Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

A Importância do Estudo de Cônicas e Quádricas no Ensino Médio

Guilherme Pereira de Souza

Juazeiro do Norte - CE

2024

A Importância do Estudo de Cônicas e Quádricas no Ensino Médio

Guilherme Pereira de Souza

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientadora

Profa. Ma. Valéria Gerônimo Pedrosa

Juazeiro do Norte - CE

2024

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Souza, Guilherme Pereira de

S729i A Importância do Estudo de Cônicas e Quádricas no Ensino Médio / Guilherme Pereira de Souza. Juazeiro do Norte-CE, 2024.

77p. il.

Trabalho de Conclusão. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof.ª Ma. Valéria Gerônimo Pedrosa

1.Matemática, 2.Geometria Analítica, 3.Cônicas, 4.Quádricas, 5.Ensino Médio; I.Título.

CDD: 510

A Importância do Estudo de Cônicas e Quádricas no Ensino Médio

Guilherme Pereira de Souza

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Aprovada em 27/06/2024

BANCA EXAMINADORA

Valéria Gerônimo Pedrosa

Profa. Ma. Valéria Gerônimo Pedrosa (Orientadora)

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Francisca Leidmar Josué Vieira

Profa. Dra. Francisca Leidmar Josué Vieira

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Jocel Faustino Norberto de Oliveira

Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Priscila Rodrigues de Alcantara Viana

Profa. Ma. Priscila Rodrigues de Alcântara Viana

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Este trabalho é dedicado à aqueles que mesmo em momentos difíceis, ainda conseguem parar para deslumbrar o quão belo, vasto e curioso é o universo.

Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho foi possível graças aos constantes incentivos da minha irmã Gracema Pereira de Souza da Silva, do meu sobrinho Abel de Souza da Silva e do meu cunhado Rafael Gomes da Silva, eles sempre reforçam para mim o quanto a família é importante.

Agradeço também a minha melhor amiga Gilderlânia Félix Agostinho, sempre presente na minha vida apesar da distância que os afazeres da vida adulta trouxeram, ainda a admiro muito. Ao meu amigo, João Paulo de Araújo Souza, que esteve presente comigo desde o início da graduação até o presente momento.

Por fim a todos os meus alunos que, em todas as aulas, me ensinam ao passo que aprendem.

Você continuará com esse sorriso falso?
Você está feliz? Não está mentindo?
Se fechar em seu próprio mundo não é uma forma inteligente de se viver.
Seguir a correnteza... é isso que você quer?
Isso não te faz uma mera máquina?
Desperte a alma ardente que dorme no interior de seu corpo gélido.

(*Wild Fang – Janne Da Arc*, 2005)

Resumo

A matemática é uma disciplina muitas vezes ensinada de forma abstrata e distante da realidade do educando. Cada área de estudo, dentro da Matemática, surgiu em um contexto histórico, por necessidade ou curiosidade de algum estudioso. Faz-se necessário ensiná-la dentro desse contexto histórico, apresentar sua evolução e suas aplicações, para assim dar significado a matemática. Uma das áreas que está em constante desenvolvimento é a geometria analítica, área que trabalha a geometria plana de um ponto de vista algébrico, isto é, o conceito de ponto, reta, circunferência, plano etc, são estudados através de equações algébricas. Um dos ramos de estudo da geometria analítica são as cônicas e quádricas, respectivamente, curvas e superfícies com conceitos e propriedades muito importantes com diversas aplicações práticas. A geometria analítica é trabalhada no ensino médio, porém ainda de uma forma, se tratando de cônicas e quádricas, pouco abrangente para sua importância. O presente trabalho busca destacar a importância das cônicas e quádricas, apresentando inicialmente a forma como o conteúdo é mencionado na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e em alguns livros do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) destacando assim a carência ou mesmo falta de discussão sobre o conteúdo. É comentado o contexto histórico do surgimento da cônicas, apresentada as definições, equações e propriedades, bem como suas aplicações. Por fim, há uma proposta de uma disciplina eletiva voltado para o estudo das cônicas e quádricas, destacando a relevância do conteúdo para o educando, podendo ser trabalho de forma mais aprofundada.

Palavras-chave: Matemática, Geometria analítica, cônicas, quádricas, ensino médio.

Abstract

Mathematics is a subject that is often taught in an abstract way, far removed from the reality of the student. Each area of study within mathematics arose in a historical context, out of the need or curiosity of some scholar. It is necessary to teach it within this historical context, to present its evolution and its applications, in order to give meaning to mathematics. One of the areas that is constantly developing is analytical geometry, which works on plane geometry from an algebraic point of view, i.e. the concept of point, line, circle, plane, etc., is studied through algebraic equations. One of the branches of study of analytic geometry are conics and quadrics, respectively, curves and surfaces with very important concepts and properties with many practical applications. Analytic geometry is taught in high school, but still in a way that, when it comes to conics and quadrics, is not very comprehensive in terms of its importance. This paper seeks to highlight the importance of conics and quadratics, initially presenting how the content is mentioned in the Common National Curriculum Base (BNCC) and in some books from the National Textbook Plan (PNLD), thus highlighting the lack or even lack of discussion about the content. The historical context of the emergence of conics is commented on, the definitions, equations and properties are presented, as well as their applications. Finally, there is a proposal for an elective subject focused on the study of conics and quadrics, highlighting the relevance of the content for students, which can be worked on in greater depth.

Keywords: Mathematics, analytical geometry, conics, quadrics, secondary education.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A geometria analítica é um ramo da Matemática de grande importância, tanto por suas aplicações práticas como pela álgebra empregada na resolução de problemas e sistematização de situações-problema, além da, segundo Santos (2008), vasta possibilidade de desenvolver no educando habilidades de abstração, compreensão de conceitos, estratégias matemáticas na interpretação de fenômenos e situações do dia a dia.

Com a implementação do Novo Ensino Médio (NEM), houve alterações na forma como ensino médio é discutido, tanto em relação aos livros didáticos utilizados quanto nos conteúdos que os compõe, no que se refere as cônicas e quádricas, os conteúdos de geometria analítica discutidos nos livros do NEM e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) são trabalhados de forma superficial, sem explorar o potencial que essa disciplina para os alunos. Tanto as cônicas quanto as quádricas têm diversas aplicações relevantes para serem exploradas no ensino médio, porém não recebem a devida atenção.

Analisando por esse ponto de vista, o presente trabalho busca apontar, no Capítulo 3, realizar uma breve análise de livros didáticos e da BNCC, e apontar a ausência das cônicas e quádricas no ensino médio, particularmente no contexto da geometria analítica. Através de uma pesquisa bibliográfica, o objetivo é destacar a relevância da disciplina, explorando o seu surgimento histórico mencionado no Capítulo 4, onde foi discutido a motivação por trás de seu desenvolvimento e alguns dos principais matemáticos envolvidos em seus estudos, bem como a descoberta das cônicas. No referencial teórico no Capítulo 5, há algumas definições e demonstrações matemáticas de equações e das propriedades refletoras, assim como algumas das equações das quádricas e suas representações. Por fim, há uma variedade de aplicações no Capítulo 6, justificadas pelas definições e demonstrações do Capítulo 5, destacando o quanto as cônicas e quádricas estão presentes no cotidiano não apenas dos estudantes, mas também da sociedade em geral.

Após examinar a forma como a geometria analítica é discutida no NEM, o contexto histórico do surgimento das cônicas e quádricas, a matemática apresentada e suas aplicações, chega-se a conclusão sobre a importância dos estudos de cônicas e quádricas no ensino médio. Fica claro o impacto da disciplina tanto do ponto de vista pedagógico quanto prático, e a necessidade de reavaliar futuras ementas da disciplina, incorporando assim, de forma mais abrangente, as cônicas e quádricas no ensino médio. Possibilitando novos estudos nessa área na qual a matemática se desenvolveu de forma tão consistente.

2 METODOLOGIA

Este trabalho é classificado como uma pesquisa bibliográfica, pois a pesquisa aqui realizada foi baseada, principalmente, em livros, artigos e trabalhos de conclusão de curso.

> A pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textosSegundo (SEVERINO, p. 145, 2017).

Segundo Prodanov (2013), com relação a natureza da pesquisa, pode ser classificada como básica, pois as informações e resultados, bem como as discussões podem ser utilizadas para pesquisas futuras, expandindo assim o que foi discutido no presente trabalho, além da aplicabilidade em sala de aula como forma de estimular a pesquisa dos educandos em trabalhos voltados para o tema. Esta pesquisa também se classifica como exploratória, pois objetiva "desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias",Gil (2002, p. 27) trazendo assim uma visão mais crítica, no sentido da necessidade do tema abordado.

A pesquisa referente ao Capítulo 3, foi feita a partir da análise de dois livros didáticos, da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e uma breve discussão sobre o (Novo ensino médio) NEM, utilizando o Anuário Brasileiro da Educação Básica 2021 para justificar sua implementação. Os capítulos Capítulo 4 e Capítulo 5 foram embasados, principalmente em livros, artigos e trabalhos de conclusão de curso, com o objetivo de corroborar com as ideias discutidas no Capítulo Capítulo 6, validando assim as aplicações discutidas.

3 A IMPORTÂNCIA DE ESTUDAR CÔNICAS E QUÁDRICAS NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo trataremos sobre a importância das cônicas e quádricas para o ensino médio, ressaltando inicialmente a relevância das aplicações matemáticas. Como as cônicas apareceram em alguns dos livros de matemática do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) do ano de 2022 e como são mencionadas na BNCC.

3.1 A importância das aplicações matemáticas

As cônicas e quádricas têm diversas aplicações no nosso cotidiano. A compreensão dessas aplicações confere relevância aos estudos realizados sobre elas. A matemática sempre foi uma forte aliada de outras áreas como a Física, Química, Biologia, entre outras. Do ponto de vista educacional, no contexto do ensino médio, é sempre interessante mencionar ou até demonstrar as aplicações do que se é estudado, como citado por Silva:

> A contextualização de conteúdos é muito relacionada com a "utilidade" da Matemática. Quando os conteúdos são contextualizáveis, tanto as professoras entrevistadas quanto os estudantes, veem mais sentido e significado ao aprender determinado conteúdo. Contextualizar faz com que os estudantes enxerguem situações cotidianas que podem ser matematizadas de forma mais evidente, assim, justificando determinado conteúdo. (SILVA, 2020, p. 85)

Apesar de suas diversas aplicações, frequentemente a matemática é trabalhada de maneira estritamente teórica, seguindo regras e algoritmos para resolver expressões específicas o que pode dificultar seu aprendizado e torná-la desconectada de outras disciplinas e do contexto em que o aluno está inserido.

> A Matemática, ao se tornar um conjunto de regras, por vezes sem sentido e aplicação, ficará, de fato, dissociada da vida e do cotidiano do aluno. Nesse caso, aprender logaritmos, razões trigonométricas e álgebra linear, por exemplo, será muito mais um transtorno que um acúmulo de conhecimentos que podem ser muito úteis ao longo da vida (NETO. J. 2016, p. 171).

Faz-se necessário sempre mostrar as aplicações práticas da Matemática que está sendo estudada, atribuindo-lhe significado. Enfatizar onde, como, quando e onde a matemática é usada, reforçando principalmente o contexto atual de sua aplicação. Embora a matemática deva ser trabalhada com rigor, seguindo regras, algoritmos de resolução e precisão, o problema surge na prática exagerada disso. Se a matemática não for apresentada em termos práticos do dia a dia, o resultado pode ser uma compreensão limitada, onde há compreensão de expressões, álgebra, geometria, porém sem conexões com a realidade e o cotidiano, o que, em última análise, os deixa com uma visão limitada da matemática.

3.2 Novo Ensino Médio e o PNLD 2021

O NEM (Novo Ensino Médio), é uma proposta de alteração no ensino médio, criada para melhorar a educação brasileira nessa fase em um contexto geral. Uma das justificativas foi de que o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) "nesta etapa de ensino estava praticamente estagnado: entre 2005 e 2017, variou muito pouco, de 3,4 para 3,8."(BRASIL, p.62, 2021).

Houve alteração nas componentes/disciplinas, na carga horária, e surgiram os "itinerários formativos" junto das chamadas "eletivas". O novo ensino médio também trouxe alterações nos livros didáticos, nas coleções do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). As duas coleções de livros didáticos selecionados de matemática em 2021, da Editora Moderna (que seriam utilizados por três anos seguidos) foram o *Conexões Matemática e suas Tecnologias* e o *Diálogo Matemática e suas Tecnologias*. Ambas as coleções tem 6 volumes, que foram divididos de forma a separar cada conteúdo específico que seria trabalhado, vejamos na Tabela 3.1 :

Na coleção Diálogo o estudos de geometria analítica é feito no volume 4, já

Tabela 3.1: Coleções do PNLD 2021 de matemática e seus volumes.

Coleção	Volume 1	Volume 2	Volume 3	Volume 4	Volume 5	Volume 6
Diálogo Matemática e suas Tecnologias	Grandezas, medidas e matemática financeira	Geometria plana	Geometria espacial	Geometria analítica, sistemas e transformações geométricas	Estatística e probabilidade	Funções e progressões
Conexões Matemática e suas Tecnologias	Grandezas, álgebra e algoritmo	Funções e aplicações	Estatística e probabilidade	Trigonometria	Geometria plana e espacial	Matrizes e geometria analítica

Fonte: Autoria própria

na coleção Conexões, no volume 6. Analisando o conteúdo dos dois livros, notamos que na coleção Diálogo há dois capítulos (Capítulos 11 e 12) destinados aos estudos das cônicas. O primeiro capítulo descreve as curvas, suas propriedades, equações e geometria, enquanto o segundo é apresenta uma aplicação da elipse, a qual descreve a trajetória do Cometa Halley. Já em Conexões, é feito o estudo do plano cartesiano, reta e circunferência, suas propriedades, equações e geometria, porém não há discussão das cônicas. Há três pontos para se destacar: o primeiro é que a forma como os conteúdos foram divididos por volumes traz uma quebra na sequência didática dos conteúdos, uma vez que o aluno estuda separadamente cada volume, em segundo lugar, há muitas outras aplicações importantes que poderiam ter sido mencionadas no volume 4 da coleção Diálogo, como os telescópios, os satélites, os faróis, as lanternas, as antenas. Por fim, a ausência do conteúdo de cônicas na coleção Conexões representa uma perda significativa, dada a relevância do tópico.

3.3 As cônicas e quádricas na BNCC

A BNCC é um documento muito relevante quando se trata da educação nacional, tanto no ensino fundamental, quanto no ensino médio. Como ela mesmo descreve:

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).(BRASIL, p. 7, 2018).

Discutindo especificamente o ensino médio, em matemática, a estrutura da BNCC é dividida em cinco competências e cada uma delas tem habilidades específicas, que o educando deve desenvolver no decorrer do ensino médio. Por exemplo, podemos destacar a Competência 5:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, p. 531, 2017).

A competência cinco têm, no total, onze habilidades, uma delas é "Investigar a deformação de ângulos e áreas provocadas pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital"(BRASIL, p. 541, 2018). Essa é a única menção a cônicas no documento e ainda assim, é longe do contexto da geometria analítica, onde se é estudado suas propriedades, álgebra, geometria e aplicações. No geral a BNCC faz menção às funções e equações, do primeiro e segundo grau, exponencias e logarítmicas, assim como a geometria analítica, porém a parte de cônicas é praticamente inexistente no texto da disciplina. Faz-se necessário a discussão de tal conteúdo, pois há grande relevância em suas aplicações, tanto no contexto histórico, quanto no contexto da matemática.

4 LEVANTAMENTO HISTÓRICO

Neste capítulo será apresentado um levantamento histórico em que houve um desenvolvimento dos estudos das cônicas e quádricas, de suas aplicações, geometria e álgebra, mencionando alguns matemáticos que fizeram parte desse desenvolvimento.

Os primeiros 300 anos da matemática grega foram marcados por algumas linhas de estudo da matemática, uma delas, segundo Eves (2011), ficou conhecida como Geometria Superior. Essa geometria foi desenvolvida em uma tentativa de solucionar alguns problemas matemáticos, como, por exemplo, a trissecção do ângulo (que consiste em dividir um ângulo em três ângulos iguais) ou mesmo a duplicação do cubo (construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado). As cônicas foram desenvolvidas a partir da geometria superior.

