



UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL  
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



**APLICAÇÕES DE ALGUNS TEOREMAS DA GEOMETRIA  
PLANA, POUCO ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO NA  
RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO ITA, IME, OLIMPÍADAS  
DE MATEMÁTICA E ESCOLAS MILITARES**

MANOEL NILVAN MACEDO OLIVEIRA SILVA

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2024

**APLICAÇÕES DE ALGUNS TEOREMAS DA GEOMETRIA  
PLANA, POUCO ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO NA  
RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO ITA, IME, OLIMPÍADAS  
DE MATEMÁTICA E ESCOLAS MILITARES**

MANOEL NILVAN MACEDO OLIVEIRA SILVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador**

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

JUAZEIRO DO NORTE - CE

2024

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema  
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Silva, Manoel Nilvan Macedo Oliveira

S586a APLICAÇÕES DE ALGUNS TEOREMAS DA GEOMETRIA PLANA,  
POUCO ABORDADO NO ENSINO MÉDIA NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES  
DO ITA, IME, OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA E ESCOLAS MILITARES /  
Manoel Nilvan Macedo Oliveira Silva. Juazeiro do norte - Ce, 2025.

103p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da  
Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

1.Teoremas, 2.Olimpíadas, 3.ITA, 4.IME, 5.Escolas militares; I.Título.


CDD: 510

# **Aplicações de alguns Teoremas da Geometria Plana, pouco abordados no Ensino Médio, na Resolução de Questões do ITA, IME, Olimpíadas de Matemática e Escolas Militares**

**Manoel Nilvan Macedo Oliveira Silva**


Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática  
Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri  
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do  
título mestre em matemática.

Aprovada em 26/02/2025

Documento assinado digitalmente  
 PAULO CESAR CAVALCANTE DE OLIVEIRA  
Data: 05/05/2025 20:37:28-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira(Orientador)

Universidade Regional do Cariri(URCA)

Documento assinado digitalmente  
 MARIO DE ASSIS OLIVEIRA  
Data: 12/05/2025 16:55:04-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Mário de Assis Oliveira

Universidade Regional do Cariri(URCA)

Documento assinado digitalmente  
 FRANCISCO CAMILO DA SILVA  
Data: 15/05/2025 23:25:31-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Francisco Camilo da Silva

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – *campus* Juazeiro do Norte

*Dedico à Deus, minha família e especialmente a  
Maria Niza (in memoriam) e Manoel Francisco.*

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por estar sempre comigo nos momentos difíceis. Obrigado, meu pai, por sempre me ajudar e acreditar em mim.

Agradeço à minha mãe (Maria Niza), *in memoriam*, por ter sido meu anjo aqui na terra e por ter caminhado ao meu lado em vida; à minha sogra (Chaguinha), por rezar por mim; aos meus lindos filhos (Shiva, Shakespeare e Krishna) e à minha grande esposa (Alessandra).

Agradeço às minhas irmãs (Nilda e Nilma) e aos meus familiares (tios, primos, avós). Vocês foram minha base. Obrigado por todo o apoio durante esse processo, pela força e pelas orações constantes, por terem compreendido os momentos em que estive ausente.

À Universidade Regional do Cariri – URCA, por ter aberto as portas para receber o curso, e a todos os funcionários do *campus*, que foram cordiais e atenciosos com nossa turma.

Agradeço aos meus amigos de turma (Domingos, Eduardo, Boaventura, Francisco, Guilherme, Alex e Adriano), que muito me ajudaram a realizar este sonho, dividindo comigo minhas angústias, alegrias e conquistas. Obrigado!

Ao meu orientador, Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira, que aceitou trilhar esse caminho comigo; ao professor Alex Coelho, pela sabedoria em trabalhos acadêmicos e pelo acolhimento aos seus alunos nas orientações de dissertações.

Agradeço também aos professores (Mário, Valéria, Tiago, Jocel, Leidmar, Flávio e ao grande Pedro Lima, *in memoriam*), pelas ótimas aulas e dicas nessa dissertação.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para que eu chegasse até aqui.

“Pois ainda que o justo caia sete vezes, tornará a erguer-se, mas os ímpios são arrastados pela calamidade.” (Provérbios 24;16 – Bíblia Sagrada)

## Resumo

O principal objetivo desta dissertação é explorar teoremas da geometria plana que, apesar de raramente serem abordados no currículo do ensino médio, apresentam um grande potencial na resolução de questões complexas encontradas em vestibulares de alto nível, como os do ITA, IME, Olimpíadas de Matemática e exames de escolas militares. A pesquisa é centrada em teoremas clássicos da geometria, como o Teorema de Stewart, Teorema de Napoleão, Teorema de Van Aubel, Teorema de Menelau (e sua recíproca), Teorema de Ptolomeu, Teorema de Hiparco, Teorema de Euler e Teorema de Ceva. A metodologia adotada consiste em analisar e resolver questões de exames e competições matemáticas utilizando esses teoremas, e, em seguida, resolver as mesmas questões por meio de abordagens alternativas, sem o uso dos teoremas específicos, com o objetivo de demonstrar a eficácia desses resultados teóricos. Os resultados obtidos indicam que a aplicação direta desses teoremas facilita consideravelmente a resolução de problemas complexos e aprimora a compreensão de conceitos geométricos fundamentais. Além disso, a pesquisa revela que, ao incorporar esses teoremas na preparação de alunos para exames e olimpíadas de matemática, é possível não apenas melhorar o desempenho dos estudantes, mas também contribuir para o desenvolvimento de habilidades analíticas, estratégias de resolução de problemas e uma maior compreensão da geometria plana. Conclui-se que a inclusão desses tópicos no currículo do ensino médio pode representar uma importante ferramenta pedagógica, proporcionando aos alunos uma base sólida para enfrentar desafios acadêmicos de nível avançado e fomentar seu interesse por áreas mais profundas da matemática.

**Palavras-chave:** Teoremas, olimpíadas, ITA, IME, Escolas militares.

## Abstract

The main objective of this dissertation is to explore planar geometry theorems that, although rarely addressed in high school curricula, have significant potential in solving complex problems found in high-level entrance exams, such as those for ITA, IME, Math Olympiads, and military school exams. The research focuses on classical geometry theorems, such as Stewart's Theorem, Napoleon's Theorem, Van Aubel's Theorem, Menelaus' Theorem (and its converse), Ptolemy's Theorem, Hipparchus' Theorem, Euler's Theorem, and Ceva's Theorem. The methodology involves analyzing and solving exam and competition problems using these theorems and then resolving the same problems through alternative approaches, without using the specific theorems, in order to demonstrate the effectiveness of these theoretical results. The results indicate that the direct application of these theorems significantly facilitates the resolution of complex problems and enhances the understanding of fundamental geometric concepts. Moreover, the research shows that incorporating these theorems in the preparation of students for exams and math competitions not only improves their performance but also contributes to the development of analytical skills, problem-solving strategies, and a deeper understanding of planar geometry. It is concluded that the inclusion of these topics in the high school curriculum can represent an important pedagogical tool, providing students with a solid foundation to face advanced academic challenges and fostering their interest in deeper areas of mathematics.

**Keywords:** Theorems, olympiads, ITA, IME, Military schools.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1</b>	Triângulo $ABC$ com ângulos internos e lados em destaque . . .	17
<b>Figura 2.2</b>	Triângulos semelhantes . . . . .	18
<b>Figura 2.3</b>	Triângulos semelhantes pelo caso (AA) . . . . .	18
<b>Figura 2.4</b>	Triângulos semelhantes pelo caso (LAL) . . . . .	19
<b>Figura 2.5</b>	Triângulos semelhantes pelo caso (LLL) . . . . .	20
<b>Figura 2.6</b>	Triângulos congruentes . . . . .	21
<b>Figura 2.7</b>	Triângulos congruentes pelo caso (LLL) . . . . .	22
<b>Figura 2.8</b>	Triângulos congruentes pelo caso (LAL) . . . . .	22
<b>Figura 2.9</b>	Triângulos congruentes pelo caso (ALA) . . . . .	23
<b>Figura 2.10</b>	Triângulos congruentes pelo caso (LAAo) . . . . .	23
<b>Figura 2.11</b>	Bissetriz interna do ângulo $C$ no triângulo $ABC$ . . . . .	24
<b>Figura 2.12</b>	Triângulo Retângulo em $A$ . . . . .	24
<b>Figura 2.13</b>	Baricentro de um triângulo . . . . .	25
<b>Figura 2.14</b>	Divisão das medianas pelo baricentro ( $G$ ) . . . . .	25
<b>Figura 2.15</b>	Área do triângulo $ABC$ em função do seno . . . . .	26
<b>Figura 2.16</b>	Ponto interior à circunferência . . . . .	26
<b>Figura 2.17</b>	Ponto exterior formado por duas secantes . . . . .	27
<b>Figura 2.18</b>	Ponto exterior formado por uma secante e uma tangente . . .	27
<b>Figura 2.19</b>	Círculo inscrito em um triângulo . . . . .	28
<b>Figura 2.20</b>	Círculo circunscrito a um triângulo . . . . .	28
<b>Figura 2.21</b>	Ângulo inscrito . . . . .	29
<b>Figura 2.22</b>	Ângulos correspondente ao mesmo arco . . . . .	29
<b>Figura 2.23</b>	Quadrilátero inscrito . . . . .	30
<b>Figura 2.24</b>	Triângulo retângulo em $A$ . . . . .	31
<b>Figura 2.25</b>	Triângulo $ABC$ com mediana ( $m$ ) baixada de $A$ . . . . .	31
<b>Figura 2.26</b>	Triângulo $ABC$ de altura $h$ , inscrito em uma circunferência .	32

<b>Figura 2.27</b>	Triângulo de lados $a, b, c$ . . . . .	33
<b>Figura 3.1</b>	Matthew Stewart . . . . .	34
<b>Figura 3.2</b>	Triângulo $ABC$ de lados $a, b$ e $c$ com uma seviana $(d)$ . . . . .	36
<b>Figura 3.3</b>	Triângulo $ABC$ com prolongamento da ceviana $AD$ . . . . .	37
<b>Figura 3.4</b>	Triângulo $ABC$ com a mediana baixada de $C$ ao lado $AB$ . . . . .	38
<b>Figura 3.5</b>	Triângulo $ABC$ com prolongamento da ceviana $BM$ . . . . .	39
<b>Figura 3.6</b>	Quadrilátero $ABCD$ . . . . .	40
<b>Figura 3.7</b>	Napoleão Bonaparte . . . . .	46
<b>Figura 3.8</b>	Triângulo equilátero $MNP$ obtido a partir do triângulo $ABC$ . . . . .	48
<b>Figura 3.9</b>	Ângulo $\widehat{AEC}$ obtido a partir do triângulo retângulo $EFD$ . . . . .	50
<b>Figura 3.10</b>	Triângulo equilátero obtido a partir do triângulo retângulo . . . . .	51
<b>Figura 3.11</b>	Quadrados e triângulos obtidos do quadrilátero $ABCD$ . . . . .	52
<b>Figura 3.12</b>	Quadrados e triângulos obtidos do quadrilátero $ABCD$ . . . . .	53
<b>Figura 3.13</b>	Quadrados e triângulos obtidos do quadrilátero $ABCD$ (2) . . . . .	54
<b>Figura 3.14</b>	Van Aubel . . . . .	56
<b>Figura 3.15</b>	Segmentos congruentes obtidos a partir de quadriláteros . . . . .	56
<b>Figura 3.16</b>	Triângulo $ABC$ com três cevianas concorrendo no ponto $P$ . . . . .	57
<b>Figura 3.17</b>	Triângulo $ABC$ com três cevianas concorrendo em um ponto . . . . .	59
<b>Figura 3.18</b>	Triângulo $ABC$ com três cevianas concorrendo no ponto $T$ . . . . .	60
<b>Figura 3.19</b>	Triângulos semelhantes de razão $1/2$ . . . . .	61
<b>Figura 3.20</b>	Triângulo $ABC$ com três cevianas concorrendo no ponto $I$ . . . . .	61
<b>Figura 3.21</b>	Menelaus de Alexandria . . . . .	62
<b>Figura 3.22</b>	Triângulo $ABC$ cortado por uma transversal . . . . .	63
<b>Figura 3.23</b>	Segmentos perpendiculares dos vértice do triângulo à transversal . . . . .	64
<b>Figura 3.24</b>	Triângulo $ABC$ com prolongamento do lado $AC$ . . . . .	64
<b>Figura 3.25</b>	Triângulo $ABC$ com prolongamento dos lados . . . . .	65
<b>Figura 3.26</b>	Triângulo $ABC$ cortado pela transversal $EM$ . . . . .	66
<b>Figura 3.27</b>	Círculo com o triângulo $ABC$ inscrito . . . . .	67

<b>Figura 3.28</b>	Círculo de diâmetro $AB$ e outras construções geométricas . . .	68
<b>Figura 3.29</b>	Triângulo $ABC$ cortado pela transversal $EM$ . . . . .	69
<b>Figura 3.30</b>	Triângulo $ABC$ com $MF$ e $NH$ perpendiculares ao lado $BC$	70
<b>Figura 3.31</b>	Cláudio Ptolomeu . . . . .	71
<b>Figura 3.32</b>	Quadrilátero inscrito . . . . .	72
<b>Figura 3.33</b>	Quadrilátero $ABCD$ inscrito . . . . .	73
<b>Figura 3.34</b>	Pentágono inscrito . . . . .	74
<b>Figura 3.35</b>	Losango $ABCD$ . . . . .	76
<b>Figura 3.36</b>	Quadrilátero $ABCD$ inscrito em um círculo . . . . .	77
<b>Figura 3.37</b>	Quadrilátero inscrito construído a partir do losango $ABCD$ .	78
<b>Figura 3.38</b>	Hiparco de Nicéia . . . . .	79
<b>Figura 3.39</b>	Quadrilátero inscrito em uma circunferência de raio $R$ . . . .	80
<b>Figura 3.40</b>	Quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro $d$ . .	81
<b>Figura 3.41</b>	Quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro $q$ . .	82
<b>Figura 3.42</b>	Quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro $AB$	84
<b>Figura 3.43</b>	Quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro $d$ . .	85
<b>Figura 3.44</b>	Leonhard Euler . . . . .	86
<b>Figura 3.45</b>	Triângulos inscrito em um círculo . . . . .	87
<b>Figura 3.46</b>	Triângulo inscrito e circunscrito a um círculo . . . . .	89
<b>Figura 3.47</b>	Giovanne Ceva . . . . .	90
<b>Figura 3.48</b>	Triângulo com as cevianas baixadas dos vértices $A$ , $B$ e $C$ . .	92
<b>Figura 3.49</b>	Triângulo $ABC$ com $BC \parallel B'C'$ . . . . .	93
<b>Figura 3.50</b>	Triângulo $ABC$ com três cevianas concorrentes em $X$ . . . . .	94
<b>Figura 3.51</b>	Encontro das cevianas exterior ao triângulo $ABC$ . . . . .	94
<b>Figura 3.52</b>	Quadrados obtidos a partir dos catetos do triângulo $ABC$ . .	95
<b>Figura 3.53</b>	Quadrados obtidos a partir dos catetos do triângulo $ABC$ (2)	96

# SUMÁRIO

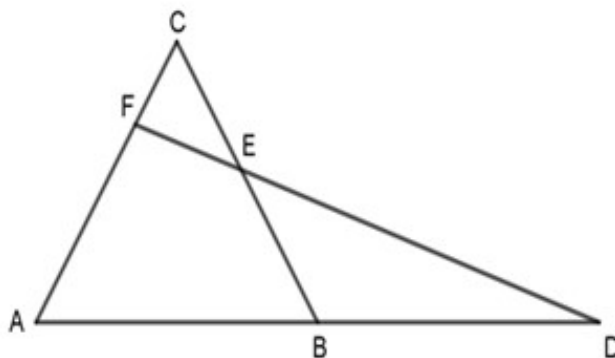
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>RESUMO TEÓRICO</b>	<b>16</b>
2.1	Cevianas	16
2.2	Leis dos cossenos	17
2.3	Semelhança entre triângulos	17
2.3.1	CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	18
2.4	Congruência de triângulos	20
2.4.1	CASOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS	21
2.5	Teorema da bissetriz interna	24
2.6	Teorema de Pitágoras	24
2.7	Baricentro de um triângulo	25
2.8	Área de um triângulo qualquer	26
2.9	Potência de ponto à circunferência	26
2.10	O círculo inscrito e circunscrito a um triângulo	28
2.11	Ângulo inscrito na circunferência	29
2.12	Ângulos inscritos que correspondem ao mesmo arco	29
2.13	Condição para um quadrilátero ser inscritível	30
2.14	Relações métricas no triângulo retângulo	30
2.15	Teorema da mediana ou de Apolônio	31
2.16	Teorema do produto dos lados (triângulo inscrito)	31
2.17	Média aritmética	32
2.18	Média geométrica	32
2.19	Cálculo da área de um triângulo pela fórmula de Heron	33
<b>3</b>	<b>TEOREMAS E APLICAÇÕES</b>	<b>34</b>
3.1	Teorema de Stewart	34

3.1.1	APLICAÇÕES . . . . .	36
3.1.2	RESOLUÇÃO SEM O USO DO TEOREMA DE STEWART . . . . .	41
<b>3.2</b>	<b>Teorema de Napoleão . . . . .</b>	<b>46</b>
3.2.1	APLICAÇÕES . . . . .	49
<b>3.3</b>	<b>Teorema de Van Aubel . . . . .</b>	<b>56</b>
3.3.1	APLICAÇÕES . . . . .	59
<b>3.4</b>	<b>Teorema de Menelaus . . . . .</b>	<b>62</b>
3.4.1	APLICAÇÕES . . . . .	66
3.4.2	RESOLUÇÃO SEM O USO DO TEOREMA DE MENELAUS . . . . .	69
<b>3.5</b>	<b>Teorema de Ptolomeu . . . . .</b>	<b>71</b>
3.5.1	APLICAÇÕES . . . . .	73
3.5.2	RESOLUÇÃO SEM O USO DO TEOREMA DE PTOLOMEU . . . . .	76
<b>3.6</b>	<b>Teorema de Hiparco . . . . .</b>	<b>79</b>
3.6.1	APLICAÇÕES . . . . .	80
3.6.2	RESOLUÇÃO SEM USO DO TEOREMA DE HIPARCO . . . . .	85
<b>3.7</b>	<b>Teorema de Euler . . . . .</b>	<b>86</b>
3.7.1	APLICAÇÕES . . . . .	88
3.7.2	RESOLUÇÃO SEM O USO DO TEOREMA DE EULLER . . . . .	88
<b>3.8</b>	<b>Teorema de Ceva . . . . .</b>	<b>90</b>
3.8.1	APLICAÇÕES . . . . .	95
3.8.2	RESOLUÇÃO SEM O USO DO TEOREMA DE CEVA . . . . .	96
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>98</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>100</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A Geometria divide-se em três grandes áreas: Plana, Espacial e Analítica. Neste trabalho, desenvolveu-se uma pesquisa sobre o uso de determinados teoremas e sua aplicação na resolução de questões de nível mais avançado. Posteriormente, foi feita a resolução de algumas dessas questões, anteriormente solucionadas com o auxílio de teoremas específicos, por outros métodos. Essa abordagem visa demonstrar a eficácia do teorema na resolução de problemas, sendo que muitos desses teoremas não são abordados nem no ensino fundamental, nem no ensino médio. A Geometria Plana é um dos pilares fundamentais da Matemática; por isso, seu ensino é essencial para que os alunos compreendam plenamente as demais áreas da Geometria. Com uma vasta gama de teoremas e conceitos, possui aplicações práticas em diversos campos, especialmente na Engenharia Civil. Contudo, apesar de sua relevância, nota-se que alguns desses teoremas são pouco explorados no currículo do ensino médio brasileiro, como o Teorema de Menelau, descrito a seguir.

Considere a figura abaixo obtida a partir do triângulo  $ABC$ .



Fonte: O autor

Se os pontos D, E e F estão alinhados, então

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

Esse fato evidencia uma lacuna significativa, uma vez que diversas questões podem ser resolvidas de maneira mais simples e eficiente com a aplicação desse teorema, conforme será demonstrado no decorrer deste trabalho, ao abordar o estudo detalhado do referido teorema. Tal lacuna torna-se ainda mais evidente para estudantes que aspiram ingressar em instituições de ensino de excelência, como o Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) e o Instituto Militar de Engenharia (IME), ou que participam de competições de alto rendimento, como as Olimpíadas de Matemática, bem como para aqueles que desejam ingressar em escolas das forças armadas, tais como a EsP-CEX, ESA, EsLog, Escola Naval, EAM, Cursos de Soldado Fuzileiro Naval, Curso de Formação de Sargento Músico, Fuzileiro Naval, AFA, EEAR e EPCAR.

A presente pesquisa tem como objetivo explorar a aplicação de teoremas importantes da geometria plana, não abordados no ensino médio, na resolução de questões desses exames e competições. Além disso, busca-se resolver as mesmas questões por outros métodos, ressaltando a importância desses teoremas para alunos que desejam participar de olimpíadas de matemática, ingressar em universidades de alto nível ou em instituições das forças armadas, nas quais é notável, pelos problemas presentes nas provas, a relevância do uso desses teoremas. A escolha dos teoremas foi feita com base em sua importância e potencial de aplicação em problemas típicos encontrados nos vestibulares do ITA, IME, e nas provas de Olimpíadas de Matemática e instituições das forças armadas.

A geometria plana é de grande relevância na formação do aluno, especialmente para aqueles que buscam participar dos exames e competições já mencionados. Além do conhecimento de outros temas relacionados à geometria plana, o domínio desses teoremas proporcionará ao aluno melhores resultados em provas de nível avançado, considerando que, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do ensino médio, esses teoremas não são abordados. Para alcançar esse objetivo, serão analisadas diversas questões de exames e competições de nível avançado, junto de suas resoluções e de outras alternativas de resolução, para que o aluno compreenda a importância do

uso desses teoremas.

A relevância deste estudo está na possibilidade de oferecer aos educadores e estudantes um material adicional de preparação para esses desafios acadêmicos, bem como aos professores o conhecimento dos teoremas e suas aplicações, possibilitando seu uso em aulas ou provas. Ao suprir a lacuna presente no ensino médio e oferecer uma abordagem mais profunda e prática dos teoremas da geometria plana, espera-se contribuir para o desenvolvimento de habilidades matemáticas mais robustas e para a formação de estudantes mais preparados e confiantes.

Dessa forma, esta dissertação não só reforça a importância da geometria plana no ensino da matemática, mas também destaca a necessidade de uma abordagem mais ampla e integrada no ensino médio, que contemple os diversos aspectos e aplicações dessa área do conhecimento. Com isso, busca-se promover uma educação matemática mais completa e eficaz, que capacite os estudantes a enfrentar com sucesso os desafios impostos pelos exames e competições de alto nível. Inicialmente, será apresentado um resumo teórico no Capítulo 1, com assuntos necessários para a demonstração desses teoremas. No Capítulo 2, serão expostos os teoremas, acompanhados de suas demonstrações. Em seguida, serão analisadas questões de provas anteriores dessas instituições e competições, demonstrando como o conhecimento aprofundado desses teoremas pode ser um diferencial decisivo para os candidatos, resolvendo as mesmas questões por outros métodos.

