



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Danilo Campelo Albuquerque

**TÓPICOS AVANÇADOS EM BINÔMIOS DE NEWTON:
EXPLORANDO POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS COM O
SAGEMATH**

RECIFE
2024

Danilo Campelo Albuquerque

TÓPICOS AVANÇADOS EM BINÔMIOS DE NEWTON: EXPLORANDO POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS COM O SAGEMATH

Dissertação de mestrado apresentada ao
Departamento de Matemática da Uni-
versidade Federal Rural de Pernambuco
como requisito parcial para obtenção do
título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Ricardo Machado

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Auxiliadora Cunha – CRB-4 1134

A345t Albuquerque, Danilo Campelo.
Tópicos avançados em binômios de Newton:
explorando potências fracionárias com o SageMath
/ Danilo Campelo Albuquerque. – Recife, 2025.
124 f.; il.

Orientador(a): Ricardo Machado.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal
Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado
Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, BR-
PE, 2025.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Binômios de Newton. 2. Sage-Math. 3.
Coeficientes binômios. 4. Matemática discreta I.
Machado, Ricardo, orient. II. Título

CDD 510

DANILO CAMPELO ALBUQUERQUE

**"TÓPICOS AVANÇADOS EM BINÔMIOS DE NEWTON: EXPLORANDO
POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS COM O SAGEMATH"**

*Trabalho apresentado ao Programa de
Mestrado Profissional em Matemática –
PROFMAT do Departamento de Matemática
da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE
PERNAMBUCO, como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em 30/01/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Nunes Machado Junior (Orientador) – UFRPE

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão – UFPE

Prof. Dr. Gabriel Araújo Guedes – PROFMAT/UFRPE



DECLARAÇÃO Nº 1011/2025 - PROFMAT-CPPGSE (11.01.29.17.44)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 26/02/2025 20:09)

GABRIEL ARAUJO GUEDES

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR

DMAT (11.01.39)

Matrícula: ###833#0

(Assinado digitalmente em 20/02/2025 10:57)

RICARDO NUNES MACHADO JUNIOR

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR

DMAT (11.01.39)

Matrícula: ###069#0

(Assinado digitalmente em 20/02/2025 15:08)

EUDES NAZIAZENO GALVÃO

ASSINANTE EXTERNO

CPF: ###.###.544-##

Visualize o documento original em <https://sigs.ufrpe.br/documentos/> informando seu número: **1011**, ano: **2025**, tipo: **DECLARAÇÃO**, data de emissão: **20/02/2025** e o código de verificação: **afa460db0b**

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que fizeram parte deste processo comigo. A minha família, sempre me apoiando e oferecendo suporte, foi fundamental durante este período em que precisei equilibrar trabalho e estudos. Fazer o mestrado, assim como o curso de matemática, foi novamente um grande desafio, e sou imensamente grato aos meus pais por sua constante dedicação e força para que eu terminasse o curso.

Um agradecimento especial ao meu orientador, pela imensa paciência e orientação ao longo do curso. Embora eu não tenha sido o aluno perfeito, dei o meu melhor diante das circunstâncias, e espero ter correspondido às expectativas.

À minha turma, sou profundamente grato pelo apoio constante. Juntos, estudamos, trocamos informações e discutimos dúvidas, seja em grupos de WhatsApp ou durante nossos encontros nos corredores e salas do departamento.

Agradeço a Ednaldo Ernesto, que me proporcionou uma sólida base em Matemática do Ensino Básico durante seu curso em 2012 e 2013 e pela experiência enriquecedora que tive como seu monitor em 2014. Sua influência foi crucial para o meu sucesso; graças a ele, eu decidi cursar Matemática.

Um agradecimento especial ao meu amigo Alvino, também professor de Matemática. Sua calma e conselhos foram essenciais para aliviar o estresse na jornada da vida, e a experiência adquirida trabalhando com ele como monitor de Matemática foi extremamente valiosa, passei anos trocando ideias e ensinamentos ao seu lado. Com toda a certeza, um ótimo exemplo de profissional para se seguir como inspiração.

Por fim, agradeço a todos os amigos e alunos que perceberam meus momentos difíceis durante a escrita e me incentivaram a seguir em frente. Sou extremamente grato a cada um de vocês que esteve presente nesta jornada. Não foi fácil, mas juntos chegamos ao fim.

Muito obrigado a todos!

Dedicatória

Gostaria de dedicar, primeiramente, este trabalho à minha família. Em especial, a minha mãe, Ana Cristina, e meu pai, Danilo Araújo de Albuquerque, ambos professores, que sempre foram uma fonte constante de inspiração e apoio. Agradeço também aos meus avós, Maria de Lourdes e Hêrmes, que sempre estiveram comigo me orientando e me motivando para a minha evolução profissional.

Dedico este trabalho aos meus alunos, que sempre demonstraram um carinho imenso por mim, aos meus colegas professores e aos docentes que fizeram parte da minha formação, tanto na UFPE quanto no PROFMAT. Em especial ao professor Dr. Marco Barone, Peter Malcolm Johnson e Manoel Lemos. A minha irmã, que, apesar das nossas diferenças, sempre percebe quando estou enfrentando dificuldades e está lá para me apoiar, também merece uma menção especial.

Um agradecimento especial aos meus tios: Maria Eliza, por sua empatia e atenção, uma capacidade singular de acalmar a minha mente; Joás, por seus conselhos sábios e por me mostrar que tudo na vida tem solução; Melânia, que sempre ofereceu ajuda incondicional, acredito que é a pessoa que eu conheço que mais ajuda os outros; e Hêrmes, meu tio e padrinho, extremamente inteligente e criativo, que, mesmo distante, sempre defendeu a importância dos estudos.

Dedico também este trabalho ao meu amigo de profissão, Fábio, conhecido carinhosamente como "Bebezão". Sua motivação e coração extraordinário foram uma grande inspiração para mim, sempre estive ao meu lado nessa jornada.

E, por fim, dedico este trabalho ao meu querido primo, amigo e parceiro, Joás Lins. Um homem de coração enorme e, sem dúvida, uma das pessoas mais incríveis que conheço. Se alguém não gosta dele, eu imediatamente questiono o caráter dessa pessoa.

Que o leitor aproveite e faça bom uso desse documento!

Resumo

Este trabalho tem como objetivo explorar combinações e números binomiais, destacando o cálculo da expansão do Binômio de Newton e sua extensão com os expoentes fracionários, com o apoio da ferramenta computacional SageMath. Inicialmente, apresenta-se uma visão histórica dos Binômios de Newton, ressaltando sua importância na evolução da álgebra, análise e matemática discreta. Em seguida, são apresentados exemplos construídos que seguem uma linha de raciocínio progressiva, iniciando por conceitos mais básicos e avançando para problemas de maior complexidade. Essa abordagem permite construir o tema de forma sistemática, conduzindo a uma visão mais refinada do conteúdo do Binômio de Newton, com ênfase para provas e concursos. Ademais, espera-se que essa metodologia encontre aplicabilidade no ensino regular, como, por exemplo, na aproximação de raízes utilizando o Binômio de Newton generalizado. Por outro lado, o trabalho destaca o uso do *software* matemático SageMath como uma ferramenta poderosa e acessível para a realização de cálculos e a visualização de expansões polinomiais de forma rápida e precisa. A utilização dessa plataforma facilita significativamente o ensino e a compreensão dos conceitos abordados, promovendo uma experiência pedagógica mais prática e clara. Por fim, busca-se estimular professores do Ensino Médio, público-alvo do PROFMAT, a adotar metodologias inovadoras que integrem o uso do *software* matemático SageMath e de outros recursos tecnológicos em sala de aula. Ao oferecer uma abordagem que conecta teoria e prática, este trabalho contribui para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem e tornar a matemática mais acessível e significativa para os estudantes.

Palavras-chave: Binômio de Newton com Expoente Fracionário, Binômios de Newton, SageMath, Números binomiais, Matemática discreta, Triângulo de Pascal, PROFMAT, Combinação.

Abstract

This work aims to explore combinations and binomial coefficients, highlighting the computation of the Binomial Expansion and its extension to fractional exponents, with the support of the computational tool SageMath. Initially, a historical overview of the Binomial Expansion is presented, emphasizing its importance in the evolution of algebra, analysis, and discrete mathematics. Subsequently, constructed examples are provided, following a progressive reasoning approach, starting from basic concepts and advancing to more complex problems. This methodology systematically builds the topic, leading to a more refined understanding of the Binomial Expansion, with a special emphasis on applications for exams and competitive tests. Additionally, it is anticipated that this approach will find applicability in regular teaching scenarios, such as approximating roots using the generalized Binomial Expansion. On the other hand, this work highlights the use of SageMath as a powerful and accessible mathematical software tool for performing calculations and visualizing polynomial expansions quickly and accurately. The use of this platform significantly facilitates the teaching and comprehension of the discussed concepts, promoting a more practical and clear pedagogical experience. Finally, this work seeks to encourage high school teachers, the primary audience of the PROFMAT program, to adopt innovative methodologies that integrate SageMath and other technological resources into the classroom. By offering an approach that connects theory and practice, this work contributes to enriching the teaching-learning process and making mathematics more accessible and meaningful for students.

Keywords: Newton's Binomial Expansion with Fractional Exponent, Newton's Binomials, SageMath, Binomial Coefficients, Discrete Mathematics, Pascal's Triangle, PROFMAT, Combination.

Lista de ilustrações

Figura 1 – (Fonte: Elaboração própria a partir de uma captura de tela do site) . . .	21
Figura 2 – (Fonte: Elaboração própria a partir de uma captura de tela do ChatGPT)	21
Figura 3 – (Fonte: Elaboração própria a partir de uma captura de tela do ChatGPT)	22
Figura 4 – (Imagem da internet, SITE: https://www.youcubed.org/pt-br/wim/triangulo-de-pascal-6o-8o-anos/)	42
Figura 5 – Produção autoral	44
Figura 6 – Produção autoral	45
Figura 7 – Produção autoral	46
Figura 8 – Produção autoral	47
Figura 9 – Produção autoral (Linha 9)	50
59figure.4.10	
Figura 11 – (Imagem da internet, SITE https://numerentur.org/triangulo-de-pascal-tartaglia/)	61
Figura 12 – Termos do desenvolvimento do binômio $\left(\frac{1}{2} + 1\right)^{80}$	73
Figura 13 – Termos do desenvolvimento do binômio $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^8$	75
Figura 14 – Termos do desenvolvimento do binômio $(3x + 5)^{13}$	79

Sumário

	Introdução	14
1	OBJETIVOS	15
1.1	Objetivo Geral	15
1.2	Objetivos Específicos	15
1.3	Na Vida Real	16
2	CONCEITOS INICIAIS	19
2.1	SageMath	19
2.1.1	Alguns comandos e funcionalidades	20
2.2	Análise Combinatória	23
2.3	Fatorial	25
2.3.1	Questões Resolvidas	30
3	MATEMÁTICA DISCRETA, O COMEÇO	35
3.1	Combinação	35
3.1.1	Questões Resolvidas	36
3.2	Número Binomial	39
3.3	Triângulo de Pascal	42
3.4	O Triângulo de Pascal no SageMath	48
3.4.1	Obtendo Linhas	48
3.4.2	Obtendo somas de linhas (Teorema das Linhas)	49
3.4.3	Teorema das colunas no SageMath	50
3.4.4	Localizar valores	50
3.4.5	Questões Resolvidas	51
4	BINÔMIO DE NEWTON	59
4.1	A história do Binômio de Newton	59
4.2	Conceitos básicos	62
4.2.1	Comandos do Sage Sobre Expansão Binomial	65
4.2.2	Questões Resolvidas	66
5	BINÔMIO DE NEWTON COM EXPOENTES FRACIONÁ- RIOS	83
5.1	A ideia	83
5.2	Desenvolvendo o Conceito	83
5.3	Generalizando o resultado	84

5.3.1	Binômios de Newton com expoentes fracionários	87
5.3.2	Calculando raízes com o SageMath	90
5.4	Aplicação no ensino básico	97
5.5	Aproximações para Raízes e Potências Avançadas	97
5.5.1	Expoentes Negativos	97
5.5.2	Raízes cúbicas, quartas, quintas...	99
5.5.3	Considerações Finais	103
5.5.4	Contribuição Esperada	104
5.6	Plano de Aula: Aproximações de Raízes e Potências Fracioná- rias com o SageMath	106
5.6.1	Objetivos	106
5.6.2	Introdução	106
5.6.3	Desenvolvimento	106
5.6.4	Atividade Prática	107
5.6.5	Discussão de Resultados	107
5.6.6	Conclusão	108
6	EXERCÍCIOS PROPOSTOS	109
6.0.1	Exercícios	109
6.0.2	Respostas	116
	REFERÊNCIAS	121

Introdução

O Binômio de Newton é um dos conceitos mais elegantes e versáteis da matemática, com aplicações que vão desde problemas elementares de contagem até o desenvolvimento de teorias avançadas em álgebra e análise. Apesar de sua importância, observa-se um distanciamento desse conteúdo nas grades curriculares de diversas escolas no Brasil, como em Pernambuco, onde foi retirado do currículo do Ensino Médio. No entanto, ele permanece um tema recorrente em competições como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), exames internacionais e desafios que exigem habilidades analíticas e compreensão aprofundada.

Normalmente, o Binômio de Newton é introduzido após o estudo de análise combinatória, passando pelos conceitos de números binomiais e culminando na apresentação do Triângulo de Pascal. Essa abordagem fornece a base necessária para compreender a expansão binomial, conectando teoria e prática de maneira estruturada. Ainda que desafiador, o estudo do Binômio de Newton oferece uma oportunidade única de desenvolver o pensamento lógico e a capacidade de abstração dos estudantes. Neste trabalho, exploramos o Binômio de Newton sob uma perspectiva acessível e prática, integrando ferramentas tecnológicas modernas, como o SageMath, para abordar conceitos teóricos e aplicá-los de maneira dinâmica. A escolha do SageMath, uma plataforma de *software* livre e de código aberto, se justifica por sua capacidade de facilitar a visualização, a exploração e a resolução de problemas matemáticos, tornando o aprendizado mais intuitivo. Além disso, exemplificamos a aplicação do Binômio de Newton em contextos que vão além dos expoentes naturais, estendendo sua análise a casos com expoentes negativos e fracionários.

A utilização do Binômio de Newton com expoentes fracionários, por exemplo, é uma generalização que remonta aos trabalhos de Newton e Euler, sendo um tema de grande relevância em matemática avançada. Tal abordagem é particularmente útil em situações onde métodos tradicionais se tornam limitados, como no cálculo de raízes e na análise de séries infinitas. Com o apoio do SageMath, tornamos essas ideias mais acessíveis e aplicáveis no contexto educacional, promovendo uma visão ampliada e prática do conteúdo.

Esta dissertação é dividida em capítulos que exploram desde os fundamentos da análise combinatória, indispensáveis para a compreensão do Binômio de Newton, até a utilização de tecnologias digitais para facilitar seu ensino e aprendizagem. Inicialmente, revisamos conceitos-chave, como combinações, números binomiais e o Triângulo de Pascal, consolidando a base necessária para aprofundar o estudo. Em seguida, avançamos para a aplicação prática desses conceitos com o auxílio do SageMath, desenvolvendo soluções que exemplificam e expandem o uso do Binômio de Newton.

Por fim, propomos exercícios e atividades que incentivam o aprendizado ativo, permitindo que estudantes e professores explorem o potencial das ferramentas tecnológicas no ensino de matemática. Nosso objetivo é não apenas oferecer uma nova perspectiva sobre o Binômio de Newton, mas também contribuir para o desenvolvimento de métodos de ensino que unam rigor teórico e praticidade, facilitando a compreensão de temas complexos e promovendo um aprendizado mais significativo.

Assim, este trabalho busca unir teoria e prática, história e tecnologia, com o objetivo de apresentar o Binômio de Newton como uma ferramenta poderosa e acessível, capaz de transformar o ensino da matemática e inspirar o aprendizado contínuo em diferentes contextos.

Por fim, destaca-se que vários dos códigos interativos utilizados ao longo desta dissertação foram implementados na plataforma SageMath e estão disponíveis no site https://prof-ricardomachado.github.io/dissertacao_danilo/dissertacao_danilo.html. Que também pode ser acessado pelo QRCODE:



Nesse endereço, os códigos estão organizados por capítulos, permitindo ao leitor explorar cada uma das ferramentas computacionais no contexto em que foram apresentadas no decorrer do documento. Essa estrutura facilita a compreensão e a replicação dos resultados apresentados, oferecendo uma experiência prática e integrada com os conceitos discutidos.

1 Objetivos: Geral e Específicos

1.1 Objetivo Geral

A meta desta pesquisa é aprofundar o conhecimento em matemática discreta, com ênfase nos números binomiais e no Binômio de Newton, oferecendo uma abordagem detalhada e metódica que apoie professores e alunos em sua preparação para olimpíadas, concursos, desafios matemáticos e vestibulares. A construção do conteúdo é apresentada de forma sistemática, onde cada etapa depende da compreensão do passo anterior, culminando no estudo do Binômio de Newton aplicado a potências fracionárias.

Além disso, este trabalho propõe recursos educacionais específicos e práticas pedagógicas que facilitam o ensino-aprendizagem de conceitos como combinações, o Triângulo de Pascal, números binomiais e o uso do SageMath, conectando teoria e prática para uma melhor compreensão e aplicação desses tópicos.

1.2 Objetivos Específicos

Este trabalho tem como objetivo investigar a teoria e o surgimento do Binômio de Newton, explorando suas aplicações práticas em problemas de contagem que abrangem desde combinações simples até Binômios com expoentes fracionários. Durante esse percurso, busca-se identificar questões frequentemente encontradas em provas de olimpíadas matemáticas e desafios acadêmicos, ao mesmo tempo em que se destacam aquelas menos abordadas na literatura, mas com grande potencial para aprofundar a compreensão do tema. Para isso, realiza-se um estudo aprofundado de materiais existentes, acompanhado da apresentação de exemplos concretos que conectam o Binômio de Newton à resolução de problemas presentes em contextos competitivos. Assim, este trabalho contribui para o enriquecimento do conhecimento matemático e aponta caminhos para futuras pesquisas na área.

A abordagem inclui tanto questões clássicas quanto desafios mais elaborados (muitas questões autorais inseridas), com o objetivo de motivar estudantes e professores a explorar a lógica e a criatividade na solução de problemas. A seleção cuidadosa dessas questões visa não apenas aprofundar o entendimento, mas também inspirar o uso do Binômio de Newton em competições acadêmicas e avaliações de alta complexidade. Dessa forma, o trabalho destaca como esses problemas podem ser trabalhados para estimular habilidades analíticas e fortalecer a preparação para contextos competitivos.

A complexidade do Binômio de Newton transcende a simples aplicação de fórmulas,

exigindo uma compreensão profunda dos princípios matemáticos e a capacidade de pensar de forma criativa. Resolver problemas nesse contexto vai além da aplicação mecânica de técnicas, representando uma oportunidade para exercitar o raciocínio crítico e a inventividade matemática. Por isso, a preparação de estudantes para competições, como olimpíadas e desafios matemáticos, requer não apenas o domínio técnico, mas também a habilidade de interpretar questões com precisão e formular estratégias eficientes de resolução.

Explorar o Binômio de Newton com expoentes fracionários é mais do que um exercício técnico; é um convite a mergulhar em conceitos que desafiam tanto a lógica quanto a criatividade. Esse trabalho busca não apenas desmistificar as complexidades desse tópico, mas também mostrar como ele pode ser utilizado de forma significativa em competições acadêmicas e desafios matemáticos. Ao conectar teoria e prática, a pesquisa abre caminhos para que estudantes e professores encarem questões com mais confiança, vendo nelas oportunidades de inovação e descoberta. Assim, o Binômio de Newton deixa de ser apenas uma fórmula abstrata e se transforma em uma ferramenta poderosa para compreender e enfrentar problemas de alta relevância no universo matemático.

1.3 Na Vida Real

As combinações, um dos conceitos centrais da análise combinatória, possuem ampla aplicabilidade. Na ciência da computação, as combinações são essenciais para o desenvolvimento de algoritmos eficientes em áreas como a otimização, teoria dos grafos e criptografia, onde a seleção de subconjuntos específicos é crucial, visto em (Silva et al. 2013, p. 31). Na biologia, são utilizadas para analisar variações genéticas e compreender padrões de hereditariedade, como mostrado em *Biologia e matemática: diálogos possíveis no Ensino Médio* (Júnior e Chaves 2008, p. 8). Em estatística, as combinações desempenham um papel vital na teoria da amostragem e na análise de variância, permitindo a seleção de amostras representativas e a comparação de grupos, como trabalhado comumente com turmas de segundo ano do Ensino Médio (Silva et al. 2013). No campo da logística, ajudam na otimização de rotas e na gestão de inventários, enquanto na economia, são aplicadas na modelagem de mercados financeiros e na análise de portfólios de investimentos, como trabalhados no artigo *Algoritmos para problemas de otimização combinatória em redes de comunicação modelados com grafos* (Ricarte 2022). No cotidiano, encontramos seu uso em jogos de azar, planejamento de eventos e na solução de quebra-cabeças e problemas de tomada de decisão. Dessa forma, as combinações oferecem ferramentas poderosas para resolver problemas complexos e otimizar processos em várias disciplinas e atividades diárias.

Alguns exemplos de aplicabilidade podem ser vistos no documento Usos do Binômio

de Newton em Diferentes Contextos ([Silva 2016](#)), que explora aplicações diversas do binômio, como na genética, para calcular probabilidades em estudos de herança poligênica e variação fenotípica; na loteria, especificamente na Mega-Sena, para determinar as combinações possíveis e calcular as chances de acerto; na informática, em sistemas de criptografia que utilizam probabilidade e números aleatórios para garantir a segurança de dados; e em vestibulares, como medida de segurança, ao variar questões de provas para evitar fraudes. Essas aplicações ilustram a versatilidade do Binômio de Newton em diferentes áreas e contextos práticos.

Uma observação importante: este trabalho apresenta questões e exemplos que serão resolvidos utilizando diferentes abordagens. Algumas dessas questões serão tratadas de maneira convencional, enquanto outras serão resolvidas também com o auxílio da ferramenta SageMath. Esse método permite uma comparação direta, evidenciando a utilidade e a versatilidade do SageMath na resolução de problemas matemáticos.

2 Conceitos Iniciais

2.1 SageMath

O SageMath, conhecido também apenas como Sage, é um *software* matemático de código aberto e gratuito que se destaca como uma plataforma abrangente para cálculos matemáticos de variadas complexidades, desde o conceito mais básico, ou até mesmo cálculo avançado. Surgiu da necessidade de oferecer uma ferramenta unificada e acessível para a comunidade matemática, integrando diversas bibliotecas e ferramentas matemáticas de código aberto existentes em um ambiente coeso. O desenvolvimento do SageMath foi motivado pela busca por uma alternativa robusta aos sistemas de *software* matemático comerciais, visando proporcionar uma solução acessível para estudantes, pesquisadores e profissionais em várias disciplinas matemáticas e áreas relacionadas. Desde então, o SageMath tem se tornado uma ferramenta popular, que promove colaboração e desenvolvimento contínuo por parte da comunidade, sendo assim, está sempre em constante evolução.

No contexto que se refere a essa dissertação, o SageMath agrega uma experiência como uma ferramenta de estudo. Visando a praticidade e agilidade da aplicação, podemos simplesmente verificar resultados e ter acesso imediato as respostas mais trabalhosas dentro do conteúdo abordado. Quando se utiliza o *software*, ele possui uma interface bastante simplificada, por meio dessa interface, é possível inserir expressões matemáticas, realizar cálculos, plotar gráficos, criar modelos matemáticos e explorar conceitos matemáticos de forma dinâmica e intuitiva.

O SageMath é uma plataforma altamente extensível, permitindo que suas funcionalidades sejam facilmente ampliadas. Isso pode ser feito escrevendo novos pacotes em Python ou incorporando códigos existentes de outras bibliotecas de *software* matemático. Vale destacar que a própria linguagem de programação utilizada pelo SageMath é o Python. Além disso, possui capacidades gráficas poderosas para visualização de dados e funções matemáticas. Podemos criar gráficos 2D e 3D de funções matemáticas, conjuntos de dados e estruturas geométricas. Também tem suporte para manipulação simbólica, o que significa que pode lidar com símbolos e expressões matemáticas simbolicamente, sem avaliá-las numericamente. Isso é útil para cálculos algébricos complexos, simplificação de expressões, solução de equações, etc.

É importante observar que o SageMath utiliza o inglês como idioma padrão, o que exige atenção a alguns detalhes. Por exemplo, números reais são apresentados com ponto decimal, como em “2.75”, em vez de “2,75”, pois o ponto é usado onde normalmente

empregaríamos a vírgula. Esses e outros detalhes específicos de formatação serão seguidos nas linhas de código deste documento, de acordo com as convenções do SageMath.

Para aprofundar o conhecimento sobre a ferramenta, recomenda-se a leitura do livro *Elementos de computação matemática com sagemath*. (Silva, Santos e Machado 2019). Complementarmente, sugere-se a consulta ao guia tutorial disponível na página oficial <<https://doc.sagemath.org/html/pt/tutorial/index.html>>, o qual apresenta, em português, uma introdução prática e didática ao uso do SageMath, permitindo ao leitor explorar suas funcionalidades.

2.1.1 Alguns comandos e funcionalidades

Os comandos cobrem operações básicas e avançadas, como definição de variáveis, avaliação numérica, simplificação de expressões, solução de equações, plotagem de gráficos, cálculo de derivadas e integração, dentre muitos outros. Comandos esses, montam a base para realização de cálculos e análises matemáticas dentro do SageMath. Alguns exemplos de comandos disponíveis são `.integrate()`, para calcular a integral de alguma função, `plot3d()` para representar um gráfico em 3D, `simplify_full()`, para simplificar alguma expressão, `var('x, y')` para definir variáveis, dentre outros, mas focaremos nos comandos envolvendo produtos notáveis, Binômios de Newton, combinações e contagem. Enfim, vários desses comandos não iremos utilizar, servem apenas de exemplo para que os leitores tenham uma breve noção da abrangência do Sage; abaixo segue uma demonstração (utilizando raiz quadrada):

Entrada do Bloco de Códigos 1.

```
1 n = 16          # define a variavel n com o valor 16
2 sqrt(n)         # calcula a raiz quadrada de n
```

1

Saída do Bloco de Códigos 1.

```
1 4
```

Este será o padrão adotado ao longo da dissertação para demonstrar ao leitor os comandos de entrada na caixa de código do Sage, assim como os resultados correspondentes na saída. Esses elementos serão referidos como “Entrada do bloco de código” e “Saída do bloco de código”, conforme exemplificado acima.