O estudo inicial das cônicas ocorreu em um período próximo ao estudo da geometria plana de Euclides e pode-se destacar três nomes responsáveis pelo seu desenvolvimento inicial. Além do próprio Euclides, tem-se Arquimedes e Apolônio.

> Durante o primeiro século aproximadamente da Idade Helenística três matemáticos se destacaram a grande distância dos demais da época, assim como da maior parte de seus predecessores e sucessores. Esses homens foram: Euclides, Arquimedes e Apolônio: é por causa da obra deles que o período de cerca de 300 a 200 A.C. foi denominado "Idade Áurea" da matemática grega. (BOYER. 1974, p. 104)

Euclides de Alexandria foi o responsável por descrever e sistematizar a geometria e suas demonstrações de uma maneira extremamente didática em sua coletânea de livros Os Elementos, que teve tanto reconhecimento que, segundo Olivero (2010), "talvez seja a mais importante obra da Matemática". Os Elementos, serviu como base para o estudo e desenvolvimento da geometria plana e espacial.

O geômetra Arquimedes que nasceu próximo à morte de Euclides no início do século II a.C. Arquimedes, segundo Roque (2015), usava métodos mecânicos nas soluções de problemas matemáticos e na descoberta de propriedades, que posteriormente foram demonstradas pelos métodos matemáticos. Ainda, segundo Roque, havia uma diversidade de métodos para resolução de problemas geométricos, ou seja, os geômetras estavam focados na resolução de problemas, não no desenvolvimento da matemática e da geometria (como Euclides). Até meados do século III, com os estudos de Apolônio de Perga (não se sabe exatamente quando ele viveu e morreu, sugere-se que foi de 262 a.C. a 190 a.C.), o formalismo e detalhismo das definições e demonstrações desenvolvidas por ele, fez o cenário anterior começar a mudar, ou seja, seu foco era no desenvolvimento dos estudos da matemática pura e não somente na resolução de problemas matemáticos.

Com a formalidade das definições e estudos mais aprofundados, Apolônio tornou-se um dos mais famosos geômetras da história. Segundo Boyer (1974), antes de Apolônio as cônicas eram consideradas geradas a partir de três cones retos distintos, posteriormente ele demonstrou matematicamente que as cônicas poderiam ser geradas a partir de um mesmo cone e que este nem precisaria ser reto, poderia ser oblíquo ou mesmo escaleno. Apolônio também foi o primeiro a mostrar que as propriedades das cônicas são as mesmas, independente se são geradas a partir de cones retos ou cones oblíquos. Além disso, trouxe o cone duplo para a obtenção das cônicas, assim surgindo a hipérbole da forma que é conhecida hoje, sendo uma dupla curva aberta. Apolônio descreveu essas e outras propriedades em uma coletânea de oito livros intitulada de As Cônicas, o oitavo livro foi perdido com o tempo. Em 1710, Edmund Halley conseguiu traduzir os sete livros do grego para latim e após isso, os livros foram traduzidos para diversos idiomas.

> Uma das preocupações de Apolônio era apresentar soluções por meio de cônicas para os problemas clássicos, como a duplicação do cubo e a trisseção do ângulo, a fim de eliminar as soluções por neuses (é um método de construção matemático, que usa o ajuste com uma régua graduada, o que não é considerado um procedimento euclidiano) e por curvas especiais usadas por Arquimedes e outros. A diversidade de métodos empregados na resolução de problemas geométricos até o século III a.E.C. mostra que, neste estágio do desenvolvimento da Matemática, o importante era resolver os problemas por qualquer técnica disponível. Este leitmotiv marca a tradição grega de resolução de problemas geométricos. Com Apolônio, este panorama começa a se transformar. (ROQUE. 2012, p. 106)

Segundo Boyer (1974), o Livro I do tratado As Cônicas descreve a motivação para a escrita dos livros e, posteriormente, junto aos livros II, III e IV, fez-se uma introdução elementar sobre cônicas. Os livros seguintes aprofundaram os estudos além do que já havia descrito por Euclides e outros matemáticos, expandindo a teoria para áreas mais especializadas.

Ainda segundo Boyer, a partir do cone pôde-se chegar a uma propriedade fundamental da elipse, por exemplo. Consideremos um cone ABC, como na Figura 4.1. Considerando um plano não paralelo à base do cone que o secciona em todas as suas geratrizes, chamemos essa secção de DEP, sendo P um ponto qualquer sobre essa secção. Prolonguemos $\overline{DE}$, até ir de encontro com a reta BC, interseccionando-a em F, consideremos ainda a intersecção GHP de um plano paralelo à base do cone que passa por P e uma intersecção de DEP com GHP, que chamaremos de PM. Notemos que os triângulos MHE e EFC são semelhantes pelo caso de semelhança AA (Ângulo, Ângulo), os ângulos $C\widehat{E}P$ e $M\widehat{E}H$ são O.P.V e $E\widehat{M}H$ e EMH e $E\widehat{F}C$ são alternos e internos. Como esses triângulos são semelhantes vale a relação:

$$\frac{\overline{MH}}{\overline{ME}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$$

É possível notar que os triângulos DGM e DBF são semelhantes pelo caso

AA, pois $\widehat{D}$ é comum $GM//BF$ temos $D\widehat{M}G = D\widehat{F}B$, assim vale também a relação $\frac{\overline{GM}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DF}}$. Como GHP é um círculo, podemos usar uma das relações métricas e assim temos que $\overline{PM}^2 = \overline{GM} \cdot \overline{MH}$, assim fazendo as devidas substituições, chegamos a

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{DM} \cdot \overline{BF}}{\overline{DF}} \cdot \frac{\overline{ME} \cdot \overline{CF}}{\overline{EF}}$$

se considerarmos $\overline{PM} = y$, $\overline{DM} = x$ e $\overline{DE} = 2a$, além de que $ME = DE - DM \Leftrightarrow ME = 2a - x$ podemos chegar

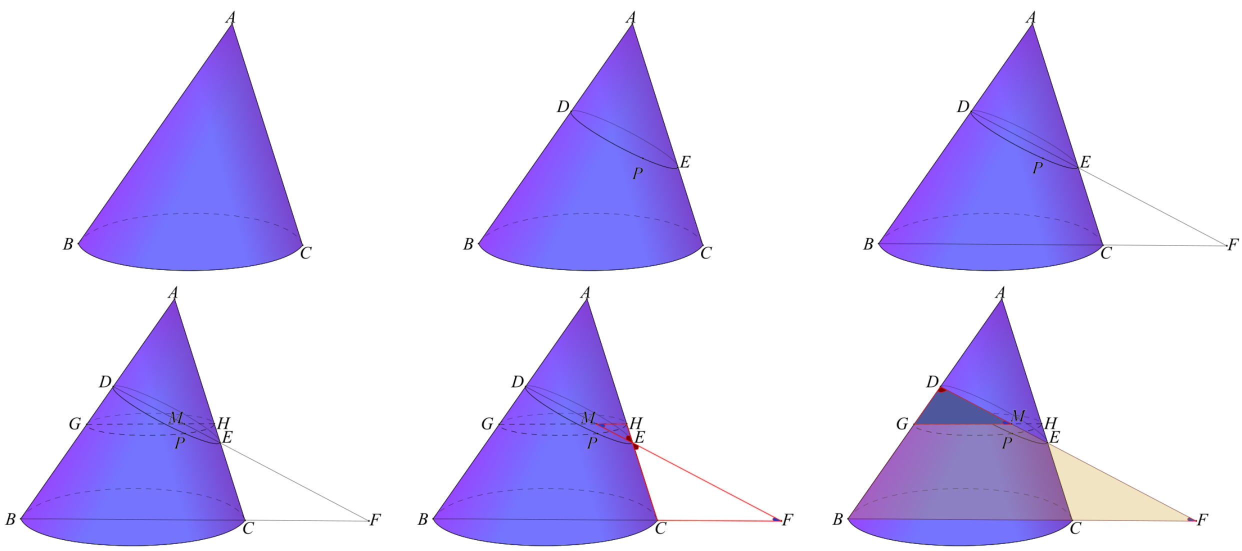
$$y^2 = \frac{x \cdot \overline{BF}}{\overline{DF}} \cdot (2a - x) \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}.$$

Fazendo $k = \frac{\overline{BF}}{\overline{DF}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$

$$y^2 = kx(2a - x).$$

Que é uma equação de elipse com vértice em D, *eixo maior* $2a$.

Figura 4.1: Demonstração da equação da elipse a partir do cone



Fonte: Elaborado pelo autor

5 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições e propriedades da geometria plana e geometria analítica, dando ênfase principalmente em cônicas e quádricas, além de algumas demonstrações que irão embasar as aplicações mencionadas no Capítulo 6. Também serão apresentadas algumas das equações das cônicas e quádricas, bem como suas propriedades refletoras. As demonstrações aqui apresentadas, são baseadas no trabalho de conclusão de curso de especialização em matemática intitulado "CÔNICAS PARA O ENSINO MÉDIO: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES", desenvolvido no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Cajazeiras.

As definições aqui mencionadas podem ser encontradas de forma geral na literatura matemática. No entanto, os livros utilizados para embasar tais definições foram os livros: *Geometria* do Antônio Caminha Muniz Neto e *Números e Funções Reais* do Elon Lages Lima, ambos da coleção do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). As propriedades reflexivas partem do princípio de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, de um feixe de luz sobre uma superfície refletora.

> Heron de Alexandria apresentou uma derivação da lei de reflexão, de que o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência, partindo do pressuposto de que o percurso do raio de luz de um objeto ao espelho e depois ao olho é o mais curto possível. Ele podia ter assumido sem distinção que o tempo é o mais curto possível, uma vez que o tempo que a luz leva para viajar uma distância qualquer é essa distância dividida pela velocidade da luz, e em reflexão a velocidade da luz não varia. (WEINBERG, 2015, pp. 475)

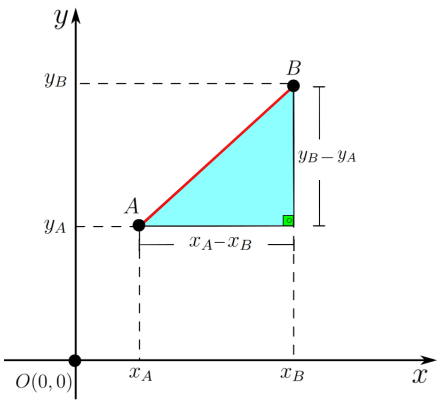
A partir dessas propriedades de refração da luz, pode-se demonstrar como a refração das cônicas e, consequentemente, das quádricas funcionam, bem como dar significado às suas aplicações.

5.1 Geometria analítica e Geometria euclidiana

É interessante definir algumas notações que serão utilizadas ao decorrer do capítulo, bem como algumas definições, como distância entre dois pontos, eixos, retas e semiplanos, referindo-se aqui aos elementos do plano cartesiano.

Definição 5.1. Dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, definimos $d(A, B)$, como a menor distância entre os pontos A e B, que é equivalente ao comprimento do segmento AB. Logo, utilizando o teorema de Pitágoras, pode-se definir distância entre dois pontos A e B, como $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Figura 5.1: Distância entre dois pontos



Fonte: (SOUZA, 2022)

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2017), podemos definir a equação cartesiana da reta r como na definição 5.2 a seguir.

Definição 5.2. As coordenadas dos pontos $P(x, y)$ da reta podem ser expressadas pela equação $r : ax + by = c$, que é chamada de equação cartesiana da reta r.

Podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ax + by = c &\Leftrightarrow by = c - ax \\ &\Leftrightarrow y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x \\ &\Leftrightarrow y = \underbrace{\frac{c}{b}}_{n} \underbrace{-\frac{a}{b}}_{m} \cdot x \end{aligned}$$

Obtendo:

$$y = mx + n. \tag{1}$$

A equação 1 é conhecida como equação reduzida da reta

Os casos em que a reta tem inclinação nula (paralela ao o *eixo* x) ou é vertical (paralela ao o *eixo* y) são, respectivamente:

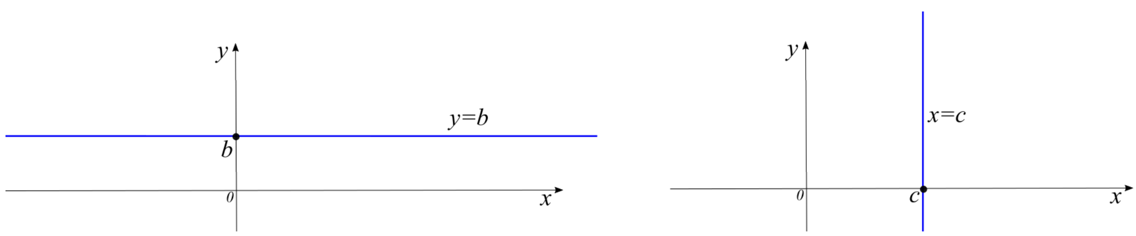
$$y = b. \tag{2}$$

e

$$x = c. \tag{3}$$

Com a, b, m, n e $c \in \mathbb{R}$.

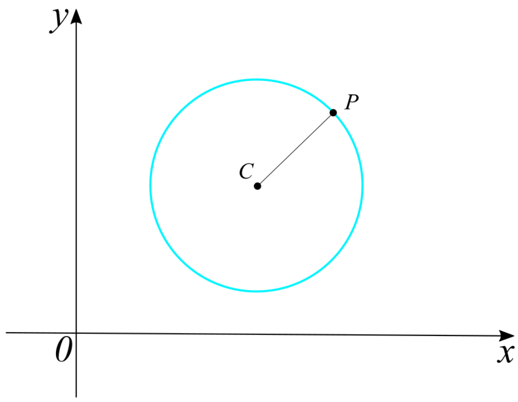
Figura 5.2: Representação das retas paralelas aos eixos - para $b > 0$ e $c > 0$



Fonte: Elaborado pelo autor

Definição 5.3. Dados um ponto C e uma constante real r, define-se circunferência como o lugar geométrico dos pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que $d(C, P) = r$.

Figura 5.3: Circunferência e seus elementos



Fonte: Elaborado pelo autor

A partir da definição 5.3, podemos determinar uma equação da circunferência com centro $C(a, b)$ e raio r.

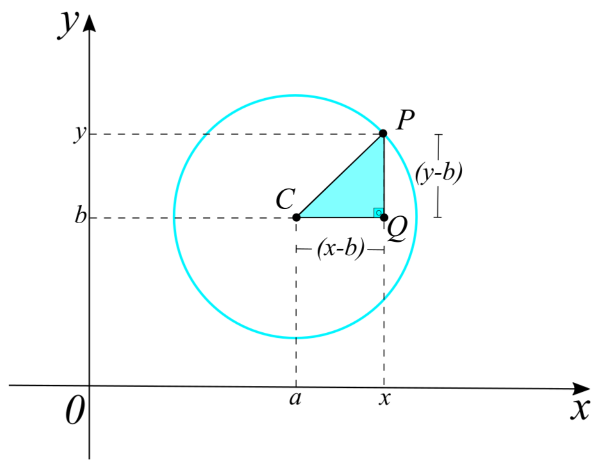
$$
\begin{aligned}
d(C,P) = r &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = (r)^2 \\
&\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, a equação da circunferência com centro $C(a, b)$ e raio r, é

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{4}$$

Outra maneira de obtermos a equação 4, seria aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo formado pelos pontos C, P e um ponto Q, tal que $C\hat{Q}P = 90°$, como podemos ver na Figura 5.4.

Figura 5.4: Circunferência e o triângulo CPQ



Fonte: Elaborado pelo autor

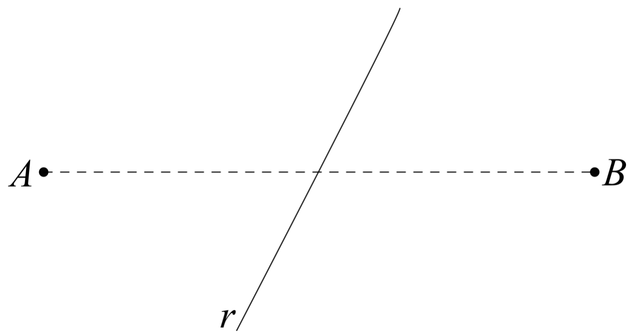
Consequentemente pelo teorema de Pitágoras no triângulo CPQ, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Semiplano também é um conceito importante da geometria plana (Neto, Antonio, 2013), segue a definição 5.4.

