



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Cleilton Mendes Barbosa Junior

**“Oxe, e é isso mesmo?”: O ensino de probabilidade através de
problemas contraintuitivos**

RECIFE
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Cleilton Mendes Barbosa Junior

**“Oxe, e é isso mesmo?”: O ensino de probabilidade através de
problemas contraintuitivos**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Anete Soares Cavalcanti

RECIFE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B238o Barbosa Junior, Cleilton Mendes
 "Oxe, e é isso mesmo?": O ensino de probabilidade através de problemas contraintuitivos / Cleilton Mendes
Barbosa Junior. - 2024.
 51 f. : il.

 Orientadora: Anete Soares Cavalcanti.
 Inclui referências.

 Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em
Matemática (PROFMAT), Recife, 2024.

 1. Ensino. 2. Matemática. 3. Probabilidade. 4. Resolução de Problemas. 5. Contraintuitivos. I. Cavalcanti, Anete
Soares, orient. II. Título

CDD 510

CLEILTON MENDES BARBOSA JUNIOR

“Oxe, e é isso mesmo?”: O ensino de probabilidade através de problemas contraintuitivos.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23/02/2024

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Anete Soares Cavalcanti (Orientadora) – UFRPE

Prof. Dr. Luiz Paulo Freire Moreira – UFPE

Profa. Dra. Karla Ferreira Sousa Arruda – PROFMAT/UFRPE

*Dedico este trabalho à minha família, à minha orientadora e aos meus amigos de
mestrado.*

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), sob o Código de Financiamento 001, por me conceder a bolsa de mestrado. Além disso, agradeço sinceramente à Secretaria de Educação e Esportes do Estado de Pernambuco por me ceder o afastamento parcial para dedicar-me aos estudos. Por fim, agradeço a todos que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

O objetivo desta dissertação de mestrado é elaborar e aplicar uma sequência didática sobre probabilidade, com ênfase em resolução de problemas contraintuitivos, para alunos do terceiro ano do ensino médio em uma escola pública localizada na cidade de Recife-PE. A abordagem pedagógica será baseada em quatro intervenções pedagógicas: “O Problema dos Doces”, “O Problema do Grão-Duque da Toscana”, “O Problema do Falso Positivo” e “A Porta dos Desesperados”. Estas intervenções serão conduzidas ao longo de oito aulas com atividades práticas e discussões em sala de aula. Cada intervenção abordará habilidades específicas sobre o conteúdo de probabilidade que estão presentes no novo currículo de Pernambuco para o ensino médio. O projeto incluirá a aplicação de pré-teste e pós-teste que servirão como ferramentas diagnósticas para o ensino de probabilidade. Ao final, a dissertação avaliará a eficácia da resolução de problemas contraintuitivos no ensino de probabilidade, destacando as contribuições específicas de cada intervenção.

Palavras-chave: Ensino; Probabilidade; Resolução de problemas; Contraintuitivo.

Abstract

The objective of this master's dissertation is to develop and implement a didactic sequence on probability, with an emphasis on solving counterintuitive problems, for third-year high school students in a school located in the city of Recife-PE. The pedagogical approach will be based on four pedagogical interventions: "The Candy Problem", "The Problem of the Grand Duke of Tuscany", "The False Positive Problem", and "The Door of Desperates". These interventions will be conducted over eight classes with practical activities and classroom discussions. Each intervention will address specific skills regarding probability content that are present in the new curriculum of Pernambuco for high school. The project will include the application of pre-tests and post-tests that will serve as diagnostic tools for probability teaching. In the end, the dissertation will evaluate the effectiveness of solving counterintuitive problems in probability teaching, highlighting the specific contributions of each intervention.

Keywords: Teaching; Probability; Problem solving; Counterintuitive

Lista de ilustrações

Figura 1 – Visualização utilizando o diagrama de Venn para representar $P(B)$. . .	26
Figura 2 – Visualização utilizando o diagrama de Venn para representar $P(B A)$.	26
Figura 3 – Habilidades previstas no novo currículo de Pernambuco	30
Figura 4 – Palpites iniciais feito por um dos grupos da turma A	51
Figura 5 – Simulação das retiradas dos doces	52
Figura 6 – Exemplo das decomposições distintas de somar 9 e somar 10	55
Figura 7 – Preenchimento da tabela feita por um dos grupos	55
Figura 8 – Ilustração utilizado na terceira intervenção	57
Figura 9 – Árvore de possibilidades utilizada na explicação do problema original .	58
Figura 10 – Marilyn Vos Savant, colunista da revista Parade	59
Figura 11 – Imagem captada do vídeo reproduzido durante a apresentação do problema	61
Figura 12 – Modelo de planilha eletrônica utilizada durante a atividade	62
Figura 13 – Resultados da simulação em ambas as turmas	63
Figura 14 – Aluno respondendo o pós-teste na turma B	65
Figura 15 – Resposta referente a segunda questão aluno turma B	71
Figura 16 – Resposta referente a segunda questão aluno turma A	72
Figura 17 – Alternativa respondida de forma errada por um aluno da turma B . . .	73
Figura 18 – Item a) e b) respondidos de forma errada por um aluno da turma B . .	73
Figura 19 – Item b) respondido de forma errada por um aluno da turma A	74
Figura 20 – Alternativas respondidas de forma errada por um aluno da turma A . .	74
Figura 21 – Alguns equívocos na representação da probabilidade	75
Figura 22 – Resolução correta apresentado pelo aluno da turma A	76
Figura 23 – Resolução com um pequeno equívoco por parte do aluno turma A . . .	76
Figura 24 – Resolução equivocada de um aluno da turma B devido a falta de atenção	77
Figura 25 – Resolução equivocada da questão 5 por um aluno da turma A	78
Figura 26 – Outra resolução equivocada da questão 5 por um aluno da turma A . .	78
Figura 27 – Construção do diagrama da questão 6 apresentado por um aluno da turma A	79
Figura 28 – Exemplo de justificativa comum da questão 7 por um aluno da turma B	80
Figura 29 – Exemplo de erro comum na questão 8 feito por um aluno da turma B .	82
Figura 30 – Exemplo de justificativa para a questão 1 do pós-teste feito por um aluno da turma B	83
Figura 31 – Exemplo de notação própria para representar o espaço amostral	84
Figura 32 – Exemplo de notação própria para representar o espaço amostral	85
Figura 33 – Exemplo de erro comum para o item d) da questão 3 do pós-teste . . .	86
Figura 34 – Exemplo de erro comum para o item d) da questão 3 do pós-teste . . .	86

Figura 35 – Questão 4 sem a finalização do problema	88
Figura 36 – Erro encontrado na questão 4	88
Figura 37 – Erro encontrado na questão 5	89
Figura 38 – Solução listando todo o espaço amostral da questão 5	90
Figura 39 – Solução incorreta da questão 6	91
Figura 40 – Solução incorreta da questão 6	92
Figura 41 – Solução incorreta do item c) da questão 7	92
Figura 42 – Exemplo de resolução do item a) e b) da questão 7	93
Figura 43 – Exemplo de erro encontrado na correção da questão 8 do pós-teste . . .	94

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados obtidos pelas turmas A e B no Problema dos Doces	52
Tabela 2 – Resultados possíveis caso o participante escolha porta #1	64
Tabela 3 – Total de erros e acertos da questão 1 pré-teste	70
Tabela 4 – Total de erros e acertos da questão 2 pré-teste	71
Tabela 5 – Total de erros e acertos da questão 3 pré-teste	73
Tabela 6 – Total de erros e acertos da questão 4 pré-teste	76
Tabela 7 – Total de erros e acertos da questão 5 pré-teste	77
Tabela 8 – Total de erros e acertos da questão 6 pré-teste	79
Tabela 9 – Total de erros e acertos da questão 7 pré-teste	80
Tabela 10 – Total de erros e acertos da questão 8 pré-teste	81
Tabela 11 – Total de erros e acertos da questão 1 pós-teste	83
Tabela 12 – Total de erros e acertos da questão 2 pós-teste	84
Tabela 13 – Total de erros e acertos da questão 3 pós-teste	86
Tabela 14 – Total de erros e acertos da questão 4 pós-teste	87
Tabela 15 – Total de erros e acertos da questão 5 pós-teste	89
Tabela 16 – Total de erros e acertos da questão 6 pós-teste	90
Tabela 17 – Total de erros e acertos da questão 7 pós-teste	92
Tabela 18 – Total de erros e acertos da questão 8 pós-teste	94
Tabela 19 – Evolução dos acertos das questões do pré-teste e pós-teste	96

Sumário

	Introdução	19
1	UM BREVE HISTÓRICO SOBRE PROBABILIDADE	21
1.1	O que é probabilidade?	22
1.2	Probabilidade Condicional e o Teorema de Bayes	25
1.3	O ensino de Estatística e Probabilidade no Brasil	29
2	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E ANÁLISE DE ERROS	33
2.1	As diferentes abordagens sobre resolução de problemas	34
2.1.1	Ensinar para resolver problemas	34
2.1.2	Ensinar sobre resolução de problemas	35
2.1.3	Ensinar através da resolução de problemas	36
2.2	Análise de erros	38
3	A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	41
3.1	Montando a sequência didática	42
3.2	Elaboração e aplicação do pré-teste	48
3.3	Primeira Intervenção: O Problema do Doces	51
3.4	Segunda Intervenção: O Problema do Grão-Duque da Toscana	53
3.5	Terceira Intervenção: O Problema do Falso-Positivo	56
3.6	Quarta Intervenção: A Porta dos Desesperados	59
3.6.1	A história por trás do Problema dos Dois Bodes	59
3.6.2	A simulação do problema	61
3.7	Elaboração e aplicação do pós-teste	65
4	ANÁLISE DOS RESULTADOS	69
4.1	Analizando o Pré-Teste	69
4.2	Analizando o Pós-Teste	82
4.3	Considerações sobre a análise dos resultados	94
	Conclusão	97
	REFERÊNCIAS	99

Introdução

A probabilidade é uma ferramenta fundamental para lidar com incertezas e tomada decisões em diversas áreas, como estatística, ciências, finanças e até mesmo em situações do nosso cotidiano. Ela nos permite quantificar e entender as chances de ocorrência de eventos, auxiliando na análise de riscos, na previsão de resultados e no embasamento de argumentos baseados em evidências. Além disso, o estudo da probabilidade não se limita apenas à sua aplicação prática; ele também desencadeia o desenvolvimento de habilidades essenciais para o raciocínio lógico e a resolução de problemas. Ao imergir no campo da probabilidade, os estudantes são desafiados a adotar uma abordagem analítica, considerar diferentes cenários e avaliar a validade de argumentos. Desta forma, o ensino de probabilidade pode oferecer um ambiente propício para o desenvolvimento do pensamento crítico e da criatividade.

No Brasil, desde a década de 90, diversos documentos oficiais incorporam orientações para inclusão da formação Estatística e Probabilidade como campo da Matemática Escolar. A atual Base Nacional Comum Curricular contém recomendações para o ensino de Estatística e Probabilidade, em toda etapa do ensino básico. Estes documentos orientam a trabalhar situações contextualizadas, para que o aluno possa compreender bem os diversos conceitos referentes à probabilidade. Desta maneira, devem ser propostas situações para que auxiliem os alunos a perceberem que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que podem ser modelados para nos fornecer diversas informações relativas a sua probabilidade de ocorrência. Os problemas abordados no ensino médio sobre o tema de probabilidade muitas vezes desafiam a intuição e exigem abordagens inovadoras para sua resolução, estimulando os alunos a construírem suposições, explorarem diferentes estratégias e buscarem soluções criativas. É neste sentido, que este projeto visa trabalhar problemas *contraintuitivos* para o ensino de probabilidade para alunos do ensino médio. A proposta é trabalhar com problemas que desafiem os alunos a pensar fora da caixa e a desenvolver um entendimento mais profundo da matéria. Problemas *contraintuitivos* são situações que parecem ir contra a intuição, mas que, quando analisados corretamente, fornecem uma explicação lógica e matemática para o resultado. Esses problemas são úteis porque obrigam os alunos a repensar suas suposições sobre o mundo e a desenvolver um entendimento mais crítico sobre diversos conteúdos da matemática. No entanto, é importante utilizar problemas *contraintuitivos* de forma adequada e equilibrada, de modo a torná-los desafiadores, mas não tão difíceis que os alunos fiquem desencorajados para resolvê-los. Além disso, deve-se garantir que os problemas estejam alinhados com as habilidades e objetivos de aprendizagem dos alunos.

É considerando todos estes aspectos que esta dissertação propôs a elaboração de

uma sequência didática trabalhando problemas contraintuitivos, selecionados especialmente para cobrir os principais conteúdos abordados no ensino médio referentes a probabilidade. Ao final da dissertação avaliaremos a eficácia da sequência didática proposta através da análise qualitativa de pré-teste e pós-teste aplicado aos alunos. Por fim, espera-se que todas as abordagens citadas neste projeto venha a contribuir com o processo de ensino-aprendizagem em relação ao tema de probabilidade.

1 Um breve histórico sobre probabilidade

Segundo [Maistrov e Kotz \(2014\)](#) evolução da teoria da probabilidade pode ser delineada através de alguns períodos. O primeiro período, relacionado com a pré-história da teoria da probabilidade, teve seu surgimento envolto na história antiga, testemunhando o surgimento de problemas de probabilidade rudimentares, que foram inicialmente resolvidos através de cálculos básicos. A gênese da teoria da probabilidade pode ser rastreada até este período, embora metodologias específicas ainda não tenham surgido. Figuras notáveis como Cardano, Paccioli e Tartaglia contribuíram para esta fase, que concluiu por volta do século XVI.

O segundo período tem relação com o surgimento da teoria da probabilidade como ciência. Durante esta época, os conceitos fundamentais da teoria da probabilidade foram refinados, com a introdução de noções-chave como expectativa matemática. Teoremas, incluindo os teoremas de adição e multiplicação, foram formalizados. Nomes renomados como Pascal, Fermat e Huygens marcaram o início desta fase, que se estendeu do meio do século XVII ao início do século XVIII. A teoria da probabilidade começou a encontrar aplicações em demografia, seguros e estimativa de erros durante este período.

O terceiro período é relacionado com a expansão e formalização da Probabilidade. A obra seminal de James Bernoulli, *Ars Conjectandi*, marcou o início de uma nova fase na teoria da probabilidade, inaugurando provas rigorosas de teoremas fundamentais como a lei dos grandes números. Este período, que se estende desde o início do século XVIII, viu contribuições significativas de luminares como de Moivre, Laplace e Gauss. A teoria da probabilidade encontrou aplicações mais amplas, especialmente em estatística e nas ciências naturais, abrindo caminho para diversos teoremas limitantes.

O quarto período foi marcado pela escola russa e avanços em probabilidade. Um período subsequente, predominantemente associado à escola russa (São Petersburgo), testemunhou avanços revolucionários liderados por figuras como Chebyshev, Markov e Lyapunov. Extensões das leis dos grandes números e teoremas do limite central para diversas classes de variáveis aleatórias foram fundamentais durante esta era. A teoria da probabilidade foi aplicada a variáveis aleatórias dependentes, facilitando sua integração em numerosas disciplinas científicas, especialmente física e estatística.

Por fim, temos o período da modernização e axiomatização dos conceitos de probabilidade. A era contemporânea da teoria da probabilidade surgiu com a formulação de axiomas, impulsionada principalmente por aplicações práticas em diversos domínios

científicos. A axiomatização forneceu um arcabouço sistemático, alinhando a teoria da probabilidade com a teoria dos conjuntos e outros ramos matemáticos. Isso abriu caminho para uma extensa pesquisa, que vai desde economia aplicada até cibernética. Contribuidores notáveis para este período incluem Bernstein, von Mises e Borel. O estabelecimento dos postulados de Kolmogorov na década de 1930 marcou a culminação definitiva das bases axiomáticas da teoria da probabilidade, recebendo amplo reconhecimento e aclamação.

Segundo [Gorroochurn \(2016\)](#), Cardano liderou o caminho nos primeiros cálculos de probabilidade que surgiram na Itália no século XVI. Ele considerava a palavra “probabilidade” como sinônimo de “chances”. Pela primeira vez, ele explicou a probabilidade de um evento como sendo a razão entre o número de formas que o evento pode acontecer e o número total de resultados possíveis. Ele percebia o total de desfechos possíveis como o “circuito”. Atualmente, este termo é denominado como espaço amostral, sendo a totalidade dos resultados possíveis de um experimento. Em seu livro, [Gorroochurn \(2016\)](#) cita algumas definições do conceito de probabilidade dada por Cardano, Leibniz e Laplace:

A definição dada por Cardano (no Capítulo 14 do Liber): “Portanto, existe uma regra geral, a saber, que devemos considerar todo o circuito, e o número de lançamentos que representam quantas vezes o resultado favorável pode ocorrer, e comparar esse número com o restante do circuito, e de acordo com essa proporção devem ser feitas as apostas mútuas para que possam competir em termos iguais.” ([Gorroochurn, 2016, p. 5, tradução nossa](#)).

A definição dada por Leibniz (1646–1716) em 1710 (Leibniz, 1969, p. 161): “Se uma situação pode levar a diferentes resultados vantajosos que se excluem mutuamente, a estimativa da expectativa será a soma das vantagens possíveis para que ocorram esses resultados, dividida pelo número total de resultados.” ([Gorroochurn, 2016, p. 5, tradução nossa](#)).

A definição dada em 1774 por Laplace (1749–1827), com quem a definição formal da probabilidade clássica geralmente é associada. Em seu primeiro artigo sobre probabilidade, Laplace afirma: “A probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis a ele e o número de casos possíveis, quando não há nada que nos faça acreditar que um caso deva ocorrer em vez de qualquer outro, de modo que esses casos são, para nós, igualmente possíveis.” ([Gorroochurn, 2016, p. 5, tradução nossa](#)).

Essas definições, moldadas pelo pensamento de grandes mentes ao longo da história, serviram para o desenvolvimento e aplicação da teoria da probabilidade nos tempos modernos. Na próxima seção veremos algumas abordagens referentes ao conceito de probabilidade.

1.1 O que é probabilidade?

A probabilidade é a área da matemática que tem como objeto de estudo os fenômenos aleatórios. Segundo [Magalhães \(2006\)](#), fenômenos ou experimentos aleatórios

são situações que envolvem incertezas, com o objetivo de se extrair informações a cerca das possibilidades de ocorrências desses fenômenos. Em outras palavras, um fenômeno ou experimento é dito aleatório se, quando repetido sucessivas vezes, sob as mesmas condições, obtém-se resultados diferentes. É importante destacar que certas regularidades poderão surgir ao se realizar o mesmo evento sucessivas vezes. É esta regularidade que torna possível construir um modelo probabilístico para o evento a ser trabalhado. Com o passar dos anos, a probabilidade ganhou diversas abordagens conceituais, dentre elas, podemos destacar a abordagem clássica, frequentista e axiomática.

A abordagem clássica é a maneira mais direta de se definir a probabilidade de um certo evento A . Segundo Coutinho (1994), na obra publicada em 1663, *Liber de ludo alea* (Livro dos jogos de azar), do matemático Jérôme Cardan, estão presentes as primeiras citações sobre os estudos da probabilidade. Em 29 de Julho de 1654, Blaise Pascal, ilustre filósofo, físico e matemático, enviou uma carta ao matemático Fermat descrevendo uma maneira de se obter a probabilidade de sucesso de um evento será:

$$\frac{\text{Total de casos favoráveis}}{\text{Total de casos possíveis}}$$

Há duas restrições dos casos possíveis para abordagem clássica:

1. Todos os casos possíveis devem ser equiprováveis, ou seja, devem possuir a mesma probabilidade.
2. Deverá haver um número finito de casos possíveis.

Seja Ω um conjunto finito. Pode-se formalizar a definição clássica da seguinte maneira: se $A \subseteq \Omega$, temos

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos de } A}{\text{Número de elementos de } \Omega}$$

Exemplo 1.1. (IFSP-Subsequente 2014) Sandra comprou uma caixa de balas sortidas. Na caixa, havia 8 balas de sabor menta, 6 balas de sabor morango, 6 balas de sabor caramelo e 4 balas de sabor tangerina. A probabilidade de Sandra escolher na caixa, ao acaso, uma bala de tangerina é:

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{3}$

Solução.

Na caixa há $8 + 6 + 6 + 4 = 24$ balas, das quais 4 são de tangerina. Sendo assim, a probabilidade procurada é de

$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Resposta letra B.

Exemplo 1.2. (Portal da Matemática - OBMEP) Uma urna contém cinco cartões, numerados de 1 a 5. Retira-se sucessivamente, ao acaso, os cinco cartões da urna e alinha-os, da esquerda para a direita, pela ordem de saída, de maneira a formar um número de cinco algarismos. Qual é a probabilidade de esse número ser divisível por 4?

Solução.

O total de números distintos que podem ser formados é $5! = 120$. Para que um número seja divisível por 4, seus dois últimos algarismos devem formar um número divisível por 4. Assim, com os algarismos de 1 a 5, temos as possibilidades 12, 24, 32, 52 que são divisíveis por 4. Fixados os dois últimos algarismos, temos $3!$ números distintos. Assim, a probabilidade solicitada é

$$\frac{4 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{5}.$$

Após a introdução da definição clássica, uma nova abordagem ganhou espaço, a frequentista. Também chamada de abordagem experimental, nesta abordagem é considerado um evento que possa ser repetido, sempre nas mesmas condições, durante uma quantidade “grande” de vezes. Tome Ω como o espaço de resultados do experimento. Seja A um evento cuja probabilidade se deseje calcular. Neste caso o experimento será repetido várias vezes, estimando-se a probabilidade de A pela sua frequência relativa de ocorrência, ou seja:

$$\frac{\text{Número de ocorrências de } A}{\text{Número total de repetições}}$$

Seja neste caso Ω o espaço dos resultados (finito ou não) de um fenômeno aleatório e seja A um evento de Ω . São realizadas n repetições independentes do experimento, sempre nas mesmas condições. Então a frequência relativa do evento A será dada por:

$$\frac{\text{Número de ocorrências de } A}{\text{Número total de repetições}} = \frac{\text{Número de ocorrências de } A}{n}$$

A vantagem em trabalhar com a abordagem frequentista é que, diferente da abordagem clássica, não há necessidade de explicitar que todos os casos possíveis devem ter a mesma probabilidade, nem a necessidade que haja uma quantidade finita de caso possíveis.