¹ O comando `sqrt` vem de “square root”, que significa raiz quadrada.

Observe abaixo uma captura de tela retirada do site <<https://sagecell.sagemath.org/>> (último acesso em 25/06/2024), onde podemos utilizar a ferramenta de maneira livre e anexar a outros sites ou documentos:

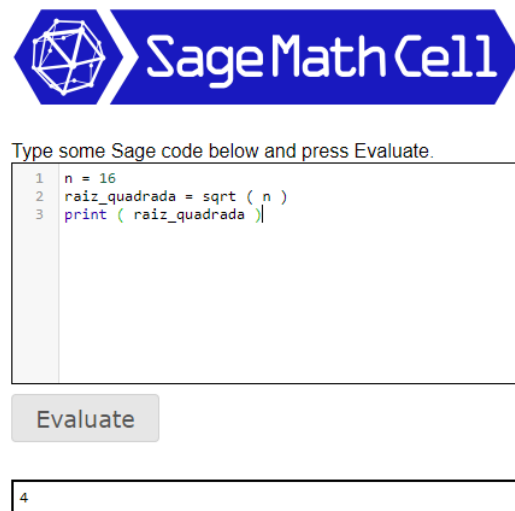


Figura 1 – (Fonte: Elaboração própria a partir de uma captura de tela do site)

Vale ressaltar que não se requer um conhecimento extensivo da ferramenta (SageMath), nem horas de pesquisa para encontrar códigos e comandos. Fóruns estão disponíveis, ou até mesmo esses comandos podem ser facilmente gerados pelo ChatGPT. Basta descrever sua intenção dentro do ChatGPT que ele irá gerar um código; feito isso, pode-se copiar e colar no SageMath, onde será executado o código.

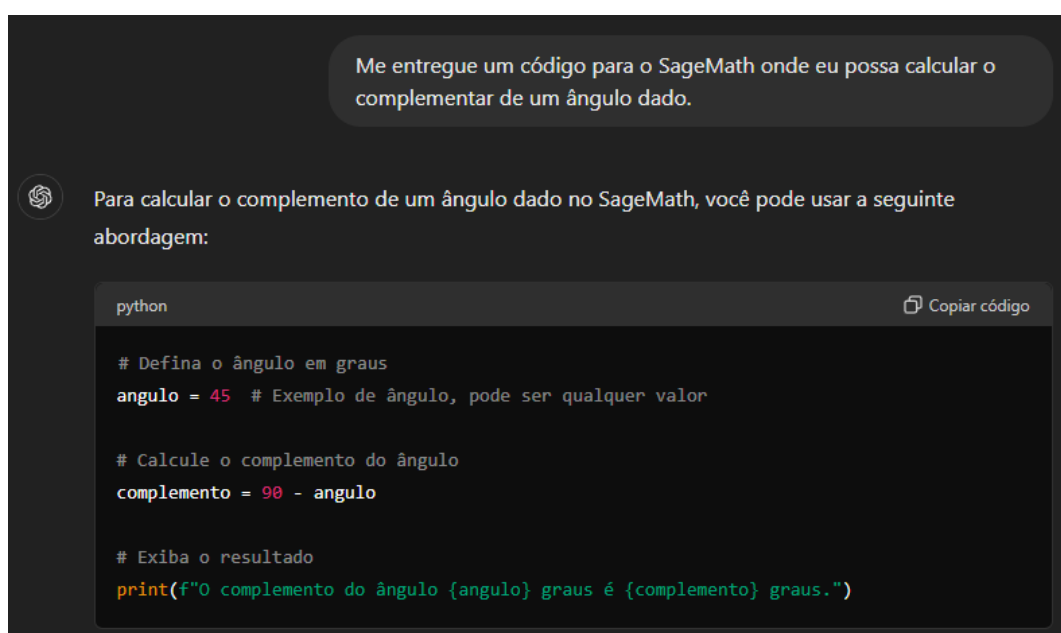


Figura 2 – (Fonte: Elaboração própria a partir de uma captura de tela do ChatGPT)

É importante ter cautela ao utilizar ferramentas como o ChatGPT e outras IAs² interativas, especialmente para quem não tem familiaridade com sua funcionalidade. Embora seja uma ferramenta poderosa, o ChatGPT pode, ocasionalmente, oferecer linhas de código ou informações incorretas. É fundamental lembrar que ferramentas como esta estão em constante atualização e desenvolvimento. Por isso, é essencial ter uma noção clara do que se espera como resultado. Por exemplo, ao buscar uma aproximação para $\sqrt{10}$, sabemos que $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$, o que significa que $3 < \sqrt{10} < 4$. Se, em algum momento, a aproximação de $\sqrt{10}$ estiver fora desse intervalo, é evidente que houve um erro, seja por parte do usuário ou do ChatGPT.

Abaixo, vemos um exemplo onde o ChatGPT trouxe uma informação incorreta em relação ao que foi solicitado:

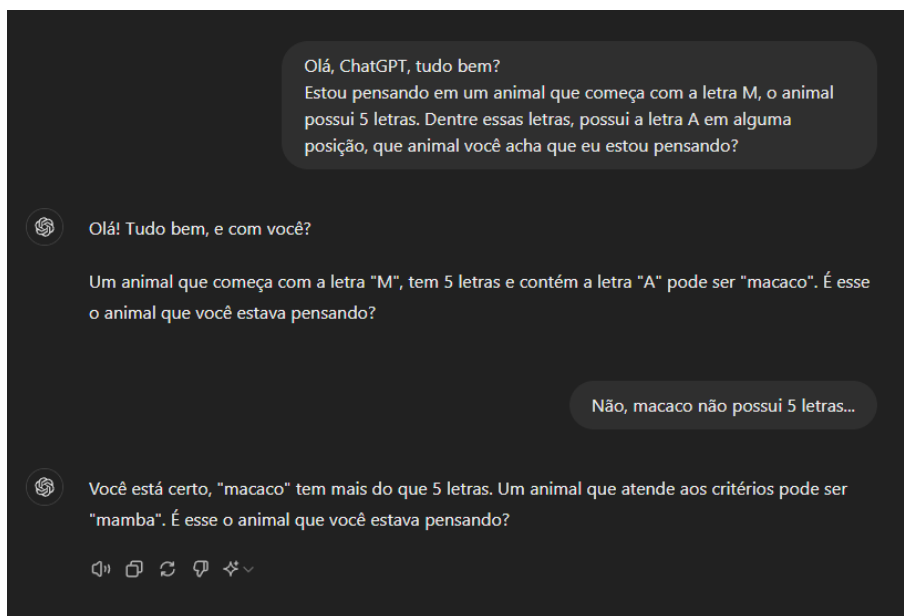


Figura 3 – (Fonte: Elaboração própria a partir de uma captura de tela do ChatGPT)

Apenas por curiosidade, o animal em questão era “mosca”. Ele começa com a letra M, tem um total de 5 letras e inclui a letra A em uma de suas posições. Mamba também é uma resposta válida, já que é um animal que se encaixa dentro dos parâmetros mencionados. Vale notar que o sistema ainda está em desenvolvimento contínuo e apresenta falhas nas respostas. Pode ser utilizado para gerar códigos que usaremos no SageMath, mas sempre com cautela, para evitar a aceitação de erros matemáticos despercebidos, seja um erro simples ou bem mais complexo.

² O ChatGPT é um chatbot que usa redes neurais para entender e gerar texto humano. Ele é treinado em um grande conjunto de dados de texto e código, o que permite que ele responda sobre determinado conteúdo. (fonte: BrasilDeFato)

2.2 Análise Combinatória

O primeiro contato com a análise combinatória ocorre por volta do sétimo ano do Ensino Fundamental II, quando os alunos são introduzidos ao conceito de contagem através de exemplos simples, como: “Joana tem 3 saias e 4 blusas. De quantas formas diferentes ela pode se arrumar utilizando uma peça de cada?”. Esse tipo de problema explora o Princípio Fundamental da Contagem, permitindo aos alunos chegar ao resultado de forma intuitiva. No entanto, é no segundo ano do Ensino Médio que a análise combinatória é abordada de maneira mais aprofundada. O conteúdo começa com a introdução ao conceito de fatorial, seguido pelo Princípio Fundamental da Contagem e pelo diagrama da árvore de possibilidades. Temos “A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições” (Iezzi et al. 2013, p. 1). É fácil observar no cotidiano, conceitos como o diagrama da árvore de possibilidades para esboçar resultados ou analisar alguma planilha, até mesmo para mostrar resultados de combinatória.

A análise combinatória é um ramo da matemática que se dedica ao estudo e contagem de arranjos, combinações e permutações de elementos finitos. Este campo oferece ferramentas e métodos essenciais para resolver problemas relacionados à contagem e organização de objetos, eventos ou possibilidades, desempenhando um papel fundamental em diversas áreas, como estatística, teoria dos grafos, probabilidade e otimização. Segundo (Bastos e Victor 2013) visto por muitos como um dos assuntos mais complicados trabalhados no Ensino Médio, porém, vamos tentar trabalhar nesta dissertação de maneira tranquila e sistemática, sem contar que ao utilizar o SageMath, tornaremos alguns problemas bem menos mecânicos e muito mais imediatos. A facilidade da ferramenta tornará o ensino-aprendizagem do tema proposto extremamente fluida.

O emprego da análise combinatória é vasto e transcende o ambiente acadêmico, encontrando aplicações práticas em diversos setores da sociedade. Na computação, por exemplo, é utilizada para otimizar algoritmos e resolver problemas de complexidade combinatória. Na biologia, a análise combinatória pode ser empregada para examinar diferentes arranjos genéticos em populações (Iezzi et al. 2013, p. 4). Esse ramo da matemática surge pela primeira vez com Pascal em “*Traité du triangle arithmétique*” (escrito em 1654 e publicado em 1665), Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos” enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos pode ser associados e misturados entre si”.³

A utilidade da análise combinatória é evidente em situações nas quais é necessário contar ou organizar elementos em conjuntos de interesse. Seja na resolução de problemas

³ Fontes retiradas do artigo <<https://www.passeidireto.com/arquivo/88092161/a-analise-combinatoria>>

relacionados a permutações de letras em uma palavra, na seleção de comitês a partir de um grupo de pessoas, ou na análise de possíveis resultados em experimentos probabilísticos, a análise combinatória fornece um conjunto de ferramentas analíticas poderosas. Devemos ter em mente que vários desses problemas vão muito além das interpretações que devem ser feitas nos problemas matemáticos; muitos desses são problemas reais, envolvendo vários campos científicos e sociais.

Em resumo, a análise combinatória é um ramo da matemática, inserido na matemática discreta, para a resolução de problemas relacionados à contagem e organização de elementos. Sua aplicação abrange uma diversidade de campos, destacando-se como uma ferramenta poderosa dentro da modelagem e resolução de situações práticas. Alguns tópicos que podem ser trabalhados, nessa respectiva ordem, por exemplo: (PFC) Princípio Fundamental da Contagem, combinação, arranjo, permutações (caso particular de arranjo). Feito isso, começamos a trabalhar as particularidades, como por exemplo anagramas, permutações circulares, permutações com repetições, fixando alguns elementos... inúmeras possibilidades. Normalmente, os professores sempre falam que os problemas que envolvem Análise Combinatória podem ser bem parecidos, mas ao mesmo tempo, podem surgir problemas bastante únicos, criando sempre um grande desafio ao ser encarado pela primeira vez.

Caso o leitor não esteja bem familiarizado com a parte de análise combinatória, conceitos iniciais mencionados acima, fica a sugestão da leitura prévia do livro de Fundamentos da Matemática, no tópico sobre tal conteúdo ([Hazzan e Hazzan 1993](#), p. 2, CAP 1).

2.3 Fatorial

Definição 2.1 (Fatorial). O fatorial de um número natural n , indicado por $n!$, é definido recursivamente como: $0! = 1$, e $\forall n \geq 1, n! = n \cdot (n - 1)!$.

O SageMath possui o método “`factorial`” que serve para calcular o fatorial de números naturais. O código abaixo calcula o fatorial de 15.

Entrada do Bloco de Códigos 2.

```
1 factorial(15)
```

Saída do Bloco de Códigos 2.

```
1 1307674368000
```

Abaixo, seguem alguns exemplos:

Exemplo 2.2. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Exemplo 2.3. $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$

Exemplo 2.4. Determine o valor de n quando $(n - 1)! = 24$.

Uma equação envolvendo um fatorial, podemos fazê-lo assim:

$$(n - 1)! = 24$$

$$n - 1 = y$$

$$y! = 24$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24, \quad y = 4$$

$$n - 1 = y, \quad n = y + 1, \quad n = 5$$

Caso queiramos resolver dentro do SageMath, um caminho possível seria:

Entrada do Bloco de Códigos 3.

```

1 # Verifica os valores de n que satisfazem a equação (n-1)! = 24
2 solution = []
3 for n in range(1, 20): # Define um intervalo de valores para n
4     if factorial(n-1) == 24:
5         solution.append(n)
6
7 solution

```

Saída do Bloco de Códigos 3.

```

1 [5]

```

Exemplo 2.5. Considere a seguinte fração envolvendo fatoriais: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$. Expanda os fatoriais e simplifique a expressão para encontrar o valor de n .

$$\begin{aligned}
 \frac{(n+1)!}{(n-1)!} &= 30 \\
 \frac{(n+1) \cdot (n) \cdot (n-1)!}{(n-1)!} &= 30 \\
 \frac{(n+1) \cdot (n)}{1} &= 30 \\
 n^2 + n &= 30 \\
 n^2 + n - 30 &= 0 \quad \rightarrow \quad n_1 = -6 \quad \rightarrow \quad n_2 = 5
 \end{aligned}$$

Como temos pela definição de fatorial que $n!$ deve ser um natural positivo, a resposta é $n = 5$, veremos abaixo dentro do SageMath novamente:

Entrada do Bloco de Códigos 4.

```

1 # Verifica os valores de n que satisfazem a equação (n+1)! / (n-1)! = 30
2 solution = []
3 for n in range(1, 20): # Define um intervalo de valores para n
4     if factorial(n+1) / factorial(n-1) == 30:
5         solution.append(n)
6
7 solution

```

Saída do Bloco de Códigos 4.

1 [5]

Exemplo 2.6. Dada a equação $\frac{n}{(n+1)!} = (2n+2)^{-2}$, vamos indicar um valor de n que satisfaz a identidade. Seguiremos um processo semelhante ao descrito no [Exemplo 2.5](#). Abaixo, expandiremos os termos e simplificaremos a expressão:

$$\begin{aligned}\frac{n}{(n+1)!} &= (2n+2)^{-2} \\ \frac{n}{(n+1) \cdot (n) \cdot (n-1)!} &= \frac{1^2}{(2n+2)^2} = \frac{1}{(2[n+1])^2} = \frac{1}{4(n+1)^2} \\ \frac{1}{(n+1) \cdot (n-1)!} &= \frac{1}{4n^2 + 8n + 4} \\ (n+1) \cdot (n-1)! &= 4n^2 + 8n + 4 \\ (n+1) \cdot (n-1)! &= 4(n+1) \cdot (n+1) \\ (n-1)! &= 4(n+1)\end{aligned}$$

Observe que temos a equação simplificada para $(n-1)! = 4(n+1)$. Vamos substituir n por alguns valores e identificar os fatoriais que satisfaçam essa equação. A seguir, apresentamos uma tabela que relaciona os valores de n :

n	$(n-1)!$	$4(n+1)$
1	$0! = 1$	$4 \cdot 2 = 8$
2	$1! = 1$	$4 \cdot 3 = 12$
3	$2! = 2$	$4 \cdot 4 = 16$
4	$3! = 6$	$4 \cdot 5 = 20$
5	$4! = 24$	$4 \cdot 6 = 24$
6	$5! = 120$	$4 \cdot 7 = 28$
7	$6! = 720$	$4 \cdot 8 = 32$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1 – Tabela com as colunas n , $(n-1)!$ e $4(n+1)$.

Observe que conforme a tabela quando $n = 5$, $(n-1)!$ é igual a $4(n+1)$.

Dentro do SageMath (utilizando o auxílio do ChatGPT para a escrita do código)

Entrada do Bloco de Códigos 5.

```

1 # Recalculando os valores para verificar possíveis soluções para a equação dada
2
3 from math import factorial
4
5 def test_equation(n):
6     left_side = n / factorial(n + 1)
7     right_side = 1 / (2*n + 2)**2
8     return left_side == right_side
9
10 # Testando valores de n
11 values = []
12 for n in range(1, 10):
13     if test_equation(n):
14         values.append(n)
15 values

```

Saída do Bloco de Códigos 5.

```

1 [5]

```

Observe que, no SageMath, ele testou cada valor de n variando de 1 até 10, e verificou que para $n = 5$ a condição foi satisfeita, onde ele fez uma comparação. A exigência do código é que a solução n seja aquela em que ambos os lados da equação atingem o mesmo valor, ele chamou $\frac{n}{(n+1)!}$ de esquerda e $(2n + 2)^{-2}$ de direita. Portanto, o código indicou 5 como a resposta correta. Note que a resposta do SageMath foi feita com a linguagem de Python, onde ele apresenta ****** no lugar de $\wedge$ para a potência, observamos também que ele importa “**from math import factorial**”, o que não se faz necessário, já que o SageMath já possui o método **factorial** disponível.

Poderíamos dedicar horas explorando as inúmeras possibilidades que o SageMath oferece no estudo de fatoriais. Por exemplo, em pouco tempo, é possível calcular o produto de qualquer sequência de fatoriais que desejarmos. Se considerarmos quatro fatoriais consecutivos a partir de $3!$, obtemos o produto:

$$3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6!$$

onde cada termo é o fatorial de um número inteiro consecutivo, começando por $3!$ e finalizando em $6!$.

Uma maneira simples de realizar essa operação na ferramenta é a seguinte:

Entrada do Bloco de Códigos 6.

```

1 f = factorial          # redefinindo o método factorial como f
2 f(3)*f(4)*f(5)*f(6)    # calculando o produto dos fatoriais mencionados

```

Saída do Bloco de Códigos 6.

```

1 12441600

```

Além disso, dependendo do contexto em que estivermos utilizando o SageMath, como em uma sala de aula de Ensino Médio ou Fundamental, poderíamos considerar adicionar uma frase que imprimisse a resposta de forma mais didática, acompanhada de um texto explicativo que descreva o que foi realizado. A seguir, apresentamos um exemplo:

Entrada do Bloco de Códigos 7.

```

1 def prod_4_fatoriais_consec(n):
2     f = factorial
3     resp = f(n)*f(n+1)*f(n+2)*f(n+3)
4     print(f'0 produto de 4 fatoriais consecutivos começando por {n} é {
5         resp}')
6 prod_4_fatoriais_consec(3)

```

Saída do Bloco de Códigos 7.

```

1 0 produto de 4 fatoriais consecutivos começando por 3 é 12441600

```

Observe que, na Entrada do **Bloco de Códigos 7**, é necessário apenas informar o valor de n , que corresponde ao primeiro número da sequência de fatoriais.

Definição 2.7 (Princípio Multiplicativo). O princípio multiplicativo afirma que se existem m possibilidades de realizar uma atividade e n possibilidades de realizar outra atividade independente, então o número total de maneiras de realizar ambas as atividades é $m \cdot n$. Essencialmente, este princípio é aplicável sempre que duas (ou mais ⁴) atividades ou eventos independentes podem ocorrer em sequência, permitindo calcular o número total de resultados possíveis; basta multiplicar o número de opções disponíveis em cada etapa.

⁴ $n \cdot m \cdot p \cdots =$ total de possibilidades. Onde $m, n, p \dots$ é a quantidade de possibilidades por etapa.

2.3.1 Questões Resolvidas

Questão 2.8. (Hazzan e Hazzan 1993) (pág. 9, questão 2.) Uma moça possui 5 blusas e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa e uma saia?

Resolução. Utilizando o Princípio Multiplicativo (Definição 2.7), basta pensar que escolheremos de forma independente, primeiro uma blusa, logo em seguida, uma saia, ficamos com: $5 \cdot 6 = 30$

Poderíamos ter pensado na utilização do SageMath, só para mostrar como seria feito por lá, note que é uma resolução extremamente simples:

Entrada do Bloco de Códigos 8.

```
1 a=5 #basta escolher o primeiro número real para multiplicar
2 b=6 #basta escolher o segundo número real para multiplicar
3 a * b
```

Saída do Bloco de Códigos 8.

```
1 30
```

□

Questão 2.9. (Hazzan e Hazzan 1993) (pág. 10, questão 5.) Um edifício tem 8 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

Resolução. Vamos pensar o problema em duas etapas, na primeira etapa devemos escolher uma porta para entrar no prédio, temos então 8 opções de porta, agora vamos escolher uma das portas restantes para sair do prédio, ficamos com 7 opções para sair. Logo, temos $8 \cdot 7 = 56$ possibilidades. □

Questão 2.10. (Autorial) Quantos números inteiros distintos de 4 algarismos podemos formar, em que nenhum algarismo se repete e o número 4 nunca aparece na terceira posição?

Resolução. Vamos começar contando todos os números naturais de 4 algarismos distintos, sem restrições. Temos 10 dígitos disponíveis: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (já que não houveram restrições). Como o número não pode começar com 0, a primeira posição pode ser preenchida por qualquer um dos 9 dígitos restantes. A segunda posição pode ser preenchida por qualquer um dos 9 dígitos (exceto o já utilizado na primeira posição), a

terceira por 8 dígitos e a quarta por 7. Assim, pela [Definição 2.7](#) (Princípio Multiplicativo), o número total de combinações possíveis é: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

Agora, subtraímos os casos em que o dígito 4 aparece na terceira posição. Nesse cenário, a primeira posição pode ser ocupada por qualquer um dos 8 dígitos (exceto 0 e 4), a segunda por qualquer um dos 8 dígitos restantes (exceto o que ocupou a primeira posição e o dígito 4), a terceira posição é fixada com o dígito 4, e a quarta pode ser preenchida por qualquer um dos 7 dígitos restantes. Portanto, o número de combinações em que o dígito 4 aparece na terceira posição é:

$$8 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 7 = 448$$

Subtraindo esses casos do total, obtemos:

$$4536 - 448 = 4088$$

Finalmente, como estamos tratando de números inteiros (positivos e negativos), devemos multiplicar o resultado por 2 para considerar os inteiros negativos. Portanto, o número total de números inteiros distintos que satisfazem as condições do problema é:

$$4088 \cdot 2 = 8176$$

□

Entrada do Bloco de Códigos 9.

```

1 def contar_numeros_quatro_digitos(n_digitos, digito, pos,
2   permutacoes_totais=False):
3
4     permutacoes = Permutations([0..9], n_digitos) # todas as permutações
5     lista=[]                                         # lista vazia
6     for p in permutacoes: # p passa por cada elemento de permutacoes
7         if p[0]!=0 and p[pos-1]!=digito: # se o primeiro dígito != zero
8             # e o dígito na posição pos != digito
9             lista.append(p)                 # guarde na lista o elemento p
10
11     if permutacoes_totais==True:
12         print(lista)
13
14     return len(lista)*2
15 contar_numeros_quatro_digitos(4, 4, 3)

```

Saída do Bloco de Códigos 9.

```

1 8176

```

Entrada do Bloco de Códigos 10.

Ao passarmos o parâmetro “True” na execução da função da **Entrada de Blocos 9**, cada permutação de dígitos que atende às condições será exibida antes de retornar o número total de soluções. Utilizamos reticências na segunda linha da **Saída de Blocos 10** para abreviar o resultado, já que, caso contrário, seria necessário mais de uma página para exibir todas as permutações.

```
1 contar_numeros_quatro_digitos(4, 4, 3, True)
```

Saída do Bloco de Códigos 10.

```
1 [[1, 0, 2, 3], [1, 0, 2, 4], [1, 0, 2, 5], [1, 0, 2, 6],
2  ...
3  , [9, 8, 7, 4], [9, 8, 7, 5], [9, 8, 7, 6]]
4 8176
```

Note abaixo uma variação no código para resolver o mesmo problema:

Entrada do Bloco de Códigos 11.

```
1 # Função para contar números de 4 dígitos com a restrição
2 def contar_numeros_quatro_digitos():
3     total = 0
4     # Dígitos disponíveis (0-9)
5     digitos = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
6     # Primeiro dígito não pode ser 0 (para números positivos)
7     for i in range(1, len(digitos)):
8         for j in range(len(digitos)):
9             if j == i:
10                 continue
11             for k in range(len(digitos)):
12                 if k == i or k == j:
13                     continue
14                 for l in range(len(digitos)):
15                     if l == i or l == j or l == k:
16                         continue
17                     # Contar apenas se o terceiro dígito não for 4
18                     if k != 4:
19                         total += 1
20     # Considerar também os números negativos, que têm a mesma quantidade
21     # que os positivos
22     return 2 * total
23
24 # Chamar a função e imprimir o resultado
25 total_numeros = contar_numeros_quatro_digitos()
26 total_numeros
```

Saída do Bloco de Códigos 11.

1 8176

3 Matemática Discreta, o começo

3.1 Combinação

A matemática é uma ciência estruturada de forma vertical, como uma escada, onde cada degrau representa um conceito que sustenta o próximo. Para compreender tópicos mais avançados, é essencial dominar os fundamentos, pois a construção de uma base sólida de conhecimento é indispensável antes de avançar para áreas mais complexas da disciplina.

No contexto do Binômio de Newton, essa verticalidade se torna evidente. Para compreender esse conceito de maneira plena, é necessário revisar alguns fundamentos que servem de base. Portanto, neste capítulo, será feita uma introdução aos elementos necessários para o estudo do Binômio de Newton, preparando o terreno para um conhecimento mais aprofundado.

Definição 3.1 (Combinação). Em matemática discreta, uma combinação refere-se à seleção não ordenada de elementos de um conjunto. Especificamente, uma *combinação* é uma forma de escolher um subconjunto de elementos de um conjunto maior, sem considerar a ordem em que os elementos são escolhidos. A representação para o número de combinações será $C(n, p)$, onde n denota o número total de elementos no conjunto original e p é o número de elementos que devem ser escolhidos para formar os agrupamentos.

A fórmula para calcular o número de combinações é dada por:

$$C(n, p) = \frac{n!}{p!(n - p)!}.$$

Essa abordagem é fundamental em muitas áreas da matemática discreta, incluindo teoria dos conjuntos, probabilidade e análise combinatória. Um número binomial é quase sempre associado a uma combinação; no Ensino Médio, normalmente se trabalha o Triângulo de Pascal logo após se estudar combinações, dentro do conteúdo de análise combinatória.