Definição 5.4. Dada uma reta r em um plano, esta o divide em dois semiplanos, delimitados por ela. Dados os pontos A e B, em semiplanos diferentes divididos por r, tem-se sempre que $\overline{AB} \cap r \neq \varnothing$.

Figura 5.5: Semiplanos determinados por uma reta



Fonte: Elaborado pelo autor

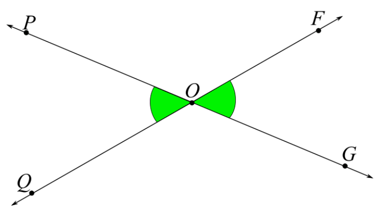
Duas retas concorrentes formam quatro ângulos. Segundo (Neto, Antonio, 2013), podemos relacionar os ângulos, dois a dois, opostos pelo vértice formado pela intersecção das duas retas de acordo com a definição 5.5.

Definição 5.5.

(**a**) Dois ângulos $P\hat{O}Q$ e $F\hat{O}G$, de mesmo vértice, são opostos pelos vértice (OPV), se as semirretas que os formam são opostas;

(**b**) Dois ângulos OPV são iguais.

Figura 5.6: Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: Elaborado pelo autor

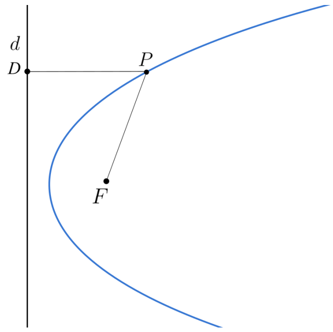
5.1.1 Cônicas

As cônicas são curvas planas munidas de algumas propriedades. Na sequência estão as definições e algumas das propriedades de parábola, elipse e hipérbole.

5.2 Parábola

Definição 5.6. Dados em um mesmo plano um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz) à qual F não pertence, parábola é a curva gerada pelo conjunto dos pontos P, tais que $d(P, d) = d(P, F)$, sendo $d(P, d) = DP$.

Figura 5.7: Representação de uma parábola, seu foco e sua diretriz

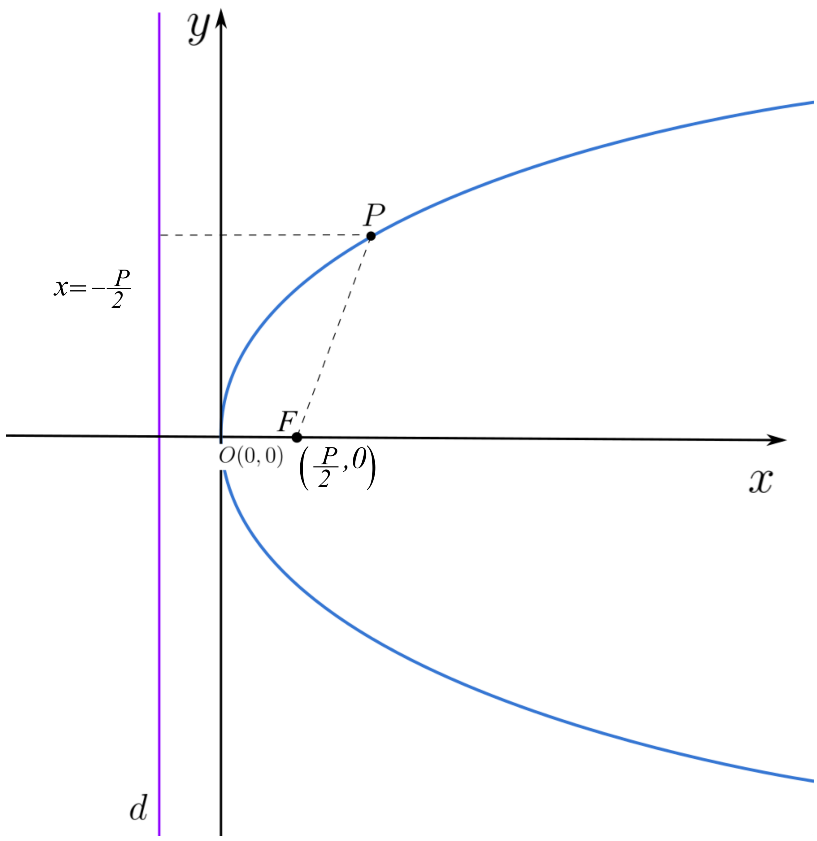


Fonte: (SOUZA, 2022)

5.2.1 Equação da Parábola

Vamos encontrar uma equação da parábola inserindo-a em um pano cartesiano. Consideremos $F(\frac{p}{2}, 0)$, $d(F, d) = p$ e $d : x = -\frac{p}{2}$ (é possível tomar $F(\frac{p}{4}, 0)$ e $d : x = -\frac{p}{4}$ ou mesmo $F(p, 0)$ e $d : x = -p$, não alteraria de forma significante a equação final, veremos mais a frente). Pela definição, tomando um ponto $P(x, y)$. De acordo com a Figura

Figura 5.8: Representação de uma parábola, seu foco e sua diretriz no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor

Temos que a parábola é o conjunto desses pontos tais que $d(P,d) = d(P,F)$, sendo assim, temos:

$$
\begin{aligned}
d(P,F) &= d(P,d)\\
\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+(y-0)^2} &= \sqrt{\left(-\frac{p}{2}-x\right)^2+(y-y)^2}\\
\sqrt{\frac{p^2}{4}-px+x^2+y^2} &= \sqrt{\frac{p^2}{4}+px+x^2+0^2}\\
\cancel{\frac{p^2}{4}}-px+\cancel{x^2}+y^2 &= \cancel{\frac{p^2}{4}}+px+\cancel{x^2}\\
-px+y^2 &= px.
\end{aligned}
$$

Chegando a equação da parábola:

$$y^2 = 2px \tag{5}$$

Caso tomássemos $F(\frac{p}{4},0)$ e $d: x = -\frac{p}{4}$ ou mesmo $F(p,0)$ e $d: x = -p$, teríamos, respectivamente as equações:

$$y = x^2 \tag{6}$$

e

$$y = 4x^2 \tag{7}$$

Caso tivéssemos $F(0,\frac{p}{2})$ e $d: y = -\frac{p}{2}$ a equação que encontraríamos seria

$$x^2 = 2py$$

que equivale a $y = \frac{x^2}{2p}$. Fazendo $a = \frac{1}{2p}$, teríamos:

$$y = ax^2 \tag{8}$$

Imaginemos agora, de uma forma menos conveniente, que o foco $F(r,q)$ da parábola está em um quadrante qualquer (porém, ainda com seu eixo de simetria na vertical), sendo sua diretriz $d : y = -s$ e o ponto genérico $P(x, y)$, seguindo a definição de parábola, novamente, teremos:

$$\begin{aligned}
d(P,F) = d(P,d) &\Leftrightarrow \sqrt{(r-x)^2 + (q-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (-s-y)^2} \\
&\Leftrightarrow r^2 - 2rx + x^2 + q^2 - 2qy + y^2 = 0^2 + s^2 + 2sy + y^2 \\
&\Leftrightarrow -2qy - 2sy = s^2 - r^2 + 2rx - x^2 - q^2 \\
&\Leftrightarrow y = \frac{(-x^2 + 2rx + s^2 - r^2 - q^2)}{(-2q - 2s)} \\
&\Leftrightarrow y = x^2 \frac{1}{(2q+2s)} + x \frac{2r}{(-2q-2s)} + \frac{s^2 - r^2 - q^2}{(-2q-2s)}
\end{aligned}$$

Por fim, fazendo $a = \frac{1}{(2q+2s)}$, $b = \frac{2r}{(-2q-2s)}$ e $c = \frac{s^2-r^2-q^2}{(-2q-2s)}$

Chegamos à equação:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{9}$$

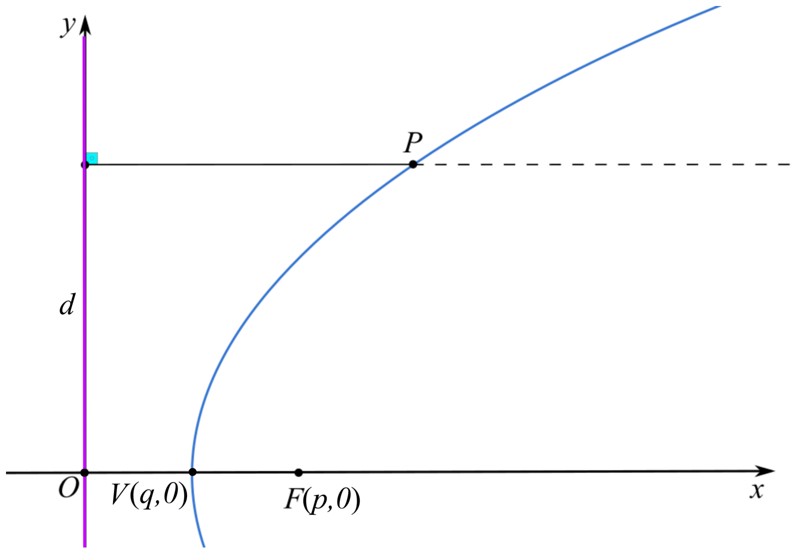
Que é a função quadrática na variável x cujo gráfico no plano cartesiano representa uma parábola.

Destacar as propriedades e definições do que está sendo estudado é essencial para os alunos poderem dar significado ao que estão aprendendo. As equações das cônicas surgem a partir das definições específicas de cada uma delas.

5.2.2 Propriedade reflexiva da parábola

Consideremos uma parábola com eixo de simetria sobre o *eixo* x_+, foco $F(p, 0)$, vértice $V(q, 0)$ tal que $p, q \in \mathbb{R}$ e $0 < q < p$, diretriz d sobre o *eixo* y e um ponto genérico $P(x, y)$, tal que P esteja na parábola. Consideremos ainda o ponto D, pé da perpendicular à d que passa por P. Como na figura 5.9

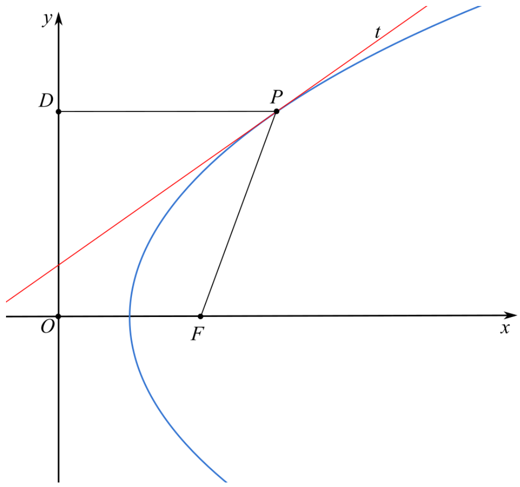
Figura 5.9: Representação de uma parábola, seu foco e sua diretriz - demonstração da propriedade reflexiva



Fonte: Elaborado pelo autor

Para prosseguir com a demonstração é necessário provar que a bissetriz t do ângulo $D\hat{P}F$, no triângulo DPF, também é a reta tangente à parábola no ponto P.

Figura 5.10: Representação de um ponto P e da reta t - demonstração da propriedade reflexiva

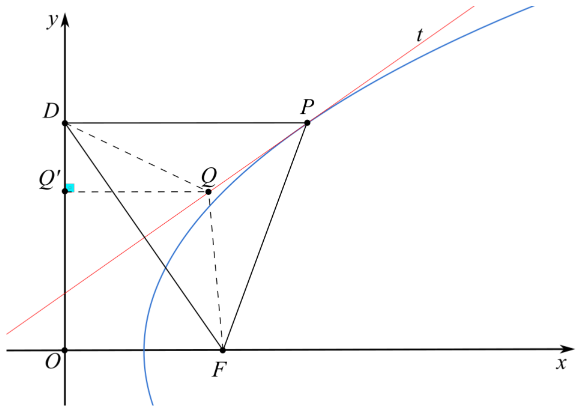


Fonte: Elaborado pelo autor

Queremos provar que P é o único ponto de t que pertence à parábola, pois assim t será tangente à parábola. Para isso vamos tomar um ponto Q diferente de P pertencente à t.

Note que o triângulo DPF é isósceles, pois $d(D,P) = d(P,F)$, logo t também é mediatriz do lado DF, pois é bissetriz de $D\hat{P}F$. Tomemos um ponto Q em t, diferente de P, e a projeção ortogonal Q' de Q, sobre d, logo temos que $QQ' = d(Q,d)$. Note que o triângulo DQF é isósceles, pois Q pertence a mediatriz t, isto é $d(D,Q) = d(Q,F)$, porém observe que $QQ' < DQ$, pois DQ é hipotenusa do triângulo DQQ', consequentemente $QQ' < QF$, logo Q não pertence à parábola, pois seria necessário que $QQ' = QF$. Então temos que P é o único ponto de t que pertence à parábola, logo P é tangente à ela.

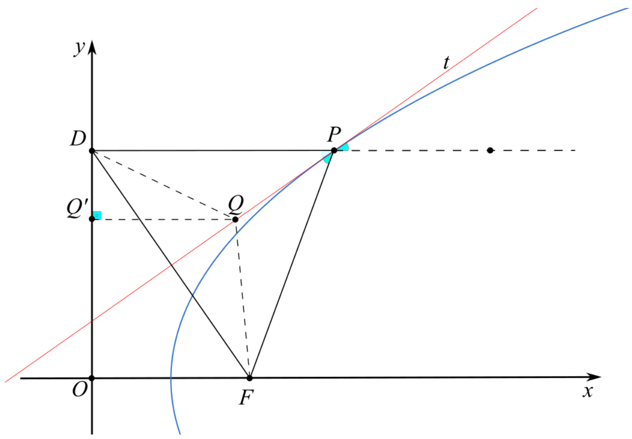
Figura 5.11: Representação do triângulo DPF e do ponto P - demonstração da propriedade reflexiva



Fonte: Elaborado pelo autor

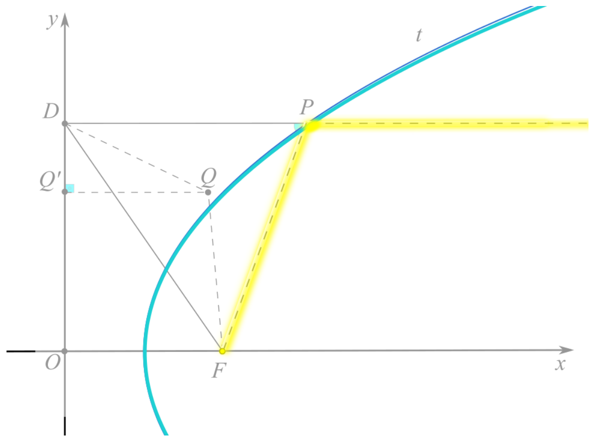
Consideremos $\overrightarrow{DP}$, $D\hat{P}Q$ e o vértice P, repare que seu ângulo oposto á $D\hat{P}Q$ é oposto ao vértice P, são iguais. Se considerarmos uma fonte de luz em F e que a Parábola tem uma superfície interna refletora temos que o ângulo de incidência $Q\hat{P}F$, é igual ao ângulo de reflexão.