Exemplos clássicos de frequência relativa se estabilizando próximo a um número ocorreram com o lançamento de uma moeda honesta: são os experimentos históricos feitos pelo cientista francês Georges Louis Leclerc – Conde de Buffon (1707 – 1788); pelo estatístico inglês Karl Pearson (1857-1936) e pelo matemático inglês John Edmund Kerrich (1903-1985). (Obmep-Impa, 2024, Online)

Segundo Shalabh, Heumann e Küchenhoff (2008), Buffon lançou uma moeda honesta 4040 vezes e obteve 2048 caras; o que resulta em uma frequência relativa de $\frac{2048}{4040} \approx 0,5069$, ou seja, aproximadamente 50,69% de caras. Já Pearson lançou uma moeda honesta 24000 vezes e obteve 12012 caras, resultando em uma frequência relativa de $\frac{12012}{24000} = 0,5005$, que nos dá 50,05% de caras, um valor bem próximo ao resultado teórico de 50% de chance de sair cara no lançamento de uma moeda honesta.

Como o nome já sugere, a **abordagem axiomática** trata a probabilidade por meio de axiomas e postulados. O matemático russo, Andrei Kolmogorov, foi responsável por axiomatizar a teoria das probabilidades. Kolmogorov e Bharucha-Reid (2018) afirmaram que a teoria das probabilidades poderia ser axiomatizada, de forma análoga à geometria e à álgebra.

Considerando $P(A)$ como a probabilidade de ocorrer o evento A , e considerando Ω como sendo o espaço amostral, ou seja, o conjunto de todos os resultados possíveis. A probabilidade de ocorrer o evento A deverá obedecer os seguintes axiomas:

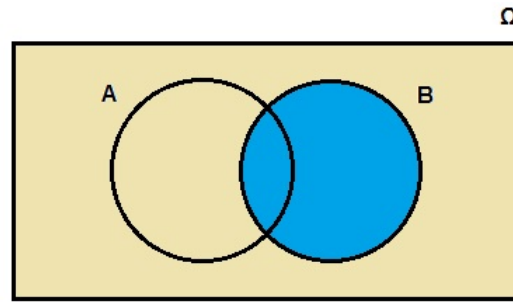
1. **Axioma 1:** $0 \leq P(A) \leq 1$
2. **Axioma 2:** $P(\Omega) = 1$
3. **Axioma 3:** Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A partir destes axiomas, é possível provar diversos teoremas e corolários de grande importância no campo da teoria da probabilidade.

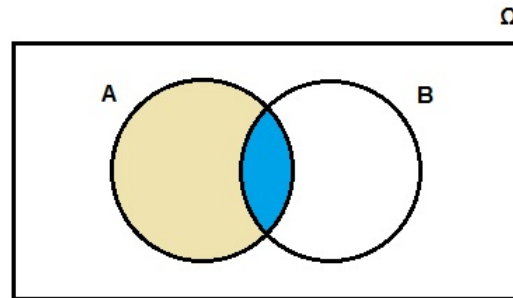
1.2 Probabilidade Condicional e o Teorema de Bayes

Sendo A e B dois eventos de um espaço amostral Ω , temos que $P(B|A)$ indica a probabilidade do evento B ocorrer, dado que A ocorreu.

Visualmente a diferença entre $P(B)$ e $P(B|A)$ é simples de se notar. Na figura 1 temos que ao calcular $P(B)$ descobrimos a probabilidade de estarmos em B , representado na cor azul, em relação ao espaço amostral Ω , representado na cor bege. Porém, na figura 2, ao calcularmos a $P(B|A)$ descobrimos a probabilidade de estarmos em B , sabendo que estamos no espaço reduzido de A .

Figura 1 – Visualização utilizando o diagrama de Venn para representar $P(B)$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor

Figura 2 – Visualização utilizando o diagrama de Venn para representar $P(B|A)$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor

O cálculo da probabilidade condicional é dado pela fórmula:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{com } P(A) \neq 0$$

Na equação acima, $P(A \cap B)$ é a probabilidade de ocorrência de ambos os eventos, e $P(A)$ é o evento que sabemos que ocorreu. Note que $P(A)$ é diferente de zero, pois uma vez que A ocorreu, sua probabilidade não é nula. Abaixo veremos exemplos de questão que aborda probabilidade condicional:

Exemplo 1.3. (Portal da Matemática - OBMEP) Um grupo musical com homens e mulheres foi classificado conforme a tabela abaixo.

	Violão	Trompete
Homens	10	6
Mulheres	7	9

Escolhe-se ao acaso um desses integrantes. Sabendo-se que o escolhido toca trompete, qual a probabilidade de ser mulher?

Solução. Seja T o evento que ocorre se a pessoa escolhida toca trompete e M se a escolhida for mulher. Temos que

$$P(T) = \frac{6+9}{32} = \frac{15}{32}.$$

e que

$$P(T \cap M) = \frac{9}{32}.$$

e portanto

$$P(M | T) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Exemplo 1.4. (Portal da Matemática - OBMEP) Sabe-se que 80% dos pênaltis marcados a favor do Brasil são cobrados por jogadores que jogam no Flamengo. A probabilidade de um pênalti ser convertido é de 40% se for um jogador do Flamengo e 70% caso contrário. Um pênalti a favor do Brasil acabou de ser marcado.

- Qual a probabilidade do pênalti ser cobrado por um jogador do Flamengo e ser convertido?
- Qual a probabilidade do pênalti ser convertido?
- O pênalti foi desperdiçado, qual a probabilidade de que o cobrador tenha sido um jogador do Flamengo?

Solução.

- a) Deseja-se o resultado de $P(F \cap C)$ que é igual a

$$P(F \cap C) = P(F) \cdot P(C | F) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32.$$

- b) Deseja-se o resultado de $P(F \cap C) + P(\overline{F} \cap C)$ que é igual a

$$\begin{aligned} P(F \cap C) + P(\overline{F} \cap C) &= P(F) \cdot P(C | F) + P(\overline{F}) \cdot P(C | \overline{F}) \\ &= 0,8 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,7 \\ &= 0,32 + 0,14 \\ &= 0,46. \end{aligned}$$

- c) Por definição,

$$P(F | \overline{C}) = \frac{P(F \cap \overline{C})}{P(\overline{C})}$$

Sendo assim, podemos fazer

$$P(\overline{C}) = 0,8 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,54.$$

e

$$P(F \cap \overline{C}) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48.$$

Por fim, chegamos a

$$P(F | \overline{C}) = \frac{0,48}{0,54} = \frac{8}{9}.$$

O Teorema de Bayes mostra a relação entre uma probabilidade condicional e a sua inversa. Em sua forma simples, o Teorema de Bayes é dado pela equação abaixo:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B)}$$

Onde $P(A)$ e $P(B)$ são as probabilidades de ocorrência de A e B , respectivamente. $P(A | B)$ é a probabilidade de ocorrência de A dado que B ocorreu. $P(B | A)$ é a probabilidades de ocorrência de B dado que A ocorreu.

Exemplo 1.5. (Portal da Matemática - OBMEP) Há três moedas, duas delas normais e uma defeituosa, pois possui duas caras. Escolhe-se, ao acaso, uma dessas moedas, a qual é lançada três vezes.

- a) Qual é a probabilidade de serem obtidas três caras?
- b) Obtiveram-se três caras. Qual a probabilidade de ter sido lançada a moeda defeituosa.

Solução.

- a) Primeiro note que há duas maneiras de se obter 3 caras (KKK).

Caso 1: ao escolher a moeda, pegamos a defeituosa. Isso acontece com probabilidade $\frac{1}{3}$ e, uma vez escolhida a moeda, todos os resultados obtidos serão caras (K).

Caso 2: ao escolher a moeda, pegamos uma normal; essa escolha é satisfeita com probabilidade $\frac{2}{3}$ e, depois disso, temos probabilidade $(\frac{1}{2})^3$ para que os três lançamentos resultem em cara. Assim, a probabilidade desejada é:

$$\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

- b) Aqui estamos restringindo o espaço de probabilidade, pois já sabemos que foram obtidas 3 caras. Ou seja, queremos calcular a probabilidade $P(D | \text{"3caras"})$, onde

D é o evento “escolher a moeda defeituosa” e “3caras” é o evento de se obter três caras. Pelo Teorema de Bayes temos que

$$\begin{aligned} P(D \mid \text{“3caras”}) &= \frac{P(\text{“3caras”} \mid D) \cdot P(D)}{P(\text{“3caras”})} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

1.3 O ensino de Estatística e Probabilidade no Brasil

O ensino de estatística e probabilidade tem ganhado cada vez mais espaço no currículo da educação básica no Brasil. Não é de hoje que há uma preocupação sobre a necessidade de se aprender estatística e probabilidade nas escolas. Na década de 80 já havia a discussão sobre o ensino de Probabilidade e Estatística ser tratado na escola, para ajudar nas tomadas de decisões inerentes às situações da vida social e econômica dos estudantes (Meneghetti; Batistela; Bicudo, 2011, p. 813). Segundo Lopes (2008), as propostas curriculares de matemática, em todo mundo, dedicam atenção especial ao tema de probabilidade e estatística, enfatizando que o estudo destas áreas são imprescindíveis para que as pessoas possam analisar índices de custo de vida, realizar sondagens, escolher amostras e tomar decisões em várias situações do cotidiano.

Desde a implementação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1998, hoje já em desuso por não receber atualizações, que professores e pesquisadores associados à área de educação estatística, discutiam a necessidade de incluir o tema de estatística e probabilidade na base curricular do ensino fundamental e médio.

A principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis) (Brasil, 1997, p. 40).

Em abril de 2017, o Ministério da Educação e da Cultura (MEC) entregou a versão final da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento este que viria a ser um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Neste documento, é possível observar uma preocupação com ensino de probabilidade desde os anos iniciais.

No que concerne ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. [...] No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista (Brasil, 2017, p. 230).

Visando adequação as mudanças determinadas pela Lei 13.415/2017, que promoveu a Reforma do Ensino Médio, o estado de Pernambuco elaborou seu próprio documento norteador, o Currículo de Pernambuco - Ensino Médio. Diferentemente da BNCC e PCN, no atual currículo de matemática de pernambuco há poucas menções sobre a importância de trabalhar o conteúdo de probabilidade nas séries finais do ensino fundamental ou ensino médio.

A construção da ideia de probabilidade deve apoiar-se em situações elaboradas de tal forma que o estudante possa experimentar e realizar simulações. Dessa maneira, em etapas posteriores, o estudante poderá estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento (Pernambuco, 2021, p. 381).

Para o ensino médio, a orientação do currículo é trabalhar os conteúdos de probabilidade apenas no terceiro ano do ensino médio. A figura abaixo mostra os conteúdos cobrados a cerca do tema de probabilidade no novo currículo de pernambuco:

Figura 3 – Habilidades previstas no novo currículo de Pernambuco

MATEMÁTICA	
3º ANO	
HABILIDADES ESPECÍFICAS DO COMPONENTE	OBJETOS DO CONHECIMENTO
(EM13MAT106PE12) Identificar e interpretar situações do cotidiano, envolvendo riscos probabilísticos em que é necessário fazer escolhas como, por exemplo, usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, como nos demais campos de conhecimento.	Riscos probabilísticos
(EM13MAT311PE27) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades para resolver e elaborar situações-problema que envolvam o cálculo da probabilidade	Probabilidade: espaço amostral e contagem
(EM13MAT312PE28) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam o cálculo de probabilidade (simples, da união, da interseção, condicional) de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.	Probabilidade: cálculos simples, da união, da interseção, condicional.
(EM13MAT511PE51) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades	Probabilidade: espaços amostrais discretos ou não; eventos equiprováveis ou não.

Fonte: Pernambuco, 2021

Reconhecer o papel de destaque que o ensino de probabilidade e estatística tem na formação do cidadão deveria ser prioritário em documentos norteadores, pois este conteúdo reflete diretamente na vida social de todo cidadão. Além disso, é importante destacar que

o ensino de probabilidade e estatística na educação básica, reflete diretamente na educação de nível superior. Segundo Ara (2006, p. 103), alunos que ingressam em cursos superiores apresentam dificuldades nas disciplinas que envolvem probabilidade e estatística. A falta de problemas concretos que auxiliem os alunos a desenvolver intuição de fenômenos aleatórios, influencia diretamente na co-relação entre a matemática formal do ensino superior e a interpretação de problemas reais. Ainda segundo Ara (2006, p. 69), os próprios livros didáticos de cursos introdutórios à probabilidade e estatística acabam priorizando o rigor matemático e técnicas computacionais, sem nenhuma preocupação com o contexto com a realidade dos alunos.

2 Resolução de problemas e análise de erros

O tema da resolução de problemas tem sido extensamente debatido nos últimos anos. Muitos alunos percebem a matemática como uma disciplina pronta e fechada, sem espaço para exploração ou questionamento, levando-os a abordar a Matemática apenas como uma tarefa de responder a questões formuladas pelos professores, sem oportunidade de reflexão mais profunda. Isso impede que eles transcendam o contexto escolar e enxerguem a disciplina como parte integrante de seu cotidiano. Além disso, o próprio termo “problema” é muitas vezes associado a situações equivocadas pelos professores de matemática. Pozo afirma que

Ensinar a resolver problema não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta. Não é uma questão de somente ensinar a resolver problemas, mas também de ensinar a propor problemas para si mesmo, a transformar a realidade em um problema que mereça ser questionado e estudado [...]. O verdadeiro objetivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e de resolvê-los como forma de aprender (Pozo, 1998, p. 14).

Diante disso, precisamos entender o que é de fato considerado um problema na educação matemática. Vianna (2002) examina quatro abordagens distintas para compreender o conceito de problema. Em uma perspectiva inicial, um sujeito se depara com um problema quando enfrenta uma questão para a qual não possui resposta ou quando se depara com uma situação insolúvel pelos conhecimentos já adquiridos. Na segunda perspectiva, caracteriza-se um problema quando um sujeito possui uma questão a ser resolvida, deseja obter uma resposta para essa questão e não dispõe de uma resposta prévia para a indagação. A terceira visão de problema descreve a situação em que um sujeito é desafiado a realizar uma tarefa sem um método de resolução predefinido, sendo considerado um problema apenas se a realização da tarefa for desejada pelo sujeito. Por fim, Vianna (2002) define problema como toda situação que demanda do sujeito a construção de uma resposta ou ação que resulte em um efeito específico, sendo a noção de problema destituída de sentido se o sujeito puder aplicar um sistema de respostas já totalmente estabelecido. Notemos que em todos os quatro recortes tem um elemento em comum, a motivação em resolver o problema. Buscar resposta saindo de sua zona de conforto é necessário para que se caracterize um problema. Vianna (2002) aborda ainda que é neste aspecto que se deve ter cuidado com questões, por exemplo, de olimpíadas de matemática. Tais problemas são significativos para aqueles alunos que realmente se aprofundam nos conceitos matemáticos,

do contrário será apenas uma questão difícil que não desperta o desejo de resolução no aluno.

Outro ponto importante que há de se notar, é a distinção entre problema e exercício. Segundo [Pozo \(1998\)](#), os problemas são atividades diferentes dos exercícios, nos quais os alunos dispõem de algoritmos que auxiliam a obtenção do resultado, enquanto em um problema este fato não acontece. Sempre que a atividade proposta for baseada no uso de habilidades automatizadas e rotineiras, como consequência de uma prática contínua, estaremos diante de um exercício. Já um problema é uma situação nova para o aluno, ou diferente do que já foi aprendido, requerindo a utilização de técnicas e conceitos já aprendidos.

2.1 As diferentes abordagens sobre resolução de problemas

O reconhecimento do papel da resolução de problemas como metodologia de ensino da matemática, leva-nos a refletir sobre a metodologia que os professores estão utilizando para resolver problemas em sala de aula. Não existe uma maneira única de se trabalhar com resolução de problemas em sala de aula. O professor deve ser criativo ao apresentar situações do qual o aluno não disponha de um caminho pré-determinado, mas que o estimule a pensar e desperte seu interesse na busca da solução do problema. Além disso ao professor cabe a pressupor os conhecimentos prévios e maturidade dos alunos para realização de intervenções coerente ao problema a ser proposto. Dito isto, precisamos ter a clareza de que há diferentes abordagens sobre resolução de problemas, afinal, os professores devem adotar uma abordagem de ensino baseada em resolução de problema como objetivo final de aprendizagem ou como um meio para atingir os objetivos referentes a um determinado conteúdo? Neste contexto, [Schroeder e Lester \(1989\)](#) destacam três abordagens sobre resolução de problemas: Ensinar **para** resolução de problemas, ensinar **sobre** resolver problema e ensinar **através** de resolução de problemas.

2.1.1 Ensinar para resolver problemas

No contexto escolar, embora seja fundamental que o aluno adquira conhecimento matemático de forma conceitual, aprender a usar matemática é, tão importante quanto aprender os conceitos matemáticos. Para o professor que utiliza a abordagem de ensinar para resolver problemas, a preocupação é que os alunos tornem-se aptos a utilizar e aplicar corretamente os conceitos vistos anteriormente em diversos problemas propostos. O risco desta abordagem, é de que a resolução de problema seja vista apenas como uma simples atividade que os alunos resolvam depois ver um determinado conteúdo. Os PCN faz uma crítica a este tipo de abordagem:

Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos (Brasil, 1997, p. 37).

Allevato e Onuchic (2009) afirma que, muitos entenderam que a resolução de problemas fundamentada na aplicação e no domínio de procedimentos e estratégias, só seria alcançada por meio de repetição. Neste tipo de ensino, o aluno é submetido a uma listas com diversos problemas semelhantes, onde o aluno treina uma determinada técnica para chegar a solução. O foco neste tipo de ensino, está na fixação da técnica para atacar o problema, caso o aluno obtivesse sucesso em repetir os procedimentos realizados pelo professor, era concluído que o aluno aprendeu o conteúdo.

2.1.2 Ensinar sobre resolução de problemas

George Pólya (1887-1985) natural de Budapeste, na Hungria, contribuiu nas mais diversas áreas da Matemática, incluindo combinatória, séries, teoria dos números e teoria das probabilidades. Polya é o autor do livro *A Arte de Resolver Problemas* (Polya, 1978), que busca compreender os elementos envolvidos na resolução de problemas.

Ao se deparar com um determinado problema, Polya destaca que

Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. Temos de mudar de posição de quando em quando. É provável que no princípio a nossa concepção do problema seja muito incompleta; a nossa perspectiva é outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução (Polya, 1978).

Desta maneira, para amenizar todas inquietações citadas acima, Polya organiza o processo de resolução de problema em quatro partes: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e o retrospecto.

A primeira etapa da resolução de problema é a fase de **compreensão do problema**. Torna-se quase impossível a resolução de um problema se o mesmo não foi compreendido de forma clara pelos alunos, e isto se estende para qualquer área do conhecimento. O simples fato do aluno não entender o que está sendo proposto pelo problema afetará todas as outras etapas. Para ajudar na compreensão do problema o aluno pode fazer uso de desenhos e esboços que o ajudem a visualizar o problema. Além disso, o uso de uma notação adequada e a organização das ideias contribui para uma maior compreensão do problema (Polya, 1978, p. 4).

A segunda etapa é o **estabelecimento de um plano** que pode ser uma ideia que surge espontaneamente ou até ideias que requeiram mais tempo e cuidado na elaboração. Quando a ideia surge repentinamente não há muito a ser feito, basta apenas ter cuidado com

distrações que podem surgir, mas se não tivemos esta sorte temos que criar mecanismos, propiciando ideias que irão facilitar no estabelecimento do plano. Sobre isto, Polya aborda que “Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma ideia brilhante” (Polya, 1978, p. 5).

O surgimento de uma ideia é, muitas vezes, difícil se não temos muita familiaridade do assunto que envolve o problema. As ideias surgem mais facilmente quando os alunos já tem uma base sólida, seja por experiências em problemas passados ou conhecimento prévio do assunto. Tais experiências dão um leque maior de ferramentas matemáticas para a formulação de um plano.

A terceira etapa, **execução do plano**, tem como objetivo executar a estratégia para atacar o problema. Embora a formulação de um plano não seja uma tarefa relativamente simples, após formulá-la, a execução da mesma se torna algo fácil de se realizar. O cuidado nesta etapa é a verificação de cada etapa do plano inicial. Cabe ao professor auxiliar os alunos a em cada passo da execução, inclusive corrigindo erros cometidos em passos anteriores (Polya, 1978, p. 9).

Na última etapa, o **retrospecto**, é feita uma revisão de cada etapa relacionado ao problema. É neste momento que buscamos aprender com o problema, seja procurando obstáculos nas etapas anteriores, ou ainda buscando maneiras de aprimorá-lo para o uso em sala de aula. Polya (1978) aborda que nenhum problema é tão vazio que não possamos buscar outras maneiras de atacá-lo, explorando conceitos novos para enriquecer as experiências dos alunos, ou ainda buscar relações do problema em questão com outros vistos em momentos anteriores.

Schroeder e Lester (1989) afirmam que o professor que ensina sobre resolução de problema, realça o modelo proposto por Polya ou alguma variação do mesmo. Desta maneira a resolução de problemas passa a ser encarado como procedimentos destinados a resolver um problema por meio de regras que busquem chegar rapidamente a solução.

2.1.3 Ensinar através da resolução de problemas

Embora seja evidente o impulso que o livro de Polya (1978), *A Arte de Resolver Problemas*, proporcionou para a área de resolução de problemas, surgiram alguns questionamento sobre o ensinar sob a ótica de resolução de problemas Polya. Allevato e Onuchic afirmam que:

Ao ensinar matemática para resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. Nessa visão, a proposta essencial para aprender Matemática era a de ser capaz de usá-la. [...] em 1989, começam a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da Resolução de Problemas. Ela passa a ser pensada, então, como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. Essa forma de ensinar Matemática passa a ser vista como um modelo “Pós Polya” (Allevato; Onuchic, 2009, p. 37).