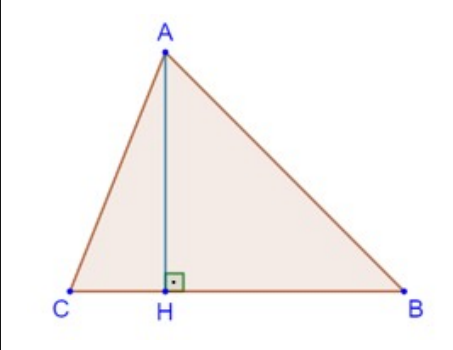
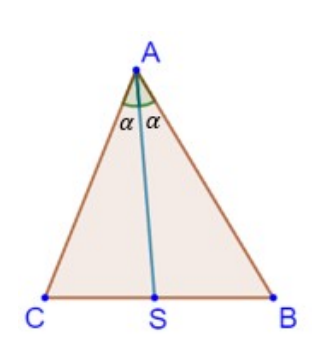
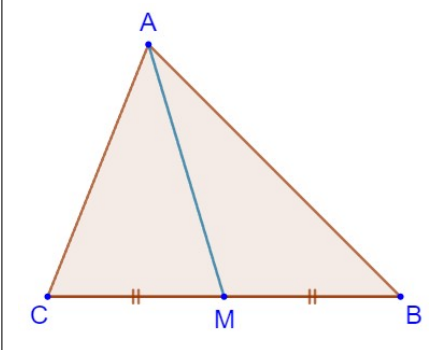
## 2 RESUMO TEÓRICO

### 2.1 Cevianas

**Definição 2.1.** *Uma ceviana é um segmento de reta que parte de um vértice de um triângulo e intercepta o lado oposto (ou seu prolongamento).*

As cevianas podem ter propriedades específicas, dependendo de como dividem o triângulo. Alguns exemplos importantes de cevianas notáveis estão apresentados no Quadro 2.1.

Quadro 2.1: Cevianas notáveis

		
Altura ( $\overline{AH}$ )	Bissetriz interna ( $\overline{AS}$ )	Mediana ( $\overline{AM}$ )

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

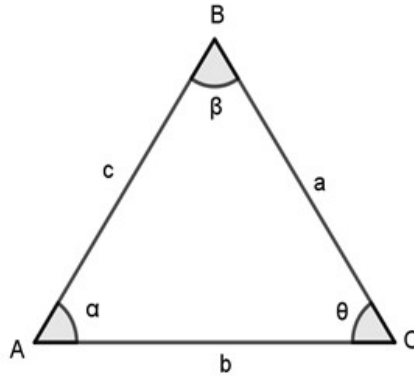
Observações:

- Em um **triângulo qualquer**, a altura, a mediana e a bissetriz partindo do mesmo vértice geralmente são três segmentos distintos, ou seja, não coincidem.
- Em um **triângulo isósceles**, a altura, a mediana e a bissetriz coincidem em um único segmento de reta. Ou seja, a mesma linha serve simultaneamente como altura, mediana e bissetriz quando traçada a partir do vértice do ângulo formado pelos lados congruentes até o lado oposto (a base).
- Em um **triângulo equilátero**, todas as cevianas principais (altura, mediana e bissetriz) coincidem quando traçadas a partir do mesmo vértice. Isso significa que, ao conectar um vértice ao lado oposto, o segmento resultante será simultaneamente altura, mediana e bissetriz.

## 2.2 Leis dos cossenos

Considere o triângulo ABC, de ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\theta$  e lados opostos aos ângulos, respectivamente  $a, b$  e  $c$  conforme a Figura 2.1. A lei dos cossenos pode ser dada por

**Figura 2.1:** Triângulo ABC com ângulos internos e lados em destaque



Fonte: O autor

uma das seguintes expressões:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \theta.$$

## 2.3 Semelhança entre triângulos

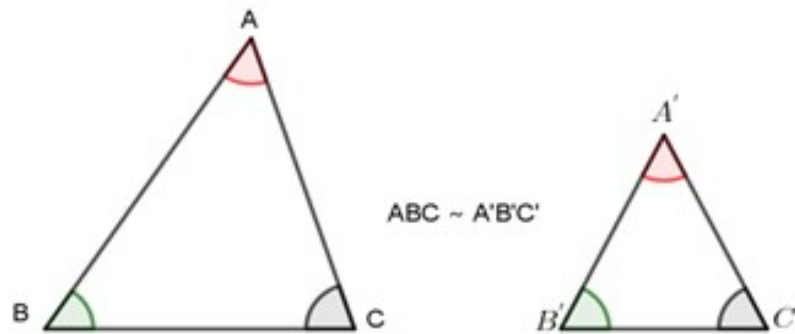
Dados dois triângulos ABC e A'B'C', dizemos que eles são semelhantes se, e somente se, os ângulos correspondentes são congruentes na mesma ordem, e os lados correspondentes são ordenadamente proporcionais.

Ângulos correspondentes congruentes:  $\widehat{A} = \widehat{A'}$ ,  $\widehat{B} = \widehat{B'}$ ,  $\widehat{C} = \widehat{C'}$ .

Lados correspondentes proporcionais:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k$$

**Figura 2.2:** Triângulos semelhantes



Fonte: O autor

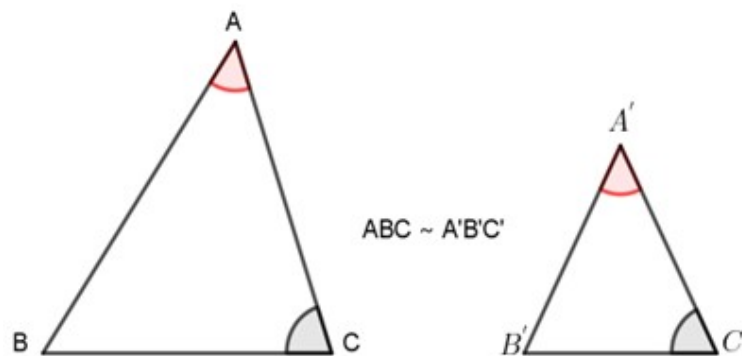
O número  $k$  nas razões entre os lados é chamado de **constante de proporcionalidade**, e as razões são chamadas de **razões de proporcionalidade**.

### 2.3.1 CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

#### a) Caso Ângulo – Ângulo (AA)

Dizemos que dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um triângulo são iguais a dois ângulos do outro triângulo.

**Figura 2.3:** Triângulos semelhantes pelo caso (AA)



Fonte: O autor

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

#### b) Caso Lado – Ângulo – Lado (LAL)

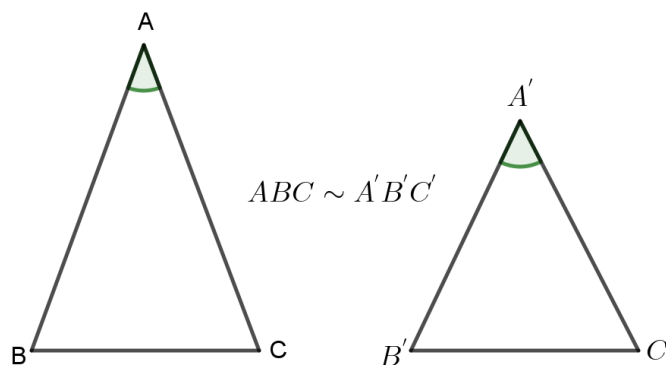
Dois triângulos são semelhantes se dois lados são proporcionais e os ângulos entre esses lados são congruentes, isto é, possuem a mesma medida.

Observe a Figura 2.4. A condição para que esses dois triângulos sejam semelhantes é que a razão entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  seja igual à razão entre os lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{A'C'}$ , ou seja, que os lados sejam proporcionais. Além disso, o ângulo compreendido entre esses lados deve ter a mesma medida, isto é,  $\widehat{A} = \widehat{A'}$ .

$$\begin{cases} \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{cases} \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

Nesse caso, também vale a volta da afirmação, ou seja, se dois triângulos são semelhantes, então podemos afirmar que dois de seus lados são proporcionais e que os ângulos entre esses lados são iguais.

**Figura 2.4:** Triângulos semelhantes pelo caso (LAL)



Fonte: O autor

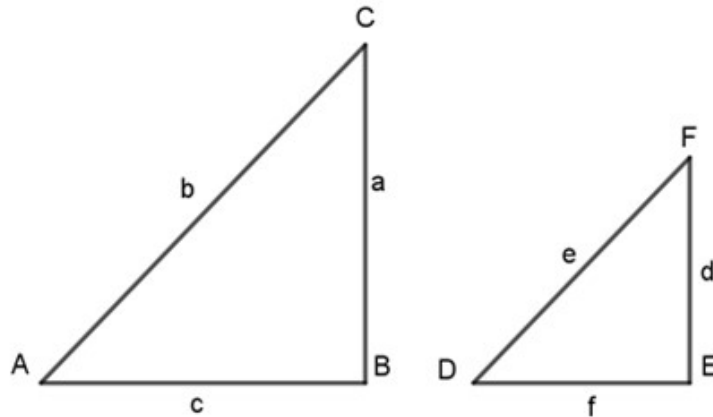
### c) Caso Lado – Lado – Lado (LLL)

Dois triângulos ABC e DEF são ditos semelhantes se os três lados do primeiro triângulo são ordenadamente proporcionais aos lados do segundo triângulo.

Observe a Figura 2.5

Nesse caso, para que os triângulos sejam semelhantes, os lados correspondentes devem ser proporcionais, ou seja,

**Figura 2.5:** Triângulos semelhantes pelo caso (LLL)



Fonte: O autor

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \iff \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

## 2.4 Congruência de triângulos

Definimos dois triângulos como congruentes quando é possível perceber uma correspondência de igualdade entre as medidas dos lados e dos ângulos desses triângulos, ou seja, dois triângulos são congruentes quando os lados correspondentes possuem comprimentos iguais e os ângulos correspondentes possuem as mesmas medidas.

Na Figura 2.6 o  $\triangle ABC$  é congruente ao  $\triangle DEF$ . Analisando a imagem, os triângulos são congruentes pelo fato dos lados e ângulos correspondentes possuírem as mesmas medidas.

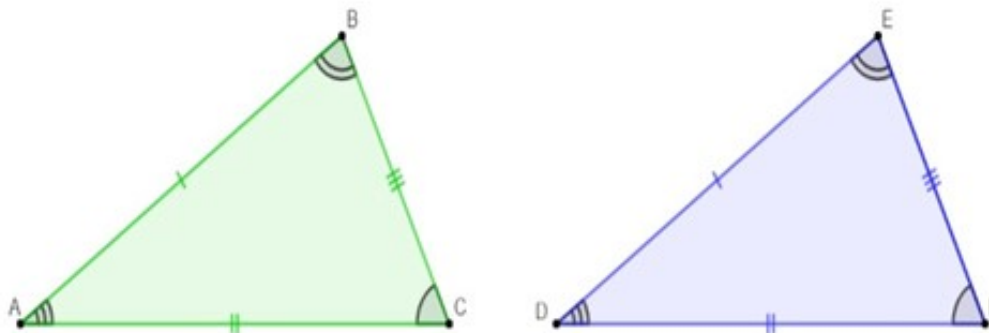
Analisando os lados, temos:  $\overline{AB} = \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} = \overline{DF}$  e  $\overline{BC} = \overline{EF}$ .

Quando analisamos os ângulos, temos:  $\hat{A} = \hat{D}$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$  e  $\hat{C} = \hat{F}$ .

Como todas as medidas são congruentes, então, esses triângulos são congruentes. Assim, utilizamos a seguinte notação matemática para representar essa congruência:  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  (lê-se: o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $DEF$ ).

**Observação:** Quando utilizamos essa notação, a ordem dos vértices é relevante, pois quando escrevemos dessa maneira, significa que o vértice  $A$  é correspondente ao vértice

**Figura 2.6:** Triângulos congruentes



Fonte: O autor

D, que o vértice B corresponde ao vértice E, e que o vértice C é correspondente ao vértice F.

#### 2.4.1 CASOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Para identificar se os triângulos são congruentes, não precisamos comparar todos os seus ângulos e lados, pois existem o que conhecemos como casos de congruência, em que três elementos são o suficiente para dizermos se os triângulos são congruentes. Existem quatro casos de congruência, são eles:

- **1º caso de congruência:** Lado, Lado, Lado (LLL);
- **2º caso de congruência:** Ângulo, Lado, Ângulo (LAL);
- **3º caso de congruência:** Ângulo, Lado, Ângulo (ALA);
- **4º caso de congruência:** Lado, Ângulo, Ângulo oposto (LAAo).

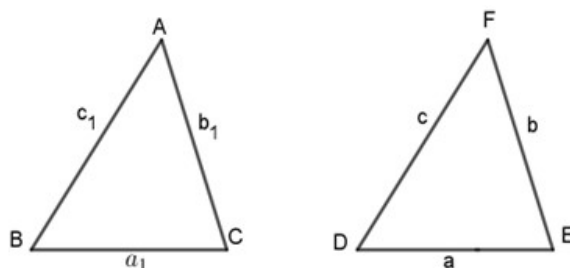
##### a) caso de congruência: Lado, Lado, Lado (LLL)

Se os lados de um triângulo forem congruentes, ordenadamente aos lados de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Observe os triângulos da Figura 2.7, em que  $a = a_1$ ,  $b = b_1$  e  $c = c_1$ .

Como  $\frac{c_1}{c} = \frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a} = 1$  os triângulos são congruentes.

**Figura 2.7:** Triângulos congruentes pelo caso (LLL)



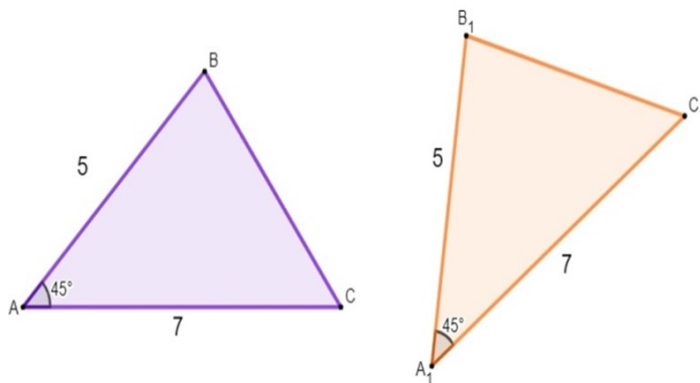
Fonte: O autor

**b) caso de congruência: Ângulo, Lado, Ângulo (LAL)**

Dados dois triângulos  $ABC$  e  $A_1B_1C_1$ , se ao comparar as medidas dos lados e ângulos houver um lado, um ângulo e outro lado congruentes, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes. É importante que a ordem seja respeitada: nesse caso, o ângulo deve estar necessariamente entre os dois lados.

Na Figura 2.8, os triângulos são congruentes, pois  $\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = 5$ ,  $\overline{CA} = \overline{C_1A_1} = 7$  e  $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1 = 45^\circ$ .

**Figura 2.8:** Triângulos congruentes pelo caso (LAL)



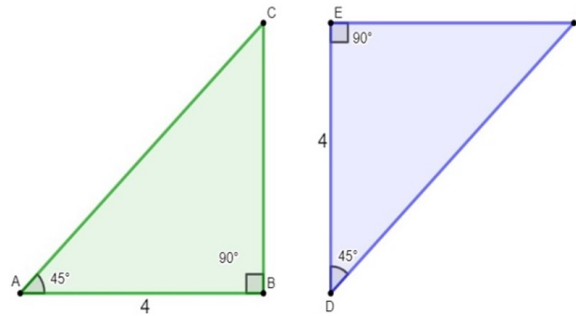
Fonte: O autor

**c) caso de congruência: Ângulo, Lado, Ângulo (ALA)**

Dados dois triângulos quaisquer  $ABC$  e  $DEF$ , se dois ângulos forem congruentes e o lado entre esses ângulos também for congruente, então esses triângulos serão congruentes. Assim como no caso anterior, a ordem é importante, ou seja, o lado congruente deve estar entre os dois ângulos.

Observe os triângulos da Figura 2.9.

**Figura 2.9:** Triângulos congruentes pelo caso (ALA)



Fonte: O autor

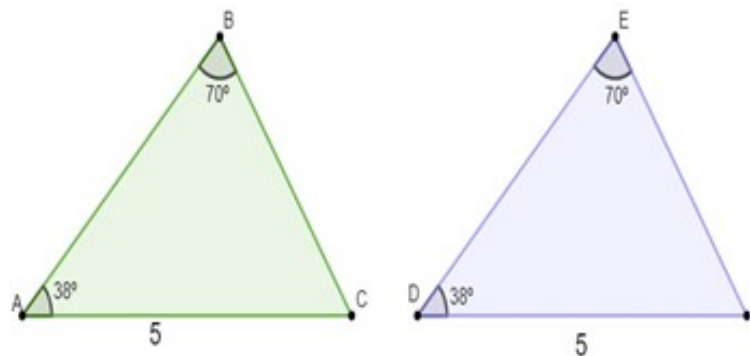
Como  $\angle BAC = \angle FDA = 45^\circ$ ,  $\angle CBA = \angle DEF = 90^\circ$  e  $\overline{AB} = \overline{DE} = 4$ , os triângulos são congruentes.

**d) caso de congruência: Lado, Ângulo, Ângulo oposto (LAAo)**

Ao compararmos dois triângulos quaisquer que possuem um lado, um ângulo adjacente a esse lado e um ângulo oposto congruentes, podemos concluir que esses triângulos são congruentes.

Considere os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  da Figura 2.10. Como  $\angle ABC = \angle DEF$ ,  $\angle CAB = \angle FDE$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ , em que os lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{DF}$  são opostos, respectivamente, aos ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle DEF$ , segue que os triângulos são congruentes.

**Figura 2.10:** Triângulos congruentes pelo caso (LAAo)

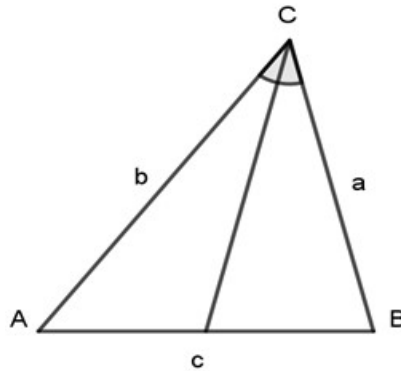


Fonte: O autor

## 2.5 Teorema da bissetriz interna

Considere o triângulo da Figura 2.12.

**Figura 2.11:** Bissetriz interna do ângulo  $C$  no triângulo  $ABC$



Fonte: O autor

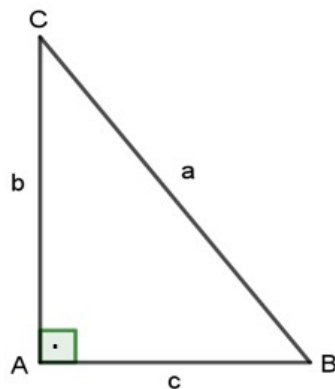
Se a bissetriz interna  $\overline{CD}$  do ângulo intersecta o lado  $\overline{AB}$  no ponto  $D$ , então  $D$  divide o lado  $\overline{AB}$  em dois segmentos proporcionais aos outros dois lados, isto é,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}.$$

## 2.6 Teorema de Pitágoras

Seja  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ . Se  $b, c$  são as medidas dos catetos e  $a$  a medida da hipotenusa (Figura 2.12), então pelo teorema de Pitágoras teremos

**Figura 2.12:** Triângulo Retângulo em  $A$



Fonte: O autor

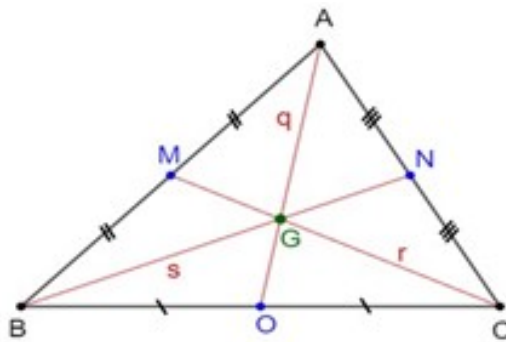
$$a^2 = b^2 + c^2$$

## 2.7 Baricentro de um triângulo

Dado um triângulo  $ABC$  qualquer, definimos o baricentro como o ponto  $G$  de encontro das medianas do triângulo, como sendo o ponto de encontro das medianas  $\overline{AO}$ ,  $\overline{CM}$  e  $\overline{BN}$ .

Na Figura 2.13, as cevianas  $q$ ,  $r$  e  $s$  são medianas e  $G$  é o encontro dessas medianas, isto é,  $G$  é o baricentro do triângulo  $ABC$ .

**Figura 2.13:** Baricentro de um triângulo

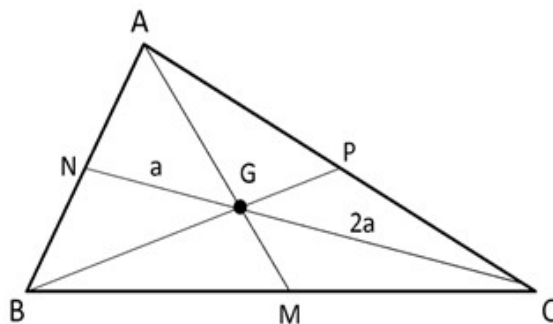


Fonte: O autor

O baricentro ( $G$ ) divide cada mediana na razão um para dois. Na Figura 2.14, temos que  $\overline{GO} = 2\overline{GA}$ ,  $\overline{GN} = 2\overline{GB}$  e  $\overline{GM} = 2\overline{GC}$ , isto é,

$$\overline{GO} = \frac{1}{2}\overline{GA}, \quad \overline{GN} = \frac{1}{2}\overline{GB} \quad \text{e} \quad \overline{GM} = \frac{1}{2}\overline{GC}.$$

**Figura 2.14:** Divisão das medianas pelo baricentro ( $G$ )



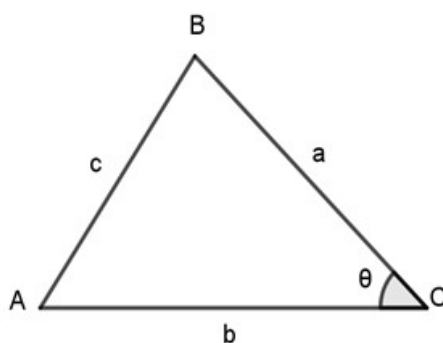
Fonte: O autor

## 2.8 Área de um triângulo qualquer

Existem algumas fórmulas para o cálculo da área de um triângulo, mas para esse resumo teórico será mostrado, a princípio, apenas uma delas. A que será utilizada no capítulo 2. Dado o triângulo  $ABC$  qualquer, sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos seus lados e  $\theta$  o ângulo entre os lados  $a$  e  $b$ , conforme Figura 2.15, a área ( $A$ ) será dada pela fórmula:

$$A = \frac{a \cdot b}{2} \text{sen } \theta.$$

**Figura 2.15:** Área do triângulo  $ABC$  em função do seno



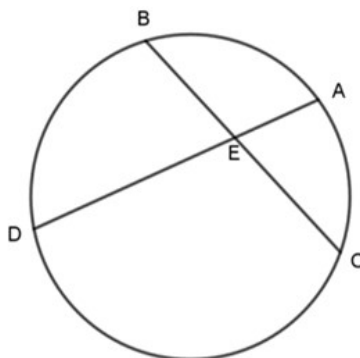
Fonte: O autor

## 2.9 Potência de ponto à circunferência

- 1º CASO: Ponto interior

Considere a figura 2.16.

