{,}50$ multiplicando por 10 encontraremos uma equação equivalente $125x + 47y = 845$. Determinando o $(125, 47)$ usando o algoritmo de Euclides:

	2	1	1	1	15
125	47	31	16	15	1
31	16	15	1	0	

$$125 = 47 \cdot 2 + 31 \Rightarrow 125 - 47 \cdot 2 = 31$$

$$47 = 31 \cdot 1 + 16 \Rightarrow 47 - 31 \cdot 1 = 16$$

$$31 = 16 \cdot 1 + 15 \Rightarrow 31 - 16 \cdot 1 = 15$$

$$16 = 15 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 16 - 15 \cdot 1 = 1$$

Logo, encontramos o $(125, 47) = 1$, e a equação tem solução, pois $1|845$.

Agora, vamos expressando 1 como uma combinação linear, temos:

$$1 = 16 - 15 \cdot 1$$

$$= 16 \cdot 2 + 31 \cdot (-1)$$

$$= 47 \cdot 2 + 31 \cdot (-3)$$

$$= 125 \cdot (-3) + 47 \cdot (8)$$

isto é,

$$125 \cdot (-3) + 47 \cdot (8) = 1$$

Multiplicando essa expressão por 845 temos:

$$125 \cdot (-2.535) + 47 \cdot (6.760) = 845$$

As soluções particulares da equação são $x_0 = -2.535$ e $y_0 = 6.760$. E as soluções gerais são dadas por: $x = -2.535 + 47t$ e $y = 6.760 - 125t$ com $t \in \mathbb{Z}$.

Como procuramos a quantidade de livros e cadernos comprados devemos achar t de modo que x e y sejam maiores ou iguais a zero. Logo temos que:

$$-2535 + 47t \geq 0$$
$$47t \geq 2535$$
$$t \geq 53{,}9$$

e

$$6760 - 125t \geq 0$$
$$-125t \geq -6760$$
$$t \leq 54{,}8$$

Então o único valor que t pode assumir é 54. Substituindo t na equação geral de x e y:

$$x = -2535 + 47 \cdot 54 = 3$$
$$y = 6760 - 125 \cdot 54 = 10$$

Logo Maria Júlia comprou 3 livros e 10 cadernos.

Solução da Atividade 12: (Autoral) Considere a reta representada pela equação geral

$2x + 7y = 3$. Determine os pontos da reta com coordenadas inteiras e verifique se existe algum ponto pertencente à reta onde ambas as coordenadas são inteiras e positivas.

Considerando a reta representada pela equação geral $2x + 7y = 3$, determinam-se inicialmente os pontos da reta com coordenadas inteiras. Observa-se que a equação tem solução, pois 2 e 7 são primos, o que implica que o máximo divisor comum entre eles é 1, permitindo assim a existência de soluções para x ey. Além disso, a constante do termo independente 3 é divisível por 1. Uma solução particular para essa equação diofantina linear é encontrada em $(-9) \times 2 + 3 \times 7 = 3$, resultando em $x_0 = -9$ e $y_0 = 3$.

Dessa forma, a solução geral da equação é expressa por $x = -9 + 7t$ e $y = 3 - 2t$, em que t é um número inteiro ($t \in \mathbb{Z}$), representando todas as coordenadas inteiras dos pontos pertencentes à reta.

Agora, para verificar a existência de algum ponto na reta em que ambas as coordenadas são inteiras e positivas ($x > 0$ e $y > 0$), são analisadas as seguintes restrições:

Para $x > 0$:

$$-9 + 7t > 0$$

$$7t > 9$$

$$t > \frac{9}{7}$$

Para $y > 0$:

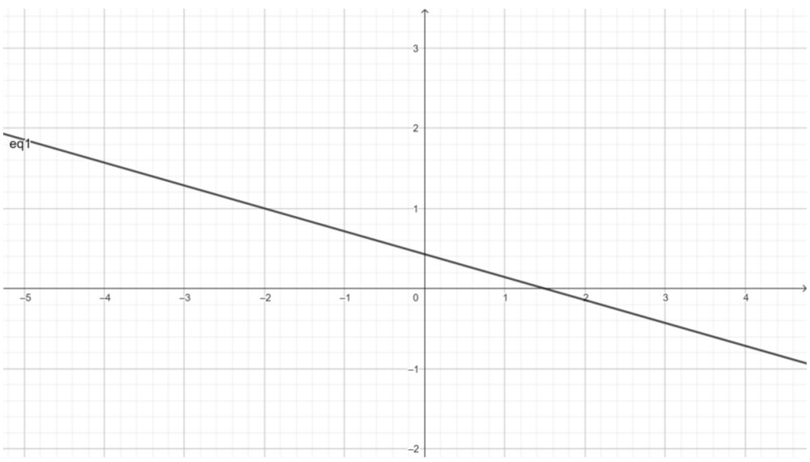
$$3 - 2t > 0$$

$$-2t > -3$$

$$t < \frac{3}{2}$$

Portanto, não existe nenhum número inteiro t que satisfaça $1{,}285714 < t < 1{,}5$. Esta conclusão é confirmada visualmente pelo gráfico da reta construído utilizando o software GeoGebra[2], onde nenhum ponto com coordenadas inteiras e positivas é encontrado.

Figura: gráfico da reta



Fonte: autor

[2] GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica que reúne conceitos de geometria e álgebra.

<u>Solução da Atividade 13:</u> (Banco de Questões OBMEP-2015) Considere dois tambores de capacidade suficientemente grande, um deles vazio e o outro cheio de líquido. Determine se é possível colocar exatamente um litro do líquido do tambor cheio, no vazio, usando dois baldes, um com capacidade de 5 litros e o outro com capacidade de 7 litros.

Para resolver o problema, vamos denotar por x a quantidade de vezes que usamos o balde com capacidade de 5 litros e por y a quantidade de vezes que usamos o balde com capacidade de 7 litros. Assim, temos a seguinte equação:

$$5x + 7y = 1$$

Observamos que $(5,7) = 1$ e $1 \mid 1$, o que confirma que a equação tem solução. Uma possível solução é usar o balde de 5 litros três vezes para transferir o líquido para o tambor vazio, resultando em 15 litros. Em seguida, utilizamos o balde de 7 litros duas vezes para retirar o líquido do tambor inicialmente vazio, restando, assim, exatamente um litro. Ademais, o valor de x é igual a 3 e y é igual a -2.

<u>Solução da Atividade 14:</u> (Silva, 2018, p. 69) Um lava-jato lava carros oferecendo dois tipos de serviços: lavagem simples com o custo de R$ 24,00 e a completa por R$ 36,00. Certo dia, o gerente resolveu fazer uma promoção, dando 20% de desconto na lavagem simples e 10% de desconto na completa. No dia da promoção, o faturamento foi de R$ 810,00. Qual foi o menor número de clientes que foram atendidos?

Sejam x ey a quantidade de lavagens simples e completas, respectivamente. A equação que representa o faturamento do dia é dada por:

$$0{,}8 \cdot 24x + 0{,}9 \cdot 36y = 810$$

$$19{,}2x + 32{,}4y = 810$$

Multiplicando a equação por 10, temos:

$$192x + 324y = 8100$$

Ao dividir a equação por 12, temos:

$$16x + 27y = 675$$

Iremos verificar se a equação diofantina tem solução utilizando o algoritmo de Euclides.

Tomando $(27, 16)$, obtemos:

	1	1	2	5
27	16	11	5	1
11	5	1	0	

$$27 = 1 \cdot 16 + 11 \Rightarrow 27 - 1 \cdot 16 = 11$$

$$16 = 1 \cdot 11 + 5 \Rightarrow 16 - 1 \cdot 11 = 5$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1 \Rightarrow 11 - 2 \cdot 5 = 1$$

Portanto, o $(27, 16) \ = \ 1$e $1|165$, logo a equação tem solução e obtemos

$$16 \cdot (-5) + 27 \cdot (3) = 1$$

Multiplicando a equação por 675, obtemos:

$$16 \cdot (-3.375) + 27 \cdot 2.025 = 675$$

Logo, as soluções particulares são $x_0 = -3.375$ e $y_0 = 2.025$ as soluções gerais são dadas por:

$$x = -3.375 + 27t$$

$$y = 2.025 - 16t$$

Com $t \in \mathbb{Z}$. De acordo com a questão queremos encontrar $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então:

Para $x \geq 0$

$$-3.375 + 27t \geq 0$$
$$27t \geq 3.375$$
$$t \geq \frac{3.375}{27}$$
$$t \geq 125$$

Para $y \geq 0$

$$2.025 - 16t \geq 0$$
$$-16t \geq -2.025$$
$$t \leq \frac{2.025}{16}$$
$$t \leq 126{,}5625$$

Portanto, $125 \leq t \leq 126$, ou seja, $t = 125$ ou $t = 126$. Para $t = 125$

$$x = -3.375 + 27 \cdot 125 \Rightarrow x = 0$$
$$y = 2.025 - 16 \cdot 125 \Rightarrow y = 25$$

Num total de 25 clientes.

Para $t = 126$

$$x = -3.375 + 27 \cdot 126 \Rightarrow x = 27$$
$$y = 2.025 - 16 \cdot 126 \Rightarrow y = 9$$

Num total de 36 clientes.

Assim, o menor número de clientes atendidos foi 25.

<u>Solução da Atividade 15:</u> (Hefez, 2022, p. 83) Subindo uma escada de dois em dois degraus, sobra um degrau. Subindo a mesma escada de três em três degraus, sobram dois degraus. Determine quantos degraus possui a escada, sabendo que o número de degraus é múltiplo de 7 e está compreendido entre 40 e 100.

Para resolver o problema, considere$n$ como o número de degraus dessa escada, e com base nas condições fornecidas pela questão, podemos prosseguir da seguinte maneira:

$$\begin{cases} n = 2x + 1 \\ n = 3y + 2 \end{cases}$$

Unindo essas equações, obtemos $2x + 1 = 3y + 2$, que pode ser rearranjada como $2x - 3y = 1$, representando uma equação diofantina linear.

Como $(3, 2) = 1$ a equação tem solução.

Utilizando o algoritmo de Euclides, uma solução particular para a equação diofantina é encontrada: $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$, o que nos dá $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$. As soluções gerais são dadas por:

$$x = 2 - 3t$$

$$y = 1 - 2t$$

onde $t \in \mathbb{Z}$

Para garantir soluções não negativas, é necessário encontrar $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Para $x \geq 0$

$$2 - 3t \geq 0$$
$$t \leq \frac{2}{3}$$
$$t \leq 1,333 \ldots$$

Para $y \geq 0$

$$1 - 2t \geq 0$$
$$t \leq \frac{1}{2}$$
$$t \leq 0,5$$

portanto, $t \leq 0,5$.

Substituindo $x = 2 - 3t$ em $n = 2x + 1$, obtemos $n = 2 \cdot (2 - 3t) + 1 \Rightarrow n = 5 - 6t$.

Considerando o intervalo fornecido pelo enunciado $40 \leq n \leq 100$, temos:

$$40 \leq 5 - 6t \leq 100$$
$$35 \leq -6t \leq 95$$
$$-\frac{95}{6} \leq t \leq -\frac{35}{6}$$
$$-15,8333 \ldots \leq t \leq -5,8333 \ldots$$

Assim, t pode ser qualquer valor de $\{-15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6\}$. Como n deve ser um múltiplo de 7, o único valor de t que torna$n$ um múltiplo de 7 é $t = -12$, o que nos dá $n = 77$ degraus.

Solução da Atividade 16: (UFC – CE 2004) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, encontre o número de faces triangulares desse poliedro.

a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

Para determinar o número de faces triangulares do poliedro, é possível começar relembrando a fórmula de Euler, que relaciona o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) em poliedros convexos: $V + F = A + 2$.

Dado que o poliedro possui 10 vértices e 20 arestas, esses valores podem ser substituídos na fórmula de Euler: $10 + F = 20 + 2$. Isso resulta em $F = 12$.