Figura 5.12: Representação do feixe da fonte de luz em F sobre a parábola - demonstração da propriedade reflexiva



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5.13: Representação de um ponto P e da reta t - demonstração da propriedade reflexiva

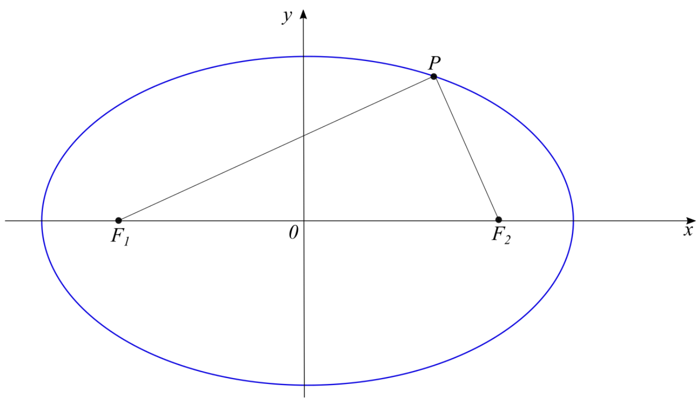


Fonte: Elaborado pelo autor

5.3 Elipse

Definição 5.7. Dados, em um mesmo plano, dois pontos distintos F_1 e F_2 (focos da elipse), tal que $d(F_1, F_2) = 2c$, elipse é uma curva plana formada pelo conjunto dos pontos P, tais que $d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2a$, com $a, c \in \mathbb{R}$. Como na figura 5.14

Figura 5.14: Representação da elipse

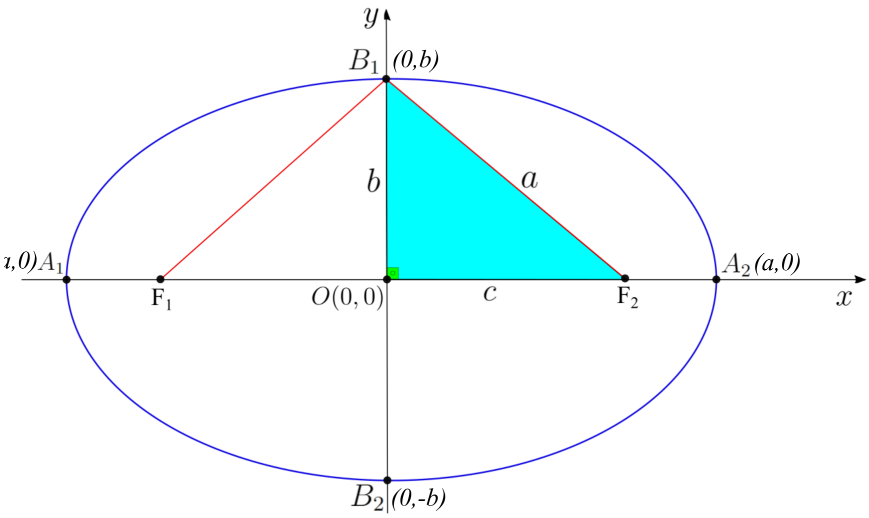


Fonte: (SOUZA, 2022)

5.3.1 Equação da Elipse

Para determinar uma equação da elipse, vamos considerar os focos, $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, tal que $d(F_1, F_2) = 2c$ e um ponto $P(x, y)$, tal que $d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2a$, consideremos também os pontos $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, sendo B_1 e B_2 vértices do eixo menor e A_1 e A_2 vértices do eixo maior. Note que $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 5.15: Representação da elipse e seus vértices



Fonte: (SOUZA, 2022)

Partindo da definição 5.7, temos que:

$$
\begin{aligned}
d(F_1,P)+d(P,F_2)=2a \Leftrightarrow\ & \sqrt{(-c-x)^2+(0-y)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(-c-x)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
\Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{(-c-x)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\\
\Leftrightarrow\ & c^2+2cx+x^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+c^2-2cx+x^2+y^2\\
\Leftrightarrow\ & -4a^2+4cx=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
\Leftrightarrow\ & \left(-a^2+cx\right)^2=\left(-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\\
\Leftrightarrow\ & a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2((x-c)^2+y^2)\\
\Leftrightarrow\ & a^4-a^2c^2=a^2x^2+a^2c^2-c^2x^2+a^2y^2\\
\Leftrightarrow\ & a^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}=x^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}+a^2y^2\\
\Leftrightarrow\ & a^2b^2=x^2b^2+a^2y^2\\
\Leftrightarrow\ & 1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.
\end{aligned}
$$

Logo, temos a equação da elipse centrada na origem e com eixo maior no *eixo* x:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{10}$$

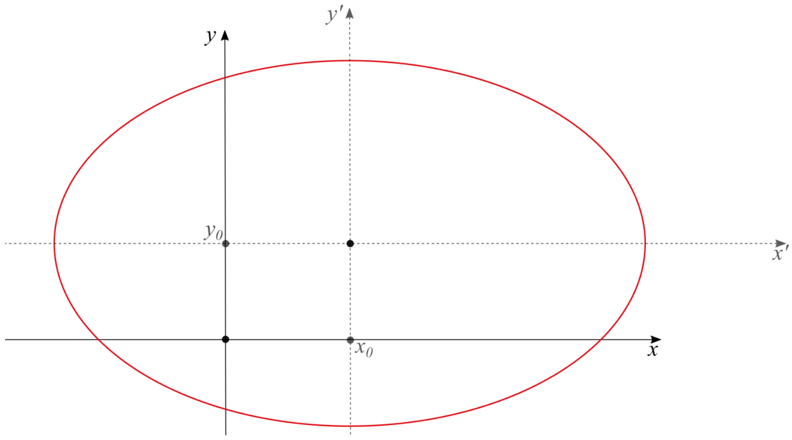
Caso a elipse tenha o centro em um ponto diferente da origem, podemos transladar os eixos do sistema $x'O'y'$ para o convencional xOy determinando assim a equação da elipse. Segundo Iezzi (2013), "Se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0,y_0)$ e $A_1A_2//x$ (*eixo* x), sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'O'y'$ é:"

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1.$$

Utilizando o sistema de translação de eixos, chegamos a equação:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Figura 5.16: Representação da translação da elipse



Fonte: Elaborado pelo autor

A circunferência é um caso particular da elipse, quando ambos os eixos tem o mesmo comprimento, isto é, quando fazemos $a=b=r$ vejamos:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{r^2}+\frac{(y-y_0)^2}{r^2}=1$$
$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

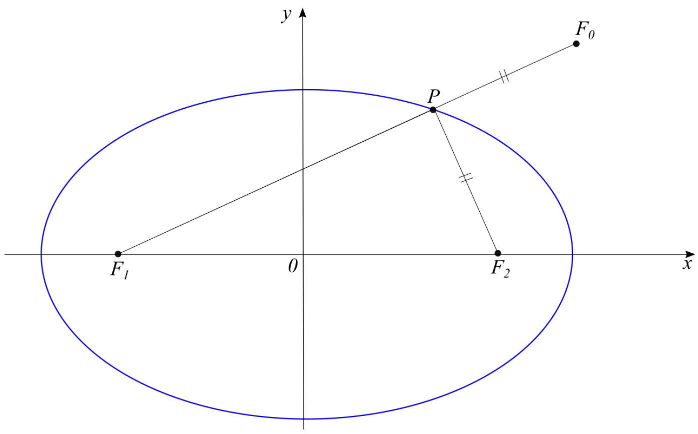
Repare que, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, é a equação de um circunferência de raio r e centro $C(x_0,y_0)$.

5.3.2 Propriedade Reflexiva da elipse

Para demonstrar a propriedade reflexiva da elipse, vamos considerar uma elise com centro na origem e focos F_1 e F_2 sobre o *eixo* x.

Prolonguemos o segmento F_1P até obtermos um segmento PF_0 de modo que $\overline{PF_0} = \overline{PF_2}$

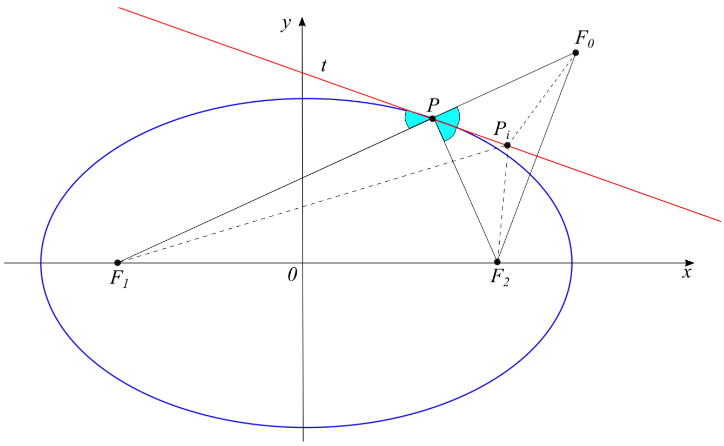
Figura 5.17: Representação da da elipse e do segmento PF_0



Fonte: (SOUZA, 2022)

Para prosseguir com a demonstração precisamos mostrar que dada uma reta bissetriz t, referente ao ângulo $F_2\hat{P}F_0$, também será tangente à elipse no ponto P.

Figura 5.18: Representação da da elipse e dos triângulos F_2PF_0 e $F_2P_iF_0$



Fonte: Elaborado pelo autor

Note que $F_1F_0 = F_1P + PF_0 = F_1P + PF_2 = 2a$. Tomemos um ponto P_i em t, diferente de P, temos que $F_2P_i = P_iF_0$, pois t é bissetriz do ângulo $F_2\hat{p}F_0$ e também mediatriz com relação ao lado F_2F_0. Repare no triângulo $F_1F_0P_i$, por desigualdade triangular temos que $F_1F_0 < F_1P_i + P_iF_0$, assim:

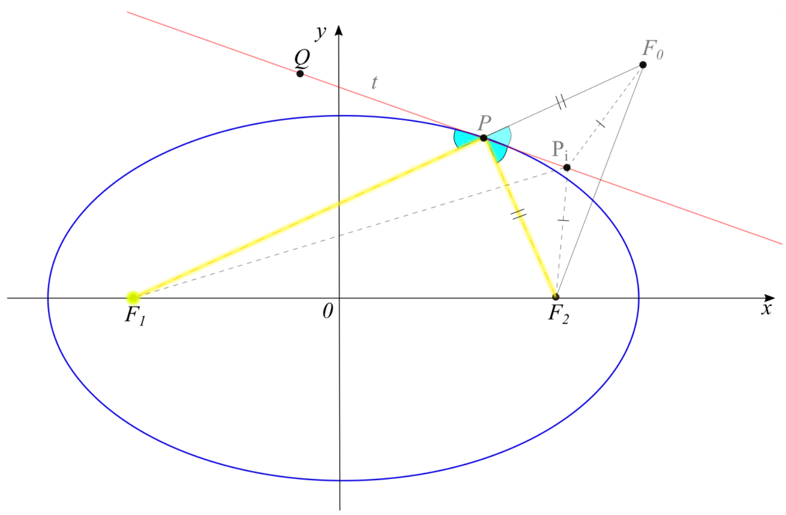
$$2a = F_1F_0 < F_1P_i + P_iF_0 \Leftrightarrow 2a = F_1P + PF_0 < F_1P_i + P_iF_0 = F_1P_i + P_iF_2$$
$$\Leftrightarrow 2a < F_1P_i + P_iF_2$$

Assim, P_i não está na elipse. Logo, P é o único ponto de t que pertence à elipse, então t é tangente à elipse em P.

Como t é bissetriz de $F_2\hat{P}F_0$, temos $F_2\hat{P}P_i = P_i\hat{P}F_0$, tomando um ponto Q no semiplano oposto à P_i, definido por F_1F_0, os ângulos $F_1\hat{P}Q$ e $F_2\hat{P}P_i$, são iguais, pois $F_1\hat{P}Q$ e $P_i\hat{P}F_0$ são $O.P.V.$

Por fim, concluímos que, dado um feixe de luz, de uma fonte em um foco F_1 em direção a superfície refletora da elipse o ângulo de incidência $F_1\hat{P}Q$ é igual ao ângulo reflexão $P_i\hat{P}F_0$ e o feixe de luz é refletivo para o segundo foco F_2.

Figura 5.19: Representação da elipse e do feixe de luz refletivo

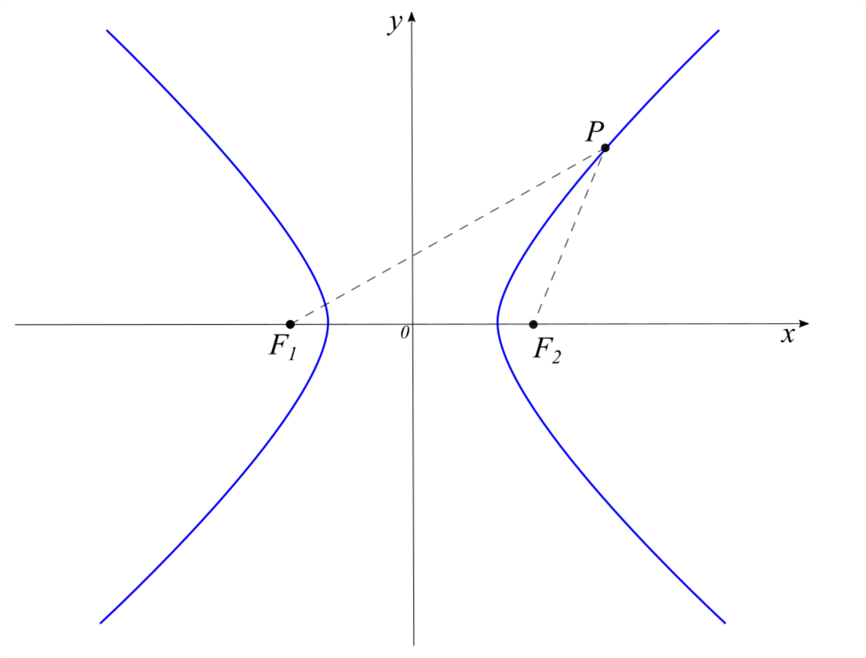


Fonte: Elaborado pelo autor

5.4 Hipérbole

Definição 5.8. Dados, em um mesmo plano, dois pontos distintos F_1 e F_2, onde $d(F_1, F_2) = 2c$. Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P, tais que $|d(F_1, P) - d(P, F_2)| = 2a$, com $0 < 2a < 2c$ e $a, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Figura 5.20: Representação da hipérbole

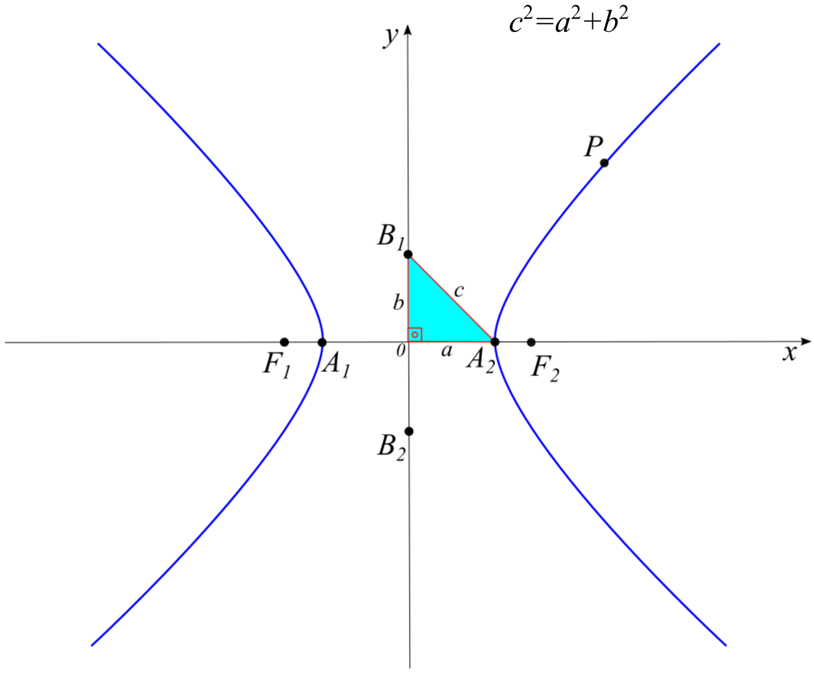


Fonte: Elaborado pelo autor

5.4.1 Equação da hipérbole

Para determinar a equação da hipérbole definimos alguns elementos da hipérbole de forma similar à elipse. O eixo real, como o segmento formado pelos vértices $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, o eixo imaginário como o segmento formado pelos pontos $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$ e a distância focal $F_1F_2 = 2a$, assim podemos notar a relação $c^2 = a^2 + b^2$.