Abaixo, vamos começar uma série de problemas resolvidos, assim como em outros capítulos, para mostrar a eficiência do conhecimento sobre o assunto, assim como a aplicação prática de teoremas e proposições apresentadas.

Questão 3.2. (MORGADO et al. 2006) (pág. 37, questão 29.) Quantos são os jogos de um campeonato disputado por 20 clubes, no qual todos se enfrentam uma única vez?

Resolução. Aplicação direta do conceito de Combinação (Definição 3.1), ficamos com $C(n, p)$, já que não existe ordem entre o enfrentamento de times, logo $C(20, 2) = 190$. $\square$

Resolvendo agora utilizando o SageMath:

Entrada do Bloco de Códigos 12.

```
1 binomial(20,2)
```

Saída do Bloco de Códigos 12.

```
1 190
```

3.1.1 Questões Resolvidas

Questão 3.3. (MORGADO et al. 2006) (pág. 37, questão 31.) De quantos modos se pode iluminar uma sala que possui m lâmpadas?

Resolução. Para cada lâmpada podemos pensar que está acesa ou apagada, então temos 2 opções por lâmpada, isso vai servir para a $l_1, l_2, l_3, \dots, l_m$ ficamos com 2^m possibilidades, obviamente queremos iluminar a sala, então devemos desconsiderar a possibilidade em que todas ficam apagadas, independentemente do número total m de lâmpadas, sempre teremos 1 caso para qualquer m , onde todas estão apagadas. Logo, ficamos com $2^m - 1$. $\square$

Questão 3.4. (Enem 2016) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!}$

b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

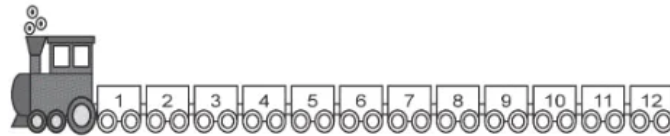
c) $\frac{10!}{2! \times 8!} - 2$

d) $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$

e) $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$

Resolução. Vamos pensar no seguinte: do grupo de 10 jogadores, os únicos que não podem se enfrentar são os canhotos, então podemos considerar TODOS e retirar os casos em que os canhotos se enfrentam. Ficamos com $C(10, 2) - C(4, 2)$, resultando em $\frac{10!}{2!(8)!} - \frac{4!}{2!(2)!}$, logo, alternativa A na prova. $\square$

Questão 3.5. (Enem 2019) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de igual formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por:

- a) $C_{12,4} \times C_{12,3} \times C_{12,3} \times C_{12,2}$
- b) $C_{12,4} + C_{8,3} + C_{5,3} + C_{2,2}$
- c) $C_{12,4} \times 2 \times C_{8,3} \times C_{25}$
- d) $C_{12,4} + 2 + C_{12,3} + C_{12,3}$
- e) $C_{12,4} \times C_{8,3} \times C_{5,3} \times C_{2,2}$

Resolução. Vamos fazer as organizações de acordo com as cores mencionadas, tais escolhas serão feitas conforme a numeração do vagão, agora pintaremos os escolhidos, queremos 4 vagões vermelhos: $C(12, 4)$, após escolher os vagões vermelhos, queremos 3 vagões azuis: $C(8, 3)$, dos 5 restantes, então escolheremos 3 para serem verdes $C(5, 3)$, para terminar, os últimos 2 serão amarelos: $C(2, 2)$, pelo Princípio Multiplicativo ([Definição 2.7](#)), temos: $C(12, 4) \cdot C(8, 3) \cdot C(5, 3) \cdot C(2, 2)$, alternativa E da prova. $\square$

Resolvendo agora utilizando o SageMath:

Entrada do Bloco de Códigos 13.

```
1 C(n,p) = binomial(n,p) #aqui definimos que C(n,p) tem o valor do número
   binomial ao lado
2 C(12,4)*C(8,3)*C(5,3)*C(2,2)
```

Saída do Bloco de Códigos 13.

```
1 277200
```

O único problema ao resolver a questão acima é que o resultado final foi apresentado diretamente. As alternativas para essa questão estão representadas de forma reduzida, apenas como multiplicações de combinações. O cálculo do valor final seria utilizado apenas em situações específicas, como para verificar a necessidade prática ou satisfazer uma curiosidade.

Questão 3.6. (CESPE / CEBRASPE - 2024 - CNJ) Em determinado órgão público, 10 servidores, trabalhando 8 horas por dia, atendem em média 300 pessoas por semana. A idade média desses servidores é 40 anos. Para se somar a esse efetivo de atendimento ao público, foram contratados 6 novos servidores. A partir da situação hipotética apresentada, julgue o item a seguir. Se, na apresentação dos servidores, cada um dos novos servidores tiver apertado a mão de cada um de seus colegas, tanto os novos quanto os antigos, então, nessa situação, a quantidade de apertos de mão foi inferior a 100.

- () Certo
() Errado

Resolução. A questão apresenta várias informações que não são relevantes para a solução do problema. Para determinar a quantidade de apertos de mão, seguimos os seguintes passos:

- Cada um dos 6 novos servidores aperta a mão dos 10 servidores antigos, o que resulta em 6×10 apertos.
- Além disso, os 6 novos servidores apertam as mãos entre si, o que corresponde ao número de combinações de 2 elementos entre eles, dado por $C_{6,2}$.

Entrada do Bloco de Códigos 14.

```
1 6 * 10 + binomial(6, 2)
```

Saída do Bloco de Códigos 14.

```
1 75
```

Como a questão possui nas alternativas “*certo*” ou “*errado*”, podemos afirmar que está certa. □

Observação 3.7. A [Questão 3.6](#) continua com mais perguntas, que não estão inseridas no conteúdo de combinatória; logo, iremos ignorar a continuação.

É importante destacar que, além dos conteúdos abordados anteriormente, a análise combinatória abrange uma vasta gama de outros tópicos que não iremos tratar nesse

documento, tópicos esses mencionados no início desse capítulo, como o arranjo. Embora o arranjo seja semelhante à combinação, a principal diferença entre eles reside na questão da ordem. Em uma combinação, a ordem dos elementos não é relevante, resultando na formação de agrupamentos que podem ser tratados como conjuntos. Por outro lado, no arranjo, estamos lidando com agrupamentos onde a ordem dos elementos é essencial, como em fileiras ou posições, resultando na formação de sequências. A seguir, segue um exemplo que ilustra essa diferença, comparando a fórmula de combinação com a fórmula correspondente ao arranjo:

$$A(n, p) = \frac{n!}{(n - p)!}.$$

Ao realizar operações com arranjos, criamos diferentes sequências organizadas a partir de um conjunto de itens a serem escolhidos. Esses arranjos podem se desdobrar em casos específicos, como arranjos lineares simples, arranjos com repetição, permutações simples, permutações com repetição, permutações circulares e permutações caóticas. Para explorar esses conceitos com mais profundidade, recomenda-se a leitura de materiais de nível médio ou superior sobre análise combinatória, que oferecem detalhes e exemplos claros sobre o tema, como o livro *Fundamentos da matemática elementar: Combinatória e Probabilidade*. (Iezzi et al. 2013).

3.2 Número Binomial

Definição 3.8 (Número Binomial). Em matemática, um número binomial, também conhecido como coeficiente binomial, é um número escrito na forma $\binom{n}{p}$, onde n pode assumir qualquer valor real e p é um inteiro não negativo. Esse valor é descrito por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - p + 1)}{p!}.$$

Esse número pode ser visto como uma generalização da combinação. Quando n é um inteiro não negativo, o resultado coincide com o cálculo de combinações, que é a escolha de p elementos de um conjunto de n elementos sem levar em conta a ordem. Assim, o coeficiente binomial abrange tanto a forma clássica de combinação quanto casos mais gerais, aplicando-se a n reais e inteiros negativos. No caso particular em que $p = 0$, por convenção, temos:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{R}.$$

Exemplos mais tradicionais do coeficiente binomial, como os que comumente vemos em livros de nível médio ou superior, como podemos observar logo abaixo:

Exemplo 3.9. $\binom{2}{0} = 1$, Quando $p = 0$, independente do valor de n , o resultado sempre será 1, contanto que $n \geq p$.

Exemplo 3.10. $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = \frac{20}{2!} = 10$

Exemplo 3.11. $\binom{205}{442} = 0$, como $p > n$ esse binomial não faz tanto sentido quando comparado ao conceito de combinatória, normalmente tem-se que $n \geq p$, sendo assim, podemos associar com a ideia de combinações, já que não há nenhuma maneira de escolher mais elementos do que existem no conjunto, então o número de possibilidades de se realizar isto é exatamente zero.

Exemplo 3.12. $\binom{100}{25}$, como esse valor é muito alto, utilizaremos a ferramenta auxiliar do SageMath para resolver de maneira rápida e fácil.

Entrada do Bloco de Códigos 15.

```
1 binomial(100, 25)
```

Saída do Bloco de Códigos 15.

```
1 242519269720337121015504
```

Logo, $\binom{100}{25} = 242519269720337121015504$

Podemos observar que seguindo essa definição, encontramos valores curiosos para números binomiais, exemplos como:

Exemplo 3.13. $\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2} = \frac{-1/4}{2} = \frac{-1}{8}$

Exemplo 3.14. $\binom{2/5}{3} = \frac{\frac{2}{5}(\frac{2}{5}-1)(\frac{2}{5}-2)}{3!} = \frac{\frac{48}{125}}{6} = \frac{8}{125}$

Exemplo 3.15. $\binom{-3}{4} = \frac{-3(-4)(-5)(-6)}{4!} = \frac{360}{24} = 15$

Exemplo 3.16. $\binom{-2,5}{3} = \frac{-2,5(-3,5)(-4,5)}{3!} = \frac{-39,375}{6} = -6,5625$

Observe que no [Exemplo 3.11](#), por $n < p$ resultou em um coeficiente binomial igual a zero, devido à definição combinatória tradicional, que não admite a escolha de mais elementos do que existem no conjunto. No entanto, nos exemplos subsequentes, mesmo quando $n < p$, obtivemos valores diferentes de zero. Isso ocorre porque, ao considerar n negativo ou fracionário, estendemos o conceito de coeficientes binomiais para além do escopo puramente combinatório, utilizando generalizações matemáticas que permitem tais cálculos e produzem resultados não triviais.

Observação 3.17. Se n e p são números inteiros não negativos, então $\binom{n}{p} = C(n, p)$. Logo, de agora em diante, utilizaremos sempre a notação de número binomial e deixaremos claro sobre os possíveis valores de n e p .

No SageMath o número binomial $\binom{1/2}{4}$ pode ser calculado com o seguinte comando:

Entrada do Bloco de Códigos 16.

```
1 binomial(1/2, 4)
```

Saída do Bloco de Códigos 16.

```
1 -5/128
```

Definição 3.18 (Números Binomiais Complementares). Dois coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{p}$ são complementares se $k + p = n$, onde $n, k, p \geq 0$. Em outras palavras, dois coeficientes binomiais são complementares quando compartilham o mesmo numerador, e a soma de seus denominadores equivale ao valor do numerador. Vamos observar alguns casos:

$$\binom{8}{2} = 28 = \binom{8}{6}, \quad \binom{12}{5} = 792 = \binom{12}{7}, \quad \binom{15}{1} = 15 = \binom{15}{14}.$$

Proposição 3.19. *Números binomiais complementares são iguais entre si.*

Demonstração.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \binom{n}{n-p}.$$

□

Esse resultado da proposição ilustra o conceito de complementaridade entre números binomiais, ressaltando que esses números representam combinações. Ao abordar esse conceito em sala de aula, é útil enfatizar que combinações representam uma forma intuitiva de organizar e contar agrupamentos. Para facilitar o entendimento, sugerimos o uso de objetos físicos, como pilhas, estojos, réguas e apagadores, para demonstrar a escolha de elementos de um conjunto.

Ao selecionar os membros de um grupo, determinamos implicitamente aqueles que não farão parte, ou seja, excluimos alguns elementos. Esse processo de inclusão e exclusão é equivalente em termos de contagem, pois estamos lidando com agrupamentos. De maneira prática, ao calcular uma combinação, escolhemos os elementos sem considerar a ordem, focando apenas em quem participa e em quem é excluído. Essa abordagem ajuda os alunos a perceber que o conceito de contagem envolve uma seleção que define quem faz ou não parte do grupo, tornando o aprendizado mais “palpável à realidade”.

3.3 Triângulo de Pascal

Definição 3.20. O Triângulo de Pascal é uma estrutura matemática que exhibe os coeficientes binomiais $\binom{n}{p}$, disposta em forma de um triângulo infinito, onde $n, p \geq 0$, n representam as linhas e p as colunas, começando com $n, p = 0$, onde $p \leq n$. Abaixo observamos um exemplo que vai até a linha 5 ($n = 5$):

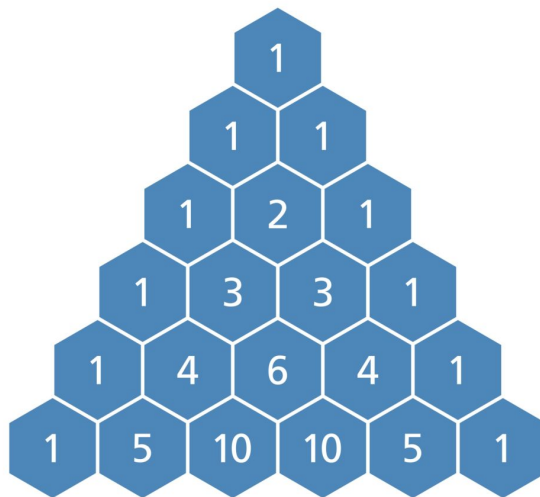


Figura 4 – (Imagem da internet, SITE: <https://www.youcubed.org/pt-br/wim/triangulo-de-pascal-6o-8o-anos/>)

O Triângulo de Pascal é uma disposição de números em forma triangular que tem várias propriedades úteis dentro da matemática, especialmente na teoria dos números e na álgebra. Podemos notar que ele é construído de forma iterativa, onde cada número é a soma dos dois números diretamente acima dele no triângulo; iremos falar sobre essa propriedade na [Proposição 3.21](#) (Relação de Stifel). Como consequência dos binomiais $\binom{n}{0}$ e $\binom{n}{n}$ serem iguais 1, cada linha do triângulo começa com o valor 1 e termina com o valor 1. Dentro de uma análise mais metódica e precisa, o Triângulo de Pascal é um arranjo aritmético infinito que serve para organizar os coeficientes das expansões binomiais. Assim, o estudo do Binômio de Newton não é apenas uma exploração de um conceito matemático isolado, mas uma jornada através de uma rede intrincada de ideias interconectadas, demonstrando a verticalidade inerente à matemática, fazendo referência a menção inicial da [Seção 3.2](#) (Número Binomial).

Observe, primeiramente, na Figura 4, que se trata apenas do início do respectivo Triângulo de Pascal, uma representação finita contendo apenas seis linhas. A disposição binomial contida no triângulo é dada por $\binom{n}{k}$, onde começamos com $\binom{0}{0}$ na primeira linha, $\binom{1}{0}$ e $\binom{1}{1}$ na segunda linha, seguido de $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ e $\binom{2}{2}$ na terceira linha e assim sucessivamente. Para facilitar a construção do Triângulo de Pascal, pode-se utilizar a

Relação de Stifel, tornando o processo mais fácil e intuitivo. Abaixo, podemos verificar a proposição com a Relação de Stifel.

Proposição 3.21 (Relação de Stifel). *A Relação de Stifel expressa que:*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Demonstração. A igualdade pode ser facilmente observada ao se expandir; ficamos com:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

□

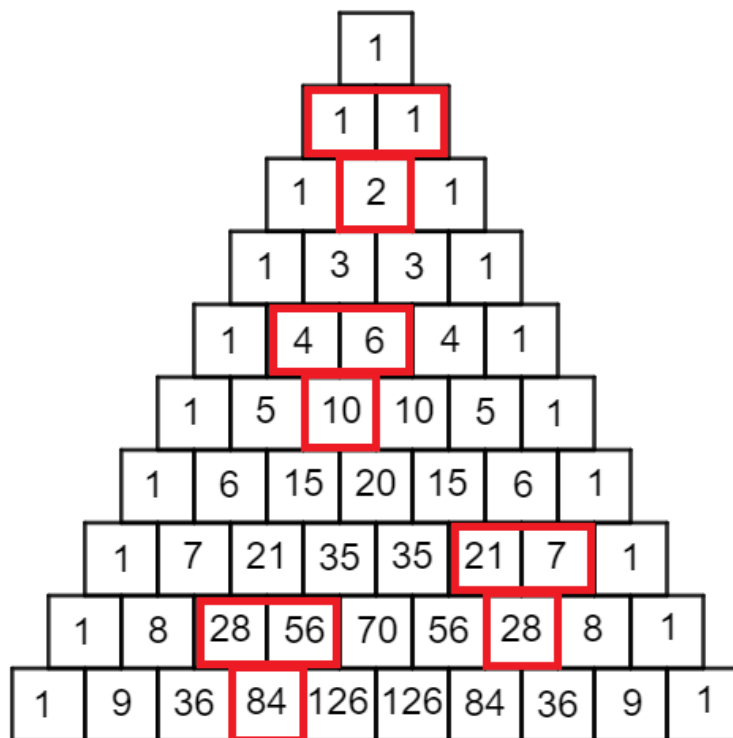


Figura 5 – Produção autoral

A seguir, veremos o *Teorema das Linhas*, uma importante propriedade do Triângulo de Pascal. Esse teorema estabelece que, ao somar os números de qualquer linha, o resultado será sempre uma potência de 2. Em outras palavras, ao selecionar uma linha de número n , a soma de todos os seus elementos será igual a 2^n . O expoente corresponde ao número da linha, considerando que a linha n é aquela que começa com o termo $\binom{n}{0}$.

Por exemplo, a linha correspondente a $n = 3$ (que é a quarta linha, considerando que a contagem começa de $n = 0$ para a primeira linha) tem soma igual a 8, pois $2^3 = 8$.

Teorema 3.22 (Teorema das Linhas). *O Teorema das Linhas diz que, para todas as linhas do Triângulo de Pascal, temos:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demonstração. Ao realizar uma combinação $C(n, k)$, com $0 \leq k \leq n$, temos em cada linha o k variando de 0 até n , como em combinação não existe ordem, estamos contando todos os subconjuntos possíveis de um conjunto com n elementos. A quantidade de subconjuntos de um conjunto com n elementos é dada por 2^n (podemos verificar esse fato rapidamente, analisando elemento a elemento, pensamos que o elemento estará no subconjunto, ou não estará, sendo assim, dois possíveis casos para cada elemento, então teríamos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^n$). $\square$

Podemos revisitar a [Questão 3.3](#) (De quantos modos se pode iluminar uma sala que possui m lâmpadas?) e resolvê-la com base no teorema previamente discutido:

Demonstração. (Caminho 2) Considere que temos m lâmpadas, e desejamos escolher n delas para manter acesas. O número de maneiras de fazer essa escolha é dado por $C(m, n)$. No entanto, como n pode variar entre $0 \leq n \leq m$, precisamos calcular a soma de todos os casos possíveis: $C(m, 0) + C(m, 1) + C(m, 2) + \cdots + C(m, m)$. Essa soma, conforme estabelecido pelo [Teorema 3.22](#) (Teorema das Linhas), resulta em 2^m .

Contudo, no contexto do problema, interessa-nos apenas os casos em que ao menos uma lâmpada está acesa, ou seja, devemos excluir o caso $C(m, 0)$ (nenhuma lâmpada acesa). Assim, o total de modos válidos para iluminar a sala é $2^m - 1$. Essa conclusão também pode ser alcançada ao observar que o número total de subconjuntos das lâmpadas é 2^m , e ao remover o subconjunto vazio (correspondente a $C(m, 0)$), obtemos exatamente o mesmo resultado encontrado anteriormente. $\square$

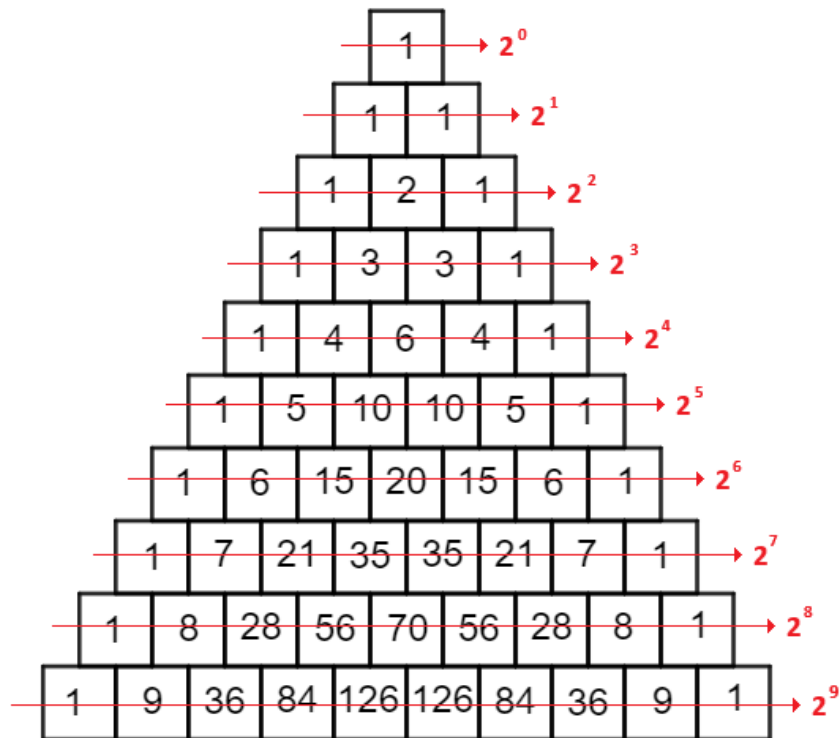


Figura 6 – Produção autoral

Teorema 3.23 (Teorema das Colunas). *O teorema das colunas apresenta que*

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Demonstração. Podemos fazer essa demonstração utilizando da [Proposição 3.21](#) (Relação de Stifel), vamos olhar para a coluna $n + 1$, temos:

$$\begin{aligned}
 \binom{n+1}{n+1} &= \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} \\
 \binom{n+2}{n+1} &= \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} \\
 \binom{n+3}{n+1} &= \binom{n+2}{n} + \binom{n+2}{n+1} \\
 &\vdots \\
 \binom{n+k}{n+1} &= \binom{n+k-1}{n} + \binom{n+k-1}{n+1} \\
 \binom{n+k+1}{n+1} &= \binom{n+k}{n} + \binom{n+k}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Realizando todas as somas e juntando tudo, temos:

$$\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n}{n+1} + \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} + \cdots + \binom{n+k-1}{n} + \binom{n+k}{n}.$$

Observando que $\binom{n}{n+1} = 0$, ficamos com:

$$\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n}.$$

□

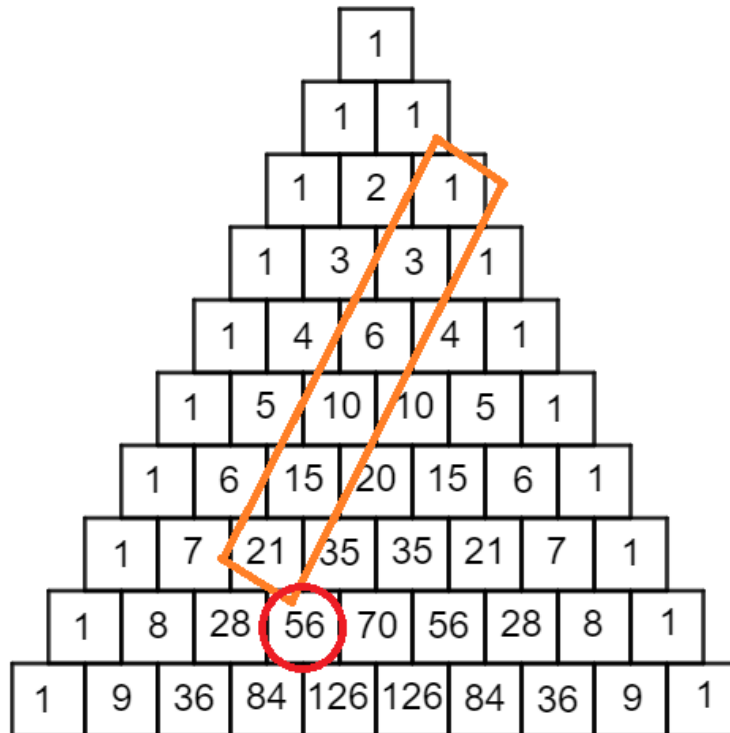


Figura 7 – Produção autoral

Teorema 3.24 (Teorema das Diagonais). *O Teorema das Diagonais apresenta que:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Demonstração. Para fazer essa demonstração vamos reescrever o início do teorema, temos $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k}$, podemos observar que utilizando os respectivos complementares, ficamos com: $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+k}{n}$, já que $\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$; $\binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{1} \cdots \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}$, com essa nova organização, posso utilizar o Teorema das Colunas, então avançando uma unidade na linha e uma unidade na coluna, ficando com $\binom{n+k+1}{n+1}$, como $\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+k+1}{k}$ já que são complementares, ficamos com $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$ de fato. $\square$

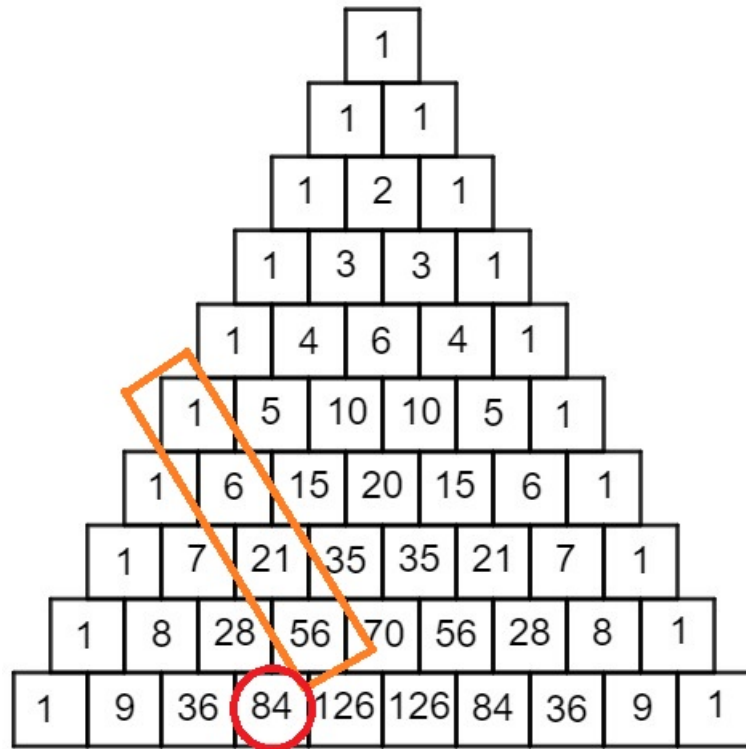


Figura 8 – Produção autoral

3.4 O Triângulo de Pascal no SageMath

O Triângulo de Pascal pode ser explorado de maneira eficaz no ambiente do SageMath. Através de alguns comandos, é possível obter informações de forma prática e imediata, como acessar uma linha específica ou calcular resultados conforme discutido em seções anteriores. Essa ferramenta se mostra extremamente útil e pode ser uma abordagem interessante para apresentar aos alunos, permitindo que eles interajam de forma mais dinâmica com o conteúdo, além de servir para conferir resultados em pesquisas e trabalhos.