É importante destacar que, ensinar Matemática **para** resolver problemas e ensinar Matemática **através** de resolução de problemas são assuntos distintos. As inquietações dos pesquisadores dos anos 90 era de que a resolução de problemas é visto como um recurso para resolver problemas, não se atentando ao ensino e ao impacto das estratégias utilizadas na resolução dos problemas matemáticos. Soares e Pinto destacam que

Porém não basta apenas ensinar a resolver problemas, mas incentivar que o aluno também proponha situações problema, partindo da realidade que o cerca, que mereçam dedicação e estudo. Incentivar o hábito pela problematização e a busca de respostas de suas próprias indagações e questionamentos, como forma de aprender (Soares; Pinto, 2001, p. 2).

A resolução de problema visto como metodologia do ensino coloca o aluno como o foco do aprender. O professor age como um facilitador, incentivando e mediando os alunos a desenvolverem ferramentas para à busca de uma solução.

Quando um aluno se confronta com uma situação problema, este busca utilizar-se de conhecimentos anteriores para achar uma solução. Schroeder e Lester (1989) afirmam que, nesta abordagem, os problemas não são vistos apenas como um propósito para aprender matemática, mas também como um caminho importante para fazer isso. Neste sentido, entendemos que ensinar através de resolução de problemas é um meio importantíssimo para consolidar todo o processo envolvido no ensino-aprendizagem da matemática. Segundo Allevato e Onuchic (2009), ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, e esperar que o aluno sozinho encontre as ferramentas necessárias para a solução. Cabe ao educador proporcionar um ambiente favorável, no qual o aluno se sinta motivado e estimulado a envolver-se nas atividades propostas. Embora na teoria os três modos de abordar a Resolução de Problemas possam ser separados, na prática, Schroeder e Lester (1989) afirmam que muitas vezes, eles se encontram e podem acontecer de várias maneiras entre eles.

A atividade proposta neste trabalho de conclusão de curso está fundamentada nesta última abordagem, oferecendo ao aluno um ambiente que seja propício ao aprendizado e com as ferramentas adequadas para que o aluno tenha um entendimento mais abrangente do problema proposto.

2.2 Análise de erros

Diagnosticar e analisar erros de uma produção escrita é um procedimento que, metodologicamente, se fundamenta na análise do conteúdo abordado. Em educação matemática, os documentos passíveis à análise de erros, são geralmente, respostas a questionários, testes ou relatos de experiência. Dessa forma, as respostas escritas de estudantes a questões de Matemática podem ser objeto de uma análise aprofundada e sistemática. Cury e Bisognin (2009) destacam algumas etapas que auxiliarão na elaboração da análise dos erros:

[...]primeiramente fazemos uma leitura “flutuante” de todo o material, para avaliar as respostas. A seguir, as separamos em “totalmente corretas”, “parcialmente corretas” e “incorretas”, fazendo a contagem do número de respostas de cada tipo. Algumas vezes, dependendo do tipo de questão e de resposta, encontramos apenas duas classes, respostas corretas ou incorretas. Nessa primeira fase, já empregamos algum tipo de notação para separar aquelas respostas sobre as quais nos debruçaremos, o corpus da pesquisa (Cury; Bisognin, 2009, p. 2-3).

A leitura flutuante que os autores se referem é feita na pré-análise do material colhido. Nesta fase é feita a leitura geral das produções que se deseja analisar. Posteriormente é realizada a fase de exploração do material, separando as questões que plenamente atenderam as expectativas desejadas, parcialmente atenderam as expectativas e as incorretas. Sempre contabilizando cada segmento da divisão a fim de obter dados quantitativos referente as produções. Ainda nesta fase é feito um aprofundamento da análise, agrupando as respostas em categorias. Estas categorias tem por objetivo fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos. Por último, os mesmos autores destacam que,

[...] na fase do tratamento dos resultados, as categorias são apresentadas por meio de quadros com indicação de frequências e porcentagens ou com a produção de um “texto síntese” que resuma cada uma, incluindo-se, também, exemplos dos erros cometidos. A partir dessa compreensão mais aprofundada, pode-se utilizar os resultados da investigação com fins teóricos ou práticos (Cury; Bisognin, 2009, p. 5).

Na última fase da análise dos erros, é realizada uma interpretação, baseada nos critérios adotados, das respostas dos alunos. Sempre que possível, deve-se anexar no corpo da análise, os fragmentos das respostas dos alunos, principalmente, as que mais se destacaram para uma possível análise. Os fragmentos são acompanhados de um texto explicando os motivos e razões pelo qual o autor se fundamenta sua análise. Interpretar os dados é a tarefa mais difícil nesta fase. Cury e Bisognin destacam que “A interpretação dos dados da investigação é feita a partir das categorias apresentadas e exemplificadas.[...] Inicialmente analisamos as respostas e posteriormente buscamos uma possível explicação para os erros” (Cury; Bisognin, 2009, p. 4).

Há diversos fatores que podem influenciar uma resposta ser analisada como errada. Ao interpretar um resultado o avaliador deve levar em consideração os principais fatores que

levaram o aluno a errar um determinado problema, seja por erro de cálculo, interpretação incorreta ou incompreensão dos conceitos envolvidos no problema.

Por fim, ao analisar os erros, os professores têm a oportunidade de ajustar suas estratégias de ensino, adaptando-as às necessidades específicas de cada aluno. Identificar padrões comuns de equívocos também permite a criação de abordagens pedagógicas mais eficazes, visando superar obstáculos recorrentes e promover um ambiente de aprendizagem mais inclusivo, onde os alunos se sentem encorajados a abordar desafios matemáticos sem o receio do julgamento, fomentando a confiança e a autenticidade no processo de aprendizado.

3 A sequência didática

Neste capítulo, exploraremos o conceito de sequência didática e sua importância para as atividades pedagógicas, abordando seus critérios gerais e detalhando o processo envolvido na elaboração de uma sequência didática voltada para o ensino de probabilidade através de problemas contraintuitivos. De acordo com Zabala, sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (Zabala, 2015, p. 18).

Em uma sequência didática as atividades são interconectadas, formando uma cadeia de eventos que segue uma ordem específica para atingir metas ou objetivos no âmbito da educação. Esses objetivos podem incluir a compreensão de determinados conceitos ou o desenvolvimento de habilidades. Os procedimentos de uma sequência didática devem estar fundamentadas na boa relação entre professor-aluno, nos objetivos que se propõe a aula, e nos tipos de atividades seguidos do acompanhamento dos resultados. Para [Guimarães e Giordan \(2011\)](#) é importante que as atividades desenvolvidas adéquem-se as características cognitivas dos estudantes, respeitando as competências e habilidades dos alunos, de forma que leve a motivação para a aprendizagem sem que haja prejuízo ao conteúdo a ser trabalhado. Os fatores que interferem no processo ensino-aprendizagem devem ser identificados previamente na elaboração da sequência didática, afim de que minimizem-se as dificuldades no desenvolver das atividades.

Nessa fase é essencial que se retorne ao início e reveja a elaboração da Sequência Didática, não apenas para melhorar sua estrutura, mas principalmente a fim de reelaborar saberes profissionais do professor na construção e aplicação de estratégias de ensino ([Guimarães; Giordan, 2011, p.11](#)).

Para a elaboração da sequência didática é necessário que o professor tenha bem fundamentado a organização dos conteúdos para cada etapa da atividade bem como os objetivos que se deseja alcançar em cada fase. [Zabala \(2015\)](#) organizou oito perguntas que podem auxiliar o professor na elaboração da sequência didática:

1. Há atividades que nos permitam fazer uma sondagem dos conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
2. Os conteúdos são propostos de forma significativa e funcionais, de modo que haja diferentes formas de resolver o problema?
3. Existe atividade que induz o nível de desenvolvimento da cada estudante?

4. Existem atividades que representem um desafio alcançável para o aluno?
5. Existem atividades que promovam algum tipo de conflito conceitual estudantes?
6. Existem atividades que motivem os alunos em relação à aprendizagem de novos conteúdos?
7. O autoconhecimento do aluno é valorizado para solução do problema?
8. A atividade ajuda os alunos a adquirir habilidades relacionadas com o desenvolver de estratégias para solucionar problemas?

Essas questões são projetadas para auxiliar os educadores na reflexão e planejamento, abrangendo desde a avaliação inicial do conhecimento prévio dos alunos até a promoção de desafios alcançáveis, a motivação constante para a aprendizagem e o desenvolvimento de habilidades práticas. Ao incorporar essas perguntas no desenvolvimento de sequências didáticas, buscamos criar um ambiente de aprendizado significativo, adaptado às necessidades individuais dos alunos e promovendo o desenvolvimento pleno de suas habilidades cognitivas.

3.1 Montando a sequência didática

A sequência didática planejada tem com objetivo desenvolver estratégias para o ensino de probabilidade por meio da utilização de problemas contraintuitivos e posteriormente avaliar a eficácia das estratégias utilizadas nesse processo. Segundo [Huete e Bravo \(2006\)](#), a construção do conhecimento será realizada a partir da variedade de atividades e experiências que possibilitem mais facilmente a aprendizagem, provoquem a generalizações e a formalização dos conceitos. É nesse sentido, que o objetivo desta sequência visa a promoção um aprendizado mais significativo a cerca do tema de probabilidade. Assim, levando em consideração também as questões apresentadas por [Zabala \(2015\)](#) que elaboramos uma sequência dividida em três momentos: Um pré-teste, intervenções didáticas e um pós-teste. O público alvo desta sequência foram duas turmas do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública localizada em Recife-PE. Abaixo temos um resumo de todas as etapas da sequência didática contendo a objetivos, procedimentos metodológicos e duração das de cada atividade.

O Problema dos Doces

Objetivos

- Compreender o conceito probabilidade (abordagem experimental e clássica)

- Aplicar o conceito de probabilidade na resolução do "Problema dos Doces"
- Explorar diferentes maneiras de se obter a quantidade de elementos de um espaço amostral

Duração

Duas aulas (1 hora e 40 minutos)

Materiais Necessários

- Urna contendo duas bolas vermelhas e duas bolas amarelas
- Folha com as instruções do problema e anotações gerais

Primeiro momento**Relembrando o conceito de probabilidade e introdução ao problema (25 minutos)**

Nesta etapa faremos um momento introdutório do conteúdo, relembrando o conceito de probabilidade, espaço amostral e evento. Alguns exemplos introdutórios serão explorados para melhor entendimento do conteúdo. Após este momento inicial, formaremos grupos com os alunos para então apresentá-los o Problema dos Doces: “Hebe possui um cesto com quatro doces, sendo dois vermelhos e dois amarelos. Marta pega, sem olhar, dois doces. Qual a probabilidade de Marta pegar um doce vermelho e um amarelo?”

Segundo momento**Discussão do Problema (10 minutos)**

Neste ponto será distribuído aos alunos a ficha contendo os comandos e perguntas do problema. Na ficha, primeiramente eles responderão quanto eles acham que é a probabilidade de Marta sortear um doce de cada cor. Após responderem, daremos início a um breve momento de discussão sobre o que cada grupo colocou como resposta.

Terceiro momento**Busca de uma solução para o problema (30 min)**

Será distribuídas embalagens que simbolizará a urna e discos vermelhos e amarelos de material emborrachado para representar os doces. Então, por vez, cada aluno do grupo irá sortear dois discos e anotar os resultados obtidos na ficha distribuída no momento anterior. Após um aluno finalizar sua vez, os discos serão retornados à embalagem e embaralhados para que outro aluno do grupo possa sortear dois discos, repetindo o processo 30 vezes. Após todos os alunos realizarem o experimento, as respostas serão socializadas e reunidas em uma única amostragem.

Quarto momento**Encontrando uma solução e discussão final. (35 min)**

Nesta etapa encontraremos uma solução baseada nas amostras colhidas dos alunos. Aqui os alunos serão questionados sobre a resposta inicial que eles achavam e a resposta encontrada através da experimentação. Posteriormente, abordaremos a diferença entre a probabilidade teórica e a probabilidade experimental. Possíveis dúvidas serão esclarecidas nesta etapa. Para reforçar a solução do problema, encontraremos outros caminhos para obtenção do resultado da probabilidade do problema proposto. Finalizaremos a intervenção propondo exercícios do livro didático.

O Problema do Grão-Duque da Toscana**Objetivos**

Aprofundar o conceito de espaço amostral e eventos; Compreender o conceito de eventos equiprováveis e não equiprováveis.

Duração

Duas aulas (1 hora e 40 minutos)

Materiais Necessários

- Dados coloridos (três dados por grupo)
- Folha com as instruções do problema e anotações gerais.

Primeiro momento**Resolução de um problema mais simples (20 min)**

Primeiramente iremos abordar um problema mais simples: Qual a probabilidade de ao lançar dois dados honestos, obtermos soma 3, soma 6 e soma 11 nas faces superiores. Este problema irá ajudar a compreender melhor os detalhes do problema original.

Segundo momento**Introdução ao problema original (20 min)**

Neste momento formaremos grupos e distribuiremos uma ficha com a introdução do problema do Grão-Duque da Toscana que em resumo, questiona do porquê ao lançar 3 dados simultâneos e verificar a soma das faces, é mais provável obter soma 10 que obter soma 9, visto que ambos possuem a mesma quantidade de distribuição de somas. Aqui, os alunos serão desafiados a encontrar as seis maneiras de decompor a soma dos 10 e 9 pontos. Após perceberem que de fato tem a mesma quantidade de somas, iniciaremos uma discussão se de fato somar 10 tem é mais provável de ocorrer que soma 9.

Terceiro momento**Busca de uma solução para o problema (30 min)**

Neste momento, iremos para a segunda parte da ficha de exercícios em que os alunos serão questionados sobre as possíveis permutações dos dados em cada uma das seis decomposições encontradas no item anterior. Haverá uma tabela para ser preenchida pelos grupos e verificar se, desta maneira, terá alguma discrepância nos dois eventos.

Quarto momento**Fechamento da atividade (30 min)**

Aqui faremos o encerramento da atividade, revisando os cálculos e introduzindo conceitos novos como eventos e espaços equiprováveis. Por fim, selecionaremos questões do livro didático para praticarmos com os alunos.

O Problema do Falso Positivo**Objetivos**

Compreender e aplicar diferentes métodos de resolução de problemas ligado a probabilidade, em especial utilizando o método da árvore de possibilidades ou diagrama de árvore.

Duração

Duas aulas (1 hora e 40 minutos)

Materiais Necessários

Projektor para apresentação de imagens e slides

Primeiro momento**Apresentação do problema e discussão inicial (15 min)**

Inicialmente será apresentado o seguinte problema: “Um por cento das mulheres de 40 anos tem câncer de mama. A chance de uma máquina de mamografia diagnosticar corretamente o câncer de mama é de 80%. Essa mesma máquina tem 9,6% de chance de dar um falso positivo. Suponha que uma mulher de 40 anos faça uma mamografia regular e seja diagnosticada com câncer de mama. Qual é a probabilidade de ela ter câncer de mama?” Após apresentá-lo, uma discussão inicial será realizada para esclarecer conceitos como falso-positivo e falso-negativo, a importância da interpretação de resultados de testes na área médica e o que os alunos acham que teremos como resposta para o problema.

Segundo momento

Visualizando o problema com ajuda de diagramas (30 min)

Nesta etapa utilizaremos um número fixo de mil mulheres para extraímos as informações necessárias para o cálculo da probabilidade. Deste modo, nos permitirá utilizar um diagrama com viés mais visual do problema. Ao final deste momento, levaremos uma discussão sobre a resposta encontrada com a resposta da intuição inicial deles.

Terceiro momento

Entendo a árvore de possibilidades(30 min)

Será apresentado aos alunos o método de resolução de problemas chamado árvore de possibilidades ou diagrama de árvore. Aqui utilizaremos os dados do problema para avançarmos com a explicação do método, explicando o significado de cada ramo obtido, bem como a maneira de se calcular a probabilidade de cada ramo ou conjunto de ramos. Aqui novamente explicitaremos a resposta do problema confrontando com a intuição inicial dos alunos.

Quarto momento

Encerramento da intervenção (25 min)

Neste ultimo momentos, abriremos o espaço para tirar dúvidas e realizar comentários finais sobre o método aprendido. Por fim, selecionaremos exercícios do livro didático com ênfase na resolução do método do diagrama de árvores.

A Porta dos Desesperados

Objetivos

- Compreender conceitos de probabilidade condicional
- Discutir e concluir sobre a estratégia mais vantajosa: trocar ou manter a escolha de porta.

Duração

Duas aulas (1 hora e 40 minutos)

Materiais Necessários

- Datashow e tela para apresentação.
- Software de simulação do Problema dos Bodes.
- Prêmios simbólicos para os participantes (pode ser algo como adesivos ou doces).

Primeiro momento**Apresentação do problema e contexto histórico (10 min)**

Neste momento apresentaremos o problema da Porta dos Desesperados, evidenciando o contexto histórico que gerou a polêmica na década de 80. Eis o problema: “Suponha que você está em um programa de televisão. Foi dado a você escolher uma entre três portas. Atrás de uma porta está um carro e atrás de cada outra porta, bodes. Você escolhe uma porta, digamos porta #1, e o apresentador, que sabe o que está atrás das portas, abre outra porta, digamos porta #3, revelando uma cabra. Ele diz para você: “Você quer mudar para porta #2?” É vantagem mudar a sua escolha de portas?”. No final da apresentação do problema, levantaremos uma discussão sobre o que eles acham que é melhor, trocar, manter ou tanto faz.

Segundo momento**Simulando o programa de auditório (40 min)**

Nesta etapa faremos uma simulação do programa de auditório com o uso de um software que nos ajudará com a dinâmica do problema. Cada aluno participará como participante do programa e o professor fará o papel do apresentador, toda resposta será mantida para uma análise póstuma.

Terceiro momento**Analisando os dados obtidos na simulação (30 min)**

Os dados obtidos serão agrupados em uma tabela de modo a introduzirmos o conceito de probabilidade condicional. Estes dados também serão usados para buscarmos uma solução (abordagem frequentista) do problema. Por fim questionaremos se a resposta obtida após a simulação é consistente com a resposta que eles tinham intuitivamente do problema.

Quarto momento**Finalização da intervenção (20 min)**

Neste momento será mostrado uma solução baseado na abordagem clássica da probabilidade e faremos uma comparação com o resultado obtido na abordagem frequentista (simulação do programa). Por fim, selecionaremos exercícios do livro didático para praticarmos questões sobre probabilidade condicional.

No decorrer das próximas seções, exploraremos de maneira mais abrangente a implementação das intervenções acima, oferecendo uma análise aprofundada do processo. Detalharemos também as experiências, resultados obtidos e lições aprendidas, proporcionando uma visão ampla do desenvolvimento e execução da sequência didática, incluindo as aplicações do pré-teste e pós-teste.

3.2 Elaboração e aplicação do pré-teste

A primeira parte da sequência é a aplicação de um pré-teste contendo oito questões acerca do tema de probabilidade. O pré-teste atua como uma ferramenta diagnóstica, permitindo ao educador avaliar o nível de conhecimento prévio dos alunos em relação aos conteúdos de probabilidade. Gil (2015) destaca que a avaliação diagnóstica envolve a análise das habilidades dos estudantes em relação aos temas a serem tratados. Ela busca identificar tanto o interesse quanto as dificuldades dos alunos, orientando de maneira detalhada e explicativa a seleção dos conteúdos a serem abordados, garantindo assim uma instrução apropriada. A identificação prévia das dificuldades possibilita uma adaptação mais precisa da sequência didática às necessidades específicas de cada turma. Deste modo, o professor pode ajustar o planejamento para incluir estratégias que abordem diretamente os pontos críticos observados no pré-teste. A estrutura do pré-teste levou em consideração as habilidades e conteúdos, também chamado de objetos do conhecimento, presentes no currículo de matemática de Pernambuco, de modo que cada questão estava correlacionado com algum dos conteúdos presente na figura 3 da seção 1.3.

As questões do teste eram abertas em sua maioria, deste modo é possível investigar as causas subjacentes às dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos após a correção da mesma. Abaixo temos a transcrição do pré-teste:

1. Identifique quais dos itens a seguir apresentam experimentos (ou fenômenos) aleatórios. (nesta questão é permitido marcar mais de uma alternativa).

- (a) Duzentos bilhetes idênticos, diferenciando-se apenas pela numeração, foram colocados em uma urna para que um deles fosse sorteado.
- (b) Aquecer a água pura no nível do mar e verificar a que temperatura ela entrará em ebulição.
- (c) Contagem da quantidade de artefatos defeituosos em um intervalo de duas horas na linha de produção de uma fábrica.
- (d) Registrar o tempo em que um relógio em bom funcionamento demora para que o ponteiro maior complete uma volta.

2. Três moedas idênticas são lançadas ao mesmo tempo, em seguida é verificado qual face de cada uma delas ficou voltada para cima: cara ou coroa.

- (a) Escreva o espaço amostral desse experimento.
- (b) Determine o Evento A correspondente a obter exatamente duas caras nesse experimento.
- (c) Determine o Evento B, de obter apenas uma coroa.

3. Em uma gincana, os participantes foram numerados de 1 até 25, conforme a ordem de inscrição. Um participante será sorteado para iniciar as provas da gincana. Para fazer esse sorteio, o número de cada participante foi escrito em pedaços de papel idênticos, que foram colocados em uma caixa para que um deles fosse retirado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ser sorteado um participante de número:

- (a) 13?
- (b) par?
- (c) Múltiplo de 8?
- (d) Maior que 25?

4. Em uma urna foram depositados 10 bolas em que cada uma recebeu uma etiqueta diferente com as letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Sabendo que duas bolas foram retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição, determine a probabilidade de sair uma vogal e uma consoante.

5. Em uma urna há 10 bolas idênticas quanto ao tamanho e ao material de fabricação; mas 4 delas são vermelhas e 6 são azuis. Retira-se uma primeira bola e, sem reposição, retira-se uma segunda bola. Qual a probabilidade de ambas serem azuis?