Figura 5.21: Representação da hipérbole e seus elementos



Fonte: (SOUZA, 2022)

Vamos considerar $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $P(x,y)$ um ponto qualquer da hipérbole, tal que $|d(F_1,P)-d(P,F_2)|=2a$. Assim:

$$
\begin{aligned}
|d(F_1,P)-d(P,F_2)|=2a &\Leftrightarrow \left|\sqrt{(-c-x)^2+(0-y)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(0-y)^2}\right|=2a\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(c+x)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(c+x)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{(c+x)^2+y^2}\right)^2=\left(\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\\
&\Leftrightarrow (c+x)^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \cancel{c^2} + 2cx + \cancel{x^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2}$$

$$\Leftrightarrow 4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad (\div 4)$$

$$\Leftrightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(cx-a^2\right)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\Leftrightarrow x^2(\underbrace{(c^2-a^2)}_{b^2}) - a^2y^2 = a^2(\underbrace{(c^2-a^2)}_{b^2})$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Por fim, dividindo a equação anterior ($b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$) por a^2b^2 (pois $a^2b^2 \neq 0$) chegamos a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

Caso o eixo focal não esteja sob o *eixo* x e sim sob o *eixo* y, nesse caso a equação da hipérbole terá o seguinte formato:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

Há o caso em que o centro da hipérbole não é a origem, isto é, em um ponto $C(x_0, y_0)$, de forma análoga chegamos a equação:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{13}$$

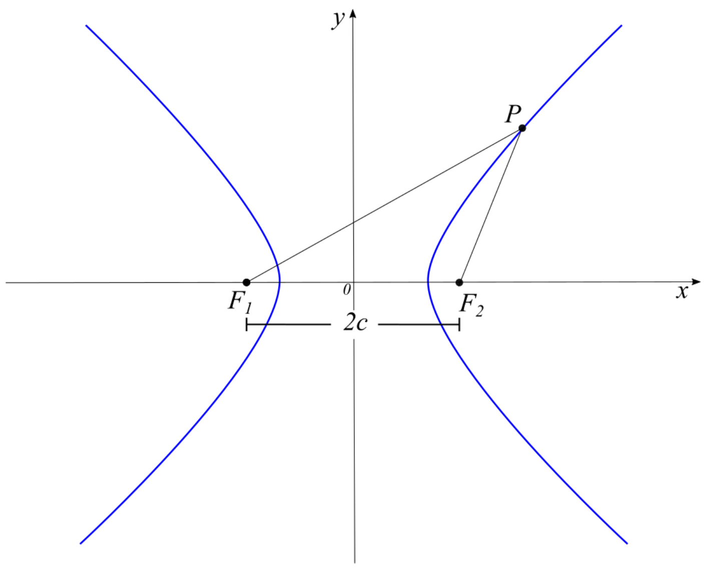
Caso a hipérbole tenha seu eixo focal paralelo ao *eixo* y, teremos a equação:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1. \tag{14}$$

5.4.2 Propriedade refletora da hipérbole

Para demonstrar a propriedade refletora da hipérbole, vamos considerar uma hipérbole com centro na origem, focos F_1 e F_2 e um ponto P qualquer da hipérbole.

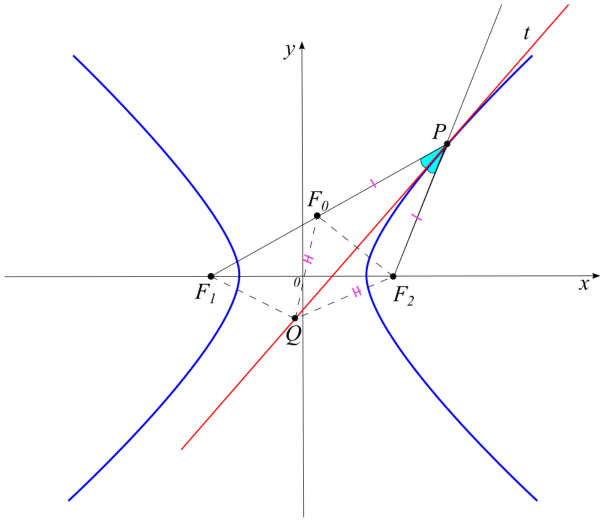
Figura 5.22: Representação da hipérbole



Fonte: (SOUZA, 2022)

Vamos demonstrar, primeiramente, que a bissetriz t, do ângulo $F_1\hat{P}F_2$, também é tangente à hipérbole no ponto P. Consideremos um ponto Q em t, diferente de P e um ponto F_0 sobre o segmento F_1P, de tal modo que $F_0P = PF_2$. Note que t é mediatriz do segmento F_0F_2, pois é bissetriz do ângulo oposto ao segmento F_0F_2, no triângulo F_0PF_2. Como $Q \in t$ concluímos que o triângulo F_0QF_2, é isósceles de base F_0F_2.

Figura 5.23: Representação da hipérbole e os triângulos F_1F_0Q, F_0QF_2 e F_0QF_2



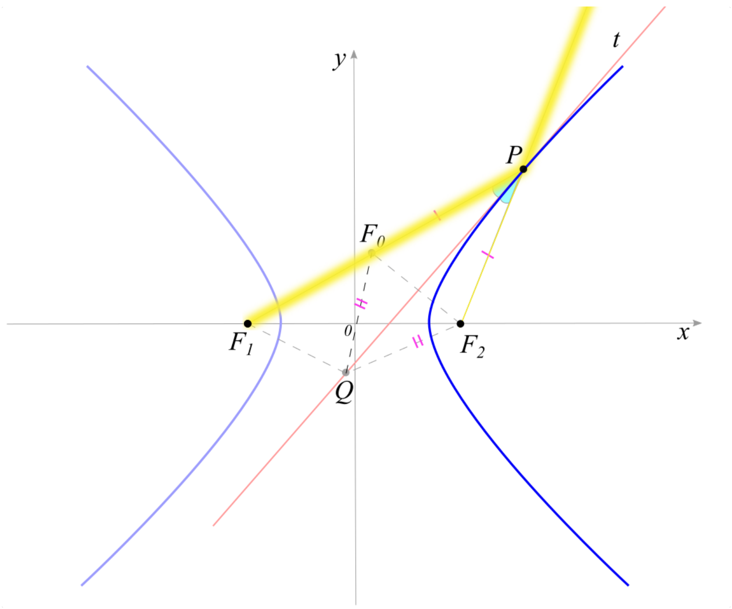
Fonte: (SOUZA, 2022)

Considerando o triângulo F_1F_0Q, por desigualdade triangular, temos: $F_1Q < F_1F_0 + F_0Q$ e $F_0Q < F_1F_0 + F_1Q$, assim:

$$F_1Q < F_1F_0 + F_0Q \text{ e } F_0Q - F_1F_0 < F_1Q$$
$$\Leftrightarrow F_0Q - F_1F_0 < F_1Q < F_1F_0 + F_0Q$$
$$\Leftrightarrow F_0Q - F_1F_0 - F_0Q < F_1Q - F_0Q < F_1F_0 + F_0Q - F_0Q$$
$$\Leftrightarrow -F_1F_0 < F_1Q - F_0Q < F_1F_0$$
$$\Rightarrow F_1Q - QF_2 = F_1Q - F_0Q < F_1F_0 = 2a$$

Logo, $F_1Q - QF_2 < 2a$. Assim Q não pertence a hipérbole, isto é, P é o único ponto de t que pertence à hipérbole, logo t é tangente à hipérbole no ponto P. Com isso temos que, considerando um feixe de luz que se origine em F_1 e atinja a superfície da hipérbole no ponto P, o ângulo de incidência $F_1\hat{P}Q$ é igual ao ângulo de reflexão (ângulo O.P.V referente a $F_1\hat{P}Q$). Além disso o feixe de luz é direcionado no sentido da semirreta $\overrightarrow{F_2P}$.

Figura 5.24: Representação da hipérbole e a propriedade refletora



Fonte: Autoria própria

5.5 Quádricas

Esta sessão será destinada a discutir algumas definições, casos específicos e gráficos de algumas quádricas. As equações e definições aqui discutidas são baseadas no livro Geometria Analítica um tratamento vetorial de Ivan de Camargo e Paulo Boulos. Os casos discutidos aqui reforçarão as aplicações apresentadas no capítulo 6. Inicialmente será apresentada a definição geral de quádrica e em seguida alguns casos específicos.

Segundo Camargo e Boulos (2005), quádricas podem ser consideradas versões tridimensionais das cônicas. Para ter mais precisão, de um ponto de vista algébrico, temos a seguinte definição:

Definição 5.9. Define-se como quádrica o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z) \in$

$\mathbb{R}^3$ tais que

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0 \tag{15}$$

onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ e $j \in \mathbb{R}$

5.5.1 Elipsoide

Uma quádrica é um elipsoide centrado na Origem quando, na equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{16}$$

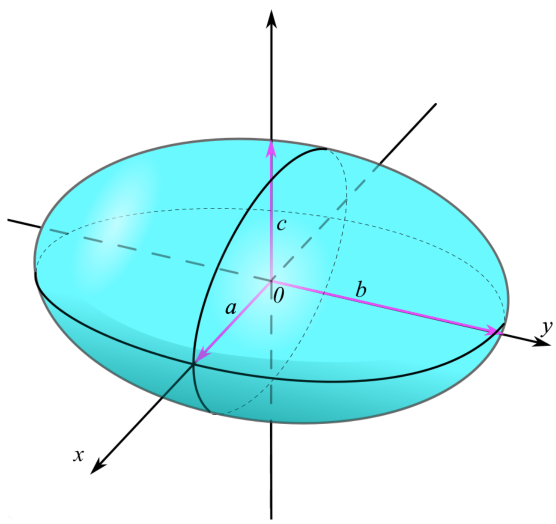
temos ao menos uma das constantes (a, b ou c), diferentes das demais, pois, caso as três forem iguais, teríamos uma esfera de raio $\sqrt{a}$.

Note que, quando fazemos $z = 0$, temos, no *plano*, xy a equação de uma elipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A representação gráfica de um elipsoide expressado na equação 16 é da seguinte forma:

Figura 5.25: Representação de um paraboloide



Fonte: Autoria própria

5.5.2 Hiperboloide

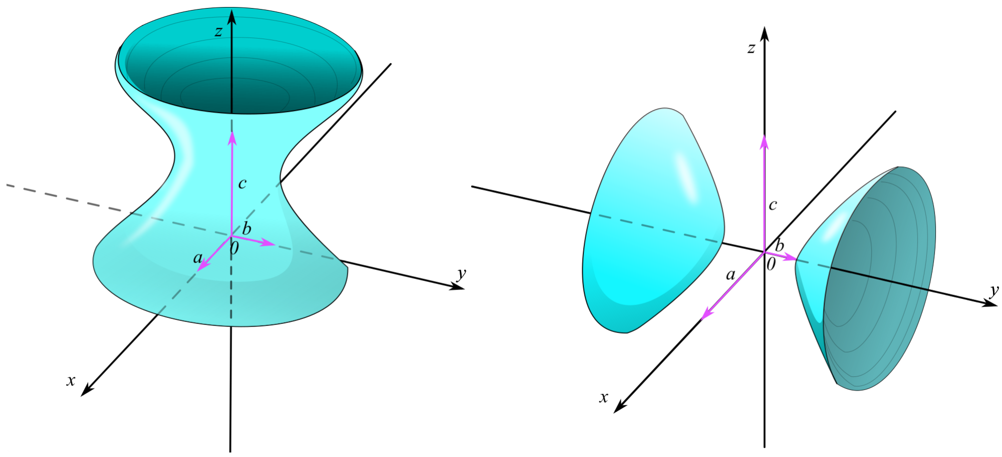
Uma quádrica é um **hiperboloide de uma folha** quando temos a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

E um **hiperboloide de duas folhas** quando temos a equação

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Figura 5.26: Representação dos hiperboloides de uma e duas folhas



Fonte: Autoria própria

5.5.3 Paraboloide

Uma quádrica é um paraboloide quando temos a equação

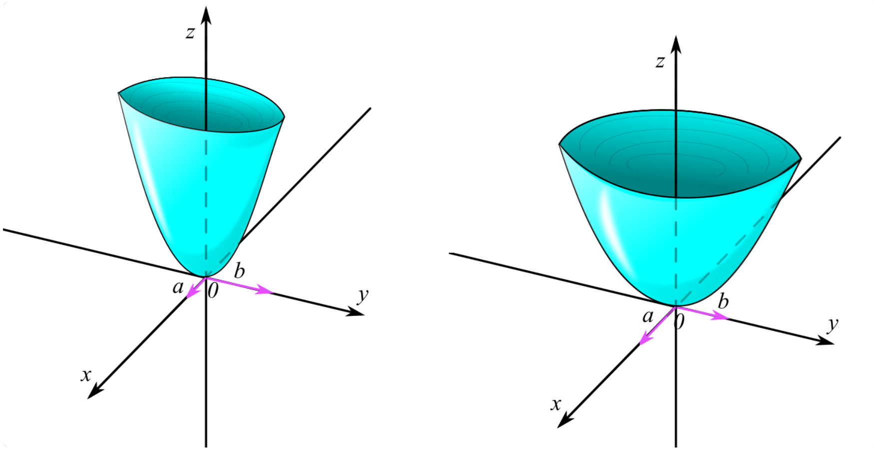
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Com relação ao paraboloide temos dois casos:

(a) se $a \neq b$, teremos um **paraboloide elíptico**;

(b) se $a = b$, teremos um **paraboloide de rotação**.

Figura 5.27: Representação dos paraboloides elíptico e de rotação



Fonte: Autoria própria

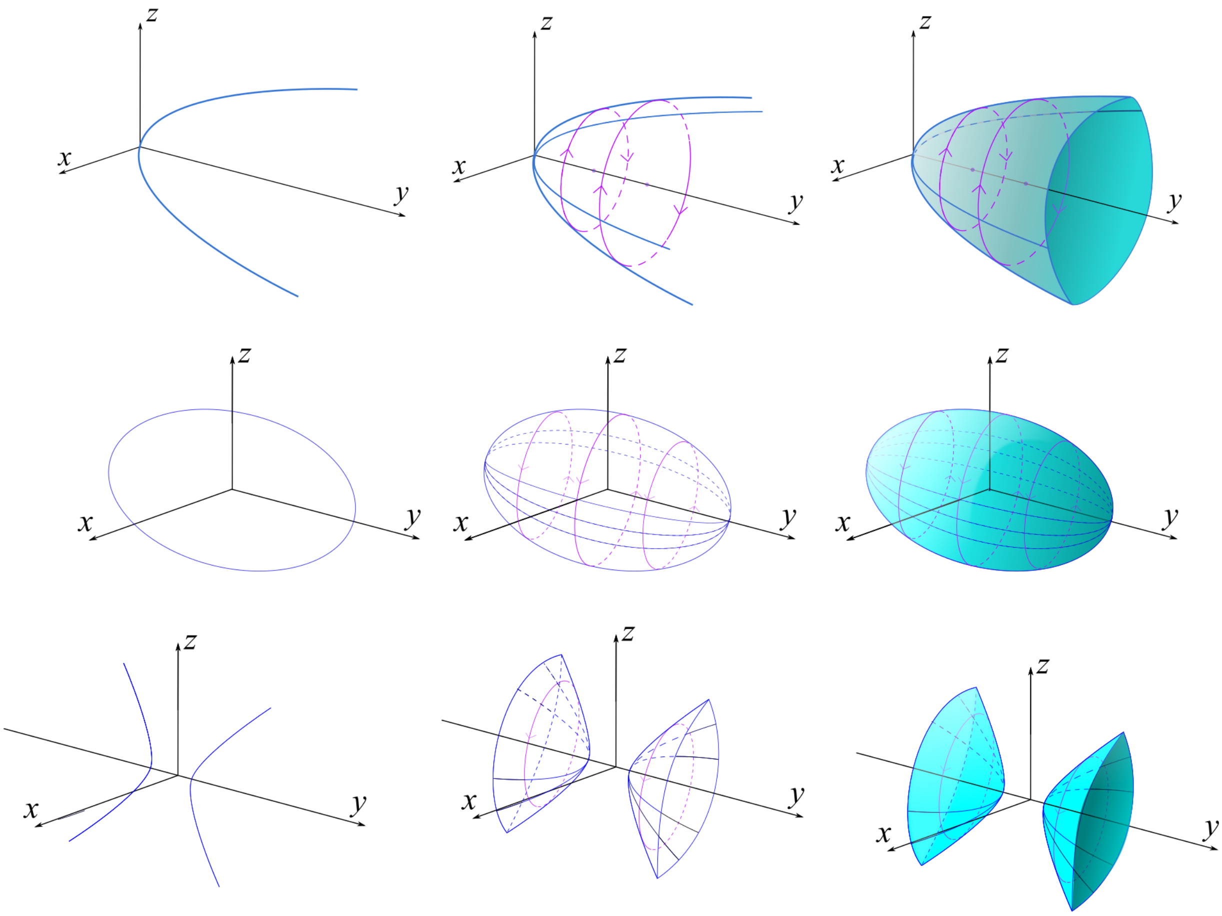
5.5.4 Quádricas como superfície de rotação

Segundo o Camargo e Boulos (2005), podemos definir superfície de rotação de acordo com a definição 5.10:

Definição 5.10. Um subconjunto Σ do $\mathbb{R}^3$ é uma superfície de rotação se existe uma reta r e uma curva γ, tais que Σ é o lugar geométrico definido pelo subconjunto dos pontos $P \in \mathbb{R}^3$, tal que Σ seja a reunião das circunferências de centros pertencentes a r contidas em planos perpendiculares a r, que interceptam Σ

Considerando uma parábola, elipse e hipérbole em *planos* xy, distintos, em $\mathbb{R}^3$ e a reta r como sendo o *eixo* y e a definição 5.10, podemos visualizar as três quádricas estudas: paraboloide, elipsoide e hiperboloide na Figura 5.28.