3.4.1 Obtendo Linhas

Com o comando a seguir, é possível gerar uma linha específica do Triângulo de Pascal. Basta substituir o valor de n pela ordem da linha desejada, e o SageMath exibirá, termo a termo, os valores correspondentes a essa linha.

Exemplo 3.25.

Entrada do Bloco de Códigos 17.

```
1 n=5                # define n igual a 5
2 l=[]              # define uma lista vazia
3 for k in range(n+1): # faz o k variar de zero até n
4     l.append(binomial(n,k)) # guarda C(n,k) no final da lista l
5 l                 # retorna a lista l
```

Saída do Bloco de Códigos 17.

```
1 [1, 5, 10, 10, 5, 1]
```

Uma maneira mais eficiente e intuitiva de obter o mesmo resultado no SageMath é simplificar o código, reduzindo o número de linhas e comandos sem perder a precisão ou clareza. A seguir, apresento uma versão mais concisa e otimizada. Doravante, alguns dos códigos seguirão esse padrão mais curto e objetivo, mantendo a praticidade e a exatidão dos resultados.

Exemplo 3.26.

Entrada do Bloco de Códigos 18.

```
1 n = 5 # define n igual a 5
2 [binomial(n, k) for k in range(n+1)] #retorna lista de C(n,k), k=0,...,5
```

Saída do Bloco de Códigos 18.

```
1 [1, 5, 10, 10, 5, 1]
```

3.4.2 Obtendo somas de linhas (Teorema das Linhas)

Podemos obter uma soma completa de uma determinada linha, mesmo já conhecendo o resultado pelo Teorema 3.22 (Teorema das Linhas), podemos utilizar esse código abaixo, substituindo n pelo número da linha, para visualizar a soma de determinada linha:

Exemplo 3.27.

Entrada do Bloco de Códigos 19.

```
1 n = 34 # Substitua pelo número da linha
2 sum([binomial(n, k) for k in range(n+1)])
```

Saída do Bloco de Códigos 19.

```
1 17179869184
```

Essa abordagem é, obviamente, apenas outra forma de expressar o mesmo resultado que obteríamos utilizando 2^n , conforme o mesmo teorema. No entanto, ao diversificar a apresentação, demonstramos a versatilidade do conteúdo e oferecemos diferentes alternativas para alcançar a solução. Isso não apenas reforça o entendimento do que foi trabalhado, mas também valida o conhecimento de forma mais ampla, deixando o aprendizado mais dinâmico e interessante.

Exemplo 3.28.

Entrada do Bloco de Códigos 20.

```
1 n = 9 # linha 9
2 sum([binomial(n, k) for k in range(n+1)])
```

Saída do Bloco de Códigos 20.

```
1 512
```

1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
---	---	----	----	-----	-----	----	----	---	---

Figura 9 – Produção autoral (Linha 9)

Note que $2^9 = 512$. Conforme a linha 9, que teremos a seguinte soma: $1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512$.

3.4.3 Teorema das colunas no SageMath

Assim como visto no [Teorema 3.23](#) (Teorema das Colunas), ao somar colunas até uma determinada linha, obteremos o termo do Triângulo de Pascal imediatamente abaixo (na linha seguinte) e na próxima coluna. Para isso, iremos substituir o valor de k conforme a coluna que queremos somar e o valor de n para truncar a última linha, chegamos a esse resultado conforme a linha de códigos abaixo:

Exemplo 3.29.

Entrada do Bloco de Códigos 21.

```
1 k=2
2 n=5
3 sum([binomial(i , k ) for i in range (k , n+1)])
```

Saída do Bloco de Códigos 21.

```
1 20
```

3.4.4 Localizar valores

Podemos localizar um valor específico dentro do Triângulo de Pascal utilizando o código abaixo. Basta substituir o número em `value` no código, e ele informará a linha e a coluna correspondentes a esse valor. É importante lembrar que o Triângulo de Pascal é simétrico, o que significa que valores iguais podem aparecer em posições diferentes. Como todo número natural pertence ao Triângulo de Pascal, qualquer valor natural inserido como `value` sempre resultará em uma localização válida, desde que o intervalo de variação para k seja claramente definido no comando `for k in range`, este comando, indica exatamente este intervalo onde k está inserido.¹

¹ No SageMath (assim como em Python), o comando `for k in range` é usado para iterar sobre um intervalo de valores. Ele é essencial para executar ações repetidamente, com k assumindo cada valor dentro do intervalo definido.

Exemplo 3.30.**Entrada do Bloco de Códigos 22.**

```

1 def find_binomial_position(value):
2     for n in range(value+1):
3         if value in [binomial(n, k) for k in range(n+1)]:
4             return n, [binomial(n, k) for k in range(n+1)].index(value)
5     return None, None
6 linha, coluna = find_binomial_position(126)
7 print(f"O valor {binomial(linha, coluna)} está localizado na linha {
    linha} e coluna {coluna}.")

```

Saída do Bloco de Códigos 22.

```

1 O valor 126 está localizado na linha 9 e coluna 4.

```

3.4.5 Questões Resolvidas

Questão 3.31. (UFRGS - 2014) Considere a configuração dos números dispostos nas colunas e linhas abaixo:

	coluna 0	coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4	coluna 5	coluna 6	coluna 7	..
linha 0	1								
linha 1	1	1							
linha 2	1	2	1						
linha 3	1	3	3	1					
linha 4	1	4	6	4	1				
linha 5	1	5	10	10	5	1			
linha 6	1	6	15	20	15	6	1		
linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	

O número localizado na linha 15 e na coluna 13 é:

- a)15 b)91 c)105 d)120 e)455

Resolução. Notando a disposição, notamos facilmente que é uma organização de um Triângulo de Pascal, na linha 0, coluna zero temos o binomial $\binom{0}{0}$, na linha 15 e coluna 13 temos o $\binom{15}{13}$, que é $\frac{15!}{2!13!} = 15 \cdot 7 = 105$, alternativa C na prova. $\square$

Questão 3.32. (IDECAN - CBM ES - Soldado Combatente - 2022) Determine o valor de X , onde para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a seguinte igualdade: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = X$
a) $X = 2^{n+2}$ b) $X = 2^{n+1}$ c) $X = 2^n$ d) $X = 2^{n-1}$ e) $X = 2^{n-2}$

Resolução. De acordo com o [Teorema 3.22](#) (Teorema das Linhas), a soma dos termos de qualquer linha do Triângulo de Pascal é igual a uma potência de 2. Assim, considerando-se a soma completa da linha n , o resultado será 2^n . Portanto, a alternativa correta para a questão da prova é a letra D. $\square$

Questão 3.33. (MORGADO et al. 2006) (pág. 93, questão 5.) Prove, usando um argumento combinatório, que $C(n, k) = C(n, n - k)$

Resolução. Podemos utilizar o conceito trabalhado na relação entre [Definição 3.18](#) (Números Binomiais Complementares). Argumento combinatório:

“Quando calculamos uma combinação, estamos basicamente agrupando elementos sem nos preocupar com a ordem. O que realmente importa são os elementos que escolhemos. Podemos entender isso de uma maneira mais simples pensando em quem está dentro e quem está fora do grupo.” $\square$

Questão 3.34. (MORGADO et al. 2006) (pág 93, questão 6.) Se A possui 512 subconjuntos, qual é o número de elementos de A?

Resolução. Se A possui 512 subconjuntos. A possui uma determinada quantidade de elementos, que utilizando o conceito de “está inserido ou não está inserido”, ficamos com 2^9 . Podemos consultar de outra forma, resultado da nona fileira do triângulo de Pascal, podemos considerar que foi utilizado o conhecimento do [Teorema 3.22](#) (Teorema das Linhas). Sendo assim, A possui 9 elementos. $\square$

Questão 3.35. Qual o valor da soma: $S = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + \cdots + 99 \cdot 100$

Resolução 1. Observe que S é o seguinte somatório abaixo:

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + \cdots + 99 \cdot 100 \\ &= \sum_{k=4}^{99} k \cdot (k+1) \\ &= \sum_{k=4}^{99} (k^2 + k) \\ &= \left(\sum_{k=4}^{99} k^2 \right) + \left(\sum_{k=4}^{99} k \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{99} k^2 - \sum_{k=1}^3 k^2 \right) + \left(\sum_{k=1}^{99} k - \sum_{k=1}^3 k \right) \end{aligned}$$

Vamos utilizar aqui a fórmula da soma de quadrados, que é dada por $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.²

$$\begin{aligned}
 S &= \left(\frac{99 \cdot 100 \cdot 199}{6} - (1^2 + 2^2 + 3^2) \right) + \left(\frac{99 \cdot 100}{2} - (1 + 2 + 3) \right) \\
 &= \left(\frac{99 \cdot 100 \cdot 199}{6} - 14 \right) + \left(\frac{99 \cdot 100}{2} - 6 \right) \\
 &= (328350 - 14) + (4950 - 6) \\
 &= 328336 + 4944 \\
 &= 333280.
 \end{aligned}$$

□

Resolução 2.

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + \cdots + 99 \cdot 100 \\
 &= \sum_{k=4}^{99} k \cdot (k+1) \\
 &= \sum_{k=1}^{99} k \cdot (k+1) - \sum_{k=1}^3 k \cdot (k+1)
 \end{aligned}$$

Nessa resolução, iremos aplicar o [Teorema 3.23](#) (Teorema das Colunas) e mostrar um exemplo de sua aplicabilidade:

Iremos fazer uma substituição de $k \cdot (k+1)$ por $2! \cdot \binom{k+1}{2}$

$$\begin{aligned}
 2! \cdot \binom{k+1}{2} &= 2! \cdot \frac{(k+1)!}{2! \cdot (k+1-2)!} \\
 &= \frac{(k+1) \cdot k!}{(k-1)!} \\
 &= \frac{(k+1) \cdot k \cdot (k-1)!}{(k-1)!} \\
 &= \frac{(k+1) \cdot k}{1} \\
 &= (k+1) \cdot k
 \end{aligned}$$

Logo, chegamos que $2! \cdot \binom{k+1}{2}$ é exatamente $k \cdot (k+1)$

² Pode ser encontrada e demonstrada por exemplo no documento: <https://www.paulomarques.com.br/arq10-83.htm>

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{99} 2! \cdot \binom{k+1}{2} - \sum_{k=1}^3 2! \cdot \binom{k+1}{2} \\
&= 2 \cdot \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{100}{2} \right) - 2 \cdot \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} \right) \\
&= 2 \cdot \left(\sum_{k=2}^{100} \binom{k}{2} \right) - 2 \cdot \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} \right) \\
&= 2 \cdot \left(\binom{101}{3} - \binom{5}{3} \right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{101 \cdot 100 \cdot 99}{6} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} \right) \\
&= 2 \cdot (161700 - 10) \\
&= 2 \cdot 161690 \\
&= 333280.
\end{aligned}$$

□

No SageMath, a mesma questão poderia ser resolvida utilizando:

Entrada do Bloco de Códigos 23.

```

1 # Definindo a expressão para a soma
2 S = sum(k * (k + 1) for k in range(4, 99 + 1))
3
4 # Mostrando o resultado
5 S

```

Saída do Bloco de Códigos 23.

```

1 333280

```

Questão 3.36. Qual o valor da soma $S = \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n$?

Demonstração. (Resolução)

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} C_n^k \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{n+1} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^{k+1} \\
 &= \frac{1}{n+1} \left(-C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + \underbrace{C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \cdots + C_{n+1}^{n+1}}_{=2^{n+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - n - 2).
 \end{aligned}$$

□

Questão 3.37. Indique o valor da soma S dada por $S = \sum_{k=1}^{10} k^2(k-1)$.

Demonstração. (Resolução) $\sum_{k=1}^{10} k^2(k-1) = 1^2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 2 + \cdots + 10^2 \cdot 9 = 0 + 4 + 18 + 48 + 100 + 180 + 294 + 448 + 648 + 900 = 2640$. □

Essa foi um pouco mais simples, pois o número de termos era bem menor do que na questão anterior, mas mesmo assim, seria bem mais simples resolver com o auxílio do SageMath:

Entrada do Bloco de Códigos 24.

```

1 # Defina o somatório usando a função sum
2 S = sum(k^2 * (k - 1) for k in range(1, 11))
3
4 # Exiba o resultado
5 S

```

Saída do Bloco de Códigos 24.

```

1 2640

```

Questão 3.38. Qual o valor dessa soma: $S = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + n^2 \cdot (n+1)$?

Resolução. Podemos reescrever a soma como:

$$S = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + n^2 \cdot (n+1) = \sum_{k=1}^n k^2 \cdot (k+1),$$

o que nos leva a:

$$S = \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2.$$

Para aplicar o Teorema das Colunas, é necessário que os somatórios envolvam produtos de números consecutivos, de forma que possamos expressá-los em termos de combinações binomiais. Sabemos que:

$$k(k+1)(k+2) = 3! \cdot \binom{k+2}{3}.$$

Dessa forma, reescrevemos $k^3 + k^2$ como uma combinação linear de termos da forma $k(k+1)(k+2)$, $k(k+1)$, k , e uma constante:

$$k^3 + k^2 = A \cdot k(k+1)(k+2) + B \cdot k(k+1) + C \cdot k + D.$$

Expandindo os termos:

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+2) &= k^3 + 3k^2 + 2k, \\ k(k+1) &= k^2 + k, \\ k &= k, \\ D &= \text{constante.} \end{aligned}$$

Substituímos na equação e juntamos os coeficientes:

$$k^3 + k^2 = A \cdot k^3 + (3A + B) \cdot k^2 + (2A + B + C) \cdot k + D.$$

Igualando os coeficientes de k^3 , k^2 , k , e o termo constante:

$$\begin{cases} A = 1, \\ 3A + B = 1 \Rightarrow B = -2, \\ 2A + B + C = 0 \Rightarrow C = 0, \\ D = 0. \end{cases}$$

Portanto:

$$k^3 + k^2 = k(k+1)(k+2) - 2k(k+1)$$

Substituímos essa expressão na soma original:

$$S = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) - 2k(k+1)$$

$$S = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) - 2 \sum_{k=1}^n k(k+1)$$

Utilizando o Teorema das Colunas, sabemos que:

$$k(k+1)(k+2) = 3! \cdot \binom{k+2}{3}, \quad k(k+1) = 2! \cdot \binom{k+1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = 6 \cdot \binom{n+3}{4}, \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) = 2 \cdot \binom{n+2}{3}$$

$$S = 6 \cdot \binom{n+3}{4} - 4 \cdot \binom{n+2}{3}$$

Substituimos na soma:

$$\binom{n+3}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}, \quad \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$

$$\begin{aligned} S &= 6 \cdot \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24} - 4 \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{6} \\ &= \frac{6(n+3)(n+2)(n+1)n}{24} - \frac{16(n+2)(n+1)n}{24} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n(6n+2)}{24} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}. \end{aligned}$$

□

Entrada do Bloco de Códigos 25.

```
1 n, k = var('n, k')
2 sum((k^2)*(k+1), k, 1, n)
```

Saída do Bloco de Códigos 25.

```
1 (1/4)*n^4 + (5/6)*n^3 + (3/4)*n^2 + (1/6)*n
```


4 Binômio de Newton

O Teorema do Binômio de Newton é uma regra matemática que nos ajuda a expandir expressões que envolvem a elevação de uma soma a uma potência, ou como encontrado em qualquer pesquisa rápida no google: “é uma fórmula matemática que fornece a expansão de potências de Binômios” (<https://shortlurl.com/BinomioDeNewtonGOOGLE>). Mas o que está por trás disso? Esse é o conceito básico que é mostrado a nível de Ensino Médio, essa é uma frase comum ao se iniciar o assunto pela primeira vez para os jovens nas escolas ou cursinhos. Mas, na realidade, e se o Binômio de Newton nem for, de fato, de Newton? E mais, e se a exigência de que a potência n em $(x + a)^n$ deve ser um inteiro positivo, como, por exemplo, traz o livro de Morgado (MORGADO et al. 2006, p. 97), dentre muitos outros, de fato não precisar ser um inteiro positivo? O que aconteceria?

4.1 A história do Binômio de Newton



Figura 10 – Imagem da internet, retirada do site istockphoto.¹

Isaac Newton foi físico, matemático e astrônomo inglês, nasceu em 25 de dezembro de 1642 na cidade de Woolsthorpe, Lincolnshire (Franco, G. 2024). Newton estudou a expansão de potências de binômios como parte de seu interesse mais amplo na matemática e na física. Ele estava profundamente interessado na natureza do movimento, na descrição matemática dos fenômenos físicos e na resolução de problemas práticos e teóricos que surgiam em suas investigações.

¹ <https://www.istockphoto.com/br/vetor/isaac-newton-gm96372785-11723925/>

Ao estudar a expansão de potências de binômios, Newton estava explorando as propriedades dos polinômios e buscando métodos para manipulá-los de forma mais eficaz. Isso era relevante para várias áreas da matemática e da física. Por exemplo, a expansão de binômios é fundamental na teoria das séries infinitas, uma ferramenta essencial em cálculo diferencial e integral. Além disso, muitos problemas físicos podem ser formulados em termos de equações polinomiais, e a capacidade de expandir essas expressões em séries permitiu a Newton resolver problemas relacionados ao movimento dos corpos celestes e outros fenômenos físicos. Um artigo que trata bastante da história matemática é (Merzbach e Boyer 2011), também podemos visitar no documento *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (Newton 1990, p. 23), onde ele fala que “*Our author first invented his celebrated BINOMIAL THEOREM. And then, applying this Theorem to the rectification of curves, and to the determination of the surfaces and contents of solids, and the position of their centres of gravity, he discovered the general principle of deducing the areas of curves from the ordinate, by considering the area as a nascent quantity, increasing by continual fluxion in the proportion of the length of the ordinate, and supposing the abscissa to increase uniformly in proportion to the time.*”².

A expansão de potências de binômios tem diversas aplicações práticas em áreas como a ciência e a engenharia. Por exemplo, em probabilidade e estatística, é utilizada para calcular probabilidades em experimentos aleatórios. Na ciência da computação, é fundamental para o desenvolvimento de algoritmos e para a modelagem matemática de sistemas complexos. Essas aplicações são discutidas com mais detalhes no capítulo 1.4 do livro de Ross (Ross et al. 1976).

Newton desenvolveu a famosa fórmula para a expansão para o que conhecemos hoje como “Binômio de Newton”, enquanto estudava a expansão de potências de binômios. Ele publicou sua descoberta em seu trabalho *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (Newton 1990), publicado em 1687. Neste trabalho, Newton introduziu a ideia de que qualquer polinômio pode ser expandido como uma série infinita usando os Binômios de Newton. Embora Isaac Newton seja comumente reconhecido como o responsável por formalizar a expansão binomial na forma amplamente conhecida hoje, evidências históricas indicam que versões simplificadas desse conceito já eram familiares na China e na Índia muito antes do século XVII. Segundo Letícia Conrado (Conrado), “Pelo levantamento bibliográfico em livros de história da matemática pode-se evidenciar que antes de Newton nascer já existia o conceito do Binômio “de Newton”. Isso levou a nomes de vários matemáticos, sem que fosse possível determinar quem seria o verdadeiro autor”,

² Tradução autoral: Nosso autor primeiro inventou seu célebre Teorema do Binômio de Newton. E então, aplicando este Teorema à retificação de curvas, à determinação das superfícies e volumes dos sólidos e à localização de seus centros de gravidade, ele descobriu o princípio geral de deduzir as áreas das curvas a partir da ordenada, considerando a área como uma quantidade nascente, que aumenta por fluxo contínuo na proporção do comprimento da ordenada, e supondo que a abscissa aumenta uniformemente em proporção ao tempo.

porém, Newton acabou levando crédito pelo estudo das expansões binomiais, devido à sua contribuição e influência na época, mas, nesse artigo, ele indica que provavelmente o teorema binomial surgiu na China.

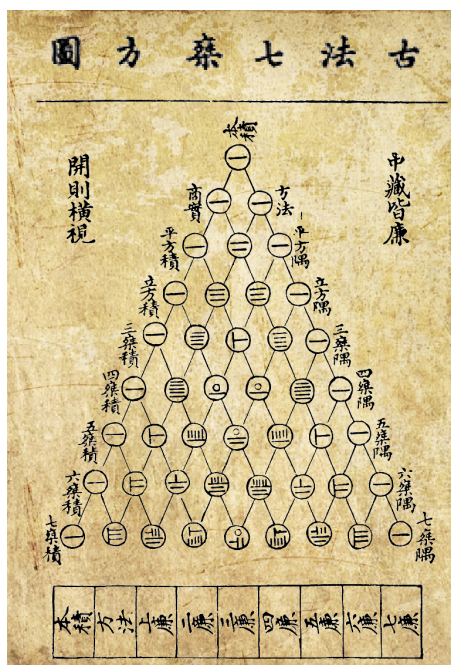


Figura 11 – (Imagem da internet, SITE <https://numerentur.org/triangulo-de-pascal-tartaglia/>)

A matemática chinesa desfrutou de um desenvolvimento significativo ao longo dos séculos, como evidenciado por obras antigas como o *Nove Capítulos da Arte Matemática* (Yong 1994), datando de aproximadamente 200 a.C. Neste contexto, encontramos indícios de técnicas para expandir expressões algébricas que ecoam a ideia da expansão binomial. Ademais, os matemáticos chineses desenvolveram métodos para resolver equações polinomiais que englobam termos binomiais.

Por outro lado, na Índia, figuras matemáticas antigas como Brahmagupta e Bhaskara II, que floresceram entre os séculos VII e XII, também contribuíram para o desenvolvimento de conceitos correlatos à expansão binomial. Em suas obras, incluindo tratados sobre álgebra e teoria dos números, observa-se a utilização de métodos análogos à expansão binomial para a resolução de problemas matemáticos. Como por exemplo no artigo *Rahmagupta's theorems and recurrence relations* (Swamy 1998).

4.2 Conceitos básicos

O Binômio de Newton é um conceito fundamental na álgebra, sendo amplamente utilizado na expansão de expressões binomiais elevadas a uma potência específica. Este tópico, essencial para compreender a manipulação de polinômios e suas aplicações em diversas áreas da matemática e da ciência, tem sido objeto de estudo e aplicação desde os tempos de Isaac Newton. A ideia central por trás do Binômio de Newton reside na capacidade de expandir um binômio como uma sequência de termos, com termos que podem ser expressos em função dos coeficientes do binômio original e dos expoentes presentes em cada termo.

Neste trabalho, exploraremos os conceitos básicos do Binômio de Newton, desde sua definição até sua aplicação prática em problemas matemáticos e científicos, incluindo problemas mais desafiadores. Ao compreender os fundamentos do Binômio de Newton, seremos capazes de analisar e resolver uma variedade de problemas matemáticos e científicos de forma mais eficiente e precisa, chegando então aos problemas envolvendo Binômios de Newton com expoentes fracionários, fazendo uso do *software* SageMath em alguns momentos.

Em seguida, vamos explorar e compreender o comportamento dos expoentes fracionários, um caso pouco usual ao se tratar do Binômio de Newton.

Teorema 4.1 (Binômio de Newton). *A expansão de $(x + y)^n$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$, é dada por:*

$$(x + y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} y^p.$$

Demonstração. Temos como base de indução que a fórmula vale para $n = 0$ e $n = 1$, para $n = 0$ temos $(x + y)^0$, qualquer $x + y$ elevado a zero será 1, onde $x \neq -y$. Para $(x + y)^1 = x + y$, válido para ambos.

A hipótese de indução é supor que a forma é válida para um certo valor de n , isto é, assumimos que $(x + y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} y^p$ é verdadeiro. Queremos mostrar que a fórmula é válida para $n + 1$, utilizamos a identidade algébrica.

Multiplicando a igualdade $(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot y + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^2 + \dots + \binom{n}{n} y^n$ por $(x + y)$, resulta que $(x + y)^{n+1}$ é igual a:

$$\underbrace{\binom{n}{0} x^{n+1} + \binom{n}{1} x^n y + \dots + \binom{n}{n} x y^n}_{\text{multiplicação por } x} + \underbrace{\binom{n}{0} x^n y + \binom{n}{1} x^{n-1} y^2 + \dots + \binom{n}{n} y^{n+1}}_{\text{multiplicação por } y}.$$

Note que temos $n - 1$ pares de monômios idênticos, na qual, os dois coeficientes desses monômios são dois números binomiais consecutivos de uma mesma linha do Triângulo

de Pascal. Portanto, podemos utilizar a [Proposição 3.21](#) (Relação de Stifel) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \binom{n}{1}x^n \cdot y + \binom{n}{0}x^n \cdot y &= \binom{n+1}{1}x^n \cdot y \\ \binom{n}{2}x^{n-1} \cdot y^2 + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot y^2 &= \binom{n+1}{2}x^{n-1} \cdot y^2 \\ &\vdots \\ \binom{n}{n}x \cdot y^n + \binom{n}{n-1}x \cdot y^n &= \binom{n+1}{n}x \cdot y^n. \end{aligned}$$

Resultando em:

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n \cdot y + \binom{n+1}{2}x^{n-1} \cdot y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^{n+1}.$$

Como $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, concluímos que

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^n \cdot y + \binom{n+1}{2}x^{n-1} \cdot y^2 + \cdots + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1}$$

Logo, pelo princípio de indução finita

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}x^{n-p}y^p$$

é válido para todo n natural, com x e y reais. □

No teorema do Binômio de Newton, x e y podem ser quaisquer números reais, e para utilizar a fórmula foi mostrado que n é um número natural. Observe que para n natural, a expansão resulta em uma soma finita, o que simplifica a manipulação da expressão.

