UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

OS 15 LEMAS DE ARQUIMEDES: UM ESTUDO EXPLORATÓRIO COM APLICAÇÕES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

FRANCISCO DAS CHAGAS ALVES DE OLIVEIRA

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2024

OS 15 LEMAS DE ARQUIMEDES: UM ESTUDO EXPLORATÓRIO COM APLICAÇÕES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

FRANCISCO DAS CHAGAS ALVES DE OLIVEIRA

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCT/URCA, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Francisco Valdemiro Braga

Coorientador: Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2024

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Oliveira, Francisco Das Chagas Alves de

O481 Os 15 Lemas de Arquimedes: Um estudo exploratório com aplicações para a educação básica / Francisco Das Chagas Alves de Oliveira. Juazeiro do Norte-CE, 2024.

113p. il.

Trabalho de Conclusão. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Me. Francisco Valdemiro Braga

Coorientador(a): Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar

1.Geometria, 2.Ensino, 3.Matemática Grega, 4.Demonstrações; I.Título.

CDD: 510

Francisco das Chagas Alves de Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/CCT/URCA, como requisito parcial para a obtenção do tíitulo de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 02/07/2024

BANCA EXAMINADORA

Francisco Valdemiro Braga

Prof. Me. Francisco Valdemiro Braga - URCA (Orientador)

Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar - URCA (Coorientador)

Mario de Assis Oliveira

Prof. Me. Mário de Assis Oliveira - URCA

Francisco Pereira Chaves

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves - UFCA

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pois, sem ele eu não teria chegado até aqui.

À minha família, meu pai Raimundo Ramos de Oliveira, minha mãe Maria de Fátima Alves de Oliveira, pelo apoio, pelos ensinamentos e pelo amor dedicados a mim por toda vida, meus irmãos Vicente, Daniel e minha irmã Damiana pela torcida e pela confiança que sempre mostraram ter em minha pessoa, minha esposa Marta Cardoso de Oliveira e minhas filhas Maria Sophia e Ana Sarah, pela compreensão e pelo forte incentivo que me ajudaram a não desistir.

Aos meus professores, em especial aos meus orientadores prof. Francisco Valdemiro Braga e prof. Alexsandro Coelho Alencar, pela competência e pela paciência que tiveram ao me conduzirem na construção deste trabalho.

Aos colegas do Curso que são excelentes profissionais e que também me ajudaram bastante nessa caminhada.

Aos amigos e aos colegas de trabalho que torceram por mim e de alguma maneira também colaboraram para que fosse possível a realização dessa jornada.

‘Aquele que tentou e não conseguiu é superior àquele que nada tentou.’

(Arquimedes de Siracusa)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar e explorar as 15 proposições do Livro dos Lemas, do filósofo e matemático grego Arquimedes, incluindo suas demonstrações. Trata-se de uma pesquisa qualitativa e exploratória que visa a uma melhor compreensão do tema através da leitura de obras publicadas anteriormente por autores que também pesquisaram e escreveram sobre esse tema. Daí segue também que em relação aos métodos trata-se de uma pesquisa bibliográfica. Além do caráter exploratório, ela destina-se a produzir material pedagógico para professores da educação básica interessados em estudar o tema ou compartilhar com seus alunos. As 15 proposições se constituem em um conjunto de lemas que em suas demonstrações estão envolvidos vários tópicos de Geometria Plana que fazem parte do currículo do ensino básico. Arquimedes de Siracusa é considerado um grande gênio da antiguidade, que deixou uma imensa e importante obra, com valiosas contribuições para a Física, Engenharia e, principalmente, para a Matemática. Nesse sentido, trazemos também nesta pesquisa um estudo da história deste matemático com um breve relato sobre sua vida e obra, inserindo assim o tema estudado em seu contexto histórico. Para concluir, propomos uma atividade de construção de algumas das figuras geométricas dos 15 lemas, que podem ser aplicadas por professores de Matemática do ensino básico em suas aulas.

Palavras-chave: Geometria; Ensino; Matemática Grega; Demonstrações.

Abstract

This work's main objective is to present and explore the 15 propositions of the Book of Lemmas, by the Greek philosopher Archimedes, including his predictions. This is qualitative and exploratory research that aims to better understand the topic by reading previously published works by authors who also researched and wrote about this topic. It also follows that in relation to methods this is a bibliographical research. In addition to the exploratory nature, it is intended to produce pedagogical material for specific basic education teachers to study the topic or share with their students. The 15 propositions are presented in a set of lemmas that in their projections are involved in various Plane Geometry topics that are part of the basic education curriculum. Archimedes of Syracuse is considered a great genius of antiquity, who left an immense and important work, with valuable contributions to Physics, Engineering and, mainly, Mathematics. In this sense, we also bring research and a study of the history of this mathematics with a brief account of his life and work, thus inserting the topic studied in its historical context. To conclude, we propose an activity to construct some of the geometric figures of the 15 lemmas, which can be applied by primary school Mathematics teachers in their classes.

Keywords: Geometry; Teaching; Greek Mathematics; Demonstrations.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para todo profissional do ensino de Matemática ou mesmo para todo estudante que admira essa disciplina, a História da Matemática desvela o desenvolvimento de muitas descobertas que fazem parte da construção desse conhecimento até os dias de hoje. O teórico D'Ambrosio afirma que:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'Ambrosio,1999, p. 97)

É interessante a busca pelo entendimento de como os povos antigos conseguiam realizar tantos feitos e descobrir tantas coisas importantes em épocas onde não existiam os instrumentos e os recursos que existem atualmente. Através da História da Matemática podemos buscar entendimento de como foi o início e de como foram evoluindo os conceitos e teorias que formam a base do conhecimento matemático. Ao nos aprofundarmos nos estudos sobre os grandes matemáticos da antiguidade e de outros períodos históricos que contribuíram para o desenvolvimento dessa ciência, buscamos a compreensão não apenas dos trabalhos produzidos por eles, mas também da influência que esses matemáticos exerceram no decorrer da história ao longo dos séculos até os dias atuais.

A Matemática é uma disciplina com uma história fascinante, em que os conceitos são apresentados com rigor e profundidade, com justificativas e provas dos resultados encontrados. Entre as grandes contribuições deixadas pelos matemáticos do passado estão as 15 proposições de geometria plana que tratam de resultados sobre círculos e suas tangentes e também da quadratura de figuras idênticas às lúnulas de Hipócrates. Essas proposições foram publicadas por Arquimedes em seu livro dos lemas e são resultados que retratam a riqueza e elegância do pensamento geométrico antigo, tendo se tornado base para muitos resultados da geometria nos séculos subsequentes e também um legado para as novas gerações, dada a sua beleza e rigor matemático.

Observando esse contexto histórico e ciente da relevância de tais conhecimentos, propomos aqui um trabalho de resgate dessa importante página da História da Matemática. Nesse sentido, esta pesquisa tem como objetivo apresentar e explorar as 15 proposições com suas demonstrações, fazendo uma fundamentação histórica através de revisão bibliográfica sobre Arquimedes de Siracusa, o matemático grego que as desenvolveu. Também tencionamos elaborar materiais pedagógicos pertinentes que possam ser utilizados pelos professores do ensino médio que buscam recursos pedagógicos para dar mais significado às suas aulas, tornando-as assim mais atrativas e dinâmicas. O material que aqui nos referimos configura-se como requisito de produto educacional, visto ser um material pedagógico voltado para professores da educação básica, oriundo de uma pesquisa de mestrado profissional, a saber, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), polo Urca.

Em relação à metodologia utilizada, consideramos que essa é uma pesquisa do tipo qualitativa e exploratória, por se tratar de uma investigação bibliográfica visando a uma melhor compreensão do tema pesquisado através da leitura de obras publicadas por autores que anteriormente se dedicaram ao estudo do assunto em questão. De acordo com Gonçalves,

> A pesquisa exploratória é aquela que se caracteriza pelo desenvolvimento e esclarecimento de ideias, com objetivo de oferecer uma visão panorâmica, uma primeira aproximação a um determinado fenômeno que é pouco explorado. Esse tipo de pesquisa também é denominado "pesquisa de base", pois oferece dados elementares que dão suporte para a realização de estudos mais aprofundados sobre o tema (Gonçalves, 2001, p. 65)

Nesse sentido, entendemos ser a pesquisa exploratória o tipo mais apropriado para o desenvolvimento desse trabalho, pois tencionamos fazer uma investigação que visa a explorar o tema para mostrar uma abordagem diferente sobre ele, colocando mais informações e buscando, quando possível, introduzir uma visão do assunto de acordo com a nossa perspectiva, baseando-se sempre em dados que são comprovados cientificamente ou demonstrados matematicamente.

As quinze proposições do livro dos lemas de Arquimedes não aparecem diretamente no currículo do ensino básico, porém se constituem em um conjunto de resultados que envolvem muitos conceitos e teoremas da Geometria Plana, como por exemplo, congruência e semelhança de triângulos, paralelismo e o teorema de Tales, as relações métricas no triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras, o cálculo de áreas de figuras planas etc., que compõem o currículo desta etapa de ensino.

Assim, este trabalho justifica-se pela necessidade de enriquecimento das aulas de Matemática dos professores do ensino básico, mostrando problemas interessantes onde os conteúdos ensinados possam ser aplicados, despertando, assim, a curiosidade dos estudantes, pensamento que vai ao encontro do que diz os PCNs. [2].

> Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (Brasil, 1998, p. 44).

Assim, considerando que as quinze proposições do livro dos lemas de Arquimedes são um conjunto de teoremas belíssimos da Geometria Plana, com formas geométricas intrigantes e cheias de propriedades interessantes e curiosas, resolvemos desenvolver esta pesquisa na intenção de produzir material pedagógico que possa servir como suporte para professores de Matemática do ensino médio que tenham interesse em enriquecer as suas aulas.

Desta forma, o texto deste trabalho está organizado em seis capítulos como descrito a seguir:

Neste Capítulo 1 fazemos a introdução do trabalho.

No Capítulo 2, apresentaremos a contextualização histórica do assunto com um breve relato sobre a vida e obra do matemático Arquimedes e também inserindo o tema pesquisado em seu contexto histórico.

No Capítulo 3, vamos apresentar alguns resultados preliminares para as demonstrações das 15 proposições do livro dos lemas de Arquimedes.

No Capítulo 4, traremos os enunciados e as demonstrações das quinze proposições do livro dos lemas de Arquimedes.

No Capítulo 5, elaboramos um guia didático com sugestões de atividades interessantes de construções geométricas que possam servir de suporte ao professor nas aulas de Geometria do ensino médio. Esse guia didático traz sugestões de atividades com suas soluções que podem ser aplicadas pelo professor em sala de aula.

No Capítulo 6, escrevemos as considerações finais do nosso trabalho, onde destacamos a importância desta pesquisa com seus resultados qualitativos e implicações para o ensino de Matemática na educação básica.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Na Grécia Antiga, no período helenístico, houve um notável desenvolvimento no pensamento humano, que já vinha se modificando nos períodos anteriores em razão da sistematização do conhecimento, onde a crença em explicações mitológicas para os fenômenos naturais foi dando lugar a um tipo de explicação cuja análise baseava-se na construção de uma racionalidade meramente humana, dando origem à Filosofia. Nesse sentido, a Matemática foi deixando de ter uma conotação apenas prática, para ser vista de um modo mais contemplativo, o que fez com que ela tivesse avanços significativos em sua formulação durante o período. Foram feitas grandes descobertas e surgiram personalidades que se destacaram com seus trabalhos e contribuições que se tornaram fundamentais a uma posterior evolução não só da Matemática, mas também da Física, Engenharia, Astronomia etc. Dentre os grandes gênios, filósofos e matemáticos que se destacaram nesse período, temos Arquimedes de Siracusa.

Neste capítulo faremos um breve relato sobre a vida e obra deste grande filósofo. Também vamos estudar o contexto histórico das 15 proposições sobre geometria plana publicadas no livro dos Lemas de Arquimedes.

2.1 Breve relato sobre a vida e obra de Arquimedes

Nascido por volta de 287 a. C., em Siracusa, uma importante cidade grega da Sicília, atual Itália, Arquimedes é considerado um grande gênio das ciências da antiguidade clássica, a ele sendo atribuídas grandes descobertas que possibilitaram posteriormente uma revolução científica. Tais descobertas contribuíram de forma notável para as áreas de Matemática, Física e Engenharia. De acordo com Soares,

> Sabemos que Arquimedes nasceu em Siracusa, na época uma importante cidade estado grega na Sicília. O historiador bizantino João Tzetzes (c.1110 – 1180 d.C.) dá-nos a conhecer alguns dados biográficos de Arquimedes, nomeadamente indica que o matemático teria vivido cerca de setenta e cinco anos e teria sido morto em 212 a. C.,

> durante a Segunda Guerra Púnica, no cerco de Siracusa. É deste modo que se conclui ser 287 a. C. o ano provável de nascimento. (Soares, 2014, p. 4)

Não existem muitos detalhes e informações da vida pessoal ou da família e amigos de Arquimedes. Sabe-se que seu pai era um astrônomo não muito conhecido da época, chamado Fídias. Segundo Soares (2014, p. 4), "Arquimedes, numa das suas obras, ao se referir a razão entre os diâmetros do Sol e da Lua, afirma ter sido seu pai, o astrônomo Fídias, a calculá-la".

Através de relatos de historiadores gregos antigos ainda, é conhecido que Arquimedes era amigo ou parente do Rei de Siracusa Hierão II e de seu filho Gelon I. Ainda segundo Soares,

> Não são conhecidas outras relações familiares próximas, sendo excepção o relato de Plutarco (c. 46 - 120 d.C.), historiador de origem grega, na sua obra Vida de Marcelo. Plutarco escreveu sobre alguns acontecimentos políticos e culturais de Siracusa, informando-nos ser Arquimedes parente e amigo do Rei Herão II e de seu filho Gelon. (Soares 2014, p. 4).

Da relação de Arquimedes com o Rei Hierão II, surgiu a história mais famosa envolvendo este grande gênio, a história do problema da coroa de ouro, que de acordo com Martins (2000, p. 117) "o autor mais antigo dessa história foi Marcus Vitruvius Pollio, um arquiteto romano do século I a.C., em sua obra De Architecturai". Então, conforme a tradução de Martins diz a lenda que, o Rei Hierão II encomendou a criação de uma coroa de ouro, porém desconfiava que o ourives tinha adulterado o ouro, trocando parte dele por prata. Com a suspeita o atormentando o rei pediu para que Arquimedes investigasse e descobrisse se a coroa era feita totalmente de ouro puro ou se tinha alguma parte composta por outro elemento, a prata, por exemplo, sem causar danos à peça. Após raciocinar por algum tempo sobre o problema, Arquimedes encontrou a solução que surgiu quando ele estava tomando banho. Ele notou que ao entrar na banheira, o nível da água subia, daí veio a ideia, e Arquimedes concluiu que poderia medir o volume da coroa imergindo-a em água depois compará-lo com o volume do ouro puro com peso igual.

Conta a história que Arquimedes ficou tão feliz com a descoberta que saiu gritando nu pelas ruas de Siracusa "Eureka!"("descobri"ou "encontrei"em grego): Martins relata que

> Quanto a Arquimedes, ele certamente fez descobertas admiráveis em muitos domínios, mas aquela que vou expor testemunha, entre muitas outras, um engenho extremo. Hieron de Siracusa, tendo chegado ao poder real, decidiu colocar em um templo, por causa de seus sucessos, uma coroa de ouro que havia prometido aos deuses imortais.
>
> Ofereceu assim um prêmio pela execução do trabalho, e forneceu ao vencedor a quantidade de ouro necessária devidamente pesada. Este, depois do tempo previsto submeteu seu trabalho, finalmente manufaturado, à aprovação do rei, e com uma balança fez uma prova do peso da coroa. Quando Hieron soube através de uma denúncia que certa quantidade de ouro havia sido retirada e substituída pelo equivalente em prata, incorporada ao objeto votivo, furioso por haver sido enganado, mas não encontrando nenhum modo de evidenciar a fraude, pediu a Arquimedes que refletisse sobre isso. E o acaso fez com que ele fosse se banhar com sua preocupação em mente, e ao descer a banheira, notou que à medida que lá entrava, escorria para fora uma quantidade de água igual ao volume do seu corpo. Isso lhe revelou o modo de resolver o problema: sem demora, ele saltou cheio de alegria para fora da banheira e completamente nu, tomou o caminho de sua casa, manifestando em voz alta para todos que havia encontrado o que procurava. Pois em sua corrida ele não cessava de gritar, em grego: Eureca ["Encontrei, Encontrei!"]. (Martins, 2000, p. 117).

Essa história não é comprovada como verdadeira, é considerada por muitos estudiosos como uma lenda não como um fato histórico, no entanto, ela tenta construir a ideia de que Arquimedes foi um grande gênio e de como ele foi engenhoso em suas ideias e inventos. Também mostra o seu domínio sobre os princípios da hidrostática e da densidade.

Sobre a vida acadêmica de Arquimedes, sabe-se que provavelmente estudou em Alexandria, onde aprendeu as bases da Geometria da época que era fundamentada na obra Os Elementos, de Euclides. Soares afirma que:

> É dado como certo que estudou em Alexandria, considerado um importante centro de Cultura helenística no Egito. Contactou com discípulos de Euclides, foi aí contemporâneo do matemático e bibliotecário Eratóstenes de Cirene (276 a.C. – 194 a.C.), do matemático e astrónomo Conon de Samos (c. 280. a.C. - c. 220 a.C.)e do matemático Dositeu (c. século III a.C.). Siracusa para se dedicar inteiramente à matemática e onde terá escrito a maior parte das suas obras. No entanto, terá mantido ligações pessoais com Conon, por quem tinha elevada consideração e aproveitava para lhe enviar os trabalhos antes de os publicar. Correspondia-se também com Eratóstenes, a quem enviou um dos seus tratados, e com Dositeu, um discípulo de Conon, depois da morte deste. (Soares, 2014, p. 4) .

Com base nesta afirmação, podemos dizer que Arquimedes teve uma relação estreita com os mais importantes cientistas de sua época e estudou no principal centro acadêmico, cultural e científico que existia nesse tempo, a biblioteca de Alexandria.

Após esse período em que esteve estudando em Alexandria ele retornou para sua cidade natal, onde continuou os seus trabalhos dedicando-se principalmente à Matemática. Sua relação com os amigos cientistas em Alexandria foi mantida através de cartas onde ele enviava seus trabalhos para que os colegas pudessem avaliá-los antes que ele os publicasse. De acordo com Magnaghi e Assis (2019, p. 22) "muitas das cartas de Arquimedes foram endereçadas a cientistas que trabalharam em Alexandria: Cónon de Samos, Dositeu de Pelúsium e Eratóstenes". Ainda de acordo com Magnaghi e Assis,

> Talvez este seja um dos principais motivos pelos quais muitas das obras de Arquimedes chegaram até nós, pois era na biblioteca de Alexandria, anexa ao famoso templo dedicado às Musas, *Museu*, que os tratados considerados importantes eram muitas vezes copiados e as cópias eram conservadas até em um lugar diferente. Arquimedes devia conhecer bem a importância e o funcionamento da biblioteca de Alexandria. Quando escreve a Eratóstenes em *O Método*, ele comenta: "... entendo que alguns dos meus contemporâneos ou sucessores encontrarão, por meio do método demonstrado, outros teoremas que ainda não me ocorreram". Ou seja, ele acreditava que seus trabalhos fossem destinados à posteridade. (Magnaghi e Assis, 2019, p. 22 e 23).

De acordo com relatos de historiadores gregos antigos como Plutarco (45 d. C

– 125 d. C), a morte de Arquimedes ocorreu em 212 a. C, durante o cerco de Siracusa na Segunda Guerra Púnica, por forças romanas. De acordo com a história, mesmo o cerco à cidade acontecendo, Arquimedes não parou os trabalhos e estava profundamente envolvido em seus estudos. No entanto, sobre como ocorreu a morte de Arquimedes são apresentadas várias versões. Mohnsam, afirma que,

> Atualmente, acreditamos que Arquimedes morreu em 212 a.C. na guerra Punica, durante o saque a Siracusa. Sobre a morte de Arquimedes existem diversas versões. De acordo com o relato dado por Plutarco, Arquimedes estava contemplando um diagrama matemático quando a cidade foi capturada. Um soldado romano o encontrou e ordenou que fosse se apresentar perante ao General Marcelo, mas ele se recusou, dizendo que ele tinha de terminar de trabalhar no problema ("não perturbe meus círculos"ou "Ei camarada, afaste-se de meu diagrama"). O soldado ficou furioso com isso e atravessou o corpo dele com uma espada. (Mohnsam, 2014, p. 20).

Com base nesse relato de Mohnsam, entendemos que em certo momento Arquimedes foi abordado por um soldado romano que deu ordens para ele se render. Não dando atenção às ordens do soldado, Arquimedes teria dito a famosa frase "Não perturbe meus círculos", enquanto desenhava na areia trabalhando em um problema geométrico. Assim, considerando um desacato por parte de Arquimedes, o soldado acabou dando fim à vida deste grande gênio, mesmo com a ordem dada pelo general romano Marco Cláudio Marcelo para poupá-lo. Segundo Magnaghi e Assis

> A conquista de Siracusa pelos romanos somente foi possível em 212 a.C., após um cerco que durou quase três anos. O cônsul Marcelo, que durante todo esse tempo de luta havia adquirido um grande respeito pelo “velho homem”, ordenou que a vida de Arquimedes fosse poupada. Apesar disso, segundo a tradição, Arquimedes acabou sendo morto por um soldado enquanto estava concentrado nas suas figuras. (Magnaghi e Assis, 2019, p. 24).

Com a morte de Arquimedes, terminou a vida de um dos maiores pensadores e matemáticos da antiguidade. Vale ressaltar que as circunstâncias exatas de como tudo aconteceu podem ser de difícil comprovação devido à natureza histórica dos fatos e às diferentes versões dos eventos ao longo do tempo. No entanto, a história de Arquimedes configura um importante capítulo da história da Filosofia, das ciências e da Matemática, deixando um legado que serviu de estudo para a evolução do conhecimento matemático nos séculos posteriores à sua vida e obra.

2.2 Contexto histórico onde estão inseridas as quinze proposições

As quinze proposições as quais nos referimos, objeto de estudo deste trabalho, estão publicadas em uma das muitas obras atribuídas a Arquimedes e consistem em teoremas belíssimos de Geometria Plana que retratam a riqueza das ideias dos matemáticos, físicos e pensadores gregos daquele período.