Figura 5.28: Representação das quádricas como superfície de rotação



Fonte: Autoria própria

6 APLICAÇÕES

Este capítulo é destinado a apresentar algumas das aplicações das cônicas e quádricas discutidas ao longo deste trabalho.

6.1 Parábola e Paraboloide

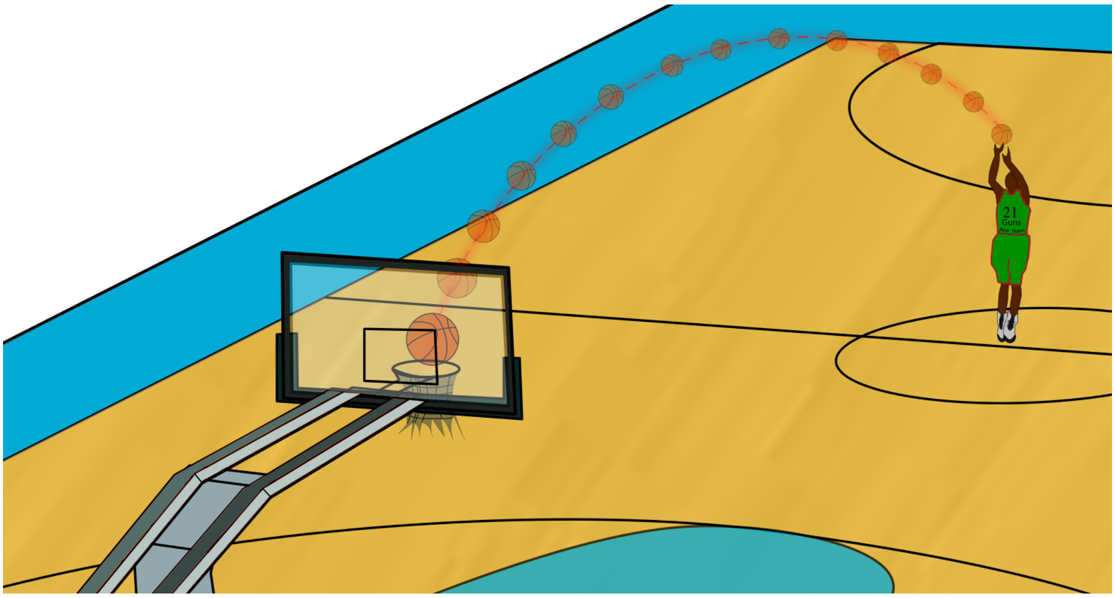
As parábolas e os paraboloides podem ser notados, no dia a dia: as parábolas, por exemplo, segundo o Venturi (2019), descrevem a trajetória de projéteis lançados em um referencial gravitacional, seja no planeta Terra, por exemplo, ou mesmo no espaço (desde que esse tenha um campo gravitacional que contenha o projétil). O cabo principal de uma ponte pênsil tem o formato aproximado de uma parábola (seria uma parábola se o cabo não tivesse massa e o peso da ponte fosse uniformemente distribuído), "Em Resistência dos Materiais, o diagrama do Momento Fletor de uma viga submetida a uma carga uniforme é uma parábola". Algumas das propriedades dos paraboloides são aplicadas à faróis de veículos, lanternas, alguns telescópios, antenas parabólicas e também em *fogões solares*. Nas próximas sessões discutiremos algumas delas.

Trajetória de projéteis

Segundo Venturi (2019), a trajetória de um projétil em um referencial gravitacional é uma parábola, desprezando a resistência do ar (quando houver).

Arquimedes, segundo Eves (2011), fez o projeto de algumas catapultas para defender sua cidade de navios inimigos. Também podemos imaginar a seguinte situação: um jogador de basquete arremessa a bola de basquete do meio da quadra na tentativa de acertar a cesta como na Figura 6.1

Figura 6.1: Trajetória de uma bola de basquete



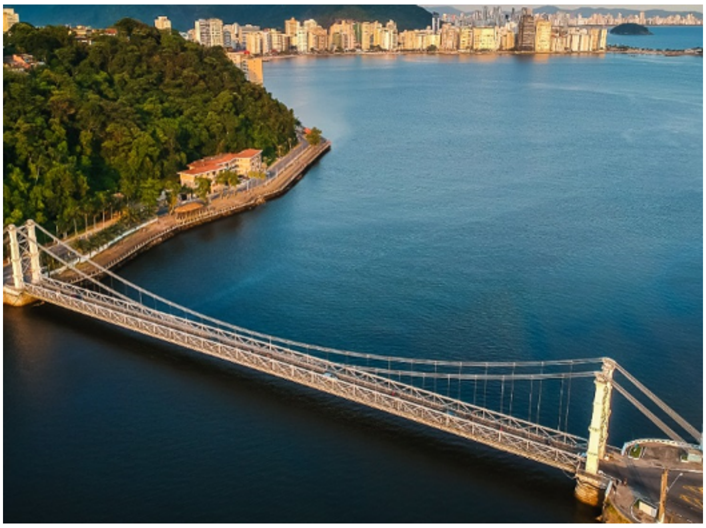
Fonte: Elaborado pelo autor

Quando um jogador de basquete faz esse tipo de arremesso, onde deseja marcar os pontos para seu time, considera sempre a trajetória parabólica que a bola de basquete deve seguir e sua distância, de onde está partindo (das próprias mãos) e até onde vai (aro).

Ponte Pênsil

Pontes pênsil (ou pontes de suspensão), são pontes sustentadas por cabos ou tirantes. Veja uma representação na Figura 6.2

Figura 6.2: Ponte Pênsil em São Vicente



Fonte: (MORGADO, 2023)

Assim como uma ponte pênsil, alguns tipos de balanços de parque, seguem o mesmo princípio do formato parabólico, estes são exemplos tangíveis ao educando, segundo Tavalera (2008), “pois bem, o exemplo da ponte pênsil e o desenho do balanço foram usados para representar uma parábola, pois fariam parte do dia-a-dia do aluno”.

Figura 6.3: Balanço em parque, com formato de parábola

Fonte: Elaborado pelo autor

Faróis e antenas

Uma aplicação do paraboloide bem interessante e muito presente no cotidiano, são os faróis de veículos, lanternas e lâmpadas. Para compreender melhor essas aplicações, consideremos um paraboloide revestido internamente com um material refletor e uma lâmpada em seu foco, os feixes de luz que saem diretamente da lâmpada são direcionados para a superfície interna do paraboloide e são refletidos paralelamente ao eixo do paraboloide:

> Uma das aplicações dessa propriedade é a construção de faróis parabólicos, da seguinte maneira: girando-se uma parábola em torno de seu eixo obtemos uma superfície denominada paraboloide circular reto. O farol parabólico é obtido seccionando-se essa superfície por um plano perpendicular ao seu eixo. Quando a fonte de luz é colocada sobre o foco do farol parabólico, todos os raios luminosos se refletem paralelamente ao seu eixo (...) de modo análogo, o princípio é também aplicado na construção de antenas parabólicas, nas quais os receptores são colocados sobre o foco. (SANTOS; FERREIRA, 2009, p. 80)

Uma forma interessante de mostrar como funciona a ideia de superfície de revolução é através do software Geogebra. Vamos utilizar uma equação de uma parábola e depois rotaciona-la através de seu eixo de simetria. Considere, no espaço, a equação: Equação da parábola:

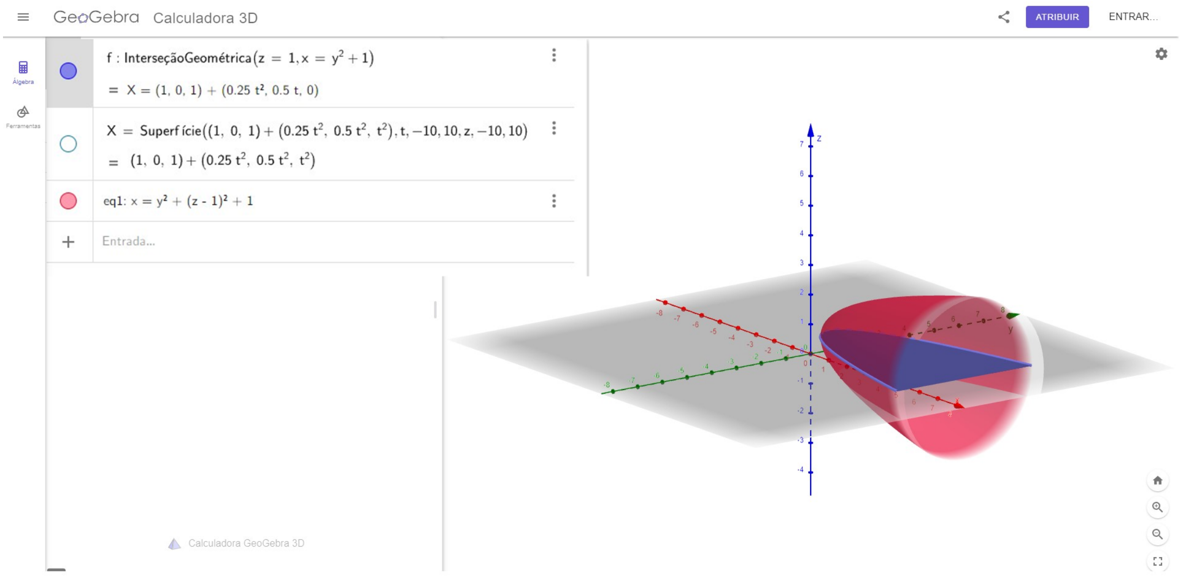
$$x = y^2 + 1; z = 1.$$

Equação do paraboloide:

$$x = y^2 + (z - 1)^2.$$

As representações gráficas de ambas podem ser vistas na Figura 6.4

Figura 6.4: Representação de uma parábola (em azul) e a superfície de revolução gerada, o paraboloide (em vermelho).

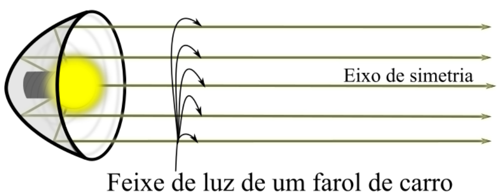


Fonte: Elaborado pelo autor - Imagem gerada a partir do Geogebra

Faróis de veículos

Nos faróis e lanternas, os feixes de luz saem da lâmpada (foco do paraboloide), incidem sobre sua superfície interna (revestida por um material reflexivo) e são refletidos paralelamente ao seu eixo de simetria, conforme a Figura 6.5,

Figura 6.5: Representação da reflexão dos feixes de um farol de carro



Fonte: Elaborado pelo autor

Já as antenas parabólicas, embora tenham a aplicação muito parecida, diferem em sua função que é a transmissão e recepção de informações. As ondas de rádio, segundo Filho (2015), são transmitidas paralelamente ao o eixo de simetria da antena (paraboloide), na direção da mesma e refletidas para um receptor que está em seu foco, como mostra a figura 6.6.

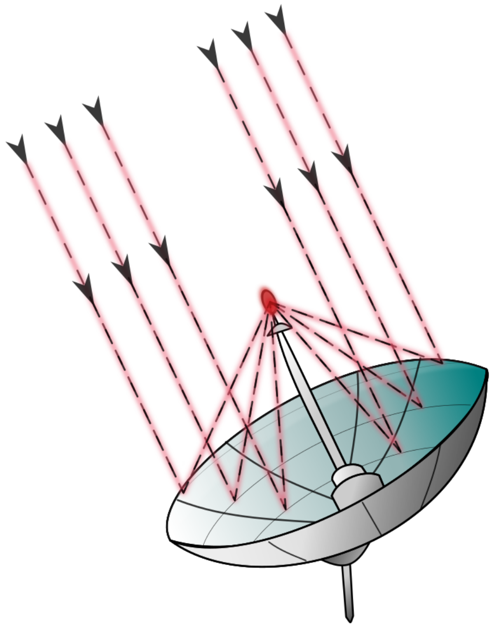


Figura 6.6: Representação da reflexão das ondas de rádio (em vermelho) para o receptor (foco, também em vermelho, no centro)

Fonte: Elaborado pelo autor

Ainda sobre as aplicações dos paraboloides, existem os chamados "fornos solares" que utilizam a energia solar para aquecer um objeto que está localizado no foco do paraboloide:

> O sistema dos coletores solares, onde a temperatura no ponto focal pode chegar a 3800°C, tem a forma de uma parábola. É nesse ponto focal que é colocado o dispositivo que irá recolher a energia concentrada. O maior forno solar do mundo está em Odeillo nos Pirinéus Orientais, na França, inaugurado em 1970 e, é usado até hoje para fins metalúrgicos na produção de ligas de altas temperaturas e aço (FILHO, p. 16, 2015).

Figura 6.7: O maior forno solar do mundo, em Odeillo, França

Fonte: (PRALON, 2013)

6.2 Elipse e Elipsoide

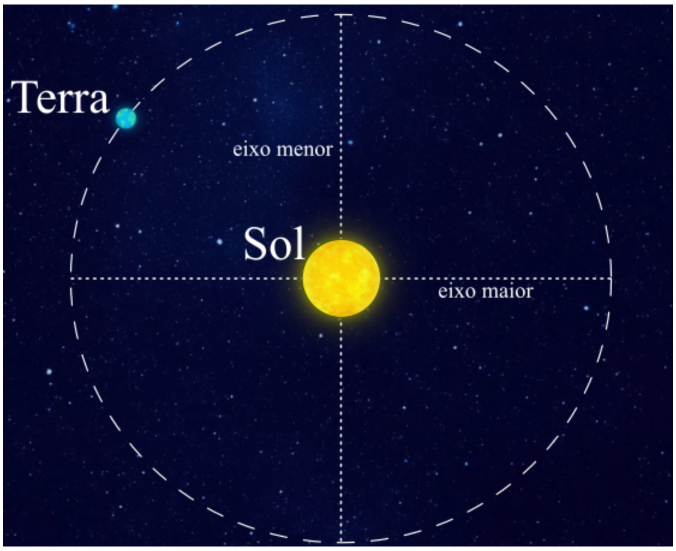
A elipse é uma curva com diversas propriedades e aplicações, dentre elas a capacidade de descrever as trajetórias periódicas de corpos celestes em torno de outros corpos celestes. Por exemplo, a trajetória que o conhecido Cometa Halley (seu nome é em homenagem a Edmond Halley, astrônomo que previu que no ano de 1758 um cometa cruzaria o Sistema Solar) faz em torno do Sol é uma elipse, assim como a Lua em torno da Terra ou a própria Terra em torno do Sol.

> As conclusões de Halley também comprovaram a veracidade da 1ª Lei de Kepler, que afirma que as trajetórias dos astros em torno do Sol são elípticas, estando este em um dos focos. As extremidades do eixo maior dessa elipse são chamadas de periélio (ponto orbital mais próximo do sol) e afélio (ponto orbital mais distante do sol) (SOUZA; GARCIA, 2016b, pp. 94).