No entanto, a fórmula apresentada **não** é válida para qualquer número real n . No [Capítulo 5](#), iremos generalizar o Binômio de Newton para abordar casos em que n não seja um número natural. Para tais valores, a expansão exige uma abordagem distinta, baseada em séries e nas condições de convergência associadas. Como exemplo, utilizaremos essa estratégia para calcular aproximações de raízes de números naturais, aplicando a fórmula $x^{1/2} = \sqrt{y} \cdot \left(1 + \frac{x-y}{y}\right)^{1/2}$. Nesse caso, x é tomado como natural, y como um valor com raiz exata, e a condição $|x| > |y|$ garante a convergência da série. Essa abordagem atende às condições necessárias e permite a aplicação do teorema em contextos mais amplos e avançados.

A *Soma dos Coeficientes da Expansão Binomial* de $(x+y)^n$ pode ser obtida de forma simples ao substituir $x = y = 1$ na expressão. Nesse caso, a soma corresponde ao valor 2^n , já que $(1+1)^n = 2^n$. Essa abordagem é útil para calcular diretamente a soma dos coeficientes sem precisar desenvolver toda a expansão binomial.

Exemplo 4.2. Considere a expansão de $(x + y)^3$. Os coeficientes da expansão são 1, 3, 3 e 1. Somando esses valores, temos $1 + 3 + 3 + 1 = 8$. Substituindo diretamente $x = y = 1$, temos $(1 + 1)^3 = 2^3 = 8$, confirmando o resultado da soma da linha 3 dos coeficientes binomiais.

Exemplo 4.3. Calcular a soma dos coeficientes do polinômio: $(x^2 + 3y^3)^5$

$$\begin{aligned} (x^2 + 3y^3)^5 \\ (1^2 + 3 \cdot 1^3)^5 \\ (1 + 3)^5 \\ 4^5 = 1024 \end{aligned}$$

Observe que não é necessário realizar a expansão completa do polinômio; basta substituímos x e y por 1 para obter o resultado.

Agora, vamos calcular essa mesma soma utilizando o SageMath. Para isso, inserimos o polinômio na linha de código e substituímos x e y por 1.

Entrada do Bloco de Códigos 26.

```
1 var( 'x', y')
2 expand((x^2 + 3*y^3)^5).subs(x == 1, y == 1)
```

Saída do Bloco de Códigos 26.

```
1 1024
```

Definição 4.4 (Termo geral do Binômio de Newton). Dado um binômio da forma $(a + b)^n$, podemos expandi-lo como uma soma de termos individuais envolvendo potências das variáveis a e b e coeficientes binomiais que dependem do expoente n .

O termo geral na expansão do binômio $(a + b)^n$ pode ser expresso pela seguinte fórmula:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

onde:

- k varia de 0 a n , ou seja, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.
- T_{k+1} representa o $(k + 1)$ -ésimo termo da expansão binomial,
- $\binom{n}{k}$ é o coeficiente binomial, calculado por $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, que representa o número de maneiras de escolher k elementos de um conjunto de n elementos,

- a^{n-k} é a potência de a presente no termo,
- b^k é a potência de b presente no termo,

A expressão acima nos permite calcular diretamente qualquer termo específico da expansão, sem a necessidade de desenvolver completamente o binômio.

Exemplo de Aplicação

Para ilustrar a aplicação do termo geral, considere a expansão de $(x+y)^4$. Utilizando a fórmula do termo geral, temos:

$$T_{k+1} = \binom{4}{k} \cdot x^{4-k} \cdot y^k$$

Para $k = 0$:

$$T_1 = \binom{4}{0} \cdot x^4 \cdot y^0 = x^4.$$

Para $k = 1$:

$$T_2 = \binom{4}{1} \cdot x^3 \cdot y = 4x^3y.$$

Para $k = 2$:

$$T_3 = \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 = 6x^2y^2.$$

Este método pode ser repetido para obter todos os termos da expansão de $(x+y)^4$, sem expandir o binômio de forma completa.

4.2.1 Comandos do Sage Sobre Expansão Binomial

Para realizar expansões binomiais no SageMath, existem diversos comandos que facilitam a manipulação de expressões e a visualização dos termos de uma expansão. Abaixo, apresento uma lista dos principais comandos e suas funcionalidades, que podem ser úteis para explorar o Binômio de Newton em diferentes contextos:

- **expand()**: Esse comando permite expandir diretamente expressões do tipo $(a+b)^n$, exibindo cada termo da expansão binomial.
- **binomial(n, k) com for**: Utilizando o comando `binomial()` em um loop `for`, é possível construir manualmente a expansão de $(a+b)^n$, termo a termo, identificando os coeficientes binomiais explicitamente.

- **Expansão de Expoentes Não Inteiros:** Para expoentes fracionários ou negativos, é possível gerar uma série com aproximação, listando os primeiros termos da expansão infinita usando uma combinação de `binomial(n, k)` com um loop, quando $|x| < 1$.
- **Soma de Série com `binomial(n, k)`:** Para somar um número finito de termos da expansão de $(1 + x)^n$, a expressão `sum()` combinada com `binomial()` permite calcular o valor de cada termo até uma ordem especificada.

Esses comandos fornecem uma base para explorar tanto expansões finitas quanto séries infinitas, tornando possível a análise e a manipulação de expressões binomiais em diversos contextos. Tudo vai depender de como queremos apresentar e da necessidade do problema em questão.

4.2.2 Questões Resolvidas

Exercício 4.5. (Faap-SP) O sexto termo do desenvolvimento de $(x + 2)^8$ pelo Binômio de Newton é:

Resolução. Para encontrar o sexto termo da expansão de $(x + 2)^8$, utilizamos a fórmula do termo geral descrita na [Definição 4.4](#), que é dada por:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Aqui, temos $n = 8$, $a = x$, $b = 2$, e buscamos o sexto termo, o que significa $k + 1 = 6$. Assim, $k = 5$. Substituímos esses valores na fórmula:

$$T_6 = \binom{8}{5} \cdot x^{8-5} \cdot 2^5.$$

Calculando cada parte isoladamente:

- $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$
- $x^{8-5} = x^3$
- $2^5 = 32$

Logo, ficamos com:

$$T_6 = 56 \cdot x^3 \cdot 32 = 1792x^3.$$

□

Exercício 4.6. (Autorial) Calcule o desenvolvimento da seguinte expressão $(3x - 4y)^3$.

Resolução. Utilizando o Teorema 4.1 (Binômio de Newton), temos:

$$\begin{aligned}(3x - 4y)^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (3x)^{3-k} \cdot (-4y)^k \\(3x - 4y)^3 &= \binom{3}{0} (3x)^3 + \binom{3}{1} (3x)^2 \cdot (-4y)^1 + \binom{3}{2} (3x)^1 \cdot (-4y)^2 + \binom{3}{3} (3x)^0 \cdot (-4y)^3 \\(3x - 4y)^3 &= 27x^3 + 3 \cdot 9x^2 \cdot (-4y) + 3 \cdot 3x^1 \cdot (16y^2) + 1 \cdot (-64y^3) \\(3x - 4y)^3 &= 27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3\end{aligned}$$

Observe abaixo essa mesma resolução utilizando o SageMath:

Entrada do Bloco de Códigos 27.

```
1 x, y = var('x, y')
2 binomio = (3*x - 4*y)^3
3 binomio.expand()
```

Saída do Bloco de Códigos 27.

```
1 27*x^3 - 108*x^2*y + 144*x*y^2 - 64*y^3
```

□

Exercício 4.7. (Questão CONSESP Concursos, 2018) Calcule: $(x + 5)^4$ é equivalente a:

- a) $x^4 - 20x^3 + 150x^2 + 500x + 625$
- b) $-x^4 + 20x^3 + 150x^2 + 500x + 625$
- c) $x^4 + 20x^3 + 150x^2 + 500x + 625$
- d) $x^4 + 20x^3 - 150x^2 + 500x + 625$

Resolução. Basta aplicar o conceito da expansão do Binômio de Newton, temos $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, substituindo a e b , respectivamente por x e 5 , assim como n por 4 , onde $(x + 5)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} x^{4-k} 5^k$ ficamos com $\binom{4}{0} x^4 \cdot 5^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot 5^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot 5^2 \dots + \binom{4}{4} x^0 \cdot 5^4$, obviamente devemos assumir que $x \neq 0$, pois 0^0 é indeterminado. Chegamos finalmente em $x^4 + 20x^3 + 150x^2 + 500x + 625$, Letra C na prova. □

Exercício 4.8. (Questão UNICENTRO - UNICENTRO, 2018) O coeficiente do terceiro termo do Binômio de Newton $(x - 3)^5$ é:

- a) 5

- b) 15
- c) 81
- d) 90
- e) 405

Resolução. Aplicando a [Definição 4.1](#) (Binômio de Newton), já que a ordem dos binômios à frente são: $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$ e $\binom{5}{2}$, primeiro, segundo e terceiro, respectivamente. Então observamos que o terceiro coeficiente está no termo $\binom{5}{2}x^3 \cdot (-3)^2$, desenvolvendo:

$$\begin{aligned} 10 \cdot x^3 \cdot 9 \\ 10 \cdot 9 \cdot x^3 \\ 90x^3 \end{aligned}$$

Logo, o coeficiente em questão é 90, alternativa D na prova. $\square$

Exercício 4.9. (FGV - Vestibular, 2016) O coeficiente de x^{12} na expansão de $(1+x^4+x^5)^{10}$ é igual a:

- a) 120
- b) 90
- c) 81
- d) 60
- e) 54

Resolução.

$$\begin{aligned} (1+x^4+x^5)^{10} &= (1+x^4(1+x))^{10} \\ &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 1^{10-k} \cdot (x^4 \cdot (1+x))^k \\ &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{4k} \cdot (1+x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{10} \left[\binom{10}{k} \cdot x^{4k} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} 1^{k-p} \cdot x^p \right] \\ &= \sum_{k=0}^{10} \cdot \sum_{p=0}^k \cdot \binom{10}{k} \cdot \binom{k}{p} \cdot x^{4k} \cdot x^p \\ &= \sum_{k=0}^{10} \cdot \sum_{p=0}^k \cdot \binom{10}{k} \cdot \binom{k}{p} \cdot x^{4k+p}. \end{aligned}$$

Para surgir o termo em x^{12} devemos buscar o $4k + p = 12$, com $k, p \in \mathbb{N}$, e $k \leq 10$ e $p \leq k$. Para satisfazer essa equação, precisamos ter $k = 3$ e $p = 0$. Assim, chegamos ao seguinte termo:

$$\frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{3}{0} \cdot x^{4 \cdot 3 + 0}}{120 \cdot 1 \cdot x^{12}} = 120x^{12}$$

Logo, o coeficiente do termo com x^{12} é 120, alternativa letra A na prova. $\square$

Usando o Sage, podemos obter todos os coeficientes da expansão de duas maneiras:

Entrada do Bloco de Códigos 28.

```
1 ((1 + x^4 + x^5)^10).expand()
```

Saída do Bloco de Códigos 28.

```
1 x^50 + 10*x^49 + 45*x^48 + 120*x^47 + 210*x^46 + 262*x^45 + 300*x^44 +
  480*x^43 + 885*x^42 + 1270*x^41 + 1306*x^40 + 1200*x^39 + 1620*x^38 +
  2610*x^37 + 3160*x^36 + 2640*x^35 + 2100*x^34 + 2880*x^33 + 4245*x
  ^32 + 4200*x^31 + 2730*x^30 + 2100*x^29 + 3270*x^28 + 4200*x^27 +
  3150*x^26 + 1512*x^25 + 1470*x^24 + 2520*x^23 + 2520*x^22 + 1260*x^21
  + 462*x^20 + 840*x^19 + 1260*x^18 + 840*x^17 + 210*x^16 + 120*x^15 +
  360*x^14 + 360*x^13 + 120*x^12 + 45*x^10 + 90*x^9 + 45*x^8 + 10*x^5
  + 10*x^4 + 1
```

Nesta segunda forma, o Sage exhibe uma lista na qual cada entrada é uma lista com o par: coeficiente e expoente do x .

Entrada do Bloco de Códigos 29.

```
1 ((1 + x^4 + x^5)^10).coefficients()
```

Saída do Bloco de Códigos 29.

```

1 [[1, 0], [10, 4], [10, 5], [45, 8], [90, 9], [45, 10], [120, 12], [360,
  13], [360, 14], [120, 15], [210, 16], [840, 17], [1260, 18], [840,
  19], [462, 20], [1260, 21], [2520, 22], [2520, 23], [1470, 24],
  [1512, 25], [3150, 26], [4200, 27], [3270, 28], [2100, 29], [2730,
  30], [4200, 31], [4245, 32], [2880, 33], [2100, 34], [2640, 35],
  [3160, 36], [2610, 37], [1620, 38], [1200, 39], [1306, 40], [1270,
  41], [885, 42], [480, 43], [300, 44], [262, 45], [210, 46], [120,
  47], [45, 48], [10, 49], [1, 50]]

```

Se o expoente for muito grande a saída do código poderá ser bastante extensa. Podemos combinar os métodos anteriores para obter diretamente o coeficiente:

Entrada do Bloco de Códigos 30.

```

1 p = ((1 + x^4 + x^5 )^10).expand()
2 p.coefficient(x,12)

```

Saída do Bloco de Códigos 30.

```

1 120

```

Ou, podemos escrever um pouco mais de código para obter exatamente o par: “[coeficiente, expoente]” que precisamos:

Entrada do Bloco de Códigos 31.

```

1 # Definir a variável
2 x = var('x')
3
4 # Definir a expressão
5 expr = (1 + x^4 + x^5)^10
6
7 # Expandir a expressão
8 expanded_expr = expr.expand()
9
10 # Obter o coeficiente do termo x^12
11 coef_x12 = expanded_expr.coefficient(x, 12)
12
13 # Exibir o coeficiente e a potência
14 print(f'Coeficiente: {coef_x12}, Potência do x: 12')

```

Saída do Bloco de Códigos 31.

```

1 Coeficiente: 120, Potência do x: 12

```

Exercício 4.10. (UEPB) A soma dos coeficientes no desenvolvimento do binômio $(x + y)^n$ é:

- a) 6^n
- b) n^2
- c) 2^{n+1}
- d) 2^n
- e) $n!$

Resolução. Para determinar a soma dos coeficientes no desenvolvimento de $(x + y)^n$, aplicamos o mesmo raciocínio apresentado nos exemplos anteriores. Conforme discutido, a soma dos coeficientes é obtida substituindo-se x e y por 1 na expressão $(x + y)^n$.

Assim, temos:

$$(x + y)^n \implies (1 + 1)^n = 2^n$$

□

Essa abordagem já foi demonstrada nos exemplos anteriores ([Exemplos 4.2 e 4.3](#)), como na soma dos coeficientes de $(x^2 + 3y^3)^5$, em que substituímos as variáveis por 1 para encontrar a soma. O mesmo princípio se aplica aqui, levando diretamente à resposta correta: 2^n , que corresponde ao item d.

Exercício 4.11. Determine o termo máximo do desenvolvimento de $\left(\frac{1}{2} + 1\right)^{80}$.

Resolução. O termo geral do desenvolvimento é dado por

$$T_{k+1} = \binom{80}{k} \cdot \frac{1}{2^{80-k}}.$$

Para encontrar o termo máximo, comparamos T_k com o termo anterior T_{k-1} :

$$T_{k+1} > T_k.$$

Substituindo as expressões, temos:

$$\binom{80}{k} \cdot \frac{1}{2^{80-k}} > \binom{80}{k-1} \cdot \frac{1}{2^{81-k}}.$$

Expandindo os binomiais:

$$\frac{80!}{k!(80-k)!} \cdot \frac{1}{2^{80-k}} > \frac{80!}{(k-1)!(81-k)!} \cdot \frac{1}{2^{81-k}}.$$

Simplificando:

$$\frac{(81-k)!}{(80-k)!} > \frac{k!}{(k-1)!} \cdot \frac{2^{80-k}}{2^{81-k}},$$

que resulta em:

$$81 - k > k \cdot \frac{1}{2}.$$

Resolvendo:

$$162 - 2k > k,$$

$$162 > 3k,$$

$$k < 54.$$

Portanto, o termo máximo ocorre para $k = 53$.

Substituímos $k = 53$ na fórmula do termo geral para obter o valor do termo máximo:

$$\begin{aligned} T_{54} &= \binom{80}{53} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{80-53} \cdot 1^{53} \\ &= 1537519631667900668480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{27} \cdot 1 \\ &= 1,14554139350943 \times 10^{13} \\ &= 11.455.413.935.094,3. \end{aligned}$$

□

No SageMath, foi desenvolvida uma função que calcula o termo máximo e o termo mínimo do desenvolvimento de um binômio. Além disso, essa função gera um gráfico que ilustra os valores de cada termo da expansão, proporcionando uma visualização clara da distribuição e do comportamento dos coeficientes.

Entrada do Bloco de Códigos 32.

```

1 def termos_binomio(x, a, n, formula=false):
2     ltn = []
3     ltf = []
4     for i in range(n+1):
5         ltn.append(binomial(n,i)*x^(n-i)*a^i)
6         ltf.append('C(%s,%s)*(%s)^(n-i)*(%s)^i' %(n, i, x, a, n-i))
7
8     vmax = max(ltn)
9     indice_max = ltn.index(vmax)+1
10    print('O termo máximo é:')
11    print('T_%s = %s' %(indice_max, ltf[indice_max-1]))

```

```

12     print('      = %s' %vmax)
13     print('      = %s' %(vmax).n())
14
15     vmin = min(ltn)
16     indice_min = ltn.index(vmin)+1
17     print('0 termo mínimo é:')
18     print('T_%s = %s' %(indice_min, ltf[indice_min-1]))
19     print('      = %s' %vmin)
20     print('      = %s' %(vmin).n())
21     print('Gráfico dos termos:')
22     show(list_plot(ltn), figsize=[4,3])
23 termos_binomio(1/2, 1, 80)

```

Saída do Bloco de Códigos 32.

```

1 0 termo máximo é:
2 T_54 = C(80,53)*(1)^53*(1/2)^27
3      = 24023744244810947945/2097152
4      = 1.14554139350943e13
5 0 termo mínimo é:
6 T_1 = C(80,0)*(1)^0*(1/2)^80
7      = 1/1208925819614629174706176
8      = 8.27180612553028e-25
9 Gráfico dos termos:

```

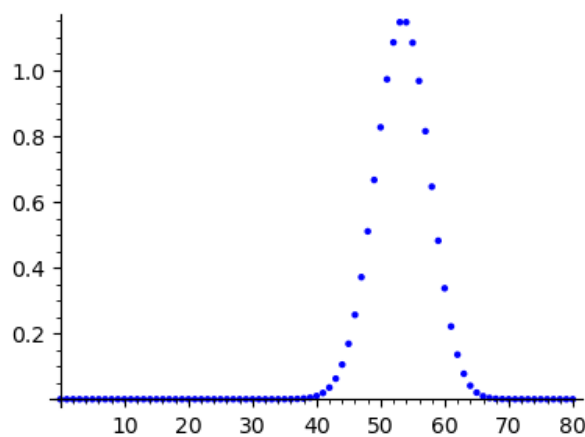


Figura 12 – Termos do desenvolvimento do binômio $\left(\frac{1}{2} + 1\right)^{80}$.

Exercício 4.12. Determine o termo máximo do desenvolvimento de $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^8$.

Resolução. Para encontrar o termo máximo, precisamos comparar T_k com o termo anterior T_{k-1} e determinar o valor de k para o qual T_k é maior que T_{k-1} , ou seja,

$$T_k > T_{k-1}.$$

Exatamente o que fizemos na questão anterior.

Substituindo as expressões, temos:

$$\binom{8}{k} \cdot \frac{1}{5^k} > \binom{8}{k-1} \cdot \frac{1}{5^{k-1}}.$$

Expandindo os binomiais, obtemos:

$$\frac{8!}{k!(8-k)!} \cdot \frac{1}{5^k} > \frac{8!}{(k-1)!(9-k)!} \cdot \frac{1}{5^{k-1}}.$$

Simplificando ambos os lados, cancelando 8! e reorganizando os termos, resulta em:

$$\frac{9-k}{k} > \frac{1}{5}.$$

Multiplicando ambos os lados por 5k, temos:

$$5 \cdot (9-k) > k.$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$45 - 5k > k,$$

$$45 > 6k,$$

$$k < 7,5.$$

Como k deve ser um número inteiro, o valor mais próximo que satisfaz essa desigualdade é $k = 8$.

Portanto, o termo máximo ocorre para $k = 8$. O termo correspondente é:

$$\begin{aligned} T_8 &= \binom{8}{7} \cdot 1^{8-7} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^7 \\ &= 8 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^7 \\ &= 8 \cdot \frac{1}{78125} \\ &= \frac{8}{78125} \\ &= 0,0001024. \end{aligned}$$

□

Entrada do Bloco de Códigos 33.

```
1 termos_binomio(1/5, 1, 8)
```

Saída do Bloco de Códigos 33.

```

1 0 termo máximo é:
2 T_8 = C(8,7)*(1)^7*(1/5)^1
3     = 8/5
4     = 1.6000000000000000
5 0 termo mínimo é:
6 T_1 = C(8,0)*(1)^0*(1/5)^8
7     = 1/390625
8     = 2.5600000000000000e-6
9 Gráfico dos termos:

```

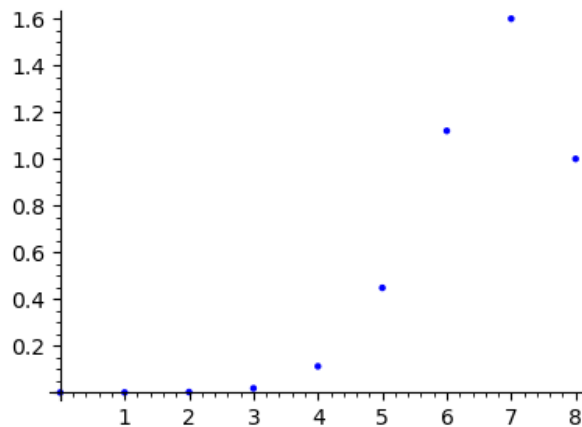


Figura 13 – Termos do desenvolvimento do binômio $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^8$.

Um detalhe importante a ser observado é que, ao utilizar o código no SageMath, a ordem dos termos na expansão do binômio aparece de forma diferente daquela obtida manualmente. Por exemplo, o termo correspondente a $k = 8$ é apresentado na segunda posição, enquanto em cálculos feitos à mão, ele seria posicionado como o penúltimo da sequência. Essa diferença ocorre devido à maneira como os índices são organizados no SageMath, mas isso não afeta os valores dos termos nem o resultado final.

Questão 4.13. (UFPE - UFRPE 2000) Analise as afirmações seguintes acerca da expansão binomial de $(3x + 5)^{13}$.

- Existem exatamente dois termos com coeficientes que não são divisíveis por 13.
- A soma dos coeficientes é 2^{39}
- O maior coeficiente é $3^7 \cdot 5^8 \cdot 11 \cdot 13$
- O menor coeficiente é 3^{13}
- A soma dos coeficientes das potências de x com expoentes ímpares é $2^{38} - 2^{12}$

Resolução. Separados item por item abaixo:

a. Note que todos os coeficientes serão compostos pelo binômio $\binom{13}{n}$ com n variando de 0 até 13, totalizando 14 termos no total do binômio. Como 13 é um número primo, só não teremos os coeficientes com fatores 13 com $\binom{13}{0}$ e $\binom{13}{13}$, onde ambos os binômios resultam em 1. Logo, 13 não aparece no produto do coeficiente, sendo apenas dois. **VERDADEIRO.**

b. Como visto anteriormente (Soma dos Coeficientes do Binômio de Newton), a soma dos coeficientes é feita de maneira simples, substituindo as variáveis por 1. Ficamos com: Se $x = 1$, $(3x + 5)^{13} \rightarrow (3 \cdot 1 + 5)^{13}$

$$(8)^{13} = ((2)^3)^{13} = 2^{39}$$

Então, é **VERDADEIRO.**

c. O termo geral do desenvolvimento é dado por:

$$T_k = \binom{13}{k} \cdot (3x)^{13-k} \cdot 5^k.$$

Para encontrar o termo máximo, comparamos T_k com o termo anterior T_{k-1} :

$$T_k > T_{k-1}.$$

Substituindo as expressões, temos:

$$\binom{13}{k} \cdot 3^{13-k} \cdot 5^k > \binom{13}{k-1} \cdot 3^{14-k} \cdot 5^{k-1}.$$

Expandindo os coeficientes binomiais e simplificando:

$$\frac{14-k}{k} \cdot 5 > 3.$$

Resolvendo a desigualdade:

$$70 - 5k > 3k,$$

$$70 > 8k,$$

$$k < 8,75.$$

Como k deve ser inteiro, o maior valor que satisfaz a desigualdade é $k = 8$. Substituímos esse valor no termo geral:

$$T_8 = \binom{13}{8} \cdot (3x)^{13-8} \cdot 5^8.$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} & \frac{13!}{8! \cdot 5!} \cdot 3^5 \cdot 5^8 \cdot x^5, \\ & \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{10 \cdot 12} \cdot 3^5 \cdot 5^8 \cdot x^5, \\ & 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 3^5 \cdot 5^8 \cdot x^5, \\ & 13 \cdot 11 \cdot 3^7 \cdot 5^8 \cdot x^5. \end{aligned}$$

Exatamente conforme apresentado na alternativa. Portanto, a afirmação é **VERDADEIRA**.

d. O menor coeficiente é exatamente o menor termo no desenvolvimento, assim como efetuando esse cálculo no exemplo passado, chegamos que o termo mínimo é 3^{13} . Mas vamos resolver essa utilizando o SageMath:

Entrada do Bloco de Códigos 34.

```

1 # Função para calcular o coeficiente do termo geral
2 def coeficiente(k):
3     binomial = math.comb(13, k) # Calcula o coeficiente binomial
4     coef = binomial * (3 ** (13 - k)) * (5 ** k) # Calcula o
    coeficiente do termo
5     return coef
6
7 # Encontra o menor coeficiente
8 menor_coef = None
9 for k in range(0, 14): # k varia de 0 a 13
10     coef = coeficiente(k)
11     if menor_coef is None or coef < menor_coef:
12         menor_coef = coef
13
14 menor_coef

```

Saída do Bloco de Códigos 34.

```

1 1594323

```

Onde 1594323 é exatamente 3^{13} , logo: **VERDADEIRO**.

e. Precisamos encontrar uma forma de somar $T_1 + T_3 + T_5 + \dots + T_{13}$. Note que $(3x+5)^{13} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + \dots + T_{14}$ e que $(3x-5)^{13} = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + T_5 - \dots - T_{14}$, logo se fizermos $(3x+5)^{13} + (3x-5)^{13}$ chegaremos a:

$$(3x+5)^{13} + (3x-5)^{13} = 2T_1 + 2T_3 + 2T_5 + \dots + 2T_{13}$$

Chegamos ao dobro do que estamos buscando, vamos adaptar e ficamos com:

$$\text{Soma dos coeficientes dos termos ímpares} = \frac{(3x+5)^{13} + (3x-5)^{13}}{2}$$

Substituindo x por 1, ficamos com:

$$\begin{aligned} \text{Soma dos coeficientes dos termos ímpares} &= \frac{(3 \cdot 1 + 5)^{13} + (3 \cdot 1 - 5)^{13}}{2} \\ &= \frac{(8)^{13} + (-2)^{13}}{2} \\ &= \frac{((2^3)^{13}) + (-2)^{13}}{2} \\ &= \frac{2^{39} + (-2)^{13}}{2} \\ &= 2^{38} - 2^{12} \end{aligned}$$

Logo, essa alternativa também está correta, **VERDADEIRO**.