6. Você conhece o termo diagrama de árvore ou árvore de possibilidades? Crie um diagrama de possibilidades que Ilustra o seguinte caso: "Suponha que 5% das bagagens contenham itens proibidos, Se uma bagagem contém um item proibido, há uma chance de 98%, de alarme disparar. Se uma bagagem não contém um item proibido, há uma chance de 8% de o alarme disparar"

7. Consideremos um dado que tenha em suas faces dois números 1, três números 3 e um número 5, de acordo com a planificação mostrada na próxima figura. Supondo que este dado seja balanceado e o lançamento não favoreça qualquer uma das faces, lançado o dado, quais as probabilidades de conseguirmos:

- (a) Evento A: Uma face com 1 ?
- (b) Evento B: Uma face com 3?
- (c) Evento C: Uma face com 5?
- (d) Podemos dizer que os eventos A, B e C são equiprováveis? Isto é, possuem mesma probabilidade de acontecer? Justifique.

8. O gerente de uma loja de roupas montou uma banca de liquidação com mil camisetas de dois modelos, com preços abaixo do preço de custo. Lamentavelmente, entre essas camisetas, algumas estão com defeito de fábrica, conforme mostra a tabela a seguir.

CAMISETAS	BOAS	DEFEITUOSAS	TOTAL
Tipo1	518	82	600
Tipo2	315	85	400
TOTAL	833	167	1000

Uma camiseta é retirada da banca ao caso; com base nos dados da tabela, calcular:

- (a) A probabilidade de a camiseta retirada da banca ser do Tipo 1.
- (b) A probabilidade de ela ter defeito, sabendo que a camiseta retirada da banca é do Tipo 2.
- (c) A probabilidade de a camiseta retirada da banca ter defeito, dado que ela é do Tipo 1.

A aplicação do pré-teste se deu de forma tranquila para ambas as turmas, sendo 30 alunos na turma A e 29 alunos na turma B. As poucas dúvidas que surgiram eram referentes a conceitos que era abordado no próprio teste, porém foi explicado que não era possível tirar dúvidas deste tipo no momento da aplicação. Posteriormente o pré-teste foi corrigido, de maneira a sondar alguns pontos críticos que seriam trabalhados nas quatro intervenções, as quais detalharemos na próxima seção.

3.3 Primeira Intervenção: O Problema do Doces

A primeira intervenção, chamada de O Problema dos Doces, foi pensada a partir do artigo *Pitfalls and surprises in probability: The battle against counterintuition* (Knudtson, 2019). Neste artigo 33 professores de matemática da Noruega que ensinavam em séries equivalentes aos anos finais do fundamental e ensino médio deveriam responder a um problema: **Hebe possui um cesto com quatro doces, sendo dois vermelhos e dois amarelos. Marta pega, sem olhar, dois doces. Qual a probabilidade de Marta pegar um doce vermelho e um amarelo?** Surpreendentemente apenas dois professores responderam corretamente, e dos que erraram, a maioria acreditava que a resposta era 50% de chance de sair doces de cores diferentes, inclusive justificando com cálculos este valor. Diante do exposto, podemos notar que há algum viés contraintuitivo no problema que levou os professores de matemática a cometerem equívocos na resposta. Foi então que surgiu a oportunidade de utilizar este problema, relativamente simples, como motivador para o entendimento de conceitos de probabilidade como evento aleatório, probabilidade experimental, probabilidade teórica e espaço amostral. A proposta da intervenção era de formar grupos com os alunos e buscarmos uma solução para o problema levantado inicialmente. Primeiramente, fizemos um levantamento das possíveis resposta para o problema. Assim, cada aluno deu um palpite do que eles achavam que seria a resposta. Nesta etapa da intervenção abrimos um debate para alguns alunos explanarem a lógica por trás de seus palpites. Todas as possíveis respostas foram anotadas em uma folha distribuída para os grupos. A maioria dos alunos em ambas as turmas responderam que a solução para o problema seria 50% de chance de sair doces vermelho e amarelo.

Figura 4 – Palpites iniciais feito por um dos grupos da turma A

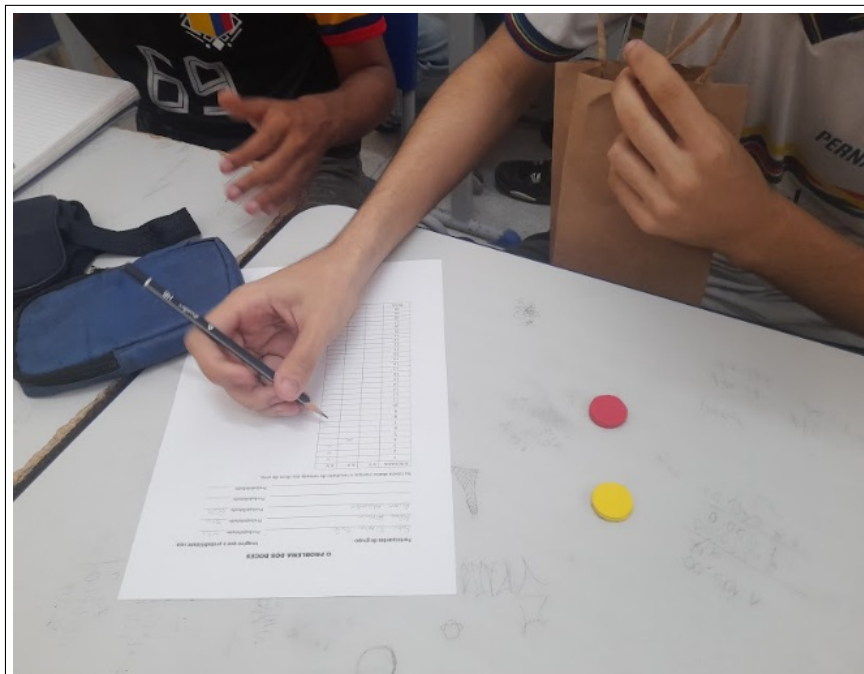
O PROBLEMA DOS DOCES	
Participantes do grupo :	Imagino que a probabilidade seja:
_____	Probabilidade: <u>50%</u>
_____	Probabilidade: <u>$\frac{3}{4}$</u>
_____	Probabilidade: <u>$\frac{2}{4}$</u>
_____	Probabilidade: <u>33%</u>
_____	Probabilidade: <u>$\frac{1}{2}$</u>

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 4 mostra os palpites feito por um dos grupos. Um dos alunos justificou a probabilidade $\frac{2}{4}$ como sendo os casos favoráveis dos quatro possíveis, amarelo-amarelo (AA), vermelho-vermelho (VV), amarelo-vermelho (AV) ou vermelho-amarelo (VA), outros justificaram o palpite 50% por uma questão de simetria. Posteriormente cada grupo recebeu uma urna com dois discos vermelhos e dois discos amarelos. A proposta então foi realizar

uma simulação das retiradas dos "doces", anotando as cores em uma tabela. Cada grupo realizou o experimento trinta vezes, sempre revezando o participantes em cada sorteio.

Figura 5 – Simulação das retiradas dos doces



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Após todos os grupos concluírem as 30 rodadas, foi feita uma pausa para explicarmos alguns conceitos envolvidos até o momento da atividade. Usando o exemplo do problema, foi discutido a noção de evento aleatório. Em seguida, reunimos todas as informações registradas pelos grupos em uma só amostra e começamos um debate sobre probabilidade experimental e probabilidade teórica. As informações coletadas pelos alunos da turma A e B podem ser vistas na tabela 1.

Tabela 1 – Resultados obtidos pelas turmas A e B no Problema dos Doces

3º ano A				3º ano B			
GRUPO	VV	AA	AV ou VA	GRUPO	VV	AA	AV ou VA
#1	8	5	17	#1	7	5	18
#2	3	5	22	#2	2	5	23
#3	8	5	17	#3	8	3	19
#4	5	6	19	#4	4	9	17
#5	4	5	21	#5	5	4	21
#6	7	2	21	#6	4	9	17
#7	5	4	21	#7	7	7	16
TOTAL	40	32	138	TOTAL	37	42	131

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Ainda nesta etapa, na turma A, surgiu um questionamento sobre o tamanho da amostra, pois o aluno havia lido em algum lugar que o tamanho da amostra coletada deveria ser muito grande. Em vez de dar uma resposta direta, questionei-os se aquelas 210 amostras seria bom para extrairmos informações, porém não houve um consenso então foi decidido que mais para frente retomariamos este dilema. A partir dos registros foi calculado a probabilidade experimental. Feito o cálculo, foi questionado aos alunos se houve alguma discrepância entre a probabilidade calculada e a probabilidade do palpite de cada um. Por exemplo, na turma A, a probabilidade experimental de obtermos duas cores distintas foi de $\frac{138}{210}$, que nos dá aproximadamente 65%. Alguns alunos responderam que não estava tão distante os números, pois eles haviam dito 50%. Nesta momento, retomamos a discussão sobre o tamanho da amostra, explicando que os resultados de um experimento nem sempre correspondem aos resultados teóricos, mas devem se aproximar depois de um grande número de tentativas. Para concluir esta etapa, os alunos foram instigados sobre o fato de que a resposta correta realmente é próxima de 65% e não de 50% como a maioria havia pensado. A finalização da intervenção se deu explicando um pouco mais sobre o cálculo da probabilidade teórica e espaço amostral, além de calcularmos a probabilidade real do problema utilizando uma noção básica de combinatória para encontramos o espaço amostral das retiradas dos doces. Na próxima seção abordaremos o segundo problema proposto, chamado de O problema do Grão-Duque da Toscana.

3.4 Segunda Intervenção: O Problema do Grão-Duque da Toscana

A segunda intervenção foi baseada, segundo [Hombas \(2012\)](#), em um problema que data do século 17 conhecido como Problema do Grão-Duque da toscana. Galileo Galilei (1564-1642) embora tenha sido inicialmente destinado a estudar medicina na Universidade de Pisa, acabou sendo eleito para a cátedra de matemática em 1589, aos 25 anos, graças ao patrocínio de Ferdinando dei Medici, Grão-Duque da Toscana. Em um de seus artigos *Sopra le Scoperte dei Dadi* (Considerações sobre o jogo dos dados), Galileo Galilei abordou também o tema das probabilidades. Nesse trabalho, ele analisa a problemática do jogo *Passedix*, frequentemente praticado nas cortes da época. Neste jogo não há limite de participantes. Um dos jogadores é eleito o banqueiro da rodada, sendo este o responsável por lançar três dados. Se a soma das faces voltadas para cima for maior que 10, o banqueiro ganha a aposta; caso contrário, a aposta é aumentada e outro jogador assume como banqueiro. No entanto, o Grão-Duque pediu a Galileo que explicasse por que, embora houvesse um número igual de combinações para os totais 9 e 10 ao lançar três dados honestos, a experiência indicava que a probabilidade de obter um total de 9 era menor do que a de obter um total de 10.

Foi baseado neste contexto histórico, que o problema do Grão-Duque da Toscana foi adaptado para ser trabalhado em sala de aula. Os conteúdos previstos a serem abordados neste problema envolvem, além de espaço amostral e seus eventos, o conceito de eventos equiprováveis e não equiprováveis previsto no novo currículo do ensino médio. Inicialmente, em grupos, foi proposto aos alunos um problema similar ao Problema do Grão-Duque, porém com apenas dois dados. O objetivo foi de encontrar as probabilidades de se obter soma 11, soma 3 e soma 6 no lançamento de dois dados. Para auxiliar os alunos, listamos todos os 36 elementos do espaço amostral utilizando uma tabela e, após analisar os eventos, chegamos a conclusão que a probabilidade de somar 11 era igual a probabilidade de somar 3 no lançamento de dois dados, e ambas eram diferentes da probabilidade de somar 6. Logo após este momento, foram distribuídas fichas aos grupos com o enunciado do problema e algumas perguntas:

Diz a história que, no século XVI, um jogo era popular na corte italiana, em que se lançavam três dados e anotavam a soma dos pontos resultantes. O Grão-Duque da Toscana, um jogador frequente, notou que era muito mais comum obter 10 pontos do que 9 pontos. Isso o intrigou, já que ele acreditava que tanto 10 pontos quanto 9 pontos poderiam ser obtidos de igual maneira, através de seis combinações diferentes.

Quais são as seis maneiras de decompor os 10 pontos? E os 9 pontos?

Após a leitura do enunciado, foi questionado aos alunos se de fato o Grão-Duque tinha razão, ou seja, será que soma 10 e soma 9, possuem seis maneiras de decompor a soma? Levou um tempo para os alunos encontrarem as seis maneiras de decompor cada soma, apenas dois grupos em cada turma não conseguiram encontrar todas as seis maneiras. Um dos grupos na turma A encontrou sete maneiras de se obter soma 10, posteriormente eles viram que um dos casos já havia sido contado antes. A figura 6 mostra um exemplo feito por um aluno da turma B, em que é listado todas as seis decomposições das somas 9 e 10. Até este momento, nossa conclusão era que, de fato, o Grão-Duque havia certa razão em dizer que o total de decomposições eram iguais. Neste momento os alunos foram questionados sobre que eles achavam a respeito do motivo de somar 10 ser mais provável de acontecer que somar 9 no lançamento de três dados. No momento do debate alguns alunos levantaram hipóteses favoráveis sobre a resolução deste enigma. Alguns apontaram que deveríamos levar em consideração as permutações das parcelas, pois poderia sair a mesma soma, porém em diferentes dados.

Nesta última etapa, explicamos que há, de fato, seis formas distintas de se obter uma soma igual a 9 e 10 pontos, conforme se pode observar na seguinte figura 6. Porém, nem todos os resultados apresentados tem igual probabilidade de acontecer, uma vez que há 6 formas distintas de sair $\{1, 3, 6\}$, bem como de todas as situações nas quais os três dados tem pontuação distinta, pois se considerarmos os resultados do dado 1, dado 2 e dado 3 ordenados teremos as possibilidades $(1, 3, 6)$, $(1, 6, 3)$, $(3, 1, 6)$, $(3, 6, 1)$, $(6, 1, 3)$ e $(6, 3, 1)$; enquanto para o resultado $\{2, 2, 5\}$ (e todos os resultados nos quais dois dados obtêm a mesma pontuação) só há 3 formas $(2, 2, 5)$, $(2, 5, 2)$ e $(5, 2, 2)$; e para o resultado $\{3, 3, 3\}$ uma única forma. Assim sendo, dos $6^3 = 216$ resultados distintos do lançamento dos três dados há 25 que favorecem a soma ser igual a 9 e há 27 que favorecem a soma ser igual a 10 e como mostra na figura 7 logo:

$$P(\text{"Soma9"}) = \frac{25}{216} < P(\text{"Soma10"}) = \frac{27}{216}.$$

Após esclarecer todas as dúvidas dos alunos, foi destacado que uma interpretação clara do espaço amostral é essencial para calcular essas probabilidades de maneira precisa. Por fim, foi selecionado problemas similares do livro didático Multiversos Matemática: Estatística e probabilidade (Souza, 2020) para melhor compreensão dos conceitos estudado neste dia.

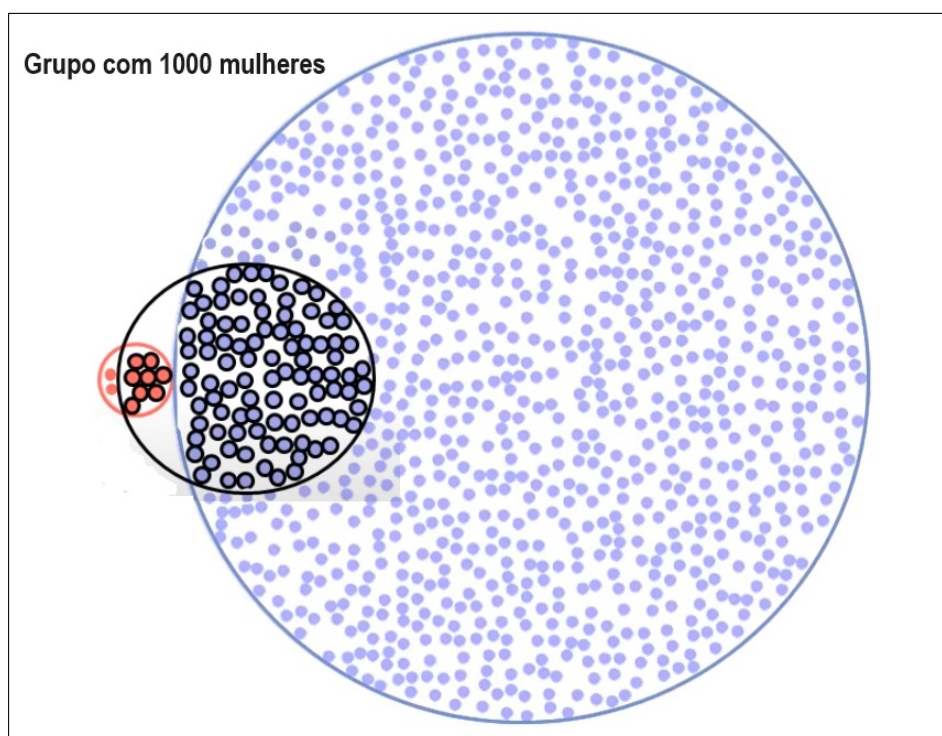
3.5 Terceira Intervenção: O Problema do Falso-Positivo

A terceira intervenção abordará um problema que foi adaptado de um artigo da BBC NEWS do jornalista Kremer (2014), o qual questionava se os médicos compreendiam de fato conceitos relacionados a probabilidade em seus exames. O problema, aqui chamado de *O Problema do Falso Positivo*, traz o seguinte questionamento: **Um por cento das mulheres de 40 anos, em todo o mundo, tem câncer de mama. A chance de uma máquina de mamografia diagnosticar corretamente o câncer de mama é de 80%. Essa mesma máquina tem 9,6% de chance de dar um falso positivo. Suponha que uma mulher de 40 anos faça uma mamografia regular e seja diagnosticada pela máquina com resultado positivo para câncer de mama. Qual é a probabilidade desta mulher ter câncer de mama?** A proposta para esta intervenção era de trabalhar maneiras de resolução de problemas ligado a probabilidade, em especial a resolução de problemas utilizando a árvore de possibilidades ou diagrama de árvore. Após apresentar o problema e abordar algumas definições como falso-positivo e falso-negativo, foi questionado aos alunos qual seria o intervalo que eles achavam que seria a resposta correta: menor que 10%, entre 10% e 30%, entre 30% e 60% ou maior que 60%.

Quase a totalidade dos alunos em ambas as turmas responderam que a resposta seria um número maior que 60%. A explicação mais comum para eles acharem que a resposta seria maior que 60% era que “A máquina detecta o câncer 80% das vezes, então a probabilidade deve ser de 80%, ou talvez 70%, dada a taxa de falsos positivos.” Então foi

revelado os alunos que a resposta correta para o problema seria um número menor que 10%, em torno de 7,8%. Para melhor ilustrar a situação, optamos por uma abordagem mais visual, como citam Micallef, Dragicevic e Fekete (2012) em seu artigo, utilizando imagens representativas, além de escolher um número inicial de 1000 mulheres e arredondarmos a taxa de falso positivo para 10% em vez de 9,6%. Para tal, supomos que 1.000 mulheres de 40 anos foram selecionadas aleatoriamente para exames de mamografia, este número está representado nas bolas de cores azuis e vermelhas na figura 8. Dessas 1000 mulheres, 1%, ou dez delas, terão câncer da mama e as restantes 990 não, representado nas cores vermelhas e azuis, respectivamente. Das dez mulheres com câncer de mama, 80%, ou oito mulheres, serão diagnosticadas corretamente. Das 990 mulheres sem câncer da mama, 10% terão um falso positivo, ou seja, 99 mulheres. Utilizamos o círculo preto na figura 8 para ilustrar a mulheres que foram diagnosticadas com câncer de mama pela máquina que foram num total de 107. Assim, concluímos que nas condições apresentadas a resposta seria de oito em cada 107 mulheres, isto é $\frac{8}{107}$, ou cerca de 7,5%.

Figura 8 – Ilustração utilizado na terceira intervenção

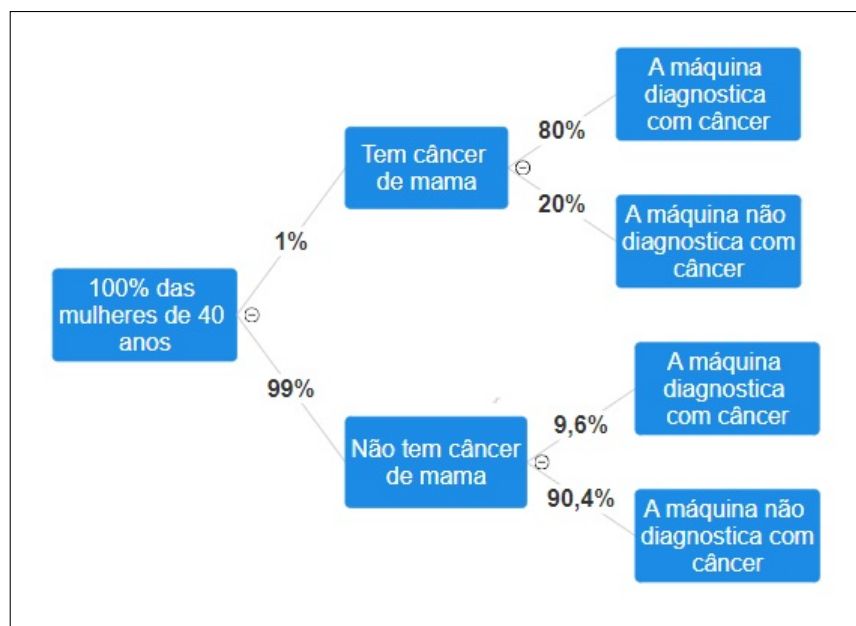


Fonte: Elaboração do próprio autor

Utilizando esta abordagem visual, os alunos puderam compreender melhor os detalhes deste problema, alguns questionaram se sempre era possível utilizar um número aleatório, por exemplo as 1000 mulheres mencionadas acima, para resultar problemas. Foi explicado que nem sempre isto é possível, mas caso o problema deixe em aberto, esta seria uma boa estratégia a ser utilizada, desde que o tamanho da amostra escolhida seja conveniente e facilite os cálculos. Para dar continuidade com a intervenção, foi abordado

também o método das árvores de possibilidades ou diagrama de árvores. A maioria dos alunos não demonstraram conhecer este método. Começamos este método pelas informações iniciais, em que $\frac{1}{100}$ das mulheres de 40 anos apresentavam câncer de mama, segundo o problema. Em seguida, foi questionado qual era a probabilidade de uma mulher de 40 anos não apresentar a doença, e sem muitas dificuldades, responderam 99% ou $\frac{99}{100}$. O processo de construção da árvore continuou, detalhando cada ramificação e o significado de cada galho ao final da construção, como mostra a figura

Figura 9 – Árvore de possibilidades utilizada na explicação do problema original



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observando o diagrama os alunos perceberam que na primeira e terceira ramificação a máquina detecta a doença, porém apenas na primeira ramificação que a pessoa testada tem realmente a doença. Um ponto a ser destacado é que, o problema em si explora conceitos de probabilidade condicional, visto que estamos interessado em saber a probabilidade de uma mulher de 40 anos ter a doença dado que a máquina diagnosticou com a doença. A explicação de probabilidade condicional, neste momento, foi bastante superficial, pois este conteúdo será abordado com maior detalhes no problema da seção 3.6. Ao final chegamos no seguinte cálculo:

$$\frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{80}{100}}{\frac{1}{100} \cdot \frac{80}{100} + \frac{99}{100} \cdot \frac{96}{100}} \approx 0.078$$

Ao final da intervenção foi utilizado questões do próprio livro didático utilizando o método das árvores de possibilidades em suas resoluções.