Anteriormente foi demonstrado que a circunferência é um caso particular da elipse, onde não há eixo maior ou eixo menor, os dois eixos tem a mesma medida (nesse caso o raio da circunferência). Quando aplicamos esse conceito às trajetórias dos corpos celestes, segundo Ferre, Galli e Mattje (2018), há orbitas que são circulares ou quase circulares, como é o caso do planeta Terra. Se pudéssemos diminuir o tamanho da órbita da mesma, em torno do Sol, até que seu eixo maior tivesse 20,32 cm, o eixo menor teria aproximadamente 19,812 cm, o que se assemelha muito a uma circunferência de raio de 20 cm.

Essa pequena diferença, no caso do planeta Terra, está relacionado com a excentricidade da elipse (excentricidade se refere ao quanto a elipse se diferencia de uma circunferência, isto é, a diferença no comprimento de seus eixos, a excentricidade é 1 quando os eixos tem mesma medida) que descreve sua trajetória. A excentricidade é próxima de zero,o que indica que a elipse se aproxima ou se distância da forma de uma circunferência. Utilizando a proporção mencionada acima (eixo maior de 20,32 cm e eixo menor de 19,812), podemos visualizar como seria a trajetória aproximada do planeta Terra em torno do Sol, como mostra a figura 6.8:

Figura 6.8: Representação da proporção do eixo menor e eixo maior da Terra.



Fonte: Elaborado pelo autor

Um ponto crucial nos estudos de equações matemáticas é que elas podem descrever trajetórias de corpos celestes. Portanto, é possível prever o momento, a posição e a velocidade deles através dessas equações. Um exemplo notável é o cometa Halley, que é visível a olho nu da Terra a cada 76 anos, sua última aparição foi registrada no ano de 1986.

Figura 6.9: Representação da movimento do Cometa Halley em torno do Sol

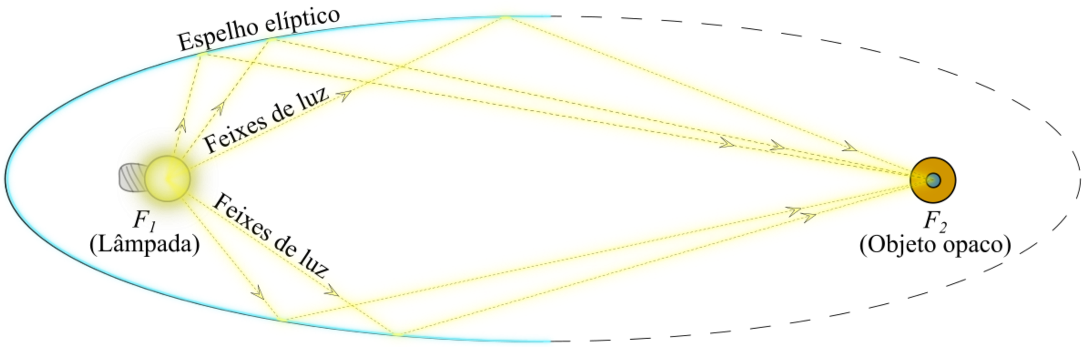
Fonte: Elaborado pelo autor

Esse poder de previsão é chamado de determinismo e é graças a ele que podemos prever certos acontecimentos, desde que tenhamos algumas informações, como cita Brennan:

> O que entendemos por determinismo? A física newtoniana descreve um mundo determinístico. Se você disparasse um projétil de um canhão, lançasse um foguete no espaço ou descobrisse um novo cometa no sistema solar, poderia prever as trajetórias desses objetos com total certeza. Em teoria, se você conhecesse as forças e as condições iniciais, tudo isso seria previsível. (BRENNAN, 1998, p. 88).

Se tratando de aplicações no cotidiano, podemos destacar algumas que envolvem diretamente a propriedade refletora, como é no caso de alguns espelhos que tem sua curvatura elíptica. De acordo com Souza (2022), considerando um espelho semi-elíptico e seus focos F_1 e F_2, imagine que em F_1 há uma lâmpada e em F_2 algum objeto opaco que há alguma necessidade de ser bem iluminado, sendo assim, todos os feixes de luz que saírem de F_1 em direção a superfície refletora do espelho, refletirão nessa superfície e serão concentrados em F_2. como podemos ver na Figura 6.10:

Figura 6.10: Representação de um espelho elíptico



Fonte: Elaborado pelo autor

A propriedade refletora também é válida para sons, pode-se destacar isso no que é conhecido como Galeria dos Sussurros.

> As ondas sonoras são capazes de um efeito de focagem semelhante. Imagine um quarto na forma de uma elipse com paredes que refletem o som. Então, independentemente do tamanho da sala, qualquer som que emana de um foco da elipse pode ser ouvido com surpreendente clareza no outro foco. Uma sala deste tipo é chamada de galeria sussurrante (BENSON, 2012).

Existem duas grandes galerias dos sussurros, no Salão Estatuário no Capitólio Nacional dos EUA e na Catedral de Saint Paul em Londres.

Além de feixes de luz e onda sonoras, a propriedade refletora da elipse também pode ser aplicada a objetos sólidos, como é o caso da sinuca elíptica. Segundo Oliveira, Silva e Silva (2018), a bola da sinuca que está posicionada em um dos focos, quando é feita a tacada em qualquer direção, após atingir a borda da sinuca ela é direcionada a caçapa da sinuca, que está no outro foco da elipse. Podemos ver um modelo de sinuca elíptica na Figura 6.11

Figura 6.11: Sinuca elíptica

Fonte: (OLIVEIRA, 2018)

É interessante destacar que a sinuca elíptica pode ser usada também como ferramenta didática nos estudos e ensino das propriedades das elipses no ensino médio.

6.3 Hipérbole e Hiperboloide

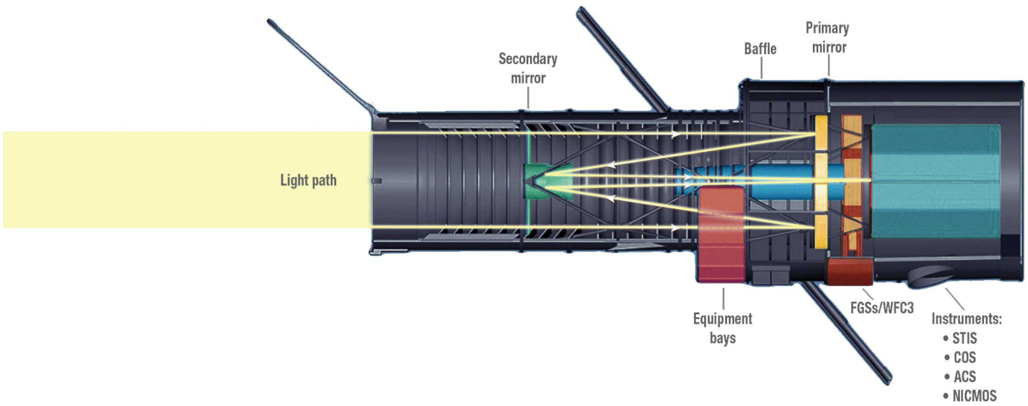
Uma das aplicações da hipérbole e do hiperboloide, é o telescópio de reflexão:

> É constituído, basicamente, por dois espelhos, um maior, chamado primário, que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico, este espelho é um hiperboloide (superfície obtida pela rotação de uma hipérbole ao redor de seu eixo focal) cuja secção tem o formato de uma hipérbole. Os dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da primeira coincida com um dos da segunda.
> Quando os raios de luz se refletem no espelho parabólico, são dirigidos para o foco pela propriedade de reflexão da parábola. Como este também é foco da hipérbole pela propriedade de reflexão desta, os raios de luz refletem no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou a película fotográfica. O telescópio Hubble (em órbita desde 1990 a 600 km da Terra) baseia-se nessas propriedades de reflexão. (FILHO, 2015, p, 42).

Figura 6.12: Telescópio Hubble

Fonte: (NASA, 2019)

Figura 6.13: Detalhes dos componentes do telescópio Hubble

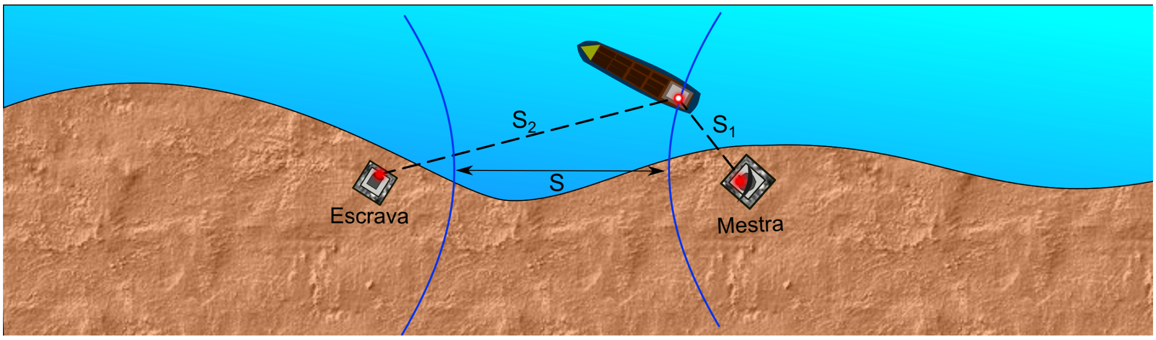


Fonte: (NASA, 2019)

Uma das aplicações da hipérbole é em sistemas de navegações, um deles é conhecido como LORAN-C (em português: Navegação de Longa Distância), que, segundo Souza (2022), "é baseada na diferença de tempo de recepção de sinais de rádio por uma embarcação que tem o receptor LORAN-C, enviados de duas estações fixas em terra, onde uma é denominada Mestra (M) e a outra de Secundária, ou Escrava (E)."

Considerando E e M como sendo focos de uma hipérbole, e a posição da embarcação um ponto P (onde há o receptor LORAN-C) é possível determinar P. Como a velocidade das ondas de rádio na atmosfera é aproximadamente a velocidade da luz, basta dividir tal velocidade pelo tempo que leva para um sinal de rádio enviado por M chegar até P, determinando assim a distância $\overline{MP}$. Realizando o mesmo procedimento de E e P, determina-se a distância $\overline{EP}$ entre elas. Denominando $S = |\overline{MP} - \overline{EP}|$, temos dois possíveis pontos na Hipérbole.

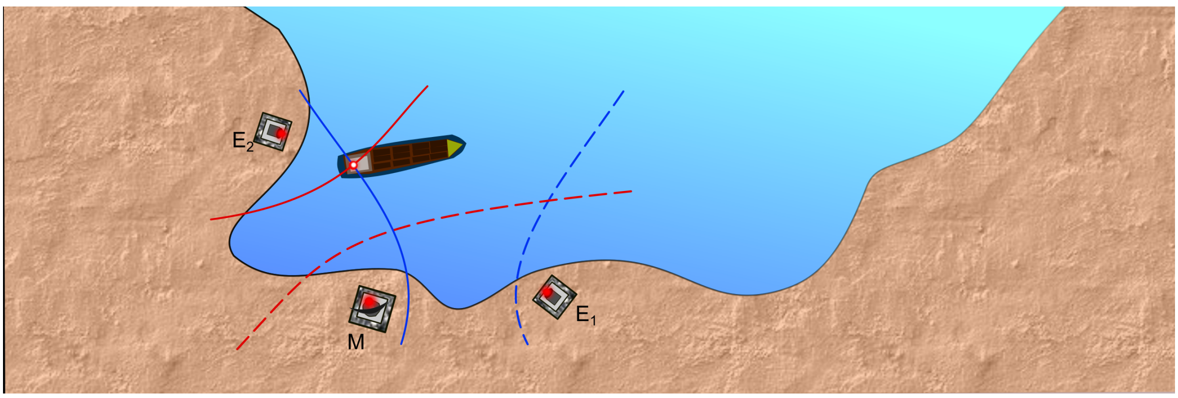
Figura 6.14: Posição da embarcação a partir de duas estações



Fonte: (SOUZA, 2022)

Para definir qual dos pontos é P, é necessário uma outra escrava E_2 (Consideremos agora $E = E_1$), consequentemente uma outra Hipérbole, como descrito na Figura 6.15, e assim a intersecção das duas hipérbole será a posição de P.

Figura 6.15: Posição da embarcação a partir de três estações



(SOUZA, 2022)

Existe uma diversidade ainda maior de aplicações para as cônicas e quádricas.

É importante discuti-las antes da introdução da parte algébrica. A sequência deste trabalho foi abordada de modo a dar justificativa para as aplicações, porém, em sala de aula, é interessante mencionar tais aplicações em um primeiro momento.

7 PROPOSTA DE DISCIPLINA ELETIVA

O NEM trouxe como uma de suas propostas os chamados *Itinerários Formativos* que, segundo Rocha (2023),

> São conjuntos de unidades curriculares ofertadas pelas instituições e redes de ensino que possibilitam ao estudante aprofundar seus conhecimentos e se preparar para o prosseguimento de estudos ou para o mundo do trabalho de forma a contribuir para a construção de soluções de problemas específicos da sociedade (BRASIL[3]).
> Em suma, os itinerários formativos referem-se aos diferentes caminhos educacionais ou trajetórias que os estudantes podem escolher dentro do seu currículo. Eles são compostos por: unidades curriculares eletivas, unidade curriculares obrigatórias, unidades curriculares voltadas para o projeto de vida e as trilhas de aprofundamento.

As disciplinas eletivas são disciplinas que fazem parte dos itinerários formativos. O aluno pode escolher qual, ou quais, eletivas quer cursar, de acordo com a oferta da escola, que serve como guia para os professores. A Secretaria da Educação do Estado do Ceará (SEDUC), disponibilizou, no ano de 2023, o catálogo das unidades curriculares eletivas. Nele consta as disciplinas eletivas que, segundo o SEDUC (2023), " oferece ao jovem estudante das escolas estaduais de ensino médio do Ceará, um leque maior de opções para formar seu itinerário formativo".

Uma das disciplinas eletivas de matemática disponível no catálogo está indicado na Figura 7.1.

Figura 7.1: Unidade curricular eletiva: Geometria III (Analítica)

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

CÓDIGO	UNIDADE CURRICULAR ELETIVA	DURAÇÃO
MAT016	GEOMETRIA III (ANALÍTICA)	40 H/A

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL
Adquirir conhecimentos de Geometria analítica, que é um campo da Matemática em que é possível representar elementos geométricos, como pontos, retas, triângulos, quadriláteros e circunferências, utilizando expressões algébricas.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Revisar conteúdos da Geometria estudados no ensino fundamental e médio, fazendo uso de conteúdos de formas práticas e lúdicas.
Descrever objetos geométricos utilizando um sistema de coordenadas.
Representar retas e planos na forma algébrica.
Identificar relações entre figuras geométricas.

JUSTIFICATIVA

A Geometria trabalha diversas habilidades visuais, como a coordenação visual motora; memória visual; percepção figura-fundo; constância perceptual; percepção da posição do espaço; percepção de relações sociais e discriminação visual. Elas são de extrema importância para facilitar questões práticas do cotidiano do aluno, permitindo uma amplificação de soluções em dificuldades que envolvam soluções geométricas.

OBJETOS DO CONHECIMENTO

Estudo Analítico do Ponto. Plano Cartesiano.
Distância entre dois pontos. Conjuntos de pontos.
Estudo Analítico da Reta. Equação geral da reta.
Posições relativas entre retas. Ângulo entre retas.
Paralelismo.
Perpendicularidade.
Estudo analítico da circunferência.
Equação da circunferência.
Posição relativa entre ponto e circunferência.
Posição relativa entre reta e circunferência.
Posição relativa entre circunferência e circunferência.

OBJETIVOS DA APRENDIZAGEM

COMPETÊNCIA
Propor ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
HABILIDADES
Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade.
Identificar características de figuras planas ou espaciais.
Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

RECURSOS DIDÁTICOS

Livros.
Materiais do laboratório de matemática.
Data show.
Computadores.
Biblioteca.
Sala de audiovisual.
Xerox.
Folha de ofício

AVALIAÇÃO

Participação atividades propostas.
Postura de interesse e aprendizado, colaborando para o clima harmonioso e produtivo em sala.
Trabalho em grupo e /ou avaliação final, que pode ser escrita ou com o uso de plataformas.