□

O código apresentado implementa uma função que calcula o coeficiente de um termo específico da expansão binomial de $(3x+5)^{13}$. A função `coeficiente(k)` utiliza a fórmula do termo geral, calculando o coeficiente binomial $\binom{13}{k}$ e multiplicando pelas potências correspondentes de 3 e 5. Em seguida, o código percorre todos os valores possíveis de k (de 0 a 13) para encontrar o menor coeficiente da expansão. O menor coeficiente identificado é 1594323, conforme mostrado na saída.

Entrada do Bloco de Códigos 35.

```

1 def termos_binomio_2(a, b, n, formula=false):
2
3     ltn = []
4     ltf = []
5     for i in range(n+1):
6         ltn.append(binomial(n,i)*a^(n-i)*b^i)
7         ltf.append('C(%s,%s)*(%s)^%s*(%s)^%s' %(n, i, a , i, b, n-i))
8
9     print(f'A soma dos termos: {sum(ltn).factor()}')
10
11     vmax = max(ltn)
12     indice_max = ltn.index(vmax)+1
13     print('O termo máximo é:')
14     print('T_%s = %s' %(indice_max, ltf[indice_max-1]))
15     print('      = %s' %vmax)
16     print('      = %s' %(vmax).n())
17
18     vmin = min(ltn)

```

```

19     indice_min = ltn.index(vmin)+1
20     print('0 termo mínimo é:')
21     print('T_%s = %s' %(indice_min, ltf[indice_min-1]))
22     print('      = %s' %vmin)
23     print('      = %s' %(vmin).n())
24
25     l_termos_impar=[]
26     desenvolvimento = ((a*x+b)^n).coefficients()
27     for d in desenvolvimento:
28         if ZZ(d[1])%2==1:
29             l_termos_impar.append(d[0])
30     print(f'A soma dos coeficientes das potências de x com expoentes í
mpares:\n {ZZ(sum(l_termos_impar)).factor()}'')
31
32     print('Gráfico dos termos:')
33     show(list_plot(ltn), figsize=[4,3])
34 termos_binomio_2(3, 5, 13)

```

Saída do Bloco de Códigos 35.

```

1 A soma dos termos: 2^39
2 0 termo máximo é:
3 T_6 = C(13,5)*(3)^5*(5)^8
4     = 122164453125
5     = 1.22164453125000e11
6 0 termo mínimo é:
7 T_14 = C(13,13)*(3)^13*(5)^0
8     = 1594323
9     = 1.59432300000000e6
10 A soma dos coeficientes das potências de x com expoentes ímpares:
11 2^12 * 3 * 2731 * 8191
12 Gráfico dos termos:

```

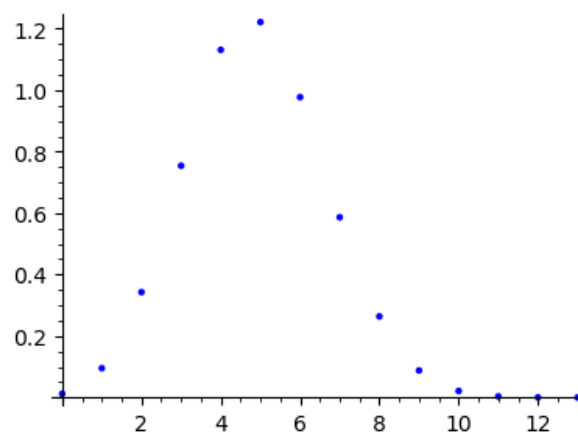


Figura 14 – Termos do desenvolvimento do binômio $(3x + 5)^{13}$.

Exercício 4.14. (Autorial) Considere a expansão de $(2 + x)^n$, sabendo que $n \in \mathbb{N}$ e o expoente é positivo. Usando o Binômio de Newton. Sabe-se que o termo que contém x^5 nesta expansão é igual a $448 \cdot x^5$. Logo, o valor de n que satisfaz é:

- a) 7
- b) 8
- c) 9
- d) 10
- e) Não possui solução.

Resolução. A fórmula do Definição 4.4 (Termo Geral) de $(a + b)^n$ é $T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$. Temos então $a = 2$, $b = x$ e n é o valor que queremos encontrar.

Vamos manter o $k = 5$, para encontrar o coeficiente de x^5 .

Ficamos então com:

$$T_6 = \binom{n}{5} \cdot 2^{n-5} \cdot x^5$$

Sabemos pelo enunciado que $n \geq 5$, para o expoente em 2^{n-5} ser pelo menos zero.

Vamos olhar apenas para o coeficiente, note que:

$$\frac{n!}{(n-5)!5!} \cdot 2^{n-5} = 448$$

Manipulando a expressão, obtemos:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{120} \cdot 2^{n-5} = 448$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot 2^{n-5} = 448 \cdot 120$$

Fatoramos os números à direita para ter um melhor controle:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 448 = 2^6 \cdot 7.$$

Substituímos e reorganizamos para:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot 2^{n-5} = 2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Agora, do lado esquerdo, temos os fatores naturais $n, (n-1), \dots$, todos em sequência. É razoável supor que os números 7 e 5 aparecem nesses fatores, pois não pertencem a 2^{n-5} . Logo, deduzimos que 6 também está incluído, pois é um múltiplo de 3. Assim, eliminando um 2 e o 3 da fatoração, reorganizamos para:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot 2^{n-5} = 2^8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7.$$

Substituímos $n = 8$ e verificamos:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2^{8-5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 = 448 \cdot 120.$$

O valor é exatamente o desejado. Isso confirma que $n = 8$ resolve o problema.

Concluimos que a questão tem solução, e o valor é $n = 8$. Letra B na questão. $\square$

Exercício 4.15. (Autorial) Considere a expansão de $(3 + 2x)^n$, sabendo que $n \in \mathbb{N}$ e o expoente é positivo. Usando o Binômio de Newton. Sabe-se que o termo que contém x^2 nesta expansão é igual a 486. Logo, o valor n é:

- a) $n = 4$
- b) $n = 8$
- c) $n = 12$
- d) $n = 16$
- e) Não possui solução.

Resolução. Seguindo o raciocínio feito na questão anterior, vamos organizar e tentar encontrar algum valor de n que irá satisfazer a fatoração e a simplificação do fatorial.

O termo em questão é:

$$T_3 = \binom{n}{2} \cdot 3^{n-2} \cdot (3x)^2 \text{ (Vamos ignorar o } x^2 \text{ e seguir apenas com o coeficiente)}$$

$$\frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot 3^{n-2} \cdot 3^2 = 486$$

$$n \cdot (n-1) \cdot 3^{n-2} = 54 \cdot 2$$

Note que precisamos de $n \geq 2$, podemos fatorar o 108 e chegamos em:

$$n \cdot (n-1) \cdot 3^{n-2} = 2^2 \cdot 3^3$$

Note que $n = 4$ funciona, pois ficaríamos com:

$$4 \cdot (4-1) \cdot 3^{4-2} = 4 \cdot 3^1 \cdot 3^2$$

Satisfazendo a igualdade. Logo, $n = 4$. Letra A na questão. $\square$

5 Binômio de Newton com expoentes fracionários

5.1 A ideia

Nos tópicos anteriores, abordamos detalhadamente o Binômio de Newton com expoentes naturais, conforme amplamente descrito na literatura. Exploramos suas propriedades, teoremas, conceitos e aplicações. Agora, avançamos para uma análise mais sofisticada, que envolve a generalização do Binômio de Newton para expoentes fracionários. Newton desenvolveu uma prova para o teorema binomial utilizando expansões em séries. Esta generalização não apenas se apresenta como uma extensão natural da fórmula original, mas também como uma ferramenta matemática bem curiosa.

O processo de generalização é possibilitado pelo conceito de número binomial generalizado, que pode ser calculado mesmo quando n não é um número inteiro, conforme demonstrado nos exemplos do tópico sobre [Definição 3.2](#) (Número Binomial). Embora a dissertação de Alan Alceu Leachenski, defendida no PROFMAT em 2017, intitulada *Binômio de Newton com Expoente Negativo e Fracionário* ([Leachenski 2017](#)), tenha abordado essa temática, neste trabalho adotamos uma abordagem computacional para a exploração desses conceitos. Através da integração do SageMath, buscamos facilitar a manipulação e a visualização dos coeficientes binomiais com expoentes fracionários, proporcionando uma ferramenta interativa para análise e aprofundamento do Binômio de Newton em um contexto mais dinâmico e experimental.

5.2 Desenvolvendo o Conceito

A aplicação desses conceitos para a demonstração do desenvolvimento binomial com n racional é relativamente rara e difícil de ser encontrada. A capacidade de expandir expressões com expoentes fracionários possibilita a análise de funções que, de outra forma, seriam intratáveis.

Portanto, a generalização do Binômio de Newton para expoentes fracionários vai além da mera curiosidade matemática, configurando-se como uma extensão de grande valor tanto do ponto de vista prático quanto teórico. Essa generalização oferece uma compreensão mais profunda e abrangente de uma ampla gama de problemas científicos e matemáticos, enriquecendo o arsenal de ferramentas disponíveis para a análise e solução de questões complexas.

No início do Capítulo 3 do documento de Leachenski, são apresentados os requisitos

necessários para a demonstração, seguidos pela prova do Binômio de Newton com expoentes negativos. O texto então se expande para incluir expoentes fracionários. Leachenski fornece vários exemplos ilustrativos e, no Capítulo 3.2, explora algumas aplicações práticas, destacando que essas são viáveis graças à generalização dos Binômios de Newton. Será feito o uso da ferramenta SageMath para enriquecer e facilitar as aproximações e resultados obtidos; sendo assim, para a obtenção de códigos práticos e fluídos dentro da ferramenta do SageMath, onde, mudando poucos parâmetros, podemos testar novos métodos e algoritmos para resoluções alternativas do mesmo problema.

5.3 Generalizando o resultado

Conforme visto no Teorema 4.1 (Binômio de Newton), temos na forma apresentada anteriormente que o Binômio de Newton é dado por $(x + y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} y^p$ quando n for um número natural. Vamos agora observar a prova feita por Euler, onde esse resultado pode ser expandido; ele será ampliado de forma generalizada. Temos $(1 + x)^n$ para qualquer que seja a natureza de n e com $|x| < 1$, valerá que $(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots$. Lembre-se que Euler definiu os coeficientes binomiais generalizados como:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)}{p!}.$$

Assim como foi apresentado na seção de Definição 3.2 (Número Binomial), usando essa definição, ele propôs a seguinte série infinita:

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

Euler fez a prova dessa generalização em seu trabalho publicado na obra *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (Leonhard Euler 1793), realizou uma notável generalização do Binômio de Newton, aplicando-o para expoentes fracionários e negativos. Esta generalização foi fundamentada no conceito de séries infinitas, o que permitiu a expansão de $(1 + x)^n$ mesmo quando n não é um inteiro.

Euler demonstrou que esta série é convergente para $|x| < 1$, validando assim a expansão para qualquer valor real de n . Sua prova, baseada na soma de séries e na convergência garantida pela diminuição dos termos, foi um marco na análise matemática.

Para fazer a demonstração do Binômio de Newton de forma Generalizada, se faz necessário enunciar o teorema da razão para séries, para mostrar durante a nossa demonstração que uma série converge.

Teorema 5.1 (Teorema do Teste da Razão/Critério d’Alembert). *Seja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ uma série com termos $a_k \neq 0$ para k suficientemente grande. Definimos o limite da razão entre termos consecutivos como:*

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|.$$

Então, temos:

- *Se $L < 1$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente.*
- *Se $L > 1$ ou $L = \infty$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.*
- *Se $L = 1$, o teste é inconclusivo, isto é, não se pode determinar a convergência ou divergência da série apenas com este teste.*

Demonstração. Se, para algum $c > 0$, tivermos

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq c$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então $|a_n| \leq c \cdot |b_n|$. Pelo critério de comparação (Teorema 1 por (Lima 2006, p. 39)), a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. $\square$

Não é coerente e tampouco faz sentido detalhar cada teorema necessário para alcançar o resultado desejado neste capítulo, pois isso desviaria o foco desta dissertação para um trabalho paralelo. Por isso, apresentarei apenas os teoremas e resultados diretamente aplicáveis na explicação ou prova de certas partes do conteúdo. Para informações adicionais e um estudo mais aprofundado sobre sequências e séries, recomenda-se a leitura do Capítulo 4, que aborda séries numéricas, no livro *Análise Real Volume 1* (Lima 2006).

O teste da razão é especialmente valioso para séries cujos termos envolvem fatoriais, potências de k ou combinações de ambos, já que tais expressões simplificam o cálculo da razão entre termos consecutivos.

Ao lidar com expoentes fracionários, observamos que a parte algébrica não é de difícil aplicação. Embora o processo possa ser trabalhoso em alguns casos, a mecânica por trás da obtenção dos resultados é fundamentalmente a mesma.

Vamos observar então uma prova formalizada, na qual faremos uso do Teorema 5.1 (Teorema da Razão):

Teorema 5.2 (Binômio de Newton Generalizado). *Se n for um número real qualquer e $|x| < 1$, então:*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Demonstração. Consideremos a expressão $(1+x)^n$ para um valor real qualquer de n , não necessariamente um natural. Vamos expandir como uma série da forma:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\text{com } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

onde $k!$ é o fatorial de k e o numerador consiste no produto dos k fatores consecutivos que começam em n e decrescem até $(n-k+1)$.

Assim, a expansão do binômio generalizado pode ser expressa como:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k.$$

Agora, vamos justificar que essa série é válida e convergente quando o $|x| < 1$.

Passo 1: Comportamento da Série para $|x| < 1$

Para mostrar que essa série converge, observamos o comportamento dos termos $\binom{n}{k}x^k$ à medida que k aumenta. Note que, conforme k cresce, o termo geral da série,

$$\binom{n}{k}x^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k,$$

diminui em magnitude devido à presença de $k!$ no denominador, o que faz com que cada termo tenda à zero conforme $k \rightarrow \infty$ para valores de $|x| < 1$.

Passo 2: Convergência da Série

Para assegurar a convergência da série, podemos aplicar o critério da razão, observando a relação entre termos consecutivos. Considerando dois termos consecutivos T_k e T_{k+1} da série:

$$T_k = \binom{n}{k}x^k \quad \text{e} \quad T_{k+1} = \binom{n}{k+1}x^{k+1}.$$

A razão entre termos consecutivos é dada por:

$$\left| \frac{T_{k+1}}{T_k} \right| = \left| \frac{\binom{n}{k+1}x^{k+1}}{\binom{n}{k}x^k} \right| = \left| \frac{n-k}{k+1} \cdot x \right|.$$

Para $|x| < 1$, essa razão vai para -1 ¹ conforme $k \rightarrow \infty$, pois o termo $\frac{n-k}{k+1}$ se aproxima de -1 , o que assegura a convergência absoluta da série, já que pelo [Teorema 5.1](#) (Teorema da Razão) se $L < 1$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente.

¹ Pode ser observado no SageCell Server com o comando abaixo:
`var('n, k')`
`limit((n-k)/(k+1), k=+oo)`
 Ele irá retornar: -1

Conclusão

Portanto, a série:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

é uma expansão válida para $(1+x)^n$ quando o $|x| < 1$, com os coeficientes $\binom{n}{k}$ generalizados, permitindo que n seja qualquer número real (ou mesmo complexo).

Essa demonstração segue a abordagem que Leonhard Euler trabalhou, usando séries infinitas para generalizar o Binômio de Newton a expoentes não inteiros. $\square$

Uma demonstração alternativa também pode ser encontrada no trabalho do colega Alan Alceu Leachenski ([Leachenski 2017](#), p. 39). Uma tradução da apresentação de Euler no congresso em 20 de maio de 1776.

5.3.1 Binômios de Newton com expoentes fracionários

Iniciaremos esta seção com um exemplo e, em seguida, aplicaremos a generalização do Teorema de Newton utilizando os conceitos que foram abordados até o momento. Com o auxílio da ferramenta do SageMath, vamos desenvolver algumas linhas de código para simplificar as aplicações nos binômios com expoentes fracionários.

Exemplo 5.3. Fazer a expansão de $(2+x)^{1/2}$. Para iniciar o exemplo, precisamos fatorar e garantir que a expressão fique igual à forma genérica. Podemos reescrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (2+x)^{1/2} &= (2 \cdot (1 + \frac{x}{2}))^{1/2} \\ &= 2^{1/2} (1 + \frac{x}{2})^{1/2} \end{aligned}$$

Vamos manter o fator $2^{1/2}$ separado por um momento e continuaremos com a expansão do termo restante.

$$\begin{aligned} (1 + \frac{x}{2})^{1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \left(\frac{x}{2}\right)^k \\ k &= 0, \quad \binom{1/2}{0} = 1 \\ k &= 1, \quad \binom{1/2}{1} = \frac{1/2}{1!} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{x}{2}\right)^1 = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} \\ k &= 2, \quad \binom{1/2}{2} = \frac{(1/2) \cdot (-1/2)}{2!} = \frac{-1}{8}, \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}, \quad \Rightarrow \frac{-x^2}{32} \\ k &= 3, \quad \binom{1/2}{3} = \frac{(1/2) \cdot (-1/2) \cdot (-3/2)}{3!} = \frac{1}{16}, \quad \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}, \quad \Rightarrow \frac{x^3}{128} \\ &\vdots \end{aligned}$$

e assim por diante. Agora, multiplicamos pelo fator $2^{1/2}$ que havíamos deixado de lado, obtendo:

$$(2+x)^{1/2} = \sqrt{2} \cdot \left[1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{128} + \cdots \right]$$

Essa série é infinita, porém, podemos fazer aproximações conforme necessário, seja para encontrar coeficientes de termos específicos ou para outras finalidades.

Vamos agora levar este mesmo problema para dentro do SageMath, observaremos a facilidade e praticidade com que nos será apresentada a expansão, segue abaixo o mesmo exemplo, vamos localizar essa expansão dentro do SageMath utilizando: $2^{1/2}(1 + \frac{x}{2})^{1/2}$.

Entrada do Bloco de Códigos 36.

```

1 def binomio_newton(x, n, total):
2     s = 0 # Inicializa a soma dos termos da expansão como 0
3     for i in range(total): # Itera de 0 até 'total' para calcular os
4         s = s + binomial(n, i)*x^i # Calcula o termo binomial nCk * x^i
5         e adiciona à soma
6     return s # Retorna a soma parcial dos 'total' primeiros termos da
7     expansão
8
9 binomio_newton(x/2, 1/2, 6).show() # calcula os 6 primeiros termos
10                                     # da expansão de (1+x/2)^(1/2)

```

Saída do Bloco de Códigos 36.

$$\frac{7}{8192}x^5 - \frac{5}{2048}x^4 + \frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$$

A saída do bloco de código acima reflete o caminho de análise escolhido neste trabalho, baseado nas expansões binomiais. Embora seja um método eficaz para os nossos objetivos, cabe destacar que, se o foco fosse diferente, poderíamos ter seguido uma abordagem por meio de séries de Taylor, que também seria adequada para obter o resultado. No entanto, como este não é o foco principal do trabalho, deixamos essa alternativa de lado. Fica como uma sugestão para o leitor interessado ou que tenha curiosidade em explorar outras vias de solução, como a série de Taylor. A abordagem detalhada desse assunto pode ser encontrada no livro de cálculo do Stewart ([Stewart 2010](#)), a partir da página 620, onde o tema é explorado de forma aprofundada.

Agora, iremos direcionar o SageMath e buscar o coeficiente de um termo em específico, por exemplo o coeficiente em x^6 , seguimos a próxima linha de códigos abaixo:

Entrada do Bloco de Códigos 37.

```

1 def binomio_newton(x, n, termo):
2
3     return binomial(n, termo)*x^termo
4
5 binomio_newton(x/2, 1/2, 6).show() #calculando (1+x/2)^(1/2)

```

Saída do Bloco de Códigos 37.

$$-\frac{21}{65536}x^6$$

Sendo assim, o coeficiente em x^6 é $\frac{-21\sqrt{2}}{65536}$.

A partir deste ponto, vamos abordar a resolução de alguns problemas utilizando o SageMath, aproveitando o entendimento prévio dos procedimentos necessários para a resolução desses exercícios.

Exemplo 5.4. (Site - Fatos Matemáticos [adaptada]) Encontre a expansão de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Resolução. Aplicando os conhecimentos prévios dentro do SageMath, chegamos a:

Entrada do Bloco de Códigos 38.

```

1 # Importa as funções necessárias
2 var('x') # Define x como uma variável simbólica
3
4 # Função para realizar a expansão binomial generalizada com coeficientes
  já calculados
5 def newt_expansion_simplified(n, x, total):
6     terms = [] # Lista para armazenar os termos
7     for i in range(total): # Itera até 'total' termos
8         coef = binomial(n, i) # Calcula o coeficiente binomial
9         term = coef * x^(2 * i) # Calcula o termo como coef * x^(2i)
10        terms.append(term) # Adiciona o termo à lista
11    return sum(terms) # Retorna a soma dos termos
12
13 # Expansão de (1 - x^2)^(-1/2) até o termo de x^18
14 n = -1/2
15 expansion = newt_expansion_simplified(n, x, 10) # Expande com 10 termos
16 show(expansion)

```

Saída do Bloco de Códigos 38.

$$-\frac{12155x^{18}}{65536} + \frac{6435x^{16}}{32768} - \frac{429x^{14}}{2048} + \frac{231x^{12}}{1024} - \frac{63x^{10}}{256} + \frac{35x^8}{128} - \frac{5x^6}{16} + \frac{3x^4}{8} - \frac{x^2}{2} + 1$$

□

Conseguimos aplicar o SageMath para trabalhar com o Binômio de Newton resultante em expoentes negativos e/ou fracionários. Esse processo se mostrou extremamente prático, rápido e preciso.

5.3.2 Calculando raízes com o SageMath

Vamos demonstrar de maneira interessante e criativa como a aproximação da raiz quadrada de um número pode ser realizada utilizando o conceito de Binômio de Newton generalizado, aplicado na ferramenta SageMath. Para isso, organizaremos diversas raízes em ordem e analisaremos como o SageMath processa e apresenta os resultados. Essa abordagem não só ilustra a eficácia do método, mas também oferece uma perspectiva prática sobre a aplicabilidade dos conceitos matemáticos, utilizando ferramentas para uma apresentação mais lúdica curiosa, principalmente quando pensado para um público de ensino básico.

Vamos supor que queremos encontrar uma aproximação para $\sqrt{x}$, podemos então reescrever e ficamos com:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= (x)^{1/2} = \left(\frac{x}{y} \cdot y\right)^{1/2} \\ &= y^{1/2} \left(\frac{x}{y} + 1 - 1\right)^{1/2} \\ &= y^{1/2} \left(\frac{x}{y} + 1 - \frac{y}{y}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{y} \cdot \left(1 + \frac{x-y}{y}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

A escolha do valor de y é crucial para garantir a eficácia da aproximação da raiz quadrada utilizando o Binômio de Newton. O valor de y deve ser selecionado de forma que seja próximo ao valor de x e, ao mesmo tempo, permita uma raiz quadrada exata ou facilmente calculável. Isso ocorre porque, ao reescrever a expressão $\sqrt{x} = \sqrt{y} \cdot \left(1 + \frac{x-y}{y}\right)^{1/2}$, estamos transferindo a dificuldade do cálculo da raiz de x para a raiz de y . Portanto, escolher y como um valor cujo cálculo da raiz quadrada seja simples torna o processo de aproximação mais prático. Além disso, para que a série binomial seja convergente e útil, é necessário que $\frac{x-y}{y} < 1$, o que implica que x deve ser menor que $2y$. Essa condição assegura que a aproximação seja eficaz, uma vez que garante a convergência rápida da série e melhora a precisão à medida que mais termos são considerados. Escolher valores para y que tenham raízes quadradas exatas, como números quadrados perfeitos, maximiza a simplicidade e a eficiência do método.

Uma estratégia eficaz é escolher y como o quadrado perfeito mais próximo de x ,

pois isso assegura que a raiz de y seja exata e fácil de manipular. Dessa forma, ao escolher y adequadamente, simplificamos o processo de aproximação sem perder a precisão.

Sabemos que:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{16} \cdot x^3 + \dots$$

Ao substituir o que encontramos na forma acima, chegamos a:

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-y}{y} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{(x-y)^2}{y^2} + \dots \right) \right]$$

Para obter uma aproximação razoável, podemos interromper a expansão já no primeiro termo, resultando em:

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{y} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-y}{y} \right)$$

Exemplo 5.5. Calcule utilizando o Binômio de Newton na sua forma generalizada, uma aproximação para $\sqrt{10}$.

Vamos considerar o valor $y = 9$, uma vez que $\sqrt{9} = 3$. É recomendável escolher um valor para y que facilite a substituição, de forma a simplificar a análise. Utilizar um valor para y que resulte em uma raiz quadrada irracional não contribuiria para uma aproximação mais simplificada, mas apenas introduziria complexidade adicional sem avanços significativos. Portanto, escolher valores que levam a raízes quadradas naturais é mais eficiente e lógico para alcançar uma aproximação prática, com o intuito de chegar o mais próximo do valor real da raiz.

Continuando com o problema, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{10} &\approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10-9}{9} \right) \\ \sqrt{10} &\approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \right) \\ \sqrt{10} &\approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{18} \right) \\ \sqrt{10} &\approx 3 \cdot \left(\frac{19}{18} \right) \\ \sqrt{10} &\approx \left(\frac{19}{6} \right) \\ \sqrt{10} &\approx 3.1666\dots \end{aligned}$$

Agora vamos utilizar o [Exemplo 5.5](#) dentro da ferramenta do SageMath e tentar observar essa mesma aproximação.