3.6 Quarta Intervenção: A Porta dos Desesperados

Também conhecido como o *Problema de Monty Hall* ou *Problema dos Dois Bodes*, a quarta e última intervenção, chamada de *A Porta dos Desesperados*, foi baseada em um situação real ocorrida nos Estados Unidos que gerou, à época, uma polêmica devido a uma simples pergunta relacionada ao conteúdo de probabilidade. Assim, para melhor motivar os alunos com o problema, resolvemos abordar primeiramente o contexto histórico do mesmo.

3.6.1 A história por trás do Problema dos Dois Bodes

Embora haja referências ao problema desde 1975, como citado no artigo de [Selvin \(1975\)](#), foi somente em Setembro de 1990 que o problema se tornou polêmico. Marilyn Vos Savant, nascida em 1946 em St. Louis, Missouri, Estados Unidos, era uma colunista na revista *Parade* e autora de diversos livros. Trabalhava também como executiva em uma empresa que fabrica corações artificiais de uso permanente e temporário em pacientes que apresentam casos de deficiências cardíacas. Foi listada no período de 1986 e 1989, no *Guinness Book of World Records*, o Livro dos Recordes, como detentora do mais alto quociente de inteligência (QI) no mundo, desde então o *Guinness Book of World Records* não mais reconhece esta categoria por ser difícil de quantificar.

Figura 10 – Marilyn Vos Savant, colunista da revista Parade



Fonte: Crockett, Zachary, 2015.

Marylin Savant era colunista da revista Parade e escrevia o *Ask Marylin*, uma coluna de pergunta e respostas na qual diversas pessoas enviavam perguntas com temas diversos, como relações pessoais, matemática, filosofia, política, religião, entre outros.

Em Setembro de 1990, Marylin respondeu em sua coluna, Ask Marilyn, na revista Parade, uma inofensiva pergunta feita por um de seus leitores, Craig Whitaker, residente em Columbia, Maryland, Estados Unidos.

Suponha que você está em um programa de televisão. Foi dado a você escolher uma entre três portas. Atrás de uma porta está um carro e atrás de cada outra porta, bodes. Você escolhe uma porta, digamos porta #1, e o apresentador, que sabe o que está atrás das portas, abre outra porta, digamos porta #3, revelando uma cabra. Ele diz para você: "Você quer mudar para porta #2?" É vantagem mudar a sua escolha de portas?

A resposta dada por Marylin Vos Savant ao leitor Craig Whitaker na revista *Parade*, acendeu um debate que tomou enorme proporções. Marilyn Savant afirmou que sim, era melhor trocar de porta. Esta resposta foi o estopim para o editorial da revista *Parade* recebesse em sua caixa postal diversas cartas, cerca de 10000, segundo matéria publicada no *The New York Times* pelo jornalista Tierney (1991). A maioria, incluindo cerca de 1000 doutores, discordavam da resposta de Marylin sobre a pergunta dada ao leitor. Abaixo é transcrito algumas destas cartas:

Como você aparenta ir direto ao ponto, irei fazer o mesmo. Você errou! Deixe-me explicar. Se uma porta é mostrada para ser a perdedora, aquela informação muda a probabilidade da escolha restante, nenhuma delas tem motivo para ser algo diferente de $1/2$. Como matemático profissional, eu estou muito preocupado com a falta de habilidades do público geral. Por favor, ajude confessando seu erro e, em um momento futuro, seja mais cuidadosa. **Robert Sachs, Ph.D. - George Mason University** (Crockett, 2015, v. 19).

Você errou, e errou feio! Como você aparenta ter dificuldade em assimilar o princípio básico aqui, irei explicar. Depois do apresentador revelar o bode, você agora tem $1/2$ de chance de estar correta. Se você mudar a sua escolha ou não mudar a sua escolha de porta, as chances continuam as mesmas. Já existe analfabetismo matemático suficiente neste país, e nós não queremos que a pessoa com maior Q.I. do mundo propague mais analfabetismo. Vergonha! **Scott Smith, Ph.D. - Universidade da Flórida** (Crockett, 2015, v. 19).

Sua resposta para a pergunta está errada, mas se serve de consolação, muitos de meus colegas acadêmicos também se atrapalharam com esse problema. **Associação de Faculdades da Califórnia** (Crockett, 2015, v. 19).

Após explicar o embate entre a colunista e os professores das universidades, foi exposto um vídeo com um trecho do quadro da *A porta dos Desesperados*, exibido pelo Sistema Brasileiro de Televisão. Este programa de auditório, apresentado pelo ator e humorista Sérgio Malandro, era bastante similar ao programa que deu origem ao problema nos Estados Unidos. A escolha de trabalhar A Porta dos Desesperados como cenário do problema principal foi bastante conveniente. Embora os estudantes não tenham vivido a época em que se passava o quadro, os professores da escola e responsáveis pelos alunos viveram aquele momento, isto trás um sentimento de proximidade maior com o problema, além de que encontrar uma solução para o problema pesquisando por *A Porta dos Desesperados* é relativamente mais difícil que encontrar solução para o *O Problema dos Dois Bodes*.

Figura 11 – Imagem captada do vídeo reproduzido durante a apresentação do problema



Fonte: SBT, 1987.

Após essa parte introdutória, levantamos um debate sobre o que eles achavam da pergunta principal do problema. A maioria dos alunos acreditavam que os professores e pesquisadores das universidades tinham mais razão que Marilyn, ou seja, como só havia duas portas ao final, a chance era de 50%, assim não faria diferença trocar ou manter a escolha.

3.6.2 A simulação do problema

Após a parte introdutória, em que abordamos o enunciado e contexto histórico do problema, resolvemos fazer uma simulação em sala de aula com as mesmas condições enunciadas no problema. Todos os alunos de ambas as turmas participaram, e pra agilizar a dinâmica da simulação, foi criado uma planilha utilizando o software Microsoft Excel. Como premiação simbólica, os alunos que ao final das escolhas acertassem onde estava o prêmio, ganhariam chocolates e doces. A figura 12 mostra como estava organizada planilha da simulação.

Figura 12 – Modelo de planilha eletrônica utilizada durante a atividade

Rodada	Porta Escolhida	Prêmio	Eliminar a porta	Trocou ?	Ganhou?		trocar ganha	Não trocar ganha
#1								
#2								
#3								
#4								
#5								
#6								
#7								
#8								
#9								
#10								
#11								
#12								
#13								
#14								
#15								
#16								
#17								
#18								
#19								
#20								

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Abaixo temos o significado de cada coluna da planilha eletrônica, figura 12, utilizada na intervenção:

- **"Rodada"**: Esta coluna serviu como referência para ordenar o quantitativo de rodadas em cada turma.
- **"Prêmio"**: Nesta coluna estava escondido em qual porta estava o prêmio. A informação da célula não era visível para os alunos e só era revelada ao final de cada rodada. É importante destacar a escolha de qual porta estaria o prêmio foi determinada por uma função do *Microsoft Excel* que gerava números aleatórios (1, 2 ou 3).
- **"Porta Escolhida"**: Era a porta que o participante da vez escolhia inicialmente. Esta coluna era preenchida com números 1, 2 ou 3, dependendo da escolha do participante.
- **"Eliminar porta"**: Esta coluna significa qual porta foi eliminada pelo apresentador. A função de eliminar a porta após a escolha do participante foi pré-programada para que seguisse o mesmo critério do problema original, ou seja, não era possível eliminar a porta que tinha o prêmio, nem eliminar a porta que o participante escolheu. Esta coluna era preenchida com números 1, 2 ou 3, a depender dos critérios já mencionados.
- **"Trocou?"**: Esta parte da planilha foi usada para saber se o participante escolheu trocar de porta ou manter a escolha inicial. Caso o participante escolhesse trocar, após uma porta ser eliminada, esta coluna era preenchida com um "sim", do contrário, era preenchida com um "não".

- **"Ganhou?"**: Esta coluna indicava se o participante ganhou ou não ganhou o prêmio. No caso de sucesso, esta coluna era preenchida com um "sim", em caso de fracasso, era preenchida com um "não".

As duas últimas colunas eram preenchidas automaticamente por meio de uma função no Microsoft Excel. A finalidade destas colunas é de simplificar a visualização dos resultados pelos alunos.

- **"Trocar ganha"**: Caso o participante trocasse de porta e ganhasse o prêmio, era exibido um "sim", do contrário nada era exibido.
- **"Não trocar ganha"**: Análogo ao item anterior, caso o participante não trocasse de porta e ganhasse o prêmio, era exibido um "sim", do contrário nada era exibido.

Na etapa do preenchimento, alguns alunos tentavam encontrar alguma lógica na distribuição dos prêmios, apesar de ter sido dito que elas foram aleatoriamente escolhidas pelo próprio programa. No início foi percebido uma tendência em manter a escolha da porta, porém ao se aproximar do final, os alunos foram lentamente mudando a opinião e escolhendo trocar de porta no momento apropriado. O resultado da simulação foi apresentado aos alunos em uma planilha, como pode ser observado na figura 13.

Figura 13 – Resultados da simulação em ambas as turmas

Turma A		Turma B	
Quantos trocaram	23	Quantos trocaram	17
Quantos não trocaram	21	Quantos não trocaram	14
Quantos ganharam trocando	17	Quantos ganharam trocando	12
Quantos ganharam não trocando	9	Quantos ganharam não trocando	4

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A partir da construção desta planilha, o conteúdo de probabilidade condicional foi trabalhado com os alunos. Primeiramente era feita a seguinte pergunta: *De acordo com a tabela que vocês ajudaram a preencher, figura 13, e supondo que na turma A houve 44 participantes, dos quais 23 escolheram trocar de porta e 21 escolheram não trocar de porta. Se o nome de todos os 44 participantes fossem colocados em uma urna, qual a a probabilidade de sortear alguém que ganhou o jogo ?* Alguns alunos perceberam que, na tabela, deveríamos somar o total de pessoas que ganharam trocando com o total de pessoas que ganharam mantendo a escolha das portas e dividindo pelo total de participantes. Logo após os alunos demonstrarem confiança nesse entendimento, era perguntado qual a probabilidade de alguém sorteado ter ganho o prêmio, sabendo que ela trocou de porta ?

Esta pergunta chave dava início a explicação do conteúdo de probabilidade condicional. Os alunos notaram que a pergunta não mais interessava aquelas pessoas que não trocaram de porta, assim o espaço amostral da pergunta anterior não era o mesmo desta nova pergunta. Em seguida foi apresentado um conceito formal de probabilidade condicional e maneiras de calcular a mesma, seja por fórmula ou restringindo o espaço amostral à condição fornecida. Por fim, voltamos ao problema original perguntando que, de acordo com os números apresentados na tabela, é melhor trocar, manter ou tanto faz? Boa parte dos alunos que responderam “tanto faz” anteriormente, perceberam que, pelos números da simulação em sala, ganhar o prêmio dado que trocou de porta apresentava $\frac{17}{23} \approx 74\%$ de chance de ganhar, enquanto ganhar o prêmio dado que manteve a escolha inicial da porta tinha $\frac{9}{21} \approx 43\%$ de chance de ganhar, assim por esses dados, era muito mais vantajoso trocar de porta. Então foi questionado aos alunos que será que a nossa amostra pequena demais para obtermos uma conclusão definitiva? Alguns alunos ainda não tinham se convencido de que era melhor trocar de porta, assim como os doutores do problema original, foi então que utilizamos uma maneira mais simples para verificarmos que, de fato, o resultado da simulação que eles fizeram eram condizente com o original, como mostrado na tabela baixo:

Tabela 2 – Resultados possíveis caso o participante escolha porta #1

Porta #1	Porta #2	Porta #3	Apresentador elimina a porta	Resultado ao trocar
Carro	Bode	Bode	Porta #2 ou #3	Perde
Bode	Carro	Bode	Porta #3	Ganha
Bode	Bode	Carro	Porta #2	Ganha

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na tabela 2 é possível visualizar a solução do problema. Supondo que o participante tenha escolhido a porta #1 (os demais casos é análogo), após trocar de porta, o único caso que há fracasso é se, e somente se, sua escolha inicial for da porta que contém o prêmio (carro). Nos demais casos, ao escolher uma porta que contém um bode, o apresentador será forçado a eliminar uma porta que contém o outro bode, restando apenas uma porta com carro. Sendo assim, a probabilidade de sucesso ao trocar de porta será de $2/3$. Após mostrar esta solução aos alunos, os mesmos questionaram do porquê os pesquisadores e professores da universidades não enxergarem esta solução. Foi então mencionado que se tratava de um problema contraintuitivo para a maioria das pessoas, porém, com um pouco de matemática a real solução se torna evidente.

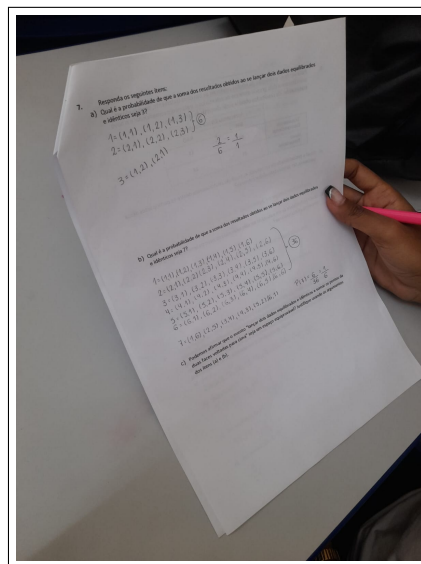
Para finalizar, uma lista com diversas questões sobre probabilidade condicional foi entregue aos alunos para que eles pudessem praticar nas aulas reservadas para estudo. De todos os problemas apresentados, este foi o problema que mais motivou os alunos. De fato

o problema é bastante rico em contexto, seja pela parte histórica ou pela dinâmica de programa de auditório, isto permitiu um engajamento maior por parte dos alunos.

3.7 Elaboração e aplicação do pós-teste

A última etapa da sequência didática consistiu na aplicação de um pós-teste, abrangendo 31 alunos na turma A e 30 alunos na turma B. A aplicação do pós-teste se deu aproximadamente um mês após a última intervenção ser realizada. Este instrumento foi desenhado para avaliar o progresso e o entendimento adquirido pelos estudantes após a implementação da sequência didática abordando problemas contraintuitivos sobre probabilidade. Assim como o pré-teste, o pós-teste desempenha um papel crucial como ferramenta diagnóstica. Ele permite ao educador mensurar o impacto das intervenções realizadas durante a sequência de ensino, identificando áreas em que os alunos demonstraram melhora e aquelas que ainda requerem atenção adicional. A estrutura do pós-teste foi elaborada, mantendo correlações diretas com as habilidades e conteúdos previamente abordados no pré-teste e nas intervenções. Cada questão foi formulada considerando os objetos do conhecimento presentes no currículo de matemática de Pernambuco, assegurando uma avaliação alinhada aos objetivos educacionais estabelecidos.

Figura 14 – Aluno respondendo o pós-teste na turma B



Fonte: Elaboração do próprio autor.

1. Classifique os itens abaixo em experimento aleatório ou experimento não aleatório (determinístico). JUSTIFIQUE cada resposta.

- (a) Contagem da quantidade de acidentes automobilísticos em um intervalo de 1 dia em uma determinada avenida.
- (b) O dia da semana em que você fará aniversário no ano de 2030

2. Uma moeda e um dado honesto são lançados ao mesmo tempo, em seguida é verificado qual face de cada uma delas ficou voltada para cima.

- (a) Escreva o espaço amostral desse experimento.
- (b) Determine o Evento A correspondente a obter um número maior ou igual a 5 no dado.
- (c) c) Determine o Evento B, de obter uma coroa na moeda e um número par no dado.

3. Em uma gincana, os participantes foram numerados de 1 até 25, conforme a ordem de inscrição. Um participante será sorteado para iniciar as provas da gincana. Para fazer esse sorteio, o número de cada participante foi escrito em pedaços de papel idênticos, que foram colocados em uma caixa para que um deles fosse retirado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ser sorteado um participante de número:

- (a) Par ?
- (b) Múltiplo de 5?
- (c) Par e múltiplo de 5?
- (d) Par ou múltiplo de 5?

4. Em uma festa infantil, foram misturados, em uma caixa, 12 brindes para meninos e 15 para meninas. Dois brindes são retirados, sucessivamente e sem reposição, da caixa. Qual é a probabilidade de que um seja para menino e outro para menina?

5. Uma urna contém 10 etiquetas identificadas pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Duas delas são retiradas ao acaso, sucessivamente. Qual a probabilidade de saírem duas vogais, se a extração é feita com reposição?

6. Crie uma árvore de possibilidades que ilustra o seguinte caso: "Suponha que 5% das bagagens contenham itens proibidos, Se uma bagagem contém um item proibido, há uma chance de 98%, de alarme disparar. Se uma bagagem não contém um item proibido, há uma chance de 8% de o alarme disparar"

7. Responda os seguintes itens:

- (a) Qual é a probabilidade de que a soma dos resultados obtidos ao se lançar dois dados equilibrados e idênticos seja 3?
- (b) Qual é a probabilidade de que a soma dos resultados obtidos ao se lançar dois dados equilibrados e idênticos seja 7?
- (c) Podemos afirmar que o evento "lançar dois dados equilibrados e idênticos e somar os pontos da duas faces voltadas para cima" seja um espaço equiprovável? Justifique usando os argumentos dos itens (a) e (b).

8. Para verificar a redução de efeitos colaterais de um novo tratamento, pesquisadores ministraram a dois grupos distintos de voluntários o tratamento convencional e o novo tratamento. Os resultados obtidos estão descritos na tabela a seguir:

	Apresentou Efeitos Colaterais?	
	SIM	NÃO
TRATAMENTO CONVENCIONAL	54	41
NOVO TRATAMENTO	51	34

- (a) Qual a probabilidade de um voluntário, escolhido aleatoriamente dentre os participantes dessa pesquisa, ter apresentado efeitos colaterais?
- (b) Qual a probabilidade de um voluntário ter sido submetido ao novo tratamento, dado que ele apresentou efeitos colaterais? (a) e (b).

A aplicação do pós-teste ocorreu sem problemas ou intervenções. A correção deste instrumento, bem como a comparação com o pré-teste será analisada no próximo capítulo.

4 Análise dos resultados

Para avaliar a eficácia da sequência didática os alunos passaram por um pré-teste e pós-teste no qual foram abordados os conteúdos de probabilidade no ensino médio. Reforçamos ainda que as turmas selecionadas para a aplicação da sequência didática não estavam inseridas na nova matriz curricular de Pernambuco que prevê o conteúdo de probabilidade exclusivamente para turmas do terceiro ano, assim, de acordo com a matriz antiga, as turmas selecionadas já tiveram contato com o conteúdo de probabilidade de forma diluída nos anos anteriores. Tanto o pré quanto o o pós-teste foram realizados através de oito questões com objetivo de avaliar, em cada questão, uma determinada habilidade prevista na nova matriz curricular referente ao conteúdo de probabilidade. Nas seções 4.1 e 4.2 analisaremos o pré-teste e o pós-teste, respectivamente.

4.1 Analisando o Pré-Teste

No total, 59 alunos responderam o pré-teste, sendo 30 alunos da turma A e 29 alunos da turma B.

1. Identifique quais dos itens a seguir apresentam experimentos (ou fenômenos) aleatórios. (nesta questão é permitido marcar mais de uma alternativa).

- (a) Duzentos bilhetes idênticos, diferenciando-se apenas pela numeração, foram colocados em uma urna para que um deles fosse sorteado.
- (b) Aquecer a água pura no nível do mar e verificar a que temperatura ela entrará em ebulição.
- (c) Contagem da quantidade de artefatos defeituosos em um intervalo de duas horas na linha de produção de uma fábrica.
- (d) Registrar o tempo em que um relógio em bom funcionamento demora para que o ponteiro maior complete uma volta.

A primeira questão foi extraída do livro *Multiversos Matemática: Estatística e Probabilidade* do autor [Souza \(2020\)](#), no qual os alunos deveriam responder quais dos eventos listados nas alternativas representavam um experimento aleatório. Ao se abordar o conteúdo de probabilidade é fundamental apresentar a noção de eventos ditos aleatórios e eventos determinísticos. A probabilidade é a medida da incerteza associada a eventos. Fenômenos aleatórios são essenciais para entender a base teórica da probabilidade, pois muitos eventos na vida real são incertos e não podem ser previstos com certeza absoluta.