Essa obra onde essas quinze proposições estão publicadas, chamada *O livro dos lemas*, foi atribuída a Arquimedes e chegou ao nosso conhecimento como um manuscrito árabe que foi considerado uma tradução dos textos escritos por Arquimedes em sua obra original. De acordo com Aaboe (2002, p. 109) "este livro foi preservado em uma versão latina da versão árabe de Thabit ibn Qurrah" denominada Líber Assumptorum. Segundo Heath (1981, p. 23), como o nome de Arquimedes é citado várias vezes em seu texto, a obra em latim não pode ser verdadeiramente a de Arquimedes. Acredita-se que pode ser uma versão escrita por um outro autor, que se baseia numa obra de Arquimedes, que se perdeu por algum motivo ao longo do tempo. Mohnsam, afirma que

> O Livro de Lemas ou Liber Assumptorum é um tratado sobre a natureza dos círculos, onde tem quinze proposições. A cópia mais antiga conhecida do texto está escrita em árabe. Segundo Thomas Little Heath, em trabalhos de Arquimedes, argumenta que este livro não pode ter sido escrito por Arquimedes (obra apócrifa) na sua forma atual, uma vez que ele cita o próprio Arquimedes, o que sugere que foi modificado ou escrito por um outro autor. Talvez o "Lemas"seja baseado em um uma obra mais antiga, agora perdida, escrita por Arquimedes. (Mohnsam, 2014, p.27)

No entanto, não há dúvidas que essas proposições publicadas no livro dos lemas fazem parte da obra de Arquimedes, onde ele mostra 15 teoremas que envolvem principalmente os círculos e suas tangentes. Nas demonstrações desses teoremas podemos notar o uso de resultados da Geometria Plana muito importantes que foram desenvolvidos por outros grandes matemáticos gregos anteriores a Arquimedes. Também podemos contemplar nestas proposições figuras geométricas intrigantes, como o "arbelos" que despertou a curiosidade desse grande matemático que foi Arquimedes de Siracusa. Tais figuras estão repletas de propriedades curiosas e interessantes.

3 ALGUNS RESULTADOS PRELIMINARES IMPORTANTES

Neste capítulo traremos os principais resultados preliminares para as demonstrações das 15 proposições do livro dos lemas de Arquimedes.

Os resultados a seguir estão enunciados e demonstrados conforme a obra [3].

3.1 Congruência de triângulos

3.1.1 POSTULADO DO TRANSPORTE DE SEGMENTOS

Dados um segmento AB e uma semirreta de origem A', existe sobre esta semirreta um único ponto B' tal que $A'B'$ seja congruente a AB.

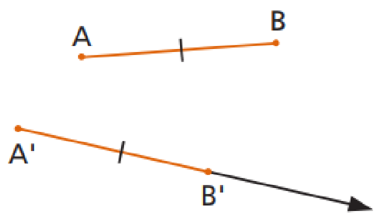


Figura 3.1: Postulado do transporte de segmentos
Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

3.1.2 POSTULADO DO TRANSPORTE DE ÂNGULOS

Dados um ângulo AOB e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$, existe em cada um dos semiplanos que $\overrightarrow{O'A'}$ permite determinar, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'O'B'$ congruente ao ângulo AOB.

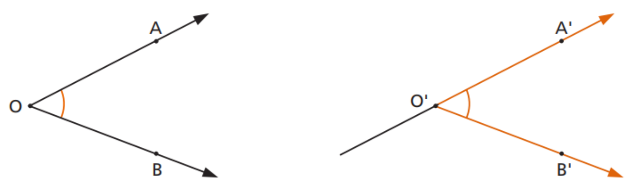


Figura 3.2: Postulado do transporte de ângulos
Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

3.1.3 CONGRUÊNCIA DE TRIÂGULOS

Definição: Um triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro quando é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que: seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

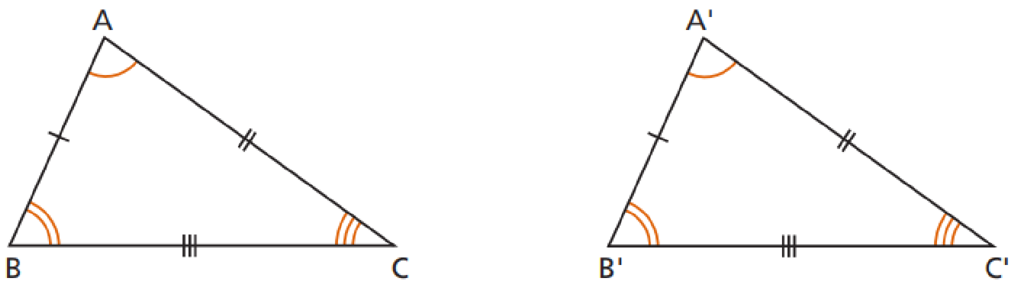


Figura 3.3: Definição de congruência de triâgulos
Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \iff \begin{cases} AB \equiv A'B' & \angle A \equiv \angle A' \\ AC \equiv A'C' & \angle B \equiv \angle B' \\ BC \equiv B'C' & \angle C \equiv \angle C' \end{cases}$$

A definição de congruência de triângulos dá todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três entre lados e três entre ângulos) são totais. Existem "condições mínimas" para que dois triângulos sejam congruentes. São os chamados casos ou critérios de congruência.

1º CASO: LADO, ÂNGULO, LADO (L. A. L.)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

Admitiremos este resultado como um postulado. Ele indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes.

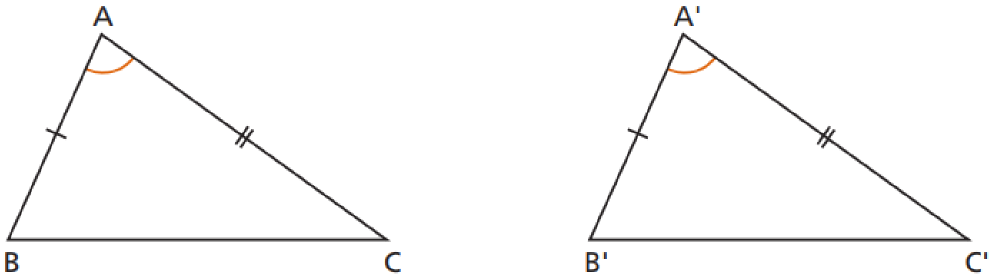


Figura 3.4: Casos de congruência de triângulos - L. A. L
Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Esquema do 1º caso:

$$\begin{cases} AB \equiv A'B' \\ \angle \mathrm{A} \equiv \angle \mathrm{A}' \\ AC \equiv A'C' \end{cases} \quad \overset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \quad \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

2º CASO: ÂNGULO, LADO, ÂNGULO (A. L. A.)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

Os ângulos adjacentes ao lado BC são $\angle B$ e $\angle C$, e os adjacentes ao lado $B'C'$ são $\angle B'$ e $\angle C'$.

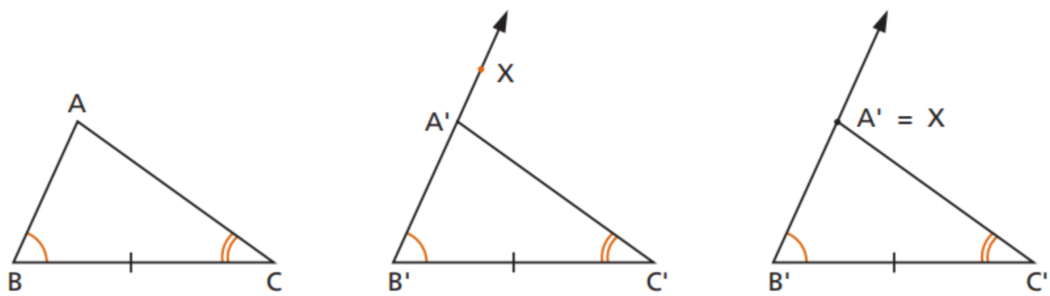


Figura 3.5: Casos de congruência de triângulos - A. L. A.
Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos tais que:

$$\angle B \equiv \angle B', \tag{3.1.1}$$

$$BC \equiv B'C', \tag{3.1.2}$$

$$\angle C \equiv \angle C'. \tag{3.1.3}$$

Então,

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

Demonstração: Vamos provar que $\mathrm{AB} \equiv \mathrm{A'B'}$ pois com isso recairemos no 1º caso. Pelo postulado do transporte de segmentos, obtemos na semirreta $\overrightarrow{B'A'}$ um ponto X, tal que,

$$\mathrm{XB'} \equiv \mathrm{AB}. \tag{3.1.4}$$

Assim,

$$\begin{cases} BC \equiv B'C' \\ \angle \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{B'} \\ \mathrm{BA} \equiv \mathrm{B'X'} \end{cases}$$

Donde obtemos, pelo caso LAL, que:

$$\angle \mathrm{BCA} \equiv \angle \mathrm{B'C'X'}. \tag{3.1.5}$$

Da hipótese 3.1.3, vem,

$$\angle \mathrm{BCA} \equiv \angle \mathrm{B'}C'A'.$$

De 3.1.5, segue que,

$$\angle \mathrm{BCA} \equiv \angle \mathrm{B'}C'X$$

e do postulado do transporte de ângulos, aplicado ao ângulo $\angle$B e ao segmento B′C′, decorre que A′B′ e C′X interceptam-se num único ponto,

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}'.$$

Daí, e de 3.1.4, decorre que:

$$\mathrm{A}'\mathrm{B}' \equiv \mathrm{AB}.$$

Então:

$$\begin{cases} AB \equiv A'B' \\ \angle \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{B}' \\ BC \equiv B'C' \end{cases} \overset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

Esquema do 2º caso:

$$\begin{cases} \angle \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{B}' \\ \mathrm{BC} \equiv \mathrm{B'C'} \\ \angle \mathrm{C} \equiv \angle \mathrm{C}' \end{cases} \overset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \quad \triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'B'C'}.$$

Daí,

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Longrightarrow \begin{cases} AB \equiv A'B' \\ \angle \mathrm{A} \equiv \angle \mathrm{A}' \\ AC \equiv A'C' \end{cases}$$

3º CASO: LADO, LADO, LADO (L. L. L.)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

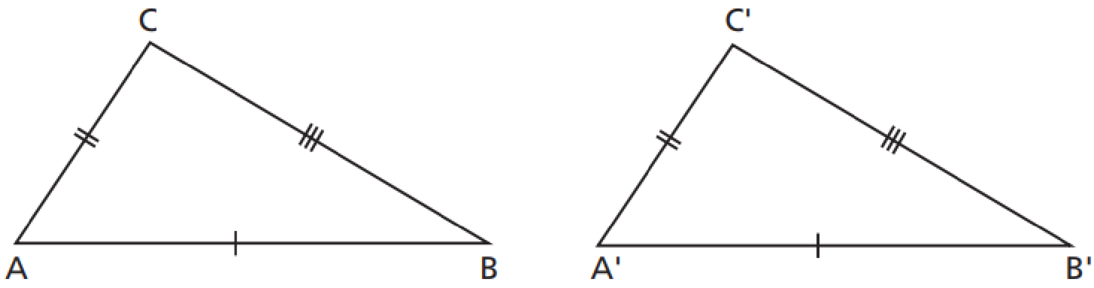


Figura 3.6: Casos de congruência de triângulos - L. L. L.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos tais que:

$$AB \equiv A'B' \tag{3.1.6}$$

$$AC \equiv A'C' \tag{3.1.7}$$

$$BC \equiv B'C' \tag{3.1.8}$$

Então:

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

Demonstração: Pelo postulado do transporte de ângulos e do transporte de segmentos, obtemos um ponto X, tal que:

$$\angle \mathrm{XA'B'} \equiv \angle \mathrm{CAB} \tag{3.1.9}$$

$$\mathrm{A'X} \equiv \mathrm{AC}, \tag{3.1.10}$$

estando X no semiplano oposto ao de C′ em relação à reta A′B′.

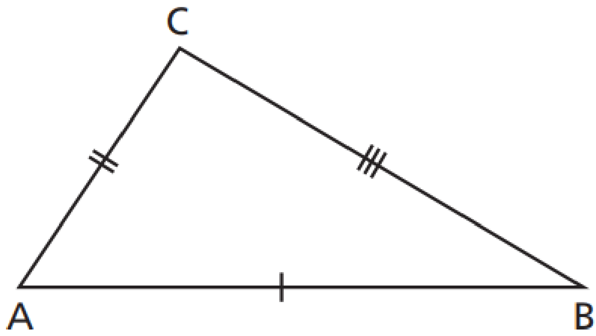


Figura 3.7: Casos de congruência de triângulos - L. L. L. DEM I

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

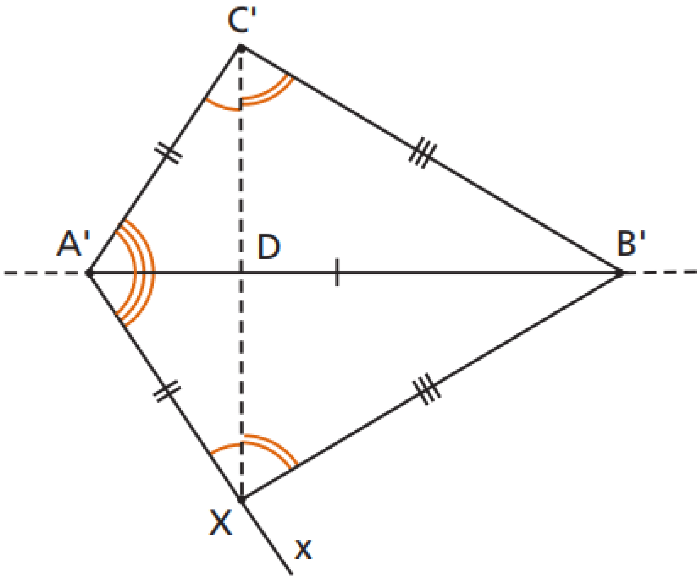


Figura 3.8: Casos de congruência de triângulos - L. L. L. DEM II

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

De 3.1.10 e 3.1.7, vem:

$$\mathrm{A'X} \equiv \mathrm{A'C'} \tag{3.1.11}$$

Seja D o ponto de interseção de C′X com a reta A′B′. Então

- 3.1.6, 3.1.9, 3.1.10 $\overset{LAL}{\Rightarrow}$ $\Delta\mathrm{ABC} \equiv \Delta\mathrm{A'B'X}$, como

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'X, \tag{3.1.12}$$

segue que, 3.1.12 $\Rightarrow B'X \equiv BC$;

- 3.1.8 $\Rightarrow B'X \equiv B'C'$,

$$B'X \equiv B'C' \tag{3.1.13}$$

- 3.1.11 $\Rightarrow \Delta A'C'X$ é isósceles de base CX $\Rightarrow \angle A'C'X \equiv \angle A'XC'$,

$$\angle A'C'X \equiv \angle A'XC' \tag{3.1.14}$$

- 3.1.13 $\Rightarrow \Delta B'C'X$ é isósceles de base $C'X \Rightarrow \angle B'C'X \equiv \angle B'XC'$,

$$\angle B'C'X \equiv \angle B'XC' \tag{3.1.15}$$

Por soma ou diferença de 3.1.14 e 3.1.15 (conforme D seja interno ou não ao segmento $A'B'$), obtemos:

$$\angle A'C'B' \equiv \angle A'XB', \tag{3.1.16}$$

Além disso, temos:

$$3.1.11,\ 3.1.16,\ 3.1.13 \quad \Rightarrow \quad \Delta A'B'C' \equiv \Delta A'B'X$$

Assim, por 3.1.12, segue que:

$$\Delta A'B'C' \equiv \Delta A'B'X \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

Esquema do 3º caso:

$$\begin{cases} \angle \mathrm{A} & \equiv \angle \mathrm{A'} \\ \angle \mathrm{B} & \equiv \angle \mathrm{B'} \\ \angle \mathrm{C} & \equiv \angle \mathrm{C'} \end{cases} \overset{\mathrm{LLL}}{\Longrightarrow} \quad \triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'B'C'}$$

Assim,

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'B'C'} \Longrightarrow \begin{cases} \angle \mathrm{A} & \equiv \angle \mathrm{A'} \\ \angle \mathrm{B} & \equiv \angle \mathrm{B'} \\ \angle \mathrm{C} & \equiv \angle \mathrm{C'} \end{cases}$$

3.1.4 TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

Dado um triângulo ABC e sendo $\overrightarrow{CX}$ a semireta oposta a $\overrightarrow{CB}$, o ângulo $e = \angle ACX$ é o ângulo externo do triângulo ABC adjacente ao ângulo $\angle ACB$ e não adjacente aos ângulos $\angle BAC$ e $\angle ABC$.

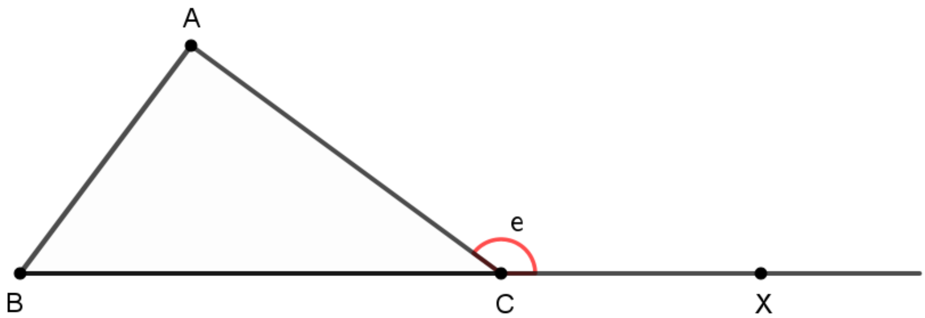


Figura 3.9: Ângulo externo

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

O ângulo e é o suplementar adjacente do ângulo $\angle C$.

Teorema 1. *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.*

Ou seja, se um triângulo $\triangle ABC$ é tal que o ângulo $e = \angle ACX$ externo adjacente a $\angle ACB$ Então,

$$\angle ACX > \angle BAC \quad e \quad \angle ACX > \angle ABC$$

Demonstração. Seja M o ponto médio de AC e seja P pertecente à semirreta $\overrightarrow{BM}$, tal que, $\overline{\text{BM}} = \overline{\text{MP}}$.

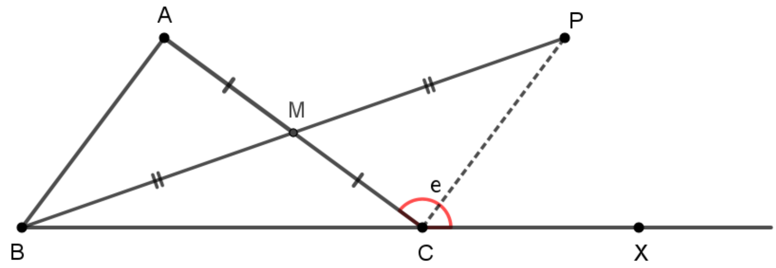


Figura 3.10: Ângulo externo - DEM

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Pelo caso LAL, $\triangle$BAM $\equiv$ ΔPCM, daí,

$$\angle \text{BAM} \equiv \angle \text{PCM} \tag{3.1.17}$$

Como P é interno ao ângulo ACX, vem que:

$$\angle \text{ACX} > \angle \text{PCM} \tag{3.1.18}$$

De 3.1.17 e 3.1.18 temos,

$$\angle \text{ACX} > \angle \text{BAM}$$

Analogamente, tomando o ponto médio de BC e usando ângulos opostos pelo vértice, concluímos que:

$$\angle \text{ACX} > \angle \text{ABM}$$

$\square$

4º CASO: LADO, ÂNGULO, ÂNGULO OPOSTO (L. A. Ao.)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

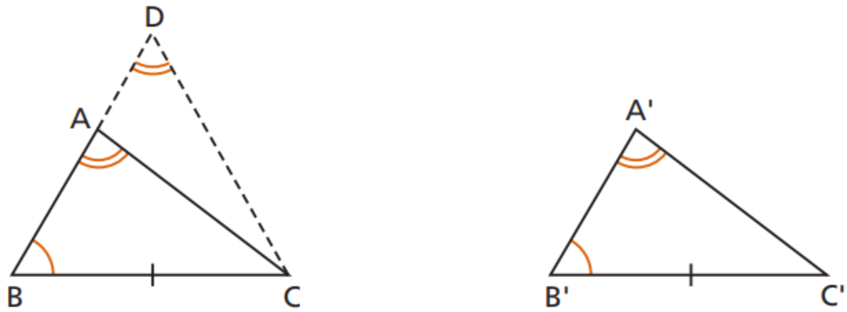


Figura 3.11: 4º caso de congruência de triângulos

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos, tais que:

$$BC \equiv B'C' \tag{3.1.19}$$

$$\angle B \equiv \angle B' \tag{3.1.20}$$

$$\angle A \equiv \angle A' \tag{3.1.21}$$

Então:

$$\triangle ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

Demonstração: Há três possibilidades para $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{A'B'}}$

1ª) $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}}$

2ª) $\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{A'B'}}$

3ª) $\overline{\mathrm{AB}} > \overline{\mathrm{A'B'}}$

Se a 1ª se verifica, temos:

$$\mathrm{AB} \equiv \mathrm{A'B'}, \quad \angle \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{B'}, \quad \mathrm{BC} \equiv \mathrm{B'C'} \overset{LAL}{\Rightarrow}$$

$$\Delta\mathrm{ABC} \equiv \Delta\mathrm{A'B'C'}$$

Se a 2ª se verificasse, tomando um ponto D na semirreta $\overrightarrow{BA}$ tal que BD $\equiv$ A′B′ (postulado do transporte de segmentos), teríamos:

$$\mathrm{BD} \equiv \mathrm{A'B'}, \quad \angle \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{B'}, \quad \mathrm{BC} \equiv \mathrm{B'C'} \overset{LAL}{\Rightarrow}$$

$$\Delta \mathrm{ABC} \equiv \Delta \mathrm{A'B'C'} \quad \Rightarrow \quad \angle \mathrm{D} \equiv \angle \mathrm{A},$$

daí, por 3.1.21, temos $\angle \mathrm{A} \equiv \angle \mathrm{A'}$ o que é absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo no $\triangle$ADC. Logo, a 2ª possibilidade não se verifica. A 3ª possibilidade também não se verifica, pelo mesmo motivo, com a diferença de que D estaria entre A e B. Como só pode ocorrer a 1ª possibilidade, temos:

Esquema do 4º caso:

$$\begin{cases} \mathrm{BC} \equiv \mathrm{B'C'} \\ \angle \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{B'} \\ \angle \mathrm{A} \equiv \angle \mathrm{A'} \end{cases} \overset{\mathrm{LAAo}}{\Longrightarrow} \quad \triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'B'C'}.$$

Assim,

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'B'C'} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{AB} \equiv \mathrm{A'B'} \\ \mathrm{AC} \equiv \mathrm{A'C'} \\ \angle \mathrm{C} \equiv \angle \mathrm{C'} \end{cases}$$

CASO ESPECIAL DO TRIÂNGLO RETÂNGULO

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

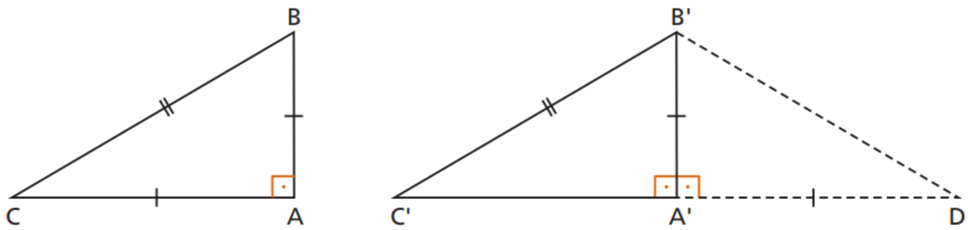


Figura 3.12: Congruência de triâgulos retângulos

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos tais que:

$$\angle A \equiv \angle A'(\ retos\ )$$

$$AB \equiv A'B'$$

$$BC \equiv B'C'(hipotenusa\ ) \tag{3.1.22}$$

Então:

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'\mathrm{C}'$$

Demonstração: Tomemos o ponto D na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\mathrm{A'D} \equiv \mathrm{AC}$ (postulado do transporte de segmentos)

$$\begin{cases} \mathrm{AB} \equiv \mathrm{A'B'} \\ \\ \angle\mathrm{A} \equiv \angle\mathrm{A'} \\ \\ \mathrm{AC} \equiv \mathrm{A'D'} \end{cases} \quad \overset{\mathrm{LAL}}{\Longrightarrow} \quad \Delta\mathrm{ABC} \equiv \Delta\mathrm{A'B'D}.$$

Implicando que,

$$\mathrm{BC} \equiv \mathrm{B'D} \tag{3.1.23}$$

e

$$\angle\mathrm{C} \equiv \angle\mathrm{D}. \tag{3.1.24}$$

Assim,

$$3.1.23 \text{ e } 3.1.22 \implies \quad B'C' \equiv B'D \Rightarrow \Delta B'C'D \text{ (isósceles de base } C'D \text{).}$$

Daí,

$$C'D \Rightarrow \angle C' \equiv \angle D.$$

Como,

$$\angle C' \equiv \angle D. \tag{3.1.25}$$

Então,

$$3.1.24 \text{ e } 3.1.25 \Rightarrow \angle C \equiv \angle C'.$$

Considerando agora os triângulos ABC e A′B′C′, temos:

$$\begin{cases} BC \equiv B'C' \\ \angle C \equiv \angle C' \\ \angle A \equiv \angle A' \end{cases} \overset{\text{LAAo}}{\Longrightarrow} \quad \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

3.2 Paralelismo

Defininição (Retas paralelas): Duas retas são paralelas (símbolo: //) quando são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não têm nenhum ponto comum:

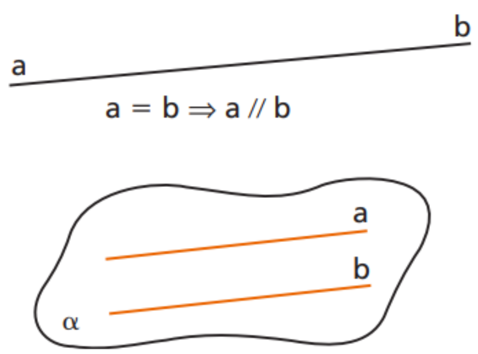


Figura 3.13: Retas paralelas - DEF.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

$$a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b = \varnothing \Rightarrow \quad a // b$$

Observação: α é o plano que contem as retas a e b.

Sejam a e b duas retas distintas, paralelas ou não, e t uma reta concorrente com a e b: 1°) t é uma transversal de a e b;

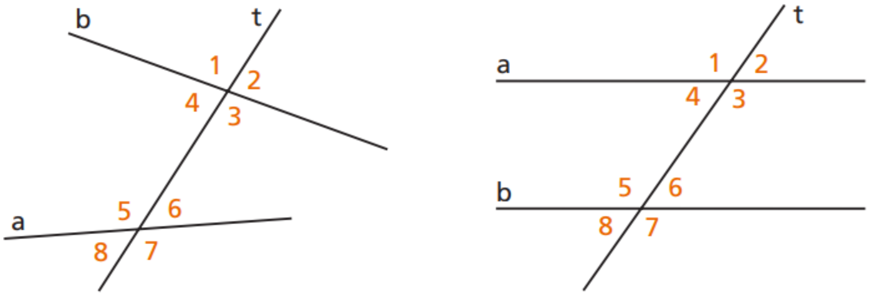


Figura 3.14: Reta transversal

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

2°) dos oito ângulos determinados por essas retas indicados na figura 14, chamam-se ângulos:

$$\begin{cases} \text{alternos:} & \angle 1 \quad e \quad \angle 7, \quad \angle 2 \quad e \quad \angle 8, \quad \angle 3 \quad e \quad \angle 5, \quad \angle 4 \quad e \quad \angle 6 \\ \text{correspondentes:} & \angle 1 \quad e \quad \angle 5, \quad \angle 2 \quad e \quad \angle 6, \quad \angle 3 \quad e \quad \angle 7, \quad \angle 4 \quad e \quad \angle 8 \\ \text{colaterais:} & \angle 1 \quad e \quad \angle 8, \quad \angle 2 \quad e \quad \angle 7, \quad \angle 3 \quad e \quad \angle 6, \quad \angle 4 \quad e \quad \angle 5 \end{cases}$$

1°) Com mais detalhes podemos ter:

$$\text{Alternos:} \begin{cases} \text{Alternos internos: } \angle 3 \quad e \quad \angle 5, \quad \angle 4 \quad e \quad \angle 6 \\ \text{Alternos externos: } \angle 1 \quad e \quad \angle 7, \quad \angle 2 \quad e \quad \angle 8 \end{cases}$$

$$\text{Colaterais:} \begin{cases} \text{Colaterais internos: } \angle 3 \quad e \quad \angle 6, \quad \angle 4 \quad e \quad \angle 5 \\ \text{Colaterais externos: } \angle 1 \quad e \quad \angle 8, \quad \angle 2 \quad e \quad \angle 7 \end{cases}$$

2°) A congruência de dois ângulos alternos de um dos pares (por exemplo, $\angle 1 \equiv \angle 7$) equivale a

a) a congruência dos ângulos de todos os pares de ângulos alternos

$$\angle 2 \quad e \quad \angle 8, \quad \angle 3 \quad e \quad \angle 5, \quad \angle 4 \quad e \quad \angle 6$$

b) a congruência dos ângulos de todos os pares de ângulos correspondentes

$$\angle 1 \quad e \quad \angle 5, \quad \angle 2 \quad e \quad \angle 6, \quad \angle 3 \quad e \quad \angle 7, \quad \angle 4 \quad e \quad \angle 8$$

c) a suplementaridade dos ângulos de todos os pares de colaterais

$$\angle 1 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 7 = \angle 3 + \angle 6 = \angle 4 + \angle 5 = 180^o$$

3.2.1 EXISTÊNCIA DA PARARELA

Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas.

Se $\alpha = \beta$, então $a//b$.

ou

$\alpha \equiv \beta \quad \Rightarrow \quad a//b$

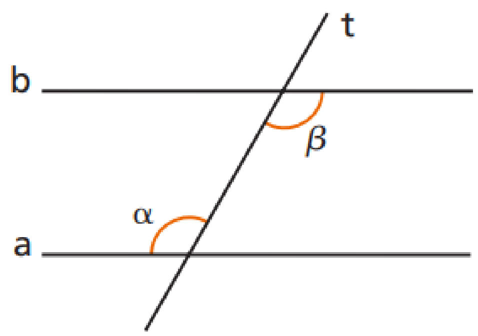
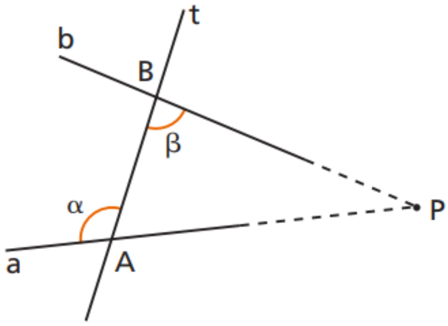


Figura 3.15: Existência da paralela

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Demonstração: Se a e b não fossem paralelas, teriamos um ponto P em comum e $a \cap b = \{P\}$. Sendo $a \cap t = \{A\}$ e $b \cap t = \{B\}$ teríamos o triângulo ABP.



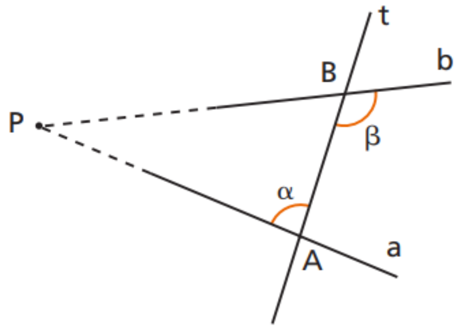


Figura 3.16: Existência da paralela - DEM

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Pelo teorema do ângulo externo aplicado ao $\triangle$ABP, teríamos:

$$\alpha > \beta \text{ ou } \beta > \alpha,$$

o que é absurdo, de acordo com a hipótese. Logo, as retas a e b são paralelas.

3.2.2 POSTULADO DE EUCLIDES

Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

Com base nesse axioma podemos provar o recíproco do teorema anterior. É o que segue.

Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.

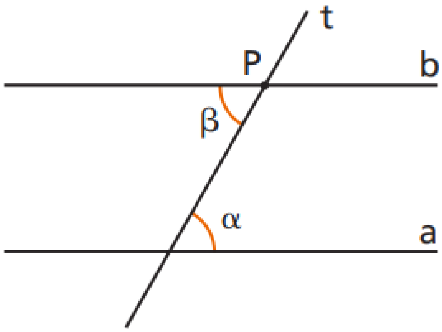


Figura 3.17: Postulado das paralelas

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Se $a \neq b \quad e \quad a//b$, então $\alpha \equiv \beta$

ou

$$a \neq b, \quad a//b \quad \Rightarrow \quad \alpha \equiv \beta$$

Demonstração: Se α e β não fossem congruentes, existiria uma reta x, distinta de b, passando por P, $\{\mathrm{P}\} = \mathrm{b} \cap \mathrm{t}$, tal que: o ângulo entre $\mathrm{x} \quad e \quad \mathrm{t} = \beta'$, alterno de α e $\beta' = \alpha$. Pelo teorema da existência, $\alpha = \beta' \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}//\mathrm{a}$.

Por P teríamos duas retas distintas, x e b, ambas paralelas à reta a, o que é absurdo, pois contraria o postulado das paralelas.

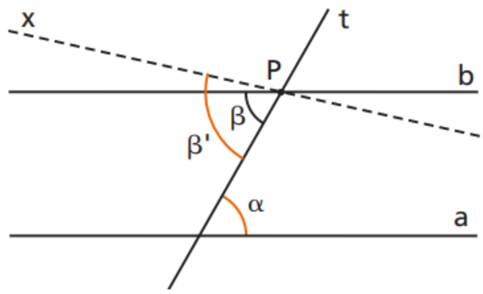


Figura 3.18: Recíproca da existência da paralela

Fonte:Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Logo, α é congruente a β.

3.3 Ângulo inscrito

Definição: Ângulo inscrito relativo a uma circunferência de centro O é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.

Na figura 3.19, $\angle AVB$ é ângulo inscrito, arc AB é o arco correspondente ao arco subentendido, $\angle AOB$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $\angle AVB$.

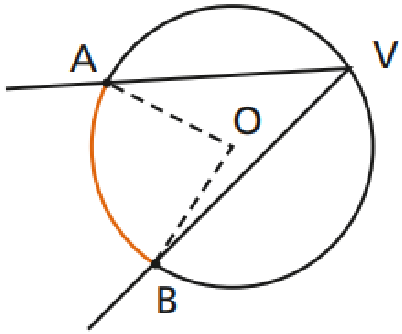


Figura 3.19: Ângulo inscrito - DEF.

Fonte:Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

3.3.1 MEDIDA DO ÂNGULO INSCRITO

Um ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente ou, de outra maneira, a medida de um ângulo inscrito é metade da medida angular do arco correspondente.

Demonstração: Seja ângulo $\angle$AVB o ângulo inscrito de medida α e $\angle$AOB o ângulo central correspondente de medida β. Vamos provar que:

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\text{arc AB}}{2}$$

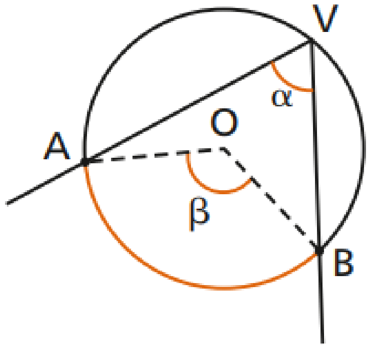


Figura 3.20: Medida do ângulo inscrito.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Temos três casos a considerar:

1º caso: O centro O está em um dos lados do ângulo.

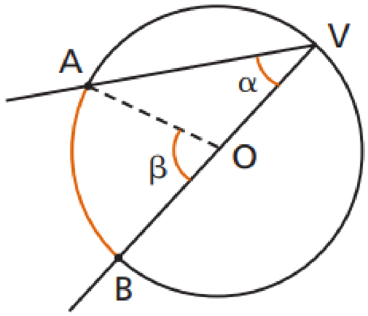


Figura 3.21: Ângulo inscrito - 1º caso.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

2º caso: O centro O é interno ao ângulo.

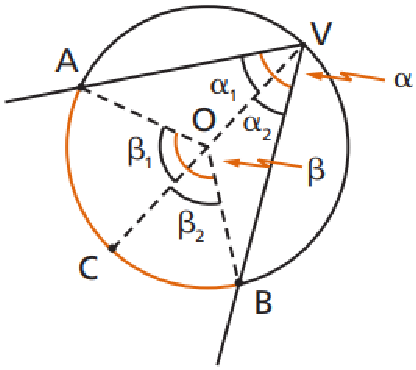


Figura 3.22: Ângulo inscrito - 2º caso.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

3º caso: O centro O é externo ao ângulo.

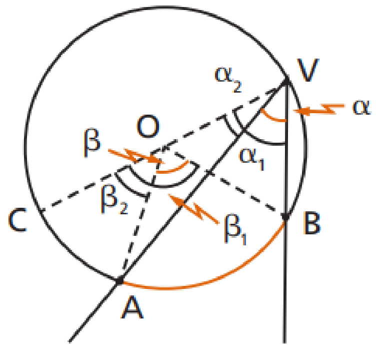


Figura 3.23: Ângulo inscrito - 3º caso.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

No 1º caso:

$$\mathrm{OV} \equiv \mathrm{OA}\ (\text{raio}) \ \Rightarrow \Delta\mathrm{OVA}\ \text{isósceles} \ \Rightarrow \angle\mathrm{AVB} = \angle\mathrm{OAV} = \alpha$$

β é ângulo externo no triângulo $\triangle$OVA

$$\Rightarrow \beta = \angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{V} \Rightarrow \beta = \alpha + \alpha \Rightarrow \beta = 2\alpha.$$

Logo,

$$\alpha = \frac{\beta}{2}.$$

E, considerando a medida angular do arco AB, temos $\beta = \operatorname{arc}\mathrm{AB}$, então

$$\alpha = \frac{\operatorname{arc}\mathrm{AB}}{2}.$$

No 2º caso:

Sendo C ponto de interseção de $\overrightarrow{\mathrm{VO}}$ com a circunferência e, sendo $\angle\mathrm{AVC} = \alpha_1$, $\angle\mathrm{AOC} = \beta_1$, $\quad \angle\mathrm{CVB} = \alpha_2 \quad$ e $\quad \angle\mathrm{COB} = \beta_2$, temos o que segue:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Caso 1: } \beta_1 = 2\alpha_1 \\ \text{Caso 2: } \beta_2 = 2\alpha_2\end{array}\right\} \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 = 2\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) \Rightarrow \beta = 2\alpha.$$

Logo,

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

E, considerando a medida angular do arco AB, temos $\beta = \operatorname{arc} \mathrm{AB}$, então:

$$\alpha = \frac{\operatorname{arc} \mathrm{AB}}{2}$$

No 3º caso:

Sendo C ponto de interseção de $\overrightarrow{\mathrm{VO}}$ com a circunferência e, sendo $\angle \mathrm{BVC} = \alpha_1$, $\angle \mathrm{BOC} = \beta_1$, $\angle \mathrm{AVC} = \alpha_2$ e $\angle \mathrm{AOC} = \beta_2$, temos o que segue:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Caso 1: } \beta_1 = 2\alpha_1 \\ \text{Caso 2: } \beta_2 = 2\alpha_2\end{array}\right\} \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = 2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) \Rightarrow \beta = 2\alpha.$$

Logo,

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

E, considerando a medida angular do arco AB, temos $\beta = \operatorname{arc} \mathrm{AB}$, então:

$$\alpha = \frac{\operatorname{arc} \mathrm{AB}}{2}$$

3.4 Ângulo de segmento ou ângulo semi-inscrito

Definição: Ângulo de segmento ou ângulo semi-inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência.

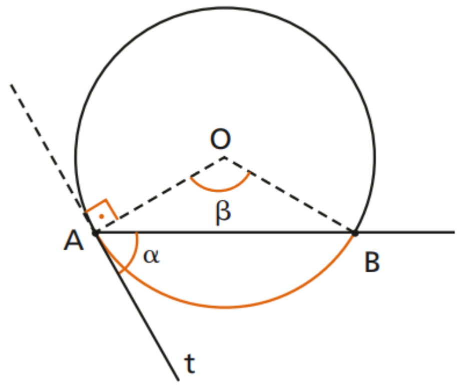


Figura 3.24: Ângulo de segmento.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Na figura 3.24, o ângulo formado entre a semirreta t e o segmento AB de medida α é o ângulo de segmento, $arcAB$ é o arco correspondente ou subtendido, $\angle AOB = \beta$ é o ângulo central correspondente ao ângulo semi-inscrito.

3.4.1 MEDIDA DO ÂNGULO DE SEGMENTO

Um ângulo de segmento é metade do ângulo central correspondente, ou a medida de um ângulo de segmento é metade da medida angular do arco correspondente.

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{arc\,AB}{2}$$

Demonstração: Temos três casos possíveis:

1º caso: O ângulo de segmento é agudo, ou seja, $0 < \alpha < 90^o$. No triângulo isósceles, de base AB, $\triangle$OAB calculemos a medida do ângulo $\angle$A:

$$\angle \text{A} + \angle \text{B} + \beta = 180^o \Rightarrow \angle \text{A} + \angle \text{A} + \beta = 180^o \Rightarrow 2\angle \text{A} = 180^o - \beta \Rightarrow$$

$$\angle \text{A} = 90^o - \frac{\beta}{2}. \tag{3.4.1}$$

Como t é tangente a circunferência, temos,

$$\alpha + \angle \mathrm{A} = 90^o \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{A} = 90^o - \alpha. \tag{3.4.2}$$

De 3.4.1 e 3.4.2 decorre que:

$$\alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Assim, considerando a medida angular do arco AB, segue que,

$$\alpha = \frac{\mathrm{arc\,AB}}{2}.$$

2º caso: O ângulo de segmento é reto, ou seja, $\alpha = 90^o$. Neste caso, o segmento AB é um diâmetro, daí $\beta = 180^o$, então o resultado é válido.

3º caso: O ângulo de segmento é obtuso, ou seja, $90^o < \alpha < 180^o$. Usando o adjacente suplementar do ângulo de segmento, recai-se no 1º caso. Portanto, está demonstrado o resultado.

3.5 Teorema de Tales

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra. Ou seja:

Se AB e CD são dois segmentos de uma transversal e $A'B'$ e $C'D'$ os respectivos correspondentes da outra, então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Demonstração:

1º caso: AB e CD são comensuráveis.

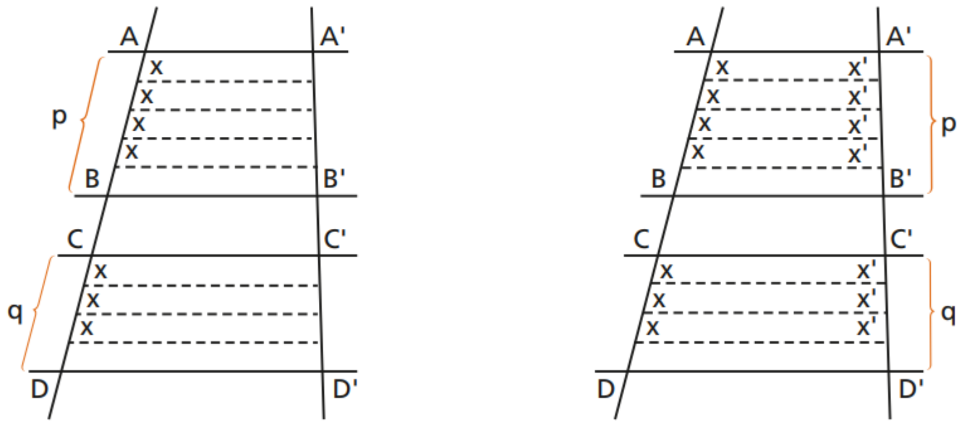


Figura 3.25: Teorema de Tales - 1º caso

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Existe um segmento x que é submúltiplo de AB e de CD. Daí, por divisão, temos

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB} &= px\\ \overline{CD} &= qx\end{aligned}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q}. \tag{3.5.1}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de AB e CD (vide figura 3.25) e aplicando a propriedade anterior, novamente por divisão vem:

$$\left.\begin{aligned}\overline{A'B'} &= px'\\ \overline{C'D'} &= qx'\end{aligned}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \tag{3.5.2}$$

Comparando 3.5.1 e 3.5.2 , temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

2º caso: AB e CD são incomensuráveis.