SUGESTÃO PRODUTO FINAL / CULMINÂNCIA

Mostra sobre a utilidade da geometria analítica no cotidiano: Construção civil, computação gráfica e geolocalização.
Mostra do uso de softwares para melhor aproveitamento da aprendizagem em geometria: Geogebra (Free); Régua e Compasso (Free); Tabulae (Free); Cabri 3D (shaware).

OBSERVAÇÕES

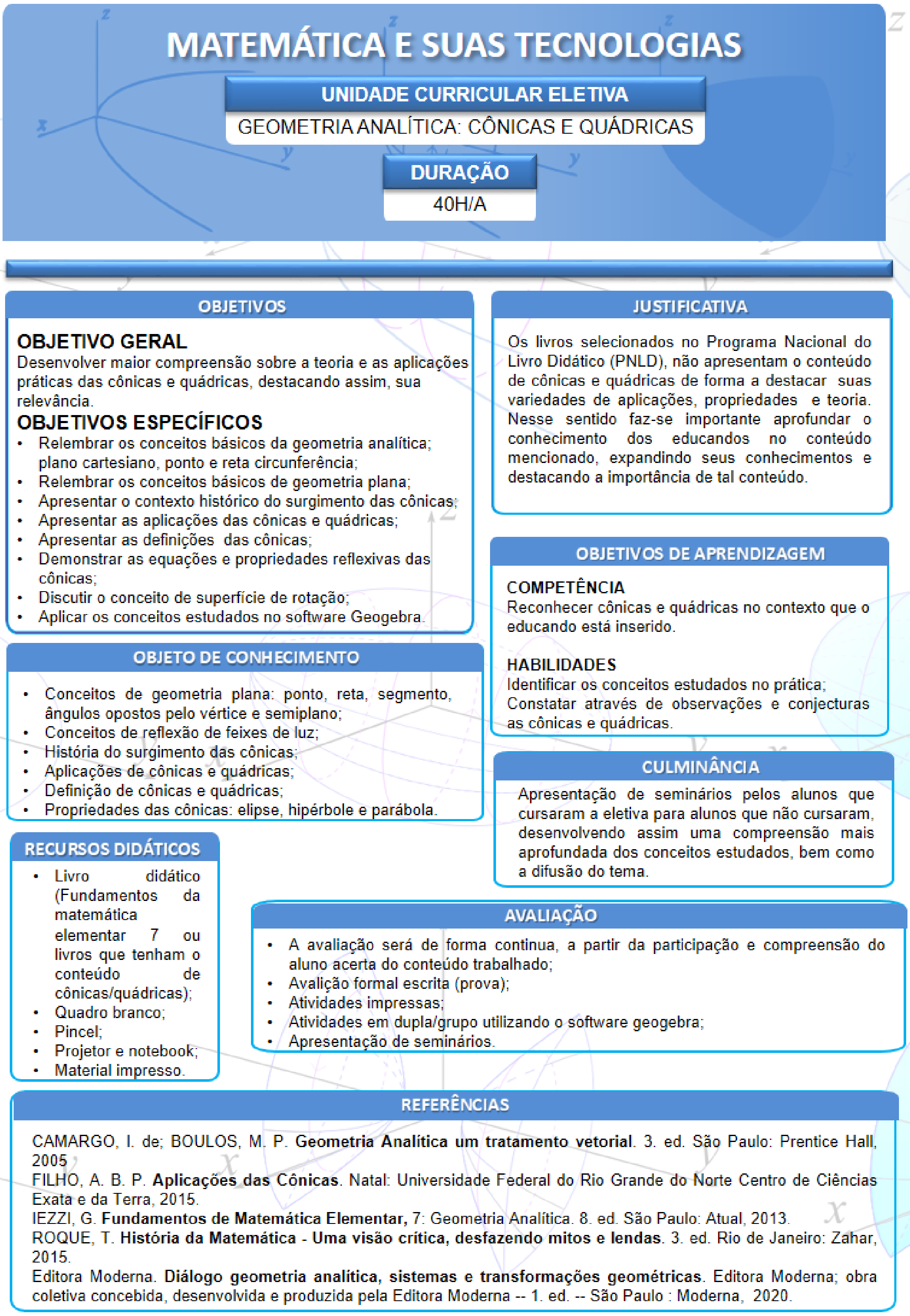
REFERÊNCIAS

DOLCE, Osvaldo; Pompeo, Nicolau J. Fundamentos de Matemática Elementar 10: Geometria Espacial. São Paulo: Atual 2005
CARVALHO, Paulo César Pinto. Introdução à geometria espacial. Rio de Janeiro: SBM, 1993.
Geogebra (Free): http://www.geogebra.org/cms/
Régua e Compasso (Free): http://sourceforge.net/projects/zirkel/
Tabulae (Free): http://tabulae.net/
Cabri 3D (shaware):http://www.cabri.com/download-cabri-3d.html

Fonte: SEDUC (2023)

Baseando-se nos critérios dos modelos das eletivas propostas pelo catálogo das unidades curriculares eletivas, segue a sugestão da disciplina eletiva Geometria analítica: cônicas e quádricas na Figura 7.2:

Figura 7.2: U.C.E sugerida: Geometria Analítica: Cônicas e Quádricas



MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

UNIDADE CURRICULAR ELETIVA

GEOMETRIA ANALÍTICA: CÔNICAS E QUÁDRICAS

DURAÇÃO

40H/A

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL

Desenvolver maior compreensão sobre a teoria e as aplicações práticas das cônicas e quádricas, destacando assim, sua relevância.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Relembrar os conceitos básicos da geometria analítica; plano cartesiano, ponto e reta circunferência;
- Relembrar os conceitos básicos de geometria plana;
- Apresentar o contexto histórico do surgimento das cônicas;
- Apresentar as aplicações das cônicas e quádricas;
- Apresentar as definições das cônicas;
- Demonstrar as equações e propriedades reflexivas das cônicas;
- Discutir o conceito de superfície de rotação;
- Aplicar os conceitos estudados no software Geogebra.

JUSTIFICATIVA

Os livros selecionados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), não apresentam o conteúdo de cônicas e quádricas de forma a destacar suas variedades de aplicações, propriedades e teoria. Nesse sentido faz-se importante aprofundar o conhecimento dos educandos no conteúdo mencionado, expandindo seus conhecimentos e destacando a importância de tal conteúdo.

OBJETO DE CONHECIMENTO

- Conceitos de geometria plana: ponto, reta, segmento, ângulos opostos pelo vértice e semiplano;
- Conceitos de reflexão de feixes de luz;
- História do surgimento das cônicas;
- Aplicações de cônicas e quádricas;
- Definição de cônicas e quádricas;
- Propriedades das cônicas: elipse, hipérbole e parábola.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

COMPETÊNCIA

Reconhecer cônicas e quádricas no contexto que o educando está inserido.

HABILIDADES

Identificar os conceitos estudados no prática;
Constatar através de observações e conjecturas as cônicas e quádricas.

CULMINÂNCIA

Apresentação de seminários pelos alunos que cursaram a eletiva para alunos que não cursaram, desenvolvendo assim uma compreensão mais aprofundada dos conceitos estudados, bem como a difusão do tema.

RECURSOS DIDÁTICOS

- Livro didático (Fundamentos da matemática elementar 7 ou livros que tenham o conteúdo de cônicas/quádricas);
- Quadro branco;
- Pincel;
- Projetor e notebook;
- Material impresso.

AVALIAÇÃO

- A avaliação será de forma continua, a partir da participação e compreensão do aluno acerta do conteúdo trabalhado;
- Avalição formal escrita (prova);
- Atividades impressas;
- Atividades em dupla/grupo utilizando o software geogebra;
- Apresentação de seminários.

REFERÊNCIAS

CAMARGO, I. de; BOULOS, M. P. **Geometria Analítica um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
FILHO, A. B. P. **Aplicações das Cônicas**. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte Centro de Ciências Exata e da Terra, 2015.
IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar,** 7: Geometria Analítica. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.
ROQUE, T. **História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.
Editora Moderna. **Diálogo geometria analítica, sistemas e transformações geométricas**. Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Fonte: Elaborado pelo autor

A disciplina eletiva Geometria Analítica: Cônicas e Quádricas tem como público alvo alunos do terceiro ano do ensino médio. Tendo em vista que já há uma maturidade com relação a matemática básica, o estudo de plano cartesiano, funções e equações, bem como as representações gráficas de algumas delas. Logo a disciplina eletiva sugerida pretende desenvolver habilidade e competência já adquiridas anteriormente, além de ampliar a visão do educando, apresentando diversas aplicações e conexões da matemática com o concreto, com o contexto em que o aluno está inserido.

A disciplina eletiva sugerida visa apresentar o conteúdo de cônicas e quádricas como uma introdução do conteúdo, apresentando alguns conceitos básicos inicias, necessários para o desenvolvimento da eletiva, discutir alguns conceitos de física referente a reflexão de feixes de luz e então apresentar o contexto histórico do surgimento das cônicas e quádricas. Após a introdução do conteúdo, é interessante que as definições e a algébrica desenvolvida durante a disciplina seja trabalhada de forma consistente e detalhada, dentro das limitações/condições da turma, pois é importância que haja um desenvolvimento de conceitos já vistos anteriormente, dando enfase a ponte da álgebra e geometria.

Com relação a vestibulares/Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), como a disciplina discute e trabalha a parte algébrica de forma detalhada, o educando poderá desenvolver suas habilidades no que se refere a álgebra e geometria, sendo constantemente presentes em tais provas.

Ao término da disciplina é esperado que o aluno tenha desenvolvido uma percepção da matemática mais aprofundada com relação as aplicações, bem como métodos algébricos na resolução e interpretação de situações-problema, compreendendo o quanto é importante a matemática e todo o contexto do surgimento de determinado conteúdo e as suas aplicações.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou fazer uma análise sobre como as cônicas e quádricas são abordadas e estudadas no ensino médio, destacando a necessidade de um estudo mais aprofundado desses conteúdos. Tanto a própria BNCC quanto alguns livros didáticos tratam o conteúdo de uma forma superficial, apesar de sua grande importância na matemática e suas aplicações acessíveis no cotidano do educando.

Tendo em vista tal carência, o presente trabalho abordou e discutiu a importância do estudo de cônicas e quádricas, contextualizando o seu surgimento histórico, e apresentando os motivos e a necessidade de seu estudo. Além disso, foram apresentadas algumas das suas aplicações, principalmente aquelas que são tangíveis aos alunos no ambiente em que vivem e interagem, trazendo sempre que possível conexões com a parte mais abstrata da matemática, como definições, equações e algumas demonstrações. Dessa forma, no caso da geometria analítica, foi estabelecida uma ponte entre a álgebra e a geometria plana, enfatizando suas aplicações práticas.

O NEM, com os itinerários formativos trouxe as disciplinas eletivas que abriu espaço para que fossem discutidos conteúdos diversos relacionados as áreas do conhecimento, criando uma solução alternativa para a carência (ou mesmo ausência) do conteúdo no ensino médio (embora essa não sendo a opção mais interessante, já que o conteúdo passa a ser uma opção e não uma obrigatoriedade). É importância que haja esse espaço, pois cria uma liberdade para que o professor apresente para os alunos conteúdos que são pertinentes para uma turma/comunidade em específico.

O estudo aqui apresentado pode ser expandido ao incorporar o conceito de vetores ou mesmo coordenadas polares, embora de maneira sutil, caso o objetivo seja discutir o conteúdo no ensino médio. Também é possível explorar com mais precisão a parte algébrica que envolve as quádricas, apresentando conexões mais precisas das equações e suas representações no espaço cartesiano.

Diante do que foi apresentado, discutido e demonstrado, chegamos à conclusão do quão importante é esse conteúdo para o ensino médio. Fica evidente que o aluno pode desenvolver a percepção de que a matemática é mais do que símbolos, incógnitas e equações. Foi possível demonstrar a conexão da álgebra com a geometria plana e espacial e, por fim, destacar as aplicações das cônicas e quádricas no ambiente em que os alunos estão inseridos, trazendo mais significado para o que está sendo estudado.

Referências

[1] **BENSON, Donald C**. The Ballet of the Planets A Mathematician's Musings on the Elegance of Planetary Motion. New York: Oxford University Press, 2012. BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

[2] **BRASIL** Anuário Brasileiro da Educação Básica 2021. 10. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2021.

[3] **CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Marcos Paulo**. Geometria Analítica um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[4] **DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla**. Geometria Analítica. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

[5] **EVES, Howard**. Introdução à história da matemática. 5. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

[6] **FERRE, Natalia; GALLI, Adriana Claudia; MATTJE, Elena Beatriz Guzmán**. Álgebra y Geometría - Una manera de pensar. La Plata: Edulp, 2018.

[7] **FILHO, Almir Batista Pereira**. Aplicações das Cônicas. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte Centro de Ciências Exata e da Terra, 2015.

[8] **GIL, Antônio Carlos**. Como elaborar projetos de pesquisa. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

[9] **IEZZI, Gelson**. Fundamentos de Matemática Elementar, 7: Geometria Analítica. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013..

[10] **NASA, STScI**. NASA's Hubble Space Telescope. https://hubblesite.org/images. Acessado em 21 de mar. de 2024. [S.l.]: hubblesite, 2005..

[11] **NETO, Antonio Caminha Muniz**.Geometria. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[12] **NETO, João Eichenberger**. História da matemática. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A, 2016.

[13] **OLIVEIRA, Natham Cândido de; SILVA, Judcely Nytyeska de Macedo Oliveira; SILVA, Laedson Luan dos Santos**. Propriedade reflexiva do bilhar elíptico. V Congresso Nacional de Educação, v. 1, n. 1, p. 5, 2018

[14] **PRALON, Antonio**. Universidade de Perpignan: energia solar concentrada é destaque entre suas pesquisas. https://anglophone-direct.com/mont-louisfontromeu-odeillo-via/. Acessado em 17 de mar. de 2024. [S.l.]: O frio que vem do sol, 2013.

[15] **DOLCE, Osvaldo**. Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. - 9. ed. - São Paulo: Atual, 2013.

[16] **PRODANOV, Cleber Cristiano**. Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale Ernani Cesar de Freitas: Cortez, 2013.

[17] **ROCHA, Joice de Lima Costa**. A História da Matemática Como Proposta de Eletiva Para d Novo Ensino Médio. 1. ed. Rio de Janeiro: Universidade Federal Rural do Semi-Árido Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, 2023.

[18] **ROQUE, Tatiana.**. História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

[19] **Morgado, César.**. Praias de São Vicente serão interditadas para estudos de erosão, SP. <Portal.https://santaportal.com.br/baixada/praias-de-sao-vicente-serao-interditadas-para-estudos-de-erosao-veja-cronograma>. Acessado em 11 de jul. de 2024. [S.l.]: Santa Portal, 2023.

[20] **SANTOS, Ricardo de Souza**. Tecnologias Digitais na Sala de Aula para Aprendizagem de Conceitos de Geometria Analítica: Manipulações no Software GRAFEQ. PORTO ALEGRE: Universidade Federal do Rio Grande do Sul Instituto de Matemática Programa de Pós-Graduação em Ensino De Matemática, 2008.

[21] **SEDUC**. Catálogo Unidades Curriculares Eletivas . 1. ed. Fortaleza: SEDUC, 2023.

[22] **LIMA, Elon Lages *et al***. Temas e problemas elementares / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. – 12.ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[23] **SEVERINO, Antônio Joaquim**. Metodologia do Trabalho Científico. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2017

[24] **MUNIZ NETO, Antonio Caminha**. Geometria / Antonio Caminha Muniz Neto. - 1ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[25] **SILVA, Andressa Abreu da**. A Natureza da Matemática no Contexto de Redimensão de Práticas Pedagógicas Para o Ensino de Matemática na Educação Básica. Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul, 2020.

[26] **SOUZA, Guilherme Pereira de**. Cônicas Para o Ensino Médio: Propriedades e Aplicações. Cajazeiras: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Campus Cajazeiras, 2022.

[27] **TALAVERA, Leda Maria Bastoni**. Parábola e Catenária: História e Aplicações. São Paulo, Sp: Universidade de São Paulo Faculdade de Educação, 2008.

[28] **VENTURI, Jacir.**. Cônicas e Quádricas. 6. ed. Curitiba: Jacir J. Venturi, 2019.