Para fins de correção, considerou-se como resposta correta aquela em que o aluno assinalou apenas as duas alternativas corretas, no caso letra A e C. Foi classificada como parcialmente correta a resposta em que o aluno assinalou apenas uma das duas opções corretas, letra A ou C. E por fim, uma questão foi considerada errada se o aluno assinalou alguma alternativa incorreta. Na turma A, seis alunos marcaram acertaram integralmente a questão, e outros doze alunos acertaram parcialmente a questão, e os 12 alunos restantes, erraram a questão. Na turma B apenas dois alunos acertaram integralmente a questão, outros seis alunos acertaram parcialmente e os 21 restantes erraram a questão. De forma geral, o resultado não foi satisfatório, os alunos demonstraram não saber com clareza o significado de experimento aleatório, principalmente na turma B onde apenas dois alunos acertaram a primeira questão. Tais conceitos envolvendo aleatoriedade não são exclusivos do ensino médio. Segundo a BNCC (2017), os alunos nos anos finais do ensino fundamental já deveriam desenvolver habilidades para o entendimento de que nem todos os fenômenos são determinísticos, há eventos que são influenciados pela aleatoriedade e incerteza.

Tabela 3 – Total de erros e acertos da questão 1 pré-teste

Pré-teste		Pré-teste	
Questão 1 - Turma A		Questão 1 - Turma B	
Acertou integralmente	6	Acertou integralmente	2
Acertou parcialmente	12	Acertou parcialmente	6
Errou	12	Errou	21

Fonte: Elaboração do próprio autor.

2. Três moedas idênticas são lançadas ao mesmo tempo, em seguida é verificado qual face de cada uma delas ficou voltada para cima: cara ou coroa.

- (a) Escreva o espaço amostral desse experimento.
- (b) Determine o Evento A correspondente a obter exatamente duas caras nesse experimento.
- (c) Determine o Evento B, de obter apenas uma coroa.

A segunda questão aborda o conceito de espaço amostral e eventos em um lançamento de três moedas. Nesta questão não havia necessidade de cálculos, apenas descrever o que se pedia em cada item. O entendimento do espaço amostral e eventos é essencial para a resolução de problemas, principalmente problemas mais complexos que envolvem, por exemplo, retiradas sucessivas ou necessidade de utilização de análise combinatória para calcular a quantidade de elementos. De forma geral, nesta questão, o resultado não foi satisfatório em nenhuma das turmas. Na turma A dois alunos demonstraram um mínimo de conhecimento a cerca do que foi pedido, os demais alunos erraram ou deixaram em

branco. Na turma B três alunos apresentaram respostas corretas ou respostas minimamente condizentes com o que havia sido pedido na questão. Os demais erraram ou deixaram em branco.

Tabela 4 – Total de erros e acertos da questão 2 pré-teste

Pré-teste		Pré-teste	
Questão 2 - Turma A		Questão 2 - Turma B	
Acertos	2	Acertos	3
Erros	28	Erros	26

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 15, embora o aluno não tenha respondido corretamente o que foi pedido, demonstrou saber minimamente a ideia de espaço amostral, faltando apenas os eventos KKK e CCC.

Figura 15 – Resposta referente a segunda questão aluno turma B

2. Três moedas idênticas são lançadas ao mesmo tempo, em seguida é verificado qual face de cada uma delas ficou voltada para cima: cara (K) ou coroa (C).

a) Escreva o espaço amostral desse experimento.

KCK CKK KKe
Kee CKK eek

b) Determine o Evento A correspondente a obter exatamente duas caras nesse experimento.

KKe KKK
eKK

c) Determine o Evento B, de obter apenas uma coroa.

KKe KKK
eKK

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 16, o estudante representou o espaço amostral e os eventos pedidos corretamente, porém usando uma representação não convencional para a cara e coroa e dos elementos do conjunto representado entre chaves.

Figura 16 – Resposta referente a segunda questão aluno turma A

2. Três moedas idênticas são lançadas ao mesmo tempo, em seguida é verificado qual face de cada uma delas ficou voltada para cima: cara (K) ou coroa (C).

a) Escreva o espaço amostral desse experimento.

8 possibilidades

b) Determine o Evento A correspondente a obter exatamente duas caras nesse experimento.

3 possibilidades

c) Determine o Evento B, de obter apenas uma coroa.

3 possibilidades

⊗ = cara
○ = coroa

Fonte: Elaboração do próprio autor.

3. Em uma gincana, os participantes foram numerados de 1 até 25, conforme a ordem de inscrição. Um participante será sorteado para iniciar as provas da gincana. Para fazer esse sorteio, o número de cada participante foi escrito em pedaços de papel idênticos, que foram colocados em uma caixa para que um deles fosse retirado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ser sorteado um participante de número:

- (a) 13?
- (b) par?
- (c) Múltiplo de 8?
- (d) Maior que 25?

A questão 3 foi retirada do livro Multiversos Matemática: Estatística e probabilidade (Souza, 2020), com propósito de averiguar se os alunos conseguem realizar o cálculo simples de probabilidade. Na turma A, onze alunos responderam corretamente todos os itens da questão 3, outros seis alunos demonstraram algum conhecimento ou tentativa de calcular corretamente, porém com sérios problemas de conceito ou execução, e 13 alunos erraram grosseiramente seus cálculos ou deixaram em branco. Na turma B dez alunos acertaram todos os itens e outros três tiveram um resultado satisfatório, com poucos erros em suas respostas. Os demais, dezesseis alunos, não tiveram sucesso em suas respostas ou deixaram em branco.

Tabela 5 – Total de erros e acertos da questão 3 pré-teste

Pré-teste		Pré-teste	
Questão 3 - Turma A		Questão 3 - Turma B	
Acertos	11	Acertos	10
Erros	19	Erros	19

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 17 vemos um dos erros mais comum referente ao item a) da questão 3. Neste item é perguntado qual a probabilidade do sorteio sair o número 13, ou seja, uma única possibilidade dentre as 25. Os alunos entenderam que havia 13 possibilidades nas 25 opções disponíveis.

Figura 17 – Alternativa respondida de forma errada por um aluno da turma B

3. Em uma gincana, os participantes foram numerados de 1 até 25, conforme a ordem de inscrição. Um participante será sorteado para iniciar as provas da gincana. Para fazer esse sorteio, o número de cada participante foi escrito em pedaços de papel idênticos, que foram colocados em uma caixa para que um deles fosse retirado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ser sorteado um participante de número:

a) 13?

$\frac{13}{25} = 0,52\%$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nas figuras 18 e 19, vemos um erro que foi observado em pelo menos 5 alunos. Os alunos não levaram em consideração de que no espaço amostral dado, não há uma mesma quantidade de número pares e ímpares, ou seja, não há a simetria justificada por exemplo na figura 18.

Figura 18 – Item a) e b) respondidos de forma errada por um aluno da turma B

3. Em uma gincana, os participantes foram numerados de 1 até 25, conforme a ordem de inscrição. Um participante será sorteado para iniciar as provas da gincana. Para fazer esse sorteio, o número de cada participante foi escrito em pedaços de papel idênticos, que foram colocados em uma caixa para que um deles fosse retirado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ser sorteado um participante de número:

a) 13?

45% porque está quase no metade do número 25

b) par?

50% metade é ímpar e metade é par

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 19 – Item b) respondido de forma errada por um aluno da turma A

3. Em uma gincana, os participantes foram numerados de 1 até 25, conforme a ordem de inscrição. Um participante será sorteado para iniciar as provas da gincana. Para fazer esse sorteio, o número de cada participante foi escrito em pedaços de papel idênticos, que foram colocados em uma caixa para que um deles fosse retirado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ser sorteado um participante de número:

a) 13? $\frac{1}{25}$

b) par? $\frac{1}{2}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 20 vemos um erro de conceitual grave. Probabilidade é um número real que varia entre 0 e 1, não pode jamais haver uma fração que resulta em um número maior que 1.

Figura 20 – Alternativas respondidas de forma errada por um aluno da turma A

3. Em uma gincana, os participantes foram numerados de 1 até 25, conforme a ordem de inscrição. Um participante será sorteado para iniciar as provas da gincana. Para fazer esse sorteio, o número de cada participante foi escrito em pedaços de papel idênticos, que foram colocados em uma caixa para que um deles fosse retirado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ser sorteado um participante de número:

a) 13? $\frac{25}{5} = 25$

b) par? $\frac{25}{12} =$

c) múltiplo de 8? $\frac{25}{6}$

d) maior do que 25? 0, porque só vai até o 25

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observe que na figura 21, embora a maioria dos alunos optaram representação $\frac{1}{25}$, por exemplo, outros alunos optaram por escrever na forma que está escrita no item a), 1 em 25. Porém, muitos alunos cometeram o mesmo erro de apenas escrever o quantitativo dos elementos do evento pedido, ou descrever os elementos do evento, como nos itens b) e c), respectivamente, da figura 21.

Figura 21 – Alguns equívocos na representação da probabilidade

3. Em uma gincana, os participantes foram numerados de 1 até 25, conforme a ordem de inscrição. Um participante será sorteado para iniciar as provas da gincana. Para fazer esse sorteio, o número de cada participante foi escrito em pedaços de papel idênticos, que foram colocados em uma caixa para que um deles fosse retirado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ser sorteado um participante de número:

a) 13? 1 em 25

b) par? 12

c) múltiplo de 8?
esqueci o que é múltiplo
8, 16, 24 ?

d) maior do que 25? 0

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando de forma geral a questão 3 do pré-teste nos dar um norte de como devemos abordar os principais equívocos encontrados pelos alunos para uma melhor compreensão do conteúdo de probabilidade

4. Em uma urna foram depositados 10 bolas em que cada uma recebeu uma etiqueta diferente com as letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Sabendo que duas bolas foram retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição, determine a probabilidade de sair uma vogal e uma consoante.

A questão 4 aborda o cálculo de probabilidade por meio de retiradas sucessivas sem reposição. Nas duas turmas o resultado foi bastante insatisfatório, porém há uma justificativa para tal. O conteúdo previsto para a questão 4 é abordado apenas no terceiro ano, segundo a matriz curricular antiga, logo tal resultado já era esperado. Na turma A apenas um aluno respondeu corretamente a questão 4 e outro aluno cometeu um pequeno equívoco na hora de modelar o problema, como mostra a figuras 22 e 23. Na turma B não houve acertos.

Tabela 6 – Total de erros e acertos da questão 4 pré-teste

Pré-teste		Pré-teste	
Questão 4 - Turma A		Questão 4 - Turma B	
Acertos	1	Acertos	0
Erros	29	Erros	29

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 22 – Resolução correta apresentado pelo aluno da turma A

4. Em uma urna foram depositados 10 bolas em que cada uma recebeu uma etiqueta diferente com as letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Sabendo que duas bolas foram retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição, determine a probabilidade de sair uma vogal e uma consoante.

① consoante x consoante
 $7 \cdot 6 \rightarrow 42$

② vogal x vogal
 $3 \cdot 2 \rightarrow 6$

$\rightarrow 42 + 6 = 48 \text{ V} \times \text{V} \text{ ou } \text{C} \times \text{C}$

③ $10 \cdot 9 \rightarrow 90 \rightarrow \text{total}$

④ $90 - 48$
 $92 \rightarrow \text{V} \times \text{C}$

$R = \frac{42}{90} \cdot \frac{21}{45} \rightarrow \frac{7}{15}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 23 – Resolução com um pequeno equívoco por parte do aluno turma A

4. Em uma urna foram depositados 10 bolas em que cada uma recebeu uma etiqueta diferente com as letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Sabendo que duas bolas foram retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição, determine a probabilidade de sair uma vogal e uma consoante.

$\frac{3}{10} + \frac{7}{9}$

ou

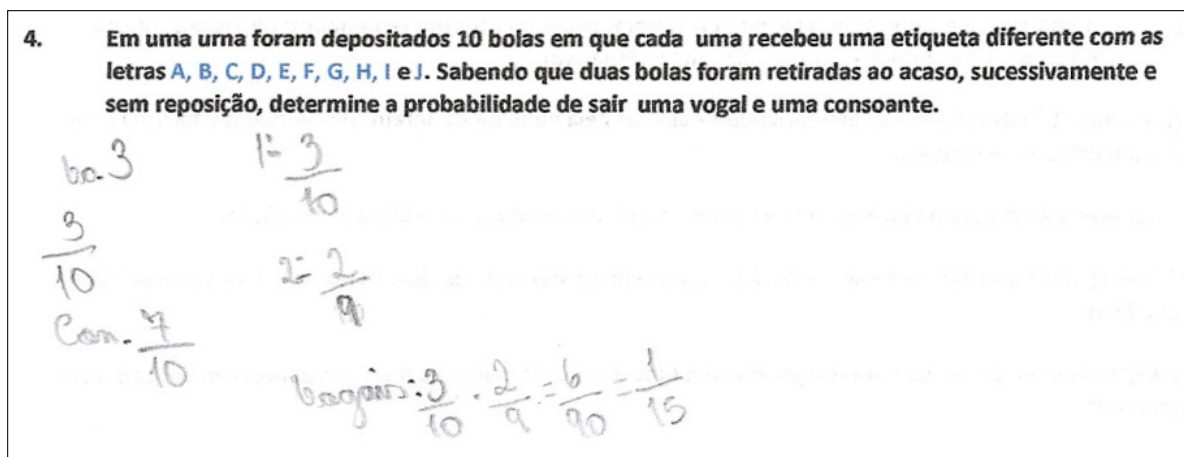
$\frac{7}{10} + \frac{3}{9}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 22 o aluno apresentou uma resolução bastante elaborada, calculando o todas as possibilidade de retirada de duas bolas, posteriormente retirando do total aquelas boas que não interessava ao problema, no caso de bolas com duas vogais e bolas com duas consoantes. Na figura 23 é possível chegar a conclusão que o aluno demonstrou conhecimento na tentativa de solução ao quebrar o problema em dois casos, todavia, um equívoco se ao somar as probabilidades, pois estávamos interessados na probabilidade da interseção de dois eventos independentes, logo haveria de ser uma multiplicação.

Na figura 24 o aluno apresentou uma solução que não condiz com o que foi pedido no problema, pois o aluno resolveu a questão como se fosse pedido a retirada de duas vogais sem reposição. Podemos atribuir este equívoco a uma falta de atenção na leitura do problema.

Figura 24 – Resolução equivocada de um aluno da turma B devido a falta de atenção



Fonte: Elaboração do próprio autor.

5. Em uma urna há 10 bolas idênticas quanto ao tamanho e ao material de fabricação; mas 4 delas são vermelhas e 6 são azuis. Retira-se uma primeira bola e, sem reposição, retira-se uma segunda bola. Qual a probabilidade de ambas serem azuis?

A questão 5 foi retirada do clube da OBMEP e segue a mesma ideia da questão 4, cálculo de probabilidade de eventos sucessivos. Novamente era esperado que os alunos apresentassem alguma dificuldades em resolvê-la. Apenas dois alunos da turma B apresentaram a solução correta, os demais, 27 alunos, erraram ou não responderam a questão. Na turma A não houve acertos, porém 3 alunos demonstraram algum conhecimento para resolver a questão, cometendo alguns erros pontuais.

Tabela 7 – Total de erros e acertos da questão 5 pré-teste

Pré-teste		Pré-teste	
Questão 5 - Turma A		Questão 5 - Turma B	
Acertos	0	Acertos	2
Erros	30	Erros	27

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 25 vemos uma solução parecida com a figura 22, porém seja possível realizar da mesma forma, no primeiro passo quando o aluno faz o total de bolas Vermelhas

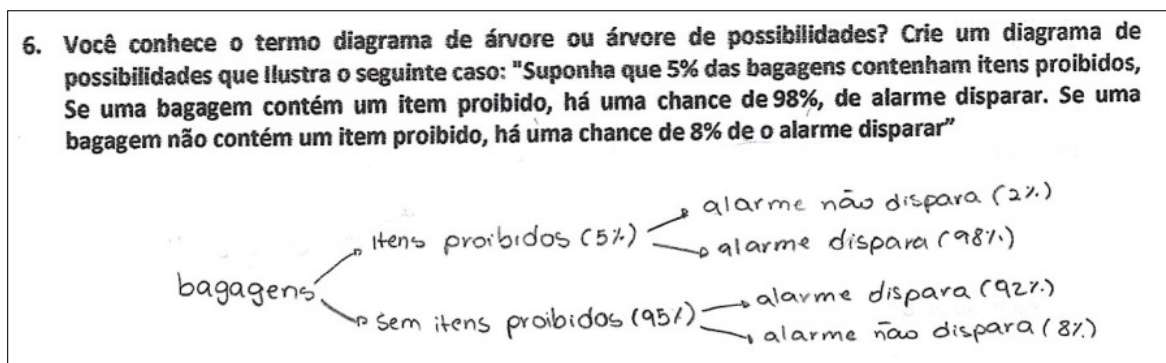
Na questão 6 os alunos deveriam testar seus conhecimentos sobre um dos métodos de resolução de problema conhecido como árvore das possibilidades ou diagrama de árvore. Em probabilidade, um diagrama de árvore pode ser usado para representar um espaço de probabilidade, auxiliando os alunos a visualizarem as ramificações do problema de forma mais clara e organizada. Além disso, esta questão traz uma aplicação prática de conceitos probabilísticos em um contexto realista, no qual os alunos podem relacionar-se facilmente, como a segurança em aeroportos e rodoviárias. A maioria dos alunos, tanto na turma A quanto na turma B, responderam que não conheciam ou não sabiam construir um diagrama de árvores para o problema proposto. Na turma A quatro alunos demonstraram saber construir o diagrama, enquanto na turma B apenas dois alunos construíram com sucesso um diagrama que representava a situação proposta na questão 6, incluindo as respectivas probabilidades nas ramificações das árvores.

Tabela 8 – Total de erros e acertos da questão 6 pré-teste

Pré-teste		Pré-teste	
Questão 6 - Turma A		Questão 6 - Turma B	
Acertos	4	Acertos	2
Erros	26	Erros	27

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 27 – Construção do diagrama da questão 6 apresentado por um aluno da turma A



Fonte: Elaboração do próprio autor.

7. Consideremos um dado que tenha em suas faces dois números 1, três números 3 e um número 5, de acordo com a planificação mostrada na próxima figura. Supondo que este dado seja balanceado e o lançamento não favoreça qualquer uma das faces, lançado o dado, quais as probabilidades de conseguirmos:

- (a) Evento A: Uma face com 1 ?
- (b) Evento B: Uma face com 3?
- (c) Evento C: Uma face com 5?
- (d) Podemos dizer que os eventos A, B e C são equiprováveis? Isto é, possuem mesma probabilidade de acontecer? Justifique.

Na sétima questão os alunos precisavam calcular a probabilidade dos itens a), b) e c) em seguida deduzir se esses eventos tinham a mesma probabilidade de ocorrência ou não. No geral o resultado não foi tão satisfatório, na turma A apenas doze alunos responderam corretamente os itens pedidos e 18 alunos responderam erradamente ou não responderam a questão. Na turma B 10 alunos responderam corretamente todos os itens contra 19 alunos que não souberam ou responderam errado os itens.

Tabela 9 – Total de erros e acertos da questão 7 pré-teste

Pré-teste		Pré-teste	
Questão 7 - Turma A		Questão 7 - Turma B	
Acertos	12	Acertos	10
Erros	18	Erros	19

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Dentre as justificativas mais comuns estão as que foram apresentadas na figura 28. Os alunos perceberam de forma objetiva que um dos lados apresentavam uma maior probabilidade de ocorrer, mesmo sem fazer nenhum cálculo.

Figura 28 – Exemplo de justificativa comum da questão 7 por um aluno da turma B

d) Podemos dizer que os eventos A, B e C são equiprováveis? Isto é, possuem mesma probabilidade de acontecer? Justifique

não. 6 números três têm mais chance de cair, pois : ocupa metade do dado

Fonte: Elaboração do próprio autor.

8. O gerente de uma loja de roupas montou uma banca de liquidação com mil camisetas de dois modelos, com preços abaixo do preço de custo. Lamentavelmente, entre essas camisetas, algumas estão com defeito de fábrica, conforme mostra a tabela a seguir.

CAMISETAS	BOAS	DEFEITUOSAS	TOTAL
Tipo1	518	82	600
Tipo2	315	85	400
TOTAL	833	167	1000

Uma camiseta é retirada da banca ao caso; com base nos dados da tabela, calcular:

- (a) A probabilidade de a camiseta retirada da banca ser do Tipo 1.
- (b) A probabilidade de ela ter defeito, sabendo que a camiseta retirada da banca é do Tipo 2.
- (c) A probabilidade de a camiseta retirada da banca ter defeito, dado que ela é do Tipo 1.

A oitava questão abordou um problema simples sobre probabilidade condicional. Na turma A quatro alunos responderam adequadamente os itens a), b) e c), outros 26 alunos desta turma responderam errado ou deixaram a questão em branco. Na turma B o resultado foi semelhante, com cinco alunos acertando todos os três itens e 24 alunos com respostas erradas ou em branco. O conteúdo de probabilidade condicional estava previsto na antiga matriz curricular na grade dos estudantes do terceiro ano, então resultados abaixo do esperado já era previsto para os alunos que responderam esta questão.

Tabela 10 – Total de erros e acertos da questão 8 pré-teste

Pré-teste		Pré-teste	
Questão 8 - Turma A		Questão 8 - Turma B	
Acertos	4	Acertos	5
Erros	26	Erros	24

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 29 é possível visualizarmos um dos erros frequentes dos alunos que responderam esta questão. No item a), b) e c) há erros tanto na quantidade de elementos do evento a pedido quanto na escolha do espaço amostral.

Figura 29 – Exemplo de erro comum na questão 8 feito por um aluno da turma B

Uma camiseta é retirada da banca ao caso; com base nos dados da tabela, calcular:

a) A probabilidade de a camiseta retirada da banca ser do Tipo 1.

$\frac{1}{518} = \text{Pois, tem 518 camisetas do tipo 1}$

b) A probabilidade de ela ter defeito, sabendo que a camiseta retirada da banca é do Tipo 2.

$\frac{1}{85} = \text{Pois 85 Camisetas Defeituosas são do tipo 2}$

c) A probabilidade de a camiseta retirada da banca ter defeito, dado que ela é do Tipo 1.