Não existe segmento submúltiplo comum de AB e CD.

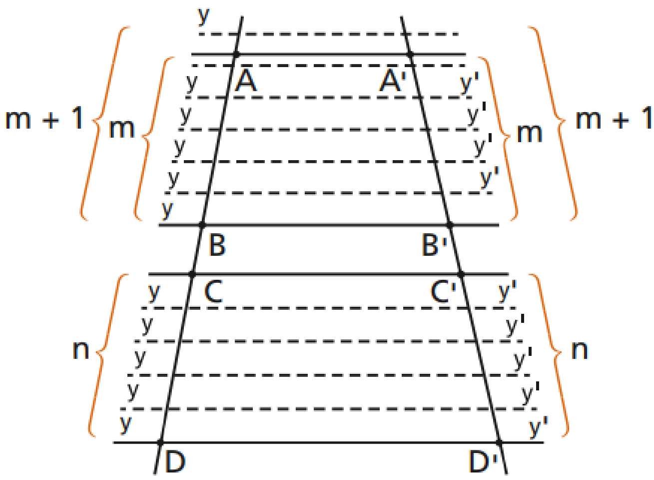


Figura 3.26: Teorema de Tales - 2º caso

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

Tomamos um segmento y submúltiplo de CD (y cabe um certo número inteiro n de vezes em CD), isto é:

$$\overline{CD} = n \cdot y.$$

Por serem AB e CD incomensuráveis, marcando sucessivamente y em AB, para um certo número inteiro m de vezes acontece que:

$$m \cdot y < \overline{AB} < (m+1)y.$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\left.\begin{array}{c} my < \overline{AB} < (m+1)y \\ ny = \overline{CD} = ny \end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \tag{3.5.3}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de AB e CD e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\overline{C'D'} = ny'$$

$$my' < \overline{A'B'} < (m+1)y'$$

Operando com as relações acima, temos:

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{my}' < \overline{\mathrm{A'B'}} < (\mathrm{m}+1)\mathrm{y}' \\ \mathrm{ny}' = \overline{\mathrm{C'D'}} = \mathrm{ny}' \end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} < \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{C'D'}}} < \frac{\mathrm{m}+1}{\mathrm{n}} \tag{3.5.4}$$

Ora, y é um submúltiplo de CD que se pode variar; diminuindo y, aumentamos n e nestas condições $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ e $\frac{\mathrm{m}+1}{\mathrm{n}}$ formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$ pela expressão 3.5.3, e é $\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{C'D'}}}$ pela expressão 3.5.4. Como esse número é único, então:

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}} = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{C'D'}}}.$$

Vale também a igualdade:

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{A'B'}}} = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{C'D'}}}.$$

que permite concluir que:

A razão entre segmentos correspondentes é constante.

3.6 Semelhança de triâgulos

Definição: Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

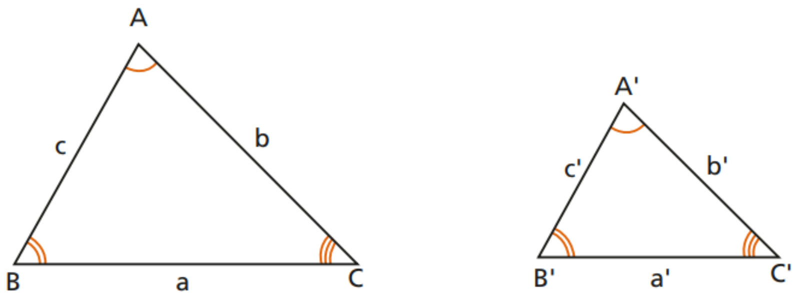


Figura 3.27: Semelhança de triângulos - DEF.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \angle A \equiv \angle A' \\ \angle B \equiv \angle B' \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \\ \angle C \equiv \angle C' \end{cases}$$

$\sim$: semelhante.

Dois lados homólogos (homo = mesmo, logos = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

3.6.1 RAZÃO DE SEMELHANÇA

Sendo k a razão entre os lados homólogos, ou seja

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

k é chamado razão de semelhança dos triângulos.

Se $k = 1$, os triângulos são congruentes.

3.6.2 CASOS OU CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

1º CASO: ÂNGULO, ÂNGULO (A. A.)

Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes. Ou seja:

Sejam os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$, se

$$\angle A \equiv \angle A', \angle B \equiv \angle B',$$

então,

$$\triangle ABC \sim A'B'C'.$$

Demonstração: Vamos supor que os triângulos não são congruentes e que AB $\equiv$ A$'$B$'$. Seja D um ponto de AB tal que AD $\equiv$ A$'$B$'$ e o triângulo ADE com $\angle$D $\equiv$ $\angle$B$'$ e E no lado AC.

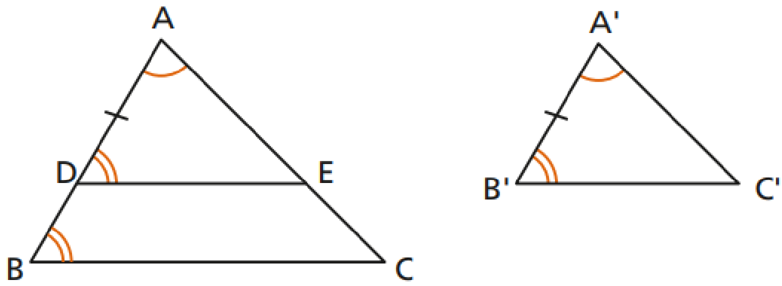


Figura 3.28: Semelhança de triângulos - 1º caso.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

$$\angle \mathrm{A} \equiv \angle \mathrm{A}', \quad \mathrm{AD} \equiv \mathrm{A}'\mathrm{B}', \quad \angle \mathrm{D} \equiv \angle \mathrm{B}' \overset{\mathrm{ALA}}{\Rightarrow}$$

$$\Delta \mathrm{ADE} \equiv \Delta \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}' \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{B}' \quad \mathrm{e} \quad \angle \mathrm{B}' \equiv \angle \mathrm{D} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{D} \Rightarrow \overleftrightarrow{\mathrm{DE}} // \overleftrightarrow{\mathrm{BC}} \Rightarrow$$

$$\Delta \mathrm{ABC} \sim \Delta \mathrm{ADE} \Rightarrow$$

$$\Delta \mathrm{ABC} \sim \Delta \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}.$$

2º CASO: LADO, ÂNGULO, LADO (L. A. L.)

Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração: A demonstração é análoga à do 1° caso, usando-se o caso de congruência LAL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental.

O esquema deste caso é o que segue:

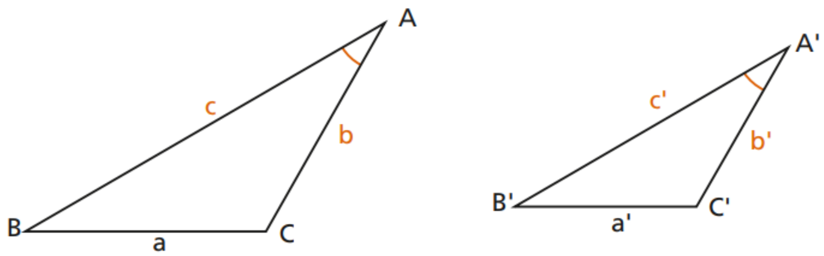


Figura 3.29: Semelhança de triângulos - 2º caso.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

$$\frac{c}{c'} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{b}'} = \mathrm{k} \quad \mathrm{e} \quad \angle \mathrm{A} \equiv \angle \mathrm{A}' \Rightarrow$$

$$\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{A'B'C'} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'} = \mathrm{k}, \quad < \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{B}', \quad \angle \mathrm{C} \equiv \angle \mathrm{C}'.$$

3° CASO: LADO LADO LADO (L. L. L)

Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

Demonstração: A demonstração deste caso é análoga à do 1° caso, usando-se o caso de congruência LLL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental.

O esquema deste caso é o que segue:

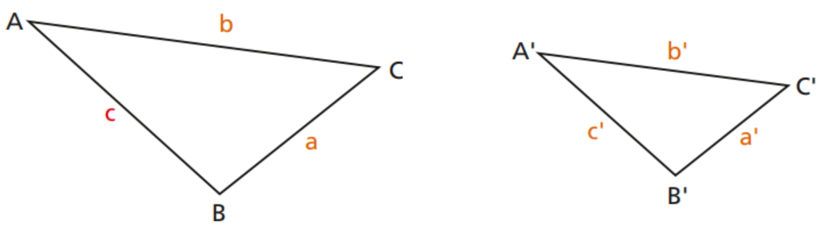


Figura 3.30: Semelhança de triângulos - 3º caso.

Fonte: Livro Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{c}'} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{b}'} = \mathrm{k} \Rightarrow$$

$$\Delta\mathrm{ABC} \sim \Delta\mathrm{A'B'C'} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{A} \equiv \angle \mathrm{A}', \quad \angle \mathrm{B} \equiv \angle \mathrm{B}', \quad \angle \mathrm{C} \equiv \angle \mathrm{C}'.$$

3.7 Relações métricas no triângulo retângulo

Os resultados que seguem estão enunciados e demonstrados conforme [10]

Proposição: Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa a hipotenusa, $\overline{CH} = x, \overline{BH} = y$ e $\overline{AH} = h$, temos:

(a) $ah = bc$.

(b) $ax = b^2$ e $ay = c^2$.

(c) $a^2 = b^2 + c^2$.

(d) $xy = h^2$.

Demonstração:

(a) e (b) Como

$$\angle \mathrm{AHB} = \angle \mathrm{CAB} \text{ e } \angle \mathrm{ABH} = \angle \mathrm{CBA}$$

os triângulos BAH e BCA são semelhantes pelo caso A. A., com a correspondência de vértices $\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{C}, \mathrm{H} \leftrightarrow \mathrm{A}, \mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{B}$. Assim,

$$\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}} \text{ e } \frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}},$$

ou, ainda,

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}} \text{ e } \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}.$$

Portanto, $\mathrm{ah} = \mathrm{bc}$ e $\mathrm{ay} = \mathrm{c}^2$.

A relação $\mathrm{ax} = \mathrm{b}^2$ é provada de maneira análoga.

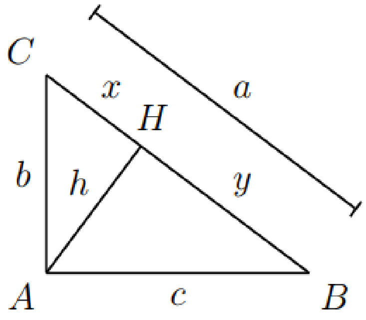


Figura 3.31: Relações métricas no triângulo retângulo

Fonte: Livro Geometria, coleção PROFMAT.

(c) Somando membro a membro as relações em (b), obtemos a igualdade $\mathrm{a}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2$. Mas desde que $\mathrm{x}+\mathrm{y} = \mathrm{a}$, nada mais há a fazer.

(d) Multiplicando membro a membro as duas relações do item (b), obtemos $\mathrm{a}^2 \cdot \mathrm{xy} = (\mathrm{bc})^2$ ou, ainda,

$$\mathrm{xy} = \left(\frac{\mathrm{bc}}{\mathrm{a}}\right)^2 = \mathrm{h}^2,$$

onde utilizamos o item (a) na última igualdade acima.

O item (c) da proposição acima é o famoso Teorema de Pitágoras.

3.8 Quadrilátero inscritível

Definição: Um quadrilátero é dito inscritıvel em uma circunferência se, existe uma circunferência que passa pelos seus quatro vértices.

Proposição: Se um quadrilátero convexo $ABCD$ de lados AB, BC, CD e DA, é inscritível em uma circunferência, então, uma qualquer das condições a seguir é satisfeita.

(a) $\angle BAD + \angle BCD = 180°$

(b) $\angle BAC = \angle BDC$

Demonstração:

(a) Suponhamos que ABCD seja inscritível. Então, pelo teorema do ângulo inscrito, temos

$$2(\angle \text{BAD} + \angle \text{BCD}) = 360^o \Rightarrow \angle \text{BCD} + \angle \text{BAD} = 180^\circ$$

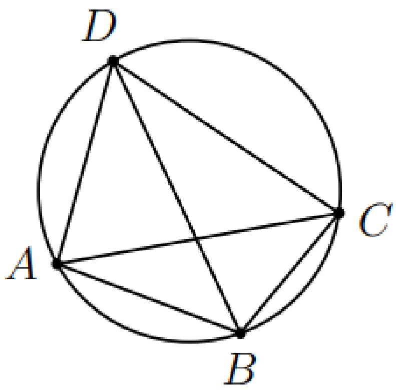


Figura 3.32: Quadrilátero inscrito

Fonte: Livro Geometria, coleção PROFMAT.

(b) Como $\angle$BAC e $\angle$BDC subtendem ao mesmo arco BC, então,

$$\angle \text{BAC} = \angle \text{BDC}.$$

Portanto, Se ABCD, então, $\angle \text{BAD} + \angle \text{BCD} = 180^\circ$ e $\angle \text{BAC} = \angle \text{BDC}$, ou ainda,

$$\text{ABCD é inscritível } \Rightarrow \angle \text{BAD} + \angle \text{BCD} = 180^\circ \quad \text{e} \quad \angle \text{BAC} = \angle \text{BDC}$$

4 OS 15 LEMAS DE ARQUIMEDES

Neste capítulo iremos enunciar e fazer as demonstrações das 15 proposições do livro dos lemas de Arquimedes, que trataremos aqui como os 15 lemas de Arquimedes.

4.1 Lema 1

Lema 4.1. *Se dois círculos se tocam em A e têm diâmetros paralelos em BD e EF, então os pontos A, D e F ou os pontos A, B e E estão sobre a mesma reta.*

Demonstração. Tem-se dois casos a considerar, no primeiro caso um circulo é interior ao ouro, no segundo caso os dois círculos são exteriores. Vamos demonstrar o primeiro caso, a demonstração do segundo caso é análoga.

Sejam O e C os centros dos círculos de diâmetros EF e BD respectivamente, $\overline{\text{OC}}$ é a diferença entre $\overline{\text{AO}}$ e $\overline{\text{AC}}$. Trace DH paralelo a AO e tocando OF em H.

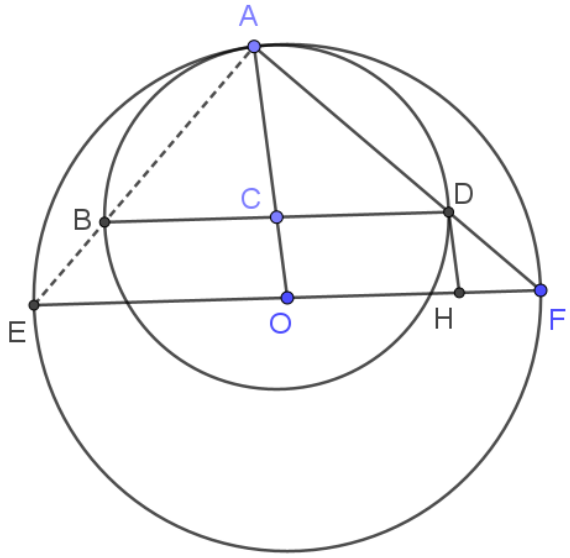


Figura 4.1: Lema 1 - I

Fonte: Autoria própria

OCDH é um paralelogramo, então,

$$\overline{\text{OH}} = \overline{\text{CD}}. \tag{4.1.1}$$

E,

$$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AC}}, \tag{4.1.2}$$

pois, são medidas do raio do círculo de diâmetro BD. De 4.1.1 e 4.1.2 , tem-se que,

$$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{AC}}. \tag{4.1.3}$$

Agora, veja que,

$$\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{AO}}, \tag{4.1.4}$$

pois, $\overline{\mathrm{OF}}$ e $\overline{\mathrm{AO}}$ são medidas do raio do círculo de diâmetro EF. Fazendo 4.1.4 - 4.1.3 , obtemos:

$$\overline{\mathrm{OF}} - \overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{AO}} - \overline{\mathrm{AC}} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{HF}} = \overline{\mathrm{CO}}.$$

Como, $\overline{\mathrm{CO}} = \overline{\mathrm{DH}}$, então,

$$\overline{\mathrm{HF}} = \overline{\mathrm{DH}}.$$

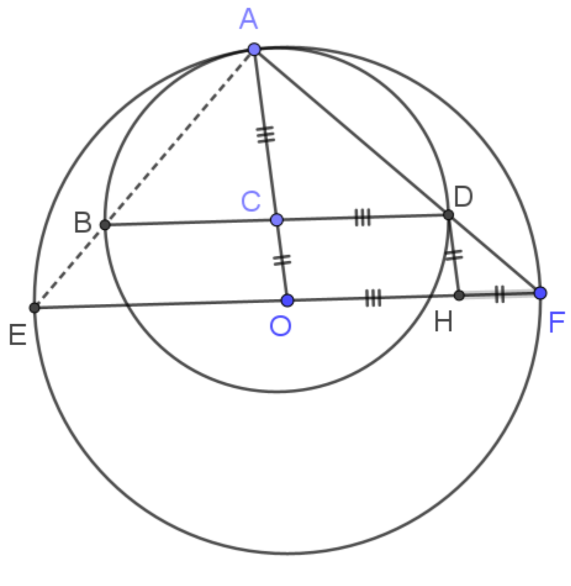


Figura 4.2: Lema 1 - II

Fonte: Autoria própria

Portanto, o triângulo DHF é isósceles de base DF e

$$\angle \mathrm{HDF} = \angle \mathrm{HFD}.$$

Agora considerando que o triângulo CAD é isósceles de base AD, então,

$$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{ADC},$$

daí, como AO é paralelo a DH e CD é paralelo a OF, temos,

$$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{DHF}.$$

Portanto, nos triângulos isósceles CAD e DHF, temos que os ângulos dos vértices são iguais, daí os ângulos das bases também são iguais, logo,

$$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{DFH}. \tag{4.1.5}$$

Adicionando $\angle \mathrm{CDF}$ em ambos os lados da igualdade 4.1.5, obtemos,

$$\angle \mathrm{ADC} + \angle \mathrm{CDF} = \angle \mathrm{CDF} + \angle \mathrm{DFH}$$

como $\angle \mathrm{CDF}$ e $\angle \mathrm{DFH}$ são ângulos colaterais internos nas paralelas CD e OF, temos,

$$\angle \mathrm{CDF} + \angle \mathrm{DFH} = 180^\circ,$$

daí,

$$\angle \mathrm{ADC} + \angle \mathrm{CDF} = 180^\circ,$$

segue que, os pontos A, D e F estão alinhados.

$\square$

4.2 Lema 2

Lema 4.2. *Seja AB o diâmetro de um semicírculo e sejam as tangentes a ele em B e em qualquer outro ponto D do semicírculo, que se encontram em T. Se traçarmos DE perpendicularmente a AB, e se AT e DE se encontram em F, então $\overline{EF} = \overline{FD}$.*

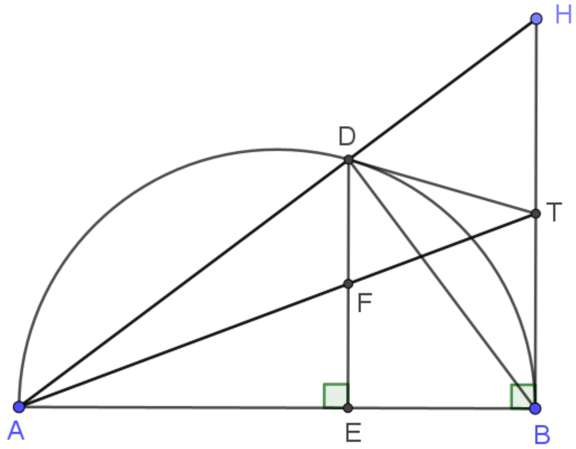


Figura 4.3: Lema 2 - I

Fonte: Autoria própria

Demonstração. Sejam os prolongamentos de AD e BT que se encontram em H. O ângulo ADB no semicírculo é reto, portanto o ângulo BDH é também reto. Daí BH também é diâmetro de um círculo e como $\overline{\text{TB}} = \overline{\text{TD}}$, T é o centro deste círculo. Portanto, $\overline{\text{HT}} = \overline{\text{TB}}$.

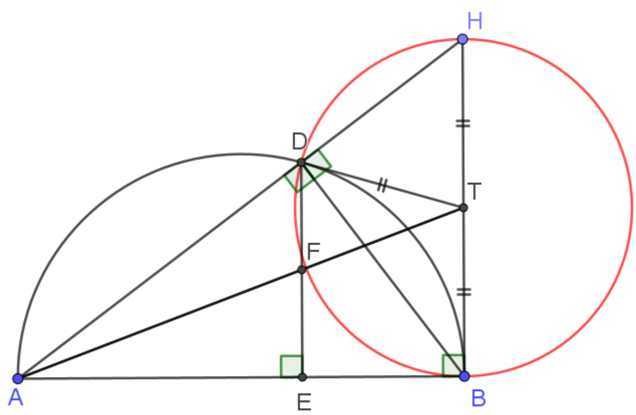


Figura 4.4: Lema 2 - II

Fonte: Autoria própria

Veja que, ED é paralelo a BH, daí o triângulo BAT é semelhante ao triângulo EAF, pelo caso ângulo ângulo, pois, $\angle \mathrm{BAT} = \angle \mathrm{EAF}$ e $\angle \mathrm{ABT} = \angle \mathrm{AEF}$. Assim, temos,

$$\frac{\overline{\mathrm{TB}}}{\overline{\mathrm{EF}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{EA}}}. \tag{4.2.1}$$

Pelo mesmo critério os triângulos BAH e EAD são também semelhantes, daí,

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{EA}}} = \frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{ED}}}. \tag{4.2.2}$$

De 4.2.1 e 4.2.2, obtemos,

$$\frac{\overline{\mathrm{TB}}}{\overline{\mathrm{EF}}} = \frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{ED}}}. \tag{4.2.3}$$

Agora como $\overline{\mathrm{TB}} = \overline{\mathrm{TH}}$, temos,

$$\overline{\mathrm{BH}} = 2\overline{\mathrm{TB}}$$

e substituindo esta última igualdade em 4.2.3, obtemos,

$$\frac{\overline{\mathrm{TB}}}{\overline{\mathrm{EF}}} = \frac{2\overline{\mathrm{TB}}}{\overline{\mathrm{ED}}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{\mathrm{EF}}} = \frac{2}{\overline{\mathrm{ED}}} \Rightarrow \overline{\mathrm{ED}} = 2\overline{\mathrm{EF}}. \tag{4.2.4}$$

E, como,

$$\overline{\mathrm{ED}} = \overline{\mathrm{EF}} + \overline{\mathrm{FD}}, \tag{4.2.5}$$

então,

$$\overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{FD}}$$

como queríamos demonstrar. □

4.3 Lema 3

Lema 4.3. *Seja P um ponto qualquer de um semicírculo de diâmetro AB, e seja PN um segmento perpendicular a AB. Tome D sobre AB tal que $\overline{AN} = \overline{ND}$. Se* $\text{arc}\, PQ = \text{arc}\, AP$, *então* $\overline{BQ} = \overline{BD}$.