Agora, o número de faces triangulares é representado como x e o número de faces quadrangulares como y. Cada face triangular possui 3 arestas, ou seja, $3x$, e cada face quadrangular possui 4 arestas, ou seja, $4y$. O número de arestas de um poliedro é metade da soma das arestas das faces que o compõem. Portanto, a equação resultante é:

$$A = \frac{3x + 4y}{2}$$

Substituindo o valor de $A = 20$, temos:

$$20 = \frac{3x + 4y}{2}$$

$$3x + 4y = 40$$

Aplicando o algoritmo de Euclides, pode-se encontrar que $(4{,}3) = 1$, o que implica que a equação tem solução, já que 1 divide 40. É possível verificar facilmente que

$$3 \cdot (-1) + 4 \cdot (1) = 1.$$

Multiplicando a equação por 40, obtém-se:

$$3 \cdot (-40) + 4 \cdot (40) = 40$$

Portanto, encontrou-se uma solução particular da equação diofantina, com $x_0 = -40$ e $y_0 = 40$. As soluções gerais são dadas por:

$$x = -40 + 4t$$

$$y = 40 - 3t$$

onde $t \in \mathbb{Z}$.

Como o poliedro é formado por faces triangulares e quadrangulares, temos que $x > 0$ e $y > 0$. Portanto, para encontrar os valores de t, tem-se:

Para $x > 0$

$$-40 + 4t > 0$$
$$t > \frac{40}{4}$$
$$t > 10$$

Para $y > 0$

$$40 - 3t > 0$$
$$t < \frac{40}{3}$$
$$t < 13{,}333 \ldots$$

Portanto, $10 < t < 13$. Assim, os únicos valores possíveis para t são 11 ou 12.

Para $t = 11$

$$x = -40 + 4 \cdot 11$$
$$x = 4$$
$$y = 40 - 3 \cdot 11$$
$$y = 7$$

Para $t = 12$

$$x = -40 + 4 \cdot 12$$

$$x = 8$$

$$y = 40 - 3 \cdot 12$$

$$y = 4$$

Portanto, o poliedro em questão possui8 faces triangulares. Assim, a resposta correta é a opção e, "8".

Considerações Finais

Recomenda-se que o guia didático seja aplicado a partir do 9° ano do ensino fundamental anos finais, e em qualquer ano do ensino médio. Uma excelente oportunidade para utilizar esse guia é no 3° ano do ensino médio, proporcionará a revisão dos conteúdos básicos de teoria dos números, que estão frequentemente presentes nos itens do Enem, e ainda mostraria que a resolução das equações diofantinas lineares com duas incógnitas poderá ser útil para resolver essa prova.

Espera-se que esse guia didático auxilie os professores da Educação Básica de forma que contribua para o benefício das aulas e aprendizado dos alunos. Através das questões contidas nesse material, o professor terá a oportunidade de estimular os alunos a refletirem sobre as soluções das equações diofantinas lineares, solicitando que encontrem respostas que satisfaçam tais equações. Isso promove uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos envolvidos e incentiva a exploração criativa das soluções.

Referências

DANTE, Luiz Roberto**. Teláris matemática, 8º ano: ensino fundamental, anos finais.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

FRAZÃO, P. V.; Silva, C. A. F. **EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES COM DUAS VARIÁVEIS APLICADAS À SITUAÇÕES-PROBLEMA NO ENSINO MÉDIO**. Revista PsiPro, 2023

FREITAS, Carlos Wagner Almeida. **Equações Diofantinas.** 2015. 201 p. Dissertação (mestrado) Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Ceará – UFC, Fortaleza, 2015.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática: 8°ano: ensino fundamental: anos finais**. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

LIMA, Dennis Freitas. **Equações Diofantinas e Aplicações.**2022. 106 p. Dissertação - Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB, Redenção, 2022.

MATIAS, Eduardo Ferreira. **Equações Diofantinas lineares com duas incógnitas: Aplicadas a Educação Básica**. 2024. 80 p. Dissertação – (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Regional do Cariri – URCA, Juazeiro do Norte, 2024.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Banco de Questões 2015. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1H_gDFg98q5xJTLS6MEUfuzq6-nTC3odU/view.Acesso em: 17 de março de 2024.

OLIVEIRA, Carlos N. C. de**. Geração alpha matemática: 8° ano: ensino fundamental: anos finais.** 4. ed. São Paulo: SM, 2022.

POLYA, G., **A Arte de Resolver Problemas**. Editora interciência, Rio de Janeiro, RJ, 2006.

SILVA, Rivanildo Garcia da. **Congruências e Equações diofantinas [manuscrito]: algumas aplicações.**2018. 77 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, Campina Grande, 2018.