**Figura 2.16:** Ponto interior à circunferência



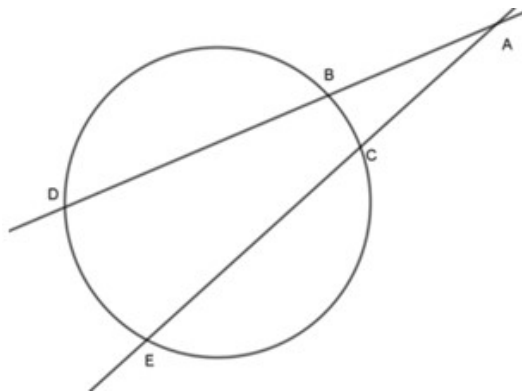
Fonte: O autor

Na Figura 2.16, o ponto  $E$  foi obtido a partir da interseção das cordas  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$ . Quando isso ocorre, é válida a seguinte propriedade:  $\overline{AE} \cdot \overline{ED} = \overline{CE} \cdot \overline{CB}$ .

• **2º CASO: Ponto exterior (Duas secantes)**

Considere a Figura 2.17. Como o ponto  $A$  está localizado fora do círculo e foi obtido pela interseção de duas retas secantes ao mesmo círculo, é válida a seguinte propriedade:  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{AE}$ .

**Figura 2.17:** Ponto exterior formado por duas secantes

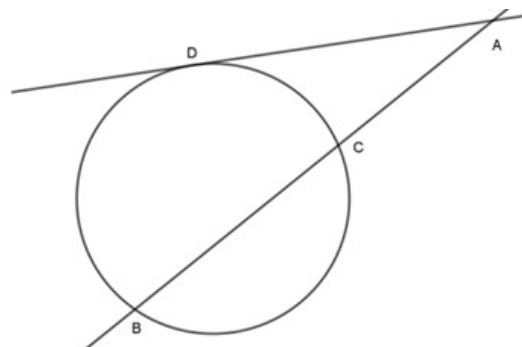


Fonte: O autor

• **3º CASO: Ponto exterior (uma secante e uma tangente)**

Considere a Figura 2.18. Como o ponto  $A$  está situado fora do círculo e foi obtido pela interseção de uma reta secante e uma reta tangente ao mesmo círculo, é válida a seguinte propriedade:  $\overline{AD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AB}$ .

**Figura 2.18:** Ponto exterior formado por uma secante e uma tangente



Fonte: O autor

## 2.10 O círculo inscrito e circunscrito a um triângulo

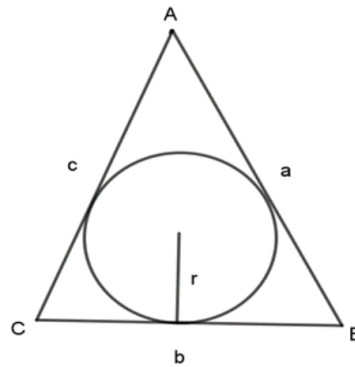
a) Círculo inscrito em um triângulo e a área do triângulo

Considere um círculo de raio  $r$  inscrito em um triângulo  $ABC$  de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  (Figura 2.19), a área ( $A$ ) desse triângulo é dada por

$$A = r \cdot p,$$

onde  $p$  é o semiperímetro do triângulo  $ABC$ , isto é,  $p = \frac{a + b + c}{2}$ .

**Figura 2.19:** Círculo inscrito em um triângulo

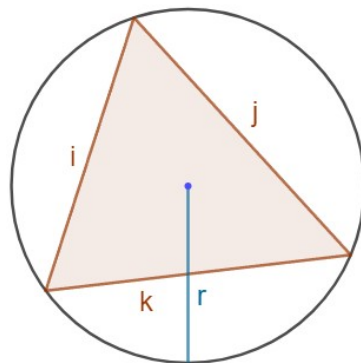


Fonte: O autor

b) Círculo circunscrito a um triângulo

Considere um círculo de raio  $r$  circunscrito a um triângulo de lados  $i$ ,  $j$  e  $k$ , conforme a Figura 2.20. A área ( $A$ ) desse triângulo é dada por

**Figura 2.20:** Círculo circunscrito a um triângulo



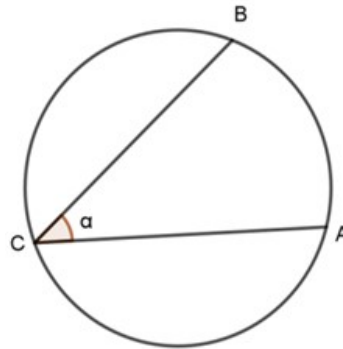
$$A = \frac{i \cdot j \cdot k}{4r}.$$

Fonte: O autor

## 2.11 Ângulo inscrito na circunferência

Observe a Figura 2.21.

**Figura 2.21:** Ângulo inscrito



Fonte: O autor

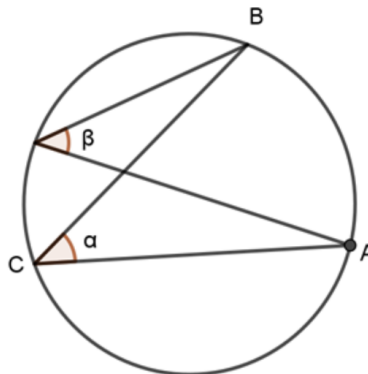
Como o ângulo  $\alpha$  é inscrito ao círculo, vale a seguinte propriedade:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

## 2.12 Ângulos inscritos que correspondem ao mesmo arco

Na Figura 2.22 os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são inscritos e formam o mesmo arco  $\widehat{AB}$ . Logo, vale a seguinte propriedade,  $\alpha = \beta$ .

**Figura 2.22:** Ângulos correspondente ao mesmo arco



Fonte: O autor

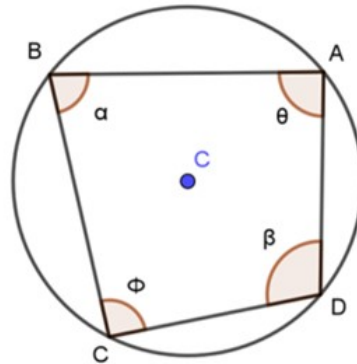
## 2.13 Condição para um quadrilátero ser inscrito

Um quadrilátero convexo  $ABCD$  é inscrito em uma circunferência se, e somente se, a soma de seus ângulos opostos for igual a  $180^\circ$ , ou seja, se

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ.$$

Na Figura 2.23 o quadrilátero  $ABCD$  está inscrito em uma circunferência, logo:  $\alpha + \beta = 180^\circ$  e  $\varphi + \theta = 180^\circ$ .

**Figura 2.23:** Quadrilátero inscrito



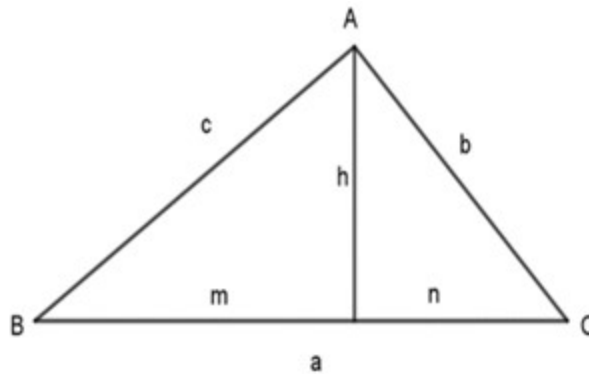
Fonte: O autor

## 2.14 Relações métricas no triângulo retângulo

Considere um triângulo retângulo  $ABC$  de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  e, altura  $h$ , cujas projeções ortogonais de  $b$  e  $c$  são, respectivamente,  $n$  e  $m$  conforme Figura 2.24. Da semelhança entre os triângulos  $ABC$ ,  $ADB$  e  $ADC$ , em que  $D$  é o pé da altura ( $h$ ) baixada de  $A$ . Segue-se as seguintes relações:

- i)  $a \cdot h = b \cdot c$
- ii)  $c^2 = a \cdot m$
- iii)  $b^2 = a \cdot n$
- iv)  $h^2 = m \cdot n$
- v)  $a^2 = b^2 + c^2$  (Teorema de Pitágoras)

**Figura 2.24:** Triângulo retângulo em A



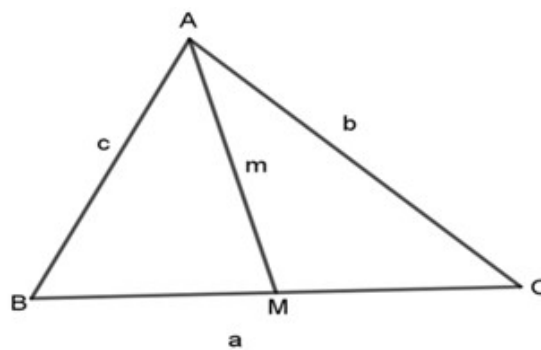
Fonte: O autor

## 2.15 Teorema da mediana ou de Apolônio

Dado um triângulo  $ABC$  qualquer, seja  $m$  a mediana e  $a, b, c$  as medidas dos lados (Figura 2.25). O teorema de Apolônio garante que:

$$m^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

**Figura 2.25:** Triângulo  $ABC$  com mediana ( $m$ ) baixada de  $A$

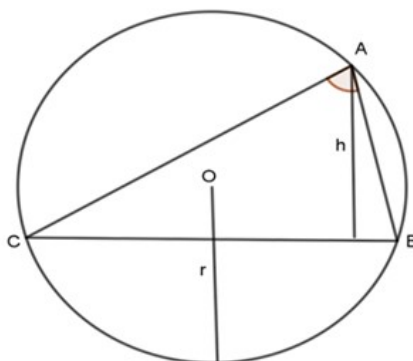


Fonte: O autor

## 2.16 Teorema do produto dos lados (triângulo inscrito)

Considere o triângulo  $ABC$ , cuja altura é  $h$ , inscrito em uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , conforme a Figura 2.26. Então, vale a relação  $AC \cdot AB = 2r \cdot h$ .

**Figura 2.26:** Triângulo  $ABC$  de altura  $h$ , inscrito em uma circunferência



Fonte: O autor

## 2.17 Média aritmética

A média aritmética simples  $\bar{x}_s$  de um conjunto de dados com os elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é dada por:

$$\bar{x}_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n},$$

onde  $n$  é o número total de elementos do conjunto de dados.

## 2.18 Média geométrica

Seja  $A$  um conjunto de dados  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , com  $n$  elementos, a média geométrica desse conjunto é calculada por:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

**Propriedade:** Seja  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , e sejam também  $M_a$  e  $M_g$  as médias aritmética e geométrica, respectivamente, desse conjunto. Então, temos:

$$M_a \geq M_g.$$

## 2.19 Cálculo da área de um triângulo pela fórmula de Heron

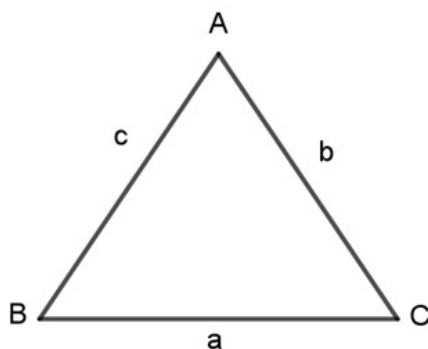
A fórmula de Heron permite determinar a área de um triângulo qualquer a partir do conhecimento das medidas dos seus três lados.

Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos lados de um triângulo  $ABC$  qualquer (conforme Figura 2.27), então podemos calcular a área ( $A$ ) desse triângulo pela fórmula:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

em que  $s$  é o semiperímetro do triângulo, isto é,  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

**Figura 2.27:** Triângulo de lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$



Fonte: O autor

## 3 TEOREMAS E APLICAÇÕES

### 3.1 Teorema de Stewart

**Figura 3.1:** Matthew Stewart



Matthew Stewart (1717-1785) nasceu em Rothesay, na parte inferior do Firth of Clyde, na Escócia, numa pequena ilha chamada Ilha Bute. Educado na Rothesay Grammar School, ingressou na Universidade de Glasgow em 1734, onde estudou com o filósofo Francis Hutcheson e o matemático Robert Simson, com quem aprofundou seus conhecimentos em geometria.

A amizade entre Stewart e Simson surgiu, em parte, por uma admiração mútua por Pappus de Alexandria, resultando em trocas frequentes sobre o *De Locis Planis*, de Apolônio de Perga, e o *Porisms*, de Euclides, por vários anos. Essas correspondências indicam que Stewart passou várias semanas em Glasgow, começando em 1743, auxiliando Simson na produção de seu *Apollonii Locorum Planorum Libri II*, publicado em 1749.

Por volta dessa época, seu pai, o Reverendo Dugald Stewart, então Ministro de Rothesay, persuadiu Matthew Stewart a ingressar no ministério. Ele foi aceito pelo Presbitério de Dunoon em maio de 1744 e tornou-se ministro em Roseneath, Dumbartonshire, um ano depois. Contudo, antes de iniciar sua carreira no ministério,

Stewart assistiu a palestras de Colin Maclaurin na Universidade de Edimburgo, durante as sessões de 1742 e 1743. Com a morte de Maclaurin em 1746, sua cadeira ficou vaga, e, pouco depois, Stewart deixou o ministério para assumir o posto, talvez auxiliado por sua importante obra *Some General Theorems of Considerable Use in the Higher Parts of Mathematics* [15].

Foi nessa obra que Stewart apresentou a Proposição II, hoje conhecida como o teorema de Stewart, uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo e uma ceviana qualquer. No entanto, ele não apresentou uma demonstração para esse teorema. O teorema foi posteriormente demonstrado em 1751 por Thomas Simpson (1710-1761), em 1780 por Leonard Euler (1707-1783) e em 1803 por Lazare N. M. Carnot (1753-1823). Stewart foi um estudioso da geometria que prezava, em seus trabalhos, a simplicidade das demonstrações geométricas [15].

**Teorema 1 (Teorema de Stewart).** *Seja um triângulo  $ABC$  qualquer, cujos lados medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Seja  $d$  uma ceviana que divide o lado  $a$  em segmentos de medidas  $m$  e  $n$ . Então,*

$$c^2n + b^2m = d^2a + mna.$$

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo com lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Marcamos um ponto  $D$  no lado  $BC$  de modo a obter a ceviana  $AD$ , a qual chamaremos de  $d$ . Denotando  $\overline{BD} = m$  e  $\overline{DC} = n$ , temos a configuração ilustrada na Figura 3.2.

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos  $ADB$  e  $ACD$ , obtemos, respectivamente, que

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2d \cdot m \cdot \cos(\alpha) \tag{3.1}$$

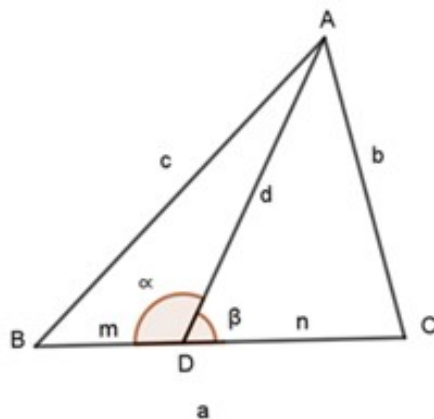
$$b^2 = d^2 + n^2 - 2d \cdot n \cdot \cos(\beta) \tag{3.2}$$

Multiplicando a equação (3.1) por  $n$ , a equação (3.2) por  $m$  e lembrando que  $\cos(\beta) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$ , teremos:

$$c^2n = d^2n + m^2n - 2d \cdot m \cdot n \cdot \cos(\alpha),$$

$$b^2m = d^2m + n^2m + 2d \cdot m \cdot n \cdot \cos(\alpha).$$

**Figura 3.2:** Triângulo  $ABC$  de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  com uma seviana ( $d$ )



Fonte: O autor

Somando termo a termo ambas as equações, obtemos:

$$c^2n + b^2m = d^2n + d^2m + m^2n + n^2m.$$

Daí,

$$c^2n + b^2m = d^2(n + m) + mn(m + n).$$

Como  $m + n = a$ , então

$$c^2n + b^2m = d^2a + mna.$$

□

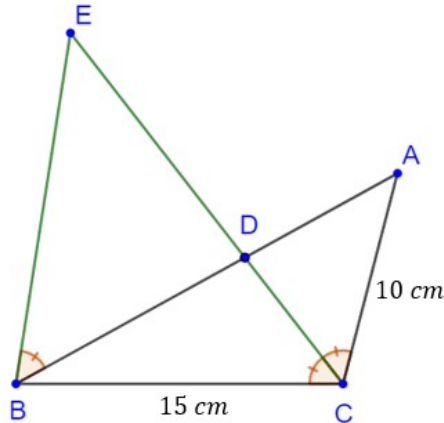
### 3.1.1 APLICAÇÕES

**1. (ITA – 2017 – Questão 20)** Considere o triângulo  $ABC$ , em que os segmentos  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CB}$  e  $\overline{AB}$  medem, respectivamente, 10 cm, 15 cm e 20 cm. Seja  $D$  um ponto do segmento  $AB$  de tal modo que  $CD$  é bissetriz do ângulo  $\widehat{ACB}$  e seja  $E$  um ponto do prolongamento de  $CD$  na direção de  $D$ , tal que  $D\widehat{BE} \equiv D\widehat{CB}$ . A medida, em cm, de  $\overline{CE}$  é tal que:

- a)  $\frac{11\sqrt{6}}{3}$     b)  $\frac{13\sqrt{6}}{3}$     c)  $\frac{17\sqrt{6}}{3}$     d)  $\frac{20\sqrt{6}}{3}$     e)  $\frac{25\sqrt{6}}{3}$

**Solução.** Considere a Figura 3.3 obtida a partir do enunciado da questão.

**Figura 3.3:** Triângulo  $ABC$  com prolongamento da ceviana  $AD$



Fonte: O autor

Fazendo  $\overline{AD} = x$  e  $\overline{DB} = 20 - x$ , pois  $\overline{AB} = 20$  cm. Pelo teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{20 - x}{15} = \frac{x}{10} \Rightarrow 15x = 200 - 10x \Rightarrow x = \frac{200}{25} \Rightarrow x = 8 \text{ cm.}$$

Aplicando o teorema de Stewart no  $\triangle ABC$ , segue

$$15^2 \cdot 8 + 10^2 \cdot 12 - CD^2 \cdot 20 = 8 \cdot 12 \cdot 20 \Rightarrow 1800 + 1200 - 20 \cdot CD^2 = 1920.$$

Daí,  $1080 = 20 \cdot CD^2 \Rightarrow CD = \sqrt{54}$ , então  $\overline{CD} = 3\sqrt{6}$ .

Do enunciado, temos que  $\widehat{DCA} \equiv \widehat{DBE}$ . Além disso,  $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BDE}$ , pois são ângulos opostos pelo vértice. Logo, os triângulos  $ADC$  e  $DBE$  são semelhantes pelo caso (AA). Daí,

$$\frac{8}{\overline{ED}} = \frac{3\sqrt{6}}{12} \Rightarrow \overline{ED} = \frac{16\sqrt{6}}{3}.$$

Assim,

$$\overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = 3\sqrt{6} + \frac{16\sqrt{6}}{3}.$$

Por tanto,

$$\overline{CE} = \frac{25\sqrt{6}}{3}.$$

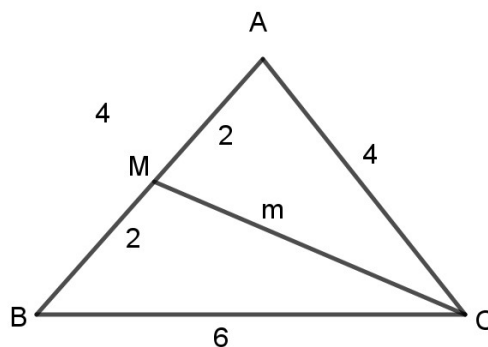
Alternativa correta, letra E.

**2. (EsPCEEx - 2020)** Os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  de um triângulo  $ABC$  medem, respectivamente, 4 cm, 4 cm e 6 cm. Então, a medida, em cm, da mediana relativa ao lado  $AB$  é igual a:

- a)  $\sqrt{14}$    b)  $\sqrt{17}$    c)  $\sqrt{18}$    d)  $\sqrt{21}$    e)  $\sqrt{22}$

**Solução.** Considere a Figura 3.4.

**Figura 3.4:** Triângulo  $ABC$  com a mediana baixada de  $C$  ao lado  $AB$



Fonte: O autor

Seja a mediana  $\overline{CM} = m$ . Aplicando o teorema de Stewart ao triângulo  $ABC$ , temos  $4^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 2 - m^2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 \cdot 2$ , implicando  $32 + 72 - 4m^2 = 16$ .

Portanto,  $m = \sqrt{22}$ .

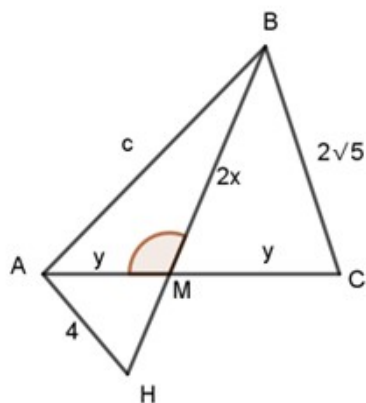
Alternativa correta, letra E.

**3. (IME – 2012 - 2013)** Em um triângulo  $ABC$ , traça-se a mediana  $BM$  ( $\widehat{AMB}$  é obtuso) e, no  $\triangle AMB$ , traça-se a altura  $AH$ , tal que  $\overline{BM} = 2MH$ ,  $\overline{AH} = 4$  cm e  $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$  cm. Qual a medida de  $\overline{BM}$ ?

- a) 1   b) 2   c) 3   d) 4   e) 6

**Solução.** Definindo  $\overline{HM} = x$  e  $\overline{AC} = 2y$ , conclui-se, respectivamente, que  $\overline{BM} = 2x$  e  $\overline{AM} = \overline{CM} = y$  (Figura 3.5).