Entrada do Bloco de Códigos 39.

```

1 def aproximacao_raiz_quadrada(a, b, termos=5):
2     """
3     Aproxima a raiz quadrada de 'a' usando a expansão binomial da forma
4     generalizada.
5
6     :param a: O número para o qual queremos encontrar a raiz quadrada.
7     :param b: Um número próximo a 'a' (geralmente uma potência de 10).
8     :param termos: O número de termos na série para usar na aproximação.
9     :return: A aproximação da raiz quadrada de 'a'.
10    """
11
12    res_text=''
13    # Calcule x
14    x = (a - b) / b
15
16    res_text = res_text + f'{sqrt(b)}*('
17
18    for k in range(termos):
19        bi=''
20        j=0
21        for j in range(k):
22            bi = bi + f'(1/2-{j})*'
23        if k==0:
24            bi = bi + '1+'
25        else:
26            bi=bi[:-1]
27            bi = bi+f'/factorial({j+1})*(({a-b}/b))**{j+1}+'
28        res_text = res_text + f'{bi}'
29
30    res_text = res_text[:-1]+')'
31
32    print(f'({a})^(1/2) = {sqrt(b)}*({1}+{x})^{1/2}=')
33    print('')
34    print(res_text)
35    print('')
36    print('Realizando o cálculo, obtemos:')
37    print(eval(res_text))
38
39 # Teste a função com a raiz quadrada de 10, usando 9 como b e 5 termos
40    na série
41    aproximacao_raiz_quadrada(10, 9, termos=5)

```

Saída do Bloco de Códigos 39.

```

1 (10)^(1/2) = 3*(1+1/9)^1/2=
2
3 3*(1+(1/2-0)/factorial(1)*(1/9)**1+(1/2-0)*(1/2-1)/factorial(2)*(1/9)
   **2+(1/2-0)*(1/2-1)*(1/2-2)/factorial(3)*(1/9)**3+(1/2-0)*(1/2-1)
   *(1/2-2)*(1/2-3)/factorial(4)*(1/9)**4)
4
5 Realizando o cálculo, obtemos:
6 3.1622763774577054

```

Entrada do Bloco de Códigos 40.

```

1 def aproximacao_raiz_quadrada(a, b, termos=5):
2     """
3     Aproxima a raiz quadrada de 'a' usando a expansão binomial da forma
4     generalizada.
5
6     :param a: O número para o qual queremos encontrar a raiz quadrada.
7     :param b: Um número próximo a 'a' (geralmente uma potência de 10).
8     :param termos: O número de termos na série para usar na aproximação.
9     :return: A aproximação da raiz quadrada de 'a'.
10    """
11    # Calcule a raiz quadrada de b
12    raiz_b = sqrt(b)
13
14    # Calcule x
15    x = (a - b) / b
16
17    # Expansão binomial generalizada
18    resultado = raiz_b * sum([binomial(1/2, k) * x^k for k in range(
19    termos)])
20
21    return resultado
22
23 # Teste a função com a raiz quadrada de 10, usando 9 como b e 5 termos
24 na série
25 aproximacao = aproximacao_raiz_quadrada(10, 9, termos=5)
26 aproximacao

```

Saída do Bloco de Códigos 40.

```

1 885235/279936

```

Observação 5.6. Caso fossem adicionados os comandos na **Entrada do Bloco de Códigos 40**:

```

1     # Retorne o valor em formato decimal (RR)
2     return N(resultado)

```

Teríamos uma saída com parte inteira e decimal, representada da seguinte forma para o exemplo acima:

1 3.16227637745770

De forma resumida, o processo será feito trocando os parâmetros a seguir:

(De forma resumida)

Observe que a **Saída do Bloco de Códigos 40** obtivemos $885235/279936 = 3,16227637746$. O que leva a uma aproximação extremamente eficiente.

Abaixo, apresento alguns exemplos de resultados obtidos nas saídas do bloco de códigos do Sage Cell Server. Utilizando a expressão generalizada do Binômio de Newton, conseguimos realizar aproximações precisas de raízes quadradas que resultam em números irracionais. Estes exemplos ilustram como esse algoritmo, associado à ferramenta do SageMath, pode ser eficaz para calcular valores que, de outra forma, seriam mais difíceis de determinar.

Todos os exemplos a seguir utilizam apenas 5 termos na generalização do Binômio de Newton. Vale lembrar que, ao aumentar o número de termos, a precisão da aproximação melhora significativamente. Assim, alguns resultados podem parecer surpreendentes, pois poderiam sugerir um valor diferente do esperado. Ao lado de cada resultado, será indicado o intervalo no qual a raiz está realmente compreendida.

Exemplo 5.7. $\sqrt{2} \approx 179/128 = 1,3984375$, valor real em $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ ($y = 1$).

Exemplo 5.8. $\sqrt{3} \approx 11/8 = 1,375$, valor real em $1,732 < \sqrt{3} < 1,7321$ ($y = 4$).

Exemplo 5.9. $\sqrt{5} \approx 36635/16384 = 2,23602294922$, valor real em $2,2360 < \sqrt{5} < 2,2361$ ($y = 4$).

Exemplo 5.10. $\sqrt{6} \approx 2507/1024 = 2,4482421875$, valor real em $2,4494 < \sqrt{6} < 2,4495$ ($y = 4$).

Exemplo 5.11. $\sqrt{7} \approx 46291/17496 = 2,64580475537$, valor real em $2,6457 < \sqrt{7} < 2,6458$ ($y = 9$).

Exemplo 5.12. $\sqrt{8} \approx 791779/279936 = 2,82842864083$, valor real em $2,8284 < \sqrt{8} < 2,8285$ ($y = 9$).

Exemplo 5.13. $\sqrt{11} \approx 58027/17496 = 3,31658664838$, valor real em $3,3166 < \sqrt{11} < 3,3167$ ($y = 9$).

Exemplo 5.14. $\sqrt{12} \approx 11971/3456 = 3,46383101852$, valor real em $3,4641 < \sqrt{12} < 3,46411$ ($y = 9$).

Exemplo 5.15. $\sqrt{35} \approx 211983835/35831808 = 5,91607978587$, valor real em $5,9160 < \sqrt{35} < 5,91601$ ($y = 36$).

Exemplo 5.16. $\sqrt{80} \approx 5475862435/612220032 = 8,94427191007$, valor real em $8,944271 < \sqrt{80} < 8,944272$ ($y = 81$).

Exemplo 5.17. $\sqrt{200} \approx 113586427235/8031810176 = 14,1420706847$, valor real em $14,142135 < \sqrt{200} < 14,142136$ ($y = 169$).

Note como foi feito no exemplo acima:

Entrada do Bloco de Códigos 41.

```

1 def aproximacao_raiz_quadrada(a, b, termos=5):
2     """
3     Aproxima a raiz quadrada de um número usando a expansão binomial.
4
5     Parâmetros:
6         a (int): O número cuja raiz quadrada queremos aproximar.
7         b (int): Um número próximo de 'a' (deve ser um quadrado perfeito
8         ).
9         termos (int): Número de termos da expansão para maior precisão (
10        default = 5).
11
12    Retorna:
13        float: A aproximação da raiz quadrada de 'a'.
14    """
15    # Raiz exata de b (o valor central da expansão)
16    raiz_b = sqrt(QQ(b))
17
18    # Calcula x = (a - b) / b
19    x = (a - b)/b
20
21    # Calcula a soma dos termos da expansão binomial
22    resultado = raiz_b * sum(
23        [binomial(1/2, k)*(x^k) for k in range(termos)])
24
25    # Retorna o valor numérico (aproximado)
26    return resultado.n()
27
28 # Aproximando a raiz quadrada de 200 com base em 169
29 aproximacao_raiz_quadrada(200, 169, termos=5)

```

Saída do Bloco de Códigos 41.

1 14.1420706846894

O mesmo método foi utilizado em todos os outros.

Se aumentássemos o número de termos na expansão, poderíamos observar o quanto cada aproximação se torna mais precisa. A tabela abaixo ilustra essa comparação, onde a coluna k representa a quantidade de termos utilizados na soma. Podemos perceber como a precisão das aproximações das raízes melhora significativamente ao aplicarmos a técnica do Binômio de Newton generalizado com mais e mais termos.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 20$	$k = 50$	$k = 100$
$\sqrt{2}$	1	1.5	1.375	1.4375	1.39843	1.41920	1.41588	1.41462	1.41435
$\sqrt{3}$	1	1.75	1.73437	1.73242	1.73211	1.73205	1.73205	1.73205	1.73205
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23437	2.23632	2.23602	2.23606	2.23606	2.23606	2.23606
$\sqrt{6}$	2	2.5	2.4375	2.45312	2.44824	2.44950	2.44948	2.44948	2.44948
$\sqrt{7}$	2	2.75	2.60937	2.66210	2.63739	2.64638	2.64576	2.64575	2.64575
$\sqrt{8}$	3	2.83333	2.82870	2.82844	2.82842	2.82842	2.82842	2.82842	2.82842
$\sqrt{11}$	3	3.33333	3.31481	3.31687	3.31658	3.31662	3.31662	3.31662	3.31662

Tabela 2 – Comparação de aproximações utilizando diferentes valores de k na generalização do Binômio de Newton. (Obs.: os y utilizados são os mesmos nos exemplos acima com os valores correspondentes, além disso, deixei registrado apenas até a quinta casa decimal, ignorando o restante).

5.4 Aplicação no ensino básico

Embora o Binômio de Newton possa ser tema de questões no ENEM, ele não é um tópico central ou frequentemente abordado. O conteúdo pode aparecer de forma integrada em questões que envolvem análise combinatória, polinômios ou problemas de álgebra que exigem a expansão de expressões binomiais.

Quando mencionamos a conveniência de abordar ou não o Binômio de Newton, é importante considerar vários fatores. Primeiramente, uma avaliação diagnóstica é essencial para identificar as dificuldades e os problemas específicos de uma turma. Com base nesse diagnóstico, soluções e abordagens podem ser desenvolvidas para atender a necessidades ou curiosidades específicas sobre o conteúdo abordado neste trabalho. Apesar disso, o uso desse conhecimento pode ser uma maneira eficaz de despertar o interesse dos alunos pelo conhecimento científico, especialmente em matemática.

5.5 Aproximações para Raízes e Potências Avançadas

Além das raízes quadradas, neste capítulo, expandimos o método de aproximação de raízes através do Binômio de Newton generalizado, aplicando-o a uma ampla variedade de expoentes, incluindo raízes cúbicas, quartas, e quintas, bem como potências fracionárias, expoentes negativos e combinações mais complexas do expoente.

5.5.1 Expoentes Negativos

Para expoentes negativos, adaptamos o método invertendo a base e usando o valor positivo do expoente na expansão. Essa técnica é bem comum no Ensino Fundamental e Médio, onde simplificamos o cálculo da potência dessa forma:

Exemplo 5.18. Aproximando $(\sqrt[3]{9})^{-2}$ com $y = 8$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt[3]{9})^{-2} &\approx \left(2 \cdot \left(1 + \frac{9-8}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} \\
 &\approx \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \\
 &\approx \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{(1/8)^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{(1/8)^3}{6}\right) \\
 &\approx \frac{1}{4} \cdot (1 - 0,0833 + 0,0052 - 0,00021) \\
 &\approx \frac{1}{4} \cdot 0,9217 \approx 0,2304.
 \end{aligned}$$

O valor real de $(\sqrt[3]{9})^{-2}$ é aproximadamente 0,236, o que mostra que a aproximação está próxima do valor real.

Exemplo 5.19. Aproximando $6^{-\frac{1}{2}}$ com $y = 4$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 6^{-\frac{1}{2}} &\approx \left(2 \cdot \left(1 + \frac{6-4}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\
 &\approx \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\approx \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{(2/4)^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{(2/4)^3}{6}\right) \\
 &\approx \frac{1}{2} \cdot (1 - 0,25 + 0,046875 - 0,00390625) \\
 &\approx \frac{1}{2} \cdot 0,793969 \approx 0,396984.
 \end{aligned}$$

O valor real de $6^{-\frac{1}{2}}$ é aproximadamente 0,408, o que mostra que a aproximação está próxima do valor real.

Exemplo 5.20. Aproximando $(\sqrt{5})^{-3}$ com $y = 4$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{5})^{-3} &\approx \left(2 \cdot \left(1 + \frac{5-4}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} \\
 &\approx \frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \\
 &\approx \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{(1/4)^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{(1/4)^3}{6}\right) \\
 &\approx \frac{1}{8} \cdot (1 - 0,375 + 0,0703 - 0,0183) \\
 &\approx \frac{1}{8} \cdot 0,677 \approx 0,0846.
 \end{aligned}$$

O valor real de $(\sqrt{5})^{-3}$ é aproximadamente 0,0894, o que mostra que a aproximação está próxima do valor real.

Acima observamos casos onde o expoente é negativo, basta lembrar que a única mudança é com relação a base do valor, essa técnica é trabalhada comumente em salas de aula do ensino básico, logo, não deve apresentar nenhuma dificuldade nova.

5.5.2 Raízes cúbicas, quartas, quintas...

Vamos observar o caso geral para uma aproximação em:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \cdot \left(1 + \frac{x-y}{y}\right)^{1/n}.$$

Por exemplo, para o caso em que temos $n = 3$, estamos buscando uma aproximação para uma raiz cúbica, ficando com:

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y} \cdot \left(1 + \frac{x-y}{y}\right)^{1/3}$$

Podemos simplificar o cálculo da raiz cúbica de x transferindo a complexidade para a raiz cúbica de y , escolhendo y como um número cujas raízes sejam conhecidas ou facilmente calculáveis, como 8, 27, 64, entre outros.

Nesta seção, iremos explorar a aproximação de raízes dos mais diversos índices, utilizando em alguns casos a ferramenta SageMath, demonstrando como o método pode ser aplicado para calcular valores que, à primeira vista, podem parecer mais difíceis.

Vamos aplicar novamente o conceito discutido no resultado obtido na [Seção 5.3](#).²

Exemplo 5.21. Aproximando $\sqrt[3]{9}$ com $y = 8$, ficamos com:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9} &\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{9-8}{8}\right)^{1/3} \\ &\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{1/3} \\ &\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{5}{81} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 - \frac{10}{243} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^4\right) \\ &\approx 2 \cdot (1 + 0,0417 - 0,000651 + 0,0000203 - 0,00000032) \\ &\approx 2 \cdot (1,0410) \\ &\approx 2,082.\end{aligned}$$

O valor real de $\sqrt[3]{9}$ é aproximadamente 2,0801, se mostrando uma ótima aproximação.

2

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

Exemplo 5.22. Aproximando $\sqrt[3]{31}$ com $y = 27$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{31} &\approx 3 \cdot \left(1 + \frac{31-27}{27}\right)^{1/3} \\
 &\approx 3 \cdot \left(1 + \frac{4}{27}\right)^{1/3} \\
 &\approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^2 + \frac{5}{81} \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^3 - \frac{10}{243} \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^4\right) \\
 &\approx 3 \cdot (1 + 0,0494 - 0,00244 + 0,000181 - 0,0000132) \\
 &\approx 3 \cdot 1,0471 \\
 &\approx 3,1413.
 \end{aligned}$$

O valor real de $\sqrt[3]{31}$ é aproximadamente 3,1414.

Exemplo 5.23. Aproximando $\sqrt[7]{145}$ com $y = 128$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[7]{145} &\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{145-128}{128}\right)^{1/7} \\
 &\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{17}{128}\right)^{1/7} \\
 &\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{17}{128} - \frac{1}{49} \cdot \left(\frac{17}{128}\right)^2 + \frac{5}{343} \cdot \left(\frac{17}{128}\right)^3 - \frac{10}{2401} \cdot \left(\frac{17}{128}\right)^4\right) \\
 &\approx 2 \cdot (1 + 0,01875 - 0,000633 + 0,0000208 - 0,00000074) \\
 &\approx 2 \cdot 1,01814 \\
 &\approx 2,0363.
 \end{aligned}$$

O valor real de $\sqrt[7]{145}$ é aproximadamente 2,0371.

Exemplo 5.24. Aproximando $\sqrt[4]{20}$ com $y = 16$:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[4]{20} &\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{20-16}{16}\right)^{1/4} \\
 &\approx 2 \cdot (1 + 0,25)^{1/4} \\
 &\approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}(0,25) - \frac{1}{8}(0,25)^2 + \frac{7}{128}(0,25)^3 - \frac{21}{512}(0,25)^4\right) \\
 &\approx 2 \cdot (1 + 0,0625 - 0,0078 + 0,0034 - 0,0013) \\
 &\approx 2 \cdot (1,0568) \approx 2,1136.
 \end{aligned}$$

O valor real de $\sqrt[4]{20}$ é aproximadamente 2,1147.

Exemplo 5.25. Aproximando $\sqrt[5]{1098}$ com $y = 1024$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[5]{1098} &\approx 4 \cdot \left(1 + \frac{1098 - 1024}{1024}\right)^{\frac{1}{5}} \\
 &\approx 4 \cdot \left(1 + \frac{74}{1024}\right)^{\frac{1}{5}} \\
 &\approx 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{74}{1024} - \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{\left(\frac{74}{1024}\right)^2}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{\left(\frac{74}{1024}\right)^3}{6}\right) \\
 &\approx 4 \cdot (1 + 0,01445 - 0,000834 + 0,0000514) \\
 &\approx 4 \cdot 1,01367 \\
 &\approx 4,0547.
 \end{aligned}$$

O valor real de $\sqrt[5]{1098}$ é aproximadamente 4,0549.

Ao aumentarmos o número de termos na expansão binomial para a aproximação de raízes, assim como feito lá trás na [tabela 2](#), observamos uma precisão maior nos valores obtidos. A tabela abaixo oferece uma visão comparativa com um número crescente de termos na série, representados pela coluna k . Quanto maior o valor de k , mais precisa se torna a aproximação da raiz. Esta tabela complementa a anterior.

Esta abordagem evidencia que, mesmo com um pequeno aumento no número de termos, conseguimos uma aproximação mais precisa. A tabela reflete a aplicação prática desses conceitos e a facilidade de cálculo quando utilizamos valores de y próximos a x com raízes conhecidas.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 20$	$k = 50$	$k = 100$
$\sqrt[3]{2}$	1,333	1,222	1,282	1,253	1,2435	1,2596	1,2599	1,2599	1,2599
$\sqrt[3]{3}$	1,666	1,444	1,555	1,504	1,528	1,4423	1,4422	1,4422	1,4422
$\sqrt[3]{5}$	1,888	1,777	1,679	1,612	1,505	1,7100	1,7099	1,7099	1,7099
$\sqrt[3]{10}$	2,083	2,153	2,164	2,168	2,166	2,1544	2,1544	2,1544	2,1544
$\sqrt[4]{20}$	2,062	2,114	2,116	2,117	2,1136	2,1147	2,1147	2,1147	2,1147

Tabela 3 – Tabela de aproximações de raízes cúbicas e quartas usando diferentes valores de k na expansão binomial. (Similar a [tabela 2](#))

Uma observação importante é que os exemplos apresentados na tabela acima foram construídos utilizando a ferramenta SageMath, o que permitiu uma obtenção rápida e precisa dos resultados, ajustando-se apenas o valor da variável k conforme necessário.

Neste momento, aplicaremos todos os conceitos e ferramentas desenvolvidos até então, integrando-os no SageMath para explorar plenamente as potencialidades do Binômio de Newton com expoentes fracionários e negativos. Aqui, chegamos ao ápice do trabalho, onde finalmente abordamos os exemplos mais complexos e desafiadores, utilizando o SageMath para simplificar cálculos e obter aproximações precisas. Esta é a etapa onde tudo se conecta, conduzindo-nos à conclusão do estudo, evidenciando a eficácia do SageMath na manipulação de Binômios de Newton generalizados e na obtenção de soluções para raízes com expoentes variados.

Exemplo 5.26. Aproximando $(1, 2)^{\frac{2}{3}}$, com $y = 1$:

$$\begin{aligned} (1, 2)^{\frac{2}{3}} &\approx 1 \cdot \left(1 + \frac{1, 2 - 1}{1}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &\approx 1 \cdot (1 + 0, 2)^{\frac{2}{3}} \\ &\approx 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 0, 2 - \frac{1}{9} \cdot (0, 2)^2 + \frac{5}{81} \cdot (0, 2)^3\right) \\ &\approx 1 \cdot (1 + 0, 1333 - 0, 0044 + 0, 0005) \\ &\approx 1 \cdot (1, 1294) \approx 1, 1294. \end{aligned}$$

O valor real de $(1, 2)^{\frac{2}{3}}$ é aproximadamente 1, 129, o que mostra que a aproximação está bem próxima do valor real.

Agora vamos verificar se esse exemplo está correto utilizando o SageMath mais uma vez a nosso favor:

Entrada do Bloco de Códigos 42.

```

1 # Definindo os valores
2 x = 1.2
3 y = 1
4 n = 2/3
5
6 # Calculando o valor da aproximação usando a expansão binomial até o
   terceiro termo
7 approximation = y^(n) * (1 + (n * (x - y) / y) + (n * (n - 1) / 2) * ((x
   - y) / y)^2 + (n * (n - 1) * (n - 2) / 6) * ((x - y) / y)^3)
8
9 # Exibindo o resultado em decimal
10 approximation.n()
```

Saída do Bloco de Códigos 42.

```

1 1.12928395061728
```

Exemplo 5.27. Aproximando $(1, 5)^{-\frac{3}{2}}$, com $y = 1$:

$$\begin{aligned}
 (1, 5)^{-\frac{3}{2}} &\approx 1 \cdot \left(1 + \frac{1, 5 - 1}{1}\right)^{-\frac{3}{2}} \\
 &\approx 1 \cdot (1 + 0, 5)^{-\frac{3}{2}} \\
 &\approx 1 \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot 0, 5 + \frac{15}{8} \cdot (0, 5)^2 - \frac{35}{16} \cdot (0, 5)^3\right) \\
 &\approx 1 \cdot (1 - 0, 75 + 0, 46875 - 0, 27344) \\
 &\approx 1 \cdot (0, 4453) \approx 0, 4453.
 \end{aligned}$$

O valor real de $(1, 5)^{-\frac{3}{2}}$ é aproximadamente 0, 5443, o que mostra que, nesse exemplo, a aproximação deixou um pouco a desejar.

Exemplo 5.28. Aproximando $(\sqrt[3]{15})^{-2}$ com $y = 8$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt[3]{15})^{-2} &\approx \left(2 \cdot \left(1 + \frac{15 - 8}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} \\
 &\approx \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{7}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \\
 &\approx \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{-2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{-2}{3} \cdot \frac{-5}{3} \cdot \frac{(7/8)^2}{2} - \frac{-2}{3} \cdot \frac{-5}{3} \cdot \frac{-8}{3} \cdot \frac{(7/8)^3}{6}\right) \\
 &\approx \frac{1}{4} \cdot (1 - 0, 5833 + 0, 1701 - 0, 0494) \\
 &\approx \frac{1}{4} \cdot 0, 5374 \approx 0, 1344.
 \end{aligned}$$

O valor real de $(\sqrt[3]{15})^{-2}$ é aproximadamente 0, 1342, o que mostra que a aproximação está bem próxima do valor real.³

Finalizada então a parte mais instigante desta dissertação: a aplicação prática do Binômio de Newton para aproximações de raízes e potências gerais, um recurso que se adapta bem a diversos contextos educacionais.

5.5.3 Considerações Finais

A abordagem desenvolvida neste trabalho, com seus exemplos e questões exploradas, pode ser aplicada diretamente em sala de aula como um desafio, uma atividade extra ou apresentada de forma curiosa para estimular nos alunos a percepção de que qualquer conteúdo de matemática pode se conectar ao cotidiano. Ferramentas como o SageMath

³ Vale notar uma observação importante: o fato de o expoente ser negativo não afetou o método; podemos realizar a substituição diretamente da mesma forma, independentemente do sinal do expoente.

tornam essa metodologia ainda mais acessível, proporcionando uma visualização interativa das aproximações, o que transforma o estudo em uma atividade lúdica, divertida e, acima de tudo, significativa. Esse método, além de preparar os alunos para provas externas como olimpíadas e concursos, enriquece o ensino de matemática com uma perspectiva aplicada, incentivando o interesse e a curiosidade dos estudantes por temas que podem parecer complexos ou pouco intuitivos à primeira vista.

É relevante notar que a OBMEP inclui questões relacionadas ao Binômio de Newton na grade de conteúdos abordados, especialmente nas provas dos níveis 2 e 3, correspondentes ao Ensino Fundamental II e Ensino Médio. O site “Portal da OBMEP” (<https://portaldaoobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=37>) destaca o Binômio de Newton e o triângulo de Pascal como tópicos do currículo do segundo ano do Ensino Médio, como mencionado no início deste trabalho. Recomenda-se que esses tópicos sejam explorados em feiras de conhecimento, semanas da matemática ou em aulas diferenciadas, como aulas voltadas para a escolha de profissões. Além disso, o SageMath, uma ferramenta poderosa e abrangente, também pode ser apresentada aos alunos como um recurso adicional, já que muitas vezes é prático e interativo.

Além disso, podemos fazer uma breve explicação sobre o Binômio de Newton, mostrando diretamente a sua aplicabilidade, conforme discutido na seção anterior.

O estudo do Binômio de Newton e sua aplicação para expoentes fracionários e negativos, aliado ao uso da ferramenta SageMath, demonstrou não apenas a profundidade matemática do tópico, mas também a sua relevância prática em contextos educacionais e usuais. Ao longo deste trabalho, exploramos a teoria fundamental do Binômio de Newton e suas generalizações, desenvolvendo uma compreensão aplicada desse conceito.

Através da implementação prática com SageMath, fomos capazes de visualizar e calcular expansões de binômios com expoentes fracionários de forma eficiente, ilustrando como técnicas matemáticas avançadas podem ser acessíveis e úteis para aplicações reais. O uso da ferramenta SageMath se revelou um recurso importante para a exploração matemática, agilizando bastante o nosso processo de pesquisa, permitindo uma abordagem prática e interativa que pode ser extremamente benéfica para o aprendizado e também o ensino da matemática.