$\frac{1}{82} = \text{Pois, são 82 Camisetas Defeituosas do tipo 1}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A análise do pré-teste transcorreu de acordo com as expectativas, permitindo uma coleta de dados para uma comparação com o resultado do pós-teste, discutido na próxima seção, além de contribuir para ajustes pontuais no desenvolver da sequência didática.

4.2 Analisando o Pós-Teste

De forma análoga ao pré-teste, o pós-teste foi elaborado com oito questões seguindo um padrão de conteúdos parecidos com o teste da etapa anterior. Fizeram o pós-teste 31 alunos da turma A e 31 alunos da turma B, sendo sua aplicação realizada um mês após a finalização da quarta intervenção. De modo geral o resultado apresentou melhoras significativas em relação ao primeiro teste.

1. Classifique os itens abaixo em experimento aleatório ou experimento não aleatório (determinístico). JUSTIFIQUE cada resposta.

- (a) Contagem da quantidade de acidentes automobilísticos em um intervalo de 1 dia em uma determinada avenida.
- (b) O dia da semana em que você fará aniversário no ano de 2030

Na primeira questão os alunos deveriam responder se determinados eventos eram aleatórios ou determinísticos, bem como elaborar uma justificativa para tal resposta. Na turma A vinte e sete alunos apresentaram um raciocínio correto para a questão, outros quatro

alunos responderam errado ou não justificaram suas respostas. Na turma B vinte e quatro alunos acertaram a questão, apresentando as justificativas esperadas para a questão, e outros seis alunos não justificaram corretamente a questão, e apenas um aluno deixou em branco.

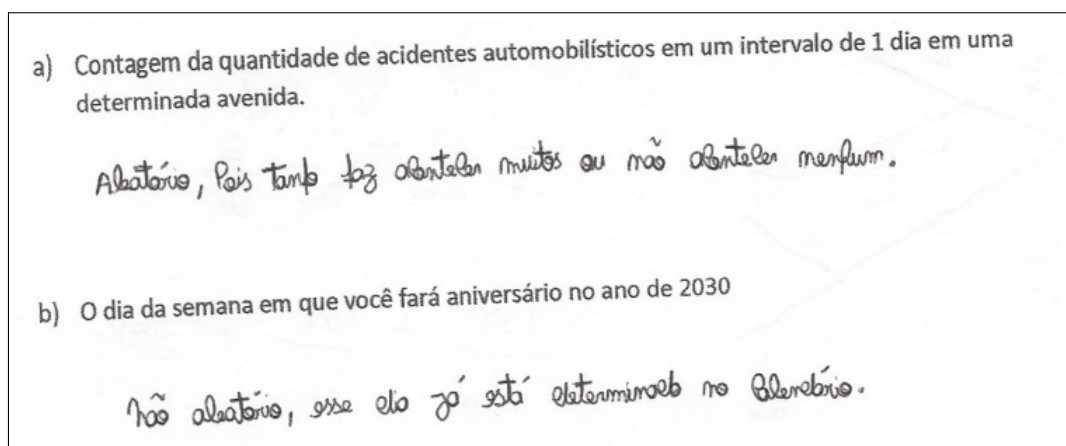
Tabela 11 – Total de erros e acertos da questão 1 pós-teste

Pós-teste		Pós-teste	
Questão 1 - Turma A		Questão 1 - Turma B	
Acertos	27	Acertos	24
Erros	4	Erros	7

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Em relação ao pré-teste houve uma melhora dos alunos em relação ao entendimento do conceito de evento aleatório. Ressaltamos que a habilidade identificar eventos aleatórios e determinísticos foi trabalhada na intervenção do Problema dos Doces. Os detalhes de como foi trabalhado esta habilidade dentro do Problema dos Doces podem ser vistos na seção 3.3. Na figura 30 temos um exemplo de justificativa em que o aluno utiliza o preceito da incerteza para justificar o evento do item a), e no item b), o aluno justifica que aquele evento já é determinado pelo calendário. Estas foram as justificativas mais comuns encontrada na correção da questão 1.

Figura 30 – Exemplo de justificativa para a questão 1 do pós-teste feito por um aluno da turma B



Fonte: Elaboração do próprio autor.

2. Uma moeda e um dado honesto são lançados ao mesmo tempo, em seguida é verificado qual face de cada uma delas ficou voltada para cima.

- (a) Escreva o espaço amostral desse experimento.
- (b) Determine o Evento A correspondente a obter um número maior ou igual a 5 no dado.
- (c) c) Determine o Evento B, de obter uma coroa na moeda e um número par no dado.

A questão 2 aborda a habilidade de identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios. Assim como no pré-teste os alunos deveriam descrever de forma organizada o que se pedia em cada item. Na turma A, vinte alunos responderam a segunda questão corretamente contra onze que erraram a questão. Na turma B vinte e sete alunos responderam a questão corretamente, contra quatro que responderam erradamente.

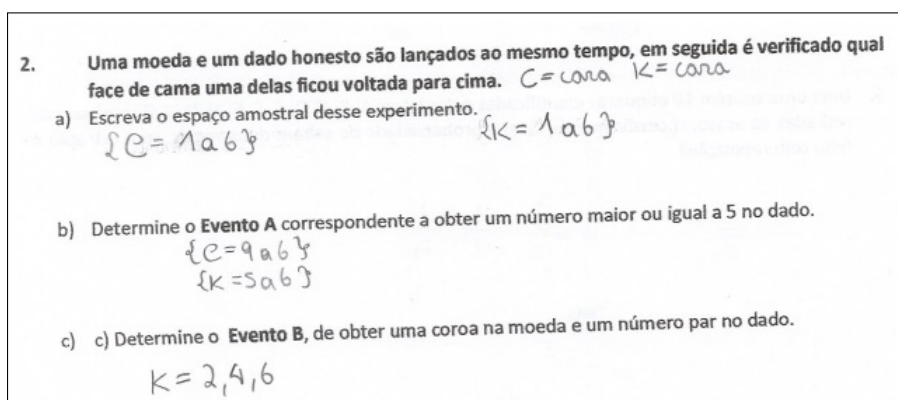
Tabela 12 – Total de erros e acertos da questão 2 pós-teste

Pós-teste		Pós-teste	
Questão 2 - Turma A		Questão 2 - Turma B	
Acertos	20	Acertos	27
Erros	11	Erros	4

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Dentre os alunos que responderam corretamente, alguns não utilizaram uma notação convencional para representar conjuntos, como o uso de chaves por exemplo, mas utilizando uma notação própria, como mostra as figuras 31 e 32:

Figura 31 – Exemplo de notação própria para representar o espaço amostral



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 32 – Exemplo de notação própria para representar o espaço amostral

2. Uma moeda e um dado honesto são lançados ao mesmo tempo, em seguida é verificado qual face de cada uma delas ficou voltada para cima.

a) Escreva o espaço amostral desse experimento.
 Cara: 1, 2, 3, 4, 5, 6
 Coroa: 1, 2, 3, 4, 5, 6

b) Determine o **Evento A** correspondente a obter um número maior ou igual a 5 no dado.
 Cara: 5 e 6
 Coroa: 5 e 6

c) Determine o **Evento B**, de obter uma coroa na moeda e um número par no dado.
 Coroa: 2, 4 e 6

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Reforçamos que este tipo de notação não é adequado matematicamente para representar o conjunto do espaço amostral de um determinado evento. Na finalização da intervenção do problema do Grão-Duque da Toscana vimos maneiras de representação do espaço amostral, enfatizando a maneira de utilizar chaves como representação de conjuntos. Contudo, é possível fazer uma conexão entre uma representação formal e maneira que eles responderam.

3. Em uma gincana, os participantes foram numerados de 1 até 25, conforme a ordem de inscrição. Um participante será sorteado para iniciar as provas da gincana. Para fazer esse sorteio, o número de cada participante foi escrito em pedaços de papel idênticos, que foram colocados em uma caixa para que um deles fosse retirado aleatoriamente. Qual é a probabilidade de ser sorteado um participante de número:

- (a) Par ?
- (b) Múltiplo de 5?
- (c) Par e múltiplo de 5?
- (d) Par ou múltiplo de 5?

Na terceira questão, cada alternativa pede a probabilidade de um evento específico ocorrer. Isso permite que os alunos pratiquem o cálculo de probabilidades simples, utilizando a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos no espaço amostral. Similar a proposta do pré-teste, as alternativas a) e b) seguem com a mesma proposta de averiguar o cálculo da probabilidade de um evento simples. As alternativas c) e d) envolvem eventos compostos, representando a interseção (evento par e múltiplo de 5) e a união (evento par ou múltiplo de 5) de condições. Na turma A, vinte e seis tiveram um desempenho desejável acertando pelo menos três dos quatro itens em questão, contra cinco

alunos que erraram duas ou mais questões. Na turma B vinte e três alunos tiveram um desempenho desejável na questão 3, contra oito alunos que não responderam ou erraram pelo menos duas questões.

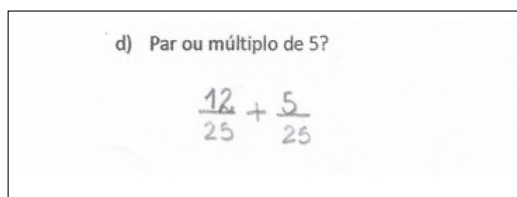
Tabela 13 – Total de erros e acertos da questão 3 pós-teste

Pós-teste		Pós-teste	
Questão 3 - Turma A		Questão 3 - Turma B	
Acertos	20	Acertos	27
Erros	11	Erros	4

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Dentre os alunos com desempenho desejável neste item, destaco que o item d) foi o item com menor taxa de acerto. A totalidade dos alunos que erraram o item d) seguiram o mesmo raciocínio das figuras 33 e 34.

Figura 33 – Exemplo de erro comum para o item d) da questão 3 do pós-teste

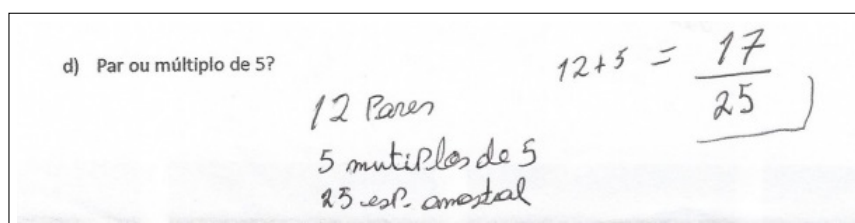


d) Par ou múltiplo de 5?

$$\frac{12}{25} + \frac{5}{25}$$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 34 – Exemplo de erro comum para o item d) da questão 3 do pós-teste



d) Par ou múltiplo de 5?

12 Pares
5 múltiplos de 5
25 esp. amostral

$$12 + 5 = \frac{17}{25}$$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nas figuras 33 e 34 os alunos cometeram um equívoco na interpretação da alternativa d) da questão. A alternativa d) afirma "par ou múltiplo de 5". Na tentativa de calcular a probabilidade desse evento, alguns alunos somaram as probabilidades de ser par $\frac{12}{25}$ com a probabilidade de ser múltiplo de 5 $\frac{5}{25}$. No entanto, esse método está incorreto porque a soma dessas probabilidades incluiu duas vezes os participantes que são tanto pares quanto múltiplos de 5. Para evitar essa duplicação, é necessário subtrair a probabilidade de ser simultaneamente par e múltiplo de 5 (interseção dos eventos) $\frac{2}{25}$ que consta no alternativa c). Acredito que este resultado seja devido a pouca ênfase na interpretação

correta da probabilidade da união de eventos. Durante a exposição da terceira intervenção, sobre o método do diagrama de árvores, foram abordados tópicos de interseção e união de eventos. É possível não ter ficado claro que a probabilidade da união inclui a soma das probabilidades dos eventos individuais, mas é necessário subtrair a probabilidade da interseção, caso haja, para evitar as redundâncias encontradas na correção do pós-teste.

4. Em uma festa infantil, foram misturados, em uma caixa, 12 brindes para meninos e 15 para meninas. Dois brindes são retirados, sucessivamente e sem reposição, da caixa. Qual é a probabilidade de que um seja para menino e outro para menina?

A questão 4 do pós-teste aborda o cálculo de probabilidade por meio de retiradas sucessivas e sem reposição. Podemos também olhar o conteúdo desta questão como um problema de probabilidade condicional, já que estaríamos interessados na probabilidade de retirar um brinde para menino após já ter sido retirado um brinde para menina, ou vice-versa. Na turma A, quinze alunos apresentaram no cálculo uma fundamentação adequada ao problema, enquanto outros dezesseis não erraram, deixaram em branco ou não apresentaram uma solução final para o problema. Na turma B treze alunos apresentaram uma solução adequada ao problema e dezoito alunos não responderam a questão adequadamente.

Tabela 14 – Total de erros e acertos da questão 4 pós-teste

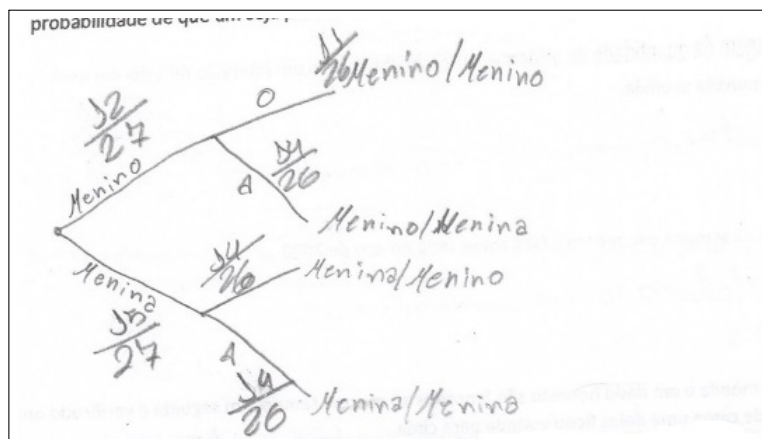
Pós-teste		Pós-teste	
Questão 4 - Turma A		Questão 4 - Turma B	
Acertos	15	Acertos	13
Erros	16	Erros	18

Fonte: Elaboração do próprio autor.

A maioria dos alunos em ambas as turmas optaram por resolver a questão utilizando o método do diagrama de árvore trabalhado na terceira intervenção. Embora a motivação inicial da elaboração deste problema não fosse utilizar a árvore de possibilidades, este fato é algo bastante positivo, pois mostra que os alunos conseguem associar o que é pedido no problema com a utilização do método.

Na figura 35 percebemos uma solução que foi considerada errada em várias correções. O motivo foi que o aluno não concluiu o raciocínio, apenas elaborou o diagrama e não extraiu nenhuma informação que viesse a resolver o problema.

Figura 35 – Questão 4 sem a finalização do problema



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Outro erro comum, mostrado na figura 36, onde o aluno resolveu apenas a probabilidade de sortear menino na primeira retirada e menina na segunda, sem reposição, porém esqueceu de calcular a probabilidade de retirar uma menina no primeiro sorteio e um menino no segundo sorteio.

Figura 36 – Erro encontrado na questão 4

O cálculo mostra a probabilidade de se obter um menino na primeira retirada e uma menina na segunda, sem reposição. O aluno calculou $\frac{12}{27} \cdot \frac{15}{26} = \frac{180}{702}$, simplificando para $\frac{10}{39}$. No entanto, este cálculo ignora as outras duas possibilidades: menina no primeiro e menino no segundo, e menina no primeiro e menina no segundo.

Fonte: Elaboração do próprio autor.

5. Uma urna contém 10 etiquetas identificadas pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Duas delas são retiradas ao acaso, sucessivamente. Qual a probabilidade de saírem duas vogais, se a extração é feita com reposição?

A questão 5 foi semelhante a questão anterior, porém a diferença é que há reposição dos elementos após a primeira retirada. No contexto da probabilidade, a reposição significa que, após cada extração, a etiqueta é devolvida à urna antes da próxima retirada. Isso influencia diretamente as probabilidades dos eventos subsequentes. Ao analisar a retirada de duas vogais sucessivas, os alunos são desafiados a compreender a interação entre eventos independentes e a aplicar a multiplicação de probabilidades. Na turma A tivemos dezessete acertos contra 14 erros, nesta turma os alunos que acertaram a questão optaram por calcular diretamente a probabilidade, multiplicando diretamente a quantidade de vogal na primeira retirada com a probabilidade de retirada da segunda vogal, observando a reposição. Na turma B tivemos um número de acertos menor, com treze acertos e dezoito questões erradas.

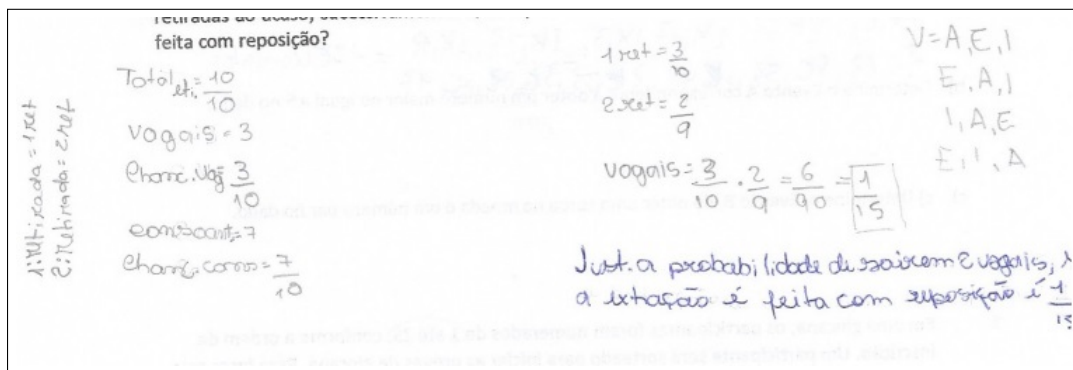
Tabela 15 – Total de erros e acertos da questão 5 pós-teste

Pós-teste		Pós-teste	
Questão 5 - Turma A		Questão 5 - Turma B	
Acertos	17	Acertos	13
Erros	14	Erros	18

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nesta turma, por algum motivo, calcularam utilizando o diagrama, porém, um erro frequente foi de considerar a retirada sem reposição. Atribuo este erro a falta de atenção na leitura do comando do problema como mostra a figura 37.

Figura 37 – Erro encontrado na questão 5



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 38 é mostrado uma solução bastante diferenciada em relação as demais. Nesta solução, o aluno optou por transcrever todo o espaço amostral do problema. Ao listar todos os elementos do espaço amostral, o aluno pode visualizar claramente cada combinação e identificar as que atendem à condição de saírem duas vogais sucessivas. Essa abordagem é especialmente útil quando o espaço amostral é pequeno e a análise manual é viável. No entanto, é importante observar que, em situações com um espaço amostral muito grande, como o espaço amostral do problema em questão, essa abordagem pode se tornar trabalhoso ou impraticável. Em casos mais complexos, entender padrões, utilizar fórmulas e aplicar conceitos de combinações e permutações pode ser mais eficiente.

Figura 38 – Solução listando todo o espaço amostral da questão 5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ
B	BA	BB	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	BJ
C	CA	CB	CC	CD	CE	CF	CG	CH	CI	CJ
D	DA	DB	DC	DD	DE	DF	DG	DH	DI	DJ
E	EA	EB	EC	ED	EE	EF	EG	EH	EI	EJ
F	FA	FB	FC	FD	FE	FF	FG	FH	FI	FJ
G	GA	GB	GC	GD	GE	GF	GG	GH	GI	GJ
H	HA	HB	HC	HD	HE	HF	HG	HH	HI	HJ
I	IA	IB	IC	ID	IE	IF	IG	IH	II	IJ
J	JA	JB	JC	JD	JE	JF	JG	JH	JI	JJ

100

Fonte: Elaboração do próprio autor.

6. Crie uma árvore de possibilidades que ilustra o seguinte caso: "Suponha que 5% das bagagens contêm itens proibidos, Se uma bagagem contém um item proibido, há uma chance de 98%, de alarme disparar. Se uma bagagem não contém um item proibido, há uma chance de 8% de o alarme disparar"

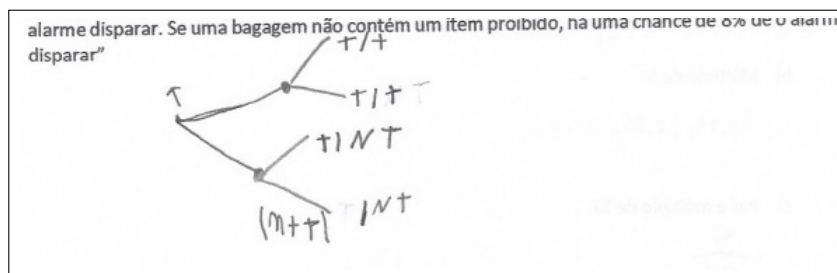
Novamente, foi proposta a questão da construção de uma árvore de possibilidades a partir das informações citadas no texto. Ao criar uma árvore de possibilidades, os alunos são desafiados a visualizar e organizar as diferentes ramificações do problema, facilitando a compreensão das probabilidades condicionais envolvidas. A questão também introduz a ideia de eventos independentes e condicionais, pois as probabilidades de alarme disparar dependem da presença ou ausência de itens proibidos. Para resumir, houve um aumento significativo de acertos em relação ao pré-teste, o que era esperado, pois os alunos participaram de uma intervenção, chamada de O Problema do Falso-Positivo, que tinha como um dos objetivos estudar o método das árvores de possibilidades. Na turma A dezenove alunos, construíram um diagrama com as ramificações e as respectivas probabilidades em cada uma delas, e doze alunos deixaram e branco ou não colocaram as informações completas no diagrama. Na turma B dezessete alunos construíram um diagrama de possibilidades adequado contra quatorze alunos que não responderam adequadamente.

Tabela 16 – Total de erros e acertos da questão 6 pós-teste

Pós-teste		Pós-teste	
Questão 6 - Turma A		Questão 6 - Turma B	
Acertos	19	Acertos	17
Erros	12	Erros	14

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 39 – Solução incorreta da questão 6



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 39 vemos uma solução incorreta do problema pois não apresenta informações claras do que se trata cada galho, nem as respectivas probabilidades das mesmas.