**Figura 3.5:** Triângulo  $ABC$  com prolongamento da ceviana  $BM$



Fonte: O autor

Aplicando a relação de Stewart no  $\triangle ABC$ , teremos:

$$c^2 \cdot y + (2\sqrt{5})^2 \cdot y - (2x)^2 \cdot 2y = 2y \cdot y \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad c^2 \cdot y + 20y - 8x^2 \cdot y = 2y^3$$

Dividindo a última equação por  $y$ , segue que  $c^2 + 20 - 8x^2 = 2y^2$ . Agora, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos  $\triangle ABH$  e  $\triangle AMH$ , teremos:

$$c^2 = 16 + 9x^2 \quad \text{e} \quad y^2 = 16 + 9x^2$$

Substituindo as duas últimas igualdades em  $c^2 + 20 - 8x^2 = 2y^2$ , obtemos:

$$16 + 9x^2 + 20 - 8x^2 = 2(16 + 9x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Como  $\overline{BM} = 2x$ , então  $\overline{BM} = 4$ .

Alternativa correta, letra D.

**4. (OBM 2011 - 1ª Fase)** Seja  $\triangle XOY$  um triângulo retângulo com  $\angle XOY = 90^\circ$ . Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios de  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Dado que  $XN = 19$  e  $YM = 22$ , determine a medida do segmento  $XY$ .

- a) 24    b) 26    c) 28    d) 30    e) 32

**Solução.** O ponto  $T$  é o baricentro do triângulo  $OXY$ , daí:

$$XT = \frac{2}{3} \cdot 19 = \frac{38}{3}, \quad YT = \frac{2}{3} \cdot 22 = \frac{44}{3}.$$

Aplicando o teorema de Stewart no triângulo  $TXY$ , teremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{38}{3}\right)^2 \cdot x + \left(\frac{44}{3}\right)^2 \cdot x &= \left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot 2x + 2x \cdot x \cdot x \\ \implies \frac{1444 + 1936}{9} &= \frac{20x^2}{9} \implies x^2 = \frac{3380}{20}. \end{aligned}$$

Logo,

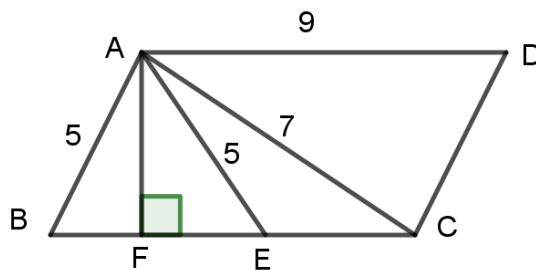
$$x = 13 \quad \text{e} \quad XY = 26.$$

Portanto, a alternativa correta é B.

**5. (Olimpíada Mandacaru – 2023 – nível Lampião)** Considere o seguinte paralelogramo  $ABCD$  da figura abaixo, cujos lados medem 5 m e 9 m. Tonho realizou o trajeto de A até E, perfazendo trajeto de 5 m e Zeca do ponto A até C, perfazendo 7 m. Qual a distância de Tonho até Zeca?

- a)  $\frac{8}{3}$  m    b) 3 m    c) 6 m    d) 12 m    e) 16 m

**Figura 3.6:** Quadrilátero  $ABCD$



Fonte: O autor

Portanto, a alternativa correta é A.

**Solução:** Como o triângulo ABE é isósceles, temos que  $BF = EF = x$ , logo  $EC =$

$9 - 2x$ . Aplicando o teorema de Stewart no triângulo  $ABC$ , teremos:

$$5^2 \cdot (9 - 2x) + 7^2 \cdot 2x = 5^2 \cdot 9 + 9 \cdot 2x \cdot (9 - 2x)$$

$$\Rightarrow 225 - 50x + 98x = 225 + 162x - 36x^2$$

$$\Rightarrow 36x^2 - 114x = 0 \Leftrightarrow (36x - 114)x = 0$$

Daí, para  $x \neq 0$ , segue que:

$$x = \frac{114}{36} = \frac{19}{6}.$$

Assim,

$$9 - 2x = 9 - 2 \cdot \frac{19}{6} = \frac{8}{3}.$$

### 3.1.2 RESOLUÇÃO SEM O USO DO TEOREMA DE STEWART

**1. (ITA – 2017 – Questão 20)** Considere o triângulo  $ABC$ , em que os segmentos  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CB}$  e  $\overline{AB}$  medem, respectivamente, 10 cm, 15 cm e 20 cm. Seja  $D$  um ponto do segmento  $AB$  de tal modo que  $CD$  é bissetriz do ângulo  $\widehat{ACB}$  e seja  $E$  um ponto do prolongamento de  $CD$  na direção de  $D$ , tal que  $D\widehat{BE} \equiv D\widehat{CB}$ . A medida, em cm, de  $\overline{CE}$  é tal que:

- a)  $\frac{11\sqrt{6}}{3}$     b)  $\frac{13\sqrt{6}}{3}$     c)  $\frac{17\sqrt{6}}{3}$     d)  $\frac{20\sqrt{6}}{3}$     e)  $\frac{25\sqrt{6}}{3}$

**Solução.** Considere a Figura 3.3 obtida a partir do enunciado. Como  $\overline{AB} = 20$  cm, se  $\overline{AD} = x$ , então  $\overline{BD} = 20 - x$ . Aplicando o teorema da bissetriz interna ao  $\triangle ABC$ , teremos:

$$\frac{15}{20 - x} = \frac{10}{x}.$$

Daí, encontramos que  $x = 8$  cm. Logo,  $\overline{BD} = 12$  cm.

Agora, vamos descobrir a medida do segmento  $\overline{CD}$ . Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos  $ADC$  e  $DBC$ :

(i) No triângulo  $ADC$ , temos  $8^2 = y^2 + 10^2 - 2 \cdot y \cdot 10 \cdot \cos \alpha$

(ii) No triângulo  $DBC$ , temos  $12^2 = y^2 + 15^2 - 2 \cdot y \cdot 15 \cdot \cos \alpha$

Das equações obtidas em (i) e (ii), obtemos um sistema de duas equações com duas incógnitas, Vejamos:

$$\begin{cases} 64 = y^2 + 100 - 20 \cdot y \cdot \cos \alpha \\ 144 = y^2 + 225 - 30 \cdot y \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por  $-1$  e somando com a segunda equação, teremos que:

$$y \cdot \cos \alpha = \frac{45}{10}.$$

Substituindo a última igualdade em  $64 = y^2 + 100 - 20 \cdot y$ , encontramos  $y = 3\sqrt{6}$ .

Observe que os triângulos  $ADC$  e  $EBD$  da Figura 3.3 são semelhantes pelo caso (A.A). Daí,

$$\frac{x}{8} = \frac{12}{3\sqrt{6}} \Rightarrow x = ED = \frac{16\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Como, } \overline{CE} = \overline{ED} + \overline{CD} = 3\sqrt{6} + \frac{16\sqrt{6}}{3} = \frac{25\sqrt{6}}{3}.$$

Alternativa correta, letra E.

**2. (EsPCEEx - 2020)** Os lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  de um triângulo  $ABC$  medem, respectivamente, 4 cm, 4 cm e 6 cm. Então, a medida, em cm, da mediana relativa ao lado  $AB$  é igual a:

- a)  $\sqrt{14}$    b)  $\sqrt{17}$    c)  $\sqrt{18}$    d)  $\sqrt{21}$    e)  $\sqrt{22}$

**Solução.** Seja  $m$  a medida da mediana  $CM$ , vamos aplicar a lei dos cossenos aos triângulos  $CMA$  e  $CMB$  da Figura 3.5.

- (i) No triângulo  $CMA$ , temos que  $4^2 = 2^2 + m^2 - 2 \cdot 2 \cdot m \cdot \cos \alpha$ , simplificando,  $12 = m^2 - 4 \cdot m \cdot \cos \alpha$ ;
- (ii) No triângulo  $CMB$ , temos que  $6^2 = 2^2 + m^2 - 2 \cdot 2 \cdot m \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$ , como  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ , segue que  $6^2 = 2^2 + m^2 - 2 \cdot 2 \cdot m \cdot (-\cos \alpha)$ . Daí,

$$32 = m^2 - 4 \cdot m \cdot (-\cos \alpha).$$

Agora, somando as equações  $12 = m^2 - 4 \cdot m \cdot \cos \alpha$  e  $32 = m^2 - 4 \cdot m \cdot (-\cos \alpha)$  obtidas, respectivamente, em (i) e em (ii), segue que

$$44 = 2m^2 \Rightarrow m^2 = 22 \Rightarrow m = \sqrt{22}.$$

Portanto, a alternativa correta é letra E.

**3. (IME – 2012 - 2013)** Em um triângulo  $ABC$ , traça-se a mediana  $\overline{BM}$  ( $\widehat{AMB}$  é um ângulo obtuso), e no  $\triangle AMB$  traça-se a altura  $AH$ , tal que  $\overline{BM} = 2\overline{MH}$ ,  $\overline{AH} = 4$  cm e  $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$  cm. Qual a medida de  $\overline{BM}$ ?

- a) 1      b) 2      c) 3      d) 4      e) 6

**Solução:** Considere a Figura 3.5 obtida a partir dos dados do enunciado. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos  $AHB$  e  $AHM$ , obtemos, respectivamente:

- $AB^2 = 4^2 + (3x)^2 \Rightarrow AB = \sqrt{16 + 9x^2};$
- $y^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 + x^2}.$

Agora, com os valores de  $\overline{AB}$  e  $y$  obtidos, aplicamos a Lei dos Cossenos nos triângulos  $AMB$  e  $BMC$ . Assim, para o triângulo  $AMB$ , temos que

$$(\sqrt{16 + 9x^2})^2 = (\sqrt{16 + x^2})^2 + (2x)^2 - 2 \cdot \sqrt{16 + x^2} \cdot 2x \cdot \cos \alpha.$$

Logo,  $9x^2 = 5x^2 - 4 \cdot \sqrt{16 + x^2} \cdot x \cdot \cos \alpha$ . Daí,  $4x^2 = -4 \cdot \sqrt{16 + x^2} \cdot x \cdot \cos \alpha$ .

No triângulo  $BMC$ , temos que

$$(2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{16 + x^2})^2 + (2x)^2 - 2 \cdot \sqrt{16 + x^2} \cdot 2x \cdot \cos(180^\circ - \alpha).$$

Como  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ , então:  $20 = 16 + x^2 + 4x^2 + 2 \cdot \sqrt{16 + x^2} \cdot 2x \cdot \cos \alpha$ .

Simplificando e organizando os termos, temos que  $5x^2 = 4 + 4 \cdot \sqrt{16 + x^2} \cdot x \cdot \cos \alpha$ .

Por fim, somando termo a termo as equações  $4x^2 = -4 \cdot \sqrt{16 + x^2} \cdot x \cdot \cos \alpha$  e  $5x^2 = 4 + 4 \cdot \sqrt{16 + x^2} \cdot x \cdot \cos \alpha$ , obtidas a partir da aplicação da Lei dos Cossenos nos triângulos  $AMB$  e  $BMC$ , obtemos a igualdade  $x^2 = 4$  a qual implica em,  $x = 2$ .

Portanto,  $\overline{BM} = 2x = 2 \cdot 2 = 4$  cm.

Alternativa correta, letra D.

**4. (OBM 2011 - 1ª Fase)** Seja  $\triangle XOY$  um triângulo retângulo com  $\angle XOY = 90^\circ$ . Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios de  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Dado que  $XN = 19$  e  $YM = 22$ , determine a medida do segmento  $XY$ .

- a) 24    b) 26    c) 28    d) 30    e) 32

**Solução.** Como  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos lados  $OX$  e  $OY$ , respectivamente, sejam

$$NY = NO = x \quad \text{e} \quad XM = MO = y.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos  $XON$  e  $OMY$ , teremos:

$$22^2 = 4x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad 19^2 = 4y^2 + x^2.$$

Somando as duas equações, obtemos:

$$5(x^2 + y^2) = 22^2 + 19^2.$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo  $OXY$ , teremos:

$$XY^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2).$$

Substituindo a equação anterior nesta última equação, obtemos:

$$XY^2 = \frac{4(22^2 + 19^2)}{5} = \frac{4 \cdot 845}{5} = 4 \cdot 169 \quad \implies \quad XY = \sqrt{4 \cdot 169} = 2 \cdot 13 = 26.$$

Portanto, a alternativa correta é B.

5. (Olimpíada Mandacaru – 2023 – nível Lampião) Considere o seguinte paralelogramo  $ABCD$  da Figura 3.6, cujos lados medem 5 m e 9 m. Tonho realizou o trajeto de A até E, perfazendo trajeto de 5 m e Zeca do ponto A até C, perfazendo 7 m. Qual a distância de Tonho até Zeca?

- a)  $\frac{8}{3}$  m      b) 3 m      c) 6 m      d) 12 m      e) 16 m

**Solução:** Como o triângulo ABE é isósceles, então  $BF = FE = x$ . Logo,  $EC = 9 - 2x$ . Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AFE, teremos:

$$5^2 = x^2 + AF^2 \Rightarrow AF^2 = 25 - x^2$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AFC, teremos:

$$7^2 = AF^2 + FC^2 \Rightarrow 49 = 25 - x^2 + (9 - x)^2$$

$$\Rightarrow 49 = 25 - x^2 + 81 - 18x + x^2$$

Dai, com um pouco de álgebra, segue que

$$x = \frac{57}{18} = \frac{19}{6}.$$

Logo,

$$EC = 9 - 2x = 9 - 2 \cdot \frac{19}{6} = \frac{54 - 38}{6} = \frac{8}{3}.$$

Portanto, a alternativa correta é A.

## 3.2 Teorema de Napoleão

**Figura 3.7:** Napoleão Bonaparte



O teorema de Napoleão teria sido demonstrado em 1787 e consiste no seguinte: tome um triângulo arbitrário e, com base em cada um de seus lados, construa (externamente) um triângulo equilátero. Os baricentros desses três triângulos equiláteros formam os vértices de outro triângulo equilátero. O teorema é frequentemente associado a Napoleão, mas vários artigos foram escritos sobre essa questão [3], [5]. Especialistas sugerem que o teorema pode remontar a uma questão levantada em 1825 por William Rutherford, publicada no *The Ladies' Diary*, quatro anos após a morte do imperador francês.

A seguinte questão apareceu na página 47 do *The Ladies' Diary* de 1825 (assim, no final de 1824, cerca de um ano depois da compilação dos exames de Dublin). Esta é uma das primeiras aparições impressas do teorema de Napoleão, e é interessante notar que o nome de Napoleão não é mencionado.

*VII. Questão. (1439), pelo Sr. W. Rutherford, Woodburn: Descreva triângulos equiláteros (com os vértices todos externos ou internos) sobre os três lados de qualquer triângulo ABC: então, as linhas que unem os centros de gravidade desses três triângulos equiláteros formarão um triângulo equilátero. É necessária uma demonstração.*

Como William Rutherford era um matemático muito experiente, sua motivação

para solicitar a prova de um teorema que ele certamente poderia ter demonstrado é desconhecida. Talvez ele tenha colocado a questão como um desafio para seus colegas, ou esperasse que as respostas produzissem uma solução mais elegante. No entanto, fica claro, a partir da leitura de sucessivas edições do *The Ladies' Diary* na década de 1820, que o editor pretendia incluir um conjunto variado de perguntas a cada ano, com algumas adaptadas para iniciantes.

Não há menção a Napoleão tanto na questão quanto nas respostas publicadas, que apareceram um ano depois, em 1826, embora o editor tenha omitido algumas submissões. Também não há menção de Rutherford entre os solucionadores nomeados após as soluções impressas, embora seja evidente, pelo registro algumas páginas antes, que ele enviou uma solução, assim como vários de seus alunos e associados da Escola Woodburn, incluindo o autor da primeira das soluções publicadas.

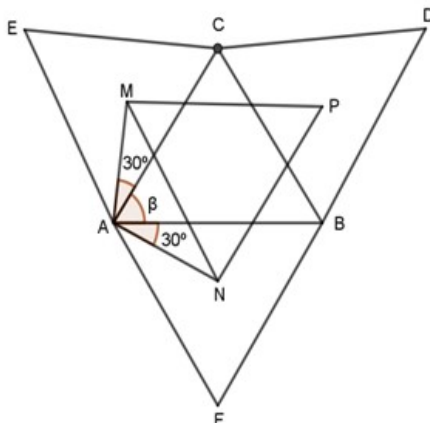
O mesmo Crilly (ver [4]) menciona que o referido teorema foi publicado em um jornal inglês no ano de 1825, após a morte de Napoleão. Ele relembra que as habilidades matemáticas de Napoleão foram decisivas para seu ingresso na Academia Militar, e que, com sua ascensão ao poder como imperador, ele manteve contato constante com a elite de matemáticos franceses.

Neste ponto, Crilly (ver [4]) lança dúvidas sobre a autoria, argumentando que, como muitos outros resultados matemáticos, o teorema foi atribuído a alguém que não se relaciona com a descoberta ou a prova. Já Garbi (ver [6]) argumenta que a autoria de Napoleão é uma lenda, pois Napoleão se chamava a si mesmo de "geômetra amador". Portanto, a dúvida sobre quem realmente descobriu o teorema persiste.

**Teorema 2 (Teorema de Napoleão).** *Tome um triângulo arbitrário. Com base em cada um dos seus lados, construímos (externamente) um triângulo equilátero. Os baricentros desses três triângulos equiláteros são vértices de um triângulo equilátero.*

*Demonstração.* Observe a Figura 3.8.

**Figura 3.8:** Triângulo equilátero  $MNP$  obtido a partir do triângulo  $ABC$



Fonte: O autor

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $ABC$ , teremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \beta.$$

Daí,

$$\cos \beta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}.$$

Seja  $S$  a área do triângulo  $ABC$ , então:

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin \beta}{2}.$$

Donde obtemos

$$\sin \beta = \frac{2S}{b \cdot c}.$$

Como  $M$  é o baricentro do  $\triangle ACE$ , então  $\overline{AM}$  é igual a  $\frac{2}{3}$  da mediana desse triângulo equilátero construído sobre  $AC$ . Assim,

$$\overline{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{b \cdot \sqrt{3}}{2} \implies \overline{AM} = \frac{b \cdot \sqrt{3}}{3},$$

pois a mediana e a altura em um triângulo equilátero são congruentes e coincidentes.

Analogamente,

$$\overline{AN} = \frac{c \cdot \sqrt{3}}{3}.$$

Agora, aplicando a lei dos cossenos ao  $\triangle AMN$ , teremos:

$$(\overline{MN})^2 = (\overline{AM})^2 + (\overline{AN})^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AN} \cdot \cos(\widehat{A} + 60^\circ).$$

Assim,

$$(\overline{MN})^2 = \frac{3b^2}{9} + \frac{3c^2}{9} - 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{c \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \cos(\widehat{A} + 60^\circ). \Leftrightarrow$$

$$(\overline{MN})^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2 \cdot b \cdot c}{3} \cdot \cos(\widehat{A} + 60^\circ) \Leftrightarrow$$

$$(\overline{MN})^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2 \cdot b \cdot c}{3} \cdot \left( \frac{\cos \widehat{A}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \widehat{A} \right) \Leftrightarrow$$

$$(\overline{MN})^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{b \cdot c}{3} \cdot \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot S}{bc} \right) \Leftrightarrow$$

$$(\overline{MN})^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - b^2 - c^2 + a^2 + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot S}{6}.$$

Fazendo cálculos análogos, encontramos que:

$$(\overline{PN})^2 = (\overline{PM})^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - b^2 - c^2 + a^2 + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot S}{6},$$

ou seja, o triângulo  $MNP$  é equilátero.

□

### 3.2.1 APLICAÇÕES

1. Napoleão Bonaparte, além de ser um grande soldado e hábil político, era também um admirador da ciência e dos cientistas. Em particular, ele demonstrava grande interesse pela matemática. O que poucos sabem é que Napoleão é o descobridor de um belo teorema de geometria. Eis o enunciado do **Teorema de Napoleão**:

*“Considere um triângulo arbitrário. Com base em cada um de seus lados, cons-*

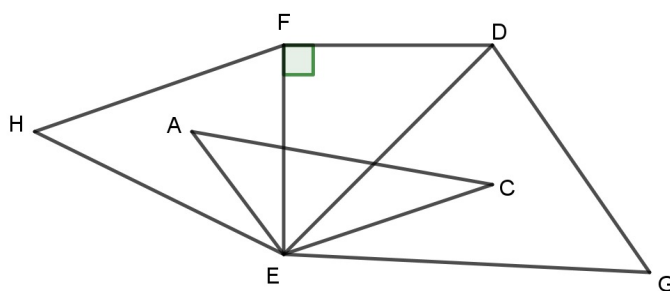
trua (externamente) um triângulo equilátero. Os centros desses três triângulos equiláteros são vértices de outro triângulo equilátero, denominado **Triângulo de Napoleão**.”

De posse dessas informações, analise os itens a seguir:

- I. No triângulo de Napoleão  $ABC$ , proveniente de um triângulo retângulo isósceles  $DEF$  de base  $EF$ , o ângulo  $\widehat{AEC}$  pode medir  $105^\circ$ .
- II. Ainda com relação ao item (I), se os lados iguais do triângulo  $DEF$  medirem  $4\sqrt{3}$ , então o triângulo de Napoleão  $ABC$  terá seus lados medindo  $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ .

**Solução:** O item (I) está correto. Observe a Figura 3.9.

**Figura 3.9:** Ângulo  $\widehat{AEC}$  obtido a partir do triângulo retângulo  $EDF$



Fonte: O autor

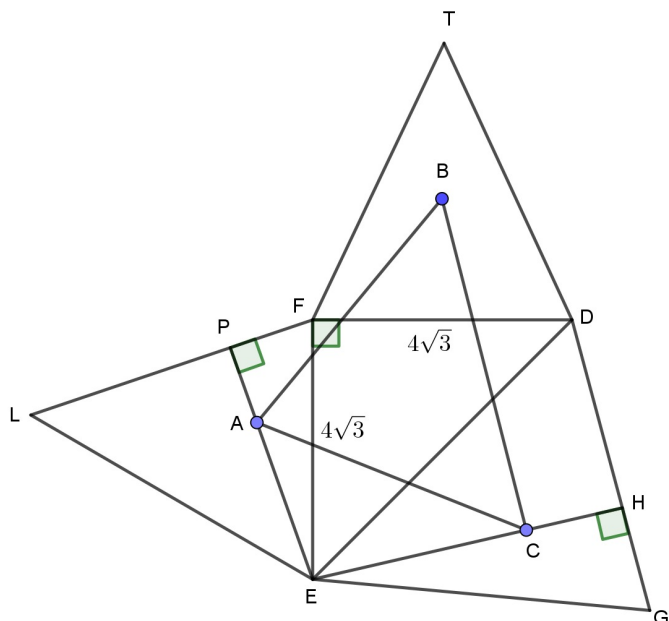
Pelo **Teorema de Napoleão**, sabemos que os triângulos  $EDG$  e  $FEH$  são equiláteros. Como  $A$  é o baricentro do triângulo  $FEH$ , temos que  $\widehat{AEF} = \widehat{CED} = 30^\circ$  (pois  $DEG$  é equilátero,  $C$  é o seu baricentro e, em um triângulo equilátero, a altura, a mediana, a bissetriz e a mediatriz coincidem).