5.5.4 Contribuição Esperada

Motivar estudantes e professores para o estudo da matemática, principalmente por se tratar de uma parte da matemática discreta, que é vista como um dos assuntos mais difíceis do Ensino Médio, assim como mencionada em “Ensino e a aprendizagem da análise combinatória no Ensino Médio” (Bastos e Victor 2013). Através da aplicação prática de ferramentas matemáticas e exemplos concretos, é fundamental para desafiar e

renovar o aprendizado. A matemática frequentemente é percebida como uma disciplina árida e desafiadora, mas este trabalho propõe demonstrar que problemas complexos de combinatória podem ser enfrentados e solucionados de maneira simplificada e lúdica. Utilizar a tecnologia e programas matemáticos como aliados facilita significativamente o ensino-aprendizagem. A última seção deste documento apresenta um plano de aula detalhado que ilustra como essas técnicas podem ser aplicadas em sala de aula, fornecendo um roteiro estruturado para professores que desejam explorar o conteúdo de maneira prática e acessível.

A contribuição esperada deste trabalho vai além da simples aplicação de fórmulas matemáticas e se estende a uma certa diferenciação pedagógica, onde pegamos as fórmulas utilizadas e as transformamos nos comandos para o SageMath, tendo-o como nosso aliado para entender e visualizar os conceitos postos em prática. O impacto desejado inclui os seguintes tópicos:

1. Educação Matemática Interativa: A introdução de ferramentas como o SageMath no ensino da matemática pode transformar a maneira como conceitos complexos são abordados. O uso de tecnologias computacionais permite que os alunos visualizem e experimentem teorias matemáticas de uma forma bem mais dinâmica.
2. Inovação no Ensino de Conceitos Avançados: A aplicação do Binômio de Newton para expoentes fracionários e negativos, e a demonstração de como essas técnicas podem ser implementadas no SageMath.
3. Aproximações Práticas em Cálculos: A técnica de aproximação de raízes usando o Binômio de Newton generalizado mostra como conceitos matemáticos podem ser aplicados para resolver problemas práticos com precisão e eficiência. A aplicação dessas técnicas em diferentes contextos demonstra a relevância e a versatilidade dos métodos matemáticos, facilitando a compreensão para uma aula diferenciada.
4. Inspiração para Futuras Pesquisas: Este trabalho pode servir como um ponto de partida para futuras pesquisas que explorem outras aplicações do Binômio de Newton e de técnicas computacionais em matemática. A integração de conceitos matemáticos clássicos com ferramentas modernas pode abrir novas possibilidades para o desenvolvimento de métodos inovadores e para o avanço da matemática aplicada.

5.6 Plano de Aula: Aproximações de Raízes e Potências Fracionárias com o SageMath

5.6.1 Objetivos

Duração: (10 - 15 minutos)

A finalidade desta etapa do plano de aula é apresentar os principais objetivos, definindo as habilidades que os alunos devem adquirir. Isso fornece um direcionamento claro para o conteúdo a ser abordado, garantindo que todos compreendam as metas de aprendizagem.

Objetivos principais:

- Compreender o conceito de aproximações de raízes utilizando o Binômio de Newton;
- Aplicar o desenvolvimento binomial para potências fracionárias;
- Explorar o uso do SageMath como ferramenta de cálculo e visualização;
- Resolver problemas aplicados que envolvem aproximação de raízes.

5.6.2 Introdução

Duração: (10 - 15 minutos)

A finalidade desta etapa é contextualizar a aplicação do Binômio de Newton em aproximações matemáticas. O objetivo é despertar o interesse dos alunos ao relacionar esse conceito com problemas do mundo real, como cálculos financeiros e engenharia.

Contexto: Explique que o Binômio de Newton pode ser usado para encontrar aproximações de raízes sem a necessidade de uma calculadora científica. Essa técnica é útil em diversas áreas, como estatística e física.

Curiosidade: O Binômio de Newton foi generalizado para incluir expoentes fracionários, permitindo cálculos rápidos de aproximação de raízes quadradas, cúbicas, dentre outras, tornando-se bem versátil.

5.6.3 Desenvolvimento

Duração: (50 - 60 minutos)

A finalidade desta etapa é garantir que os alunos compreendam os procedimentos necessários para aplicar a técnica do Binômio de Newton a potências fracionárias e utilizar o SageMath como ferramenta auxiliar. (De preferência, realizar na sala de informática ou

solicitar que os alunos levem os aparelhos celulares; os que não possuem acesso podem formar duplas)

Tópicos abordados:

- **Expansão Binomial para Expoentes Fracionários:** Introdução e derivação da fórmula geral;
- **Aproximação de Raízes:** Aplicação da expansão binomial para encontrar aproximações de raízes quadradas e cúbicas;
- **Uso do SageMath:** Demonstração de códigos para calcular aproximações binomiais utilizando o SageMath;
- **Aplicação em Problemas Reais:** Cálculo de aproximações em exemplos práticos.

5.6.4 Atividade Prática

Duração: (40 minutos)

Os alunos irão aplicar o que foi aprendido para resolver exercícios utilizando o SageMath. O professor deve orientar os alunos no processo de escrita dos códigos e interpretação dos resultados.

Exercícios sugeridos:

- Aproximar a raiz quadrada de números como 10 e 50 utilizando a expansão binomial;
- Determinar a aproximação de raízes cúbicas de valores como 27 e 64;
- Comparar os resultados do Binômio de Newton com o valor real das raízes;
- Experimentar outras potências fracionárias e analisar sua precisão.

5.6.5 Discussão de Resultados

Duração: (20 - 25 minutos)

Os alunos irão discutir os resultados obtidos, comparando as aproximações encontradas pelo método binomial com os valores calculados diretamente por uma calculadora.

Questões de Reflexão:

- Qual é a precisão da aproximação binomial para diferentes valores?
- O que acontece quando aumentamos o número de termos na expansão?
- Como essa técnica pode ser aplicada em outras áreas da matemática?

5.6.6 Conclusão

Duração: (10 - 15 minutos)

Nesta etapa, será feita uma recapitulação dos principais conceitos abordados na aula, reforçando a conexão entre teoria e prática. O professor deve reforçar a importância do uso do SageMath como uma ferramenta auxiliar no aprendizado matemático.

Os exercícios adicionais para prática individual estão disponíveis na seção de **Exercícios Propostos** ao final do documento.

6 Exercícios propostos

A seguir, apresentaremos uma ampla variedade de exercícios selecionados de acordo com os temas discutidos na dissertação. Esses exercícios visam desafiar e motivar tanto os alunos quanto os professores a aplicarem seu conhecimento na prática, utilizando o SageMath para resolver problemas semelhantes aos discutidos anteriormente. Qualquer dúvida pode ser esclarecida revisitando problemas previamente abordados ou consultando os capítulos pertinentes deste trabalho.

Bons estudos!¹

6.0.1 Exercícios

Exercício 6.1. (Site - Toda Matéria) De quantas maneiras diferentes, uma pessoa pode se vestir tendo 6 camisas e 4 calças?

- a) 10 maneiras
- b) 24 maneiras
- c) 32 maneiras
- d) 40 maneiras

(Resposta)

Exercício 6.2. (Site - Toda Matéria) Quantas senhas com 4 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9?

- a) 1 498 senhas
- b) 2 378 senhas
- c) 3 024 senhas
- d) 4 256 senhas

(Resposta)

Exercício 6.3. (Site - Brasil Escola) Resolva as seguintes equações fatoriais:

a) $\frac{(x+2)!}{x!} = 0$ b) $\frac{x!}{(x-1)!} = 5!$

(Resposta)

Exercício 6.4. (Autoral) Quantos números naturais com 4 algarismos existem, sendo que a exigência é que seja um número par e que não possa terminar com o dígito 6.

(Resposta)

¹ As questões que apresentam um * ao lado incluem a resposta juntamente com a solução.

Exercício 6.5. (Autorial) Na lanchonete Sabor Feliz, você pode escolher entre 4 sabores de sorvete e 3 tipos de coberturas. De acordo com a promoção atual, é possível montar uma combinação com 3 bolas de sorvete de qualquer sabor e uma cobertura à sua escolha. Quantas diferentes combinações de sorvete podem ser montadas, respeitando as exigências da promoção?

(Resposta)

Exercício 6.6. (Enem PPL 2020) A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.

Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro. De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por:

- a) 5
- b) $5 \cdot 3$
- c) $\frac{5!}{(5-3)!}$
- d) $\frac{5!}{(5-3)! \cdot 2!}$
- e) $\frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!}$

(Resposta)

Exercício 6.7. (Autorial) Em uma competição, os times são formados a partir de um grupo de 6 jogadores. Sabendo que os times precisam ter exatamente 3 jogadores cada, responda:

- a) Quantos diferentes times de 3 jogadores podem ser formados?
- b) Utilizando o Triângulo de Pascal, localize o valor correspondente a esse número de combinações e explique como ele é obtido.

(Resposta)

Exercício 6.8. (Autorial) Indique um valor de n que satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{(n-1)!}{5!} = n^2 - 14n + 55.$$

(Resposta)

Exercício 6.9. (Autorial) Indique onde podemos encontrar uma posição possível para o valor 1001 no Triângulo de Pascal.

(Dica: Utilize o conceito trabalhado na seção de localização de valores utilizando o SageMath no Triângulo de Pascal.)

(Resposta)

Exercício 6.10. (UFOP-MG) Para que se tenha um dos termos do desenvolvimento de $(x + a)^{11}$ igual a $1386x^5$, qual deve ser o valor de a ?

(Resposta)

Exercício 6.11. (PUC-MG) No desenvolvimento do binômio $(x + \frac{a}{x})^6$ o coeficiente do termo em x^4 é 12, qual o valor de a ?

a) $a = 1$

b) $a = 2$

c) $a = 3$

d) $a = 4$

e) $a = 5$

(Resposta)

Exercício 6.12. (Autorial) No desenvolvimento do binômio $(x + 3)^{1/4}$ o coeficiente do termo com x^2 possui que valor?

(Resposta)

Exercício 6.13. * (FUNEC - Prefeitura de Esmeraldas - Professor de Educação Básica - Área: Matemática - 2014) Observe a representação das primeiras linhas da disposição numérica conhecida como Triângulo de Pascal.

Linha 0 - 1

Linha 1 - 1 1

Linha 2 - 1 2 1

Linha 3 - 1 3 3 1

Linha 4 - 1 4 6 4 1

Excetuando-se o primeiro e o último números de cada linha, iguais a 1, a partir da segunda linha, pode-se obter os números da próxima adicionando dois determinados números da linha imediatamente anterior. Apenas um número da linha 8 não é igual a nenhum outro número dessa mesma linha. Esse número é:

a) 8

b) 16

c) 28

d) 56

e) 70

(Resposta)

Exercício 6.14. Qual o valor da soma: $S = 15 \cdot 16 + 16 \cdot 17 + 17 \cdot 18 + \cdots + 99 \cdot 100$

(Resposta)

Exercício 6.15. (Site - Toda Matéria [adaptada]) Considere que uma pessoa possui 3 camisas de cores diferentes (vermelha, azul e branca), 2 calças de modelos diferentes (jeans e social) e 2 sapatos de tipos diferentes (tênis e sapato social). De quantos modos diferentes essa pessoa pode se vestir, sabendo que ela não pode usar a camiseta azul com o tênis?

(Resposta)

Exercício 6.16. (Autorial) Uma conferência será realizada com 3 sessões temáticas, cada uma das quais contará com uma dupla de palestrantes, formada por um palestrante estrangeiro e um palestrante nacional. Sabendo que há 8 palestrantes estrangeiros e 4 palestrantes nacionais, de quantas maneiras diferentes podemos organizar as duplas de palestrantes para cada uma das três sessões, considerando que cada palestrante só pode participar de uma única sessão?

(Resposta)

Exercício 6.17. (Site - Art of Problem Solving)

(Texto original em inglês)

Given $(x + y)^{10}$, find:

- The coefficient of the x^4y^6 term.
- The sum of the coefficients.

(Texto traduzido para o português)

Dado $(x + y)^{10}$, encontre:

- O coeficiente do termo x^4y^6 .
- A soma dos coeficientes.

(Sugestão: Tente resolver utilizando o SageMath)

(Resposta)

Exercício 6.18. *[Autorial] Encontre um valor de k que consiga satisfazer a seguinte equação $\frac{(k+3)!}{k!} = \frac{(k-1)!}{(k-6)!}$.

(Sugestão: Utilize o SageMath comparando o lado esquerdo com o direito, definindo esquerdo

e direito como expressões numéricas.)

(Resposta)

Exercício 6.19. (UFPE - UFRPE 2000)(Adaptada) Analise as afirmações seguintes acerca da expansão binomial de $(2x + 19)^9$, indique os itens verdadeiros e os falsos.

- a. Existe exatamente um termo com coeficiente que não é divisível por 19.
- b. A soma dos coeficientes é 21^9 .
- c. O maior coeficiente é $2^6 \cdot 3^2 \cdot 19^7$.
- d. O menor coeficiente é 2^9 .
- e. A soma dos coeficientes das potências de x com expoentes ímpares é $\frac{21^9 - 19^9}{2}$.

(Resposta)

Exercício 6.20 (Autorial). Em uma escola de mágica, o professor organiza uma competição entre os aprendizes. Para a primeira fase, ele deve escolher um grupo de 4 alunos entre os 12 inscritos para resolver um enigma secreto. No entanto, existem esses detalhes:

- Pelo menos 1 aluno do grupo deve usar chapéu.
- Entre os 12 inscritos, apenas 5 têm chapéu.

Pergunta: De quantas maneiras diferentes o professor pode formar um grupo de 4 alunos, garantindo que pelo menos 1 aluno do grupo use chapéu?

(Resposta)

Exercício 6.21 (Autorial). Fábio está organizando uma viagem com seus amigos e decidiu escolher 3 destinos diferentes entre 8 disponíveis: Salvador, Rio de Janeiro, São Paulo, Recife, Fortaleza, Curitiba, Brasília e Manaus. No entanto, Fábio quer seguir as seguintes condições:

- Ele quer visitar pelo menos um destino do Nordeste (as opções são Salvador, Recife e Fortaleza).
- Ele não quer incluir tanto Brasília quanto Manaus, ao mesmo tempo, na escolha, então ele deve escolher um ou nenhum desses dois destinos.

De quantas maneiras diferentes Fábio pode escolher os 3 destinos para a viagem?

(Resposta)

Exercício 6.22. *[2021 Fall AMC 12A Problems/Problem 12](Original)

What is the number of terms with rational coefficients among the 1001 terms in the expansion of $(x\sqrt[3]{2} + y\sqrt{3})^{1000}$?

(Tradução)

Qual é o número de termos com coeficientes racionais entre os 1001 termos na expansão de $(x\sqrt[3]{2} + y\sqrt{3})^{1000}$?

(Resposta)

Exercício 6.23. *[American Mathematics Competitions (AMC) 10](Original)

Find the coefficient of x^5 in the expansion of $(2 + x)^8$.

(Tradução)

Encontre o coeficiente de x^5 na expansão de $(2 + x)^8$.

(Resposta)

Exercício 6.24. *(Autoral) Considere a expressão $(1 + x + x^2)^{10}$. Determine o coeficiente do termo x^{12} no desenvolvimento dessa expressão utilizando o Binômio de Newton.

(Resposta)

Exercício 6.25. (Autoral) Expanda os primeiros quatro termos da série de Taylor de $(1 + x)^{\frac{3}{2}}$, usando o Binômio de Newton com expoente fracionário.

(Resposta)

Exercício 6.26. (Autoral) Considere a expansão de $(5 + 3x)^n$, sabendo que $n \in \mathbb{N}$ e o expoente é positivo. Usando o Binômio de Newton. Sabe-se que o termo que contém x^3 nesta expansão é igual a 590625. Encontre o valor de n .

(Sugestão: Faça como foi feito na parte de Binômio de Newton, desenvolva uma estratégia para comparar a equação e fatore o resultado para encontrar possíveis valores para n)

(Resposta)

Exercício 6.27. (Internet - Prova/concurso/autor não encontrada(o)) Um time de futebol irá disputar 8 partidas durante um campeonato em seu estádio. Estima-se que a arrecadação em reais em cada jogo aumenta ou diminui de acordo com o desenvolvimento do Binômio de Newton $(2x + 1)^7$, segundo potências decrescentes de x , em que o primeiro termo representa a estimativa de arrecadação (em reais) no primeiro jogo; o segundo termo, a estimativa para o segundo jogo, e assim por diante, até o último jogo. Considere que a estimativa para o quinto jogo seja de R\$7.560,00. Assim, calcula-se que no primeiro jogo disputado a arrecadação em reais será de?

(Resposta)

Exercício 6.28 (Originais Teachy 2023). Na expansão binomial do polinômio $(2x - 3y)^7$, cada termo é gerado a partir da combinação dos elementos x e y com expoentes que, somados, resultam em 7. Com base nisso, qual é o coeficiente do termo independente de x

na expansão deste polinômio?

([Resposta](#))

Exercício 6.29. *[Autorial] Com base no conteúdo estudado sobre o Binômio de Newton com expoentes fracionários, desenvolva uma aproximação para $\sqrt{13}$.

(*Sugestão: Utilize $y = 9$.*)

([Resposta](#))

Exercício 6.30. *[Autorial] Com base no conteúdo estudado sobre o Binômio de Newton com expoentes fracionários, desenvolva uma aproximação para $\sqrt[3]{9}$.

(*Sugestão: Utilize $y = 8$.*)

([Resposta](#))

6.0.2 Respostas

6.1. **Resposta:** B

6.2. **Resposta:** C

6.3 a) **Resposta:** Não possui solução. b) **Resposta:** $x = 120$

6.4. **Resposta:** 3600 .

6.5. **Resposta:** 60 .

6.6. **Resposta:** 10 , alternativa **D**.

6.7

a) **Resposta:** $\binom{n}{3}$

b) **Resposta:** É uma resposta conceitual, a linha n , a partir da linha 3, teremos o quarto termo em todas essas linhas do tipo $\binom{n}{3}$. Ex: $\binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \binom{5}{3} \dots$

6.8 **Resposta:** $n = 7$

6.9 **Resposta:** Uma resposta possível é na linha 14 e coluna 4.

6.10 **Resposta:** $a = \sqrt[6]{3}$.

6.11 **Resposta:** $a = 2$, alternativa **B**.

6.12 **Resposta:** O coeficiente é $-\frac{1}{96} \cdot 3^{(1/4)}$

6.13

Resolução. Por uma questão de simetria, é fácil observar que as linhas pares possuem um número diferente ao centro; já as linhas ímpares não possuem. Assim como para cada linha n , existem $n + 1$ valores, a linha 8 possuirá 9 valores em sua distribuição, $\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2} \dots \binom{8}{8}$, o que está localizado ao centro será o $\binom{8}{4}$. Utilizando a fórmula para combinação, temos então que a **Resposta** é $C(8, 4) = \frac{8!}{8!(8-4)!} = \frac{8!}{4!(4)!} = 70$, alternativa E na prova. $\square$

6.14 **Resposta:** 332180

6.15 **Resposta:** 10

6.16 **Resposta:** 1344

6.17 **Resposta:** O coeficiente em $x^4 y^6$ é 210

A soma dos coeficientes é 1024

6.18 **Resposta:** $k=7$

Resolução.

Entrada do Bloco de Códigos 43.

```
1 # Define a função para verificar a equação
2 def verificar_equacao(k):
3     lado_esquerdo = math.factorial(k + 3) / math.factorial(k)
```

```

4     lado_direito = math.factorial(k - 1) / math.factorial(k - 6)
5     return lado_esquerdo == lado_direito
6
7 # Testa valores possíveis de k
8 solucoes = []
9 for k in range(7, 20): # Experimenta valores a partir de 8, já que k -
    7 precisa ser >= 0
10     if verificar_equacao(k):
11         solucoes.append(k)
12
13 solucoes

```

Saída do Bloco de Códigos 43.

1 [7]

□

6.19 **Resposta:** $V - V - F - V - V$

6.20 **Resposta:** 460 possibilidades.

6.21 **Resposta:** 43 escolhas diferentes.

6.22

Resolução. Cada termo na expansão binomial é da forma:

$$\binom{1000}{k} \cdot (x\sqrt{2})^k \cdot (y\sqrt{3})^{1000-k}$$

Que será igual a:

$$\binom{1000}{k} \cdot 2^{\frac{k}{3}} \cdot 3^{\frac{1000-k}{2}} \cdot x^k \cdot y^{1000-k}$$

Temos $K \in \{0, 1, 2, \dots, 1000\}$

Este problema é equivalente a contar os valores de k tais que tanto $\frac{k}{3}$ quanto $\frac{1000-k}{2}$ sejam inteiros. Note que k deve ser múltiplo de 3 e de 2, logo, k precisa ser múltiplo de 6. Existem 167 valores de k que satisfazem essa condição. Assim, é uma forma de resolução mais objetiva e utilizando menos cálculos, mas poderia ter sido feita pensando em $a \equiv b \pmod{n}$.

Resposta: 167

□

6.23

Resolução. A fórmula do termo geral na expansão de $(a + b)^n$ é dada por:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Como visto no [Termo Geral 4.4](#).

Vamos substituir o $k = 5$, para obter o sexto termo:

$$T_6 = \binom{8}{5} \cdot 2^3 \cdot x^5$$

Ficamos então com:

$$56 \cdot 2^3 \cdot x^5$$

Finalizando em:

$$448 \cdot x^5$$

Resposta:

□

6.24

Resolução:

Entrada do Bloco de Códigos 44.

```

1 # Define a variável
2 x = var('x')
3
4 # Define a expressão
5 expr = (1 + x + x^2)^10
6
7 # Expande a expressão
8 expanded_expr = expand(expr)
9
10 # Coleta o coeficiente do termo x^12
11 coefficient = expanded_expr.coefficient(x, 12)
12
13 # Mostra o coeficiente de x^12
14 coefficient

```

Saída do Bloco de Códigos 44.

```

1 6765

```

□

Resposta:

6.25 **Resposta:**

6.26 **Resposta:**

6.27 **Resposta:** 6^7 ou 279936

6.28 **Resposta:** Letra D na prova, no caso -2187 .²

6.29 **Resposta:** A aproximação para $\sqrt{13}$ é aproximadamente $3,67$ Vamos observar essa resolução dentro do SageMath:

Entrada do Bloco de Códigos 45.

```

1 # Definir a variável x
2 x = var('x')
3
4 # Definir o valor de y e o valor alvo para a aproximação da raiz
  quadrada
5 y = 9
6 target_value = 13
7
8 # Expressão para a raiz quadrada aproximada usando o Binômio de Newton
9 approximation = (y^(1/2)) * (1 + (target_value - y)/y)^(1/2)
10
11 # Calcular a aproximação
12 approximation.n()
```

Saída do Bloco de Códigos 45.

```

1 3.60555127546399
```

6.30 **Resposta:** Portanto, a aproximação para $\sqrt[3]{9}$ é aproximadamente $2,08$

Vamos observar essa resolução dentro do SageMath:

Entrada do Bloco de Códigos 46.

```

1 # Definir a variável x
2 x = var('x')
3
4 # Definir o valor de y e x para a aproximação de raiz cúbica
5 y = 8
6 target_value = 9
7
8 # Expressão para a raiz cúbica aproximada usando o Binômio de Newton
9 approximation = (y^(1/3)) * (1 + (target_value - y)/y)^(1/3)
```

² Tenha bastante cuidado com esta questão: as alternativas são formuladas para confundir o aluno que pode errar ao interpretar o que é solicitado. Note que a pergunta pede apenas o coeficiente, e não o termo completo.

```
10  
11 # Calcular a aproximação  
12 approximation.n()
```

Saída do Bloco de Códigos 46.

```
1 2.08008382305190
```

Referências

- Bastos e Victer 2013 BASTOS, A. C.; VICTER, E. das F. O ensino e a aprendizagem da análise combinatória no ensino médio. *Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática: questões atuais*, v. 1, n. 1, 2013.
- Conrado CONRADO, L. O binômio de newton é de newton?
- Franco, G. 2024 Franco, G. *Site Brasil Escola*. 2024. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/fisica/um-fisico-chamado-isaac-newton.htm#:~:text=Isaac%20Newton%20nasceu%20na%20vila,4%20de%20janeiro%20de%201643.>>>. Acesso em: 27 de fevereiro 2024.
- Hazzan e Hazzan 1993 HAZZAN, S.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar, 5: combinatória, probabilidade*. [S.l.]: Atual, 1993.
- Iezzi et al. 2013 IEZZI, G. et al. Fundamentos de matemática elementar: Combinatória e probabilidade. *Ed*, v. 3, p. 77–81, 2013.
- Júnior e Chaves 2008 JÚNIOR, G. B. da S.; CHAVES, A. C. L. Biologia e matemática: diálogos possíveis no ensino médio. 2008.
- Leachenski 2017 LEACHENSKI, A. A. Binômio de newton com expoente negativo e fracionário. 2017.
- Leonhard Euler 1793 Leonhard Euler. *Nova acta Academiae scientiarum imperialis petropolitanae*. 1793. Disponível em: <<https://archive.org/details/novaactaacademia05impe/page/20/mode/2up>>, Acesso em: 17 de agosto 2024.
- Lima 2006 LIMA, E. L. Análise real-volume 1-funções de uma variável. *IMPA, Rio de Janeiro*, 2006.
- Merzbach e Boyer 2011 MERZBACH, U. C.; BOYER, C. B. A history of mathematics. (*No Title*), 2011.
- MORGADO et al. 2006 MORGADO, A. C. et al. Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios. *Coleção do Professor de Matemática*, ed, v. 9, 2006.
- Newton 1990 NEWTON, I. *Mathematical principles of natural philosophy*. [S.l.]: Encyclopaedia Britannica, 1990.
- Ricarte 2022 RICARTE, J. P. Algoritmos para problemas de otimização combinatória em redes de comunicação modelados com grafos. 2022.
- Ross et al. 1976 ROSS, S. M. et al. *A first course in probability*. [S.l.]: Macmillan New York, 1976. v. 2.
- Silva, Santos e Machado 2019 SILVA, L.; SANTOS, M.; MACHADO, J. Elementos de computação matemática com sagemath. *Rio de Janeiro: SBM*, 2019.
- Silva 2016 SILVA, P. H. d. Usos do binômio de newton em diferentes contextos. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2016.

Silva et al. 2013 SILVA, S. D. d. et al. Estudo do binômio de newton. Universidade Federal da Paraíba, 2013.

Stewart 2010 STEWART, J. *cálculo*. [S.l.]: Cengage Learning São Paulo, 2010. v. 2.

Swamy 1998 SWAMY, M. Brahmagupta's theorems and recurrence relations. *FIBONACCI QUARTERLY*, Citeseer, v. 36, p. 125–128, 1998.

Yong 1994 YONG, L. L. Jiu zhang suanshu (nine chapters on the mathematical art): An overview. *Archive for history of exact sciences*, JSTOR, p. 1–51, 1994.