7. Responda os seguintes itens:

- Qual é a probabilidade de que a soma dos resultados obtidos ao se lançar dois dados equilibrados e idênticos seja 3?
- Qual é a probabilidade de que a soma dos resultados obtidos ao se lançar dois dados equilibrados e idênticos seja 7?
- Podemos afirmar que o evento "lançar dois dados equilibrados e idênticos e somar os pontos da duas faces voltadas para cima" seja um espaço equiprovável? Justifique usando os argumentos dos itens (a) e (b).

A questão 7 tem relação direta com a intervenção chamada de Problema do Grão-Duque da Toscana, nela os alunos são desafiados a encontrar uma solução encontrar as probabilidades pedidas nos itens a) e b), seja explorando o espaço amostral ou pela regra da adição. O item c) adiciona uma camada de complexidade, introduzindo a discussão sobre espaços equiprováveis. Ao avaliar se o evento “lançar dois dados equilibrados e idênticos e somar os pontos das duas faces voltadas para cima” é equiprovável, os alunos são desafiados a considerar as probabilidades calculadas nos itens (a) e (b). A justificativa exigida estimula a reflexão sobre a igualdade de probabilidades associadas a diferentes resultados, uma habilidade crucial no entendimento mais profundo da probabilidade. Em resumo, na turma A dezesseis alunos acertaram a questão contra quinze que erraram ou deixaram em branco. Na turma B quinze alunos acertaram a questão contra dezesseis que erraram ou deixaram em branco.

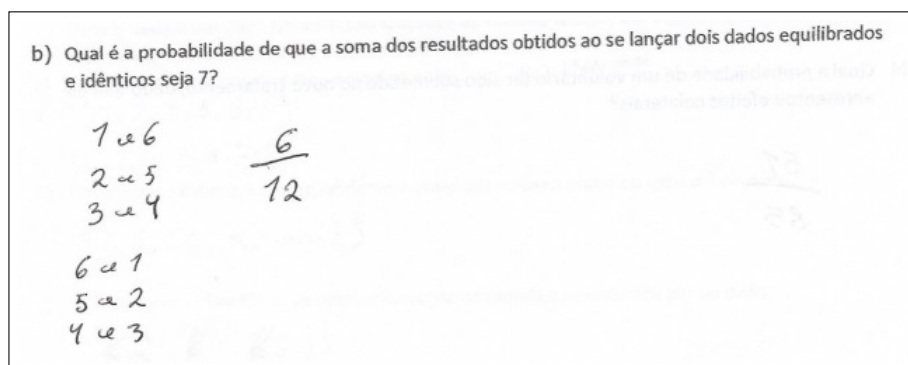
Tabela 17 – Total de erros e acertos da questão 7 pós-teste

Pós-teste		Pós-teste	
Questão 7 - Turma A		Questão 7 - Turma B	
Acertos	16	Acertos	15
Erros	15	Erros	16

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Um dos erros que chamaram atenção na turma B foi que muitos usaram o espaço amostral do lançamento de dois dados com 12 elementos em vez de 36 elementos. Acredito que este erro seja um equívoco em pensar que o total de elementos do espaço amostral seria $6 + 6 = 12$, em vez de $6 \cdot 6 = 36$, como mostra a figura 40.

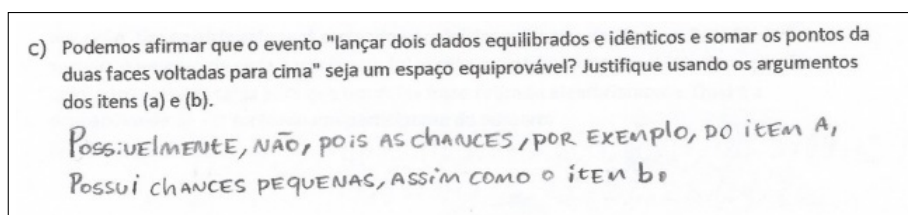
Figura 40 – Solução incorreta da questão 6



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 41 vemos um erro peculiar na justificativa do item c). Embora o aluno tenha acertado os itens a) e b) perceba que a ideia de eventos equiprováveis não ficou muito bem fixada pelo aluno, pois o aluno atribuiu a baixa probabilidade do item a) ou b), $\frac{2}{36}$ e $\frac{6}{36}$ respectivamente, ao fato de não serem equiprováveis. Talvez o aluno tenha se equivocado com outra palavra, por exemplo o conceito de improvável, em vez de equiprovável.

Figura 41 – Solução incorreta do item c) da questão 7



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Um dos métodos bastante utilizado pelo alunos é mostrado na figura 42. Os alunos

construíram uma tabela para facilitar a visualização do espaço amostral e dos eventos pretendidos.

Figura 42 – Exemplo de resolução do item a) e b) da questão 7

e idênticos seja 3?

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\frac{2}{36}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

8. Para verificar a redução de efeitos colaterais de um novo tratamento, pesquisadores ministraram a dois grupos distintos de voluntários o tratamento convencional e o novo tratamento. Os resultados obtidos estão descritos na tabela a seguir:

	Apresentou Efeitos Colaterais?	
	SIM	NÃO
TRATAMENTO CONVENCIONAL	54	41
NOVO TRATAMENTO	51	34

- (a) Qual a probabilidade de um voluntário, escolhido aleatoriamente dentre os participantes dessa pesquisa, ter apresentado efeitos colaterais?
- (b) Qual a probabilidade de um voluntário ter sido submetido ao novo tratamento, dado que ele apresentou efeitos colaterais? (a) e (b).

Assim como no pré-teste, a última questão é relacionado ao cálculo da probabilidade condicional. No item (a), os alunos são desafiados a calcular a probabilidade simples, porém requer um certo nível de interpretação. Neste item é pedido a probabilidade do participante escolhido ao acaso apresente efeitos colaterais. Isso envolve a compreensão da definição básica de probabilidade como o número de casos favoráveis dividido pelo número total de casos possíveis. No item b), a questão explora probabilidade condicional, introduzindo a ideia de eventos dependentes. Os alunos precisam ter conhecimento de probabilidade condicional, seja utilizando fórmula ou simplesmente adequando corretamente o espaço amostral ao problema. Esta questão apresentou um elevado número de acertos. Na turma A quinze alunos acertaram as duas questões, nove acertaram pelo menos um dos itens e apenas sete alunos erradas os dois itens. Na turma B, onze alunos acertaram as duas

alternativas, enquanto doze alunos acertaram parcialmente e oito alunos erraram ou não responderam o que foi pedido.

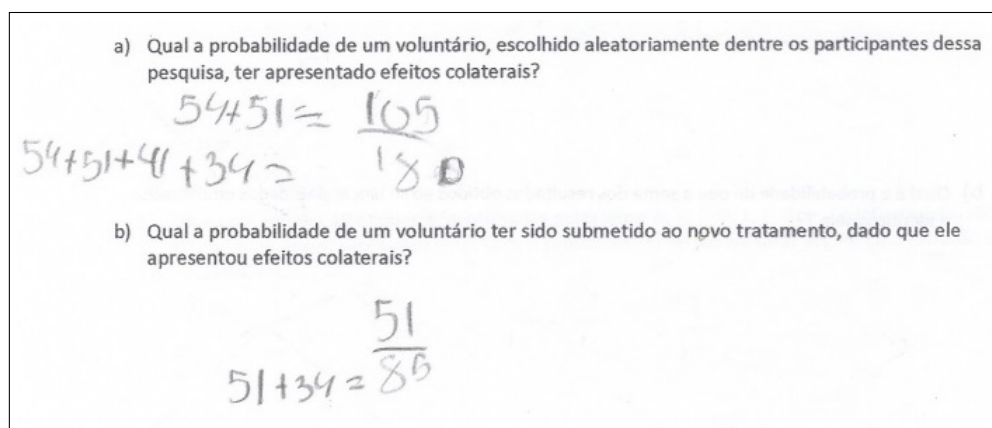
Tabela 18 – Total de erros e acertos da questão 8 pós-teste

Pós-teste		Pós-teste	
Questão 8 - Turma A		Questão 8 - Turma B	
Acertou integralmente	15	Acertou integralmente	11
Acertou parcialmente	9	Acertou parcialmente	12
Errou	7	Errou	8

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 43 é possível ver que apesar do aluno ter acertado a alternativa a), foi cometido um equívoco na escolha do espaço amostral do item b).

Figura 43 – Exemplo de erro encontrado na correção da questão 8 do pós-teste



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Em suma, o comparativo entre o pré-teste e do pós-teste revela avanços significativos, indicando melhorias tangíveis no processo de ensino de probabilidade. Esse progresso destaca o impacto positivo das estratégias pedagógicas implementadas ao longo da sequência didática. Na próxima seção aprofundaremos ainda mais o comparativo referente a estes dois instrumentos diagnósticos.

4.3 Considerações sobre a análise dos resultados

Ao longo do processo educacional, é crucial avaliar não apenas o desempenho quantitativo dos alunos, mas também compreender a profundidade e qualidade de sua aprendizagem. Conforme apontado por Triviños (2009), a pesquisa qualitativa é uma abordagem que procura obter dados significativos relacionados à percepção dentro do

contexto analisado, investigando fenômenos e resultados. Seu enfoque está na compreensão dos comportamentos individuais, visando entender as ações dos sujeitos, analisando e registrando suas formas de aprendizagem. A pesquisa qualitativa observa o desenvolvimento e o nível de conhecimento de cada estudante. Em termos de números é bastante simples verificar a melhoria dos resultados do pós-teste em comparação com o pré-teste, porém, precisamos fazer uma análise mais profunda sobre a real contribuição deste trabalho com a aprendizagem dos alunos, explorando não apenas se eles acertaram ou erraram, mas também as estratégias utilizadas, os raciocínios empregados, a clareza nas justificativas das respostas e a empolgação dos alunos em participar das etapas de ensino-aprendizagem.

Primeiramente, é importante lembrarmos que alguns conteúdos, principalmente os introdutórios, já foram trabalhados em etapas anteriores durante o ensino fundamental e médio. A habilidade relacionada a compreensão de eventos aleatórios e a habilidade de identificar o espaço amostral de um evento são naturalmente visto na parte introdutória de probabilidade, sendo este último imprescindível para um bom desenvolvimento na aprendizagem de probabilidade. O pré-teste nos mostrou que estes dois conteúdos fundamentais não estavam, naquele momento, em níveis adequados de aprendizagem. Um dos fatores que podem ter contribuído para este resultado nestas duas habilidades podem ser relacionados com uma falta de revisão e reforço contínuo desses conceitos ao longo do tempo. [Taille et al. \(1997\)](#) citam que há erros que vêm do esquecimento, que vêm de dificuldades e outros que decorrem da ignorância do tema. Assim, é aceitável que os alunos tenham esquecido parte do conteúdo ou não internalizado completamente o material abordado anteriormente, porém durante a intervenção parte dos alunos revelaram não se lembrarem de absolutamente nada do tema, o que nos leva a um problema na abordagem didática utilizada anteriormente. A maneira como o conteúdo foi apresentado pode ter influenciado a compreensão dos alunos. Se a abordagem didática não foi eficaz em tornar os conceitos claros e acessíveis, isso pode resultar em um menor desempenho, como verificado no pré-teste. Diante disso, foi crucial revisitar esses conceitos durante as intervenções, proporcionando aos alunos a oportunidade de reforçar seus conhecimentos e preencher eventuais lacunas identificadas. A compreensão sólida desses fundamentos é essencial para construir uma base robusta e promover um avanço consistente nas complexidades que serão abordadas no decorrer do conteúdo.

A habilidade de calcular a probabilidade de um evento simples demonstrou uma melhoria em relação ao pré-teste, mais que o dobro dos alunos acertaram este tipo de questão no pós-teste. As habilidades de calcular a probabilidade da interseção de eventos, probabilidade da união de eventos e da probabilidade condicional foi considerada novidade para a grande parte dos alunos, visto que estes conteúdos fazem parte da atual grade curricular que eles estavam cursando. Assim, uma comparação do pré-teste com o pós-teste não é de todo modo justo, pois já era esperado uma melhoria nestas habilidades. Dentre estas três habilidades, o cálculo da probabilidade condicional obteve um grau de

compreensão maior entre os alunos, seguidos do cálculo da probabilidade da interseção de eventos e, por último, o cálculo da probabilidade da união de eventos. Neste último, muitos alunos demonstraram ignorar o fato de que a união de evento nem sempre basta somar as probabilidades, é preciso verificar se há interseção entre os eventos para dar prosseguimento ao cálculo. Por fim, sobre a habilidade de resolver problemas utilizando o método das árvores de possibilidade, esta se demonstrou eficaz pois os alunos tenderam a utilizá-la em questões que não havia a necessidade de utilização da mesma, como foi o caso das questões 4 e 5 do pós-teste, porém é importante destacar que houve muitas questões sem a devida conclusão do problema, ou seja apenas a armação da árvore, bem como falta de organização dos dados na árvore. A tabela abaixo mostra a evolução dos acertos no pré-teste e pós-teste, considerando todas as turmas em conjunto.

Tabela 19 – Evolução dos acertos das questões do pré-teste e pós-teste

	Pré-teste	Pós-teste
Questão 1	44%	82%
Questão 2	17%	75%
Questão 3	35%	75%
Questão 4	1%	45%
Questão 5	3%	48%
Questão 6	10%	58%
Questão 7	37%	82%
Questão 8	15%	75%

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para concluir, ao considerar a evolução dos acertos no pré e pós-teste, é evidente o impacto positivo das intervenções pedagógicas na aprendizagem dos alunos, ressaltando a importância contínua de ajustes e aprimoramentos na abordagem didática para promover um aprendizado mais eficaz e abrangente.

Conclusão

Abordar problemas contraintuitivos em sala de aula mostrou-se uma poderosa ferramenta didática para a aprendizagem do conteúdo de probabilidade. Embora, problemas contraintuitivos desafiem a intuição dos alunos, os mesmos não demonstraram desinteresse ou descrença quando confrontados com resposta fora do senso comum. Durante a elaboração da sequência, havia um sentimento de que os alunos pudessem resistir a mudar suas perspectivas iniciais, porém, estes problemas estimularam questionamentos e a discussão do conteúdo em sala de aula, levando os alunos a compartilharem perspectivas diferentes e debaterem sobre as soluções propostas.

A escolha dos problemas também foi um ponto chave para a boa fluidez da sequência didática. Os problemas contraintuitivos utilizados na sequência foram de fácil compreensão para os alunos, afinal problemas muito difíceis, além de não estarem alinhados adequadamente com os objetivos do currículo da educação básica, poderiam levar à frustração excessiva dos alunos, especialmente se eles não têm as habilidades necessárias para abordar o desafio. Isso pode afetar negativamente a confiança dos alunos em suas habilidades matemáticas.

Um dos pontos fortes observados com a aplicação da sequência foi que os alunos aprendem a analisar, avaliar e revisar suas próprias ideias, promovendo uma abordagem mais reflexiva do conteúdo trabalhado e gerando impacto positivo na vida do estudante, tendo em vista que as técnicas aprendidas podem ser utilizadas em outros campos da matemática, bem como em outras matérias. Trabalhar problemas com certa referência a situações reais e aplicando conceitos probabilísticos em situações práticas, fortaleceu a relevância da aprendizagem para suas vidas cotidianas. Outro fator que contribuiu para o bom andamento da sequência didática foi a aplicação do pré-teste como instrumento comparativo e diagnóstico. Como instrumento comparativo, junto com o pós-teste, nos deu uma margem da eficácia da sequência didática. Como instrumento diagnóstica, nos ofereceu dados valiosos sobre o nível de compreensão dos alunos, habilidades individuais e as lacunas no conhecimento. Identificar essas lacunas possibilitou uma abordagem mais personalizada das intervenções, buscando atender às necessidades coletivas dos alunos.

A constatação de que problemas contraintuitivos desencadearam discussões valiosas e incentivaram uma reflexão crítica entre os alunos reforçou nossa convicção de que métodos pedagógicos atrativos têm o potencial de transformar positivamente o ambiente educacional. A condução deste trabalho também permitiu ao mestrando aprimorar habilidades em planejamento e implementação de estratégias didáticas, bem como a análise de dados educacionais. Concluimos então que a execução desta pesquisa e a implementação desta

sequência didática foram fundamentais para o meu desenvolvimento como mestrando e, olhando para o futuro, o mestrando vislumbra a aplicação e adaptação contínua desses métodos em minha prática como educador.

Por fim, como sugestão de trabalhos subsequentes, propomos a criação de um catálogo abrangente de problemas contraintuitivos voltados especificamente para o ensino de probabilidade. Este catálogo seria uma ferramenta valiosa para educadores, oferecendo uma variedade de cenários desafiadores que estimulam os alunos a pensarem de maneiras novas e criativas. Além disso, o catálogo poderia ser organizado de forma a atender a diferentes níveis de habilidade e idade, tornando-se útil tanto para estudantes do ensino fundamental quanto para aqueles do ensino médio e superior. Com isso, esperamos que esse catálogo contribua significativamente para aprimorar a qualidade do ensino de probabilidade e estimular o interesse dos alunos por essa área fundamental da matemática.

Referências

- ALLEVATO, N. S.; ONUCHIC, L. R. Ensinar matemática na sala de aula através da resolução de problemas¹. *Boletim GEPEM, Rio de Janeiro*, v. 33, n. 55, p. 133–156, 2009.
- ARA, A. B. *O ensino de Estatística e a busca do equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006.
- BRASIL, M. Secretaria de educação fundamental. *Brasília: MEC/sef*, v. 1998, p. 156, 1997.
- BRASIL, M. Base nacional comum curricular. *Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica*, 2017.
- COUTINHO, C. d. Q. *Silva. Introdução ao conceito de Probabilidade por uma visão frequentista: estudo epistemológico e didático*. 1994. 151f. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Matemática)–Faculdade de Ciências Exatas e ... , 1994.
- CROCKETT, Z. The time everyone “corrected” the world’s smartest woman. *Priceonomics. February*, v. 19, 2015.
- CURY, H. N.; BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. A análise de erros como metodologia de investigação. *ProfMat2009*, 2009.
- GIL, A. C. *Didática do ensino superior*. [S.l.]: Atlas, 2015.
- GORROOCHURN, P. *Classic problems of probability*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016. 5 p.
- GUIMARÃES, Y. A.; GIORDAN, M. Instrumento para construção e validação de sequências didáticas em um curso a distância de formação continuada de professores. *Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*, v. 8, 2011.
- HOMBAS, V. Generalizing galileo’s passé-dix game. *International journal of mathematical education in science and technology*, Taylor & Francis, v. 43, n. 5, p. 643–646, 2012.
- HUETE, J. S.; BRAVO, J. F. *O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. [S.l.]: Artmed Editora, 2006.
- KNUDTZON, S. H. *Pitfalls and surprises in probability: The battle against counterintuition*. 2019.
- KOLMOGOROV, A. N.; BHARUCHA-REID, A. *Foundations of the theory of probability: Second English Edition*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2018.
- KREMER, W. Do doctors understand test results. *BBC World Service*, 2014.
- LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cadernos Cedes, SciELO Brasil*, v. 28, p. 57–73, 2008.
- MAGALHÃES, M. Probabilidade e variáveis aleatórias.[sl]: Edusp, 2006. *Citado nas*, 2006.

- MAISTROV, L.; KOTZ, S. *Probability Theory: A Historical Sketch*. Elsevier Science, 2014. (Probability and mathematical statistics). ISBN 9781483218632. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=2ZbiBQAAQBAJ>>.
- MENEGHETTI, R. C. G.; BATISTELA, R. de F.; BICUDO, M. A. V. A pesquisa sobre o ensino de probabilidade e estatística no brasil: um exercício de metacompreensão. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 24, n. 40, p. 811–833, 2011.
- MICALLEF, L.; DRAGICEVIC, P.; FEKETE, J.-D. Assessing the effect of visualizations on bayesian reasoning through crowdsourcing. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, IEEE, v. 18, n. 12, p. 2536–2545, 2012.
- OBMEP-IMPA. *Sala de Estudo: Probabilidade – Sala 4*. 2024. <<https://http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudos-probabilidade-sala-4/>> [Acessado: (10/01/2024)].
- PERNAMBUCO. *Currículo de Pernambuco: Ensino Fundamental*. 2021. 381 p.
- POLYA, G. A arte de resolver problemas. *Rio de Janeiro: interciência*, v. 2, p. 12, 1978.
- POZO, J. I. A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender/juan ignacio pozo, mariadelpuy perez echeverría, jesús domínguez castillo, miguel ángel gómez creso, yolanda postigo angón; trad. *Beatriz Affonso Neves–Porto Alegre: ArtMed*, 1998.
- SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. *New directions for elementary school mathematics*, v. 31, p. 42, 1989.
- SELVIN, S. Problem in probability. *American Statistician*, Amer Statistical Assoc 1429 Duke ST, Alexandria, VA 22314, v. 29, n. 1, p. 67–67, 1975.
- SHALABH; HEUMANN, C.; KÜCHENHOFF, H. Coin tossing and spinning–useful classroom experiments for teaching statistics. *Recent Advances in Linear Models and Related Areas: Essays in Honour of Helge Toutenburg*, Springer, p. 417–426, 2008.
- SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. Metodologia da resolução de problemas. *24^a Reunião ANPEd*, 2001.
- SOUZA, J. *Multiversos-Matemática: estatística e probabilidade*. [S.l.]: São Paulo: Editora FTD, 2020.
- TAILLE, Y. J. J. M. L. et al. O erro na perspectiva piagetiana. *Erro e fracasso na escola: alternativas teóricas e práticas*, 1997.
- TIERNEY, J. Behind monty halls doors: Puzzle, debate and answer. *New York Times*, v. 21, p. 1, 1991.
- TRIVIÑOS, A. N. S. Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação. são paulo: Atlas, 1987. *Outros números do Informe Rural ETENE: ANO*, v. 3, p. 25, 2009.
- VIANNA, C. R. Resolução de problemas. *Temas em educação I: Livro das jornadas*, p. 401–410, 2002.
- ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. [S.l.]: Penso Editora, 2015.