Portanto, o segmento que passa por  $A$  e  $C$  também é uma bissetriz. Por outro lado, como  $EDF$  é um triângulo retângulo isósceles, segue que  $\widehat{FED} = 45^\circ$ . Assim, temos:

$$\widehat{AEC} = \widehat{AEF} + \widehat{CED} + \widehat{FED} = 30^\circ + 30^\circ + 45^\circ = 105^\circ.$$

**Solução:** O item (II) está correto. Considere a Figura 3.10.

**Figura 3.10:** Triângulo equilátero obtido a partir do triângulo retângulo



Fonte: O autor

Como  $EP$  e  $EH$  são as alturas dos triângulos equiláteros  $ELF$  e  $GED$ , respectivamente, pela propriedade do baricentro de um triângulo, temos:

$$EA = \frac{2}{3} \cdot EP \tag{3.3}$$

Por outro lado, como  $P$  é o ponto médio de  $LF$ , temos que  $FP = 2\sqrt{3}$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $FPE$ , encontramos que  $EP = 6$ . Logo, de (3.3) obtemos:

$$EA = \frac{2}{3} \cdot EP = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \implies EA = 4.$$

De forma análoga, para o triângulo equilátero  $DEG$ , temos que  $EC = 4\sqrt{2}$ . Agora, aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo  $AEC$ , temos:

$$AC^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos(105^\circ), \text{ onde } \cos(105^\circ) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

Substituindo, obtemos:

$$AC^2 = 16 + 32 - 8 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

Simplificando,  $AC^2 = 16 + 32 - 8\sqrt{12} = 48 - 16 + 8\sqrt{12} = 32 + 8\sqrt{12}$ .

Agora, usando a fórmula do radical duplo:

$$\sqrt{A \pm B} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \quad \text{com } C = \sqrt{A^2 - B},$$

onde  $A = 32$ ,  $B = 8\sqrt{12}$  e  $C = \sqrt{32^2 - (8\sqrt{12})^2}$ .

Note que,  $C = \sqrt{1024 - 768} = \sqrt{256} = 16$ .

Assim:

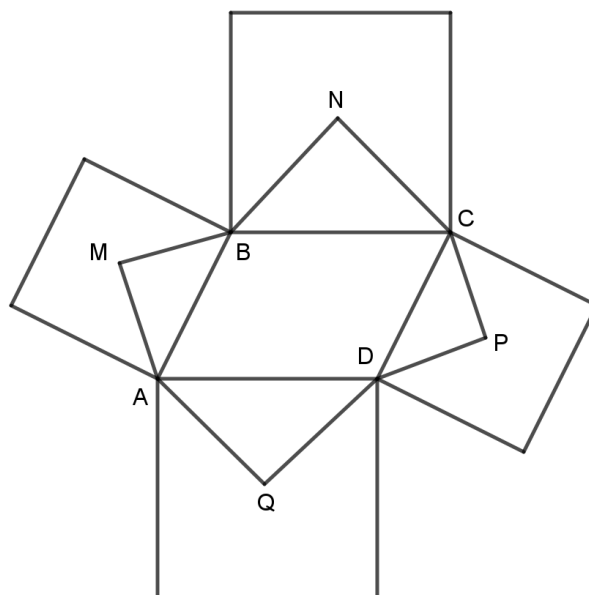
$$AC = \sqrt{\frac{32+16}{2}} + \sqrt{\frac{32-16}{2}} = \sqrt{24} + \sqrt{8} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}.$$

Portanto,  $AC = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ .

A questão a seguir é uma extensão do Teorema de Napoleão. Vejamos.

**2. (OBMEP – 2008 – 2ª FASE)** Na figura,  $ABCD$  é um paralelogramo de área  $20 \text{ cm}^2$  e lados medindo  $4 \text{ cm}$  e  $6 \text{ cm}$ . Os pontos  $M, N, P$  e  $Q$  são os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo.

**Figura 3.11:** Quadrados e triângulos obtidos do quadrilátero  $ABCD$



Fonte: O autor

- a) Calcule a área do polígono  $AMBNCPDQ$ .
- b) Mostre que os ângulos  $\angle MQ$  e  $\angle(MBN)'$  têm a mesma medida.
- c) Mostre que  $MNPQ$  é um quadrado e calcule sua área.

**Solução:** a) Para calcular a área do polígono  $AMBNCPDQ$ , basta somar as áreas dos polígonos  $AQD$ ,  $PDC$ ,  $BCN$ ,  $AMB$  e  $ABCD$ . Observe que cada triângulo é um quarto da área do quadrado, ou seja:

$$\text{Área}(BCN) = \frac{36}{4} = 9,$$

$$\text{Área}(PDC) = \frac{16}{4} = 4,$$

$$\text{Área}(AQD) = \frac{36}{4} = 9,$$

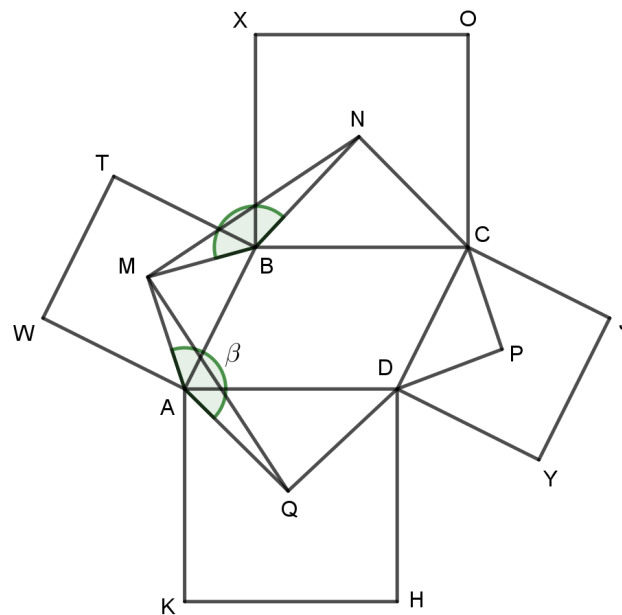
$$\text{Área}(AMB) = \frac{24}{4} = 4,$$

$$\text{Área}(ABCD) = 20.$$

Portanto, a área do polígono  $AMBNCPDQ$  é  $9 + 9 + 4 + 4 + 20 = 46$ .

b) Observe a Figura 3.12.

**Figura 3.12:** Quadrados e triângulos obtidos do quadrilátero ABCD



Fonte: O autor

Como os pontos  $M, N, Q$  são os centros dos quadrados, os segmentos  $BN, MB, AM$  e  $AQ$  estão contidos na diagonal dos quadrados. Assim, os ângulos  $\angle NBX = \angle TBM = \angle MAB = \angle DAQ = 45^\circ$ . Se  $\angle DAB = \beta$ , então  $\angle CBA = 180^\circ - \beta$ .

Segue-se que:

$$180^\circ - \beta + 45^\circ + 45^\circ + \angle XBT + 45^\circ + 45^\circ = 360^\circ \Rightarrow \angle XBT = \beta.$$

Logo,

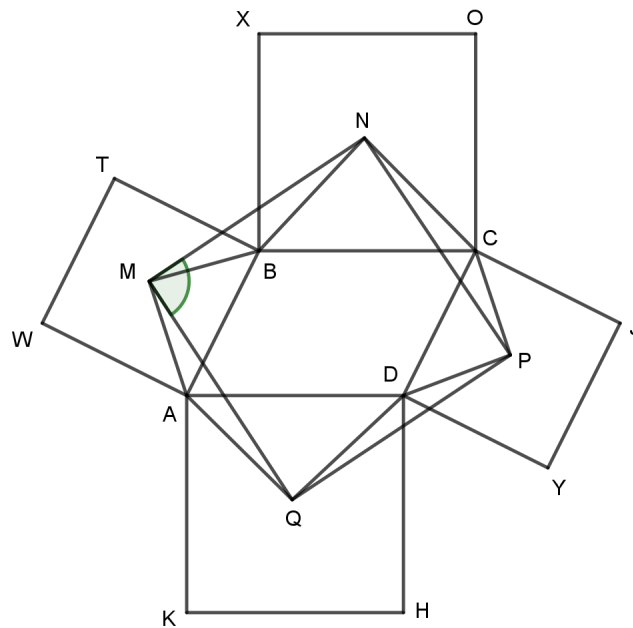
$$\angle MQ = 45^\circ + \beta + 45^\circ = \angle(MBN)'.$$

Portanto,  $\angle MQ = \angle(MBN)'$ .

De forma análoga, mostra-se que os ângulos  $\angle PDQ$  e  $\angle PCN$  são congruentes.

c) Observe a figura 3.13

**Figura 3.13:** Quadrados e triângulos obtidos do quadrilátero ABCD (2)



Fonte: O autor

Neste caso, devemos demonstrar que os lados são congruentes e que seus ângulos medem  $90^\circ$ .

Como os quadrados  $ADHK$  e  $CBOX$  são congruentes (pois os lados  $BC$  e  $AD$

são congruentes), então os segmentos  $AQ$  e  $BN$  são congruentes. De forma análoga, os segmentos  $AM$  e  $MB$  também são congruentes. Pelo critério de congruência **LAL**, os triângulos  $MBN$  e  $QAM$  são congruentes, logo  $QM = MN$ . De forma similar, mostra-se que  $NP = PQ$ , ou seja,  $MQ = MN = NP = PQ$ , formando um losango. Se um dos ângulos for  $90^\circ$ , então os demais também o serão, confirmando que se trata de um quadrado.

Vamos demonstrar que  $\angle QM\hat{N} = 90^\circ$ . Note que o triângulo  $AMB$  é isósceles e  $\angle ABM = \angle MAB = 45^\circ$ , logo ele é um triângulo retângulo em  $A$ . Além disso, temos:

$$90^\circ = \angle AMB = \angle AMC + \angle QMB,$$

mas como  $\angle AMQ = \angle BMN$  (pois  $\triangle AMQ$  e  $\triangle BMN$  são congruentes), segue que:

$$90^\circ = \angle AMB = \angle AMC + \angle QMB = \angle BMN + \angle QMB = \angle QMN.$$

Portanto, o losango  $QMNP$  é um quadrado.

Já sabemos que os triângulos  $AMQ$ ,  $MBN$ ,  $PCN$  e  $PDQ$  são congruentes. Assim, ao remover o triângulo  $PCN$  e "colá-lo" em  $BMN$ , e fazer o mesmo com o triângulo  $QAM$  "colando-o" em  $PDQ$ , temos que a área do quadrado é igual à área do polígono  $AMBNCPDQ$ , que é 46.

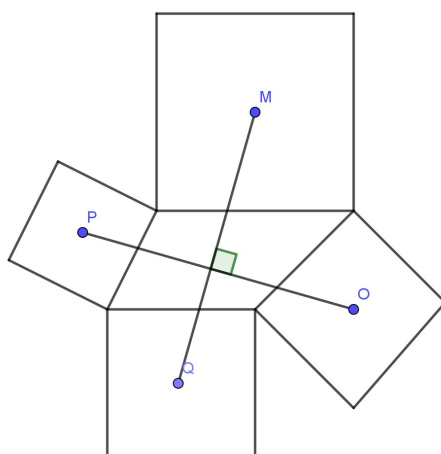
### 3.3 Teorema de Van Aubel

Figura 3.14: Van Aubel



O Teorema de Van Aubel (NISHIYAMA, 2011) estabelece que, dado um quadrilátero arbitrário  $EFGH$ , se forem construídos quadrados externamente sobre os seus lados e conectados os centros desses quadrados, os dois segmentos  $MQ$  e  $OP$ , que ligam os pares de centros de quadrados opostos, serão ortogonais e congruentes, conforme ilustrado na Figura 3.15. Este teorema foi publicado por H. H. Van Aubel em 1878.

Figura 3.15: Segmentos congruentes obtidos a partir de quadriláteros



Fonte: O autor

Em relação aos triângulos, o teorema afirma que, em qualquer triângulo, ao

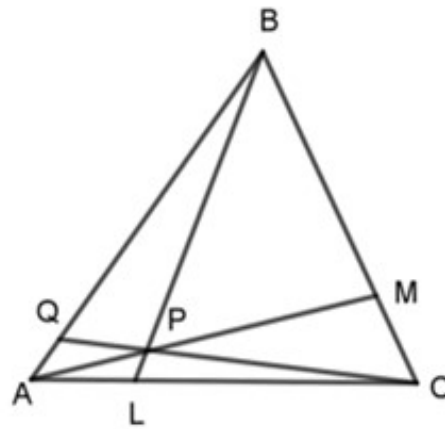
traçar três cevianas concorrentes, o ponto de concorrência divide cada ceviana em segmentos cuja razão é igual à soma das razões dos segmentos determinados pelas outras duas cevianas em seus lados adjacentes conforme veremos no teorema a seguir.

Quanto à vida de Henricus Hubertus (Henri) Van Aubel, sabe-se que ele foi um matemático belga, nascido em 1830 e falecido em 1906. Além disso, há diversas extensões do teorema para outros polígonos construídos sobre os lados de um quadrilátero arbitrário.

**Teorema 3 (Teorema de Van Aubel).** *Em todo triângulo, ao desenhar três cevianas concorrentes, é verdade que o ponto de concorrência divide qualquer ceviana em segmentos, cuja razão é igual à soma das razões dos segmentos determinados pelas outras duas cevianas em seus lados adjacentes.*

Considere a figura 3.16.

**Figura 3.16:** Triângulo  $ABC$  com três cevianas concorrendo no ponto  $P$



Fonte: O autor

Se  $AM$ ,  $BL$  e  $CQ$  são cevianas concorrentes em  $P$ , então:

$$\frac{BP}{PL} = \frac{BQ}{QA} + \frac{BM}{MC}$$

Além disso,

$$\frac{AP}{PM} = \frac{AQ}{QB} + \frac{AL}{LC} \quad e \quad \frac{CP}{PQ} = \frac{CM}{MB} + \frac{CL}{LA}$$

*Demonstração.* No  $\triangle ABL$ , pelo teorema de Menelau (pois a reta  $\overleftrightarrow{QPC}$  é secante), temos que:

$$\frac{AC}{LC} \cdot \frac{LP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QA} = 1,$$

ou seja,

$$AC \cdot LP \cdot BQ = LC \cdot PB \cdot QA$$

Daí,

$$\frac{BQ}{QA} = \frac{LC \cdot PB}{PL \cdot AC}. \quad (3.4)$$

No  $\triangle CBL$ , pelo teorema de Menelau (pois  $\overleftrightarrow{MPA}$  é secante), temos:

$$\frac{CA}{AL} \cdot \frac{LP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} = 1$$

Assim,

$$CA \cdot LP \cdot BM = AL \cdot PB \cdot MC$$

Logo,

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AL \cdot PB}{CA \cdot LP}. \quad (3.5)$$

Somando (3.4) e (3.5), teremos:

$$\frac{BM}{MC} + \frac{BA}{QA} = \frac{LC}{PL} \cdot \frac{PB}{AC} + \frac{AL}{AC} \cdot \frac{PB}{PL}$$

Como

$$\frac{LC}{PL} \cdot \frac{PB}{AC} + \frac{AL}{AC} \cdot \frac{PB}{PL} = \frac{LC \cdot PB + AL \cdot PB}{PL \cdot AC} = \frac{PB \cdot (LC + AL)}{PL \cdot AC} = \frac{PB \cdot AC}{PL \cdot AC} = \frac{PB}{PL}$$

Segue o resultado,

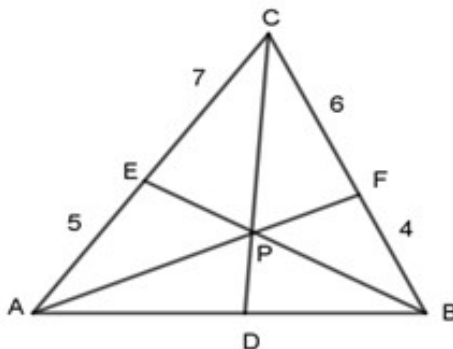
$$\frac{PB}{PL} = \frac{BM}{MC} + \frac{BA}{QA}.$$

De forma análoga, chega-se aos outros resultados.  $\square$

### 3.3.1 APLICAÇÕES

1. Na Figura 3.17,  $\overline{CD} = 11,7$  cm. Calcule a medida de  $\overline{PD}$ .

**Figura 3.17:** Triângulo  $ABC$  com três cevianas concorrendo em um ponto



Fonte: O autor

**Solução.** Aplicando o teorema de Van Aubel no  $\triangle ABC$ , temos que:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \frac{7}{5} + \frac{6}{4} = \frac{58}{20} = \frac{29}{10}.$$

Sendo  $\overline{PD} = x$ , teremos que  $\overline{PC} = \frac{29x}{10}$ .

Como  $\overline{CD} = 11,7$  cm e  $\overline{CD} = \overline{PC} + \overline{PD}$ , daí

$$11,7 = \frac{29}{10}x + x$$

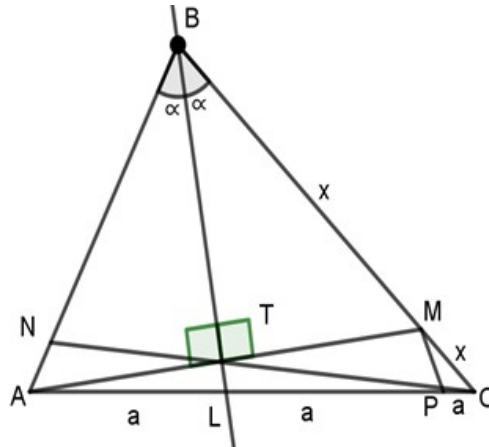
Com um pouco de álgebra obtemos,  $x = \overline{PD} = 3$ .

2. Um triângulo  $ABC$ , a bissetriz interna  $BL$ , a ceviana interna  $AM$  e a ceviana  $CN$  cortam-se em um ponto  $T$ . Sabendo que  $BL$  e  $AM$  se cortam perpendicularmente e que  $\overline{LC} = 2 \cdot \overline{AL}$ , calcular o valor de  $\frac{\overline{CT}}{\overline{TN}}$ .

- a)  $\frac{5}{2}$       b) 3      c) 2      d)  $\frac{5}{3}$       e)  $\frac{4}{3}$

**Solução.** Considere a Figura 3.18

**Figura 3.18:** Triângulo  $ABC$  com três cevianas concorrendo no ponto  $T$



Fonte: O autor

Como  $BL$  é bissetriz, então  $\angle ABL \equiv \angle LBC = \alpha$ . O  $\triangle ABM$  é isósceles, pois  $\angle BAT \equiv \angle TMB = 90^\circ - \alpha$ . Logo,  $\overline{AT} = \overline{TM}$ .

Agora, traçando  $MP \parallel TL$ . Seja  $\overline{Al} = a$ , logo (por hipótese)  $\overline{LC} = 2a$ .

Seja  $\overline{AB} = x$ . Pelo teorema da bissetriz interna, obtemos

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{2a},$$

com  $\overline{BC} = y$ . Daí,

$$y = \frac{2a \cdot x}{a} = 2x.$$

Logo,  $\overline{MC} = x$ , pois  $\overline{BM} = x$ . Por outro lado, os triângulos  $BLC$  e  $MPC$  são semelhantes, pelo caso (AA) conforme Figura 3.19.

Assim,

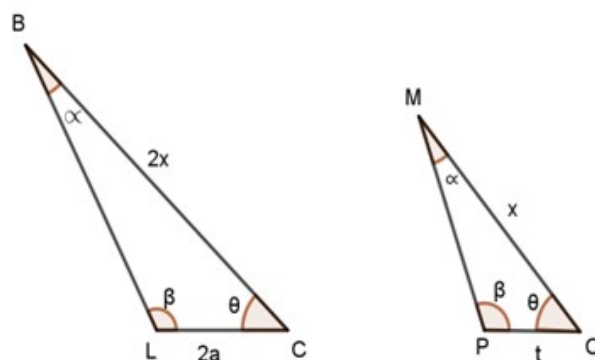
$$\frac{t}{2a} = \frac{x}{2x} \Rightarrow t = \frac{2a}{2} = a.$$

Logo,  $\overline{PC} = a$ . Aplicando o teorema de Van Aubel no  $\triangle BCA$ :

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{TN}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{CL}}{\overline{AL}} = \frac{x}{x} + \frac{2a}{a} = 1 + 2 = 3.$$

Alternativa correta, letra B.

**Figura 3.19:** Triângulos semelhantes de razão 1/2



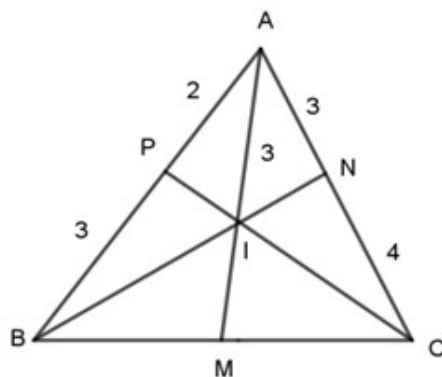
Fonte: O autor

3. No triângulo  $ABC$  são traçadas as cevianas  $AM$ ,  $BN$  e  $CP$  que se cortam no ponto  $I$ , interno ao triângulo. Sabendo-se que  $\overline{AB} = 5$ ,  $\overline{AC} = 7$ ,  $\overline{AP} = 2$ ,  $\overline{NA} = 3$  e  $\overline{AI} = 3$ , qual o valor de  $\overline{IM}$ ?

- a)  $\frac{14}{56}$     b)  $\frac{61}{11}$     c)  $\frac{65}{47}$     d)  $\frac{13}{5}$     e)  $\frac{36}{17}$

**Solução.** Seja  $ABC$  o triângulo da Figura 3.20.

**Figura 3.20:** Triângulo  $ABC$  com três cevianas concorrendo no ponto  $I$



Fonte: O autor

Sendo  $\overline{AB} = 5$  e  $\overline{AP} = 2$ , logo  $\overline{PB} = 3$ . Por outro lado, como  $\overline{AC} = 7$  e  $\overline{NA} = 3$ , logo  $\overline{NC} = 4$ . Agora, usando o teorema de Van Aubel, teremos

$$\frac{3}{IM} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$

Daí,

$$IM = \frac{36}{17}.$$

Alternativa correta, letra E.

### 3.4 Teorema de Menelaus

Figura 3.21: Menelaus de Alexandria



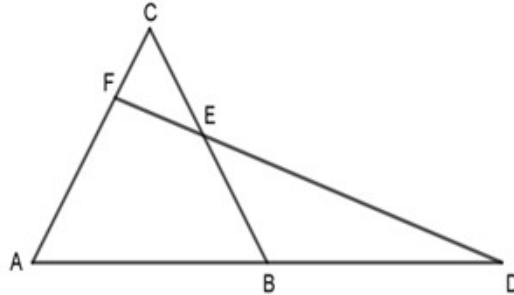
Menelau nasceu em Alexandria, no Egito, por volta de 100 d.C. Foi um astrônomo e geômetra notável, sendo o primeiro a registrar a definição de triângulos esféricos. Ele produziu um tratado em seis volumes sobre cordas em círculos, embora parte dessa obra tenha se perdido. Além disso, Menelau escreveu outras obras de matemática e astrologia, posteriormente preservadas por gregos e árabes, incluindo um trabalho em árabe intitulado *Sphaerica*.