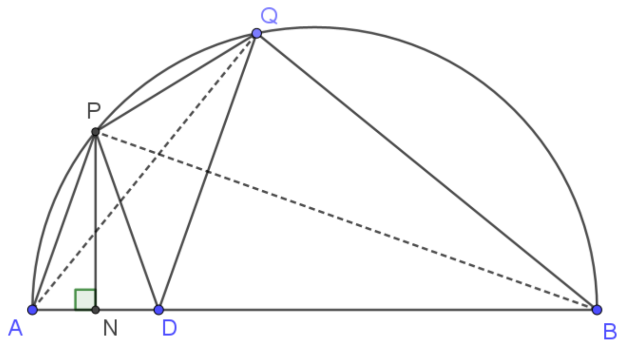


Figura 4.5: Lema 3 - I

Fonte: Autoria própria

Demonstração. Trace os segmentos AP, PQ, DP e DQ. Como $\text{arc}\, \text{AP} = \text{arc}\, \text{PQ}$, temos,

$$\overline{\text{AP}} = \overline{\text{PQ}}. \tag{4.3.1}$$

Nos triângulos $\triangle$ANP e $\triangle$DNP, temos $\overline{\text{AN}} = \overline{\text{ND}}, \angle\text{ANP} = \angle\text{DNP}$ e PN é lado comum, logo pelo caso lado ângulo lado (L.A.L.) estes triângulos são congruentes. Segue que,

$$\overline{\text{AP}} = \overline{\text{PD}}. \tag{4.3.2}$$

Agora por 4.3.1 e 4.3.2, temos,

$$\overline{\text{PQ}} = \overline{\text{PD}}$$

daí, o triângulo PDQ é isóscele de base DQ, logo,

$$\angle\text{PQD} = \angle\text{PDQ}$$

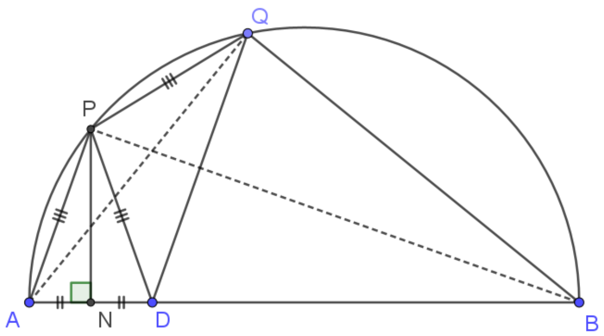


Figura 4.6: Lema 3 - II

Fonte: Autoria própria

Como APQB é um quadrilátero inscrito em um círculo, temos,

$$\angle PAD + \angle PQB = 180°. \tag{4.3.3}$$

Note que, o triângulo ADP é isósceles de base AD, daí,

$$\angle PAD = \angle ADP. \tag{4.3.4}$$

Como os ângulo ADP e PDB são suplementares, então,

$$\angle ADP + \angle PDB = 180°. \tag{4.3.5}$$

De 4.3.4 e 4.3.5, temos,

$$\angle PAD + \angle PDB = 180° \tag{4.3.6}$$

e de 4.3.3, 4.3.4 e 4.3.6, vem,

$$\angle ADP + \angle PQB = \angle ADP + \angle PDB \Rightarrow$$

$$\angle PQB = \angle PDB. \tag{4.3.7}$$

Como

$$
\begin{cases}
\angle \mathrm{PQD} = \angle \mathrm{PDQ} \\
\angle \mathrm{PQD} + \angle \mathrm{DQB} = \angle \mathrm{PQB} \\
\angle \mathrm{PDQ} + \angle \mathrm{QDB} = \angle \mathrm{PDQ}.
\end{cases} \tag{4.3.8}
$$

Concluimos de 4.3.7 e 4.3.8, que,

$$\angle \mathrm{DQB} = \angle \mathrm{QDB},$$

logo, o triângulo BDQ é isóscele de base DQ e segue o que queriamos demonstrar

$$\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{BD}}.$$

□

4.4 Lema 4

Lema 4.4. *Se AB for o diâmetro de um semicírculo e N qualquer ponto de AB, e se dois semicírculos forem descritos dentro do primeiro semicírculo tendo AN e BN como diâmetros, respectivamente, a figura incluída entre as semicircunferências dos três semicírculos é o que Arquimedes chamou um "Arbelo"; e sua área é igual a área do círculo que tem PN como diâmetro, onde PN é perpendicular a AB e encontra o semicírculo original em P.*

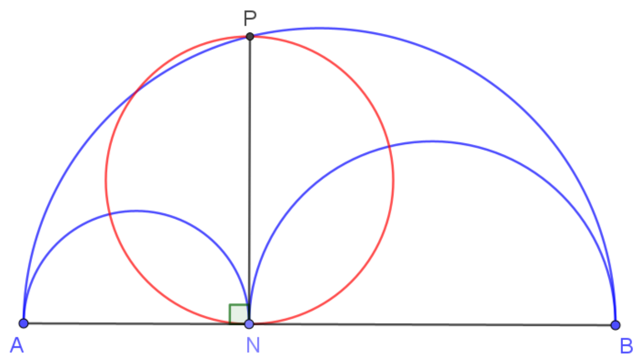


Figura 4.7: Lema 4

Fonte: Autoria própria

Demonstração. Temos,

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AN}} + \overline{\mathrm{BN}},$$

elevando os dois lados desta igualdade ao quadrado, obtemos,

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (\overline{\mathrm{AN}} + \overline{\mathrm{BN}})^2 \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AN}}^2 + \overline{\mathrm{BN}}^2 + 2 \cdot \overline{\mathrm{AN}} \cdot \overline{\mathrm{BN}} \tag{4.4.1}$$

Note que, $\triangle$APB é um triângulo retângulo em P, então pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos,

$$\overline{\mathrm{PN}}^2 = \overline{\mathrm{AN}} \cdot \overline{\mathrm{BN}}, \tag{4.4.2}$$

substituindo 4.4.2 em 4.4.1, vem,

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AN}}^2 + \overline{\mathrm{BN}}^2 + 2\overline{\mathrm{PN}}^2, \tag{4.4.3}$$

multiplicando-se todos os termos da igulade 4.4.3 por $\frac{\pi}{8}$, obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{8} \cdot \overline{\mathrm{AB}}^2 &= \frac{\pi}{8} \cdot \overline{\mathrm{AN}}^2 + \frac{\pi}{8} \cdot \overline{\mathrm{BN}}^2 + \frac{\pi}{4}\overline{\mathrm{PN}}^2 \Rightarrow \\
\frac{\pi}{4}\overline{\mathrm{PN}}^2 &= \frac{\pi}{8} \cdot \overline{\mathrm{AB}}^2 - \frac{\pi}{8} \cdot \overline{\mathrm{AN}}^2 - \frac{\pi}{8} \cdot \overline{\mathrm{BN}}^2 \Rightarrow \\
\pi \cdot \left(\frac{\overline{\mathrm{PN}}}{2}\right)^2 &= \frac{\pi}{8} \cdot \overline{\mathrm{AB}}^2 - \frac{\pi}{8} \cdot \overline{\mathrm{AN}}^2 - \frac{\pi}{8} \cdot \overline{\mathrm{BN}}^2. \qquad (4.4.4)
\end{aligned}$$

Mas, $\frac{\overline{\mathrm{PN}}}{2}$ é o raio do círculo de diâmetro PN, logo $\pi \cdot \left(\frac{\overline{\mathrm{PN}}}{2}\right)^2$ é a área do círculo de diâmetro PN.

Por outro lado, sejam $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}$ o raio do semicírculo de diâmetro AB, $\frac{\overline{\mathrm{AN}}}{2}$ o raio do semicírculo de diâmetro AN e $\frac{\overline{\mathrm{NB}}}{2}$ o raio do semicírculo de diâmetro NB. Então,

$$\mathrm{S}_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \cdot \overline{\mathrm{AB}}^2,$$

$$S_{AN} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{AN}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \cdot \overline{AN}^2,$$

$$S_{NB} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{BN}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \cdot \overline{BN}^2,$$

onde, S_{AB}, S_{AN} e S_{NB} são as áreas dos semicírculos de diâmetros AB, AN e BN, respectivamente.

A área S, do arbelo, é dada por:

$$S = S_{AB} - S_{AN} - S_{BN} \Rightarrow$$

$$S = \frac{\pi}{8} \cdot \overline{AB}^2 - \frac{\pi}{8} \cdot \overline{AN}^2 - \frac{\pi}{8} \cdot \overline{BN}^2 \tag{4.4.5}$$

Portanto, de 4.4.4 e 4.4.5, obtemos,

$$S = \pi \cdot \left(\frac{\overline{PN}}{2}\right)^2,$$

ou seja, a área do arbelo é igual a área do círculo de diâmetro PN, como queríamos demonstrar. □

4.5 Lema 5

Lema 4.5. *Seja AB o diâmetro de um semicírculo, C qualquer ponto em AB, e CD perpendicular a ele, e sejam descritos semicírculos dentro do primeiro semicírculo e tendo AC e BC como diâmetros. Então, se dois círculos forem traçados tocando CD em lados diferentes e cada um tocando dos dois semicírculos, os círculos assim traçados serão congruentes.*

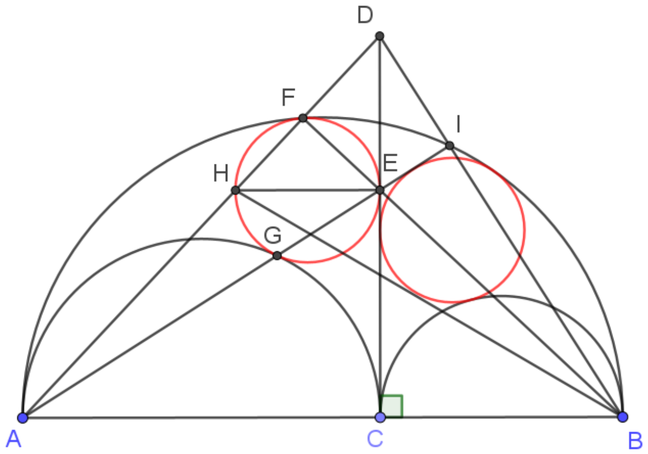


Figura 4.8: Lema 5 - I

Fonte: Autoria própria

Demonstração. Sejam E, F e G as interseções do círculo à esquerda do segmento CD com o segmento CD, o semicírculo de diâmetro AB e o semicírculo de diâmetro AC, respectivamente.

Tracemos EH, diâmetro do círculo à esquerda do segmento CD, paralelamente a AB. Tracemos também FH, AH, EF e BE. Como EH é paralelo à AB então, pelo lema 1, temos que os pontos A, F e H estão alinhados e os pontos, B, E e F também estão alinhados. Pela mesma razão estão alinhados os pontos A, G e E e os pontos C, G e H. Façamos o prolongamento de AF encontrar CD em D e o prolongamento de AE encontrar o semicírculo externo em I. Agora, tracemos BI e DI.

Como os ângulos AFB e ACD são retos, os segmentos CD e BF são as alturas relativas aos lados AB e AD, respectivamente, do triângulo ABD que se encontram no ponto E. Logo o ponto E é o ponto de encontro das três alturas deste triângulo e como, AI passa pelo ponto E, AI é a altura relativa ao lado BD do triângulo ABD. Portanto, AI é perpendicular ao segmento BD, logo B, I e D estão alinhados.

$\angle$AGC e $\angle$AIB são ângulos retos, então CH é paralelo para BD. Daí, pelo teorema de Tales, segue que,

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{HD}}}. \tag{4.5.1}$$

O triângulo ACD é semelhante ao triângulo HED, pois AC//HE.

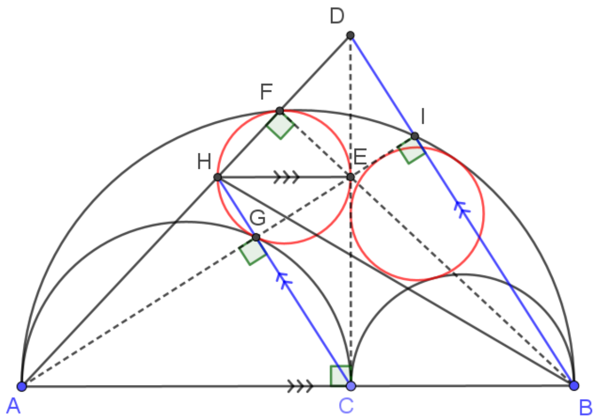


Figura 4.9: Lema 5 - II

Fonte: Autoria própria

Assim, temos,

$$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{DH}}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{HE}}}. \tag{4.5.2}$$

De 4.5.1 e 4.5.2, vem,

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{HE}}} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{AC}} \cdot \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{HE}}. \tag{4.5.3}$$

Procedendo da mesma maneira, se d for o diâmetro do outro círculo, podemos mostrar que:

$$\overline{\mathrm{AC}} \cdot \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AB}} \cdot \mathrm{d}, \tag{4.5.4}$$

daí, por 4.5.3 e 4.5.4, concluímos que:

$$\mathrm{d} = \overline{\mathrm{HE}}$$

e os círculos são congruentes. $\square$

4.6 Lema 6

Lema 4.6. *Seja AB o diâmetro de um semicírculo, dividido em C de modo que $\overline{AC} = \frac{3}{2}\overline{CB}$ (ou em qualquer proporção). Descreva dois semicírculos dentro do primeiro com AC e CB como diâmetros e suponha um círculo traçado tocando todos os três semicírculos. Se GH for o diâmetro deste círculo, podemos encontrar uma relação entre $\overline{GH}$ e $\overline{AB}$.*

Demonstração. Tome o diâmetro GH do círculo, paralelo à AB, e sejam D, E e F os pontos em que o círculo toca os semicírculos de diâmetros AB, AC e BC, respectivamente.

Trace os segmentos AG, GD, BH e DH. Pelo lema 1, os pontos A, G e D, estão alinhados e os pontos B, H e D também estão alinhados. Também pelo lema 1, estão alinhados os pontos A, E e H, os pontos B, F e G, os pontos C, E e G e os pontos C, F e H.

Seja I o ponto de encontro de AD com o semicírculo de diâmetro AC e K o ponto de encontro de BD com o semicírculo de diâmetro BC.

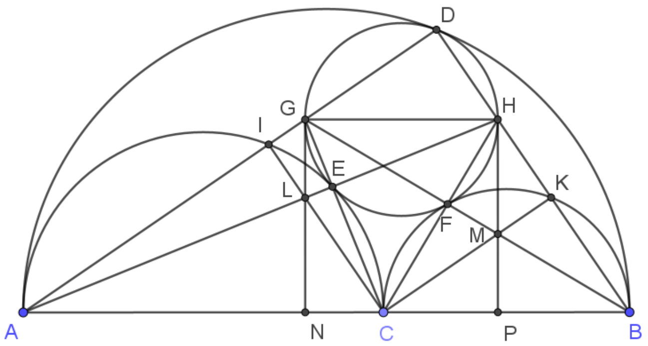


Figura 4.10: Lema 6 - I

Fonte: Autoria própria

Trace os segmentos CI e CK que encontram AE e BF em L e M, respectivamente e faça os prolongamentos de GL e HM encontrarem AB em N e P, respectivamente.

No triângulo AGC, temos que IC é perpendicular à AG e AE é perpendicular à CG, assim IC e AE são as respectivas alturas relativas aos lados AG e CG deste triângulo e se encontram no ponto L. Sabe-se que as três alturas de um triângulo se intersectam num mesmo ponto e, como GN passa por L, então GN é a altura relativa ao lado AC do triângulo AGC e, portanto, é perpendicular a AC. De maneira análoga, podemos verificar que HP é perpendicular a BC.

Observe que, como os ângulos em I, K e D são retos, então CK é paralelo a AD e IC pararelo a BD.

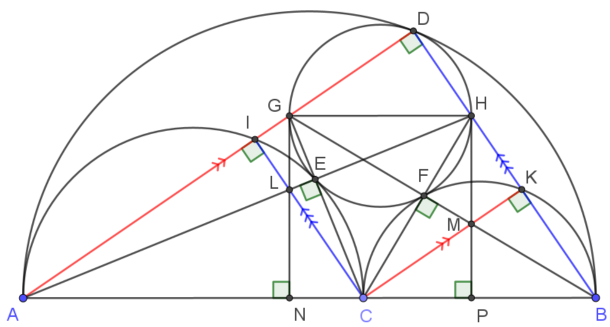


Figura 4.11: Lema 6 - II

Fonte: Autoria própria

Portanto, pelo Teorema de Tales, temos,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{HL}} \tag{4.6.1}$$

e

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{HL}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NP}}, \tag{4.6.2}$$

de 4.6.1 e 4.6.2, vem,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NP}}, \tag{4.6.3}$$

novamente, pelo Teorema de Tales, temos,

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{\overline{\mathrm{BM}}}{\overline{\mathrm{GM}}} \tag{4.6.4}$$

e

$$\frac{\overline{\mathrm{BM}}}{\overline{\mathrm{GM}}} = \frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{NP}}}, \tag{4.6.5}$$

de 4.6.4 e 4.6.5, obtemos,

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{NP}}}, \tag{4.6.6}$$

segue-se, das proporções 4.6.3 e 4.6.6, que,

$$\frac{\overline{\mathrm{AN}}}{\overline{\mathrm{NP}}} = \frac{\overline{\mathrm{NP}}}{\overline{\mathrm{BP}}}. \tag{4.6.7}$$

Por isso, dizemos que $\overline{\mathrm{AN}}, \overline{\mathrm{NP}}$ e $\overline{\mathrm{BP}}$ estão em proporção contínua. Agora, sendo $\overline{\mathrm{AC}} = \frac{3}{2}\overline{\mathrm{CB}}$, então substituindo em 4.6.3, segue que,

$$\frac{\frac{3}{2}\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{\overline{\mathrm{AN}}}{\overline{\mathrm{NP}}} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{AN}} = \frac{3}{2}\overline{\mathrm{NP}}, \tag{4.6.8}$$

mas, por 4.6.7 e 4.6.8, vem,

$$\frac{3}{2}\overline{\mathrm{NP}} = \frac{\overline{\mathrm{NP}}^2}{\overline{\mathrm{BP}}} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{NP}} = \frac{3}{2}\overline{\mathrm{BP}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{\mathrm{NP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{2}{3} = \frac{6}{4} \Rightarrow \tag{4.6.9}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{NP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{6}{4}, \tag{4.6.10}$$

substituindo 4.6.9 em 4.6.8, encontramos,

$$\overline{\mathrm{AN}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\overline{\mathrm{BP}} = \frac{9}{4}\overline{\mathrm{BP}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{\mathrm{AN}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{9}{4}. \tag{4.6.11}$$

Agora, veja que,

$$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = 1, \tag{4.6.12}$$

daí, somando-se as proporções 4.6.10 , 4.6.11 e 4.6.12 , obtém-se,

$$\frac{\overline{\mathrm{AN}}}{\overline{\mathrm{BP}}} + \frac{\overline{\mathrm{NP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} + \frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{9}{4} + \frac{6}{4} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{\mathrm{AN}} + \overline{\mathrm{NP}} + \overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{9+6+4}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{19}{4}, \tag{4.6.13}$$

pois, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AN}} + \overline{\mathrm{PN}} + \overline{\mathrm{BP}}$. Daí, dividindo-se 4.6.13 por 4.6.10, obtemos,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} : \frac{\overline{NP}}{\overline{BP}} = \frac{19}{4} : \frac{6}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} . \frac{\overline{BP}}{\overline{NP}} = \frac{19}{4} . \frac{4}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{NP}} = \frac{19}{6} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{NP}} = \frac{6}{19} \cdot \overline{\mathrm{AB}},$$

como, $\overline{\mathrm{GH}} = \overline{\mathrm{NP}}$, segue que,

$$\overline{\mathrm{GH}} = \frac{6}{19} \cdot \overline{\mathrm{AB}}.$$

Analogamente podemos encontrar $\overline{\mathrm{GH}}$ a partir de qualquer outra razão dada entre $\overline{\mathrm{AC}}$ e $\overline{\mathrm{BC}}$.