No *Livro I* desse tratado, Menelau estabeleceu fundamentos para os triângulos esféricos análogos aos encontrados no *Livro I* de Euclides, referentes aos triângulos planos. Já o último volume, o *Livro III*, contém o famoso Teorema de Menelau.

Há indícios de que o teorema de Menelau já fosse conhecido por Euclides antes mesmo de Menelau, possivelmente perdido com o desaparecimento do *Porisma*, um dos livros dos *Elementos* de Euclides.

**Teorema 4 (Teorema de Menelaus).** *Considere o triângulo ABC da Figura 3.22*

**Figura 3.22:** Triângulo ABC cortado por uma transversal



Fonte: O autor

*Se os pontos D, E e F estão alinhados, então:*

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

*Demonstração.* Primeiro tracemos por A, B e C as alturas respectivas aos triângulos AFD, CFE e BDE. Desde que AM, BP e CI são perpendiculares ao segmento MD (Figura 3.23), então estes três segmentos são paralelos.

Assim,  $\triangle AMD \sim \triangle BPD$ ,  $\triangle BPE \sim \triangle CNE$  e  $\triangle AMF \sim \triangle CNF$ , todos pelo caso (AA). De cada uma semelhança entre os triângulo, encontramos as respectivas proporções

$$\frac{AD}{BD} = \frac{h_a}{h_b}$$

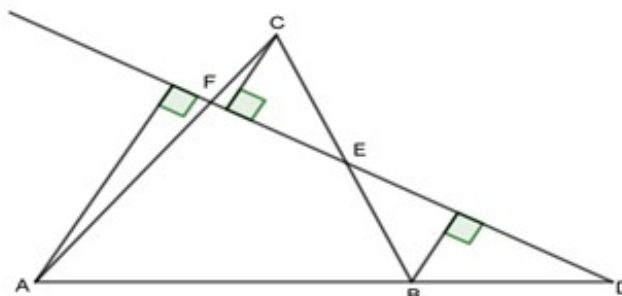
$$\frac{BE}{EC} = \frac{h_b}{h_c}$$

$$\frac{CF}{FA} = \frac{h_c}{h_a}$$

Multiplicando, termo a termo, as três últimas igualdades, teremos

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{h_a}{h_b} \cdot \frac{h_b}{h_c} \cdot \frac{h_c}{h_a} = 1$$

**Figura 3.23:** Segmentos perpendiculares dos vértice do triângulo à transversal



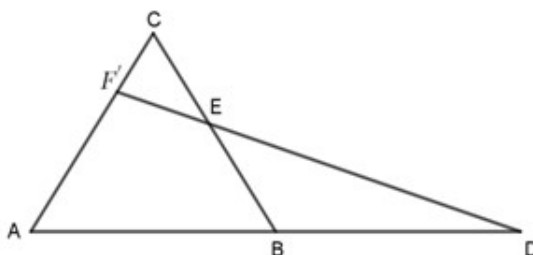
Fonte: O autor

□

**Teorema 5. (Teorema Recíproco de Menelaus)** Se  $D$ ,  $E$  e  $F$  são pontos sobre as retas suportes dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$ , respectivamente, e  $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$ , então os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  são colineares.

*Demonstração.* Considere a figura 3.24

**Figura 3.24:** Triângulo  $ABC$  com prolongamento do lado  $AC$



Fonte: O autor

Suponha que a reta  $\overleftrightarrow{DE}$  corta o lado  $AC$  em  $F'$ . Pelo Teorema de Menelaus, temos

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF'}{F'A} = 1.$$

Mas, como

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$$

Então,

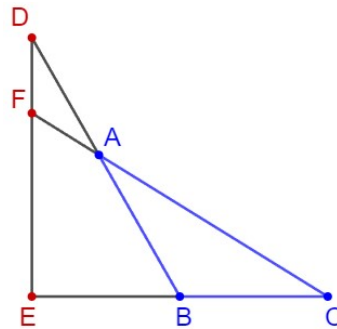
$$\frac{CF'}{F'A} = \frac{CF}{FA} \Rightarrow F = F'.$$

Portanto, os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  estão alinhados.

**Observação 1:** A demonstração do teorema de Menelaus foi realizada para o caso em que a transversal corta dois lados e o prolongamento do terceiro lado do triângulo. Contudo, o teorema também é válido quando prolongamos os três lados do triângulo, veja a Figura 3.25. Neste caso, a expressão do teorema de Menelaus fica:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

**Figura 3.25:** Triângulo  $ABC$  com prolongamento dos lados



Fonte: O autor

**Observação 2:** Para escrever adequadamente o Teorema de Menelaus, é necessário destacar sobre qual triângulo e qual transversal o teorema está sendo aplicado. Por exemplo, aplicando o Teorema de Menelaus sobre o triângulo  $ABC$  e a transversal  $FED$ , tem-se

$$\frac{BD}{BA} \cdot \frac{EF}{ED} \cdot \frac{CA}{CF} = 1.$$

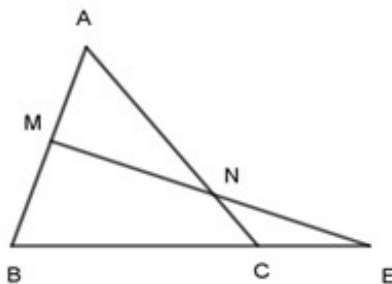
□

### 3.4.1 APLICAÇÕES

1. (AFA-99): Na Figura 3.27, o perímetro do triângulo equilátero  $ABC$  é 72 cm.  $M$  é o ponto médio de  $AB$  e  $\overline{CE} = 16$  cm. Então, a medida do segmento  $\overline{CN}$ , em cm, é um sétimo de:

- a) 48      b) 49      c) 50      d) 51

Figura 3.26: Triângulo  $ABC$  cortado pela transversal  $EM$



Fonte: O autor

**Solução.** Como  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$ , então  $\overline{AM} = 12$ , pois 72 cm é o perímetro do  $\triangle ABC$  equilátero, daí cada lado mede 24 cm. Além disso, fazendo  $\overline{CN} = x$  segue que  $\overline{NA} = 24 - x$  já que  $\overline{AC} = 24$  cm. Daí, Aplicando o Teorema de Menelaus no  $\triangle ABC$ , teremos

$$\frac{BE}{CE} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1.$$

Daí,

$$\frac{(24 + 16)}{16} \cdot \frac{x}{24 - x} \cdot \frac{12}{12} = 1,$$

ou seja,

$$\frac{x}{24 - x} = \frac{16}{40}.$$

Donde obtemos

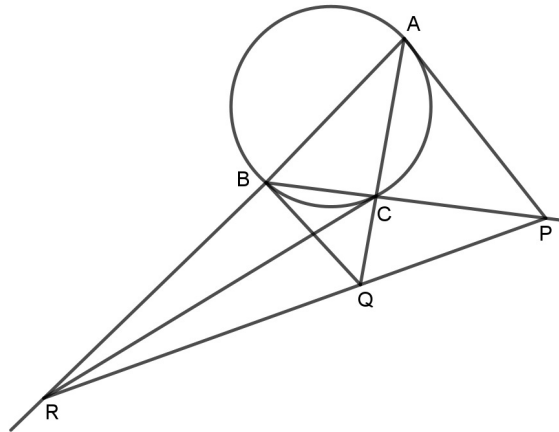
$$5x = 48 - 2x \Rightarrow x = \frac{48}{7} = \overline{CN}.$$

Alternativa correta, letra A.

02. (IME-90) Prove que as tangentes ao círculo circunscrito a um triângulo, passando nos seus vértices, interceptam os lados opostos em três pontos colineares.

**Solução.** Considere a Figura 3.27.

**Figura 3.27:** Círculo com o triângulo ABC inscrito



Fonte: O autor

Como os ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{QBC}$  compreendem a mesma corda na circunferência, então  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{QBC}$ . Assim,  $\triangle ABQ \sim \triangle BCQ$ , pelo caso (A.A). Daí,

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{BA}{BC}.$$

Analogamente, os ângulos  $\widehat{BCR} \equiv \widehat{BAC}$  implicam que os triângulos  $\triangle CRB \sim \triangle ARC$  (pelo caso A.A). Então,

$$\frac{CR}{AR} = \frac{BC}{AC}.$$

Finalmente, os ângulos  $\widehat{CAP} \equiv \widehat{ABC}$  implicam que os triângulos  $\triangle CAP \sim \triangle ABP$ . Então,

$$\frac{BC}{BP} = \frac{AC}{BA}.$$

Multiplicando as três expressões obtidas, segue que

$$\frac{AQ}{BQ} \cdot \frac{CR}{AR} \cdot \frac{PC}{BP} = \frac{BA}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{BA} = 1,$$

ou seja,

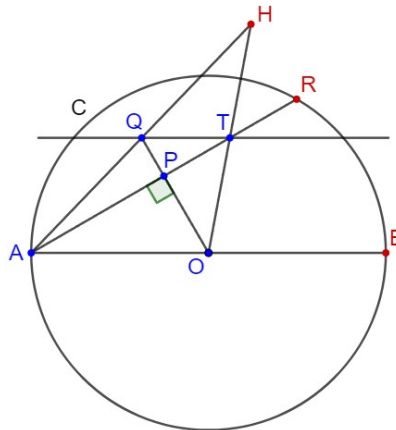
$$\frac{AQ}{BA} \cdot \frac{CR}{AR} \cdot \frac{PC}{BP} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema Recíproco de Menelaus, temos que  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares.

**3. (Olimpíada do Cone Sul-97)** Seja  $C$  uma circunferência de centro  $O$ ,  $AB$  um diâmetro dela, e  $R$  um ponto qualquer em  $C$  distinto de  $A$  e  $B$ . Seja  $P$  a interseção da perpendicular traçada por  $O$  e  $AR$ . Sobre a reta  $\overleftrightarrow{OP}$  marcou-se  $Q$ , que não pertence ao segmento  $OP$ . Por  $Q$  traçamos a paralela a  $AB$ , que corta a reta  $\overleftrightarrow{AR}$  em  $T$ . Chamamos  $H$  a interseção das retas  $\overleftrightarrow{AQ}$  e  $\overleftrightarrow{OT}$ . Prove que  $H$ ,  $R$  e  $B$  são colineares.

**Solução:** Observe a Figura 3.28 obtida a partir do enunciado.

**Figura 3.28:** Círculo de diâmetro  $AB$  e outras construções geométricas



Fonte: O autor

Inicialmente, pode-se observar que os triângulos  $\triangle APO$  e  $\triangle TPQ$  são semelhantes, pelo caso (A.A), dado que  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{QT}$ . Daí,

$$\frac{AO}{TQ} = \frac{AP}{TP} = \frac{PO}{QP}.$$

Como  $\overline{PO} = 2\overline{QP}$ , então

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{TQ}} = 2 \Rightarrow \overline{AO} = 2\overline{TQ}.$$

Por outro lado,  $\frac{\overline{AP}}{\overline{TP}} = 2 \Rightarrow \overline{AP} = 2\overline{TP}$ .

Agora, observe que os triângulos  $\triangle HAO$  e  $\triangle HTQ$  (Figura 3.28) são semelhantes também pelo caso (A.A). Logo vale a proporção

$$\frac{\overline{HO}}{\overline{HT}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{QT}}.$$

Como  $O$  é o centro da circunferência e  $OP$  é perpendicular à corda  $AR$ , então  $\overline{AP} = \overline{PR}$ . Assim, como  $\overline{AP} = 2\overline{TP}$ , temos  $2\overline{TP} = \overline{AP} = \overline{PR} = \overline{RT} + \overline{TP}$ , ou seja,  $\overline{TP} = \overline{RT}$ .

Por outro lado,  $\overline{RA} = \overline{RT} + \overline{TP} + \overline{PA} = \overline{RT} + \overline{RT} + 2\overline{TP}$ , como  $\overline{TP} = \overline{RT}$ , segue que  $\overline{RA} = \overline{RT} + \overline{RT} + 2\overline{RT}$ . Daí,  $\overline{RA} = 4\overline{RT}$ .

Sabemos também que  $\overline{BA} = 2\overline{BO}$ . Daí:

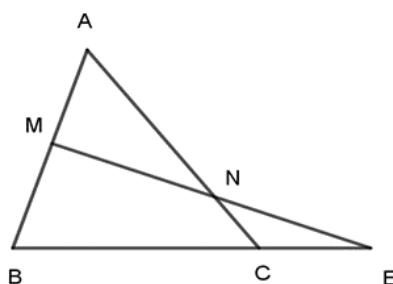
$$\frac{\overline{HI}}{\overline{HO}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RT}} \cdot \frac{\overline{BO}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{HI}}{2\overline{HT}} \cdot \frac{4\overline{RT}}{\overline{RT}} \cdot \frac{\overline{BO}}{2\overline{BO}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Desse modo, pelo Teorema Recíproco de Menelaus, aplicado ao  $\triangle AOT$ , concluímos que  $H$ ,  $R$  e  $B$  são colineares.

### 3.4.2 RESOLUÇÃO SEM O USO DO TEOREMA DE MENELAUS

1. (AFA-99) Na Figura 3.29, o perímetro do triângulo equilátero  $ABC$  é 72 cm.  $M$  é o ponto médio de  $AB$  e  $\overline{CE} = 16$  cm. Então, a medida do segmento  $\overline{CN}$ , em cm, é um sétimo de:

**Figura 3.29:** Triângulo  $ABC$  cortado pela transversal  $EM$



Fonte: O autor

- a) 48      b) 49      c) 50      d) 51

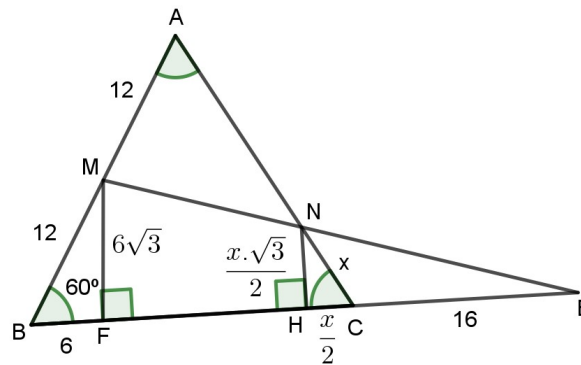
**Solução.** Tracemos as alturas  $MF$  e  $NH$ , conforme Figura 3.30 . No triângulo  $\triangle MBF$ , temos que

$$\sin(60^\circ) = \frac{MF}{12} \Rightarrow MF = 6\sqrt{3}.$$

No triângulo  $\triangle NHC$ , temos

$$\cos(60^\circ) = \frac{BF}{12} \Rightarrow BF = 6.$$

**Figura 3.30:** Triângulo  $ABC$  com  $MF$  e  $NH$  perpendiculares ao lado  $BC$



Fonte: O autor

Por outro lado, no triângulo  $\triangle NHC$ ,

$$\sin(60^\circ) = \frac{NH}{x} \Rightarrow NH = \frac{x\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos(60^\circ) = \frac{HC}{x} \Rightarrow HC = \frac{x}{2}.$$

Como os triângulos  $MFE$  e  $NHE$  são semelhantes, pelo caso (A.A), então,

$$\frac{6\sqrt{3}}{34} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{16 + \frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{34} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{32+x}{2}}.$$

Daí, com um pouco de álgebra segue que

$$6\sqrt{3} \cdot 34 = x \cdot 33 + 2x \Rightarrow 34x\sqrt{3} = 192\sqrt{3} + 6x\sqrt{3}$$

Portanto,  $x = \frac{48}{7}$ . Alternativa correta, letra A.

### 3.5 Teorema de Ptolomeu

**Figura 3.31:** Cláudio Ptolomeu



O Teorema de Ptolomeu desempenhou um papel fundamental na trigonometria esférica e na astrologia, embora não tenha sido sua principal contribuição. A obra mais importante da Antiguidade aplicada à trigonometria foi a *Syntaxis Mathematica*, composta por treze livros escritos por Ptolomeu de Alexandria e datada de cerca de meio século após os trabalhos de Menelau.

Essa obra matemática distingue-se de outros tratados astrológicos de autores anteriores, incluindo Aristóteles, pelo fato de a de Ptolomeu ser chamada de *Maior* e as demais, inclusive a de Aristóteles, de *Menor*. Por causa dessa tradição, na Arábia, o livro de Ptolomeu passou a ser conhecido como *Almagesto* (que significa "O Maior"), denominação que perdura até os dias atuais.

Sobre a vida de Ptolomeu, pouco se sabe. Não temos registros do local de seu nascimento, mas sabemos que ele realizou observações astronômicas em Alexandria entre 127 e 151 d.C. Por esse motivo, supõe-se que ele tenha nascido no final do primeiro século.

Quanto ao *Almagesto*, sabe-se que Ptolomeu utilizou, na astrologia, o catálogo de posições estelares legado por Hiparco. No entanto, não há consenso se as tabelas trigonométricas contidas na obra derivam, em grande parte, de Hiparco. Apesar da passagem do tempo, o *Almagesto* sobreviveu, preservando não apenas suas tabelas trigonométricas e construções, mas também uma proposição central do método das

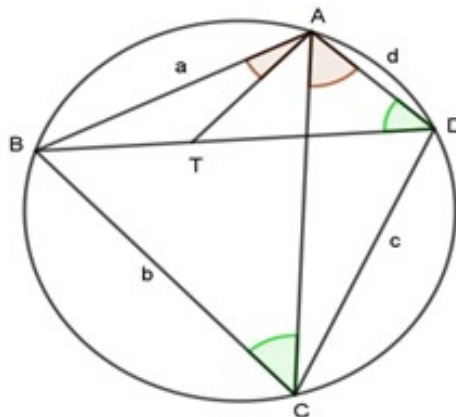
cordas de Ptolomeu. Trata-se de uma proposição geométrica que ainda hoje é conhecida como “O Teorema de Ptolomeu”, enunciado da seguinte forma: *Em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.*

Embora a figura de Ptolomeu esteja fortemente associada a um único livro, o *Almagesto*, sabemos que ele escreveu outras obras. Entre elas, destaca-se a *Geografia*, composta por oito livros, considerada de grande relevância para os estudos geográficos.

**Teorema 6 (Teorema de Ptolomeu).** *Em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.*

*Demonstração.* Considere a Figura 3.32

**Figura 3.32:** Quadrilátero inscrito



Fonte: O autor

Sejam  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$ ,  $\overline{CD} = c$  e  $\overline{DA} = d$ ,  $\overline{AC} = p$  e  $\overline{BD} = 7$ . Seja  $T$  o ponto sobre a diagonal  $BD$  tal que  $\widehat{BAT} = \widehat{CAD}$ .

Como  $\triangle ATD \sim \triangle ABC$  (pelo ângulo inscrito  $\widehat{BCA} = \widehat{TDA}$ , correspondendo ao mesmo arco), ou seja, pelo caso (A.A), pois  $\widehat{TAD} = \widehat{BAC}$ . Daí:

$$\frac{\overline{TD}}{b} = \frac{b}{p} \Rightarrow \overline{TD} \cdot p = b \cdot d.$$

Por outro lado, com  $\triangle ATB \sim \triangle ADC$ , pelo caso (A.A), temos

$$\frac{\overline{BT}}{C} = \frac{a}{p} \Rightarrow \overline{BT} \cdot p = ac.$$

Somando termo a termo as igualdades  $\overline{TD} \cdot p = b \cdot d$  e  $\overline{BT} \cdot p = a \cdot c$ , obtidas anteriormente, temos que

$$\overline{TD} \cdot p + \overline{BT} \cdot p = b \cdot d + ac \Rightarrow p \cdot (\overline{TD} + \overline{BT}) = b \cdot d + a \cdot c$$

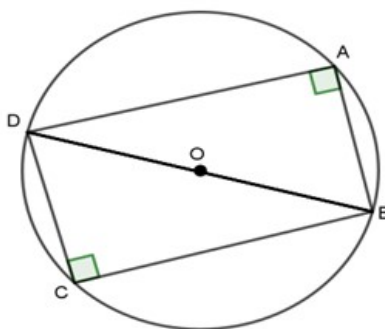
Assim,  $p \cdot q = b \cdot d + a \cdot c$ , provando o que queríamos.  $\square$

### 3.5.1 APLICAÇÕES

1. (IME-66) Em um círculo de  $10\sqrt{2}$  cm de diâmetro, temos duas cordas de 2 cm e 10 cm. Achar a corda do arco soma dos arcos das cordas anteriores.

**Solução.** Considere a Figura 3.33.

**Figura 3.33:** Quadrilátero  $ABCD$  inscrito



Fonte: O autor

Sejam  $\overline{AB} = 2$  cm e  $\overline{AD} = 10$  cm as cordas, vamos traçar o diâmetro  $BD$ . Neste caso, os triângulos  $ABD$  e  $BCD$  são retângulos. Logo, aplicando o teorema de Pitágoras, segue que

$$\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \Rightarrow \overline{DB}^2 - \overline{AB}^2 = (10\sqrt{2})^2 - 2^2$$

e

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 = (10\sqrt{2})^2 - 10^2 = 200 - 100 = 100 \Rightarrow \overline{CD} = 10 \text{ cm}$$

Agora, aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero  $ABCD$ , temos:

$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC} \cdot 10\sqrt{2} = 2 \cdot 10 + 14 \cdot 10$$

Daí,

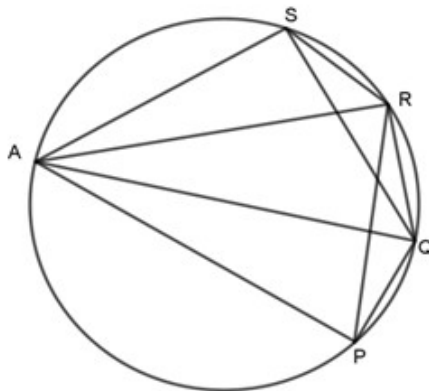
$$\overline{AC} = \frac{20 + 140}{10\sqrt{2}} = \frac{160}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{1600\sqrt{2}}{200} = 8\sqrt{2}$$

Portanto,  $\overline{AC} = 8\sqrt{2}$ .

**2. (Olimpíadas da Inglaterra-94)** AP, AQ, AR e AS são cordas de uma dada circunferência com a propriedade de que os ângulos  $\widehat{PAQ} = \widehat{QAR} = \widehat{RAS}$ . Prove que  $\overline{AR} \cdot (\overline{AP} + \overline{AR}) = \overline{AQ} \cdot (\overline{AQ} + \overline{AS})$ .

**Solução.** Considere a Figura 3.34.

**Figura 3.34:** Pentágono inscrito



Fonte: O autor

Como os ângulos  $\widehat{PAQ}$ ,  $\widehat{QAR}$ , e  $\widehat{RAS}$  são ângulos inscritos congruentes, as cordas por eles determinadas também são congruentes, ou seja,  $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS}$ .

Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero  $AQRS$ :

$$\overline{QS} \cdot \overline{AR} = \overline{AS} \cdot \overline{QR} + \overline{RS} \cdot \overline{AQ} = \overline{AS} \cdot \overline{QR} + \overline{AQ} \cdot \overline{QR}$$

Logo,

$$\overline{QS} \cdot \overline{AR} = \overline{QR} \cdot (\overline{AS} + \overline{AQ}). \quad (3.6)$$

Agora, aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero  $APQR$ :

$$\overline{PR} \cdot \overline{AQ} = \overline{AP} \cdot \overline{QR} + \overline{AR} \cdot \overline{PQ} \Rightarrow \overline{QS} \cdot \overline{AQ} = \overline{AP} \cdot \overline{QR} + \overline{AR} \cdot \overline{QR}$$

Assim,

$$\overline{QS} \cdot \overline{AQ} = \overline{QR} \cdot (\overline{AP} + \overline{AR}). \quad (3.7)$$

Dividindo as equações (3.6) e (3.7), encontramos a proporção

$$\frac{\overline{QS} \cdot \overline{AR}}{\overline{QS} \cdot \overline{AQ}} = \frac{\overline{QR} \cdot (\overline{AS} + \overline{AQ})}{\overline{QR} \cdot (\overline{AP} + \overline{AR})}$$

Daí,

$$\overline{AR} \cdot (\overline{AP} + \overline{AR}) = \overline{AQ} \cdot (\overline{AQ} + \overline{AS})$$

Como queríamos demonstrar.

**3. (Olimpíada Báltica-2001)** Seja  $ABCD$  um paralelogramo. Uma circunferência passando pelo ponto  $A$  encontra os segmentos  $AB$ ,  $AC$ , e  $AD$  nos pontos  $P$ ,  $Q$ , e  $R$ , respectivamente. Prove que:  $(AP) \cdot (AB) + (AR) \cdot (AD) = (AQ) \cdot (AC)$

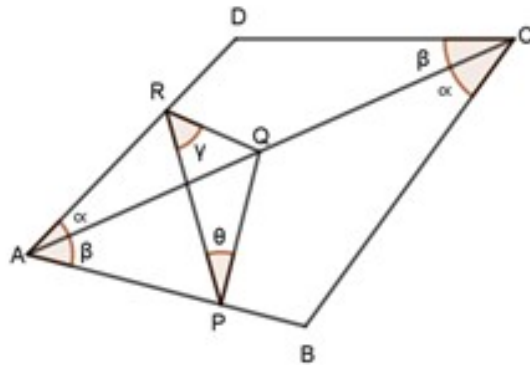
**Solução.** Trace os segmentos  $RQ$ ,  $QP$ , e  $RP$ . Considere os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , e  $\theta$ , definidos de acordo com a Figura 3.35. Como o quadrilátero  $APQR$  é inscrito, isso implica que  $\gamma = \beta$  e  $\theta = \alpha$ , ou seja, os ângulos  $\theta$  e  $\alpha$  são inscritos e correspondem à mesma corda, portanto são iguais. O mesmo podemos dizer dos ângulos  $\gamma$  e  $\beta$ .

Portanto, os triângulos  $RQP$ ,  $ABC$ , e  $CDA$  são semelhantes (pelo caso A.A).

Daí,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{PQ}}. \quad (3.8)$$

**Figura 3.35:** Losango  $ABCD$



Fonte: O autor

Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero  $APQR$ :

$$\overline{AQ} \cdot \overline{RP} = \overline{RQ} \cdot \overline{AP} + \overline{PQ} \cdot \overline{AR}$$

Multiplicando cada termo da última equação, respectivamente, por cada uma das razões de (3.8), temos

$$\overline{AQ} \cdot \overline{RP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{RP}} = \overline{RQ} \cdot \overline{AP} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{RQ}} + \overline{PQ} \cdot \overline{AR} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{PQ}}$$

Simplificando, encontramos a relação desejada, isto é,

$$\overline{AQ} \cdot \overline{AC} = \overline{AP} \cdot \overline{AB} + \overline{AR} \cdot \overline{AD}$$

### 3.5.2 RESOLUÇÃO SEM O USO DO TEOREMA DE PTOLOMEU

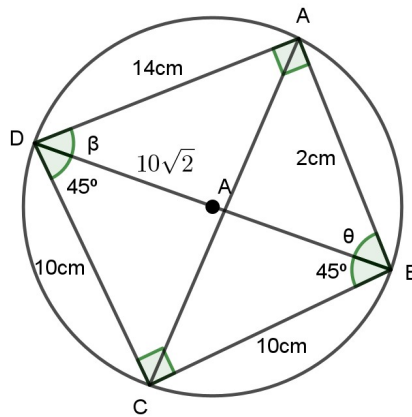
1. (IME-66) Em um círculo de  $10\sqrt{2}$  cm de diâmetro, temos duas cordas de 2 cm e 10 cm. Achar a corda do arco soma dos arcos das cordas anteriores.

**Solução.** Na Figura 3.36 temos os triângulos  $ABD$  e  $CBD$ , como  $DB$  é a hipotenusa de ambos, então  $D\hat{A}B = D\hat{C}B = 90^\circ$ . Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos

$CBD$  e  $ABD$ , obtemos, respectivamente, os valores de  $y$  e  $z$ . Vejamos,

$$(10\sqrt{2})^2 = 10^2 + y^2 \Rightarrow y = 10 \text{ cm} \quad \text{e} \quad (10\sqrt{2})^2 = 2^2 + z^2 \Rightarrow z = 14 \text{ cm}$$

**Figura 3.36:** Quadrilátero  $ABCD$  inscrito em um círculo



Fonte: O autor

Agora, no triângulo  $ABC$ , calculamos  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ . Daí,

$$\sin \theta = \frac{14}{10\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $ABC$ , temos

$$(\overline{AC})^2 = 10^2 + 2^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \cos(45^\circ + \theta)$$

$$(\overline{AC})^2 = 100 + 4 - 40 \cdot (\cos 45^\circ \cdot \cos \theta - \sin 45^\circ \cdot \sin \theta)$$

$$(\overline{AC})^2 = 102 - 40 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{14}{10\sqrt{2}} \right)$$

$$(\overline{AC})^2 = 102 - 40 \cdot \left( \frac{1}{10} - \frac{7}{10} \right)$$

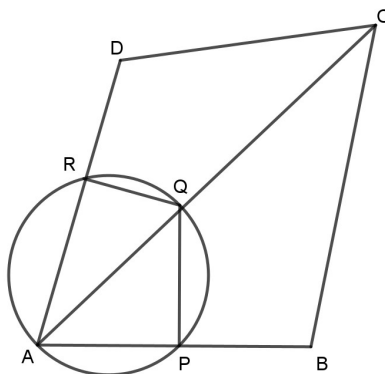
$$(\overline{AC})^2 = 104 + 24 = 128 \Rightarrow AC = 8\sqrt{2}$$

Portanto,  $AC = 8\sqrt{2}$ .

**3. (Olimpíada Báltica-2001)** Seja  $ABCD$  um paralelogramo. Uma circunferência passando pelo ponto  $A$  encontra os segmentos  $AB$ ,  $AC$ , e  $AD$  nos pontos  $P$ ,  $Q$ , e  $R$ , respectivamente. Prove que:  $(AP) \cdot (AB) + (AR) \cdot (AD) = (AQ) \cdot (AC)$

**Solução.** Considere a Figura 3.37.

**Figura 3.37:** Quadrilátero inscrito construído a partir do losango  $ABCD$



Fonte: O autor

Utilizando a potência de um ponto em relação a uma circunferência, segue que

$$\text{Potência de } A = AP \cdot AB = AQ \cdot AC = AR \cdot AD.$$

De onde obtemos

$$\begin{cases} AP \cdot AB = \text{Potência de } A - AQ \cdot AC \\ AR \cdot AD = \text{Potência de } A - AQ \cdot AC \end{cases}$$

Somando, termo a termo, as duas últimas equações, chegamos a igualdade

$$AP \cdot AB + AR \cdot AD = 2 \cdot \text{Potência de } A - 2 \cdot AQ \cdot AC.$$

Como

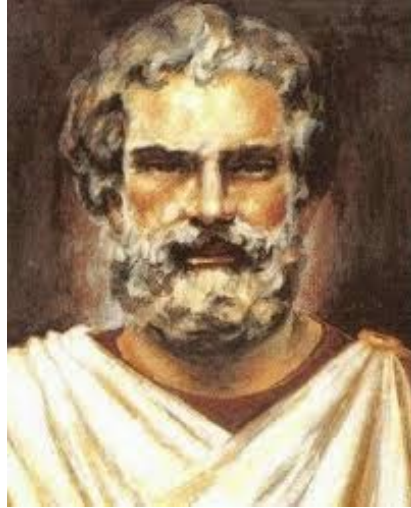
$$AQ \cdot AC = \frac{\text{Potência de } A}{2}.$$

Concluimos que

$$AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC$$

## 3.6 Teorema de Hiparco

**Figura 3.38:** Hiparco de Nicéia



De acordo com Boyer [2] e Eves [5], Hiparco de Nicéia viveu por volta de (180–125 a.E.C.), foi um matemático e possivelmente o mais notável astrônomo da Antiguidade. Ele realizou a transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu, destacando-se pelas suas rigorosas observações e pela precisão das conclusões a que chegou.

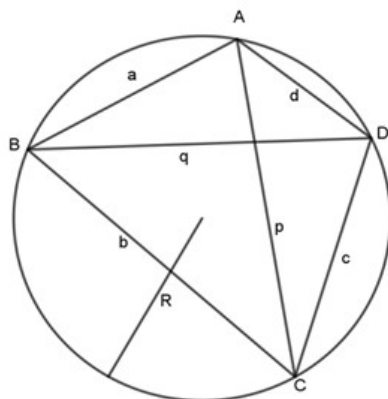
Foi no observatório de Rodes, em Alexandria, que Hiparco realizou suas mais importantes observações astronômicas, no ano de 146 a.E.C. No entanto, suas contribuições para a astronomia, embora relevantes, não foram tão impactantes quanto sua contribuição para o avanço da trigonometria. Por elaborar a primeira tabela trigonométrica da história, Hiparco ganhou o título de pai da trigonometria.

**Teorema 7 (Teorema de Hiparco).** *Para qualquer quadrilátero inscritível, a razão entre as diagonais é igual a razão da soma dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais.*

*Demonstração.* Pela Figura 3.39, temos que:

$$S_{\Delta ABC} + S_{\Delta DAC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD}.$$

**Figura 3.39:** Quadrilátero inscrito em uma circunferência de raio  $R$



Fonte: O autor

Conforme demonstrado, a área de um triângulo inscrito pode ser expressa como o produto dos lados dividido por quatro vezes o raio da circunferência circunscrita. Assim, podemos reescrever a última igualdade da seguinte forma

$$\frac{a \cdot b \cdot p}{4R} + \frac{c \cdot d \cdot p}{4R} = \frac{a \cdot d \cdot q}{4R} + \frac{b \cdot c \cdot p}{4R}.$$

Daí,

$$p \cdot (a \cdot b + c \cdot d) = q \cdot (a \cdot d + b \cdot c)$$

Deonde concluímos que

$$\frac{p}{q} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + c \cdot d}$$

**OBS:** Dado os lados de um quadrilátero inscritível, podemos calcular suas diagonais utilizando o Teorema de Ptolomeu e o Teorema de Hiparco.

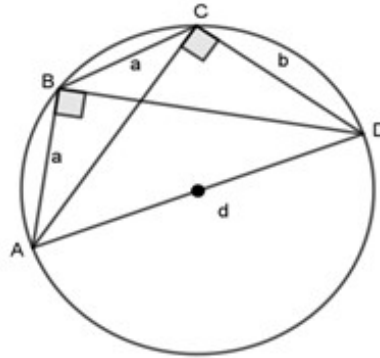
□

### 3.6.1 APLICAÇÕES

**1. (IME-2004)** Um quadrilátero convexo  $ABCD$  está inscrito em um círculo de diâmetro  $d$ . Sabe-se que  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = a$ ,  $\widehat{AD} = d$ , e  $\widehat{CD} = b$ , com  $a$ ,  $b$  e  $d$  diferentes de zero. Demonstre que  $d^2 = c \cdot b \cdot d + 2a^2$ .

**Solução.** Considere a figura 3.40

**Figura 3.40:** Quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro  $d$



Fonte: O autor

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{BD} = \sqrt{d^2 - a^2} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \sqrt{d^2 - b^2}$$

Pelo Teorema de Hiparco:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BC \cdot CD + AB \cdot AD}{AB \cdot BC + AD \cdot CD}$$

Daí,

$$\frac{a \cdot b + a \cdot d}{AC} = \frac{a^2 + b \cdot d}{BD}. \quad (3.9)$$

Pelo Teorema de Ptolomeu:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} = a \cdot d + a \cdot b$$

$$\frac{a \cdot d + a \cdot b}{AC} = \overline{BD}. \quad (3.10)$$

Igualando as equações (3.9) e (3.10) segue que

$$\overline{BD} = \frac{a^2 + b \cdot d}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD}^2 = a^2 + b \cdot d$$

Por fim, substituímos  $\overline{BD}^2$  por  $d^2 - a^2$  na última igualdade, uma vez que  $\overline{BD} = \sqrt{d^2 - a^2}$ , ou seja,  $\overline{BD}^2 = d^2 - a^2$ . Com isso, encontramos a expressão  $d^2 = 2a^2 + b \cdot d$ .

**2. (Torneio das Cidades – 91)** Os vértices do quadrilátero  $ABCD$  pertencem a uma circunferência e  $\overline{CB} = \overline{CD}$ . Mostre que a área do quadrilátero  $ABCD$  é

$$\frac{AC^2 \cdot \sin \hat{A}}{2}$$

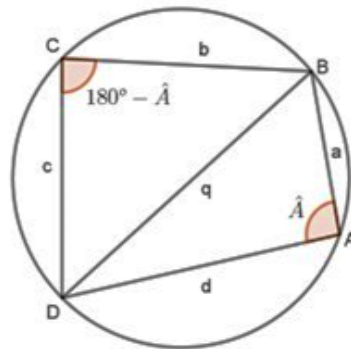
**Solução:** Sejam  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$ ,  $\overline{CD} = c$ ,  $\overline{DA} = d$ ,  $\overline{AC} = p$  e  $\overline{BD} = q$  lados de um quadrilátero circunscrito à uma circunferência conforme Figura 3.41

Como  $\overline{CB} = \overline{CD}$  (por hipótese), então  $b = c$ . Assim, pelo Teorema de Ptolomeu:

$$p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d = a \cdot b + b \cdot d = b \cdot (a + d).$$

Logo, por transitividade  $p \cdot q = b \cdot (a + d)$ .

**Figura 3.41:** Quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro  $q$



Fonte: O autor

Por outro lado, pelo Teorema de Hiparco

$$\frac{p}{q} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + b \cdot d} = \frac{a \cdot d + b^2}{a \cdot b + b \cdot d} = \frac{a \cdot d + b^2}{b \cdot (a + d)}.$$

Por transitividade, segue que

$$\frac{p}{q} = \frac{a \cdot d + b^2}{b \cdot (a + d)}.$$

Substituindo  $b \cdot (a + d)$  por  $p \cdot q$ , pois já vimos que  $p \cdot q = b \cdot (a + d)$ , obtemos

$$\frac{p}{q} = \frac{a \cdot d + b^2}{p \cdot q} \Rightarrow p^2 = a \cdot d + b^2$$

Assim,

$$S_{\Delta ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{a \cdot d \cdot \sin \hat{A}}{2} + \frac{b \cdot c \cdot \sin(180^\circ - \hat{A})}{2}.$$

Como

$$\frac{a \cdot d \cdot \sin \hat{A}}{2} + \frac{b \cdot c \cdot \sin(180^\circ - \hat{A})}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \hat{A}}{2} + \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2}$$

e

$$= \frac{a \cdot b \cdot \sin \hat{A}}{2} + \frac{b \cdot c \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{(a \cdot b + b^2) \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{p^2 \cdot \sin \hat{A}}{2}.$$

Segue por transitividade que

$$S_{\Delta ABCD} = \frac{p^2 \cdot \sin \hat{A}}{2}$$

Sabemos que  $\overline{AC} = p$ . Assim,

$$S_{\Delta ABCD} = \frac{\overline{AC}^2 \cdot \sin \hat{A}}{2}.$$

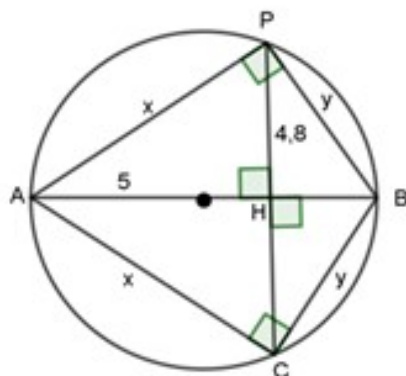
Como queríamos demonstrar.

**3. (Colégio Naval - 2019)** Um ponto  $P$  pertence a uma circunferência de raio 5 unidades, estando a 4,8 unidades de um diâmetro dessa circunferência. Qual a soma das distâncias de  $P$  até os extremos desse diâmetro?

- a) 14      b) 12      c) 7      d) 6      e) 5

**Solução:** Considere a Figura 3.42.

**Figura 3.42:** Quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro  $AB$



Fonte: O autor

Como  $AB$  é um diâmetro da circunferência, então o  $\Delta PAB$  é retângulo em  $P$ . Queremos descobrir a soma das medidas de  $\overline{AP} + \overline{PB}$ , para isso, prolongamos o segmento  $PH$  até  $C$ , onde  $C$  é um ponto da circunferência, logo o quadrilátero  $ABCP$  está inscrito na circunferência.

Aplicando o Teorema de Hiparco, teremos

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{PB} + \overline{AC} \cdot \overline{CB}}{\overline{AP} \cdot \overline{AC} + \overline{CB} \cdot \overline{PB}}$$

Como  $\overline{AP} = \overline{AC}$  e  $\overline{PB} = \overline{BC}$ , segue que

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{PB}}{\overline{AP} \cdot \overline{AP} + \overline{PB} \cdot \overline{PB}}$$

Daí,

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{9,6}{10}$$

Do  $\Delta DAB$ , temos que  $x^2 + y^2 = 100$ . Assim,

$$2xy = \frac{9,6 \cdot 100}{10} \Rightarrow xy = \frac{960}{20}$$

Logo,  $x \cdot y = 48$ .

Sabemos que  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$  e obtivemos que  $x^2 + y^2 = 100$  e  $x \cdot y = 48$ .  
Então,  $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 100 + 2 \cdot 48$ . Donde segue que  $(x + y)^2 = 196$ .

Portanto,  $x + y = 14$ .

Alternativa correta, letra A.

### 3.6.2 RESOLUÇÃO SEM USO DO TEOREMA DE HIPARCO

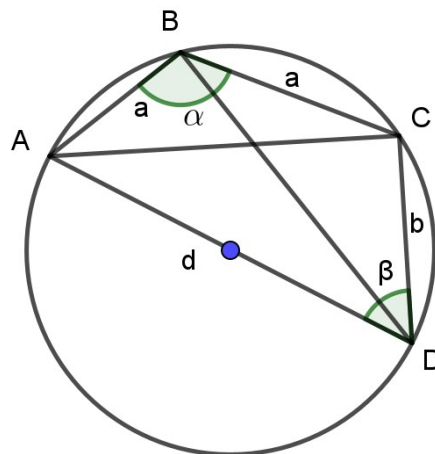
**01 (IME-2004)** Um quadrilátero convexo  $ABCD$  está inscrito em um círculo de diâmetro  $d$ . Sabe-se que  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = a$ ,  $\widehat{AD} = d$  e  $\widehat{CD} = b$ , com  $a$ ,  $b$  e  $d$  diferentes de zero. Demonstre que  $d^2 = b \cdot d + 2a^2$ .

**Resolução.** Considere a Figura 3.43

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo  $ABC$ , teremos:

$$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \alpha \quad (3.11)$$

**Figura 3.43:** Quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro  $d$



Fonte: O autor

No triângulo  $ACB$ , como  $AD$  é o diâmetro do círculo, o triângulo  $ACD$  é retângulo em  $C$ . Pelo Teorema de Pitágoras, temos  $d^2 = \overline{AC}^2 + b^2$ , ou seja,

$$\overline{AC}^2 = d^2 - b^2$$

Substituindo a última igualdade em (3.11), segue que  $d^2 - b^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos \alpha$ . Como  $\cos \alpha = -\cos \beta$ , então  $d^2 - b^2 = 2a^2 + 2a^2 \cdot \cos \beta$ . Sabemos que  $\cos \beta = \frac{b}{d}$ . Assim,

$$d^2 - b^2 = 2a^2 + \frac{2a^2 \cdot b}{d} \quad \Rightarrow \quad d^2 \cdot d - b^2 \cdot d = 2a^2 \cdot d + 2a^2 \cdot b$$

Colocando os termos comuns em evidência, podemos reescrever a última igualdade da seguinte maneira:  $(d^2 - b^2) \cdot d = 2a^2 \cdot (d + b)$ . Assim,  $(d + b) \cdot (d - b) \cdot d = 2a^2 \cdot (d + b)$ , ou ainda,  $d^2 - b \cdot d = 2a^2$ .

Portanto,  $d^2 = 2a^2 + b \cdot d$ .

### 3.7 Teorema de Euler

**Figura 3.44:** Leonhard Euler



Leonhard Euler (1707–1783), nascido em Basileia, foi um dos maiores matemáticos da história. De acordo com Howard Eves [5], sua contribuição para a matemática é tão vasta que não pode ser completamente exposta aqui. Mesmo tendo cursado teologia a pedido de seu pai, um pastor calvinista, Euler se encantou pela matemática. Aos 20 anos, foi convidado pelos irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli a integrar o círculo matemático, embora nunca tenha ocupado oficialmente o cargo de professor ao longo de seus 76 anos de vida.

Euler recebeu uma formação ampla e diversificada. Além da matemática, estudou teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Graças a esse vasto conhecimento, conseguiu uma vaga na Academia de São Petersburgo. Quando Daniel Bernoulli, amigo de Euler, deixou a Academia de São Petersburgo para retornar à Basileia, Euler, aos 26 anos, assumiu a posição de principal matemático da instituição.

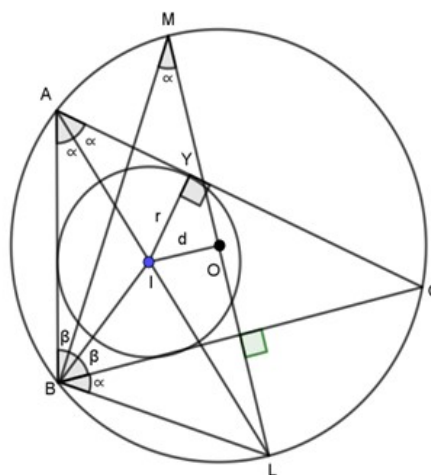
Em 1735, Euler perdeu a visão do olho direito devido ao excesso de trabalho, mas essa infelicidade não comprometeu sua produtividade. Durante sua vida, publicou mais de 500 artigos. Em 1771, ele perdeu completamente a visão, mas, mesmo assim, continuou a produzir e publicar pesquisas com notável intensidade. Euler manteve sua produção intelectual até 1783, quando faleceu subitamente, aos 76 anos, enquanto tomava chá com um de seus netos.

**Teorema 8 (Teorema de Euler).** *Sejam  $O$  e  $I$  o circuncentro e o incentro, respectivamente, de um triângulo, com raio do círculo circunscrito igual a  $R$  e raio do círculo inscrito igual a  $r$ . Então:*

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$$

*Demonstração.* Considere a Figura 3.45.

**Figura 3.45:** Triângulos inscrito em um círculo



Fonte: O autor

Prolongue a bissetriz interna de  $A$  até encontrar o círculo circunscrito em  $L$ .

Seja  $LM$  o diâmetro perpendicular a  $BC$ .

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  ângulos tais que  $2\alpha = \widehat{A}$  e  $2\beta = \widehat{B}$ . Note que,  $\widehat{BML} = \widehat{BAL} = \alpha$  e  $\widehat{LBC} = \widehat{LAC} = \alpha$ , pois são ângulos inscritos correspondentes ao mesmo arco.

Como  $\widehat{BIL}$  é o ângulo exterior do triângulo  $ABI$ , temos  $\widehat{BIL} = \alpha + \beta = \widehat{BLI}$ . Logo, o triângulo  $LBI$  é isósceles, implicando que  $\overline{LI} = \overline{LB}$ . Daí, aplicando potência de ponto relativa ao ponto  $I$ , temos  $(R + \overline{OI}) \cdot (R - \overline{OI}) = \overline{LI} \cdot \overline{IA}$ , ou seja,

$$R^2 - \overline{OI}^2 = \overline{LI} \cdot \overline{IA} = \overline{LB} \cdot \overline{IA} = \overline{LM} \cdot \frac{\overline{LB}}{\frac{\overline{LM}}{\frac{\overline{LY}}{\overline{IA}}}} \cdot \overline{IY} = \overline{LM} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot \overline{IY},$$

pois, nos triângulos  $BML$  e  $IYA$ , temos respectivamente

$$\sin \alpha = \frac{LB}{LM} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \frac{IY}{IA}.$$

Assim,  $R^2 - \overline{OI}^2 = \overline{LM} \cdot \overline{IY}$ .

Portanto,  $R^2 - \overline{OI}^2 = 2Rr$ , isto é,  $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$

□

### 3.7.1 APLICAÇÕES

**1. (Olimpíada da Espanha-93)** Justificar que, em qualquer triângulo, o diâmetro da circunferência inscrita não é maior do que o raio da circunferência circunscrita.

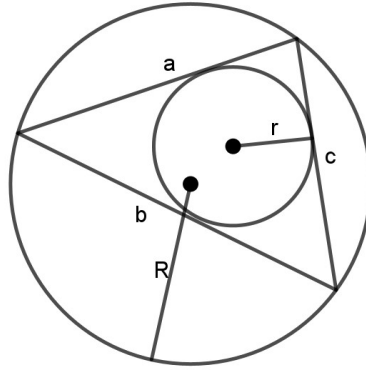
**Solução:** Pelo Teorema de Euler, sabemos que a distância do incentro  $I$  ao círculo de centro  $O$  de um triângulo  $ABC$  é determinada por  $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$ . Ou seja,  $R^2 - 2Rr = R(R - 2r) \geq 0$ . Logo,  $R \geq 2r$

### 3.7.2 RESOLUÇÃO SEM O USO DO TEOREMA DE EULLER

**1. (Olimpíada da Espanha-93)** Justificar que, em qualquer triângulo, o diâmetro da circunferência inscrita não é maior do que o raio da circunferência circunscrita.

**Solução.** Considere a Figura 3.46.

**Figura 3.46:** Triângulo inscrito e circunscrito a um círculo



Fonte: O autor

Seja o semiperímetro  $p$ , em que,  $p = \frac{a + b + c}{2}$ . Sabemos que a média aritmética é maior ou igual à média geométrica. Sendo assim, vamos aplicar essa desigualdade aos números reais positivos  $p - b$  e  $p - c$ . Vejamos,

$$\frac{(p - b) + (p - c)}{2} \geq \sqrt{(p - b)(p - c)} \Rightarrow (p - b) + (p - c) \geq 2\sqrt{(p - b)(p - c)}.$$

Como

$$p - b + p - c = \frac{a + b + c}{2} - b + \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + c - b}{2} + \frac{a + b - c}{2} = a$$

Segue que,  $a \geq 2\sqrt{(p - b)(p - c)}$ .

De modo semelhante, obtemos as desigualdades para  $b$  e  $c$ , obtendo  $b \geq 2\sqrt{(p - a)(p - c)}$  e  $c \geq 2\sqrt{(p - a)(p - b)}$ .

Multiplicando as três últimas desigualdades, teremos

$$abc \geq 8\sqrt{(p - b)(p - c)} \cdot \sqrt{(p - a)(p - c)} \cdot \sqrt{(p - a)(p - b)}.$$

A desigualdade acima pode ser escrita da seguinte forma

$$abc \geq 8\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)} \cdot \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)}. \quad (3.12)$$

Como a área do triângulo inscrito pode ser dada por  $A = \frac{abc}{4R}$ , segue que  $4A \cdot R = abc$ . Substituindo em (3.12), vem

$$4A \cdot R \geq 8\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} \cdot \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Por outro lado, aplicando a fórmula de Heron no triângulo inscrito, encontramos que  $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ . Daí, podemos escrever a última desigualdade da seguinte maneira

$$4A \cdot R \geq 8\frac{A^2}{p} \Rightarrow R \geq 2\frac{A}{p}.$$

Como a área ( $A$ ) do triângulo da Figura 3.46 pode ser dada utilizando o raio ( $r$ ) do círculo circunscrito da seguinte forma  $A = pr$ . Então

$$R \geq 2\frac{A}{p} \Rightarrow R \geq 2\frac{pr}{p}$$

Logo,  $R \geq 2r$ .

### 3.8 Teorema de Ceva

**Figura 3.47:** Giovanne Ceva



Giovanni Benedetto Ceva, matemático, físico, geômetra e engenheiro hidráulico, é lembrado pelo Teorema de Ceva, ou das cevianas. Ele nasceu em 1<sup>o</sup> de setembro de 1647, em Habsburgo, conforme registros da paróquia onde foi batizado. Seu pai era Carlo Francesco Ceva (1610–1690) e sua mãe, Pola Columbo. O casal teve muitos filhos, a maioria dos quais seguiu a vida religiosa. Ceva estudou no Colégio di Brera, de orientação jesuíta, na cidade de Milão, onde desde cedo demonstrou interesse pela ciência, especialmente pela matemática.

Não há muitos registros sobre a juventude de Ceva, mas ele fez um comentário intrigante ao afirmar que sua juventude foi marcada por "muitos tipos de infortúnios". Também mencionou que sua família era contrária às suas pesquisas acadêmicas. Após deixar a faculdade, seguiu a mesma carreira de seu pai, envolvendo-se em negócios políticos e administrativos em Milão, Gênova e Mântua. Apesar disso, continuou a realizar atividades científicas, dedicando-se especialmente à geometria e à hidráulica.

Em 1670, Ceva ingressou na Universidade de Pisa, onde estudou com Donato Rossetti (1633–1686) e Alessandro Marchetti (1633–1714), ambos membros da Academia de Matemática e Física de Roma. É muito provável que Ceva tenha passado algum tempo na academia em Roma.

Durante os dois anos que passou em Pisa, ele tentou resolver o problema da quadratura do círculo, apresentando algumas soluções que foram consideradas incorretas, o que o desanimou. Apesar disso, continuou suas pesquisas e, em 1678, publicou sua obra *De Lineis Rectis* (Estática da Construção das Linhas Retas que Contêm Outras). Nessa obra, Ceva apresentou o Teorema das Cevianas, demonstrando-o com argumentos relacionados aos centros de gravidade. Este resultado é considerado um dos mais importantes da geometria sintética do triângulo, no período entre a matemática da Grécia Antiga e o século XIX. O teorema é enunciado da seguinte forma:

Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer, e sejam  $M$ ,  $N$  e  $P$  pontos sobre os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$ , respectivamente. As cevianas  $NA$ ,  $BP$  e  $CM$  são concorrentes se, e

somente se,

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

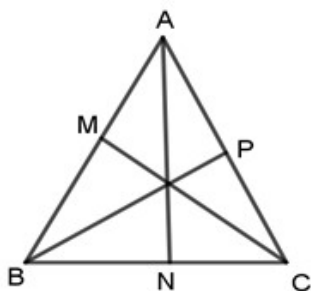
Na época, este trabalho não teve grande repercussão, até que o matemático francês Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) revisou e reconheceu sua importância, atribuindo os devidos méritos ao autor.

Além dessa contribuição, Ceva realizou outros trabalhos de grande relevância. Em 15 de janeiro de 1685, casou-se com Cecilia Vecchi, com quem teve sete filhos. Em 1686, foi nomeado professor de matemática na Universidade de Mântua, onde continuou a realizar pesquisas sobre problemas geométricos. Giovanni Benedetto Ceva faleceu em 13 de maio de 1734, em Mântua, Habsburgo.

**Teorema 9 (Teorema de Ceva).** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer e sejam  $M$ ,  $N$  e  $P$  pontos sobre os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$ , respectivamente (Figura 3.48). As cevianas  $NA$ ,  $BP$  e  $CM$  são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

**Figura 3.48:** Triângulo com as cevianas baixadas dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$



Fonte: O autor

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $AN$ ,  $BP$  e  $CM$  são concorrentes, então devemos provar que

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

Inicialmente, trace uma reta paralela a  $BC$  passando por  $A$ . Prolongue  $CM$  e  $BP$  até cortar  $r$ , respectivamente, em  $C'$  e  $B'$ , conforme Figura 3.49 .

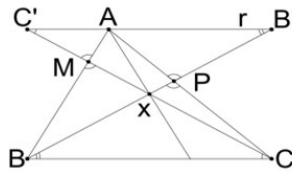
Como  $\triangle AMC' \sim \triangle BMC$ ,  $\triangle BPC \sim \triangle B'PA$  e  $\triangle XBC \sim \triangle XB'C'$  todos pelo caso (A.A), segue respectivamente que

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC'}{BC}, \quad \frac{CP}{PA} = \frac{BC}{AB'} \quad \text{e} \quad \frac{BN}{NC} = \frac{AB'}{AC'}$$

Portanto,

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{AC'}{BC} \cdot \frac{AB'}{AC'} \cdot \frac{BC}{AB'} = 1$$

**Figura 3.49:** Triângulo  $ABC$  com  $BC \parallel B'C'$



Fonte: O autor

( $\Leftarrow$ ) Se

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1,$$

devemos provar que  $NA$ ,  $BP$  e  $CM$  são concorrentes.

Traçando inicialmente  $AN$  e  $BP$ , que se intersectam em  $X$ . Agora, tracemos a reta  $EX$ , que corta  $AB$  em  $M'$  (Figura 3.50). Como  $NA$ ,  $BP$  e  $CM$  são concorrentes, então

$$\frac{AM'}{M'B} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

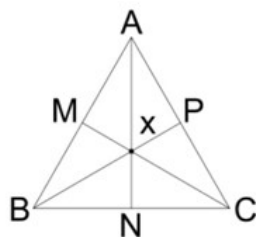
Portanto,

$$1 = \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{AM'}{M'B} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA}$$

Logo,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AM'}{M'B} \Rightarrow M = M'$$

**Figura 3.50:** Triângulo  $ABC$  com três cevianas concorrentes em  $X$

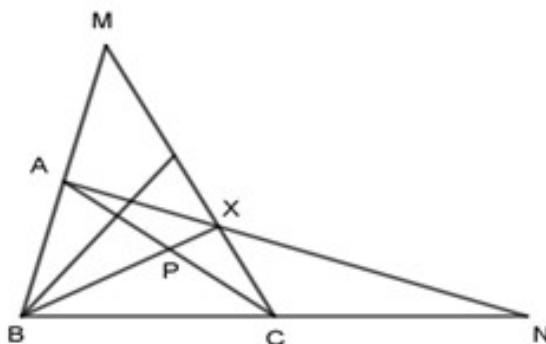


Fonte: O autor

Assim,  $NA$ ,  $BP$  e  $CM$  são concorrentes. □

**Observação:** A demonstração foi realizada de modo que a interseção das cevianas seja interior ao triângulo, porém o teorema também é válido quando a interseção é exterior ao triângulo. Observe a Figura 3.51.

**Figura 3.51:** Encontro das cevianas exterior ao triângulo  $ABC$



Fonte: O autor

As cevianas  $NA$ ,  $BP$  e  $CM$  são concorrentes no ponto  $X$  (exterior ao triângulo  $ABC$ ), com  $M$  no prolongamento de  $AB$  e  $N$  no prolongamento de  $BC$ , se e somente se

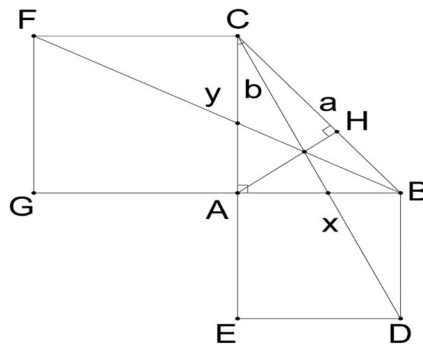
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

### 3.8.1 APLICAÇÕES

1. (IME-88) Sobre os catetos  $AB$  e  $AC$  de um triângulo  $ABC$ , constroem-se dois quadrados  $ABDE$  e  $ACFG$ . Mostre que os segmentos  $CD$ ,  $BF$  e a altura  $AH$  são concorrentes.

**Solução.** Considere a Figura 3.52.

**Figura 3.52:** Quadrados obtidos a partir dos catetos do triângulo  $ABC$



Fonte: O autor

Como  $\triangle ACH \sim \triangle BCA$  (caso A.A), então

$$\frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \overline{HC} = \frac{b^2}{a}$$

Analogamente, se  $\overline{AB} = c$ , temos

$$\overline{HB} = \frac{c^2}{a}.$$

De  $\triangle BYA \sim \triangle BFG$  (caso A.A), segue que

$$\frac{YA}{FG} = \frac{AB}{GB} \Rightarrow \overline{YA} = \frac{b \cdot c}{b + c}$$

Note que  $\overline{CY} + \overline{YA} = b$ , então

$$b - \overline{CY} = \frac{b \cdot c}{b + c} \Rightarrow \overline{CY} = \frac{b^2 - b \cdot c + bc}{b + c} \Rightarrow \overline{CY} = \frac{b^2}{b + c}$$

Como  $\triangle CXA \sim \triangle CDE$  (caso A.A), então

$$\frac{AX}{ED} = \frac{CA}{CE} \Rightarrow \overline{AX} = \frac{\overline{ED} \cdot \overline{CA}}{\overline{CE}} = \frac{b \cdot c}{b+c}$$

Sabemos que,  $\overline{XB} + \overline{AX} = c$ . Logo,

$$\overline{XB} = c - \overline{AX} = \frac{c^2}{b+c}$$

Pelo teorema de Ceva, temos

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{b \cdot c}{b+c} \cdot \frac{c^2}{\frac{b^2}{a}} \cdot \frac{b^2}{b+c} = 1$$

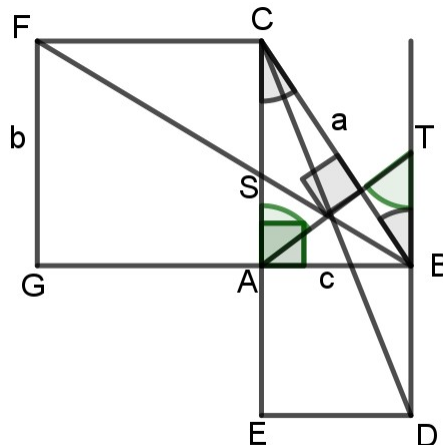
Portanto, os segmentos  $CD$ ,  $BF$  e  $AH$  são concorrentes.

### 3.8.2 RESOLUÇÃO SEM O USO DO TEOREMA DE CEVA

1. (IME-88) Sobre os catetos  $AB$  e  $AC$  de um triângulo  $ABC$ , constroem-se dois quadrados  $ABDE$  e  $ACFG$ . Mostre que os segmentos  $CD$ ,  $BF$  e a altura  $AH$  são concorrentes.

**Solução.** Considere a Figura 3.53

**Figura 3.53:** Quadrados obtidos a partir dos catetos do triângulo  $ABC$  (2)



Fonte: O autor

Sejam  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{AB} = c$ ,  $S = AC \cap BF$ ,  $T = AH \cap BD$  e  $H = BC \cap AT$ .

Os triângulos  $BHT$  e  $ABC$  são semelhantes, pelo caso (A.A). Daí,

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CF}} = \frac{c}{b}$$

Os triângulos  $HBT$  e  $HAC$  são semelhantes, também pelo caso (A.A). Assim,

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = \frac{c}{b}$$

De onde obtemos a proporção,

$$\frac{\overline{BT}}{b} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CH}}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, pelas relações métricas no triângulo retângulo  $ABC$  de altura  $AH$ , teremos  $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CB}$  e  $\overline{AC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{BC}$ , de onde obtemos, respectivamente,

$$\overline{BH} = \frac{c^2}{a} \quad \text{e} \quad \overline{CH} = \frac{b^2}{a}$$

Substituindo as duas últimas igualdades em 3.13, segue que

$$\frac{\overline{BT}}{b} = \frac{c^2/a}{b^2/a} \Rightarrow \frac{\overline{BT}}{b} = \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow \overline{BT} = \frac{c^2}{b}$$

Então,

$$\frac{\overline{BT}}{\overline{BD}} = \frac{c^2}{c} \Rightarrow \frac{\overline{BT}}{\overline{BD}} = \frac{c}{b}$$

Sobre as paralelas  $BD$  e  $AC$  da Figura 3.53, obtemos a seguinte proporção,  $\frac{\overline{BT}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{SC}}$ , o que só é possível se  $CD$  interceptar  $BF \cap AH = Q$ .

## 4 CONCLUSÃO

Nesta pesquisa, observou-se que o conhecimento dos teoremas de geometria abordados, frequentemente ausentes no currículo do ensino médio, pode oferecer aos alunos e professores uma alternativa eficiente para resolver problemas de nível avançado de forma mais ágil. Especificamente, os teoremas de Ceva e Menelau, além de resolverem diversas questões, são utilizados nas demonstrações de outros teoremas e resultados clássicos, evidenciando como sua aplicação direta e indireta pode simplificar e, em alguns casos, viabilizar a solução de problemas complexos.

Esta pesquisa contribui de diversas formas para a área da matemática, especialmente para a geometria plana e para a preparação de professores e alunos que podem utilizar tais conhecimentos em suas aulas e na preparação para competições de alto nível. Foram identificados teoremas e conceitos relevantes que não constam no currículo do ensino médio, sendo demonstrado, por meio de exemplos detalhados, como esses teoremas podem ser empregados para resolver problemas de maior complexidade. Além disso, algumas das questões abordadas foram resolvidas por métodos alternativos aos teoremas específicos, com o objetivo de demonstrar sua eficácia. Propõe-se, assim, a inclusão desses tópicos no currículo do ensino médio e em programas de treinamento para competições avançadas.

Os resultados obtidos apontam para a necessidade de estudos complementares sobre esses e outros teoremas da geometria plana, destacando sua relevância na resolução de problemas de maneira mais eficiente e sugerindo sua inclusão no currículo do ensino médio, bem como em cursos preparatórios para competições e olimpíadas de matemática.

Com base nesta pesquisa e no material didático sugerido, recomenda-se a criação de livros, apostilas e recursos digitais que abordem os teoremas estudados, com ênfase em aplicações práticas e na resolução de questões. Sugere-se, também, investigar a aplicação desses teoremas em disciplinas eletivas de preparação para olimpíadas de

matemática e para exames do ITA, IME e de escolas militares, incentivando os professores a utilizá-los em questões mais desafiadoras em sala de aula e em avaliações, como questões bônus.

Em síntese, esta dissertação demonstra que o currículo do ensino médio carece de conteúdos que preparem adequadamente os alunos para competições de alto nível e olimpíadas de matemática. Tal lacuna impede o desenvolvimento de habilidades analíticas e de resolução de problemas que são fundamentais não apenas para competições acadêmicas, mas também para a formação acadêmica e profissional dos estudantes.

## REFERÊNCIAS

- [1] BARBOSA, João Lucas Marque. **Geometria Euclidiana Plana**. 10. ed. Fortaleza: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [2] BOYER, Carl B. **História da matemática** Tradução: Elza F. Gomide. 1. ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974.
- [3] BOYER, Carl B. **História da matemática**. , revista por UtaC. Merzbach, Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.
- [4] CRILLY, Tony **50 ideias matemáticas que você precisa conhecer**. Tradução: Helena Londres. 1. ed. São Paulo: Planeta, 2017.
- [5] EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. SP: Unicamp, 2011.
- [6] GARBI, Gilberto G.A **Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- [7] GEOGEBRA Clássico. **GeoGebra - matemática dinâmica para todos**.. Disponível em: [https://www.geogebra.org/classic?lang=pt\\_PT](https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT). PUC, São Paulo. Acessado em 2024.
- [8] GOMES, Carlos A **Tópicos de Matemática / IME – ITA – Olympiads**. Vol. 1, 1. ed. Fortaleza: Vestseller, 2016.
- [9] KILHIAN, Kleber. **O teorema de Stewart**. 2023. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/02/o-teorema-de-stewart.html> Acesso em: 19 set. 2024.
- [10] MAURO, Eduardo. **Geometria: problemas sem problemas**. Vol. 4, 1. ed. Rio de Janeiro: XYZ , 2012.
- [11] MEDINA, Miguel Ángel Morales. **El Teorem del Emperador**. 2012. Disponível em: <https://www.gaussianos.com/el-teorema-del-emperador/> Acesso em: 25 set. 2024.

- [12] MILTON, Donaire Peña *et al.* **Geometria plana: Fundamentos y aplicaciones de las figuras bidimensionales.** 1.ed. Lima: Lumbreiras Editores, 2019.
- [13] MORGADO, Augusto Cesar; VAGUINER, Eduardo. **Tópicos de Matemática Elementar - IME.** V. 3 -1. ed. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2015.
- [14] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria.** 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [15] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Márcio Rodrigues da Rocha. **Elementos da matemática** 2. ed. Belém: Print Solution, 2016.
- [16] STEWART, Matthew. **Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics.** Edinburgh, Imprensa Palala, 2018.
- [17] WIKIPÉDIA, A Enciclopédia livre. **Giovanni Ceva.** 2021. Disponível em: [https://es.wikipedia.org/wiki/Giovanni\\_Ceva](https://es.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Ceva) Acesso em: 22 Agosto 2024.
- [18] WIKIPÉDIA, A Enciclopédia livre. **Menelau de Alexandria.** 2023. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Menelau\\_de\\_Alexandria](https://pt.wikipedia.org/wiki/Menelau_de_Alexandria) Acesso em: 2 Set. 2024.