De fato, se $\overline{\mathrm{AC}} = \mathrm{k} \cdot \overline{\mathrm{BC}}$, onde $\mathrm{k} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, com a e b números inteiros positivos, então de 4.6.8, temos,

$$\overline{\mathrm{AN}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\overline{\mathrm{NP}}. \tag{4.6.14}$$

E da proporção 4.6.9, vem,

$$\overline{\mathrm{NP}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\overline{\mathrm{PB}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{NP}}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{ab}} \Rightarrow \tag{4.6.15}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{NP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{b}^2} \tag{4.6.16}$$

substituindo 4.6.15 em 4.6.14, encontramos,

$$\overline{\mathrm{AN}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \cdot \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\overline{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{AN}}} = \frac{b^2}{\mathrm{a}^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{\mathrm{AN}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{a^2}{\mathrm{b}^2}. \tag{4.6.17}$$

Agora, veja que,

$$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = 1, \tag{4.6.18}$$

daí, somando-se as proporções 4.6.16, 4.6.17 e 4.6.18, obtém-se,

$$\frac{\overline{\mathrm{AN}}}{\overline{\mathrm{BP}}} + \frac{\overline{\mathrm{NP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} + \frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{ab}{b^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{\mathrm{AN}} + \overline{\mathrm{NP}} + \overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{a^2 + ab + b^2}{b^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BP}}} = \frac{a^2 + ab + b^2}{b^2} \tag{4.6.19}$$

pois, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AN}} + \overline{\mathrm{NP}} + \overline{\mathrm{BP}}$, dividindo-se 4.6.19 por 4.6.16, obtemos,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} : \frac{\overline{NP}}{\overline{BP}} = \frac{a^2 + ab + b^2}{b^2} : \frac{ab}{b^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} . \frac{\overline{BP}}{\overline{NP}} = \frac{a^2 + ab + b^2}{b^2} . \frac{b^2}{ab} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{NP}} = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{NP}} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + \mathrm{b}^2} \cdot \overline{\mathrm{AB}},$$

ou seja,

$$\overline{\mathrm{GH}} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + \mathrm{b}^2} \cdot \overline{\mathrm{AB}}$$

□

4.7 Lema 7

Lema 4.7. *Se círculos são circunscritos e inscritos em um quadrado, o círculo circunscrito é o dobro do círculo inscrito.*

Demonstração. Sejam r_1 e r_2 as medidas dos raios dos círculos inscrito e circunscrito ao quadrado, respectivamente e sejam $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{AC}}$ as medidas do lado e da diagonal do quadrado, respectivamente. Desse modo, temos,

$$r_1 = \frac{\overline{AB}}{2}$$
$$r_2 = \frac{\overline{AC}}{2}$$

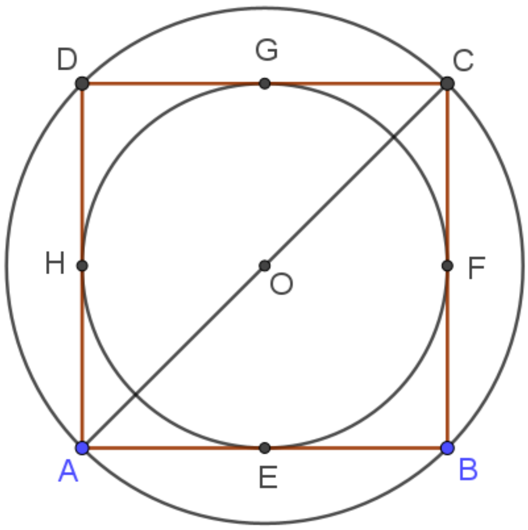


Figura 4.12: Lema 7

Fonte: Autoria própria

Sabe-se que a área S de um círculo de raio r é dada por:

$$S = \pi \cdot r^2.$$

Se S_1 e S_2 são as áreas dos círculos inscrito e circunscrito ao quadrado, respectivamente, então,

$$S_1 = \pi \cdot r_1^2 = \pi \cdot \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{\overline{AB}^2}{4}$$

$$S_2 = \pi \cdot r_2^2 = \pi \cdot \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{\overline{AC}^2}{4}$$

mas, como $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}} \cdot \sqrt{2}$, temos,

$$\mathrm{S}_2 = \pi \cdot \frac{(\overline{\mathrm{AB}} \cdot \sqrt{2})^2}{4} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\overline{\mathrm{AB}}^2}{4} = 2 \cdot \mathrm{S}_1,$$

como queríamos demonstrar. □

4.8 Lema 8

Lema 4.8. *Se AB for qualquer corda de uma circunferência cujo centro é O, e se AB for prolongada até C de modo que $\overline{BC}$ seja igual ao raio; além disso, se CO encontra o círculo em D e for prolongado para encontrar o círculo novamente em E, então o arco AE será igual a três vezes o arco BD.*

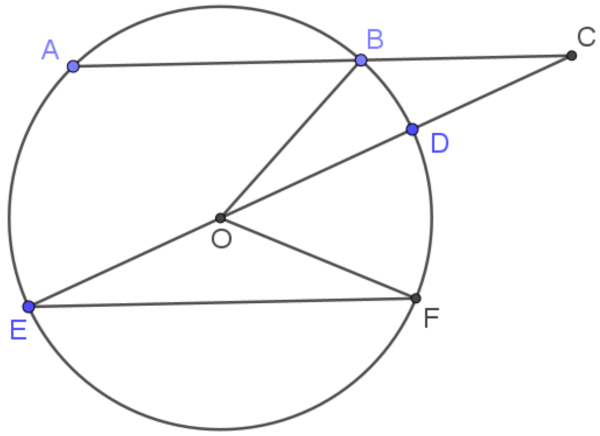


Figura 4.13: Lema 8 - I

Fonte: Autoria própria

Demonstração. Trace a corda EF paralela a AB, trace OB e OF. Faça o prolongamento de AB encontrar o prolongamento de OD no ponto C, de maneira que, BC seja igual ao raio do círculo, trace OE e OA. Pelo teorema do ângulo inscrito, temos,

$$\angle \mathrm{DOF} = 2\angle \mathrm{OEF} \tag{4.8.1}$$

e como AC e EF são paralelas, segue que,

$$\angle \mathrm{OEF} = \angle \mathrm{OCB}, \tag{4.8.2}$$

de 4.8.1 e 4.8.2, vem,

$$\angle \mathrm{DOF} = 2\angle \mathrm{OCB}, \tag{4.8.3}$$

o triângulo OCB é isósceles de base OC, logo,

$$\angle \mathrm{BOD} = \angle \mathrm{OCB} \tag{4.8.4}$$

substituindo 4.8.4 em4.8.3, obtemos,

$$\angle \mathrm{DOF} = 2\angle \mathrm{BOD}$$

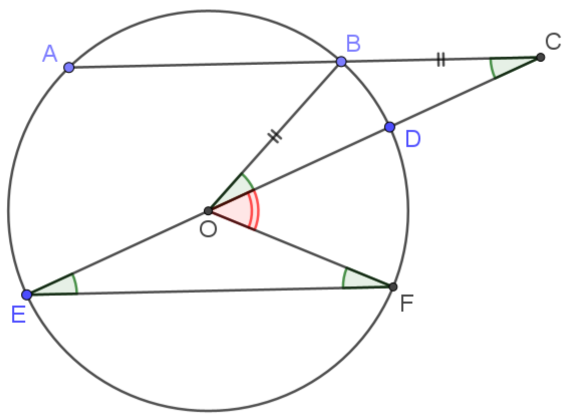


Figura 4.14: Lema 8 - II

Fonte: Autoria própria

Note que, $\angle \mathrm{DOF} + \angle \mathrm{BOD} = \angle \mathrm{BOF}$, daí,

$$\angle \mathrm{BOF} = 3\angle \mathrm{BOD},$$

ou seja,

$$\operatorname{arc} \mathrm{BF} = 3 \operatorname{arc} \mathrm{BD}.$$

Agora, pelo teorema do ângulo externo no triângulo BCO, temos,

$$\angle \text{ABO} + \angle \text{BOD} = \angle \text{BCO} \Rightarrow$$

$$\angle \text{ABO} = 2\angle \text{BOD}$$

pois, $\angle$BOD = $\angle$BCO. Como ABO é um triângulo isósceles de base AB, temos,

$$\angle \text{OAB} = \angle \text{ABO}$$

pelo teorema do ângulo externo no triângulo AOC, vem,

$$\angle \text{OAB} + \angle \text{BCO} = \angle \text{AOE} \Rightarrow$$

$$\angle \text{OAB} + \angle \text{BOD} = \angle \text{AOE}$$

Substituindo $\angle$OAB por $\angle$ABO = 2$\angle$BOD, obtemos,

$$\angle \text{AOE} = 2\angle \text{BOD} + \angle \text{BOD} = 3\angle \text{BOD}$$

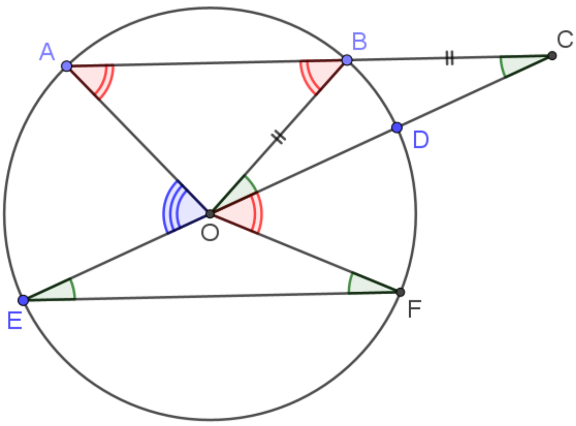


Figura 4.15: Lema 8 - III

Fonte: Autoria própria

Portanto,

$$\text{arc BF} = 3 \,\text{arc BD}$$

como queríamos mostrar. □

4.9 Lema 9

Lema 4.9. *Se em um círculo duas cordas AB e CD que não passam pelo centro se cruzam formando ângulos retos, então*

$$\operatorname{arc} \mathrm{AD} + \operatorname{arc} \mathrm{BC} = \operatorname{arc} \mathrm{AC} + \operatorname{arc} \mathrm{BD}.$$

Demonstração. Seja O o ponto de encontro das cordas AB e CD. Trace o diâmetro EF paralelo a AB tocando CD em H.

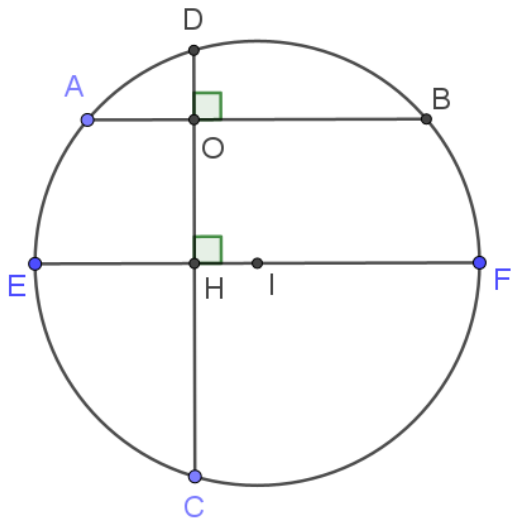


Figura 4.16: Lema 9 - I

Fonte: Autoria própria

Se I é o centro do círculo, então os triângulos HID e HIC são congruentes pelo caso cateto hipotenusa, pois, $\angle \mathrm{CHI} = \angle \mathrm{DHI} = 90^o$, HI é cateto comum e as hipotenusas DI e CI são ambas iguais ao raio do círculo. logo,

$$\overline{\mathrm{DH}} = \overline{\mathrm{CH}},$$

daí,

$$\operatorname{arc} \mathrm{ED} = \operatorname{arc} \mathrm{EC}.$$

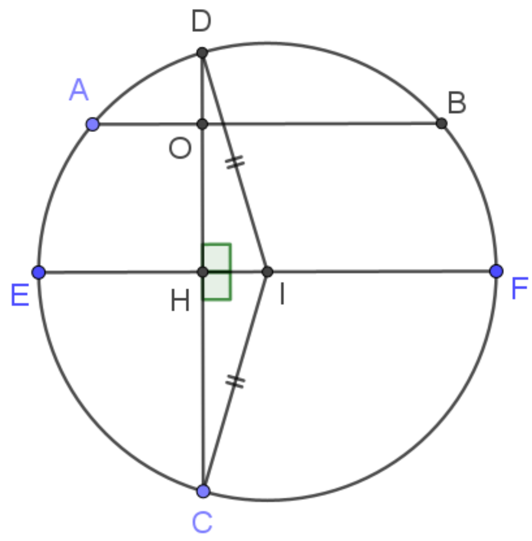


Figura 4.17: Lema 9 - II

Fonte: Autoria própria

O diâmetro EF divide o círculo nos semicírculos EDF e ECF . Como

$$\mathrm{arc\,ED} = \mathrm{arc\,AE} + \mathrm{arc\,AD} = \mathrm{arc\,CE}$$

e

$$\mathrm{arc\,CF} + \mathrm{arc\,CE} = 180^o,$$

então,

$$\mathrm{arc\,CF} + \mathrm{arc\,AE} + \mathrm{arc\,AD} = 180^o. \tag{4.9.1}$$

Agora note que, a corda AB é paralela ao diâmetro EF, por isso segue que,

$$\mathrm{arc\,AE} = \mathrm{arc\,BF} \tag{4.9.2}$$

e

$$\mathrm{arc\,BC} = \mathrm{arc\,CF} + \mathrm{arc\,BF}, \tag{4.9.3}$$

de 4.9.2 e 4.9.3 vem,

$$\mathrm{arc\,BC} = \mathrm{arc\,CF} + \mathrm{arc\,AE}. \tag{4.9.4}$$

Logo, substituindo 4.9.4 em 4.9.1, obtemos,

$$\text{arc}\,\text{AD} + \text{arc}\,\text{BC} = 180^o.$$

Portanto, somando-se a parte restante da circunferência, obtemos um arco de medida igual 180^o , ou seja,

$$\text{arc}\,\text{AC} + \text{arc}\,\text{BD} = 180^o.$$

Daí,

$$\text{arc}\,\text{AD} + \text{arc}\,\text{BC} = \text{arc}\,\text{AC} + \text{arc}\,\text{BD}.$$

□

4.10 Lema 10

Lema 4.10. *Suponha que TA e TB sejam duas tangentes a um círculo, enquanto TC o corta em dois pontos. Seja BD a corda que passa por B paralelo a TC, e seja a corda AD que encontra TC em E. Então, se EH for traçado perpendicularmente a BD, ela é a mediatriz de BD em H.*

Demonstração. Seja F a interseção de AB com TC. Trace BE e trace EH perpendicular à BD.

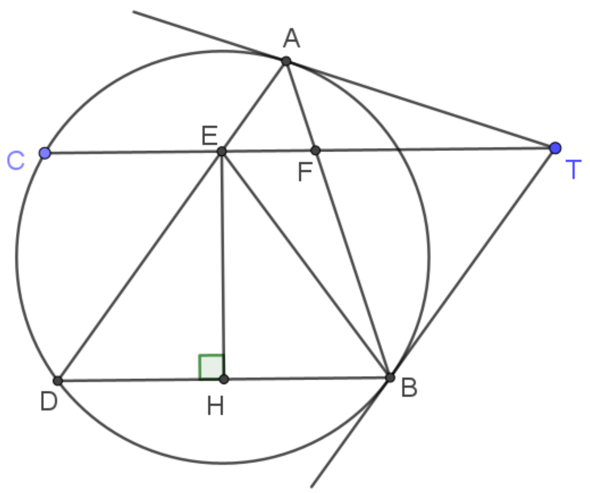


Figura 4.18: Lema 10 - I

Fonte: Autoria própria

Como TC e BD são paralelos, temos,

$$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{AET}, \tag{4.10.1}$$

pois, são ângulos correspondentes.

ADB e TAB são ângulos, respectivamente, inscrito e semi-inscrito em relação ao arco AB, logo,

$$\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{TAB}, \tag{4.10.2}$$

de 4.10.1 e 4.10.2, vem,

$$\angle \mathrm{TAB} = \angle \mathrm{TAF} = \angle \mathrm{AET}. \tag{4.10.3}$$

Mas, veja que, os triângulos AET e TAF são semelhantes pelo critério ângulo, ângulo, pois, por 4.10.3 $\angle \mathrm{AET} = \angle \mathrm{TAF}$ e o ângulo em T é comum aos dois triângulos. Logo,

$$\frac{\overline{\mathrm{FT}}}{\overline{\mathrm{AT}}} = \frac{\overline{\mathrm{AT}}}{\overline{\mathrm{ET}}} \Rightarrow \overline{\mathrm{ET}}.\overline{\mathrm{FT}} = \overline{\mathrm{AT}}^2,$$

como $\overline{\mathrm{AT}} = \overline{\mathrm{BT}}$, segue que,

$$\overline{\mathrm{ET}}.\overline{\mathrm{FT}} = \overline{\mathrm{BT}}^2 \Rightarrow \frac{\overline{\mathrm{ET}}}{\overline{\mathrm{BT}}} = \frac{\overline{\mathrm{BT}}}{\overline{\mathrm{FT}}},$$

além disso,

$$\angle \mathrm{ETB} = \angle \mathrm{FTB},$$

então, os triângulos EBT e BFT são semelhantes pelo caso lado, ângulo, lado (L. A. L.). Logo,

$$\angle \mathrm{TEB} = \angle \mathrm{TBF}. \tag{4.10.4}$$

O triângulo TAB é isósceles de base AB, Daí,

$$\angle TBA = \angle TBF = \angle TAB \tag{4.10.5}$$

das igualdades 4.10.4 e 4.10.5, vem,

$$\angle TBA = \angle TEB = \angle TAB, \tag{4.10.6}$$

mas,

$$\angle TEB = \angle EBD, \tag{4.10.7}$$

pois, são ângulos alternos internos e pelas igualdades 4.10.6 e 4.10.7, temos,

$$\angle EBD = \angle TAB. \tag{4.10.8}$$

E das igualdades 4.10.2 e 4.10.8, obtemos,

$$\angle EBD = \angle ADB = \angle TAB = \angle EDB.$$

Portanto,

$$\angle EBD = \angle EDB.$$

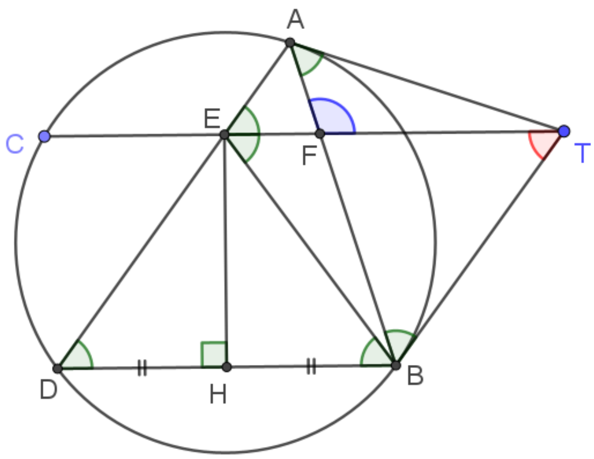


Figura 4.19: Lema 10 - II

Fonte: Autoria própria

Logo, o triângulo EBD é isósceles de base BD e a altura EH é também mediana relativa ao lado BD, daí H é ponto médio de BD, segue que, EH é a mediatriz de BD e $\overline{\mathrm{BH}} = \overline{\mathrm{HD}}$. □

4.11 Lema 11

Lema 4.11. *Se duas cordas AB e CD em um círculo se cruzam perpendicularmente em um ponto O, sendo que O não é o centro do círculo e, se d é o diâmetro deste círculo, então*

$$\overline{\mathrm{AO}}^2 + \overline{\mathrm{BO}}^2 + \overline{\mathrm{CO}}^2 + \overline{\mathrm{DO}}^2 = d^2.$$

Demonstração. Seja CE o diâmetro do círculo, trace os segmentos AC, BC, AD e BE,

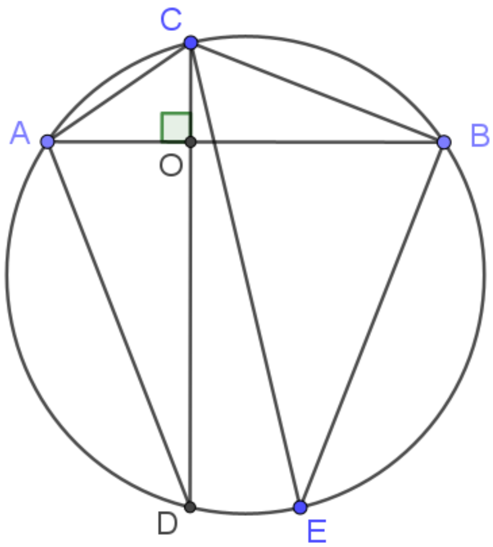


Figura 4.20: Lema 11 - I

Fonte: Autoria própria

$\angle$CAO $=$ $\angle$CEB, pois são ângulos com abertura para o mesmo arco, e $\angle$AOC $=$ $\angle$EBC $= 90^o$, daí, os triângulos AOC, EBC são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo e $\angle$ACO $=$ $\angle$ACD $=$ $\angle$BCE. Os arcos AD e BE estão subtendidos aos ângulos ACD e BCE, respectivamente, logo eles são iguais. Daí, os segmentos AD e BE também são iguais.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AOD, BOC, EBC, iremos obter, respectivamente,

$$\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2, \tag{4.11.1}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2, \tag{4.11.2}$$

$$\overline{CE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BC}^2, \tag{4.11.3}$$

substituindo 4.11.2 em 4.11.3, obtemos,

$$\overline{CE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 \tag{4.11.4}$$

$\overline{AD} = \overline{BE}$, então podemos reescrever a equação 4.11.1 da seguinte forma:

$$\overline{BE}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2. \tag{4.11.5}$$

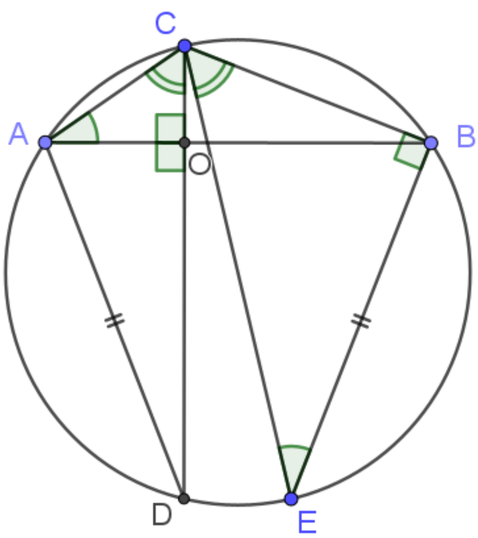


Figura 4.21: Lema 11 - II

Fonte: Autoria própria

Substituindo a igualdade 4.11.5 na igualdade 4.11.4, encontramos,

$$\overline{CE}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2,$$

como $\overline{\text{CE}} = d$, fica provado o resultado. □

4.12 Lema 12

Lema 4.12. *Se AB for o diâmetro de um semicírculo, e TP e TQ as tangentes a ele a partir de qualquer ponto T, e traçando-se AQ e BP eles se encontram em R, então TR é perpendicular a AB.*

Demonstração. AB é diâmetro do semicírculo, então $\angle\text{APB} = 90^o$. Daí,

$$\angle\text{PAB} + \angle\text{PBA} = 90^o.$$

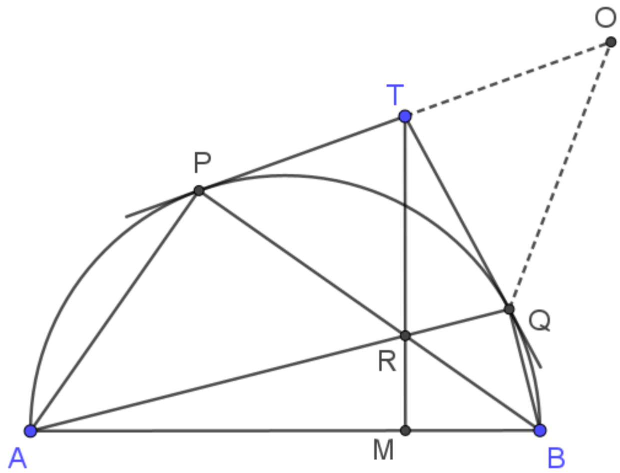


Figura 4.22: Lema 12 - I

Fonte: Autoria própria

Da mesma forma,

$$\angle\text{AQB} = 90^o \Rightarrow$$

$$\angle\text{PAB} + \angle\text{PBA} = \angle\text{AQB}. \tag{4.12.1}$$

Somando $\angle\text{RBQ}$ a ambos os membros da igualdade 4.12.1, obtemos,

$$\angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{PBA} + \angle \mathrm{RBQ} = \angle \mathrm{AQB} + \angle \mathrm{RBQ}, \tag{4.12.2}$$

mas, $\angle$PRQ é exterior no triângulo RBQ, então, pelo teorema do ângulo externo, temos,

$$\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{AQB} + \angle \mathrm{RBQ}. \tag{4.12.3}$$

Observe, também que

$$\angle \mathrm{ABQ} = \angle \mathrm{PBA} + \angle \mathrm{RBQ}, \tag{4.12.4}$$

substituindo 4.12.3 e 4.12.4 em 4.12.2, obtemos,

$$\angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{ABQ} = \angle \mathrm{PRQ} \tag{4.12.5}$$

PAB e TPR são ângulos, respectivamente, inscrito e semi-inscrito em relação ao arco PB, logo,

$$\angle \mathrm{PAB} = \angle \mathrm{TPR}. \tag{4.12.6}$$

Da mesma forma, QBA e TQR são ângulos, respectivamente, inscrito e semi-inscrito em relação ao arco AQ, logo,

$$\angle \mathrm{QBA} = \angle \mathrm{TQR}. \tag{4.12.7}$$

Somando-se membro a membro as igualdades 4.12.6 e 4.12.7, obtemos,

$$\angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{QBA} = \angle \mathrm{TPR} + \angle \mathrm{TQR}, \tag{4.12.8}$$

como $\angle$PRQ é ângulo exterior no triângulo APR, então,

$$\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{PAR} + \angle \mathrm{APR}. \tag{4.12.9}$$

Somando-se, as igualdades 4.12.3 e 4.12.9, obtemos,

$$2\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{PAR} + \angle \mathrm{APR} + \angle \mathrm{AQB} + \angle \mathrm{QBR}. \tag{4.12.10}$$

Agora note que,

$$\angle \mathrm{APR} = \angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{PBA} \tag{4.12.11}$$

e

$$\angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{QAB} + \angle \mathrm{QBA}, \tag{4.12.12}$$

substituindo 4.12.11 e 4.12.12 em 4.12.10, vem,

$$2\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{PAR} + \angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{PBA} + \angle \mathrm{QAB} + \angle \mathrm{QBA} + \angle \mathrm{QBR} \Rightarrow$$

$$2\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{QAB} + \angle \mathrm{PAR} + \angle \mathrm{QBA} + \angle \mathrm{QBR} + \angle \mathrm{PBA} \Rightarrow$$

$$2\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{QBA} + \angle \mathrm{QBA} \Rightarrow$$

$$2\angle \mathrm{PRQ} = 2\angle \mathrm{PAB} + 2\angle \mathrm{QBA} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{PRQ} = \angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{QBA}. \tag{4.12.13}$$

De 4.12.8 e 4.12.13, segue que,

$$\angle \mathrm{TPR} + \angle \mathrm{TQR} = \angle \mathrm{PAB} + \angle \mathrm{QBA} = \angle \mathrm{PRQ}. \tag{4.12.14}$$

Prolongando-se PT até o ponto O, de modo que,

$$\overline{\mathrm{PT}} = \overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{TO}},$$

formando, assim o triângulo TQO, que é isósceles de base OQ, então,

$$\angle\text{TOQ} = \angle\text{TQO}, \tag{4.12.15}$$

somando-se 4.12.14 e 4.12.15, obtem-se,

$$\angle\text{TOQ} + \angle\text{PRQ} = \angle\text{TPR} + \angle\text{TQO} + \angle\text{TQR} \Rightarrow \angle\text{TOQ} + \angle\text{PRQ} = \angle\text{TPR} + \angle\text{OQR}$$

pois, $\angle\text{TQO} + \angle\text{TQR} = \angle\text{OQR}$, como, $\angle\text{TPR} = \angle\text{OPR}$ e $\angle\text{TOQ} = \angle\text{POQ}$, temos,

$$\angle\text{POQ} + \angle\text{PRQ} = \angle\text{OPR} + \angle\text{OQR}.$$

Portanto, o quadrilátero OPRQ é tal que a soma de seus pares de ângulos opostos são iguais, logo OPRQ é um quadrilátero inscritível em um círculo e $\overline{\text{PT}} = \overline{\text{TQ}} = \overline{\text{TO}}$, logo cada um desses segmentos é raio do círculo e como TR também é raio do círculo, concluímos com isso que,

$$\overline{\text{PT}} = \overline{\text{TR}}.$$

Logo, TPR é um triângulo isósceles de base PR, daí,

$$\angle\text{TPR} = \angle\text{TRP}. \tag{4.12.16}$$

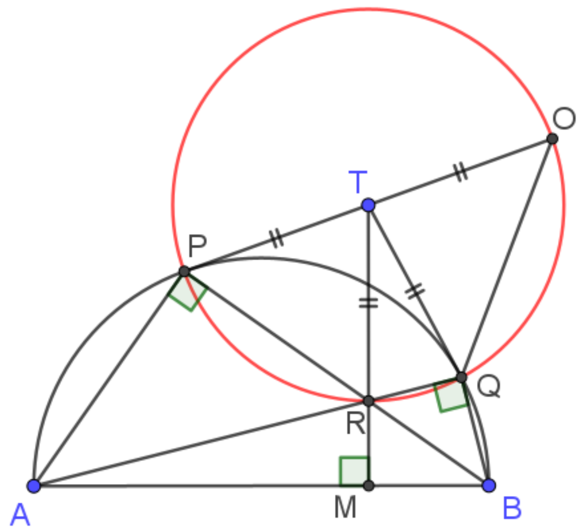


Figura 4.23: Lema 12 - II

Fonte: Autoria própria

Como $\angle PAB = \angle PAM$, com M sendo o ponto de intersecção do prolongamento do segmento TR com o diâmetro AB, então pela igualdade 4.12.6, temos,

$$\angle TPR = \angle PAM, \tag{4.12.17}$$

somando-se $\angle PRM$ aos dois lados da igualdade 4.12.17, obtem-se,

$$\angle TPR + \angle PRM = \angle PAM + \angle PRM. \tag{4.12.18}$$

Mas, $\angle TRP$ e $\angle PRM$ são ângulos suplementares, ou seja,

$$\angle TRP + \angle PRM = 180^o \tag{4.12.19}$$

e pelas igualdades 4.12.16 e 4.12.19, vem que,

$$\angle TPR + \angle PRM = 180^o, \tag{4.12.20}$$

segue-se, das igualdades 4.12.18 e 4.12.20 que,

$$\angle \mathrm{PAM} + \angle \mathrm{PRM} = 180^o.$$

Assim, no quadrilátero APRM é inscritível em um círculo. Portanto,

$$\angle \mathrm{APR} + \angle \mathrm{AMR} = 180^o$$

e, como $\angle \mathrm{APR} = \angle \mathrm{APB} = 90^o$, segue-se que $\angle \mathrm{AMR} = 90^o$, isso significa que TR é perpendicular a AB, como queríamos provar. □

4.13 Lema 13

Lema 4.13. *Se o diâmetro AB de um círculo encontra qualquer corda CD, não diâmetro, em E, e se AM e BN forem traçados perpendicularmente a CD, então* $\overline{CN} = \overline{DM}$.

Demonstração. Seja O o centro do círculo, Trace o segmento BM, Trace OH perpendicular a CD e prolongue-o para encontrar BM em K.

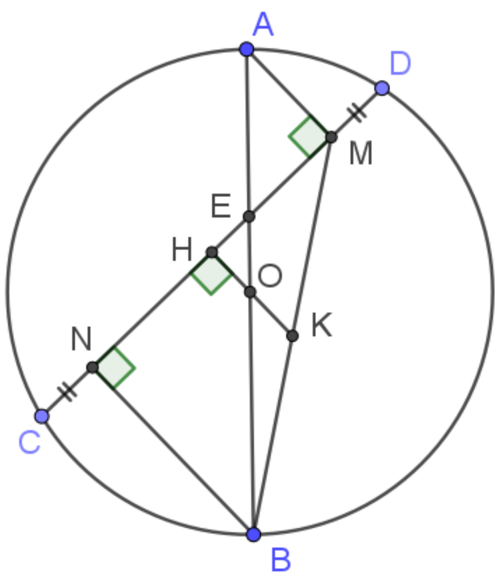


Figura 4.24: Lema 13

Fonte: Autoria própria

O diâmetro que contém HO corta a corda CD perpendicularmente, então,

$$\overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{HD}}$$

e, como NB, HK e AM são paralelos, pelo teorema de Tales, temos

$$\frac{\overline{\mathrm{BO}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{\overline{\mathrm{BK}}}{\overline{\mathrm{KM}}}.$$

Mas, $\overline{\mathrm{BO}} = \overline{\mathrm{OA}}$, daí, $\overline{\mathrm{BK}} = \overline{\mathrm{KM}}$.

Novamente, pelo teorema de Tales, temos,

$$\frac{\overline{\mathrm{BK}}}{\overline{\mathrm{KM}}} = \frac{\overline{\mathrm{HN}}}{\overline{\mathrm{HM}}} \Rightarrow \overline{\mathrm{HN}} = \overline{\mathrm{HM}}.$$

Assim, como $\overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{HD}}$, segue que, $\overline{\mathrm{CN}} = \overline{\mathrm{DM}}$. □

4.14 Lema 14

Lema 4.14. *Seja ACB um semicírculo com AB como diâmetro e O como centro, marcamos D e E a partir de A e B, respectivamente, de forma que $\overline{AD} = \overline{BE}$ ao longo de AB. Tomamos AD e BE como sendo diâmetros de semicírculos internos, e DE como sendo o diâmetro um semicírculo externo ao semicírculo ACB. Traçamos uma perpendicular por O que determinará nos semicírculos com diâmetros AB e DE os pontos C e F, respectivamente. Agora, tomando CF como diâmetro de um círculo, então a área entre os quatro semicírculos ("que Arquimedes chamou de 'Salinon", saleiro) será igual a área do círculo com diâmetro CF.*

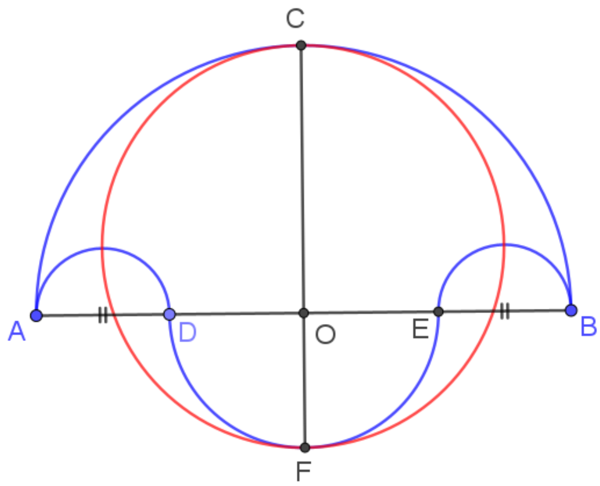


Figura 4.25: Lema 14

Fonte: Autoria própria

Demonstração. Temos que, O é o ponto médio de DE, ou seja, $\overline{\mathrm{DO}} = \overline{\mathrm{OE}}$,

$$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AO}} + \overline{\mathrm{OE}} \tag{4.14.1}$$

e

$$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AO}} - \overline{\mathrm{DO}} = \overline{\mathrm{AO}} - \overline{\mathrm{OE}} \tag{4.14.2}$$

Agora, iremos enunciar e demonstrar a proposição 10 do livro II dos Elementos de Euclides que será usada na continuação da demonstração do Lema 14.

Proposição 10 do livro II dos Elementos de Euclides

Em linguagem algébrica, a proposição 10 do livro II dos Elementos de Euclides afirma que:

Proposição: Seja um segmento de reta MN dividido ao meio no ponto P e seja NQ o prolongamento de MN até o ponto Q.

Figura 4.26: Proposição 10 - Livro II Elementos de Euclides

Fonte: Autoria própria

Se m é a medida da metade de MN e n é a medida de PQ, então:

$$(2m + n)^2 + n^2 = 2(m^2 + (m + n)^2))$$

e, fazendo $m + n = a \quad (*)$ e $m = b \quad (**)$ e, consequentemente, ao somarmos membro a membro $(*)$ com $(**)$, em seguida subtrairmos membro a membro $(**)$ de $(*)$ obteremos $2m + n = a + b$ e $n = a - b$, respectivamente. Daí essa relação de Euclides pode ser reescrita como:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Provaremos, agora essa proposição.

Demonstração:

Tracemos o segmento PS de medida m e perpendicular a MN. Tracemos também os segmentos MS e NS, formando assim os triângulos retângulos e isósceles MPS e NPS, respectivamente. Agora, vamos desenhar o retângulo PQRS, traçando os segmentos RS e QR paralelos a PQ e PS, respectivamente, em seguida façamos os prolongamentos de NS e QR se encontrarem no ponto T, já que os segmentos NS e QR não são paralelos pois, $\angle$NSR $< 90^o$ e, finalmente, tracemos o segmento MT.

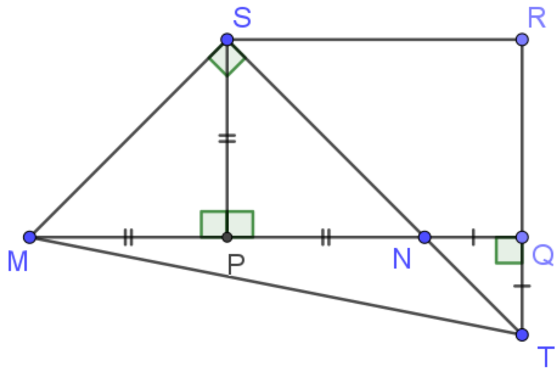


Figura 4.27: Proposição 10 - Livro II Elementos de Euclides - DEM.

Fonte: Autoria própria

Agora, como os triângulos MPS e NPS são triângulos retângulos e isósceles, temos que,

$$\angle \mathrm{MSP} = \angle \mathrm{PMS} = 45^o$$

$$\angle \mathrm{NSP} = \angle \mathrm{PNS} = 45^o$$

$$\angle \mathrm{MSP} + \angle \mathrm{NSP} = 90^o = \angle \mathrm{MSN} = \angle \mathrm{MST}.$$

Do fato que PQRS é um retângulo temos $\angle \mathrm{PQR} = \angle \mathrm{NQT} = \angle \mathrm{MQT} = 90^o$, portanto o triângulo MQT é retângulo em Q. Além disso, temos,

$$\angle \mathrm{PNS} = \angle \mathrm{QNT} = 45^o$$

daí,

$$\angle \mathrm{QNT} = \angle \mathrm{NTQ} = 45^o$$

e segue-se desse fato que NQT é um triângulo isósceles. Logo,

$$\overline{\mathrm{NQ}} = \overline{\mathrm{QT}} = \mathrm{n}.$$

Temos as seguintes medidas:

$$\overline{\mathrm{RS}} = \overline{\mathrm{PQ}} = \mathrm{m} + \mathrm{n},$$

$$\overline{\mathrm{PS}} = \overline{\mathrm{MP}} = \mathrm{m},$$

$$\overline{\mathrm{RT}} = \mathrm{m} + \mathrm{n}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MPS e em seguida no triângulo RST, obeteremos,

$$\overline{\mathrm{MS}}^2 = \overline{\mathrm{PS}}^2 + \overline{\mathrm{MP}}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{MS}}^2 = \mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2 = 2\mathrm{m}^2$$

e

$$\overline{\mathrm{ST}}^2 = \overline{\mathrm{RS}}^2 + \overline{\mathrm{RT}}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{ST}}^2 = (\mathrm{m} + \mathrm{n})^2 + (\mathrm{m} + \mathrm{n})^2 = 2(\mathrm{m} + \mathrm{n})^2.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, agora nos triângulos MST e MQT, encontramos

$$\overline{\mathrm{MT}}^2 = \overline{\mathrm{MS}}^2 + \overline{\mathrm{ST}}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{MT}}^2 = 2\mathrm{m}^2 + 2(\mathrm{m} + \mathrm{n})^2 \quad (I)$$

e

$$\overline{\mathrm{MT}}^2 = \overline{\mathrm{MQ}}^2 + \overline{\mathrm{QT}}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{MT}}^2 = (2\mathrm{m} + \mathrm{n})^2 + \mathrm{n}^2 \quad (II)$$

das igualdades (I) e (II), segue o resultado

$$(2\mathrm{m} + \mathrm{n})^2 + \mathrm{n}^2 = 2(\mathrm{m}^2 + (\mathrm{m} + \mathrm{n})^2)).$$

Seguindo com a demonstração do lema 14, aplicando a relação

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

que acabamos de provar, temos,

$$(\overline{AO} + \overline{OE})^2 + (\overline{AO} - \overline{OE})^2 = 2(\overline{AO}^2 + \overline{OE}^2) \tag{4.14.3}$$

substituindo as igualdades 4.14.1 e 4.14.2 na igualdade 4.14.3, vem,

$$(\overline{AE})^2 + (\overline{AD})^2 = 2(\overline{AO}^2 + \overline{OE}^2). \tag{4.14.4}$$

Note que,

$$\overline{AO} = \overline{CO}, \tag{4.14.5}$$

pois, são raios do semicírculo de diâmetro AB e

$$\overline{OF} = \overline{OE}, \tag{4.14.6}$$

pois, são raios do semicírculo de diâmetro DE. Somando 4.14.5 e 4.14.6, encontramos

$$\overline{AO} + \overline{OF} = \overline{CO} + \overline{OE} \Rightarrow$$

$$\overline{CF} = \overline{AO} + \overline{OF} = \overline{CO} + \overline{OE}. \tag{4.14.7}$$

Aplicando novamente a relação $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$, obtemos,

$$(\overline{AE} + \overline{AD})^2 + (\overline{AE} - \overline{AD})^2 = 2(\overline{AE}^2 + \overline{AD}^2), \tag{4.14.8}$$

mas, como $\overline{AD} = \overline{BE}$, temos,

$$\overline{AE} + \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{BE} = \overline{AB} \tag{4.14.9}$$

e

$$\overline{\text{AE}} - \overline{\text{AD}} = \overline{\text{DE}}. \tag{4.14.10}$$

Substituindo 4.14.9 e 4.14.10 em 4.14.8, obtemos,

$$(\overline{\text{AB}})^2 + (\overline{\text{DE}})^2 = 2(\overline{\text{AE}}^2 + \overline{\text{AD}}^2). \tag{4.14.11}$$

Substituindo, agora 4.14.4 em 4.14.11, temos,

$$(\overline{\text{AB}})^2 + (\overline{\text{DE}})^2 = 2.2(\overline{\text{AO}}^2 + \overline{\text{OE}}^2). \tag{4.14.12}$$

E substituindo a igualdade 4.14.7 na igualdade 4.14.3, encontramos,

$$(\overline{\text{CF}})^2 + (\overline{\text{AD}})^2 = 2(\overline{\text{AO}}^2 + \overline{\text{OE}}^2), \tag{4.14.13}$$

de 4.14.12 e 4.14.13, vem,

$$(\overline{\text{AB}})^2 + (\overline{\text{DE}})^2 = 2(\overline{\text{CF}}^2 + \overline{\text{AD}})^2 \Rightarrow$$

$$(\overline{\text{AB}})^2 + (\overline{\text{DE}})^2 = 2(\overline{\text{CF}}^2) + 2(\overline{\text{AD}})^2. \tag{4.14.14}$$

Como $\overline{\text{AD}} = \overline{\text{BE}}$, a igualdade 4.14.14 pode ser reescrita da seguinte forma,

$$(\overline{\text{AB}})^2 + (\overline{\text{DE}})^2 = 2(\overline{\text{CF}}^2) + (\overline{\text{AD}})^2 + (\overline{\text{BE}})^2 \Rightarrow$$

$$2(\overline{\text{CF}}^2) = (\overline{\text{AB}})^2 + (\overline{\text{DE}})^2 - (\overline{\text{AD}})^2 - (\overline{\text{BE}})^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot (\overline{\text{CF}}^2) = \frac{\pi}{8} \cdot (\overline{\text{AB}})^2 + \frac{\pi}{8} \cdot (\overline{\text{DE}})^2 - \frac{\pi}{8} \cdot (\overline{\text{AD}})^2 - \frac{\pi}{8} \cdot (\overline{\text{BE}})^2 \Rightarrow$$

$$\pi \cdot \left(\frac{\overline{\text{CF}}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{\text{AB}}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{\text{DE}}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{\text{AD}}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{\text{BE}}}{2}\right)^2. \tag{4.14.15}$$

Agora, devemos observar que a expressão do segundo membro da igualdade

4.14.15 é equivalente a área do "salinon" e $\pi \cdot \left(\frac{\overline{\mathrm{CF}}}{2}\right)^2$ é a área do círculo de diâmetro CF. Portanto, (área de salinon) = (área do círculo cujo diâmetro é CF). $\square$

4.15 Lema 15

Lema 4.15. *Seja AB o diâmetro de um círculo, AC o lado de um pentágono regular inscrito, D o ponto médio do arco AC. trace CD e prolongue-o para encontrar o prolongamento de BA em E , trace AC e BD que se intersectam em F e trace FM perpendicular a AB. Então $\overline{EM}$ = raio do círculo.*

Demonstração. Seja o ponto O o centro do círculo. Trace DA, DM, DO e CB. O arco AC mede $\frac{1}{5}$ de uma volta, pois AC é o lado de um pentágono regular inscrito em um círculo. Então,

$$\operatorname{arc}\mathrm{AC} = 72^o.$$

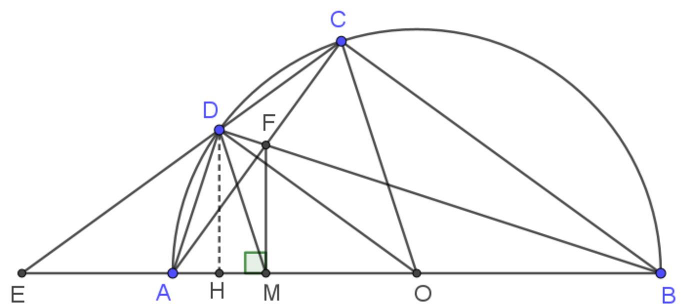


Figura 4.28: Lema 15 - I

Fonte: Autoria própria

Como $\angle$AOC está subtendido ao carco AC, segue que,

$$\angle \mathrm{AOC} = 72^o,$$

segue-se, pelo teorema do ângulo inscrito, que,

$$\angle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \angle \mathrm{AOC} = 36^o.$$

Como OD é a bissetriz do ângulo AOC, então,

$$\angle \mathrm{AOD} = \frac{1}{2} \cdot \angle \mathrm{AOC} = 36^o.$$

Pelo teorema do ângulo inscrito, temos também que,

$$\angle \mathrm{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \angle \mathrm{AOD} = 18^o,$$

e

$$\angle \mathrm{DBC} = \angle \mathrm{ABD} = 18^o,$$

pois, BD é bissetriz do ângulo ABC.

Agora veja que, pelo caso lado ângulo e ângulo oposto $\mathrm{L.A.A}_o$, os triângulos FMB e FCB são congruentes, pois, FB é lado comum, $\angle \mathrm{FBM} = \angle \mathrm{FBC} = 18^o$ e $\angle \mathrm{FMB} = \angle \mathrm{FCB} = 90^o$, daí,

$$\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{BC}}.$$

Além disso, os triângulos DMB e DCB são congruentes pelo caso lado ângulo lado (L. A. L.), pois, $\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{BC}}$, $\angle \mathrm{FBM} = \angle \mathrm{FBC} = 18^o$ e BD é lado comum, então,

$$\angle \mathrm{DMB} = \angle \mathrm{DCB}$$

Note que, $\angle \mathrm{ADB} = 90^o$, daí, $\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{ABD} = 90^o$, pois são ângulos complementares, como $\angle \mathrm{ABD} = 18^o$, então $\angle \mathrm{BAD} = 72^o$, mas, ABCD é um quadrilátero inscrito em um círculo, por isso,

$$\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{BCD} = 180^o.$$

E como, $\angle \mathrm{BAD} = 72^o$, então,

$$\angle \mathrm{BCD} = 108^o,$$

daí,

$$\angle \mathrm{BMD} = \angle \mathrm{BCD} = 108^o. \tag{4.15.1}$$

Mas, veja que,

$$\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{DAE} = 180^o = \angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{BCD} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{DAE} = \angle \mathrm{BCD} = 108^o \tag{4.15.2}$$

e

$$\angle \mathrm{BMD} + \angle \mathrm{AMD} = 180^o = \angle \mathrm{DAE} + \angle \mathrm{DAM} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{BMD} + \angle \mathrm{AMD} = \angle \mathrm{DAE} + \angle \mathrm{DAM}. \tag{4.15.3}$$

Substituindo as igualdades 4.15.1 e 4.15.2 em 4.15.3, obtemos,

$$\angle \mathrm{BCD} + \angle \mathrm{AMD} = \angle \mathrm{BCD} + \angle \mathrm{DAM} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{AMD} = \angle \mathrm{DAM}.$$

Portanto, o triângulo ADM é isósceles de base AM. Então,

$$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DM}}.$$

No triângulo DMO, temos $\angle \mathrm{DOM} = 36^o$ e $\angle \mathrm{DMO} = 108^o$. Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, daí,

$$\angle \mathrm{MDO} = 36^o,$$

segue que, DMO é um triângulo isósceles de base DO e

$$\overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{DM}}.$$

Novamente, como ABCD é um quadrilátero inscrito em um círculo, EDA e ADC são ângulos suplementares, logo,

$$\angle \mathrm{ADE} + \angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{ADC} + \angle \mathrm{ABC} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ABC},$$

segue-se que,

$$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{DOM} = \angle \mathrm{MDO}.$$

Assim, os triângulos ADE e MDO são congruentes pelo caso ângulo lado ângulo (A. L. A.) pois, $\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{MDO}$, $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DM}}$ e $\angle \mathrm{DAE} = \angle \mathrm{DMO}$.

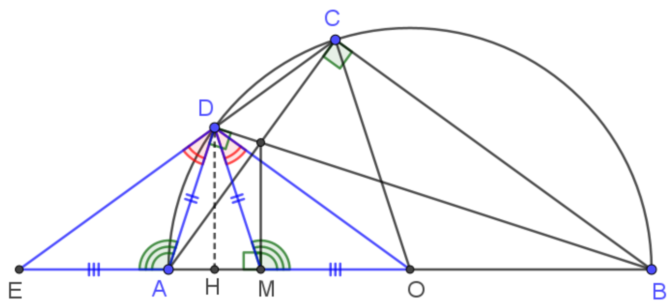


Figura 4.29: Lema 15 - II

Fonte: Autoria própria

Portanto,

$$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{MO}}.$$

Daí, somando $\overline{\mathrm{AM}}$ aos dois lados desta última igualdade, obtemos,

$$\overline{\mathrm{AE}} + \overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{MO}} + \overline{\mathrm{AM}} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{EM}} = \overline{\mathrm{AO}}$$

Ou seja, $\overline{\mathrm{EM}}$ é igual ao raio do círculo, como queríamos demonstrar. $\square$

5 GUIA DIDÁTICO

5.1 Introdução

Nesse capítulo faremos a elaboração de um guia didático com sugestão de atividades de construções geométricas no Geogebra, que é um software dinâmico que agrega Geometria, Álgebra e demais áreas da Matemática. Estas construções também podem ser feitas utilizando simplesmente instrumentos de desenho geométrico como a régua e o compasso.

A partir dessas construções podemos explorar as propriedades importantes que estão presentes nas figuras construídas, elaborando exercícios que podem ser utilizados pelos professores da educação básica.

5.2 Construção 1

O ARBELO

Mostraremos aqui o passo a passo para a construção do Arbelo, em seguida trazemos um exercício e sua solução relacionados a esta figura.

1. Trace uma reta r;

2. Marque os pontos A e B na reta r;

3. Marque o ponto C entre os pontos A e B;

4. Construa o semicírculo de diâmetro AB;

5. Construa os semicírculos de diâmetros AC e CB de maneira que estes estejam do mesmo lado do semicírculo de diâmetro AB em relação ao segmento AB;

6. Trace a reta s perpendicular à r pelo ponto C;

7. Marque o ponto D de intersecção da reta s com o semicírculo de diâmetro AB;

8. Marque o ponto médio de CD em E;

9. Construa o círculo de centro E e diâmetro CD.

A figura 5.1 mostra o resultado da Construção 1:

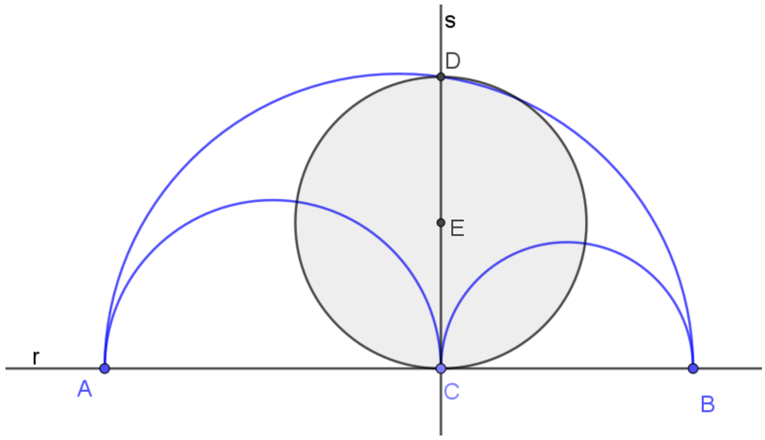


Figura 5.1: Resultado da construção 1

Fonte: Autoria própria

5.3 Exercício 5.1

(a) Calcule a área do círculo de diâmetro CD sabendo que $\overline{AC} = 4$ e $\overline{BC} = 3$.

(b) Calcule a área da região entre o semicírculo maior e os dois semicírculos menores a qual Arquimedes chamou de "Arbelo".

Solução:

(a) Temos que, CD é a altura relativa a hipotenusa do triângulo retângulo ADB. Assim, pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos,

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{CD}^2 = 4 \cdot 3.$$

Daí, o raio do círculo de diâmetro CD é igual a $\sqrt{3}$. Portanto, a área deste círculo é

$$A_{CD} = \pi \cdot (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

(b) A área do arbelo é dada por

$$S = S_{AB} - S_{AC} - S_{BC}.$$

Onde, S_{AB}, S_{AC}, S_{BC} são as áreas dos semicírculos de diâmetros AB, AC e CB, respectivamente.

Como $\overline{AB} = 7$, $\overline{AC} = 4$ e $\overline{BC} = 3$, temos

$$S = \frac{1}{2}\pi\left(\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$S = \frac{49\pi}{8} - \frac{16\pi}{8} - \frac{9\pi}{8} \Rightarrow$$

$$S = \frac{24\pi}{8} = 3\pi$$

O exercício 5.1 mostra que a área do círculo de diâmetro CD é igual a área do arbelo, com foi demostrado no lema 4.

5.4 Construção 2

O MÉTODO DA TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO

Mostraremos aqui o passo a passo para a construção da solução dada por Aquimedes para a trisecção de um ângulo, em seguida trazemos um exercício e sua solução relacionados a esta figura.

1. Construa um círculo com centro O;

2. Trace a reta r que passa pelo centro O desse círculo;

3. Marque os pontos A e D de intersecção da reta r com o círculo;

4. Marque um ponto B qualquer sobre o círculo, diferente de A e D;

5. Trace o segmento BO, formando assim o ângulo AOB;

6. Marque um ponto C sobre o círculo e trace a reta s que passa por C e intersecta a reta r;

7. Construa um círculo de centro C e raio CO;

8. Marque o ponto E de intersecção do círculo de centro C com a reta s;

9. Mova o ponto C até que o ponto E esteja sobre a reta r;

10. Podemos verificar que a medida do ângulo CED é igual a terça parte da

medida do ângulo AOB .

A figura 5.2 mostra o resultado da Construção 2:

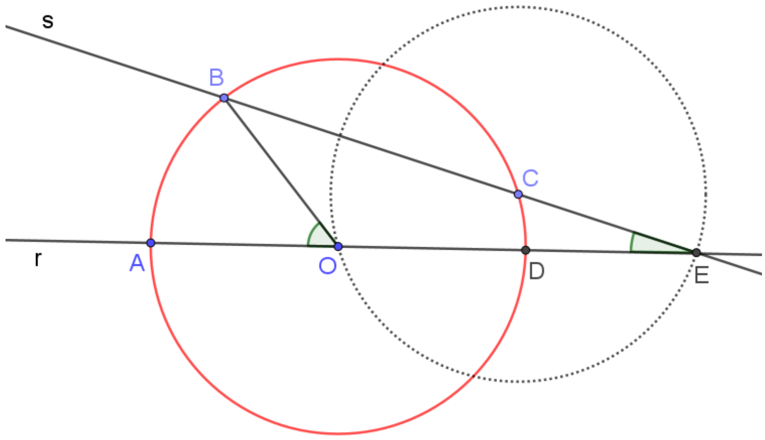


Figura 5.2: Resultado da construção 2

Fonte: Autoria própria

5.5 Exercício 5.2

(a) Sabendo que a medida do ângulo CED é a α medida do ângulo AOB

(b) Se a medida do ângulo AOB é $\frac{\pi}{3}$ radianos, qual a medida do ângulo CED?

Solução:

(a) Como $\overline{\mathrm{OD}} = \overline{\mathrm{EC}}$ temos OCE é um triângulo isósceles de base OE, logo

$$\angle \mathrm{EOC} = \angle \mathrm{OEC} = \alpha.$$

Note que, $\angle$OCB é ângulo externo no triângulo OCE, então

$$\angle \mathrm{OCB} = \angle \mathrm{EOC} + \angle \mathrm{OEC} = 2\alpha.$$

Mas, o triângulo BOC é isósceles de base BC.

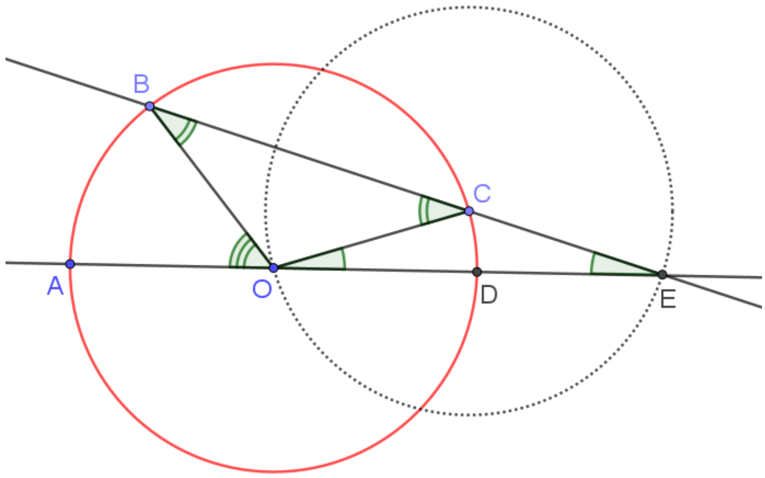


Figura 5.3: Solução do exercício 5.2 - a

Fonte: Autoria própria

Então,

$$\angle \mathrm{OCB} = \angle \mathrm{BOC} = 2\alpha.$$

E, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos,

$$\angle \mathrm{BOC} + \angle \mathrm{OCB} + \angle \mathrm{OBC} = 180^o \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{BOC} + 2\alpha + 2\alpha = 180^o \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{BOC} = 180^o - 2\alpha - 2\alpha = 180^o - 4\alpha. \quad (1)$$

Agora, note que,

$$\angle \mathrm{AOB} + \angle \mathrm{BOC} + \angle \mathrm{EOC} = 180^o \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{AOB} = 180^o - \angle \mathrm{BOC} - \angle \mathrm{EOC}. \quad (2)$$

Como $\angle \mathrm{EOC} = \alpha$ e de (1) e (2), obtemos

$$\angle \mathrm{AOB} = 180^o - (180^o - 4\alpha) \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{AOB} = 3\alpha$$

(b) Pelo item anterior, temos

$$\angle \mathrm{AOB} = 3\angle \mathrm{CEB} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{CEB} = \frac{1}{3}\angle \mathrm{AOB} \Rightarrow$$

$$\angle \mathrm{CEB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$$

Logo, $\angle \mathrm{CEB} = \frac{\pi}{9}$.

5.6 Construção 3

O SALINON

Aqui trazemos o passo a passo para a construção de mais uma figura interessante estudada por Aquimedes, o Salinon, em seguida trazemos um exercício e sua solução relacionados a esta figura.

1. Desenhe um segmento de reta AB;

2. Marque os pontos D e E sobre AB, de maneira que $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BE}}$;

3. Trace o semicírculo de diâmetro AB;

4. Trace o semicírculo de diâmetros AD e BE no mesmo lado do semicírculo de diâmetro AB em relação ao segmento AB;

5. Trace o semicírculo de diâmetro DE no lado oposto ao semicírculo de diâmetro AB em relação ao segmento AB;

6. Desenhe a mediatriz do segmento AB;

7. Marque as interseções da mediatriz do segmento AB com os semicírculos de diâmetros AB e DE nos pontos C e F respectivamente;

8. Construa o círculo com diâmetro CF;

A figura 5.4 mostra o resultado da Construção 3:

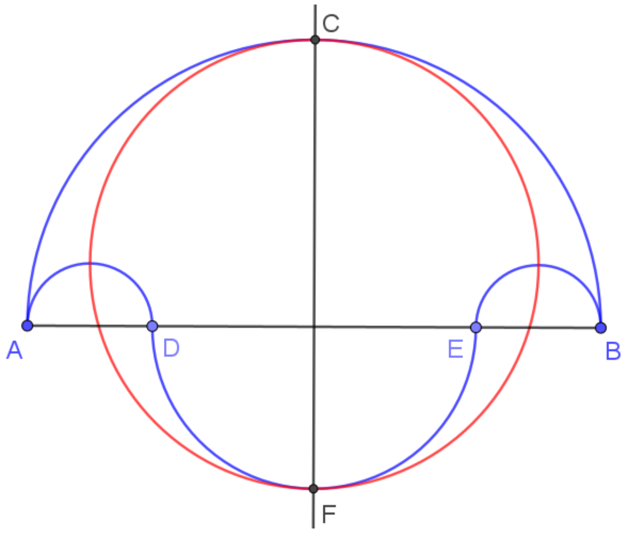


Figura 5.4: Resultado da construção 3

Fonte: Autoria própria

5.7 Exercício 5.3

(a) A região limitada pelos quatro semicírculos foi chamada por Arquimedes de "Salinon". Sabendo que $\overline{\mathrm{AB}} = 10$ e $\overline{\mathrm{AD}} = 3$, qual a área dessa região?

(b) Qual a medida do raio e da área do círculo de diâmetro CF?

Solução

(a) Se S é a área do "Salinon" então, temos

$$\mathrm{S} = \mathrm{S_{AB}} - \mathrm{S_{AD}} - \mathrm{S_{EB}} + \mathrm{S_{DE}}$$

Onde $\mathrm{S_{AB}}$, $\mathrm{S_{AD}}$, $\mathrm{S_{EB}}$ e $\mathrm{S_{DE}}$ são, respectivamente, as áreas dos semicírculos de diâmetros, AB, AD, EB e DE.

Como, $\overline{\mathrm{AB}} = 10$ e $\overline{\mathrm{AD}} = 3 = \overline{\mathrm{EB}}$, então $\overline{\mathrm{DE}} = 10 - 3 - 3 = 4$, logo

$$S = \frac{1}{2}\pi\left(\left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$S = \frac{49\pi}{4}$$

(b) Note que,

$$\overline{\text{CF}} = \frac{\overline{\text{AB}}}{2} + \frac{\overline{\text{DE}}}{2} = \frac{10}{2} + \frac{4}{2} = 7$$

logo, a área do círculo de diâmetro CF é dada por

$$S = \pi \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$S = \frac{49\pi}{4}$$

Pelo Exercício 5.3 podemos ver que a área do círculo de diâmetro CF é igual a área do Salinon, como foi mostrado no lema 14.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento deste trabalho tivemos a oportunidade de contemplar a engenhosidade das ideias de um dos matemáticos do passado, que deixou contribuições muito importantes para o desenvolvimento da Matemática e também de outras áreas como a Física e a Engenharia, por exemplo. As ideias de Arquimedes de Siracusa, certamente, estavam além de sua época, seus trabalhos são um legado extraordinário, base para o avanço das ciências, principalmente da Matemática.

O ensino de Matemática necessita de algo que desperte a curiosidade dos estudantes e torne o processo de ensino-aprendizagem mais dinâmico e prazeroso, facilitando assim a tarefa dos professores no ensino básico. Nessa perspectiva, este trabalho vem mostrar para os leitores que a História da Matemática é fascinante e ao explorá-la em suas aulas os professores conseguem ter um recurso que pode fazer com que os estudantes vejam a Matemática como uma disciplina empolgante e tenham mais interesse pelo estudo desta ciência.

As 15 proposições do livro dos lemas de Arquimedes se constituem em um conjunto de teoremas que em suas demonstrações há uma gama de conteúdos que fazem parte da Geometria Plana que compõe o currículo do ensino básico e, com a criatividade do professor, essas proposições podem vir a ser usadas como um recurso capaz de despertar o interesse e a curiosidade dos alunos.

O professor também pode explorar em suas aulas as figuras geométricas envolvidas nas proposições, através de construções com o uso de instrumentos de desenho geométrico e também com o uso de softwares computacionais como o Geogebra. São figuras fascinantes, cheias de propriedades intrigantes que podem aguçar nos jovens estudantes do ensino básico, cada vez mais, a vontade de aprender e se aprofundar no estudo da Matemática.

O material que elaboramos com o propósito de contribuir com o ensino de Matemática nos níveis fundamental e médio trata-se de uma proposta de atividades de construções geométricas com o uso do Geogebra ou com o uso de instrumentos de desenho geométrico. O guia didático que propomos no Capítulo 5 deste trabalho deve ser utilizado como um ponto de partida para que novas ideias possam surgir, sempre com propósito de melhorar a metodologia do ensino de Matemática, aliando a História da Matemática, o uso das tecnologias e o uso de materiais concretos no processo de ensino-aprendizagem.

Por fim, consideramos que ainda há muito a ser explorado sobre o tema desta pesquisa, esperamos que outros professores encontrem inspiração na leitura deste trabalho e abordem o tema segundo uma outra perspectiva.

REFERÊNCIAS

[1] AABOE, A. Episódios da história antiga da matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[2] BRASíL. ciências naturais. Parâmetros Curriculares Nacionais: Mec/Sef, v. 4, 1998.

[3] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. [S.l.]: Atual São Paulo, 2013.

[4] D'AMBROSIO, U. A história da matemáticatica: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

[5] GONçALVES, E. P. Conversas sobre iniciação à pesquisa científica. [S.l.]: Editora Alínea, 2001.

[6] HEATH, T. L. et al. The works of Archimedes. [S.l.]: Courier Corporation, 1981.

[7] MAGNAGHI, C. P.; ASSIS, A. K. O método de arquimedes: análise e tradução comentada. Montreal: Apeiron, 2019.

[8] MARTINS, R. A. Arquimedes e a coroa do rei: problemas históricos. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 17, n. 2, 2000.

[9] MOHNSAM, J. C. As contribuiõees de arquimedes para o cálculo de áreas. Rio Grande Rio Grande do Sul, 2014.

[10] NETO, A. C. M. Geometria. Rio de Janeiro: Sociedade Basileira de Matemática, 2013.

[11] SOARES, N. M. F. Sobre o conhecimento e a difusão das obras de arquimedes em portugal. Portugal, 2014.